République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A.MIRA-BEJAIA

Faculté des Sciences Exactes
Département de PHYSIQUE

Mémoire de Master
Spécialité : Physique théorique

Thème

Equation de Tolman-Oppenheimer-Volkoff et Application

Présenté par : BENCHEIKH Dyhia

Soutenu le : 06/10/2021

Devant le Jury composé de :

Président	GHARBI Abdelhakim	Professeur
Encadrant	BELABBAS Abdelmoumene	MCA
Examinateur	BELHADI Zahir	MCA

Année universitaire 2020/2021

Remerciements

Tout d'abord je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donné la force et le courage d'achever ce travail.
Je tiens à remercier particulièrement mon encadrant Monsieur BELABBAS Abdelmoumene pour son aide, sa patience, ses encouragements ses conseils et son soutien pour mener à bien ce projet de fin d'étude.
Je remercie également les membres du jury Monsieur GHARBI Abdelhakim et Monsieur BELHADI Zahir d'avoir accepté d'évaluer mon travail.
J'adresse également mes sincères remerciements à Monsieur BEKLI Mohamed Reda pour son aide.
Je remercie particulièrement et chaleureusement ma famille qui a toujours été d'un grand soutien et une source d'inspiration et d'encouragements.

Table des matières

Introduction générale

La théorie de la relativité générale est un des grands piliers de la physique moderne élaborée par Einstein à travers laquelle il apporte une nouvelle interprétation de l'interaction gravitationnelle.

En effet, la gravitation est l'une des quatre interactions fondamentales de l'univers expliquée en 1686 par Newton, en la considérant comme une force d'attraction instantanée entre deux corps massiques. Cette interprétation donne naissance à la théorie de la gravitation, qui en plus de cette interprétation se base sur trois principes fondamentaux grâce auxquels Newton à réussi à unifier entre la mécanique des corps célestes et la mécanique terrestre [1], applicable dans des référentiels inertiels et dans le cadre de la géométrie euclidienne où la notion de l'espace et du temps sont absolus et parfaitement découplés.

En 1905, Einstein énonce sa théorie de la relativité restreinte, où il remet en cause les bases de la théorie newtonienne, à savoir les notions de simultanéité et d'espace absolu, et renie l'existence d'un référentiel privilégié où l'espace et le temps ne peuvent être appréhendés de manière indépendante [2]. le principe de relativité à été énoncé pour une catégorie restreinte de référentiels qui sont inertiels et en translation uniforme les uns par rapport aux autres. Àfin de généraliser la théorie de relativité, Einsteins s'appuie sur son principe d'équivalence et énonce en 1915 sa nouvelle théorie de la relativité générale, où il apporte une nouvelle interprétation de la gravitation en la considérant comme une courbure de l'espace-temps causée par la présence de matière. Il la décrit dans sa fameuse équation des champs, une équation tensorielle reliant la distribution de matière à la géométrie de l'espace-temps, représentés respectivement par la tenseur énergie-impulsion et le tenseur d'Einstein.

Quelques mois après qu'Einstein a révélé son équation des champs, l'astrophysicien allemand Karl Schwarzschild la résout dans le cas extérieur d'une source statique et isotrope. Cette solution a permis d'expliquer et de calculer plusieurs phénomènes tels que l'avancée du périhélie de mercure, la déviation de la lumière par la masse du soleil et le décalage de la fréquence gravitationnelle... [3].

Les étoiles compactes sont étudiées à l'aide de l'équation de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, retrouvée et dérivée en résolvant l'équation d'Einstein et qui permet de calculer la pression en fonction du rayon d'un objet stellaire statique à symétrie sphérique en équilibre gravitationnel.

Ce manuscrit sera présenté comme suit :
Dans le premier chapitre, nous allons présenter un bref rappel sur la loi universelle de la gravitation et sur les principe qui ont mené à la théorie relativiste en évoquant les principe de la relativité restreinte, le principe d'équivalence et le principe de relativité générale ainsi que le cadre mathématique qui lui est approprié et nécessaire pour retrouver l'équation des champs d'Einstein et sa première solution apportée par Karl Schwarzschild dans le cas extérieure d'une source statique et isotrope.
Dans le deuxième chapitre, nous allons nous intéresser à résoudre les équations d'Einstein cette fois à l'intérieure d'une étoile statique à symétrie sphérique et ainsi retrouver l'équation de TOV.
Ce qui va nous permettre finalement dans le troisième chapitre de procéder à une application de cette équation toujours dans le cas d'étoile statique et isotrope mais aussi ayant une densité de masse constante.

Chapitre 1

Champ gravitationnel statique et isotrope

1.1 Introduction

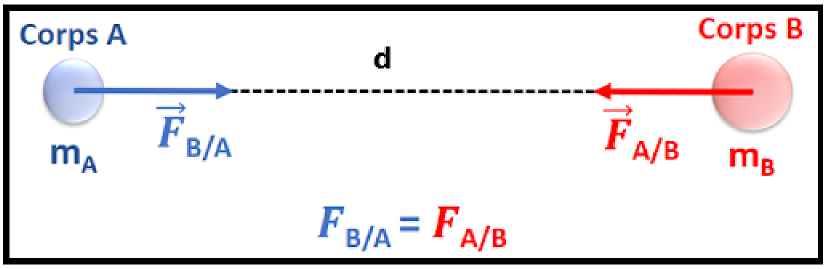
La mécanique newtonienne s'appuie, en plus du principe fondamental de la dynamique ainsi que du principe d'action-réaction, sur une loi universelle de la gravitation. Le cadre approprié pour la description de cette théorie est la géométrie euclidienne où l'espace et le temps sont complètement découplés l'un de l'autre, aussi ces lois sont invariantes sous la transformation de Galilée.
Nous allons introduire le principe de relativité, initialement énoncé pour des réferentiels galiléens en translation uniforme les uns par rapport aux autres, de sorte que l'espace et le temps ne sont plus absolus et la géométrie de Minkowski prends la place de la géométrie euclidienne, conséquence de la covariance des lois sous les transformations de Lorentz. De plus, le principe d'équivalence ainsi que le principe de la relativité générale seront énoncés.
Après le rappel théorique, nous allons aborder le cadre mathématique de la relativité générale, qui est l'analyse tensorielle en définissant les tenseurs et les éléments nécessaires pour développer et comprendre l'équation des champs d'Einstein, et une de ses célèbres solutions qui est la solution de Schwarzschild
.

1.2 La gravitation selon Newton

La force gravitationnelle est l'une des quatre forces fondamentales qui régissent l'univers ; elle correspond à l'interaction attractive entre deux corps massiques.
En 1687, Newton formule la loi relative à la gravitation universelle, qui s'ex-

prime comme suit : un corps de masse m_A exerce sur un autre corps de masse m_B une force proportionnelle au produit des deux masses et inversement proportionnelle au carré de la distance "d" qui les sépare. Cette force est dirigée selon le vecteur $\overrightarrow{r}$ reliant les 2 masses. Cette loi permet de décrire la chute des corps et le mouvement des corps célestes.[4]
Elle s'écrit comme suit :

$$F_{m_A}/_{m_B} = -G\frac{m_A m_B}{d^2}\overrightarrow{r} \tag{1.1}$$



Dans ce cadre, Newton retrouve les lois de Kepler qui sont :
- loi des orbites : les orbites des planètes forment des ellipses où le soleil occupe l'un des foyer.
- loi des aires : Le rayon soleil planète balai des aires égales à des intervalles de temps égaux
- loi des périodes : Le carré de la période de révolution T d'une planète sur son orbite est proportionnel au cube du demi-grand axe à l'ellipse tel que : $\frac{T^2}{a^3} = constante$

1.3 La gravitation newtonienne et le principe de relativité

La loi de gravitation de Newton repose implicitement sur le fait que l'interaction à distance est instantanée, ce qui contredit les principes de la relativité énoncé par Einstein en 1905 qui stipule que : les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels, et que la vitesse de la lumière "c" a la même valeur dans ces mêmes référentiels et qui est aussi la vitesse maximale de propagation de l'information.

Plusieurs tentatives ont été mises en avant afin de rendre conforme la gravitation de newton avec la relativité restreinte sans grand succés, mais Einstein s'est rendu compte qu'il fallait plutôt étendre le principe de relativité qui stipule que les lois de la physique doivent être les mêmes dans tous les référentiels, même ceux accélérés.

1.4 Principe d'équivalence

Le principe d'équivalence constitue l'argument physique sur lequel Einstein s'appuie pour généraliser le principe de relativité (la physique est la même dans tous les referentiéls) à tous les referentiéls même accélérés. Il stipule que la masse gravitationnelle m_g qu'on retrouve dans la loi universelle de la gravitation est égale à la masse inertielle m_i qu'on retrouve dans le principe fondamentale de la dynamique de Newton où [5]

$$\overrightarrow{f} = m\overrightarrow{a} \tag{1.2}$$

où $\overrightarrow{a}$ est l'accélération de la particule .
Le principe d'équivalence se base sur le fait que les corps en chute libre avec les mêmes conditions initiales ont le même mouvement, indépendamment de leurs masses, et d'après la loi fondamentale de la dynamique [4]

$$m_i\overrightarrow{a} = m_g\overrightarrow{g} \tag{1.3}$$

où $\overrightarrow{g}$ est le champ gravitationnel, l'égalité de ces deux masses implique que

$$\frac{m_i}{m_g} = \frac{g}{a} = 1 \tag{1.4}$$

Cette dernière égalité représente le principe d'équivalence faible selon lequel tous les corps tombent avec la même accélération indépendamment de leurs masses.
Grâce à son expérience de pensée "l'ascenseur d'Einstein", Einstein stipula que le principe d'équivalence faible est valide, et ajoute que, localement, les effets d'un champ gravitationnel sur une expérience n'utilisant pas la gravitation sont identiques aux effets d'une accélération du référentiel de l'observateur.
En d'autres termes, un référentiel uniformément accéléré est localement équivalent à un référentiel inertiel dans un champ de gravitation constant.

Le principe d'équivalence d'Einstein, a ouvert la voie à une nouvelle théorie de la gravitation, la relativité générale, dans laquelle la gravité n'est plus une force, mais plutôt une déformation de la géométrie de l'espace-temps, appelée courbure de l'espace-temps, causée par une distribution de matière. Ainsi les corps ne parcourent plus des lignes droites pour aller d'un point A à un point B, mais plutôt des trajectoires en géodésique afin de minimiser la distance parcourue [4].

1.5 Cadre mathématique de la relativité générale

Mathématiquement, pour s'assurer que le principe d'équivalence s'applique à tous les référentiels, on a recours à la covariance des lois physique lors du passage d'un référentiel à un autre. Pour garantir la covariance des lois vis-à-vis des transformations de coordonnées arbitraires, on les écrit les lois sous forme tensorielle.

1.5.1 Tenseurs

Le cadre approprié pour décrire la gravité en relativité est la géométrie Riemannienne, ou l'espace-temps est représenté par une variété a 4 dimensions, où un point M est caractérisé par ses coordonnées $M(x^0, x^1, x^2, x^3)$. Sous un changement de coordonnées

$$x^\mu \to x'^\mu \tag{1.5}$$

la différentielle dx^μ se transforme de la manière suivante [6] :

$$dx^\mu \to dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \tag{1.6}$$

Par définition un vecteur covariant A_μ et un vecteur contravariant B^ν qui sont des objets dont les composantes se transforment respectivement sous un changement de coordonnées $x^\mu \to x'^\mu$ de la manière suivante [6] :

$$A'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu \tag{1.7}$$

et

$$B'^\nu = \frac{\partial x'^\nu}{dx^\mu} B^\mu \tag{1.8}$$

Ces notions de vecteur covariant et vecteur contravariant sont généralisés par la notion de tenseur .

Un tenseur T est un objet mathématique avec p indices contravariants et q indices covariants se transformant lors d'un changement de coordonnées tel que :

$$T'^{\mu\ldots\nu}_{\rho\ldots\sigma} = \frac{\partial x'\mu}{\partial x^\lambda} \ldots\ldots \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\rho} \ldots \frac{\partial x}{\partial x'^\sigma} T^{\lambda\ldots\sigma}_{\gamma\ldots\zeta} \tag{1.9}$$

1.5.2 Tenseur métrique

En relativité restreinte le carré de l'intervalle séparant deux événements infiniment voisin, (x, y, z, t) et $(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$ donné par

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \tag{1.10}$$

peut se mettre sous la forme $ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ où $\eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$ représente la métrique plate de Minkowski.
Lors du passage des coordonnées cartésiennes (x, y, z) vers les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ), l'expression (1.10) prend la forme

$$ds^2 = c^2dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin\theta d\phi) \tag{1.11}$$

On considère un système orthonormé $x^{(0)\mu}$ et un système curviligne x^μ. Soient $A^{(0)\mu}$ et $B^{(0)\mu}$ les composantes contravariantes dans $x^{(0)\mu}$ des deux vecteurs respectifs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ alors que A^μ et B^μ leurs composantes contravariantes dans x^μ. On sait que

$$A^{(0)\rho} = \frac{\partial x^{(0)\rho}}{\partial x^\mu}A^\mu \tag{1.12}$$

$$B^{(0)\rho} = \frac{\partial x^{(0)\rho}}{\partial x^\mu}B^\mu \tag{1.13}$$

Comme $x^{(0)\mu}$ est un système orthonormé, alors la relation d'orthonormalisation s'écrit

$$\overrightarrow{e}^{(0)}_\rho . \overrightarrow{e}^{(0)}_\sigma = \eta_{\rho\sigma} \tag{1.14}$$

Le produit scalaire des deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ est

$$\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B} = A^{(0)\rho}B^{(0)\sigma}\overrightarrow{e}^{(0)}_\rho . \overrightarrow{e}^{(0)}_\sigma \tag{1.15}$$

se met sous la forme

$$\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B} = g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu \tag{1.16}$$

où

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma}\frac{\partial x^{(0)\rho}}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^{(0)\sigma}}{\partial x^\nu} \tag{1.17}$$

D'autre part, dans le système de coordonnées curviligne nous avons aussi

$$\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B} = A^\mu B^\nu \overrightarrow{e}_\mu . \overrightarrow{e}_\nu \tag{1.18}$$

alors nous déduisons finalement que

$$g_{\mu\nu} = \overrightarrow{e}_\mu . \overrightarrow{e}_\nu \tag{1.19}$$

Les $g_{\mu\nu}$ forment les composantes d'un tenseur d'ordre 2 appelé tenseur métrique, se transformant comme suit

$$g_{\mu\nu} \to g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma} \tag{1.20}$$

lors d'un changement de referentiél (transformation de coordonnées arbitraires) x^i vers x'^i

1.5.3 Symboles de christoffel et dérivée covariante

Les symboles de christoffel sont définis en terme du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ par

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma}\left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\sigma}\right) \tag{1.21}$$

En utilisant la loi de transformation du tenseur métrique (1.5.2) et du tenseur métrique inverse

$$g^{\mu\nu} \to g'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} g^{\rho\sigma} \tag{1.22}$$

on peut montrer que $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ se transforme sous un changement de coordonnées $x^\mu \to x'^\mu$ comme

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} \to \Gamma'^\mu_{\nu\rho} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\rho}\Gamma^\sigma_{\lambda_\gamma} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma}\frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\nu \partial x'^\rho} \tag{1.23}$$

Cette loi montre clairement que les symboles de Christoffel ne sont pas des tenseurs à cause de la présence du deuxième terme.

Soit un tenseur défini en tout point d'un espace à N dimensions muni d'une base e_μ
. Si l'espace est plat, la direction des vecteurs de base est toujours la même et l'opération de dérivation n'affecte pas la direction de ces vecteurs. Par contre, si l'espace est courbe, la direction des vecteurs change quand on passe d'un point x^μ à un point infiniment voisin $x^\mu + dx^\mu$, ce type de dérivation est appelé dérivation covariante.
Donc, la dérivée d'un tenseur affecte la direction des vecteurs de base et fait que la dérivée d'un vecteur n'est plus un vecteur.
La dérivée covariante d'un vecteur contravariant A^μ est donnée par [6]

$$DA^\mu = (D_\nu A^\mu) dx^\nu \tag{1.24}$$

$$DA^\mu = (\partial_\nu A^\mu + \Gamma^\mu_{\nu_\rho} A^\rho) dx^\nu \tag{1.25}$$

ainsi la dérivée covariante d'un vecteur contravariant est

$$DA^{\mu} = (A^{\mu}_{\nu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} A^{\rho}) dx^{\nu} \tag{1.26}$$

Par contre, la dérivée covariante d'un vecteur covariant A_{μ}est donnée par [6] :

$$DA_{\mu} = (D_{\nu} A_{\mu}) dx^{\nu} \tag{1.27}$$

$$DA_{\mu} = (\partial_{\nu} A_{\nu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\mu} A_{\rho}) dx^{\nu} \tag{1.28}$$

En relativité générale on utilise la dérivée covariante au lieu de la dérivée ordinaire pour garantir la covariance des lois physique.

1.5.4 Tensuer de courbure, tenseur de Ricci et courbure scalaire

Le tenseur de courbure, appelé également tenseur de Riemann-Christoffel, donne toute les informations sur la courbure d'une variété de Riemann et il est défini par [6]

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\rho} = \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} \Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\rho} \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} \tag{1.29}$$

Le tenseur de Ricci, noté $R_{\beta\rho}$, est construit à partir de la contraction des indices du tenseur de courbure [6]

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\nu\lambda} = g^{\lambda\sigma} R_{\lambda\mu\sigma\nu} \tag{1.30}$$

quand $R^{\sigma}_{\mu\nu\rho} = 0$ l'espace-temps est plat.

Le scalaire de courbure est construit à partir de la contraction du tenseur de Ricci telle que [6]

$$R = R^{\lambda}_{\lambda} = g^{\lambda\mu} R_{\mu\lambda} \tag{1.31}$$

1.5.5 Tenseur énergie-impulsion

La distribution de matière et d'énergie dans l'espace-temps est décrite, par le tenseur énergie impulsion, qui est un tenseur de rang 2 et est symétrique [7] .
Sa conservation s'exprime au niveau local, par la loi $D_{\nu} T^{\mu\nu} = 0$. En présence de la gravité on a

$$D_{\nu} T^{\mu\nu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\mu}_{\rho\nu} T^{\rho\nu} + \Gamma^{\nu}_{\rho\nu} T^{\mu\rho} = 0 \tag{1.32}$$

Dans le cas d'un fluide parfait, défini par rapport un système de coordonnées localement inertiel qui se déplace avec ce fluide de sorte qu'il apparaisse le même dans toutes les directions, le tenseur énergie-impulsion s'exprime sous la forme [8]

$$T^{\mu\nu} = (\rho + \frac{p}{c^2})u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu} \tag{1.33}$$

om ρ est la densité et p la pression du fluide.

1.6 Les équations de champs d'Einstein

Les équations d'Einstein décrivent comment une distribution de masse et d'énergie modifient la structure de l'espace-temps. Cette modification généralement interprétée comme la courbure de l'espace-temps, est dûe au champ gravitationnel de la source.
Partant de l'équation de champ de la gravitation de Newton, on aboutit à l'équation de Poisson

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho \tag{1.34}$$

où
- ϕ est le potontien de Newton
- G est la constante de Newton
- ρ est la densité de masse

Dans le cas d'un champ gravitationnel faible et statique, nous avons

$$g_{00} = (1 + \frac{2\phi}{c^2}) \tag{1.35}$$

où g_{00} est la composante 00 du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$
Nous avons aussi la description de la matière donnée par le tenseur énergie impulsion, qui dans le cas d'un fluide parfait, en absence de pression prends la forme suivante

$$T_{00} = \rho c^2 \tag{1.36}$$

où T_{00} est la composante prépondérante du tenseur d'énergie-implusion $T_{\mu\nu}$ dans le cas newtonien. Alors l'équation du champ (1.34) peut être réécrite comme suit :

$$\Delta g_{00} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{00} \tag{1.37}$$

Cette équation est valable pour un champ faible et statique, pour la généraliser nous devons la mettre sous forme tensorielle tel que [8]

$$G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{1.38}$$

On posant $\chi = \frac{8\pi G}{C^4}$, on aura

$$G_{\mu\nu} = -\chi T_{\mu\nu} \tag{1.39}$$

où $G_{\mu\nu}$ est un tenseur de rang 2 et doit être symétrique comme l'est $T_{\mu\nu}$. Aussi, comme $G_{\mu\nu}$ et lié la courbure de l'espace-temps, il doit être construit à partir du tenseur de courbure et du tenseur métrique. La forme de $G_{\mu\nu}$ qui satisfait ces deux condition est [8]

$$G_{\mu\nu} = \alpha R_{\mu\nu} + \beta g_{\mu\nu} R \tag{1.40}$$

où α et β sont des constantes, et en imposant la condition suivante :

$$D^\mu G_{\mu\nu} = 0 \tag{1.41}$$

qui découle de (1.39). Donc en vertue de la conservation du tenseur énergie-impulsion on aura

$$D^\mu G_{\mu\nu} = \alpha D^\mu R_{\mu\nu} + \beta(D^\mu g_{\mu\nu})R + \beta g_{\mu\nu} D^\mu R \tag{1.42}$$

mais d'après le théoreme de Ricci $D^\mu g_{\mu\nu} = 0$, donc la relation (1.40) se reduit à :

$$D^\mu G_{\mu\nu} = \alpha D^\mu R_{\mu\nu} + \beta g_{\mu\nu} D^\mu R \tag{1.43}$$

On a aussi [8]

$$D^\mu (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) = 0 \tag{1.44}$$

Dans le cas d'une géométrie courbe la quantité R est non nulle, $\beta = \frac{\alpha}{2}$ et donc l'équation de champ prend la forme $\beta = \frac{\alpha}{2}$

$$G_{\mu\nu} = \alpha(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) = \chi T_{\mu\nu} \tag{1.45}$$

Maintenant il reste a déterminer la constante α qu'on peut obtenir en comparant la limite de champ faible de ces équations avec l'équation de Poisson dans la gravité newtonienne, et a fin de rester cohérant avec la théorie de newton on impose $\alpha = -1$. Finalement , les équations de champs d'einstein s'écrivent :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \chi T_{\mu\nu} \tag{1.46}$$

On peut obtenir une forme alternative des Équations du champ d'Einstein par contraction des indices ainsi

$$R^\mu_\mu - \frac{1}{2} g^\mu_\mu R = \chi T^\mu_\mu \tag{1.47}$$

ce qui implique que :

$$R = \chi T_{\mu\nu} \tag{1.48}$$

En insérant l'éxpression de R dans les équations de champ d'Einstein, on obtient :

$$R_{\mu\nu} = \chi(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T) \tag{1.49}$$

Dans le vide, le tenseur énergie impulsion est nul, donc les équations d'Einstein se réduisent à

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{1.50}$$

A cause du théoreme de Ricci on peut rajouter une constante Λ multipliée par $g_{\mu\nu}$ dans (1.46) et avoir un systeme d'équation de champ cohérant tel que

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu} \tag{1.51}$$

où Λ est une constante cosmologique ajoutée par Einstein dans le but de rendre sa théorie compatible avec l'idée qu'il avait alors d'un Univers statique.

1.7 Solution de Schwarzschild

La solution de Karl Schwarzschild est la première solution analytique des équations d'Einstein, obtenue en 1916, après la mise au point de la relativité générale par Albert Einstein en novembre 1915. La solution de Schwarzschild est la métrique extérieure, qui correspond au champ de gravitation créé par une distribution de matière statique et à symétrie sphérique. Cette solution est d'une grande importance en cosmologie. Et elle fournit les trois preuves principales de la Relativité Générale : le décalage des horloges, la déviation de la lumière par le Soleil et l'avance du périhélie de Mercure. A partir de l'expression générale de l'élément de longueur

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{1.52}$$

on cherche à trouver un ensembles de coordonnées x^μ où $g_{\mu\nu}$ ne dépendent pas de la coordonnée temporelle, et ds^2 dépend uniquement des invariants rotationnels des coordonnées spatiales et de leurs différentielles, c'est-à-dire que la métrique est isotrope. Nous commençons par construire une métrique plus générale. Ce n'est qu'après sa dérivation que nous imposerons la contrainte supplémentaire que la métrique est statique. Les invariants de rotation des coordonnées spatiales et leurs différentiels sont :
$\overrightarrow{x}.\overrightarrow{x} = r^2$, $d\overrightarrow{x}.d\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{x}.d\overrightarrow{x}$, où $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{r}$. En posant la coordonnée x^0 comme

coordonnée temporelle nous retrouvons la forme générale d'une métrique isotrope

$$ds^2 = A(t,r)dt^2 - B(t,r)dt\overrightarrow{x}d\overrightarrow{x} - C(t,r)\overrightarrow{x}^2 d\overrightarrow{x}^2 - D(t,r)d\overrightarrow{x}^2 \quad (1.53)$$

où A,B,C,D sont des fonctions arbitraires de r et de t.
En transformant aux coordonnées sphériques, on obtient
$x^1 = r\sin\theta\cos\phi$, $x^2 = r\sin\theta\sin\phi$, $x^3 = r\cos\theta$
nous avons dans ce cas :
$\overrightarrow{x}\overrightarrow{x} = r^2$, $\overrightarrow{x}d\overrightarrow{x} = rdr$, $d\overrightarrow{x}d\overrightarrow{x} = dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2$
Et la métrique (1.53) prend la forme suivante :

$$ds^2 = A(t,r)dt^2 - B(t,r)rdtdr - C(t,r)r^2dr^2 - D(t,r)(dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2) \quad (1.54)$$

ce qui nous donne

$$ds^2 = A(t,r)dt^2 - B(t,r)rdtdr - C(t,r)r^2dr^2 - D(t,r)dr^2 - D(t,r)(r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2) \quad (1.55)$$

En rassemblant les termes et en absorbant les facteurs de r dans nos fonctions, la métrique s'écrit alors :

$$ds^2 = \tilde{A}(t,r)dt^2 - \tilde{B}(t,r)dtdr - \tilde{C}(t,r)dr^2 - \tilde{D}(t,r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1.56)$$

où $\tilde{A}(t,r) = A(t,r)$, $\tilde{B}(t,r) = rB(t,r)$, $\tilde{C}(t,r) = r^2C(t,r) + D(t,r)$et
$\tilde{D}(t,r) = r^2D(t,r)$
En faisant le choix d'introduire une nouvelle coordonnée radiale $\bar{r}$, et en rassemblaant les termes dans de nouvelles fonctions arbitraires de t et $\bar{r}$ pour redéfinir $\tilde{A}$ $\tilde{B}$ $\tilde{C}$ et la métrique s'écrit ainsi :

$$ds^2 = \tilde{A}(t,\bar{r})dt^2 - \tilde{B}(t,\bar{r})dtd\bar{r} - \tilde{C}(t,\bar{r})d\bar{r}^2 - \bar{r}^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1.57)$$

Lors du passage de (1.56) à (1.57), nous avons

$$\tilde{C}(t,r)dr^2 \to \tilde{C}(t,\bar{r})d\bar{r}^2$$

En effet, à partir de la définition

$$\bar{r}^2 = \tilde{D}(t,r)$$

la différentielle

$$d(\bar{r}^2) = d(\tilde{D}(t,r))$$

permet d'écrire

$$2\bar{r}d\bar{r} = \frac{d\tilde{D}}{dr}dr$$

Nous aurons alors

$$(dr)^2 = \frac{(2\bar{r}d\bar{r})^2}{(\frac{d\tilde{D}}{dr})^2} = \left[\frac{4r^2}{(\frac{d\tilde{D}}{dr})^2}\right] d\bar{r}^2$$

Dans ce cas

$$\tilde{C}(t,r)dr^2 = \underbrace{\left[\tilde{C}(t,r)\frac{4r^2}{(\frac{d\tilde{D}}{dr})^2}\right]}_{\overset{*}{C}(t,\bar{r})} d\bar{r}^2$$

pour gagner du temps, on note $C(\tilde{t}, \bar{r})$ au lieu de $\overset{*}{C}(t,\bar{r})$ (dans les deux cas il s'agit d'une fonction quelconque des variables t et $\bar{r}$
Introduisons maintenant une nouvelle coordonnée temporelle $\bar{t}$ telle que [8]

$$d\bar{t} = \Phi(t,\bar{r})\left[\tilde{A}(t,\bar{r})dt - \frac{1}{2}\tilde{B}(t,\bar{r})d\bar{r}\right] \tag{1.58}$$

où $\Phi(t,\bar{r})$ est un facteur d'intégration. En élevant au carré (1.58) on obtient :

$$d\bar{t}^2 = \Phi^2\left(\tilde{A}^2dt^2 - \tilde{A}\tilde{B}dtd\bar{r} + \frac{1}{4}\tilde{B}^2d\bar{r}^2\right) \tag{1.59}$$

ce qui nous donne

$$\tilde{A}^2dt^2 - \tilde{A}\tilde{B}dtd\bar{r} = \frac{d\bar{t}^2}{\Phi^2} - \frac{\tilde{B}^2}{4}d\bar{r}^2 \tag{1.60}$$

Devisons par $\tilde{A}$

$$\tilde{A}dt^2 - \tilde{B}dtd\bar{r} = \frac{d\bar{t}^2}{\tilde{A}\Phi^2} - \frac{\tilde{B}^2}{4\tilde{A}}d\bar{r}^2 \tag{1.61}$$

Maintenant définissons les nouvelles fonctions $\bar{A} = \frac{1}{\tilde{A}\Phi^2}$ et $\bar{B} = C + \frac{\tilde{B}^2}{4\tilde{A}}$. La métrique (1.57) est maintenant diagonale et prend la forme

$$ds^2 = \bar{A}(\bar{t},\bar{r})d\bar{t}^2 - \bar{B}(\bar{t},\bar{r})d\bar{r}^2 - \bar{r}^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{1.62}$$

Il n'est pas nécessaire de garder les barres sur les variables, ainsi nous pouvons écrire la métrique comme suit

$$ds^2 = A(t,r)dt^2 - B(t,r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{1.63}$$

Pour obtenir une métrique statique et isotrope nous exigeons que les fonctions métrique $g_{\mu\nu}$ soient indépendantes du temps, ce qui implique que A et B

doivent être des fonctions de "r" uniquement.
Ainsi, nous avons

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{1.64}$$

La relation (1.64) est la forme standard de la métrique générale d'un champ gravitationnel statique et isotrope. Le tenseur métrique associé est donné par

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

et le tenseur métrique inverse est

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{A(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{B(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{pmatrix}$$

Le déterminant du tenseur métrique vaut

$$g = -r^4\theta A(r)B(r)\sin^2 \tag{1.65}$$

Les fonctions A et B dans la métrique statique et isotrope (1.64) sont à déterminer en résolvant les équations de champ d'Einstein, qui à l'extérieur d'une distribution de masse s'écrivent $R_{\mu\nu} = 0$
Le calcul du tenseur de Ricci requiert le calcul des symboles de Christoffel $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$. En utilisant l'expression de la connexion affine en terme du tenseur métrique inverse, représenté par la matrice $g^{\mu\nu}$, et des dérivées premières du tenseur métrique :

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\partial_\nu g_{\rho\mu} + \partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \tag{1.66}$$

on obtient pour les composantes non nulles de la connexion affine sous les expressions suivantes [8]

$\Gamma^0_{01} = \frac{A'}{2A}$ $\quad \Gamma^1_{00} = \frac{A'}{2B}$ $\quad \Gamma^1_{11} = \frac{B'}{2B}$

$\Gamma^1_{22} = \frac{-r}{B}$ $\quad \Gamma^1_{33} = -\frac{(r\sin^2\theta)}{B}$ $\quad \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}$

$\Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta$ $\quad \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}$ $\quad \Gamma^3_{23} = \cot\theta$

En faisant usage des expressions des composantes non nulles des symboles de Christoffel, on peut tirer les composantes non nulles du tenseur de Ricci [8]

$$R_{00} = -\frac{A''}{2B} + \frac{A'}{4B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B})\right) - \frac{A'}{rB} \tag{1.67}$$

$$R_{11} = \frac{A''}{2A} - \frac{A'}{4A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{B'}{rB} \tag{1.68}$$

$$R_{22} = \frac{1}{B} - 1 + \frac{r}{2B}\left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}\right) \tag{1.69}$$

$$R_{33} = R_{22}\sin^2\theta \tag{1.70}$$

Notons que seules les composantes diagonales du tenseur de Ricci sont différentes de zéro. Les équations d'Einstein se réduisent donc à $R_{\mu\mu} = 0$ une combinaison appropriée des équation d'Einstein nous donne

$$\frac{R_{00}}{A} + \frac{R_{11}}{B} = 0$$

telle que

$$\begin{aligned} \frac{R_{00}}{A} + \frac{R_{11}}{B} &= -\frac{A'}{rAB} - \frac{B'}{rB^2} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{rB}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) = 0 \end{aligned}$$

d'où

$$BA' + AB' = 0 \tag{1.71}$$

Autrement dit,

$$\frac{d}{dr}(AB) = 0 \tag{1.72}$$

ainsi AB est une constante notée α.
D'autre part nous avons

$$\begin{aligned} R_{22} &= 0 \\ &= \frac{1}{\alpha} - 1 + \frac{r}{2}\left(\frac{A}{\alpha}\right)\left(\frac{A'}{a} - (\frac{-A'}{A})\right) \\ &= \frac{A}{\alpha} - 1 + \frac{r}{2}\frac{A}{\alpha} - 2\frac{A'}{A} \end{aligned}$$

$$A + rA' = \alpha \tag{1.73}$$

qui peut s'écrire comme suit

$$\frac{d(rA)}{dr} = \alpha \tag{1.74}$$

L'intégration de cette équation nous donne

$$rA = \alpha(r + k) \tag{1.75}$$

où k est une constante d'intégration. Ainsi on aura :

$$A(r) = \alpha\left(1 + \frac{k}{r}\right)$$
$$B(r) = \left(1 + \frac{k}{r}\right)^{-1}$$

On peut identifier k et α en considérant la limite de champ faible, dans laquelle on exige que

$$\frac{A(r)}{c^2} \to 1 + \frac{2\Phi}{c^2} \tag{1.76}$$

où Φ est le potentiel gravitationnel newtonien. Pour une masse sphérique symétrique M, nous avons donc $\Phi = \frac{-GM}{r}$
Des deux dernières équations, nous concluons que

$$k = \frac{-2GM}{c^2} \qquad et \qquad \alpha = c^2 \tag{1.77}$$

Par conséquent, la métrique de Schwarzschild pour l'espace-temps vide à l'extérieur d'un corps sphérique de masse M est :

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \tag{1.78}$$

1.8 Conclusion

La résolution de l'équation d'Einstein dans le cas statique et isotrope nous a permis de retrouver la métrique de Schwarzschild. On remarque qu'en l'absence de gravitation M $\to$ 0, et quand $r \to \infty$ la métrique de Schwarzschild coïncide avec la métrique de Minkowski, et que cette métrique a deux points singuliers. Le premier point quand $r = 2MG$, représente une singularité de coordonnées qui disparaît dans des systèmes de coordonnées appropriés. Par contre le deuxième point de singularité $r = 0$ est une singularité physique qu'on ne peut pas faire disparaitre avec un changement de coordonnée.

Chapitre 2

Equation de Tolman-Oppenheimer-Volkoff

2.1 Introduction

Dans ce chapitre il est question de retrouver l'équation de Tolman-Oppenheimer-Volkoff qui est le cadre théorique pour décrire la structure d'une étoile statique et isotrope, tel que les étoiles à neutrons.
les étoiles à neutrons sont un vestige stellaire laissé par une étoile supergéante après avoir épuisé le combustible nucléaire de son cœur et explosé en tant que supernova.
Ce qui nous intéresse est d'établir les équations de l'équilibre hydrostatique de cette étoile, et pour ce faire nous allons résoudre les équations d'Einstein à l'intérieure de l'étoile. Ces solutions particulières ont été dérivées pour la première fois en 1939 par Richard Tolman et, simultanément mais indépendamment, par Robert Oppenheimer accompagné de son étudiant George Volkof. La résolution de ce système d'équations n'est possible qu'en incluant une équation d'état qui relie la densité ρ et la pression interne p de l'étoile [7]

2.2 Forme de la métrique à l'intérieur d'une source sphérique

La forme standard d'une métrique statique à symétrie sphérique est [8]

$$ds^2 = \mathbf{A}(r)dt^2 - \mathbf{B}(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2) \tag{2.1}$$

Pour la solution de Schwarzschild, les fonctions $A(r)$ et $B(r)$ sont à déterminer en résolvant l'équation d'Einstein dans le vide $R_{\mu\nu} = 0$, par contre dans notre cas actuel, nous nous intéressons aux équations à l'intérieur de la source où

$$R_{\mu\nu} = -\chi(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}) \tag{2.2}$$

avec $T_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion. Pour un fluide parfait nous avons

$$T_{\mu\nu} = (\rho + \frac{p}{c^2})u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu} \tag{2.3}$$

où ρ est la densité de masse du fluide, p sa pression et u_μ le quadrivecteur vitesse du fluide.
On sait qu'en relativité,[1] $u_\mu u^\mu = c^2$ et

$$T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}(\rho + \frac{p}{c^2})u_\mu u_\nu - g^{\mu\nu}pg_{\mu\nu} \tag{2.4}$$

$$T = (\rho + \frac{p}{c^2})c^2 - p\delta^\mu_\mu \tag{2.5}$$

Or $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 4$, on obtient alors

$$T = (\rho + \frac{p}{c^2})c^2 - 4p \tag{2.6}$$

$$T = \rho c^2 + p - 4p \tag{2.7}$$

$$T = \rho c^2 - 3p \tag{2.8}$$

En remplaçant (2.3) et (2.8) dans l'équation (2.2) on obtient alors

$$R_{\mu\nu} = -\chi\left[(\rho + \frac{p}{c^2})U_\mu U_\nu - \frac{1}{2}(\rho c^2 - p)g_{\mu\nu}\right] \tag{2.9}$$

On peut alors retrouver les éléments diagonaux du tenseur de Ricci déjà obtenus dans la section (1.8) du premier chapitre

$$R_{00} = -\frac{A''}{2B} + \frac{A'}{4B}(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}) - \frac{A'}{rB} \tag{2.10}$$

$$R_{11} = \frac{A''}{2A} - \frac{A'}{4A}(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}) - \frac{B'}{rB} \tag{2.11}$$

$$R_{22} = \frac{1}{B} - 1 + \frac{r}{2B}(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}) \tag{2.12}$$

$$R_{33} = R_{22}\sin^2\theta \tag{2.13}$$

1. En fait c^2 découle de $g_{\mu\nu}\,dx^\mu dx^\nu = c^2 d\tau^2 \Rightarrow g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = c^2$

.es éléments non diagonaux du tenseur de Ricci sont nuls où $R_{0i} = 0$ pour i=1,2,3.
On sait déjà que $g^{0i} = 0$ et $g^{\mu\nu}u_\mu u_\nu = c^2$, donc explicitement,

$$g^{00}u_0u_0 + g^{11}u_1u_1 + g^{22}u_2u_2 + g^{33}u_3u_3 = c^2 \tag{2.14}$$

$$\frac{1}{A}(u_0)^2 - \frac{1}{B}(u_1)^2 - \frac{1}{r^2}(u_2)^2 - \frac{1}{r^2\sin\theta^2}(u_3)^2 = c^2 \tag{2.15}$$

En se plaçant dans le cas d'une étoile non tournante, où $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ (cas statique) [2] avec $u_0 \neq 0$, l'équation (2.15) se réduit à

$$\frac{1}{A}(u_0)^2 = c^2 \tag{2.16}$$

ainsi

$$u_0^2 = Ac^2 \tag{2.17}$$

ou encore

$$u_0 = c\sqrt{A} \tag{2.18}$$

on obtient alors les composantes du quadrivecteur vitesse du fluide tel que

$$[u_\mu] = c\sqrt{A}(1,0,0,0) \tag{2.19}$$

Ceci nous indique que notre source est dans un état d'équilibre hydrostatique Afin d'obtenir les valeurs des fonctions $A(r)$ et $B(r)$ nous utiliserons le fait que $\mu = \nu$ dans l'équation (2.9) pour obtenir les comosantes du tenseurs de Ricci comme suit

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\chi[(\rho + \frac{p}{c^2})(c^2A) - \frac{1}{2}(\rho c^2 - p)A] \\ &= -\chi[\rho c^2 A + pA - \frac{1}{2}\rho c^2 A + \frac{1}{2}pA] \\ &= -\chi[\frac{\rho c^2 A}{2} + \frac{3pA}{2}] \\ &= -\frac{1}{2}\chi(\rho c^2 + 3p)A \end{aligned} \tag{2.20}$$

En procédant de même pour R_{11} avec $u_1 = 0$ et $g_{11} = -B$, on obtient les résultats suivants

$$\begin{aligned} R_{11} &= -\chi[(\rho + \frac{p}{c^2})(u_1)^2 - \frac{1}{2}(\rho c^2 - p)g_{11}] \\ &= -\chi[-\frac{1}{2}(\rho c^2 - p)(-B)] \\ &= -\frac{1}{2}\chi(\rho c^2 - p)B \end{aligned} \tag{2.21}$$

2. $u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{dt}\frac{dt}{d\tau}$

pour R_{22} on aura

$$\begin{aligned}
R_{22} &= -\chi[(\rho+\frac{p}{c^2})(u_2)^2-\frac{1}{2}(\rho c^2-p)g_{22}] \\
&= -\chi[-\frac{1}{2}(\rho c^2-p)(-r^2)] \\
&= -\chi[\frac{1}{2}\rho c^2 r^2-\frac{1}{2}pr^2] \\
&= -\frac{1}{2}\chi(\rho c^2-p)r^2 \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

enfin, rappelons que

$$R_{33}=R_{22}sin^2\theta \qquad (2.23)$$

A partir de ces résultats on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{R_{00}}{A} &= -\frac{1}{2}\chi(\rho c^2-3p) \\
\frac{R_{11}}{B} &= -\frac{1}{2}\chi(\rho c^2-p) \\
\frac{2R_{22}}{r^2} &= -\chi(\rho c^2-p)
\end{aligned}$$

En sommant, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{R_{00}}{A}+\frac{R_{11}}{B}+\frac{2R_{22}}{r^2} &= -\chi\left[\rho c^2(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1)+p(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-1)\right] \\
&= = -2\chi\rho c^2 \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

En remplaçant par les expressions(2.10), (2.11) ,(2.12), (2.13) dans les composantes du tenseur de Ricci et en simplifiant, on obtient

$$\frac{R_{00}}{A}+\frac{R_{11}}{B}+\frac{2R_{22}}{r^2}=-\frac{A'}{rAB}-\frac{B'}{rB^2}+\frac{2}{r^2}\left(\frac{1}{B}-1\right)+\frac{1}{rB}\left(\frac{A'}{A}-\frac{B'}{B}\right) \qquad (2.25)$$

En combinant (2.24) et (2.25) on obtient

$$-\frac{2B'}{rB^2}+\frac{2}{r^2}\left(\frac{1}{B}-1\right)=-2\chi\rho c^2$$

$$-\frac{rB'}{B^2}+\left(\frac{1}{B}-1\right)=-\chi\rho c^2 r^2$$

$$(1-\frac{1}{B})+\frac{rB'}{B^2}=\chi\rho c^2 r^2 \qquad (2.26)$$

Cette expression peut aussi s'écrire comme suit

$$\frac{d}{dr}\left[r(1-\frac{1}{B})\right]=\chi\rho c^2r^2 \tag{2.27}$$

En intégrant cette équation par rapport à r, on trouve

$$\begin{aligned}
r(1-\frac{1}{B}) &= \int_0^r \chi\rho c^2\bar{r}^2d\bar{r} \\
&= \chi c^2\int_0^r \rho\bar{r}^2d\bar{r} \\
&= \chi c^2\int_0^r \rho(\bar{r})\bar{r}^2d\bar{r} \\
&= \chi c^2 I(r) \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

On a la masse incluse dans la sphère de centre 0 et de rayon r

$$m(r)=\int_{sph(0,r)} dm=\int_{sph(0,r)} \rho dV \tag{2.29}$$

avec $dV=r^2dr\sin\theta d\phi$. Donc

$$\begin{aligned}
m(r) &= \int_0^r \rho(\bar{r})\bar{r}^2d\bar{r}\sin\theta d\phi \\
&= \int_0^r \rho(\bar{r})\bar{r}^2d\bar{r}\int_0^{2\pi}\sin\theta\int_0^{\pi} d\phi \\
&= I(r)4\pi \qquad (2.30)
\end{aligned}$$

A partir de cette équation on obtient

$$I(r)=\frac{m(r)}{4\pi} \tag{2.31}$$

En divisant l'équation (2.28) par r et en remplaçant $I(r)$ donnée par (2.31), on aura

$$(1-\frac{1}{B})=\frac{\chi c^2}{r}\frac{m(r)}{4\pi} \tag{2.32}$$

$$\frac{1}{B}=\left[1-\frac{\chi c^2}{r}\frac{m(r)}{4\pi}\right] \tag{2.33}$$

$$B=\left[1-\frac{\chi c^2}{r}\frac{m(r)}{4\pi}\right]^{-1} \tag{2.34}$$

en remplaçant χ par sa valeur on obtient

$$B = \left[1 - \frac{8\pi G c^2}{c^4 r}\frac{m(r)}{4\pi}\right]^{-1} \tag{2.35}$$

finalement,

$$\mathbf{B}(r) = \left[1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}\right]^{-1} \tag{2.36}$$

A présent que nous avons déterminé la valeur de $B(r)$, nous allons déterminer l'équation différentielle qui doit être satisfaite par la fonction $\mathbf{A}(r)$. Cette dernière peut s'obtenir en remplaçant la valeur $\mathbf{B}(r)$ dans les équations (2.20), (2.21), (2.22) et (2.23) tout en utilisant la conservation du tenseur énergie-impulsion $D_\mu T^{\mu\nu} = 0$ ainsi que l'expression (2.3) [8]

$$\begin{aligned} D_\mu T^{\mu\nu} &= D_\mu \left[(\rho + \frac{p}{c^2})u^\mu u^\nu\right] - D_\mu(p g^{\mu\nu}) \\ &= D_\mu \left[(\rho + \frac{p}{c^2})u^\mu u^\nu\right] - [(D_\mu p)g^{\mu\nu} + p(D_\mu g^{\mu\nu})] \end{aligned}$$

En vertu du théoreme de Ricci $D_\mu g^{\mu\nu} = 0$, de plus si $(\rho + \frac{p}{c^2})u_\mu u_\nu$ est symétrique [3] alors

$$\begin{aligned} D_\mu T^{\mu\nu} &= D_\mu \left[(\rho + \frac{p}{c^2})u^\mu u^\nu\right] - (D_\mu p)g^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu[\sqrt{-g}(\rho + \frac{p}{c^2})u^\mu u^\nu] + (\rho + \frac{p}{c^2})\Gamma^\nu_{\sigma\mu}u^\mu u^\sigma - g^{\mu\nu}(\partial_\mu p) \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_0[\sqrt{-g}(\rho + \frac{p}{c^2})u^0 u^\nu] + (\rho + \frac{p}{c^2})\Gamma^\nu_{00}u^0 u^0 - g^{\mu\nu}(\partial_\mu p) \end{aligned} \tag{2.37}$$

En effet, pour le premier terme, du fait que $u^1 = u^2 = u^3 = 0$ nous aurons alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu[\sqrt{-g}(\rho + \frac{p}{c^2})u^\mu u^\nu] &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_0[\sqrt{-g}(\rho + \frac{p}{c^2})u^0 u^\nu] \\ &+ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_1[\sqrt{-g}(\rho + \frac{p}{c^2})u^1 u^\nu]}_{0} \\ &+ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_2[\sqrt{-g}(\rho + \frac{p}{c^2})u^2 u^\nu]}_{0} \\ &+ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_3[\sqrt{-g}(\rho + \frac{p}{c^2})u^3 u^\nu]}_{0} \end{aligned}$$

3. pour $B^{\mu\nu} = B_{\nu\mu}$ nous avons $D_\mu B^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu[\sqrt{-g}B^{\mu\nu}]$

donc

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_0[\sqrt{-g}(\rho+\frac{p}{c^2})\frac{c}{\sqrt{A}}u^\nu]=0$$

car $u^0 = g^{0\alpha}u_\alpha = g^{00}u_0\frac{1}{A}(c\sqrt{A}) = \frac{c}{\sqrt{A}}$ ainsi le premier terme de (2.37) s'annule completement, et le deuxième terme donne

$$(\rho+\frac{p}{c^2})(-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu A)(\frac{c}{\sqrt{A}})(\frac{c}{\sqrt{A}})-g^{\mu\nu}(\partial_\mu p)=0$$

$$\left(\frac{\rho c^2+p}{c^2}\right)\frac{c^2}{A}\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_\mu A)+g^{\mu\nu}(\partial_\mu p)=0$$

$$\left(\frac{\rho c^2+p}{2A}\right)g^{\mu\nu}(\partial_\mu A)+g^{\mu\nu}(\partial_\mu p)=0$$

On sait que

$$\begin{aligned}\Gamma^\nu_{00} &= -\frac{1}{2}g^{\alpha\nu}\left(\underbrace{\partial_0 g_{\alpha 0}}_{0}+\underbrace{\partial_0 g_{0\alpha}}_{0}-\partial_\alpha g_{00}\right)\\ &= -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(\partial_\mu g_{00}\right)\\ &= \frac{-1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu A(r) \end{aligned} \tag{2.38}$$

donc

$$D_\mu T^{\mu\nu}=\frac{\rho c^2+p}{2A}g^{\mu\nu}(\partial_\mu A)+g^{\mu\nu}\partial_\mu p \tag{2.39}$$

en multipliant par $g_{\mu\nu}$

$$(\frac{\rho c^2+p}{2A})\delta^\mu_\sigma\partial_\mu A+\delta^\mu_\sigma\partial_\mu p=0 \tag{2.40}$$

$$(\frac{\rho c^2+p}{2A})\partial_\sigma A+\partial_\sigma p=0 \tag{2.41}$$

Comme A dépend uniquement de r et p ne depend pas du temps, alors pour $\sigma=0,2,3$ l'expression (2.41) s'annule. pour $\sigma=1$ on a

$$\left(\frac{\rho c^2+p}{2A}\right)\frac{dA}{dr}+\frac{dp}{dr}=0 \tag{2.42}$$

$$\frac{\rho c^2+p}{2A}A'+p'=0 \tag{2.43}$$

ce qui nous donne

$$\frac{A'}{A} = -\frac{2p'}{(\rho c^2 + p)} \tag{2.44}$$

$$\int \frac{dA}{A} = -\int \frac{2p'(r)}{(\rho(r)c^2 + p(r))} dr \tag{2.45}$$

on pose $l(r) = -\int \frac{2p'(r)}{(\rho(r)c^2+p(r))} dr$, d'où

$$\ln A(r) = l(r) + k \tag{2.46}$$

$$\begin{aligned} A(r) &= e^{l(r)+k} \\ &= \mathrm{e}^{l(r)}\, \mathrm{e}^{k} \qquad (2.47) \\ &= Ke^{l(r)} \qquad (2.48) \end{aligned}$$

où K est une nouvelle constante d'intégration.
Ainsi les équations (2.36) et(2.48) nous permettent de calculer les fonctions arbitraires $A(r)$ et $B(r)$ de la métrique, et à partir de l'expression (2.30), on peut avoir la première équation de la structure stellaire telle que

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(\bar{r})\bar{r}^2 d\bar{r} \tag{2.49}$$

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi\rho(r)r^2 \tag{2.50}$$

Cette expression, nous donne une relation entre la masse $m(r)$ et la densité $\rho(r)$. Pour avoir la relation entre $m(r)$ et $p(r)$ nous utiliserons les expressions (2.12) et (2.22) comme suit

$$\frac{1}{B} - 1 + \frac{r}{2B}(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}) = -\frac{1}{2}\chi(\rho c^2 - p)r^2 \tag{2.51}$$

or compte tenu de (2.36), la première dérivée s'écrit

$$B' = -\left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}\right)^{-2} \left(\frac{-2G}{c^2}\right) \frac{d}{dr}\left(\frac{m(r)}{r}\right)$$

$$B' = -\left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}\right)^{-2} \left(\frac{-2G}{c^2}\right) \left[4\pi\rho r - \frac{m}{r^2}\right] \tag{2.52}$$

sachant (2.50), donc

$$\frac{B'}{B} = -\left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}\right)^{-1} \left(\frac{-2G}{c^2}\right) \left(4\pi r\rho(r) - \frac{m}{r^2}\right) \tag{2.53}$$

Ainsi, compte tenu de (2.44) et (2.53), l'équation (2.51) devient

$$-\frac{1}{2}\chi(\rho c^2 - p)r^2 = \left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}\right) - 1 + \frac{r}{2}\left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}\right)\left(\frac{-2p'}{\rho c^2 + p}\right)$$

$+\frac{r}{2}\left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}\right)\left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}\right)^{-1}\left(-\frac{2G}{c^2}\right)\left(4\pi r\rho - \frac{m}{r^2}\right)$ (2.54)

En simplifiant et en éliminant les termes qui doivent s'annuler on obtient

$$-\frac{1}{2}\chi(\rho c^2 - p)r^2 = -\frac{Gm(r)}{c^2 r} - r\left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}\right)\left(\frac{p'}{\rho c^2 + p}\right) - r^2\frac{G}{c^2}4\pi\rho(r) \tag{2.55}$$

En remplaçant χ par sa valeur et en simplifiant des deux cotés de l'équation précédente, on obtient

$$p\frac{4\pi G}{c^4}r^2 = -r\left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}\right)\left(\frac{p'}{\rho c^2 + p}\right) - \frac{Gm(r)}{c^2 r} \tag{2.56}$$

En multipliant l'équation (2.56) par r

$$p\frac{4\pi G}{c^4}r^3 = -r^2\left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}\right)\left(\frac{p'}{\rho c^2 + p}\right) - \frac{Gm(r)}{c^2} \tag{2.57}$$

et en réarrangeant les termes de l'équation (2.57), on obtient l'équation de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) [8]

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\rho c^2 + p}{r^2}\left[\frac{4\pi G}{c^4}pr^3 + \frac{Gm(r)}{c^2}\right]\left[1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}\right]^{-1} \tag{2.58}$$

qui forme un système d'équations différentielles du premier ordre pour $m(r)$, $p(r)$ et $\rho(r)$. Il doit être complété par la donnée d'une équation d'état reliant la pression et la densité tel que

$$p = p(\rho) \tag{2.59}$$

2.3 Approximation Newtonienne de l'équation TOV

La limite newtonienne de l'équation TOV s'obtient en considérant que $4\pi r^3 p \ll mc^2$ et que $\frac{2Gm}{c^2 r} \ll 1$ ce qui fait que $B \approx 1$, le systeme se réduit alors à

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2} \tag{2.60}$$

qui est l'équation newtonienne de l'équilibre hydrostatique

2.4 Conclusion

Suite à nos calculs, nous avons pu retrouver l'équation de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, qui est un système d'équations différentielles décrivant la structure interne d'une étoile statique à symétrie sphérique.
Néanmoins cette équation possède une certaine limite appelée la limite TOV, qui correspond à la masse maximale théorique que peut avoir une étoile à neutrons. Au-delà de cette limite, il y aura une singularité gravitationnelle, l'équilibre cessera et, dans certains cas, le résultat final est l'effondrement de l'étoile en un trou noir.

Chapitre 3

Application de l'équation TOV à la description d'une étoile à densité de masse constante

3.1 Introduction

Après avoir retrouvé l'équation de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, nous allons maintenant procéder à une application dans le cas d'une étoile à densité de masse constante ρ. Nous allons calculer analytiquement la métrique à l'intèrieur d'une source sphèrique de rayon R et de densité de masse constante.

Pour se faire nous allons remplacer la masse dans l'équation TOV par sa valeur $m(r)$ dans le cas où $r \leq R$, ce qui va nous permettre par la suite de retrouver la pression centrale, le rayon et la pression à la frontière de l'étoile en question. Une fois ces trois paramètres déterminés, nous allons retrouver les fonctions arbitraires $\mathbf{A}(r)$ et $\mathbf{B}(r)$ de la métrique générale, et pour finir nous allons calculer le rayon maximal et la masse maximale que peut avoir l'étoile.

3.2 Application pour une densité de masse constante

Nous avons la relation suivante entre m(r) et $\rho(r)$

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \tag{3.1}$$

en intégrant par rapport a r

$$\int dm = 4\pi \int r^2 \rho(r) dr$$

Sachant que la densité ρ est constante, on obtient alors pour $r \leq R$

$$m(r) = \frac{4}{3}\pi\rho r^3 \tag{3.2}$$

et pour $r \geq R$, la masse totale de l'étoile dans ce cas est plutôt

$$m(r) = M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3 \tag{3.3}$$

En inserant l'expression (3.2) dans l'équation TOV(2.58)

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{1}{r^2}(\rho c^2 + p)\left[\frac{4\pi G}{c^4}pr^3 + \frac{\frac{4}{3}\pi G\rho r^3}{c^2}\right]\left[1 - \frac{2G4\pi\rho r^3}{3c^2 r}\right]^{-1} \tag{3.4}$$

et tout en simplifiant les r on obtient

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{4\pi Gr}{3c^4}(\rho c^2 + p)(\rho c^2 + 3p)\left(1 - \frac{8\pi G\rho r^2}{3c^2}\right)^{-1} \tag{3.5}$$

Maintenant, procédons à une séparation des variables, l'équation (3.5) devient alors

$$\int_{p_0}^{p(r)} \frac{d\bar{p}}{(\rho c^2 + \bar{p})(\rho c^2 + 3\bar{p})} = -\frac{4\pi G}{3c^4}\int_0^r \left(1 - \frac{8\pi G\rho \bar{r}^2}{3c^2}\right)^{-1} \bar{r}d\bar{r} \tag{3.6}$$

où $p_0 = p(r = 0)$ est la pression au centre de l'étoile. Le terme de gauche de (3.6) nous donne d'une part

$$\begin{aligned}
\int_{p_0}^{p(r)} \frac{d\bar{p}}{(\rho c^2 + \bar{p})(\rho c^2 + 3\bar{p})} &= \frac{1}{-2\rho c^2}\int_{p_0}^{p(r)} \left[\frac{1}{\rho c^2 + \bar{p}} - \frac{3}{\rho c^2 + 3\bar{p}}\right] d\bar{p} \\
&= \frac{1}{2\rho c^2}\left[\ln\left(\rho c^2 + 3\bar{p}\right) - \ln\left(\rho c^2 + \bar{p}\right)\right]_{p_0}^{p(r)} \\
&= \frac{1}{2\rho c^2}\left[\ln\left(\frac{\rho c^2 + 3\bar{p}}{\rho c^2 + \bar{p}}\right)\right]_{p_0}^{p(r)} \\
&= \frac{1}{2\rho c^2}\left[\ln\left(\frac{\rho c^2 + 3p(r)}{\rho c^2 + p(r)}\right) - \ln\left(\frac{\rho c^2 + 3p_0}{\rho c^2 + p_0}\right)\right]
\end{aligned} \tag{3.7}$$

D'autre part, le terme de droite de (3.6)donne

$$-\frac{4\pi G}{3c^4}\int_0^r \left(1 - \frac{8\pi G\rho \bar{r}^2}{3c^2}\right)^{-1} \bar{r}d\bar{r} = -\frac{1}{4\rho c^2}\int_0^r \left(1 - \frac{8\pi G\rho \bar{r}^2}{3c^2}\right)^{-1}\left(-\frac{16\pi G\rho}{3c^2}\right)\bar{r}d\bar{r} \tag{3.8}$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{4\pi G}{3c^4}\int_0^r \left(1-\frac{8\pi G\rho\bar{r}^2}{3c^2}\right)^{-1}\bar{r}d\bar{r} &= \frac{1}{4\rho c^2}\ln\left[1-\frac{8\pi G\rho\bar{r}^2}{3c^2}\right]_0^r \\
&= \frac{1}{4\rho c^2}\left[\ln\left(1-\frac{8\pi G\rho r^2}{3c^2}\right)-\ln\left(1-0\right)\right] \\
&= \frac{1}{4\rho c^2}\left[\ln\left(1-\frac{8\pi G\rho}{3c^2}r^2\right)\right] \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

En injectant ces deux relations (3.7) (3.9) dans (3.6), nous aurons

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\rho c^2}\left[\ln\left(\frac{\rho c^2+3p(r)}{\rho c^2+p(r)}\right)-\ln\left(\frac{\rho c^2+3p_0}{\rho c^2+p_0}\right)\right] &= \frac{1}{4\rho c^2}\left[\ln\left(1-\frac{8\pi G\rho}{3c^2}r^2\right)\right] \\
\left[\ln\left(\frac{\rho c^2+3p(r)}{\rho c^2+p(r)}\right)+\ln\left(\frac{\rho c^2+p_0}{\rho c^2+3p_0}\right)\right] &= \frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{8\pi G\rho}{3c^2}r^2\right) \\
\ln\left[\left(\frac{\rho c^2+3p(r)}{\rho c^2+p(r)}\right)\left(\frac{\rho c^2+p_0}{\rho c^2+3p_0}\right)\right] &= \ln\left(1-\frac{8\pi G\rho}{3c^2}r^2\right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

ce qui implique que

$$
\left(\frac{\rho c^2+3p(r)}{\rho c^2+p(r)}\right)\left(\frac{\rho c^2+p_0}{\rho c^2+3p_0}\right)=\left(1-\frac{8\pi G\rho}{3c^2}r^2\right)^{1/2}
$$

$$
\left(\frac{\rho c^2+3p(r)}{\rho c^2+p(r)}\right) = \left(\frac{\rho c^2+3p_0}{\rho c^2+p_0}\right)\left(1-\frac{8\pi G\rho}{3c^2}r^2\right)^{1/2} \qquad (3.10)
$$

A la surface $r=R$, la pression est égale à zéro ce qui fait que le terme de gauche de l'equation (3.10) est egale à 1, ainsi

$$
\left(\frac{\rho c^2+3p_0}{\rho c^2+p_0}\right)\left(1-\frac{8\pi G\rho}{3c^2}R^2\right)^{1/2}=1 \qquad (3.11)
$$

A partir de l'équation (3.11), on peut retrouver le rayon R de l'étoile ayant une densité constante et une pression centrale p_0 tel que

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\rho c^2+p_0}{\rho c^2+3p_0}\right)^2 &= \left(1-\frac{8\pi G\rho}{3c^2}R^2\right) \\
R^2 &= \frac{3c^2}{8\pi G\rho}\left[1-\left(\frac{\rho c^2+p_0}{\rho c^2+3p_0}\right)^2\right] \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

En introduisant la masse totale M, donnée par (3.3) dans (3.11), on peut obtenir l'expression de la pression centrale

$$
\rho c^2+p_0=(\rho c^2+3p_0)\left(1-\frac{8\pi G\rho}{3c^2}R^2\right)^{1/2} \qquad (3.13)
$$

En posant $\mu = \frac{GM}{c^2}$, l'équation (3.13) se met sous la forme

$$\begin{aligned}
\rho c^2 + p_0 &= (\rho c^2 + 3p_0)\left(1 - \frac{2GM}{C^2 R}\right)^{1/2} \\
&= (\rho c^2 + 3p_0)\left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)^{1/2} \\
&= \rho c^2 \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)^{1/2} + 3p_0 \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)^{1/2} \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

En réarrangeant les termes

$$\rho c^2 \left[1 - \left(1 - \frac{2\mu}{R^2}\right)^{1/2}\right] = p_0 \left[3\left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)^{1/2} - 1\right]$$

ainsi on obtient la pression centrale

$$p_0 = \rho c^2 \left[\frac{1 - \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)^{1/2}}{3\left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)^{1/2} - 1}\right] \qquad (3.15)$$

en fonction de la masse M et du rayon R de l'étoile.
Pour retrouver la pression $p(r)$ on remplace l'expression (3.15) dans l'équation (3.10)

$$\begin{aligned}
\frac{\rho c^2 + 3p(r)}{\rho c^2 + p(r)} &= \frac{\rho c^2 + 3\rho c^2 \left[\frac{1 - \left(-\frac{2\mu}{R}\right)^{1/2}}{3\left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)^{1/2} - 1}\right]}{\rho c^2 + \rho c^2 \left[\frac{1 - \left(-\frac{2\mu}{R}\right)^{1/2}}{3\left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)^{1/2} - 1}\right]} \left(1 - \frac{8\pi G\rho}{3c^2} r^2\right)^{1/2} \\
&= \frac{\left[3\left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)^{1/2} - 1\right] + 3\left[1 - \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)^{1/2}\right]}{\left[3\left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)^{1/2} - 1\right] + \left[1 - \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)^{1/2}\right]} \left(1 - \frac{8\pi G\rho}{3c^2} r^2\right) \\
&= \frac{2}{2\left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)^{1/2}} \left(1 - \frac{8\pi G\rho}{R^3 3c^2} r^2 R^3\right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{\left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)^{1/2}} \left(1 - \frac{2GMr^2}{c^2 R^3}\right)^{1/2} \\
&= \frac{\left(1 - \frac{2\mu r^2}{R^3}\right)^{1/2}}{\left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)^{1/2}} \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

La prochaine étape consiste à isoler $p(r)$ en réecrivant (3.16)

$$\left[\rho c^2 + 3p(r)\right]\left(1-\frac{2\mu}{R}\right)^{1/2} = \left[\rho c^2 + p(r)\right]\left[\left(1-\frac{2\mu r^2}{R^3}\right)^{1/2}\right]$$

$$\rho c^2\left(1-\frac{2\mu}{R}\right)^{1/2} + 3p(r)\left(1-\frac{2\mu}{R}\right)^{1/2} = \rho c^2\left(1-\frac{2\mu r^2}{R^3}\right)^{1/2} + p(r)\left(1-\frac{2\mu r^2}{R^3}\right)^{1/2} \tag{3.17}$$

En réarengeant les termes

$$p(r)\left[3\left(1-\frac{2\mu}{R}\right)^{1/2} - \left(1-\frac{2\mu r^2}{R^3}\right)^{1/2}\right] = \rho c^2\left[\left(1-\frac{2\mu}{R}\right)^{1/2} - \left(1-\frac{2\mu r^2}{R^3}\right)^{1/2}\right] \tag{3.18}$$

alors on peut retrouver $p(r)$

$$p(r) = \rho c^2\left[\frac{\left(1-\frac{2\mu r^2}{R^3}\right)^{1/2} - \left(1-\frac{2\mu}{R}\right)^{1/2}}{3\left(1-\frac{2\mu}{R}\right)^{1/2} - \left(1-\frac{2\mu r^2}{R^3}\right)^{1/2}}\right] \tag{3.19}$$

qui est la pression de l'étoile à une distance r de son centre O.
La pression en fonction du rayon r est représentée dans la figure suivante

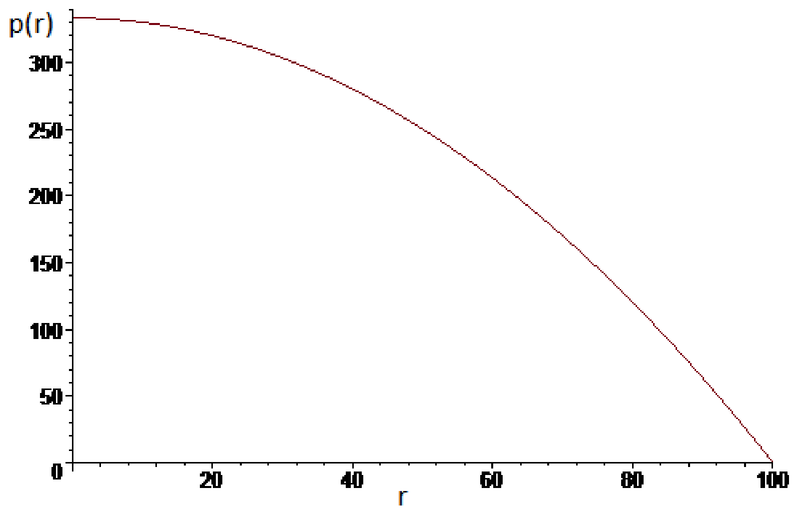


FIGURE 3.1 – p en fonction de r avec R=100, c=8, $\mu = 2$ $\rho = 500$

On vérifie clairement que la pression au centre p_0 est la pression maximale. Cette pression diminue au fur et à mesure en s'éloignant du centre O et elle s'annule complètement à la surface $r = R$ de l'étoile.

Maintenant il nous reste à déterminer les fonction $\mathbf{A}(r)$ et $\mathbf{B}(r)$ de la métrique (2.1) décrivant l'intérieur de l'étoile.
A partir de (2.36) et de (3.2) on retrouve facilement le $\mathbf{B}(r)$ tel que

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(r) &= \left[1 - \frac{2G\frac{4\pi\rho r^3}{3}}{c^2 r}\right]^{-1} \\ &= \left[1 - \frac{8\pi G\rho}{3c^2 R^3} r^2 R^3\right]^{-1} \\ &= \left[1 - \frac{2\mu r^2}{R^3}\right]^{-1} \end{aligned} \tag{3.20}$$

On remarque qu'à la surface où r=R la fonction $B_{int}(r)$ retrouvée ici correspond à la fonction retrouvée dans la solution de Schwarzschild (1.78) ce qui assure la continuité de la métrique, tel que

$$\begin{aligned} B_{int}(r = R) &= \left[1 - \frac{2\mu R^2}{R^3}\right]^{-1} \\ &= \left[1 - \frac{2\mu}{R}\right]^{-1} \end{aligned} \tag{3.21}$$

D'autre part on retrouve la fonction $\mathbf{A}(r)$ en utilisant les équations (2.44) et (3.2),

$$\begin{aligned} \ln A(r) &= -2\ln(\rho c^2 + p) + k \\ &= \ln(\rho c^2 + p)^{-2} + k \end{aligned} \tag{3.22}$$

où k est une constante d'intégration. En prenant l'exponentielle des deux membres, nous aboutissons à

$$\mathbf{A}(r) = K\frac{1}{(\rho c^2 + p)^2} \tag{3.23}$$

où $K = \mathrm{e}^k$ est une nouvelle constante d'intégration.

A partir de ce résultat on peut déterminer la constante d'intégration de l'équation (2.44) en imposant la condition qu'à la surface $r = R$, la fonction $\mathbf{A}$(r) coïncide avec la fonction retrouvée dans la solution de Schwarzschild (1.78) ainsi, on aura $A_{int}(r = R)$=$A_{ext}(r = R)$

$$K\frac{1}{(\rho c^2 + p(R))^2} = c^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2R})\right) \tag{3.24}$$

A la surface la pression est égale a zéro, donc

$$K = (\rho c^2)^2 c^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2R}\right) \tag{3.25}$$

en remplaçant la valeur de K donnée par (3.25) dans (3.23), on obtient la fonction $\mathbf{A}(r)$ tel que

$$A_{int}(r) = (\rho c^2)^2 c^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2R}\right)\frac{1}{[\rho c^2 + p(r)]^2} \tag{3.26}$$

Il ne reste plus qu'à remplacer l'expression de $p(r)$ obtenue en (3.19) pour obtenir

$$\begin{aligned}
A_{int}(r) &= \frac{(\rho c^2)^2 c^2\left(1-\frac{2GM}{c^2R}\right)}{\left[\rho c^2+\rho c^2\left[\frac{\left(1-\frac{2\mu r^2}{R^3}\right)^{1/2}-\left(1-\frac{2\mu}{R}\right)^{1/2}}{3\left(1-\frac{2\mu}{R}\right)^{1/2}-\left(1-\frac{2\mu r^2}{R^3}\right)^{1/2}}\right]\right]^2} \\
&= \frac{c^2\left(1-\frac{2\mu}{R}\right)\left[\left(1-\frac{2\mu r^2}{R^3}\right)^{1/2}-3\left(1-\frac{2\mu}{R}\right)^{1/2}\right]^2}{\left[\left(1-\frac{2\mu r^2}{R^3}\right)^{1/2}-3\left(1-\frac{2\mu}{R}\right)^{1/2}+\left(1-\frac{2\mu}{R}\right)^{1/2}-\left(1-\frac{2\mu r^2}{R^3}\right)^{1/2}\right]^2} \\
&= c^2(\frac{1-\frac{2\mu}{R})}{4(1-\frac{2\mu}{R})}\left[\left(1-\frac{2\mu r^2}{R^3}\right)^{1/2}-3\left(1-\frac{2\mu}{R}\right)^{1/2}\right]^2
\end{aligned}$$

ou encore

$$A_{int}(r)=\frac{c^2}{4}\left[\left(1-\frac{2\mu r^2}{R^3}\right)^{1/2}-3\left(1-\frac{2\mu}{R}\right)^{1/2}\right]^2 \tag{3.27}$$

Pour $r = R$, on retrouve exactement la fonction obtenue dans la solution de schwarzschild (1.78) tel que

$$\begin{aligned}
A_{int}(r=R) &= \frac{c^2}{4}\left[\left(1-\frac{2\mu R^2}{R^3}\right)^{1/2}-3\left(1-\frac{2\mu}{R}\right)^{1/2}\right]^2 \\
&= \frac{c^2}{4}\left[\left(1-\frac{2\mu}{R}\right)^{1/2}-3\left(1-\frac{2\mu}{R}\right)^{1/2}\right]^2 \\
&= c^2\left(1-\frac{2\mu}{R}\right)=A_{ext}(r=R) \qquad (3.28)
\end{aligned}$$

3.3 Rayon maximal de l'étoile

Pour retrouver le rayon maximal de notre étoile nous devons dériver l'expression de R^2 (3.12) par rapport a p_0 tel que [9]

$$\begin{aligned}
\frac{dR^2}{dp_0} &= 0 \\
&= \frac{3c^2}{8\pi G\rho}\left[-2\left(\frac{\rho c^2+p_0}{\rho c^2+3p_0}\right)\frac{d}{dp_0}\left(\frac{\rho c^2+p_0}{\rho c^2+3p_0}\right)\right] \\
&= \frac{3c^2}{8\pi G\rho}\left[-2\left(\frac{\rho c^2+p_0}{\rho c^2+3p_0}\right)\left(\frac{(\rho c^2+3p_0)-3(\rho c^2+p_0)}{(\rho c^2+3p_0)^2}\right]\right. \\
&= \frac{3c^2}{8\pi G\rho}\left[-2\left(\frac{\rho c^2+p_0}{\rho c^2+3p_0}\right)\left(\frac{-2\rho c^2}{(\rho c^2+3p_0)^2}\right)\right]
\end{aligned} \tag{3.29}$$

ce qui ne peut être vérifié que si $p_0 \to \infty$. En effet la limite de la dérivée précédente quand $p_0 \to \infty$ est

$$\frac{p_0}{(3p_0)^3} \to 0 \tag{3.30}$$

Pour avoir la valeur de R_{max}, nous allons donc faire tendre p_0 dans (3.12) vers l'infini et cela nous donne

$$\begin{aligned}
R^2_{max} &= \lim_{p_0\to+\infty}\frac{3c^2}{8\pi G\rho}\left[1-\frac{(p_0)^2}{(3p_0)^2}\right] \\
&= \frac{3c^2}{8\pi G\rho}\frac{8}{9} \\
&= \frac{c^2}{3\pi G\rho}
\end{aligned} \tag{3.31}$$

finalement,

$$R_{max} = \sqrt{\frac{c^2}{3\pi G\rho}} \tag{3.32}$$

qui est le rayon maximal qu'une étoile à densité de masse constante peut avoir. On remarque que plus la densité de masse augmente, plus le champ gravitationnel augmente et plus le rayon diminue, ce qui provoque l'effondrement de l'étoile en un trou noir.

3.4 Masse maximale d'une étoile à neutrons

La masse représente une propriété dont l'étude est extrêmement importante, car elle renseigne directement sur l'évolution de l'étoile.
Nous allons tenter de calculer la masse maximale d'une étoile à neutrons avec les résultats obtenus jusqu'à présent. En prenant [10]

$$\rho > \rho_n \approx 4.10^{17} kg.m^{-3}$$

avec ρ_n est la densité nucléaire, et

$$R > R_s \tag{3.33}$$

où $R_s = \frac{2GM}{c^2}$ est le rayon de Schwarzschild. Pour une étoile incompressible on a

$$\rho = \rho_0 = constante \tag{3.34}$$

et

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0 \tag{3.35}$$

On a déjà calculé

$$p(r) = \rho_0 c^2 \left[\frac{\left(1 - \frac{2\mu r^2}{R^3}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)^{1/2}}{3\left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{2\mu r^2}{R^3}\right)^{1/2}} \right] \tag{3.36}$$

et

$$p_0(r = 0) = \rho_0 c^2 \left[\frac{1 - \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)^{1/2}}{3\left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)^{1/2} - 1} \right] \tag{3.37}$$

on sait que $p_0 \to \infty$ quand $3(1 - \frac{\mu}{R})^{1/2} = 1$
A partir de là, on peut isoler le R tel que

$$R = \frac{9}{4}\frac{GM}{c^2} \tag{3.38}$$

On remplace (3.38) dans (3.35) on obtient

$$M = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{9}{4}\frac{GM}{c^2}\right)^3 \rho_n$$

ce qui conduit à

$$M = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{9}{4}\frac{G}{c^2}\right)^3 M^3 \rho_n$$

En simplifiant les M on obtient alors

$$M = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{4c^2}{9G}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{\rho_n}\right)^{1/2} \tag{3.39}$$

finalement [10]

$$M = 6M_\odot \tag{3.40}$$

où $M_\odot = 1,99.10^{3}0\ kg$ représente la masse solaire.
Les dernières observations estiment la masse limite des étoiles à neutrons entre 2,7 à 3 $M_\odot$.

3.5 Representation graphique de $A(r)$ et $B(r)$

Nous allons représenter graphiquement les fonctions arbitraires $A(r)$ et $B(r)$ données respéctivement par (3.27) et (3.20) dans le cas intérieur et extérieur de l'étoile

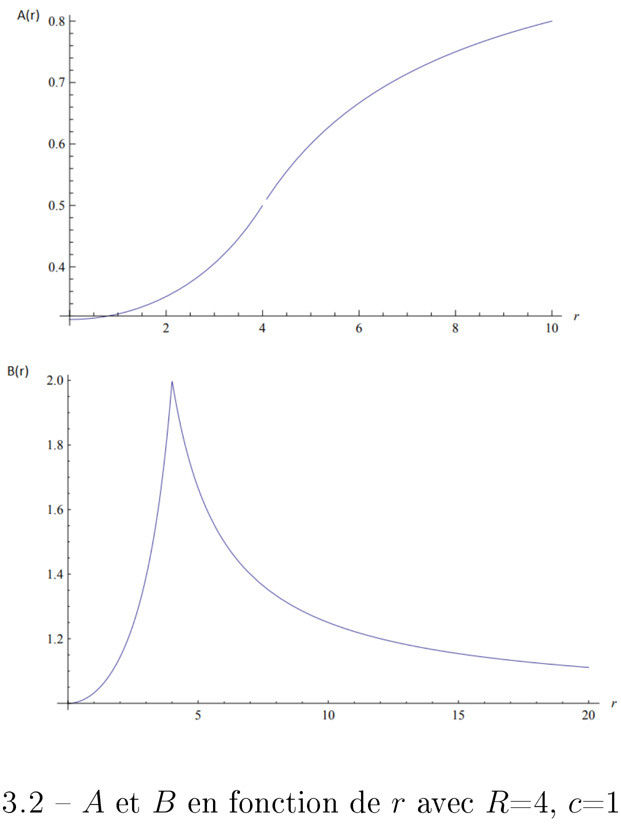


FIGURE 3.2 – A et B en fonction de r avec R=4, c=1, $\mu = 1$

On remarque que :

— $A_{int}(r)$ et $A_{ext}(r)$ sont continues au point $r = R$

— la première dérivée de $A_{int}(r)$ et $A_{ext}(r)$ coïncident au point r=R ce qui veut dire que $A_{int}(r)$ est dérivable au point $r = R$.

— $B_{int}(r)$ et $B_{ext}(r)$ sont continues au point $r = R$, par contre la première dérivée de $B_{int}(r)$ et $B_{ext}(r)$ ne coïncident pas au point $r = R$, autrement-dit, la fonction $B(r)$ n'est pas dérivable au point $r = R$

3.6 Conclusion

L'application de l'équation TOV pour une étoile non tournante de densité de masse constante nous a permis de retrouver les caractéristique internes de l'étoile qui sont le rayon R, la pression centrale p_0 et la pression interne $p(r)$. Cela nous a permis par la suite de détérminer pour quelle valeur de la pression cenrale le rayon et la masse sont maximaux. Ces paramètres nous ont permis par la suite de retrouver les fonctions $A(r)$ et $B(r)$ de la métrique générale à l'intérieur de l'étoile et de constater qu'à la frontière de l'étoile où $r = R$ ces fonctions coïncident avec celles retrouvées pour la solution de Schwarzschild

Conclusion générale

A travers ce mémoire nous avons retracé les aspects mathématiques et quelques applications de la théorie de la relativité générale. En commençant par établir l'équation des champs d'Einstein et la résoudre dans le cas du vide pour ainsi retrouver la solution de Schwarzschil et sa métrique, qui a révélé une singularité au rayon de Schwarzschild $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ qui est le cas limite où un objet stellaire s'effondre sur lui-même pour en créer un trou noir.

Puis, nous avons réécrit l'équation d'Einstein cette fois à l'intérieure d'une étoile statique et isotrope, et retrouver l'équation de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, équation qui nous renseigne sur la structure interne de notre étoile. Tout comme le cas limite du rayon de Schwarzschild la limite de TOV se trouve dans la masse maximale que peut atteindre une étoile a neutron avant de s'effondrer sur elle-même et devenir un trou noir, cette limite d'après nos résultats est de $6M_\odot$.

L'équation TOV nous a permis aussi de procéder à une application dans le cas d'une étoile isotrope et statique mais aussi d'une densité de masse constante. Cette application nous a permis de retrouver à la fin le rayon, la pression centrale, la pression interne, le rayon maximal ainsi que la masse maximale de l'étoile en question, et aussi retrouver les fonctions arbitraires de la formule de la métrique générale, qui dans le cas où $r = R$ coïncident avec celles retrouvée dans la métrique de Schwarzschild

Bibliographie

[1] JIMMY ROUSSEL. Mécanique newtonienne cours, 2021.

[2] Jayant V. Narlikar. *An Introduction to Relativity*. Cambridge University Press, 2010.

[3] Wolfgang Rindler. *Relativity special general and cosmological*. 2006.

[4] David SÉNÉCHAL. Mécanique i. 2018.

[5] Eric Gourgoulhon. Relativité générale. 2014.

[6] Andrzej Krasinski Jerzy Plebanski. Introduction to relativity, 2010.

[7] Robert j. a. lambourne. *Relativity, Gravitation and Cosmology*. 2010.

[8] Michael Paul Hobson, George P Efstathiou, and Anthony N Lasenby. *General relativity : an introduction for physicists*. Cambridge University Press, 2006.

[9] Francesco Pogliano. Neutron stars-study of the mass-radius relation and mean-field approaches to the equation of state. Master's thesis, NTNU, 2017.

[10] Jolien Creighton. *Relativistic Stars*. University of Wisconsin–Milwaukee, 2012.