

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur

et de la recherche scientifique



Université Abderrahmane Mira Bejaia

Faculté de Technologie

Département de Génie Mécanique

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : ⁽¹⁾ Fabrication mécanique & Productique

⁽²⁾ construction mécanique

Par :

⁽¹⁾ **BENKHALED Sabrina**

⁽²⁾ **BAOUR Nawel**

Thème

Étude sur la prédiction de la direction de propagation des fissures dans les matériaux élastiques linéaires homogènes et isotropes en 2D

Soutenue le : 13/07/2022

Devant le Jury composé de :

M. BECHIR Hocine

Président

M. METHIA Mounir

Rapporteur

M. BENSLIMANE Abdelhakim

Examineur

Mme. BOUZIDI Safia

Examinatrice

Année Universitaire 2021-2022

« Agissez toujours comme s'il était impossible d'échouer »

Wiston Churchill

Remerciements

« Au nom de Dieu le clément et le miséricordieux »

Nos premières pensées vont à notre encadrant Dr. *METHIA Mounir*. Qu'on remercie sincèrement d'avoir accepté de nous encadrer, nous avoir guidé et soutenu tout au long de ce mémoire. On voudrait le remercier pour avoir toujours pris le temps nécessaire pour nous débloquer durant tout ce travail.

Ensuite, nous adressons nos remerciements au Dr. *BENSLIMANE Abdelhakim* sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour, qui nous a insisté à s'initier au monde de la recherche, à aller au bout des choses, si bien qu'il m'a convaincu de tenter l'aventure à l'issue de notre projet de fin de cycle.

On voudrait également exprimer toute notre gratitude aux autres membres du jury en l'occurrence Mr. *BECHIR* pour avoir accepté de présider le jury et pour nous avoir laissé terminer notre long récit sur les fissures ; Mme. *BOUZIDI* pour avoir accepté de relire et rapporter notre mémoire et pour l'intérêt qu'il a porté à notre travail.

On remercie également tous les enseignants du Génie Mécanique.

Enfin, on voudrait terminer en remerciant Mr. *METHIA Nadir* pour sa disponibilité, son soutien et son aide précieux dans la réalisation de notre travail.

Dédicaces

Avec l'expression de ma reconnaissance, je dédie ce travail à ma famille qui m'a doté d'une éducation digne, son amour à fait de moi ce que je suis aujourd'hui.

A MON TRES CHER PERE, *Autant de phrases et d'expressions aussi éloquentes soient-elles ne sauraient exprimer ma gratitude et ma reconnaissance. Tu as su m'inculquer le sens de la responsabilité et de la confiance en soi face aux difficultés de la vie. Tes conseils ont toujours guidé mes pas vers la réussite. Ton encouragement est pour moi le soutien indispensable que tu as toujours su m'apporter. Je te dois ce que je suis aujourd'hui et ce que je serai demain et je ferai toujours de mon mieux pour rester ta fierté et ne jamais te décevoir. Que Dieu le tout puissant te préserve, t'accorde santé, bonheur et te protège de tout mal.*

A MA TRES CHERE MERE, *Autant de phrases aussi expressives soient-elles ne sauraient montrer le degré d'amour et d'affection que j'éprouve pour toi. Tu m'as comblé avec ta tendresse et affection tout au long de mon parcours. Tu n'as jamais cessé de me soutenir et de m'encourager durant toutes les années de mes études, tu as toujours été présente à mes côtés pour me consoler quand il fallait. Ce travail est signe de ma vive reconnaissance et ma profonde estime. Puisse le tout puissant te préserve, te donne santé, bonheur et longue vie.*

A mon adorable grande sœur, *Qui sait toujours comment procurer la joie et le bonheur pour notre famille, qui as été toujours là pour moi et qui n'as jamais cessé de me conseiller, m'encourager et me soutenir. Que Dieu te protège et t'offre une joyeuse vie plein de bonheur et de réussite.*

A mon très cher grand frère, *à qui je souhaite tout le bonheur, réussite et beaucoup d'amour.*

A toute ma famille, *cet ensemble de personnes qui forment comme une forteresse au fond de nous et où l'on peut réfugier à tout moment.*

A tous mes proches.

A mes meilleurs copines Sarah, Amel, Hanane *d'avoir été toujours auprès de moi, vous n'êtes pas que des amies, mais vous faites partie de ma famille. Que Dieu vous offre la joie et la réussite.*

A Nadir *Pour ta présence, le soutien et l'aide que tu m'as apporté durant ce travail, merci du fond du cœur.*

Sabrina

Dédicaces

Je dédie ce travail

A ma Mère, à qui je dois tout,

*A mon Père qui m'a tout donné, et surtout beaucoup propulsé, A
mon frère et à mes sœurs,*

A mes amis : LOUNDJA , THIZIRI, BAYA, MERIEM, MASILYA

A mes collègues de CLASSE

A tous les étudiants, enseignants, ATS de notre université

Sans oublier tous les gens qui m'aiment du fond du cœur

A tous ceux qui s'investissent pour que la science soit lumière,

Nawel

Table de matière :

Remerciements	3
Table de matière :	6
Liste des figures.....	8
Notations principales.....	10
Introduction générale	12
Chapitre I État de l'art : critères de rupture en petites déformations	14
Partie 1 : Concept théorique sur les petites déformations.....	15
I.1. Introduction	15
I.2. Aperçu historique sur la rupture.....	17
I.3. Concepts généraux sur la mécanique de la rupture	18
I.3.1. Modes élémentaires de fissuration	18
I.3.2. Zones délimitant le voisinage d'une pointe de fissure.....	19
I.3.2.1. La zone d'élaboration ou processus zone (zone 1)	19
I.3.2.2. La zone singulière (zone 2) :.....	19
I.3.2.3. La zone extérieure (zone 3)	20
I.3.3. Propagation de fissures en mode mixte ($2D$).....	20
I.3.4. Champs des contraintes et des déplacements	21
I.4. Critères de rupture.....	26
I.4.1. Critère du facteur d'intensité de contrainte	26
I.4.2. Critère de la contrainte tangentielle maximale.....	26
I.4.3. Critère de la densité d'énergie de déformation	27
Partie 2 : Méthodes numériques pour la modélisation de la fissuration et de la rupture des matériaux.....	31

I.1. Méthode des éléments finis (MEF)	31
I.2. Méthode sans maillage	32
I.3. Méthode de sous-modélisation	33
Chapitre II Simulation numérique	34
II.1. Introduction	35
II.2. Géométrie de l'éprouvette.....	35
II.3. Création des modèles	36
II.4. . Application du matériau.....	36
II.5. Création du repère.....	37
II.6. Définition de la fissure.....	37
II.7. Conditions aux limites	37
II.7.1. Chargement	38
II.7.2. Blocages.....	38
II.8. Maillage	39
II.9. Résultats	39
Chapitre III Résultats et validation numérique	41
III.1. Introduction.....	42
III.2. Validation du modèle numérique.....	43
III.3. Critères de direction de propagation de fissure	45
III.4. Détermination des angles critiques.....	46
III.5. Simulation de la propagation des fissures	46
III.6. Conclusion	51
Conclusion générale et perspectives	52
Références bibliographiques	54

Liste des figures

Figure I-1: État final de différentes éprouvettes après un essai uniaxial (a) acier (b) composite (c) béton (tiré de [6])	16
Figure I-2 : Réponses schématiques de différents matériaux dans un essai de traction uni axiale.	16
Figure I-3 : Catastrophes liées au phénomène de rupture (a) accident de l'avion American Airlines Airbus-A300 [7] (b) navire Liberty Ship [8].....	17
Figure I-4: Modes de rupture.....	19
Figure I-5: Zones délimitant le voisinage d'une pointe de fissure.....	20
Figure I-6: Fissure sollicitée en mode mixte.....	21
Figure I-7: Représentation de l'éprouvette dans le cas fini et infini.....	23
Figure I-8: Champ de contrainte (a) dans le système de coordonnées cartésiennes (b) dans le système de coordonnées polaires [9].	24
Figure I-9: Graphiques des fonctions $\bar{\sigma}_{\theta\theta} = (\sqrt{2r}/\sigma\sqrt{a})\sigma_{\theta\theta}$, $\bar{\sigma}_{\theta\theta} = (\sqrt{2r}/\sigma\sqrt{a})(\partial\sigma_{\theta\theta}/\partial\theta)$ et $\bar{\sigma}''_{\theta\theta} = (\sqrt{2r}/\sigma\sqrt{a})(\partial^2\sigma_{\theta\theta}/\partial\theta^2)$ en fonction de l'angle θ pour un coefficient de Poisson $\nu_0 = 1/3$ et $\beta = 30^\circ$	27
Figure I-10: Graphiques des fonctions $\bar{S} = (16\mu_0/\sigma_0^2 a)S$, $\bar{S}' = (16\mu_0/\sigma_0^2 a)(\partial S/\partial\theta)$ et $\bar{S}'' = (16\mu_0/\sigma_0^2 a)(\partial^2 S/\partial\theta^2)$ en fonction de l'angle θ , pour un coefficient de Poisson $\nu_0 = 1/3$ et $\beta = 30^\circ$	29
Figure I-11: Fissure inclinée (a) en traction et (b) en compression uniaxiale.	30
Figure I-12: Plaque carrée pré-fissurée et le maillage associé pour le calcul des facteurs d'intensité de contrainte[9].	31
Figure I-13: Illustration de la technique de sous-modélisation.	33
Figure II-1: Géométrie d'une éprouvette SENT	35

Figure II-2 : création de Modèle en 2D (a) mode I (b) mode mixte.....	36
Figure II-3 : Introduction des propriétés du matériau	36
Figure II-4 : création d'un repère.....	37
Figure II-5 : Définition de la fissure.....	37
Figure II-6 :Application de chargement en mode I et mode mixte.....	38
Figure II-7 : Blocage des déplacements au point BC-1.....	38
Figure II-8 : Maillage obtenu (a)mode I ;(b) mode mixte.....	39
Figure II-9 : Résultats de la modélisation (a)mode I ;(b) mode mixte.	40
Figure III-1 : Variation de $W = S/r$ en fonction de l'angle polaire θ	44
Figure III-2 : Variation de $\sigma_{\theta\theta}$ en fonction de l'angle polaire θ	45
Figure III-3 : Variation de (a) $W = S/r$,(b) $\sigma_{\theta\theta}$ en fonction de l'angle polaire θ	46
Figure III-4 : Trajectoire de propagation de la fissure sous un chargement en mode I, prédites par (a) SED (b) $\sigma_{\theta\theta}$	48
Figure III-5 : Trajectoire de propagation de la fissure sous un chargement en mode mixte I+II ($\beta^* = 20^\circ$), prédites par (a) SED (b) $\sigma_{\theta\theta}$	49
Figure III-6 : Comparaison entre deux trajectoires de propagation de fissures ($\beta^* = +20$).....	50
Figure III-7 : Évolution de la trajectoire de propagation de la fissure dans matériaux en plexiglas (PMMA), pour différentes inclinaisons β^*	51

Notations principales

a	demi-longueur de la fissure
E	module de Young
r	distance radiale de la pointe de la fissure dans la configuration de déformée
r_p	rayon autour de point de la fissure
S	la densité d'énergie de déformation
S_{cr}	valeur critique du facteur de la densité d'énergie de déformation
W	fonction de la densité d'énergie de déformation
β_1, β_2	angle d'inclinaison de la fissure
θ_0	angle d'extension de la fissure
K_c	facteur d'intensité de contraintes critique
K_I, K_{II}	les facteurs d'intensité de contrainte des modes I et II
x, y	fonction de K_I, K_{II} et θ
κ	$3-4\nu$ en déformations planes; $(3-\nu/1+\nu)$ en contraintes planes
ν	coefficient de Poisson
σ_0	contrainte appliquée dans le cas d'un chargement uniaxial
MEF	méthode des éléments finis
MTS	contrainte tangentielle maximale
SED	densité d'énergie de déformation
$\{\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{\theta\theta}\}$	les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy dans polaire
$\{\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}\}$	les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy dans la base cartésienne
$\{u_x, u_y\}$	les composants de vecteur de déplacement dans la base cartésienne
$\{u_r, u_\theta\}$	les composants de vecteur de déplacement dans la base polaire

$u_{i,j} = H_{ij}$	tenseur du gradient de déplacement
$\alpha_I, \alpha_{II}, \gamma_I, \gamma_{II}$	Coefficients d'ajustement arbitraires
Y_I, Y_{II}	Facteur de géométrie
δ_I, δ_{II}	Exposant de raccord arbitraire

1. Introduction générale

La mécanique de la rupture est une science relativement récente qui s'est développée 20ème siècle [1 ,2]. La conception des structures mécaniques consiste essentiellement à assurer un degré de sécurité acceptable permettant de réduire les risques relatifs aux défaillances. Cependant, la présence de discontinuités géométriques (fissure, cavité, etc) réduit considérablement leur capacité de charges. Les fissures, en tant que source commune de discontinuité dans un milieu continu sont caractérisées par de fortes concentrations de contraintes de champs mécaniques nécessitant des méthodes de calculs spécifiques.

Parmi les approches permettant de modéliser la propagation de fissures, la mécanique linéaire de la rupture reste aujourd'hui la plus utilisée en pratique. De nombreuses théories ont été développées afin de prévoir l'initiation de fissures, dans le cadre des comportements élastiques homogène linéaire et isotropes sous des sollicitations statiques. Erdogan et Sih [3] ont développé le critère de la contrainte tangentielle maximale (critère MTS) permettant de prédire la contrainte critique et l'orientation de la croissance des fissures. Sih [4] a proposé le critère du facteur de densité d'énergie de déformation élastique minimale (critère SED) qui est basé directement sur la densité d'énergie de déformation. L'approche via la densité d'énergie de déformation s'est avérée être un outil puissant pour évaluer le comportement statique et en fatigue des structures mécaniques.

En mécanique de la rupture, plusieurs approches numériques ont été adoptées pour analyser le comportement mécanique des structures fissurées et déterminer les différents paramètres de la rupture. La méthode des éléments finis (MEF) est l'une des méthodes numériques les plus utilisées aujourd'hui pour traiter les problèmes pratiques de la rupture. Néanmoins, certaines difficultés nécessitent des traitements spécifiques

telles que la nécessité d'un raffinement important du maillage en fond de fissure ou le remaillage progressif lors de l'avancement du front de fissure.

L'objectif de ce mémoire est d'utiliser la méthode des éléments finis et la théorie de la densité d'énergie de déformation, pour simuler la trajectoire de propagation d'une fissure dans une éprouvette, sous un chargement en mode mixte.

2. Structure du manuscrit

Le présent manuscrit s'articule de la manière suivante :

- Le premier chapitre du manuscrit porte sur l'état de l'art de la mécanique de la rupture linéaire, et la présentation de quelques critères de rupture, ainsi que les méthodes numériques les plus utilisées.
- Le deuxième chapitre est consacré à la présentation de la géométrie de l'éprouvette utilisé au cours de notre étude pour les simulations par la méthode des éléments finis. Les étapes nécessaires à la création d'un modèle numérique avec les principaux modules disponibles, ont été détaillées en mode I et en mode mixte (I+II).
- Dans le troisième chapitre, les prévisions analytiques issues de ce travail et les résultats de la MEF, en termes de densité d'énergie de déformation et de contrainte tangentielle, sont analysées et comparées. De plus, ces deux approches ont été utilisées dans le code éléments finis pour prédire la trajectoire de propagation d'une fissure, dans des conditions de chargement en mode mixte. Enfin une validation de nos résultats a été effectuée, sur la base de données expérimentales issus de la littérature.
- Les résultats principaux obtenus dans ce travail sont réunis dans une conclusion générale. Enfin, des perspectives visant à améliorer le présent travail viennent clôturer le manuscrit.

Chapitre I : État de l'art critères de rupture en petites déformations

Ce premier chapitre présente un état de l'art sur la mécanique de la rupture d'un point de vue théorique et numérique. La première partie a pour but de présenter les notions essentielles de la rupture en petites déformations, ainsi que les critères de rupture adaptés aux matériaux fragiles. Dans la deuxième partie on discutera certains points relatifs aux méthodes numériques couramment utilisées dans l'analyse de la rupture des matériaux et structures.

Partie 1 : Concept théorique sur les petites déformations

I.1. Introduction

La mécanique de la rupture a pour objet essentiel l'étude des fissures macroscopiques : elle s'applique lorsqu'il existe dans le matériau des discontinuités telles générant dans la matière des modifications des états de contrainte, déformation et déplacement, de telle sorte que l'homogénéisation du milieu n'a plus de sens. La connaissance des différents régimes de fissuration, la prévision de la vitesse de propagation et la maîtrise des directions de fissuration sont indispensables pour une conception optimisée des pièces mécaniques, et, plus simplement, pour éviter les accidents. Ce bref exposé se limite au cas où le comportement du matériau est élastique linéaire homogène et isotrope, c'est le domaine de la mécanique linéaire de la rupture. Les mécanismes de rupture observés varient considérablement et dépendent fortement du matériau et de l'essai. Dans les essais de traction de l'acier, par exemple, on observe d'abord le phénomène dit de striction, qui se caractérise par un rétrécissement de la section transversale de l'éprouvette. La rupture se produit alors par écartement des deux éprouvettes dans le sens transversal. Pour le test de compression d'un matériau composite organique dans le sens des fibres, la rupture provient de la dépolymérisation de ces fibres [5] **Figure I-1.**

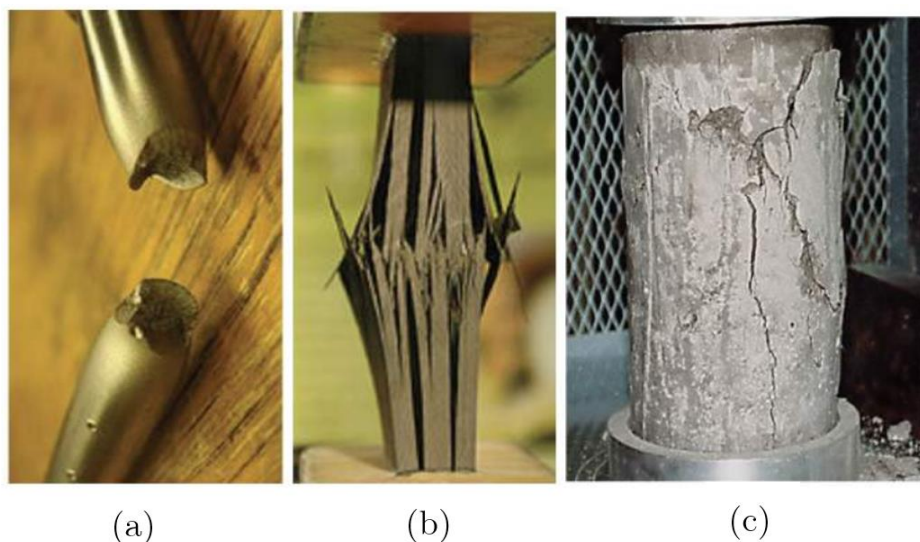


Figure I-1: État final de différentes éprouvettes après un essai uniaxial (a) acier (b) composite (c) béton (tiré de [6])

Le comportement et la rupture des matériaux peuvent être classés en fonction des différences observées lors de l'essai axial plan. Lorsqu'un matériau comme le béton voit sa contrainte tomber rapidement à zéro après la phase élastique, il est dit fragile. Alors qu'un matériau comme l'acier peut supporter de fortes déformations à température ambiante avant de casser, on dit qu'il est ductile. Entre les deux, il y a les matériaux dits quasi-fragiles, dont la déformation plastique reste confinée à une région restreinte proche de la singularité [5] **Figure I-2.**

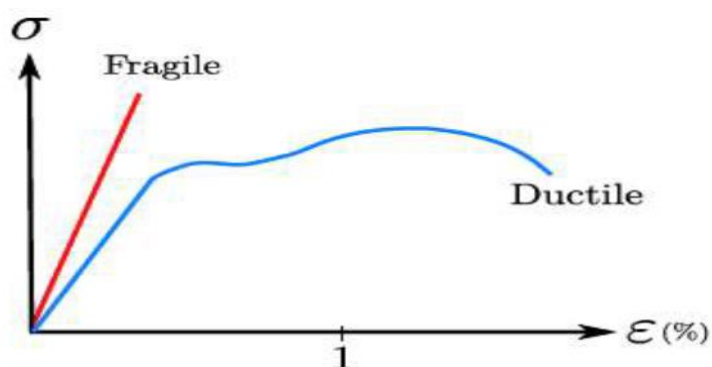


Figure I-2 : Réponses schématiques de différents matériaux dans un essai de traction uni axiale.

I.2. Aperçu historique sur la rupture

Les matériaux utilisés avant la révolution industrielle se limitaient principalement au bois, à la pierre ou à la brique et au mortier. Les briques et les mortiers sont relativement fragiles lorsqu'ils sont utilisés sous tension. Pour ces raisons, toutes ces constructions anciennes qui ont résisté à l'épreuve du temps (pyramides, ponts romains, etc.) sont sous pression.

Il a fallu attendre la révolution industrielle au début du 19e siècle, avec l'utilisation de l'acier, pour que des structures capables de résister à des charges de traction puissent enfin être conçues. L'utilisation de nouveaux matériaux ductiles (acier et autres alliages métalliques) pour résister aux charges de traction pose certains problèmes.

En augmentant la taille de l'ouvrage, ces risques de rupture ont été réduits. Cependant, cette solution est devenue n'est pas valable compte tenu du besoin de structures de plus en plus légères d'une part et de réduction des coûts d'autre part. On montre sur la **Figure I-3** quelques exemple.

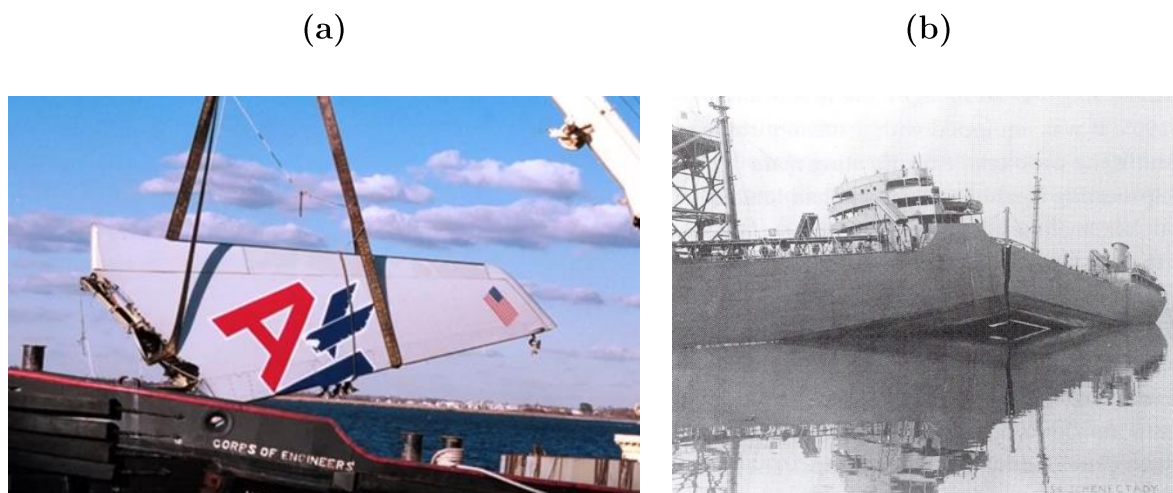


Figure I-3 : Catastrophes liées au phénomène de rupture (a) accident de l'avion American Airlines Airbus-A300 [7] (b) navire Liberty Ship [8].

Quelques dates

- 1920 : Griffith rupture d'un milieu élastique-fragile, bilan énergétique ;

- **1956** : Irwin, singularité du champ de contraintes en pointe de fissure ;
- **1968** : intégrale de Rice-Cherepanov ;
- **Années 70** : développement des méthodes numériques, éléments finis ;
- **Années 70** : fissuration en fatigue, chargements complexes ;
- **Années 80** : aspects 3D, fissures courtes (K. Miller) ;
- **Années 90** : approche locale de la fissuration.
- **Années 2000** :Phase Feld-Method Miche et al

I.3. Concepts généraux sur la mécanique de la rupture

I.3.1. Modes élémentaires de fissuration

Une fissure est définie comme une surface séparant localement un solide en deux parties.

Le champ des déplacements est alors discontinu à travers cette surface et les trois composantes vectorielles de cette discontinuité forment les trois modes de rupture (Figure I-4) :

- **Mode I**

C'est un mode d'ouverture de la fissure, c'est-à-dire que les deux surfaces de la fissure se déplacent l'une par rapport à l'autre dans une direction perpendiculaire au plan de la fissure.

- **Mode II**

C'est un mode de glissement droit (cisaillement dans le plan). Les deux lèvres de la fissure se déplacent dans un même plan et dans une direction perpendiculaire au front de la fissure.

- **Mode III**

C'est un mode de glissement (mode de cisaillement anti-plan), ou les deux surfaces de la fissure se déplacent dans le même plan et dans une direction parallèle au front de la fissure [9]

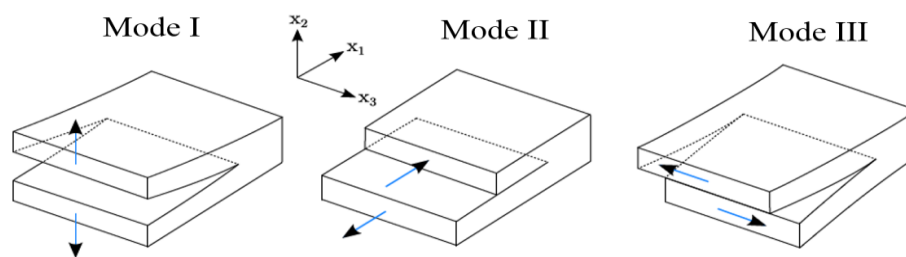


Figure I-4: Modes de rupture.

I.3.2. Zones délimitant le voisinage d'une pointe de fissure

La mécanique de la rupture étudie la fissure, son évolution dans le temps et son interaction avec le milieu continu, schématiquement, on peut distinguer dans un milieu fissuré trois zones successives [10,11].

I.3.2.1. La zone d'élaboration ou processus zone (zone 1)

Elle est présente autour du fond de fissure et dans le sillage laissé lors de la propagation de la fissure. La taille de cette région est généralement très petite, de l'ordre de quelques cristaux. La nature discontinue du processus physique de rupture dans cette région rend son étude très difficile car la frontière entre microscopique et macroscopique est mal définie

I.3.2.2. La zone singulière (zone 2) :

Dans laquelle les champs de déplacements, déformations et contraintes sont continus et possèdent une formulation indépendante de la géométrie lointaine de la structure. On démontre que dans cette zone, les composantes de champ de contraintes sont infinies au voisinage du front de fissure ($r \rightarrow 0$). Plus exactement, la singularité est en $(1/r)$ en milieu élastique linéaire. Le matériau ayant une limite élastique, il existe un rayon r_p autour de la pointe de fissure qui détermine la forme de la zone plastique. En fonction de la valeur de r_p , on dira que la rupture est fragile pour r_p petit et qu'elle est ductile pour

r_p grand. Cette distinction sur la base du paramètre r_p est très importante car elle conditionne la validité de la théorie utilisée :

- La Mécanique Linéaire de la Rupture pour les ruptures fragiles.
- La Mécanique Non Linéaire de la Rupture dans le cas de zone plastique non négligeable (rupture ductile).

I.3.2.3. La zone extérieure (zone 3)

Comprenant les champs lointains se raccordant d'une part, à la zone singulière, et d'autre part aux conditions aux limites en charges et en déplacements. Dans cette zone, les champs de déplacements, déformations et contraintes varient peu et peuvent être approximés par des polynômes orthogonaux communément utilisés dans la méthode des éléments finis. Diverses méthodes d'analyse permettent d'étudier les champs de déplacements, déformations et contraintes au voisinage d'une fissure.

La **Figure I-5** représente l'ensemble des zones citées ci-dessus.

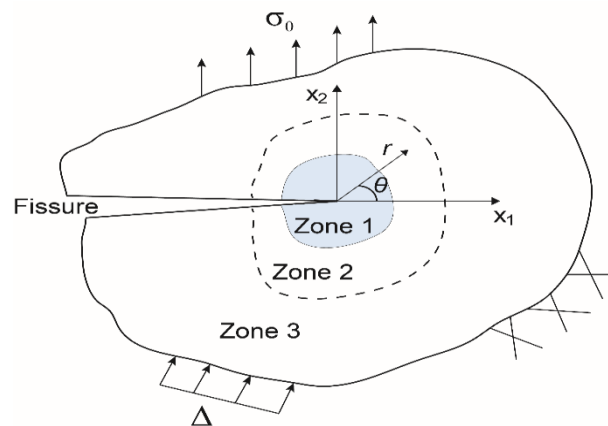


Figure I-5: Zones délimitant le voisinage d'une pointe de fissure

I.3.3. Propagation de fissures en mode mixte (2D)

Lorsqu'une fissure est soumise en même temps à plusieurs modes de chargement (Figure I-6), on cherche l'intensité de la sollicitation à laquelle la rupture se produit, et la direction dans laquelle la fissure se propage. Pour cela, on doit faire appel à un critère de

rupture. On va détailler deux critères qui dépendent du champ de contrainte uniquement et un critère énergétique. Ensuite on présente une comparaison des trois critères.

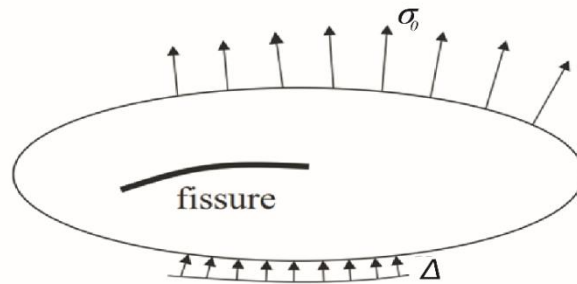


Figure I-6: Fissure sollicitée en mode mixte.

I.3.4. Champs des contraintes et des déplacements

La mécanique de la rupture consiste à caractériser le comportement à la fissuration des structures à l'aide des paramètres quantifiables au sens de l'ingénieur, notamment la contrainte appliquée, la taille de la fissure et la résistance à la fissuration du matériau. Il s'agit alors d'établir une procédure qui relie le champ de contraintes et de déplacements au voisinage de la fissure à la contrainte nominale appliquée au loin, à la taille de la fissure et son orientation, et enfin aux caractéristiques mécaniques du matériau.

Il existe diverses méthodes d'analyse permettent d'étudier les champs de déplacements, déformations et contraintes au voisinage d'une fissure. On peut regrouper l'ensemble de ces méthodes sous forme de trois types d'approches :

- **Approches directes (locales)** : ces approches résolvent des problèmes plans et font appel à la recherche de fonctions analytiques. Dans le cadre de ces approches, on énumère : la résolution de Westergaard [12], l'expansion de Williams [13] et l'analyse de Muskhelishvili [14].
- **Approches énergétiques** qui sont basées sur l'analyse énergétique du milieu continu contenant une fissure. Elles consistent à établir un bilan énergétique global. Dans le cadre de ces approches, on peut traiter des problèmes où le milieu n'est pas exclusivement élastique linéaire et homogène [15].

En élasticité plane, l'approche de Westergaard [12] reprise par Williams [13], permettent d'obtenir, à l'aide des fonctions d'Airy, les champs de déplacements et de contraintes au voisinage de la pointe de la fissure en fonction des facteurs d'intensité de contraintes, pour un matériau à comportement linéaire élastique.

Alors

Les contraintes sont définies en coordonnées cartésiennes par :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_I \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] - K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \right\} \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_I \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + K_{II} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \right\} \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_I \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] + K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right\} \end{pmatrix} \quad (\text{I.1})$$

$$\text{Avec } \sigma_{33} = \begin{cases} 0 & \text{en contraintes planes} \\ \nu_0 (\sigma_{11} + \sigma_{22}) & \text{en déformations planes} \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

Considérons une plaque avec une fissure inclinée de longueur a , soumise à une contrainte uniforme, égale à σ_0 dans le cas d'un chargement uniaxial **Figure I-7**. Les facteurs d'intensité de contraintes K_I et K_{II} sont donnés par les équations suivantes :

dans le cas infini [4] :

$$\begin{cases} K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a} \sin^2 \beta_1 \\ K_{II} = \sigma_0 \sqrt{\pi a} \cos \beta_1 \sin \beta_1 \end{cases} \quad (\text{I.3})$$

Dans le cas fini [16], on a :

$$\begin{cases} K_I = Y_I \sigma_0 \sqrt{\pi a} \sin^2 \beta_2 \\ K_{II} = Y_{II} \sigma_0 \sqrt{\pi a} \cos \beta_2 \sin \beta_2 \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

avec

$$Y_i = \gamma_i \left[\cos \frac{\alpha}{W} \right]^{-\delta_i} + \alpha_i \left(\frac{\alpha}{W} \right) \quad (\text{I.5})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_1 = \gamma_1 \left[\cos \frac{\alpha}{W} \right]^{-\delta_1} + \alpha_1 \left(\frac{a}{W} \right) \\ \gamma_1 = 1.9 (\cos(\beta_2))^{-0.921} - 0.38 \beta_2^{2.03} \\ \delta_1 = \frac{8.53 - 5.57 \beta}{\beta_2^2 - 0.82 \beta_2 + 1.37} \\ \alpha_1 = \frac{1.12}{\beta_2^3 - 0.73 \beta_2^2 + 0.8} \end{array} \right. \quad (\text{I.6})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_2 = \gamma_2 \left[\cos \frac{\alpha}{W} \right]^{-\delta_2} + \alpha_2 \left(\frac{a}{W} \right) \\ \gamma_2 = 1.2 (\cos(\beta_2))^{-0.3} - 0.15 \beta_2 \\ \delta_2 = 2.85 \beta_2^3 - 2.53 \beta_2^2 + 5.1 \\ \alpha_2 = 0.8 \beta_2^3 - 2.53 \beta_2^2 + 1.66 \beta_2 + 0.54 \end{array} \right. \quad (\text{I.7})$$

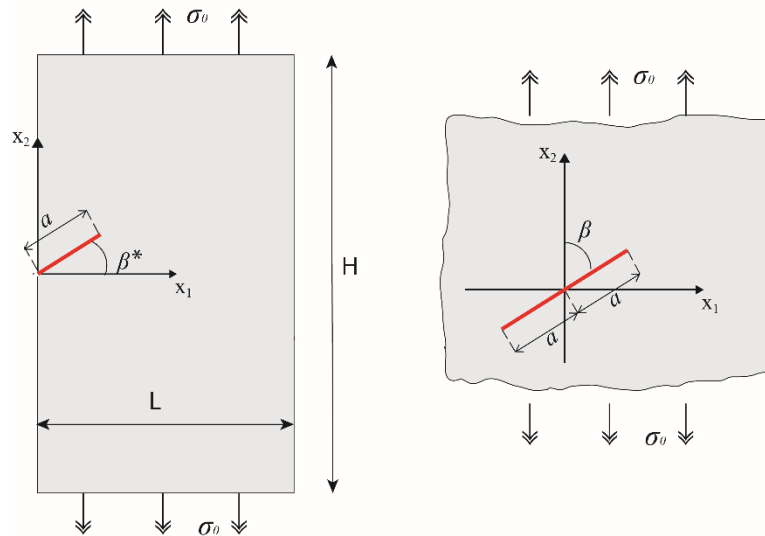


Figure I-7: Représentation de l'éprouvette dans le cas fini et infini

Les termes dominants de l'Eq (I.1) sont proportionnels à $1/\sqrt{r}$, de plus les contraintes sont théoriquement infinies à la pointe de la fissure c'est-à-dire lorsque $r \rightarrow 0$ physiquement les contraintes sont finies. Aussi, les facteurs d'intensité de contrainte,

sont exprimés en fonctions à la fois du chargement et de la géométrie, permettent de caractériser la sévérité des composant $\{\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{\theta\theta}\}$ contraintes en pointe de fissure [9].

On peut utiliser le changement de base afin d'exprimer les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy (voir Figure I-8) [10]:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta \sigma_{11} + 2 \sin \theta \cos \theta \sigma_{12} + \sin^2 \theta \sigma_{22} \\ -\sin \theta \cos \theta \sigma_{11} + (2 \cos^2 \theta - 1) \sigma_{12} + \sin \theta \cos \theta \sigma_{22} \\ \sin^2 \theta \sigma_{11} - 2 \sin \theta \cos \theta \sigma_{12} + \cos^2 \theta \sigma_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{I.8})$$

Compte tenu des Eqs (I.1) et (I.8), le champ de contraintes en coordonnées polaires peut s'écrire comme suit :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_I \left[5 \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] - K_{II} \left[5 \sin \frac{\theta}{2} - 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right] \right\} \\ \frac{1}{4\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_I \left[\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right] + K_{II} \left[\cos \frac{\theta}{2} + 3 \cos \frac{3\theta}{2} \right] \right\} \\ \frac{1}{4\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_I \left[3 \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right] - 3 K_{II} \left[\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right] \right\} \end{pmatrix} \quad (\text{I.9})$$

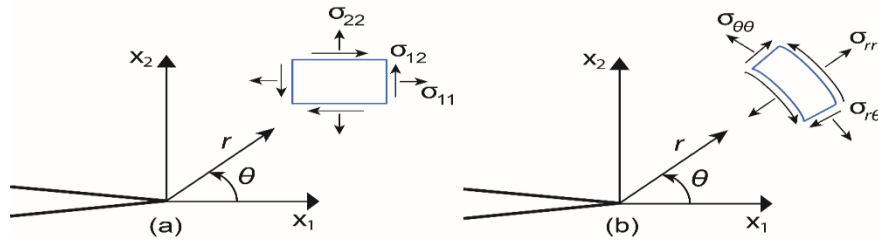


Figure I-8: Champ de contrainte (a) dans le système de coordonnées cartésiennes (b) dans le système de coordonnées polaires [9].

En utilisant la loi de comportement élastique linéaire, les composantes du vecteur déplacement s'écrivent en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_0} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ K_I \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\frac{\kappa_0 - 1}{2} + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] + K_{II} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\frac{\kappa_0 + 1}{2} + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \right\} \\ \frac{1}{\mu_0} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ K_I \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\frac{\kappa_0 + 1}{2} - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] - K_{II} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\frac{\kappa_0 - 3}{2} + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \right\} \end{pmatrix} \quad (\text{I.10})$$

La relation de $\{u_r, u_\theta\}$ avec $\{u_x, u_y\}$ s'écrit sous la forme suivante [10]:

$$\begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta u_x + \sin\theta u_y \\ -\sin\theta u_x + \cos\theta u_y \end{pmatrix} \quad (\text{I.11})$$

Compte tenu des Eqs. (I.10) et (I.11), on peut écrire le champ de déplacements en coordonnées polaires de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4\mu_0} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ K_I \left[(2\kappa_0 - 1) \cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{3\theta}{2} \right] - K_{II} \left[(2\kappa_0 - 1) \sin\frac{\theta}{2} - 3 \sin\frac{3\theta}{2} \right] \right\} \\ \frac{1}{4\mu_0} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ K_I \left[-(2\kappa_0 + 1) \sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{3\theta}{2} \right] - K_{II} \left[(2\kappa_0 + 1) \cos\frac{\theta}{2} - 3 \cos\frac{3\theta}{2} \right] \right\} \end{pmatrix} \quad (\text{I.12})$$

Dans le système de coordonnées polaires, la matrice du gradient de déplacement peut s'écrire comme suit :

$$\begin{pmatrix} u_{r,r} & u_{r,\theta} \\ u_{\theta,r} & u_{\theta,\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) \end{pmatrix} \quad (\text{I.13})$$

Dans le système de coordonnées cartésiennes, les composantes de la matrice du tenseur du gradient de déplacement sont :

$$\begin{pmatrix} H_{11} = u_{1,1} \\ H_{12} = u_{1,2} \\ H_{21} = u_{2,1} \\ H_{22} = u_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^2\theta H_{\theta\theta} + \cos^2\theta H_{rr} - \sin\theta \cos\theta (H_{r\theta} + H_{\theta r}) \\ \cos^2\theta H_{r\theta} - \sin^2\theta H_{\theta r} + \sin\theta \cos\theta (H_{rr} - H_{\theta\theta}) \\ \cos^2\theta H_{\theta r} - \sin^2\theta H_{r\theta} + \sin\theta \cos\theta (H_{rr} - H_{\theta\theta}) \\ \sin^2\theta H_{rr} + \cos^2\theta H_{\theta\theta} + \sin\theta \cos\theta (H_{r\theta} + H_{\theta r}) \end{pmatrix} \quad (\text{I.14})$$

I.4. Critères de rupture

I.4.1. Critère du facteur d'intensité de contrainte

C'est un des plus anciens critères de la rupture fragile. D'une manière générale, le facteur d'intensité de contrainte K_I en mode I est exprimé par l'équation :

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \cdot \alpha(a) \quad (\text{I.15})$$

Avec :

- σ : contrainte appliquée ;
- $\alpha(a)$: coefficient de correction géométrique ;
- a : longueur de fissure.

La valeur du facteur d'intensité de contrainte est calculée analytiquement ou par éléments finis pour différentes conditions aux limites et géométries de pièces et de fissures. Le facteur d'intensité de contrainte critique K_{IC} correspond à la force instable maximale. Cette valeur caractéristique de la ténacité du matériau se traduit par une rupture par fissuration brutale. Le critère de rupture pertinent correspond à la distribution critique de contrainte au voisinage de la fissure : la rupture se produit lorsque la valeur du facteur d'intensité de contrainte est supérieure à la valeur critique : $K_{IC} \leq K_I$. Cette norme est principalement utilisée pour les états de déformation plane. A l'état de contraintes planes, le critère d'instabilité K_{IC} dépend de l'épaisseur de la structure. Dans la réalité, le matériau n'est jamais complètement fragile à la pointe de la fissure où une zone plastique reste présente. Tant que cette zone reste confinée, enserrée par la zone élastique qui impose son comportement, le critère du facteur d'intensité de contraintes peut s'appliquer.

I.4.2. Critère de la contrainte tangentielle maximale

Par analogie avec le critère d'Irwin, Erdogan et Sih [3] ont proposé le critère suivant :

« Au moment de la rupture, la propagation de la fissure se fera dans le plan passant

par le front de la fissure et au travers duquel la contrainte de tension est maximale et pour une valeur critique de cette contrainte ».

Le critère peut s'écrire simplement :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} \leq 0 \end{cases} \quad (\text{I.16})$$

Dont la solution permet de calculer l'angle de propagation θ_0 de la fissure. La formule prévoit pour le mode I pur $K_{II} = 0$, $\theta_0 = 0^\circ$ tandis que pour le mode II pur $K_I = 0$, $\theta_0 = 70,5^\circ$ comme la montre la **Figure I-9**

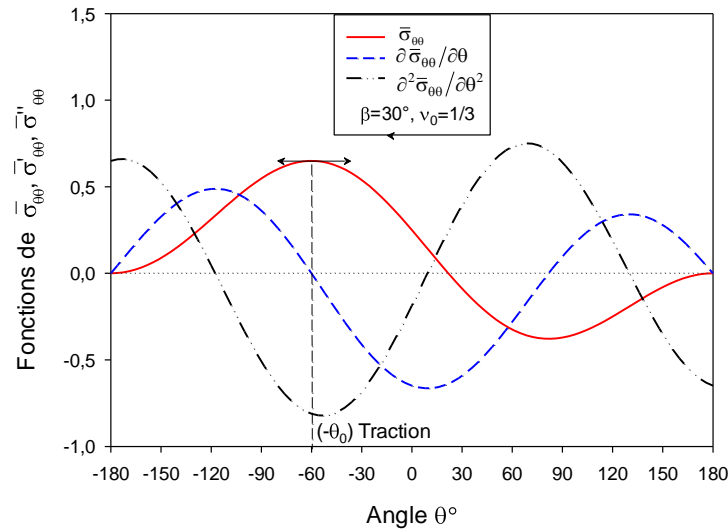


Figure I-9: Graphiques des fonctions $\bar{\sigma}_{\theta\theta} = (\sqrt{2r}/\sigma\sqrt{a})\sigma_{\theta\theta}$,

$\bar{\sigma}'_{\theta\theta} = (\sqrt{2r}/\sigma\sqrt{a})(\partial\sigma_{\theta\theta}/\partial\theta)$ et $\bar{\sigma}''_{\theta\theta} = (\sqrt{2r}/\sigma\sqrt{a})(\partial^2\sigma_{\theta\theta}/\partial\theta^2)$ en fonction de l'angle

θ pour un coefficient de Poisson $\nu_0 = 1/3$ et $\beta = 30^\circ$.

I.4.3. Critère de la densité d'énergie de déformation

Sih [4] a proposé le critère de la densité d'énergie sur le facteur de densité d'énergie de déformation (en anglais, the Strain Energy Density "SED ») qui s'écrit sous la forme :

$$S = Wr \quad (\text{I.17})$$

Avec W la densité d'énergie de déformation d'où SED s'écrivant :

$$S(\theta) = \frac{I}{\pi} (a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2) \quad (\text{I.18})$$

$$\begin{cases} a_{11} = \frac{1}{16\mu} [(1 + \cos \theta)(-\kappa \cos \theta)] \\ a_{12} = \frac{\sin \theta}{16\mu} [2 \cos \theta - (\kappa - 1)] \\ a_{22} = \frac{1}{16\mu} (\kappa + 1)(1 - \cos \theta) + (1 + \cos \theta)(3 \cos \theta - 1) \end{cases} \quad (\text{I.19})$$

$$\begin{cases} \kappa = 3 - 4\nu & \text{En déformation plane,} \\ \kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & \text{En contrainte plane,} \end{cases}$$

Le critère de propagation s'écrit donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} > 0 \end{cases} \quad (\text{I.20})$$

L'Eq.(I.17) permet le calcul de l'angle de rupture θ_0 , pour un coefficient de Poisson ν_0 et une inclinaison initiale de la fissure β donnés. Quatre solutions découlent de la résolution numérique de cette équation à l'aide du logiciel MLE. Comme l'illustre la **Figure I-10**, pour $\nu_0 = 1/3$ et $\beta = 30^\circ$, seules deux solutions correspondent aux valeurs minimales S_{\min} de S , c'est-à-dire les solutions remplissant la condition

$$\left. \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_0} > 0; \text{ les deux autres solutions correspondent aux valeurs maximales de } S.$$

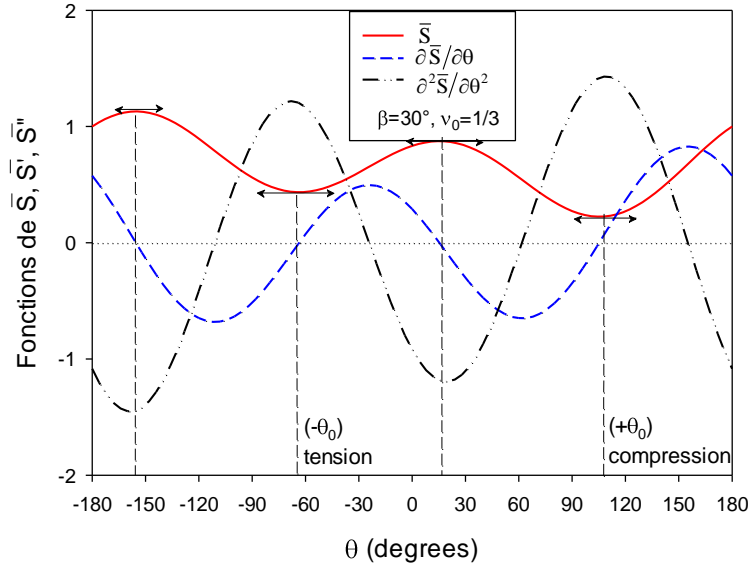


Figure I-10: Graphiques des fonctions $\bar{S} = (16\mu_0/\sigma_0^2 a)S$, $\bar{S}' = (16\mu_0/\sigma_0^2 a)(\partial S/\partial\theta)$ et $\bar{S}'' = (16\mu_0/\sigma_0^2 a)(\partial^2 S/\partial\theta^2)$ en fonction de l'angle θ , pour un coefficient de Poisson $\nu_0 = 1/3$ et $\beta = 30^\circ$.

Une solution remplissant les conditions données par l'Eq (I.20) correspond au cas de la traction uniaxiale, dans laquelle la fissure se propagera dans la direction θ_0 négative (Figure I-11a) ; et l'autre solution correspond au cas d'une compression uniaxiale, dans laquelle la fissure se développera dans la direction θ_0 positive (Figure I-11b). Ces résultats sont en accord avec les hypothèses [4]. Le même constat s'applique également pour une fissure dans une éprouvette avec des dimensions finies.

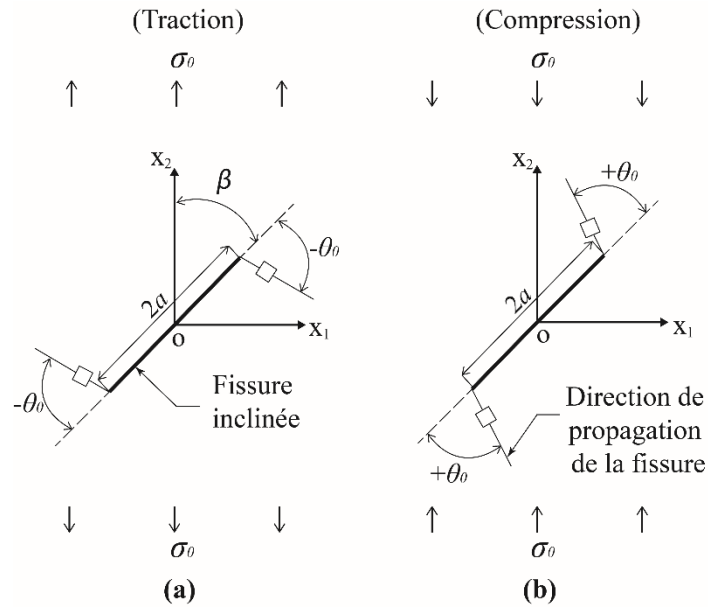


Figure I-11: Fissure inclinée (a) en traction et (b) en compression uniaxiale.

Il convient de préciser que l'état de l'art présenté ici n'est pas exhaustif. En effet, il existe bien d'autres critères dans la littérature, on peut citer par exemple : critère de taux de restitution d'énergie maximale, critère du taux de restitution d'énergie G ou de l'intégrale J , etc [9].

Partie 2 : Méthodes numériques pour la modélisation de la fissuration et de la rupture des matériaux

Dans cette section, on présente les notions fondamentales des méthodes numériques les plus utilisées en mécanique de la rupture en discutant brièvement des leurs avantages et inconvénients.

I.1. Méthode des éléments finis (MEF)

La méthode des éléments finis est la principale méthode de calcul de structure en mécanique. Par conséquent, il convient naturellement pour résoudre les problèmes de fissuration et de rupture. Il existe des références récentes [17, 18, 19] qui étudient la propagation des fissures dans des études 2D et 3D. Le principal inconvénient de cette méthode est que la fissure doit être explicitement décrite par le maillage. L'utilisation de la méthode des éléments finis (FEM) nécessite souvent une préparation approfondie du maillage et n'est pas toujours très précise pour l'évaluation des facteurs d'intensité de contrainte. La Figure I-12 montre une plaque fissurée avec un maillage structuré autour du fond de fissure. Les points sont entourés d'un cercle d'éléments identiques reliés au maillage extérieur.

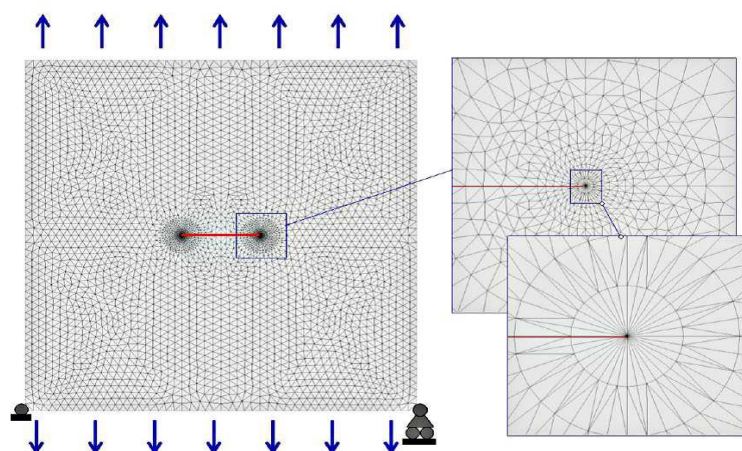


Figure I-12: Plaque carrée pré-fissurée et le maillage associé pour le calcul des facteurs d'intensité de contrainte[9].

Dans le cas où la fissure est droite et sollicitée en mode I durant toute la propagation, le trajet de la fissuration est connu à priori et on peut mettre en œuvre des méthodes de déboutonnage, relâchant progressivement les nœuds se situant sur le trajet de fissure. La difficulté réside alors dans les oscillations numériques induites et dans la pertinence des lois physiques de déboutonnage. Dans le cas de sollicitations en mode mixte, le déboutonnage devient plus compliqué et il faut procéder parallèlement à des étapes de remaillage avec toutes les difficultés que cela induit en termes de coûts de calcul et de projections de champs.

I.2. Méthode sans maillage

Appliquée aux problèmes de mécanique de la rupture depuis 1994, cette méthode est plus proche de la méthode des éléments finis que de la méthode des éléments de frontière[20]. Elle est basée sur la formulation faible des équations aux dérivées partielles par la méthode de Galerkin (comme pour la méthode des éléments finis), et d'autre part est construite pour introduire une approximation du champ de déplacement de la forme faible ne qui ne nécessite un maillage. Il n'y a qu'un seul ensemble de nœuds distribués dans le domaine, et l'approximation du champ de déplacement en un point ne dépend que de la distance de ce point à ses nœuds environnants, et non de l'appartenance à un élément fini. En mécanique de la rupture, une fissure se propage entre l'ensemble des nœuds, et si la ligne reliant le nœud et le point est coupée, la présence de la fissure est simplement considérée en réduisant le poids du nœud sur l'approximation du déplacement en un certain point par Fissures [21]. L'inconvénient de cette approche est que les calculs effectués peuvent être lourds (calculs voisins) et il est parfois difficile de modéliser les conditions aux limites.

I.3. Méthode de sous-modélisation

La sous-modélisation est une technique utilisée pour étudier une partie locale d'un modèle avec un maillage raffiné, pour une plus haute-fidélité. Cette méthode est particulièrement utile lorsqu'il est nécessaire d'obtenir une solution précise et détaillée dans une ou plusieurs régions locales, alors que l'analyse de la structure globale est trop coûteuse ou ne vaut pas la peine. Le concept de base du sous-modèle est illustré dans la **Figure I-13**.

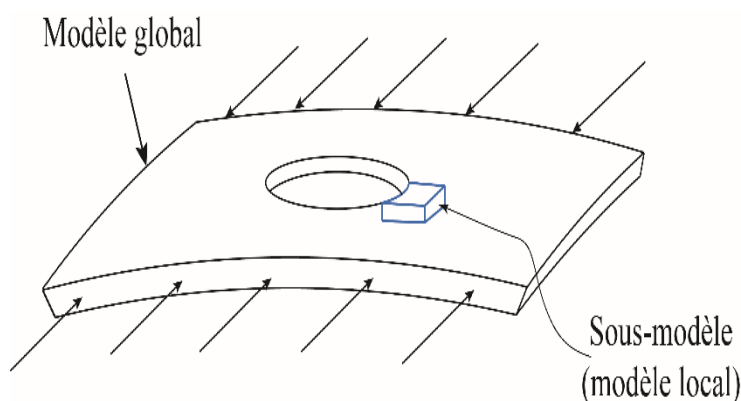


Figure I-13: Illustration de la technique de sous-modélisation.

En résumé, une première analyse globale d'une structure identifie généralement les zones où la réponse à la charge est jugée cruciale. La modélisation secondaire permet ensuite d'améliorer facilement le modèle de ces zones sans avoir à recourir à un remaillage et à une nouvelle analyse de l'ensemble du modèle [9].

Chapitre II : Simulation numérique

Dans ce chapitre, on présente la géométrie de l'éprouvette utilisée au cours de notre étude dans le cadre des simulations par la méthode des éléments finis. Les étapes nécessaires à la création d'un modèle numérique avec les principaux modules disponibles, ont été détaillées en mode I et en mode mixte (I+II).

II.1. Introduction

La simulation et l'analyse numérique se sont développées ces dernières années dans le cadre de la conception des produits industriels (constructeurs automobile, aéronautique, spatial, etc.), améliorant ainsi la productivité des industriels en réduisant les coûts [22].

D'un point de vue technique, les résultats obtenus grâce à un code de calcul par éléments finis sont le bilan des énergies, des forces nodales, des déformations, des déplacements, des contraintes, des vitesses, des accélérations et de toutes les grandeurs physiques nécessaires à la conception d'un modèle.

II.2. Géométrie de l'éprouvette

Au cours de notre étude, nous avons utilisé les éprouvettes SENT (Single-Edge-Notched-Tension), qui est illustrée sur la Figure I-1. Cette géométrie est utilisée afin d'étudier la propagation instable de fissures sous chargement statique.

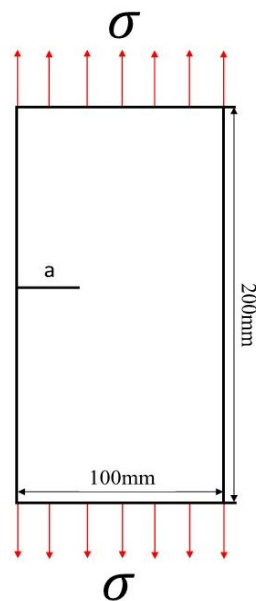


Figure II-1: Géométrie d'une éprouvette SENT

avec :

- **a** : la longueur de la fissure initiale.

II.3. Création des modèles

Nous avons commencé par dessiner les éprouvettes en 2D des Mode I et I+II sur l'interface sketch du logiciel, comme montré ci-dessous.

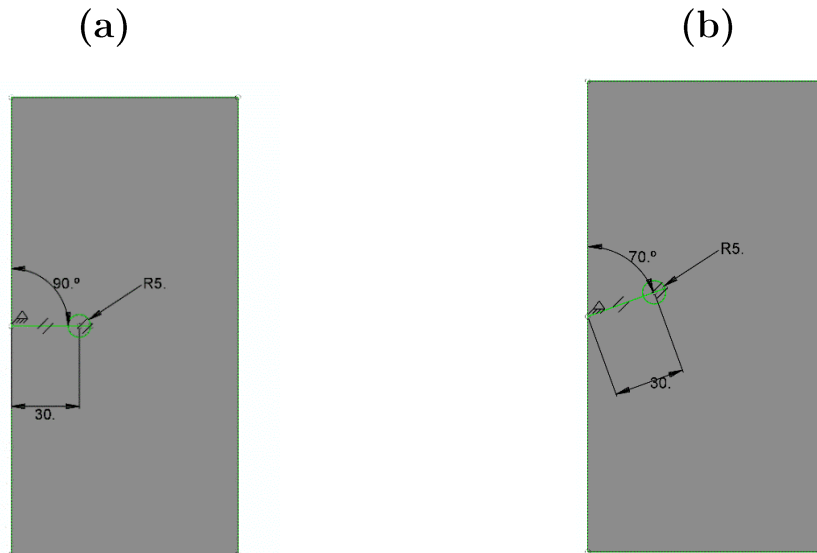


Figure II-2 : création de Modèle en 2D (a) mode I (b) mode mixte

II.4. . Propriétés mécaniques

Pour cette analyse bidimensionnelle par éléments finis, les propriétés de l'alliage d'aluminium utilisées sont : $E=72400$ Mpa , $\nu =0.3$ et $K_{IC} = 1297$ N/mm^{3/2} , où E , ν et K_{IC} représentent respectivement le module d'Young, coefficient de Poisson et facteur d'intensité de contrainte critique.

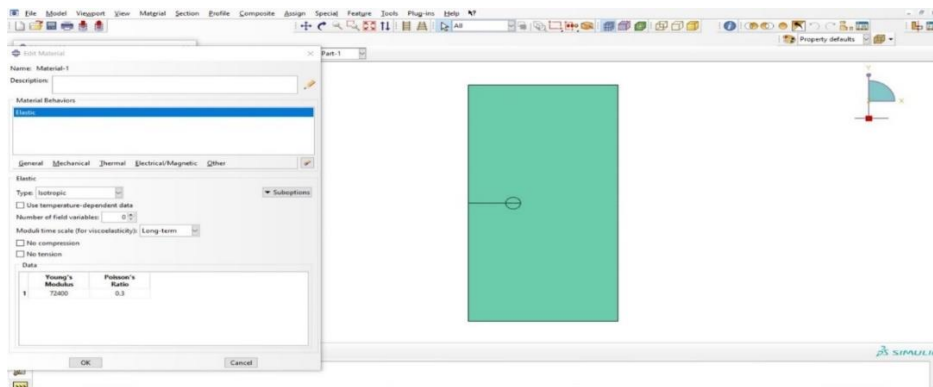


Figure II-3: Introduction des propriétés du matériau

II.5. Création du repère global

Dans cette étape, nous avons créé un repère global.

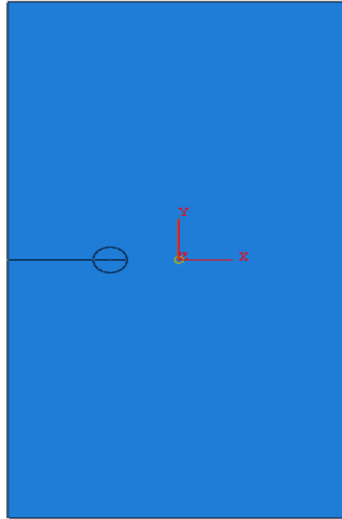


Figure II-4: création d'un repère

II.6. Définition de la fissure

Dans cette étape, on doit définir la fissure initiale qui a une longueur de 30mm ce que montre sur la Figure II-5.

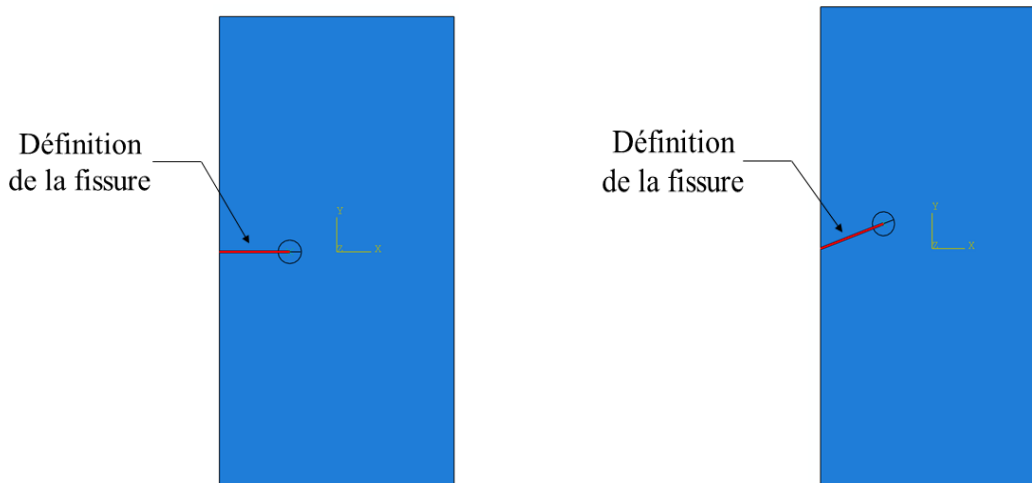


Figure II-5 : Définition de la fissure

II.7. Conditions aux limites

Dans cette étape, on va définir les conditions aux limites appliqué à la plaque.

II.7.1. Chargement

Le chargement appliqué à cette plaque en mode I et mode mixte, est uniformément répartie sur les arrêtes supérieur et inférieur d'une intensité $\sigma=80.479$ MPa.

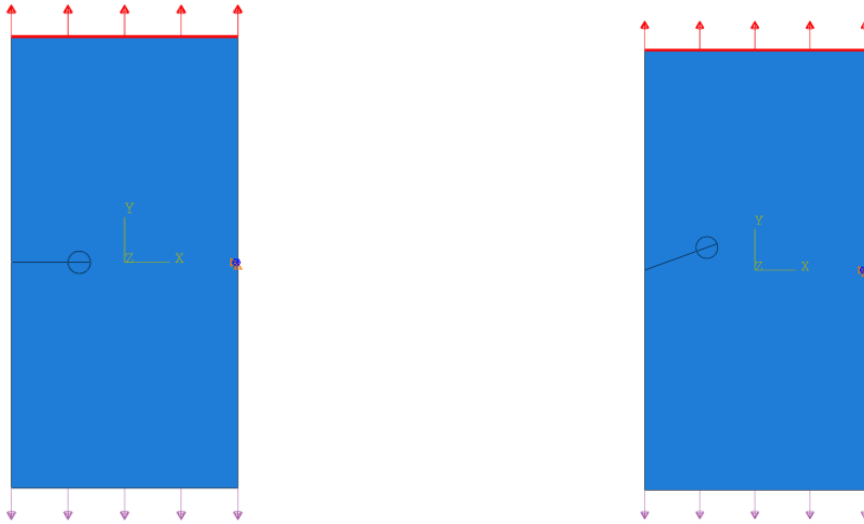


Figure II-6: Application de chargement en mode I et mode mixte

II.7.2. Blocages

On a bloqué tous les déplacements U_x , U_y et U_z ainsi que toutes les rotations au point repéré par BC-1 dans la figure ci-dessous. Cette condition a été ajoutée afin d'éviter la rotation de l'éprouvette.

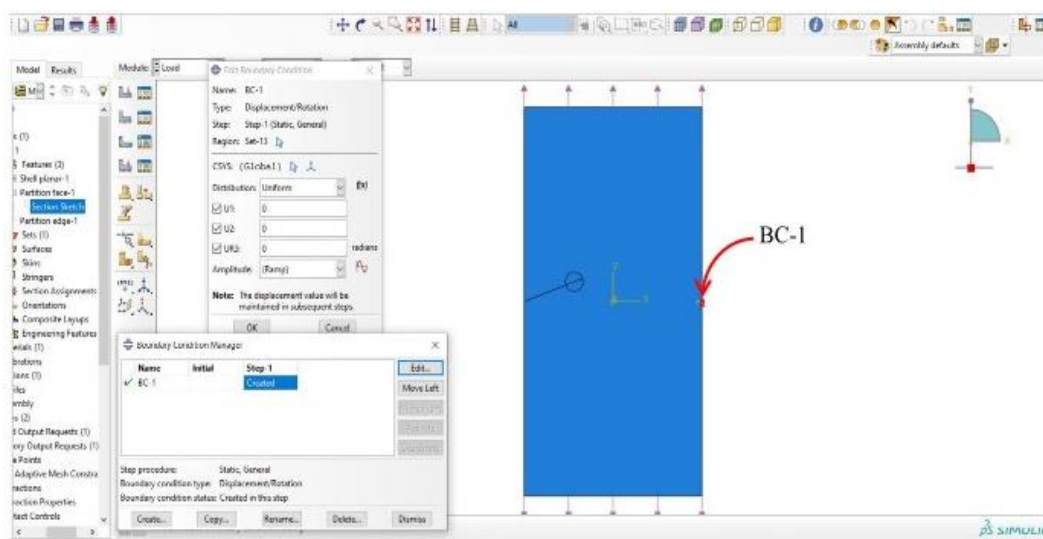


Figure II-7: Blocage des déplacements au point BC-1

II.8. Maillage

En petites déformations, seule une région restreinte très proche du fond de fissure est affectée par la singularité de la fissure. Dans tous les cas, un maillage très fin près de la pointe de la fissure est nécessaire. Cependant, l'application des charges importantes génère une déformation excessive des éléments situés au voisinage du fond de fissure. Pour cette modélisation nous avons effectué un maillage grossier sur la géométrie complète du modèle Figure II-8. Un maillage fin est appliqué autour de la pointe de la fissure, qui est constitué de 59 éléments qui sont distribués radialement avec un rapport de biais = 500 (indice d'ABAQUS), et de 16 éléments autour du cercle. La taille de plus petit élément est de l'ordre de 3.3×10^{-3} .

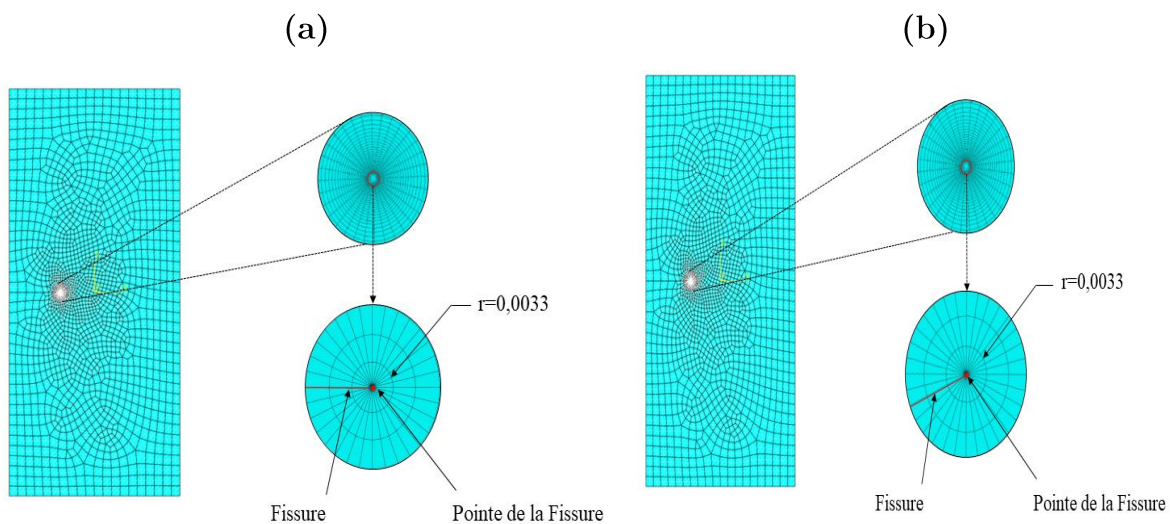


Figure II-8: Maillage obtenu (a) mode I ;(b) mode mixte

II.9. Résultats obtenus

Après l'application de maillage, nous avons obtenu les résultats de la Figure II-9 qui montre la distribution des contraintes équivalentes de Von-Mises autour de la pointe de la fissure. On constate que la contrainte Von-Mises est maximale à la pointe de la fissure dans les deux modes.

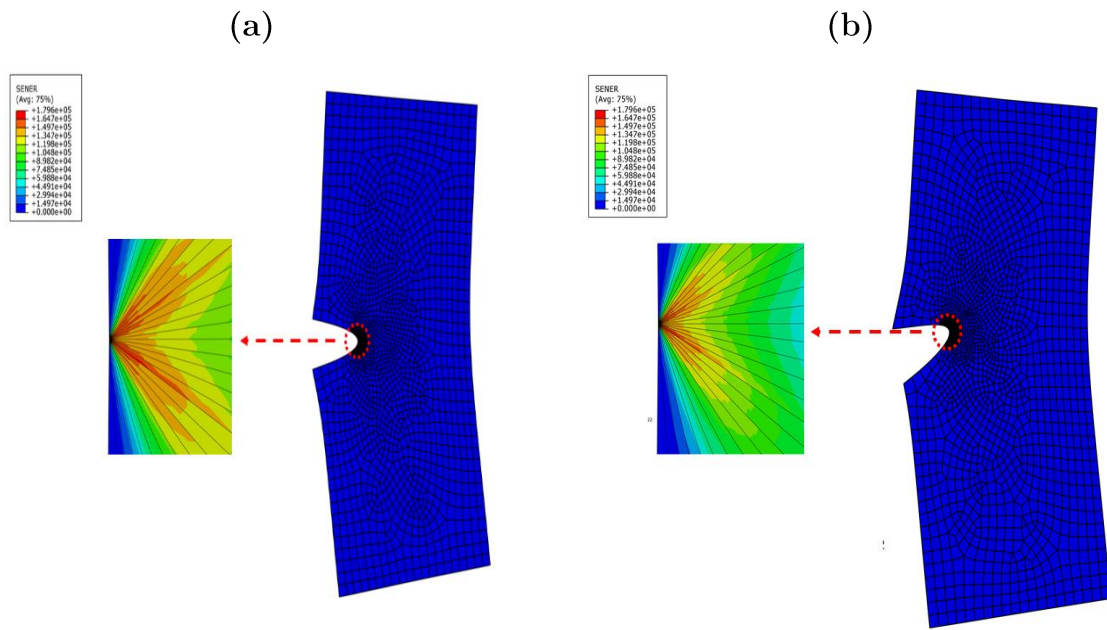


Figure II-9: Résultats de la modélisation (a) mode I ;(b) mode mixte.

Chapitre III : Résultats et validation numérique

Dans cette partie du travail, deux approches ont été utilisées dans le code élément fini pour prédire la trajectoire de propagation d'une fissure, dans des conditions de chargement en mode mixte. De plus une validation de nos résultats a été effectuée, en les comparant aux données expérimentales extraites dans la littérature.

III.1. Introduction

En mécanique de la rupture, plusieurs approches numériques ont été adoptées pour analyser le comportement mécanique des structures fissurées et déterminer les différents paramètres de la rupture. La méthode des éléments finis est l'une des méthodes numériques les plus utilisées aujourd'hui pour traiter les problèmes de propagation des fissures. Cependant, deux difficultés majeures se posent avec cette méthode :

- Premièrement, la nature physique du champ de déplacement singulier nécessite un maillage très fin autour de l'extrémité de la fissure afin de le représenter correctement.
- La représentation de la fissure pose le problème du chemin de propagation de la fissure par simulation numérique. Dans le cas de fissures sous chargement de mode I, le chemin de la fissure est parfaitement connu comme étant rectiligne. Dans le cas d'une fissure soumise à un chargement en mode mixte où la croissance de la fissure est inconnue.

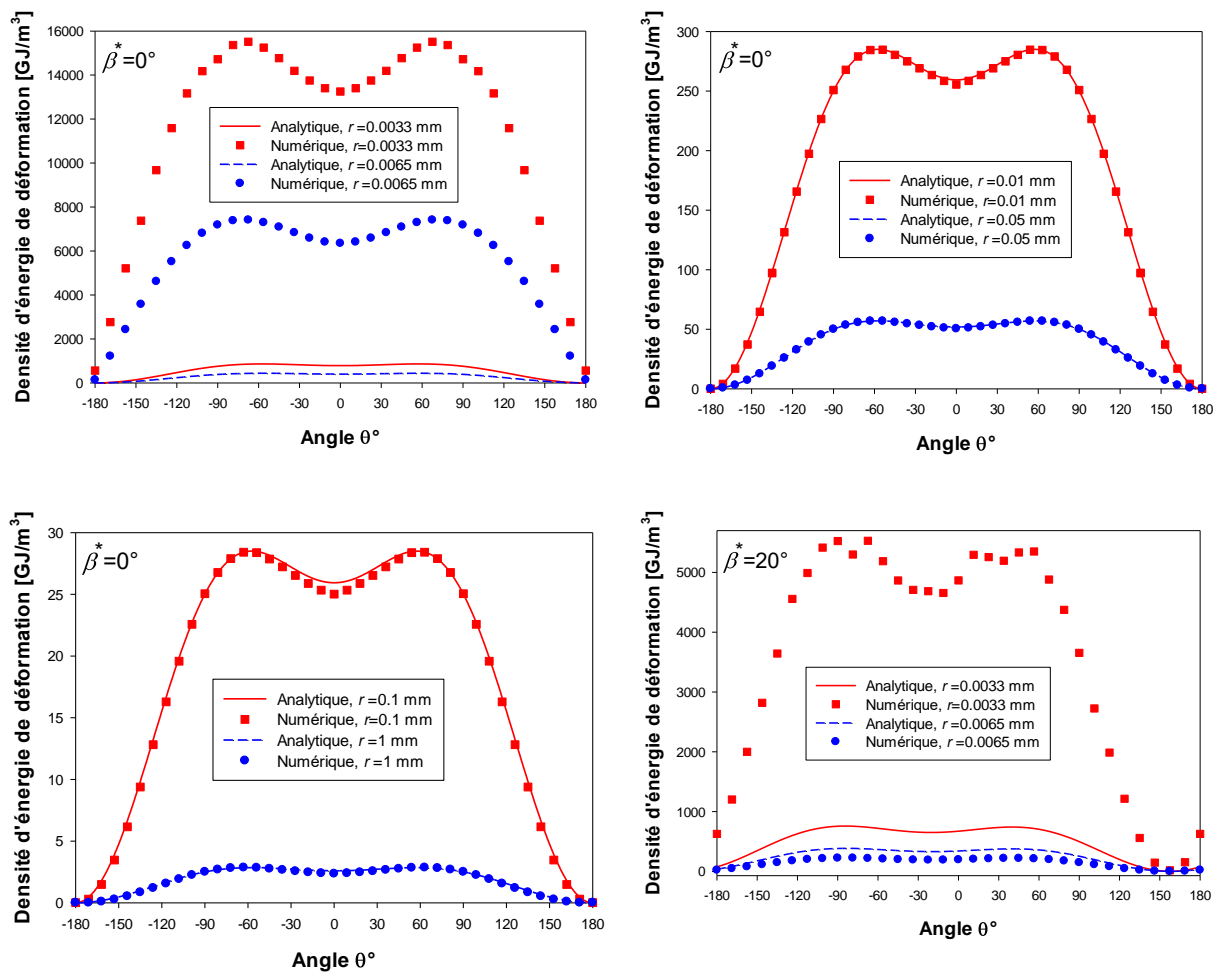
Divers critères de rupture pour les fissures soumises à un chargement en mode mixte ont été introduits pour la détermination de la direction de propagation et de la contrainte critique. Griffith [1] a introduit un critère pour déterminer les conditions d'initiation de la propagation d'une fissure. Le critère du taux de libération d'énergie maximum (MERR) [23] suit la condition de Griffith ainsi la croissance de la fissure suit l'orientation du taux de libération d'énergie maximum.

Dans ce chapitre, la méthode des éléments finis a été utilisée afin de prédire les angles d'initiation et la trajectoire de propagation de la fissure dans le cadre de la mécanique linéaire élastique de la rupture, sous un chargement en mode mixte I/II. Dans un premier temps, on compare les résultats numériques aux solutions analytiques en termes de densité d'énergie de déformation et de contrainte tangentielle. Cette étape nous permet la validation de notre modèle numérique. Dans un second temps, on s'intéresse à l'évolution de la direction de propagation de la fissure, en utilisant les

angles critiques issus du modèle numérique. Enfin une validation de résultats obtenus a été effectuée, en les comparant à des données extraites de la littérature.

III.2. Validation du modèle numérique

Afin de vérifier la validité de de notre modèle numérique, nous avons comparé les résultats analytiques de la densité d'énergie de déformation (Eq(I.17)) et de la contrainte tangentielle (Eq(I.16)), à ceux obtenus à l'aide de la méthode des éléments finis. L'évolution de W et de $\sigma_{\theta\theta}$ en fonction de l'angle polaire θ pour différentes valeurs de r et de β^* , sont rapportées sur les Figure III-1 et Figure III-2, respectivement.



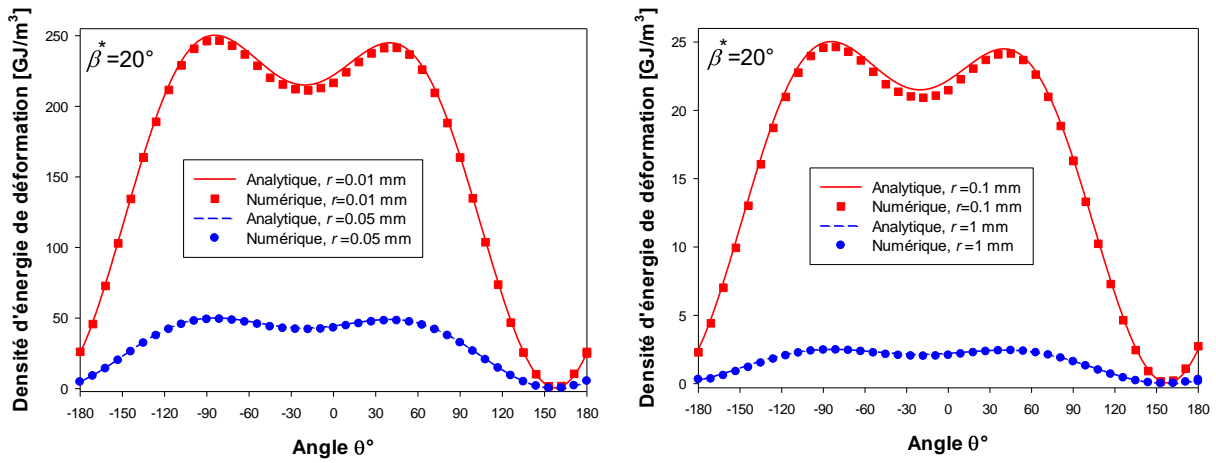
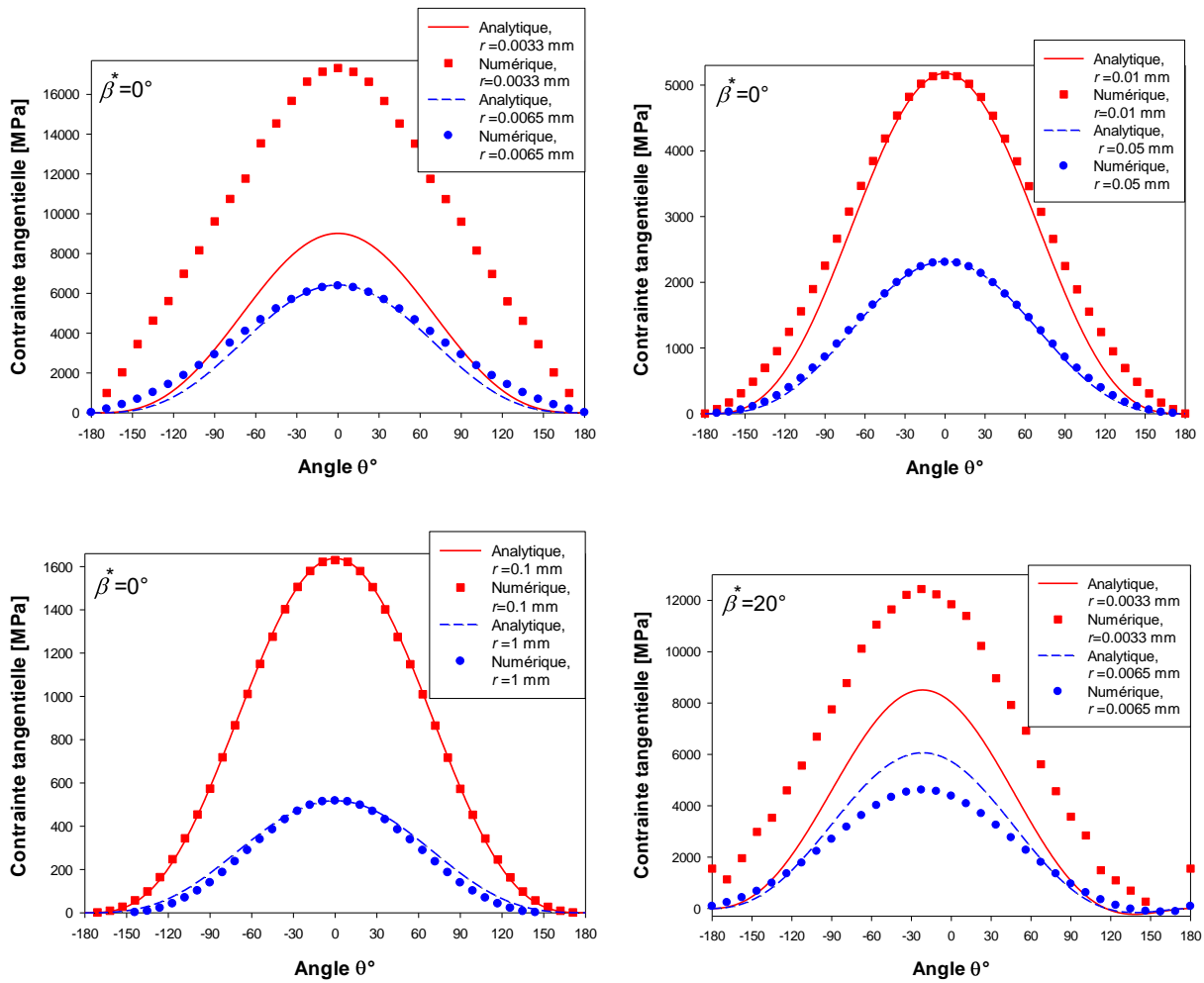


Figure III-1: Variation de $W = S/r$ en fonction de l'angle polaire θ .



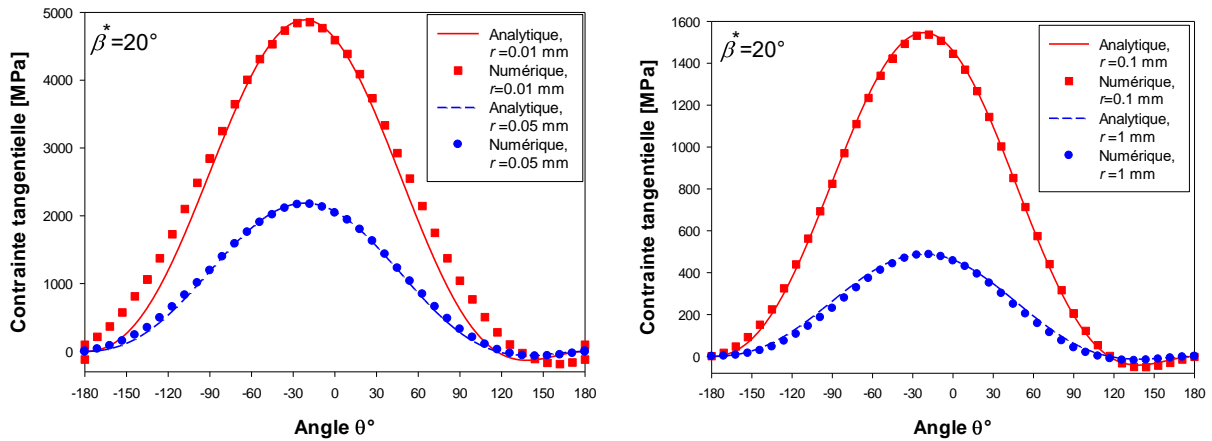


Figure III-2: Variation de $\sigma_{\theta\theta}$ en fonction de l'angle polaire θ

Ces graphiques montrent qu'il existe une très bonne concordance entre les deux résultats, pour des $r \geq 0.01$, ce qui nous permet de conclure que notre modèle numérique a été élaboré avec succès. Pour les $r < 0.01$, on constate clairement une divergence entre les deux résultats, ce qui s'explique par les perturbations autour de la pointe de la fissure. Bien que cela ne soit montré que pour des exemples $\beta = 0$ et $\beta = 20$, les résultats obtenus pour les autres orientations initiales de la fissure montrent les mêmes tendances.

III.3. Critères de direction de propagation de fissure

Dans cette section, on propose d'évaluer les prévisions des angles de propagation issue des résultats numériques, en termes de la densité d'énergie de déformation et de la contrainte tangentielle. Les résultats obtenus sont reportés, respectivement, sur la Figure III-3 en fonction de l'angle θ pour différents r .

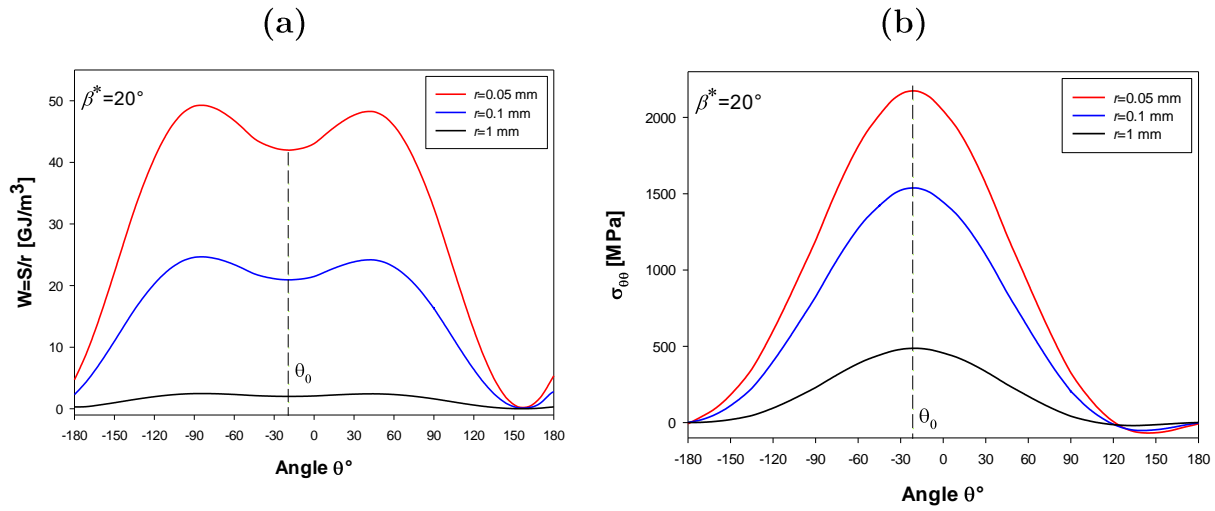


Figure III-3: Variation de (a) $W = S/r$, (b) $\sigma_{\theta\theta}$ en fonction de l'angle polaire θ .

On peut remarquer, qu'en dehors d'une certaine zone autour de la pointe de la fissure, le minimum de la densité d'énergie de déformation W et le maximum de la contrainte tangentielle $\sigma_{\theta\theta}$ sont atteints pour des valeurs constantes $\theta = \theta_0$ indépendamment de la distance r .

III.4. Détermination des angles critiques

Afin de pouvoir suivre la trajectoire de la fissure, on a besoin de déterminer les angles critiques. Pour cela, on a eu recours à la méthode dite « fitting » ou ajustement de courbe qui consiste à utiliser la valeur maximale et minimale de S et W respectivement. Pour obtenir un polynôme du 7^{ème} degré. Après cela, on cherche les points critiques de cette fonction c'est-à-dire, les valeurs pour lesquelles la dérivée partielle de ce polynôme s'annule.

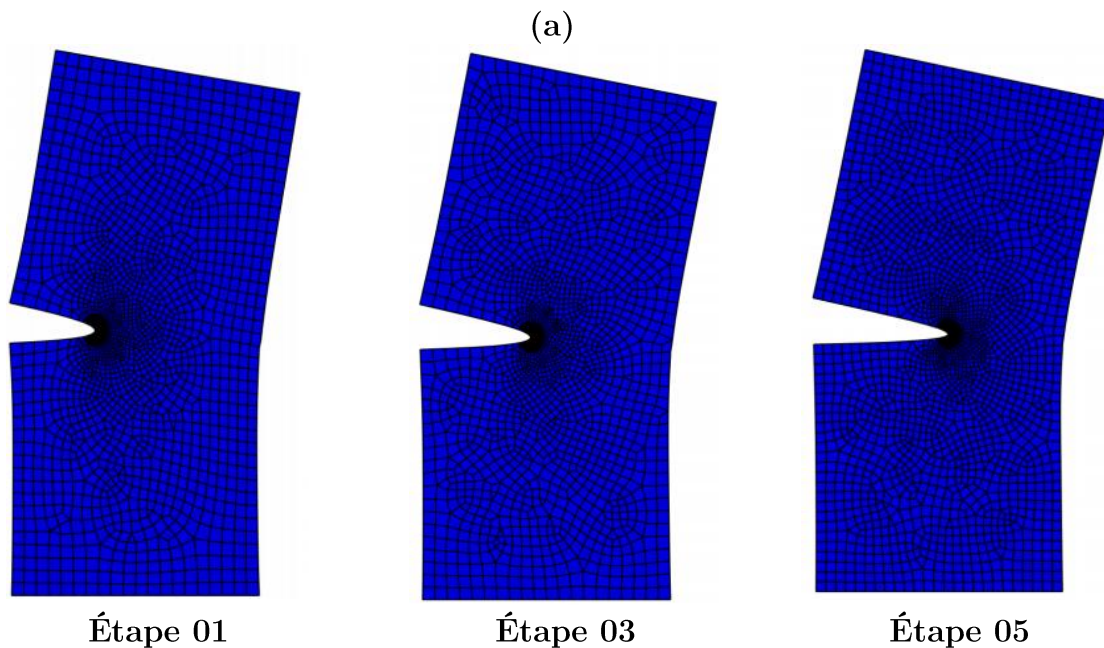
III.5. Simulation de la propagation des fissures

Dans le cas d'une structure fissurée sous un chargement en mode mixte, la fissure peut se propager dans n'importe quelle direction, et il est nécessaire de déterminer la

trajectoire de la fissure. Par ailleurs, afin de déterminer si les critères utilisés dans cette étude (SED et $\sigma_{\theta\theta}$) fournissent une bonne trajectoire finale de la fissure, nous avons effectué notre calcul numérique avec une succession de longueur d'incrément de fissure $\Delta a \approx 16.6\%$ de la longueur initiale de la fissure. Plus cette distance est petite, et plus on se rapproche de la solution exacte [24].

La

Figure III-4 : Trajectoire de propagation de la fissure sous un chargement en mode I, prédites par (a) SED (b) $\sigma_{\theta\theta}$. montre trois étapes pour l'extension de la fissure initiale avec $\beta^* = 0^\circ$ (mode I). Comme prévu, la fissure se propage horizontalement, avec une trajectoire régulière. Les résultats obtenus nous permettent de conclure que les deux critères SED et $\sigma_{\theta\theta}$ donnent un bon chemin de la fissure sous un chargement mode I.



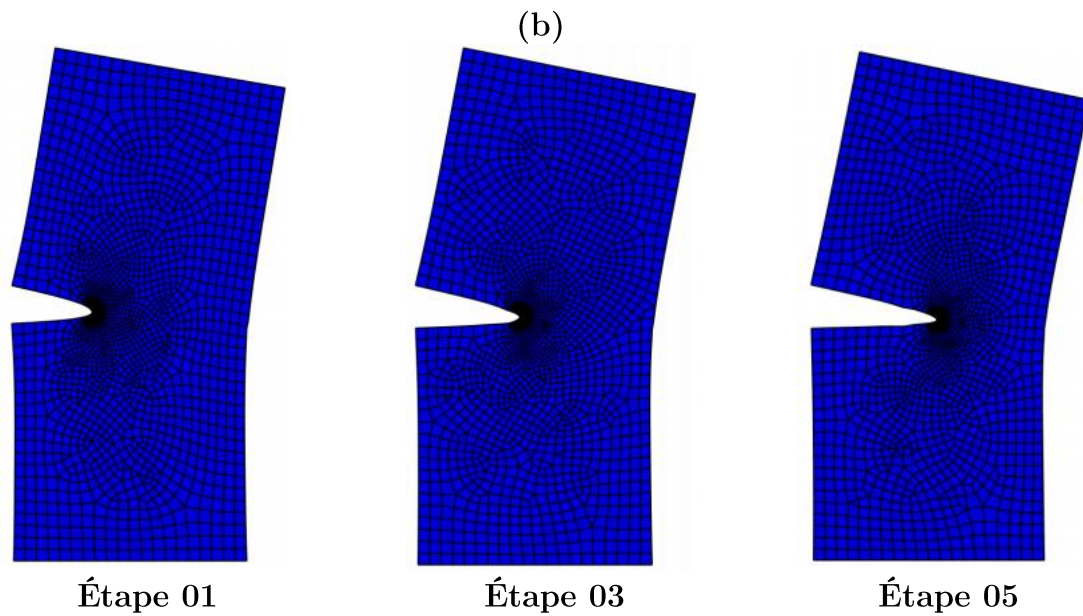


Figure III-4 : Trajectoire de propagation de la fissure sous un chargement en mode I, prédites par (a) SED (b) $\sigma_{\theta\theta}$.

Dans ce qui suit, nous nous proposons d'étudier le chemin de propagation d'une fissure inclinée avec un angle $\beta^* = 20^\circ$. Le modèle numérique nous permet de déterminer, les trajectoires de la fissure inclinée. La figure montre que la fissure se propage vers la direction horizontale.

(a)

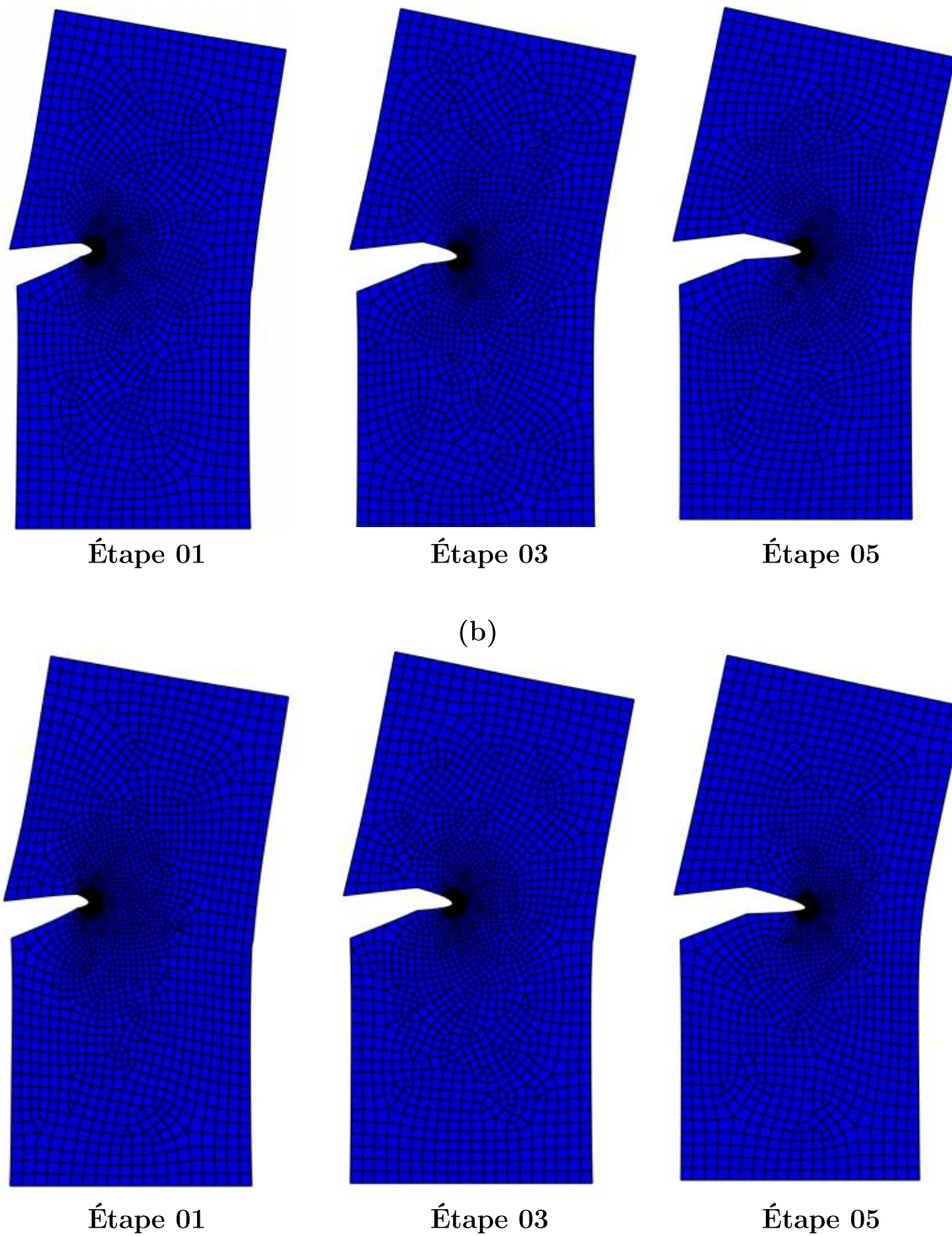


Figure III-5 : Trajectoire de propagation de la fissure sous un chargement en mode mixte I+II ($\beta^* = 20^\circ$), prédites par (a) *SED* (b) $\sigma_{\theta\theta}$.

Afin de mieux illustrer la trajectoire de propagation de la fissure, nous avons représenté sur la

Figure III-5 les trajectoires obtenues par les deux approches SED et $\sigma_{\theta\theta}$ pour un $\beta^* = 20^\circ$, qui sont comparées aux résultats rapportés par [24]. On peut constater clairement que les trajectoires que nous avons obtenus en utilisant les deux approches SED et $\sigma_{\theta\theta}$, restent quasiment horizontale. Contrairement à ceux obtenus par [24], qui donnent une trajectoire presque parallèle à l'orientation initiale de la fissure.

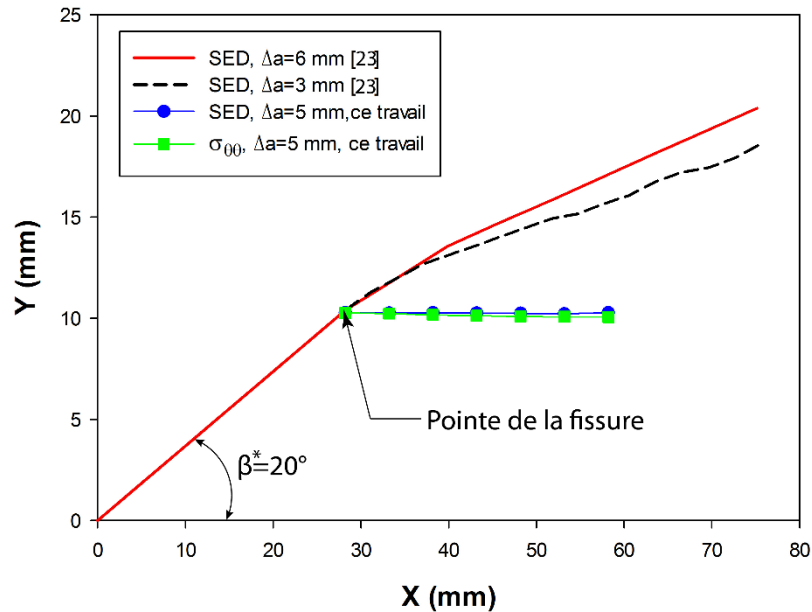


Figure III-6 : Comparaison entre deux trajectoires de propagation de fissures ($\beta^* = +20$).

Pour pouvoir valider nos résultats, nous avons utilisé les données expérimentales recueillies dans la littérature de Hou et al [25] qui ont effectués des essais sur une feuille de plexiglas (PMMA) rectangulaire 230 mm×30 mm×... avec une fissure centrale d'une longueur d'environ 30 mm, incliné avec des angles β^* de 10° à 60° par pas de 10° sous un chargement en traction uniaxiale. L'évolution de la direction de propagation de la fissure est illustrée sur la **Figure III-7**. On remarque que l'allure de la propagation de la fissure pour différentes inclinaisons de la fissure reste quasiment horizontale. Ce qui vient appuyer notre approche et remettre en cause celle utilisée par [24].

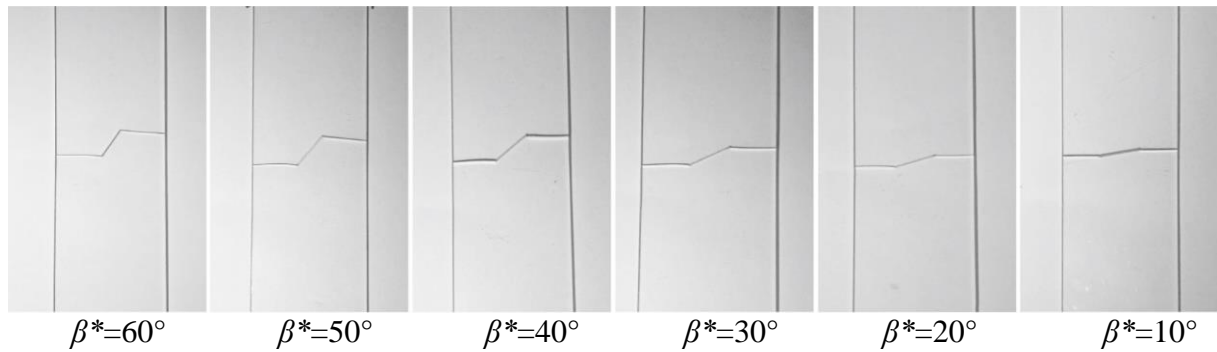


Figure III-7 : Évolution de la trajectoire de propagation de la fissure dans matériaux en plexiglas (PMMA), pour différentes inclinaisons β^* .

III.6. Conclusion

Deux approches basées sur la densité d'énergie de déformation (*SED*) et la contrainte tangentielle ($\sigma_{\theta\theta}$), ont été utilisées pour prédire la trajectoire de la propagation des fissures en mode I et I+II. Les résultats prédisent une trajectoire horizontale pour les deux critères. La validité de nos résultats a été vérifiée en s'appuyant sur des données expérimentales extraites de la littérature.

Conclusion générale et perspectives

L'importance croissante de la simulation numérique dans le processus de conception industriel a entraîné une augmentation importante du nombre de problèmes accessibles par les méthodes numériques modernes. Que ce soit en simulation du phénomène de rupture ou dans d'autres domaines de la mécanique, la méthode des Éléments Finis a été largement développée et utilisée. Elle est désormais capable d'aller bien au-delà des simulations conduites dans le cadre de l'élasticité linéaire. Cependant la méthode des éléments finis nécessite des améliorations afin de représenter explicitement la discontinuité à l'aide du maillage et ce quel que soit sa nature (interface entre deux matériaux, changement de phase, fissure, interaction fluide-structure...).

L'objectif de cette étude est de prédire l'initiation et la direction de propagation des fissures en mode I et mode I+II. Pour ce faire, nous avons développé notre travail selon trois axes :

Premièrement, il convenait de présenter les techniques analytiques et numériques développées en mécanique de la rupture, pour appréhender les phénomènes de rupture des matériaux fragiles.

Dans une seconde étape, nous avons présenté la géométrie de l'éprouvette utilisé au cours de notre étude pour les simulations par la méthode des éléments finis. Les étapes nécessaires à la création d'un modèle numérique avec les principaux modules disponibles ont été détaillées en mode I et en mode mixte (I+II).

La dernière partie de l'étude a été consacrée à la validation des prévisions analytiques issues de ce travail et les résultats de la MEF, en termes de densité d'énergie de déformation et de contrainte tangentielle, De plus, ces deux approches ont été utilisées dans le code élément fini pour prédire la trajectoire de propagation d'une fissure, dans des conditions de chargement en mode mixte. Enfin une validation de nos résultats a été effectuée, en les comparant aux données expérimentales extraites de la

littérature. Les résultats obtenus nous permettent de conclure que les critères mis en œuvre donnent des bonnes trajectoires de fissures dans le cadre LEFM, sous des conditions de chargement en mode mixte et on montre que, l'approche utilisée prédit les données expérimentales de la littérature.

En perspective, il serait intéressant d'étudier la trajectoire de la propagation de la fissure en présence des trous ou de cavités, afin de mettre en évidence la pertinence des deux critères.

Références bibliographiques

- [1] Griffith,A.: The theory of rupture. Proc. 1st inter. Congress Appl. Mech. P55-63. Biezeno. Burgers Ed. Waltman (1925).
- [2]Irwin,G.: Analysis of stresses and strains near the end of crack traversing a plate. Journal of Applied Mechanics, 24, 361-364
- [3] Erdogan, F., Sih, G.: On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. Journal of basic engineering **85**(4), 519-525 (1963).
- [4] Sih, G.C.: Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems. International Journal of Fracture **10**(3), 305-321 (1974).
- [5] Yannick Jan, Modélisation de la propagation de fissure sur des structures minces, soumises à des sollicitations intenses et rapides, par la méthode X-FEM.
- [6] Marigo, J.-J.: Plasticité et rupture. (2016).
- [7] Editor: American Airlines – Airbus – A300-605R (N14053) flight AA587. Aviation accidents, (2001) (<https://www.aviation-accidents.net/american-airlines-airbus-a300-605r-n14053-flight-aa587/>).
- [8] Proudhon, H., Cailletaud, G.: Mécanique de la rupture, MINES ParisTech, Centre des matériaux, CNRS UMR 7633. (2011).
- [9] Methia Mounir, Étude de la rupture des matériaux élastomères, Thèse Doctorat LMD, Université Béjaia A-MIRA , 2020 ,2021
- [10] Naman, R.: Mécanique de la rupture par fissuration. Lavoisier, (2012)
- [11]Bui, H.: Introduction à la mécanique de la rupture. Rupture Contrôle Sûreté, Conseil National de Recherches Canada, Institut de Génie des Matériaux, 3-5 (1980)

- [12] Westergaard, H.M.: Bearing pressures and cracks. *Trans AIME, J. Appl. Mech.* **6**, 49-53 (1939).
- [13] Williams, M.: On the stress distribution at the base of a stationary crack. *J. of Appl. Mech.* Vol, 109-11104 (1957).
- [14] Muskhelishvili, N.I.: *Certain Fundamental Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. Izd-vo Nauka, Moscow (1966).
- [15] Knott, J.F.: *Fundamentals of fracture mechanics*. Gruppo Italiano Frattura, (1973).
- [16] j.albinmousa et al./*engineering fracture mechanics* 78(2011)3300-3307.
- [17] R Givoli, D. et Zusman. An adaptive finite element framework for fatigue crack propagation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*,54 :111(2002).
- [18] Bonnet, d.M., Frangi, A.: *Analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis*. *European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique* **16**(5), 667-668 (2007)
- [19] Fulland M. et Richard H. A. Schöllmann, M. Development of a new software for adaptive crack growth simulations in 3d structures. *Engineering Fracture Mechanics*, 70 : 249–268, 2003.
- [20] Chiriono,F.,Gallego,R.,Sàez,A.,Dominiguez,J.,A comparative study of three boundary element approaches to transient dynamic crack problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 13(1),11-19 (1994)
- [21] Prabel, B.: *Modélisation avec la méthode X-FEM de la propagation dynamique et de l'arrêt de fissure de clivage dans un acier de cuve REP*. INSA de Lyon, France (2007)

- [22] Hussain, M., Pu, S., Underwood, J.: Strain energy release rate for a crack under combined mode I and mode II. In: Fracture analysis: Proceedings of the 1973 national symposium on fracture mechanics, part II 1974. ASTM International
- [23] Denis Abry. Présentation général d'Abaqus. Formation des Masters ; Ecole Central de Paris. 2008.
- [24] A. Boulenouar, N. Benseddiq, M. Mazari. "Strain energy density prediction of crack propagation for 2D linear elastic materials". *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 67–68 (2013) 29–37.
- [25] Hou, Junling, Yangbo Zhang, Hualin Guo, Hong Zuo, and Qun Li. "A strain energy-based parameter for predicting the crack initiation angle of mixed mode fracture." *Acta Mechanica* 232, no. 4 (2021) : 1379-1388.

Résumé

L'objectif principal de cette étude est la contribution à l'analyse de la fissuration des matériaux élastiques linéaires, dans le cadre d'un régime quasi-statique. Dans un premier temps nous avons présenté les notions essentielles de la rupture en petites déformations, ainsi que les critères de rupture adaptés aux matériaux fragiles, ensuite nous avons cité certains points relatifs aux méthodes numériques couramment utilisées dans l'analyse de la rupture des matériaux et structures. Dans un second lieu, les étapes pour la création de l'éprouvette utilisée pour les simulations par la méthode des éléments finis, ont été détaillées en mode I et en mode mixte (I+II). Enfin deux critères ont été utilisés dans le code élément fini pour prédire la trajectoire de propagation d'une fissure, dans des conditions de chargement en mode mixte. Les critères prédisent une trajectoire horizontale. Ces résultats sont consolidés par des données expérimentales extraites dans la littérature.

Mots clés : Critères de ruptures ; Elasticité linéaire ; Propagation de fissure ; Simulation par MEF.

Abstract

The main objective of this study is to contribute to the analysis of the cracking of linear elastic materials in the quasi-static regime. In a first step, we presented the essential notions of fracture in small deformations, as well as the criteria of fracture adapted to brittle materials, then we cited some points relating to the numerical methods commonly used in the analysis of the fracture of materials and structures. In a second place, the steps for the creation of the specimen used for the simulations by the finite element method, were detailed in mode I and in mixed mode (I+II). Finally, two criteria were used in the finite element code to predict the crack propagation path under mixed mode loading conditions. The criteria predict a horizontal trajectory. These results are consolidated by experimental data extracted from the literature.

Key words: Fracture criteria; Linear elasticity ; Crack propagation; FEM simulation.