



Université ABDERAHMANE MIRA BEJAIA

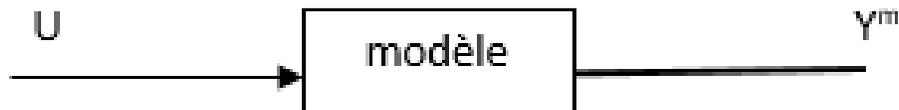
Faculté des Sciences Exactes

Département de Recherche Opérationnelle

Mémoire de fin de cycle

En Vue de l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Modélisation Mathématique et Techniques de Décision



*Thème :*

**Modèle de Risque en Trafic Routier :  
Application de la Méthode de Stabilité Forte**

Présenté par :

*M<sup>r</sup>* AZZOUGUEN Fayçal

Présidente	M <sup>elle</sup> Benouaret Zina	MCB	U. A/Mira Béjaia.
Promoteur	M <sup>r</sup> Aissani Djamil	Professeur	U. A/Mira Béjaia.
Co-promoteur	M <sup>r</sup> Mouhous Fahem	Doctorant(LMD)	U. A/Mira Béjaia.
Examinatrice	M <sup>elle</sup> Lakaour Lamia	D <sup>r</sup>	U. A/Mira Béjaia.
Examinatrice	M <sup>me</sup> Hocine Safia	MAA	U. A/Mira Béjaia.

---

# Remerciements

*Je remercie d'abord et avant tout le bon dieu de m'avoir guidé au chemin de la lumière, du savoir et de la réussite.*

*Je remercie chaleureusement tous ceux qui étaient là pour moi, pour me pousser de l'avant et me voir rêver plus grand avec leur présence, leurs motivations et leurs encouragements permanents.*

*Je remercie particulièrement mes encadreurs Pr. **Dj. AÏSSANI** pour l'honneur qu'il m'a fait en dirigeant ce travail et Mr. **F. MOUHOUS** qui a assuré l'accomplissement du présent mémoire dans les meilleures conditions possibles.*

*Je veux également remercier les membres du Jury, M<sup>elle</sup>. **Z. BENOUARET** M<sup>elle</sup>. **L. LAKAOUR** et M<sup>me</sup>. **S. HOCINE**, qui m'ont fait l'honneur de juger ce travail.*

*Enfin, et dans le souci de n'oublier personne, que tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail, trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude et de mes vifs remerciements.*

---

*À ma très très chère mère, la lumière de ma vie*  
*À mon père*  
*À mon frère Billal*  
*À mes chères sœurs, Sabrina, Salwa, Lisa*  
*À la mémoire de mes grands parents*  
*À tous mes enseignants et ceux qui ont*  
*fait de moi ce que je suis aujourd'hui*  
*je dédie ce modeste travail*

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>4</b>
<b>Table des figures</b>	<b>5</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>6</b>
<b>1 Etude et résolution des problèmes de transport</b>	<b>8</b>
1.1 Problème de transport : formulation des problèmes d'affectation . . . . .	8
1.1.1 Forme générale . . . . .	8
1.1.2 Problèmes équilibrés . . . . .	9
1.1.3 problèmes d'affectation . . . . .	9
1.2 Modèles de résolution approchée et efficace pour les problèmes des réseaux de transport et de télécommunication . . . . .	9
1.3 Modélisation Mathématique et Simulation du Trafic Routier : Analyse Statistique de Modèles d'insertion et Simulation Probabiliste d'un Modèle Cinétique . . . . .	10
1.4 Modélisation et Simulation dans le contexte du trafic routier . . . . .	11
1.5 Modélisation du trafic routier : Le modèle de Lighthill-Whitham-Richards . . . . .	11
1.5.1 Introduction d'un temps de réaction dans un modèle simplifié de trafic : émergence de la métastabilité . . . . .	12
1.6 Un modèle probabiliste pour les interactions entre véhicules et les temps de parcours	12
1.7 Propriétés statistiques du temps d'itinéraire, et généralisation de deux formules de Wardrop . . . . .	13
1.8 Forme fonctionnelle d'un modèle mensuel agrégé de risque routier . . . . .	13
1.9 Une méthode d'évaluation a priori des résultats issus de modèles de simulation et de prévision du trafic . . . . .	14
<b>2 Stabilité forte : Présentation et éléments de base</b>	<b>15</b>
2.1 Introduction . . . . .	15
2.2 Historique . . . . .	15
2.3 Notions et concepts fondamentaux . . . . .	16
2.4 Ergodicité uniforme et stabilité forte . . . . .	18
2.5 Récurrence au sens de Harris . . . . .	19
2.6 V-stabilité forte d'une chaîne de Markov . . . . .	20

---

2.7	Inégalités de stabilité . . . . .	21
2.8	Quelques applications de la méthode de stabilité forte . . . . .	22
2.8.1	En Gestion des Stocks . . . . .	22
2.8.2	En Assurances . . . . .	22
2.8.3	En Fiabilité . . . . .	23
2.8.4	En Évaluation des Performances des Réseaux Informatiques . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Stabilité forte pour un modèle de trafic routier</b>	<b>24</b>
3.1	Trafic routier . . . . .	24
3.2	Présentation du modèle étudié . . . . .	24
3.3	Perturbation du modèle de trafic routier . . . . .	25
3.3.1	Présentation du processus inverse $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ . . . . .	25
3.3.2	Construction du processus spécial $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ . . . . .	26
3.3.3	Les bornes de stabilité forte . . . . .	27
3.3.4	Présentation des deux modèles idéal fortement stable et le modèle réel . . . . .	28
3.3.5	Calcul de la déviation des noyaux de transition . . . . .	29
3.3.6	Calcul de la déviation entre les probabilités de dépasser le seuil . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Analyse de perturbation du modèle étudié</b>	<b>32</b>
4.1	Application numérique . . . . .	32
4.1.1	Les étapes de l'algorithme . . . . .	32
4.1.2	Perturbation N°1 : fixation du 'u' et variation du 'b' . . . . .	33
4.1.3	Perturbation N°2 : variation du 'u' et 'b' . . . . .	35
4.1.4	Perturbation N°3 : fixation du 'u' et variation du 'b' . . . . .	37
4.1.5	Perturbation N°4 : variation du 'u' et 'b' . . . . .	39
4.1.6	Discussion des résultats . . . . .	41
	<b>Conclusion générale</b>	<b>44</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>48</b>

# Table des figures

4.1	Comparaison entre les variations de $\ \psi - \psi'\ _g$ et $\Gamma$ en fonction du paramètre de perturbation $\epsilon$ sous forme d'un nuage de points avec fixation de $u$ et variation de $b$ .	35
4.2	Nuage de points montrant une comparaison entre les variations de $\ \psi - \psi'\ _g$ et $\Gamma$ en fonction du paramètre de perturbation $\epsilon$ . . . . .	37
4.3	Une comparaison entre les variations de $\ \psi - \psi'\ _g$ et $\Gamma$ en fonction du paramètre de perturbation $\epsilon$ tout en fixant $u$ et variant $b$ . . . . .	39
4.4	Représentation graphique des variations de $\ \psi - \psi'\ _g$ et $\Gamma$ en fonction du paramètre de perturbation $\epsilon$ lorsqu'on varie $u$ et $b$ . . . . .	41

---

# Introduction générale

Les mathématiques appliquées, cette branche des mathématiques qui s'intéresse à l'application du savoir mathématique aux autres domaines, ont connu un développement fulgurant au siècle dernier grâce surtout à l'effet de la révolution informatique. Par conséquent, les chercheurs ont été amenés à s'intéresser à la modélisation et à la résolution de problèmes et de questions plus complexes en sciences, en génie et en médecine.

Historiquement les premières études afin de saisir le trafic routier sont à mettre au crédit de Bruce Greenshilds [13] avec en 1935 ses premiers travaux sur ce sujet pour lequel il a posé les premiers fondements, lançant ainsi les prémices de toute une discipline qui deviendra très importante par la suite. Ce brillant scientifique proposait une relation linéaire entre la vitesse des véhicules et la densité du trafic. Les modèles de trafic d'une manière générale visent à expliquer et prédire l'écoulement du trafic afin de mieux reproduire la réalité et ainsi permettre une meilleure optimisation des infrastructures [12].

Afin de pouvoir faire face à ces problèmes de gestion et de sécurité et arriver ainsi à réguler le trafic routier [1], une modélisation de ce dernier s'avère importante puisque ça permet aux chercheurs de représenter le phénomène social en question. Par la suite, l'intérêt s'accroît beaucoup plus sur les besoins d'informations (état du système, évaluation a posteriori) et de gestion du système [6].

Dans notre mémoire, nous nous sommes penchés sur l'étude de cette question en proposant d'appliquer pour la première fois la méthode de la stabilité forte sur un modèle de risque en trafic routier [4]. Ce dernier se présente comme étant un modèle qui peut être sujet à un possible dépassement du seuil de congestion critique. Le modèle en question est censé représenter l'arrivée des sinistres (l'occurrence des incidents routiers) tout en fixant une certaine loi de probabilité d'occurrence. La perturbation concerne plus précisément les paramètres de la loi qui régit le modèle étudié.

En règle générale et malgré l'essor qu'ont connu les outils de mesures et l'acquisition des données, le manque de ces dernières et leur recueil toutes propres est un écueil majeur de la modélisation et l'étude des systèmes réels.

En effet, grâce aux travaux de recherches rythmés par l'académisme et la persévérance, Aissani Dj. et Kartashov N.V [3] parviennent pendant les années 1980 à élaborer puis développer la méthode de la stabilité forte. Cette réalisation s'avère donc être non seulement un moyen efficace de tester et d'évaluer les modèles, mais représente aussi dans certains cas, la seule alternative de validation de ces modèles en l'absence de données réelles [11].

Ce qui rend la méthode des opérateurs de la théorie de la stabilité assez particulière par rapport aux autres approches c'est qu'on suppose que la perturbation du noyau de transition est

---

petite par rapport à une certaine norme d'opérateurs [7]. Elle est considérée également grâce à ses mécanismes comme un outil très efficace de validation des jugements faits sur les comportements stationnaires des phénomènes [17].

Depuis les travaux de l'académicien V. Kalashnikov [16] qui est considéré comme étant le premier à avoir appliqué la méthode de stabilité forte [3] aux les modèles de risque (voir Kalashnikov, V., 2000)[16]. Par la suite, plusieurs auteurs ont investi ce nouveau domaine d'étude dans l'objectif premier d'estimer la déviation des probabilités de ruine dans des modèles qui cernent mieux la réalité.

Partants de ces résultats très bien connus, nous avons voulu étudier l'effet de la perturbation des paramètres des lois qui régissent le modèle de trafic routier en question. Nous avons étudié d'abord la probabilité qu'il y ait un dépassement de seuil en nous référant au processus inverse. Nous avons en particulier mis en évidence que la stabilité du modèle est intimement liée aux bornes imposées.[15]

Le présent mémoire comprend une introduction, deux chapitres théoriques, une application, une conclusion et une bibliographie.

Dans le premier chapitre, on établit un rapide panorama historique de certaines applications anciennes de la méthode de la stabilité forte tout en rappelant ses principaux théorèmes. Le deuxième chapitre est consacré à présenter respectivement le modèle du trafic routier qui fait l'objet de cette étude ainsi que le processus inverse. Dans le troisième chapitre, nous aborderons notre partie pratique qui se présente sous forme d'une application réalisée sous Matlab.

# 1

## Etude et résolution des problèmes de transport

### Introduction

Dans le cadre général, lors de l'étude des problèmes classiques du trafic routier, on s'intéressait surtout aux flux des arrivées. Cependant dans plusieurs situations rencontrées dans la pratique, on s'est aperçu que le trafic routier est souvent sujet à des risques. Dans ce chapitre, nous présentons une synthèse bibliographique des résultats analytiques et des méthodes appliquées dans le but de la résolution des problèmes de transport. Nous présentons ensuite quelques modèles mathématiques destinés à étudier le trafic routier qui s'agit d'un enjeu important pour le développement de réseaux de circulation car mieux comprendre le phénomène en question permettrait d'optimiser ces infrastructures.

### 1.1 Problème de transport : formulation des problèmes d'affectation

Certains problèmes en programmation linéaire ont une structure particulière que l'on peut exploiter ; On peut les résoudre comme d'habitude par un simplexe, mais on peut aussi les résoudre plus simplement et plus efficacement. Certains de ces problèmes sont formulés en entier. La solution est en entier aussi, mais la résolution n'est pas plus difficile.[6]

#### 1.1.1 Forme générale

La forme générale d'un problème de transport est la suivante :

---


$$\begin{aligned} & \min \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j=1}^{j=n} c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t } & \sum_{j=1}^{j=n} x_{ij} \leq s_i, i \in 1, \dots, m \text{ (contraintes d'offre)} \\ & \sum_{i=1}^{i=m} x_{ij} > d_j, j \in 1, \dots, n \text{ (contraintes de demande)} \end{aligned}$$

### 1.1.2 Problèmes équilibrés

Il est préférable de considérer les problèmes équilibrés. En effet, on montrera qu'il est relativement facile de trouver une solution de base réalisable pour ces problèmes.

De même, les opérations du simplexe dans le cas de problèmes de transport équilibrés se réduisent à des additions et soustractions.

Pour équilibrer un problème de transport pour lequel il y a trop d'offres, il suffit de créer un point de demande virtuel dont la demande correspond à l'offre excédentaire, et pour lequel les coûts sont nuls.

La demande transportée vers le point virtuel correspond à la capacité non utilisée. De manière naturelle, c'est le point d'offre pour lequel les coûts de transport les (question : plus? moins?) élevés qui enverra sa capacité vers le lien virtuel.

### 1.1.3 problèmes d'affectation

Les problèmes d'affectation sont des problèmes de transport équilibrés pour lesquels chaque producteur et consommateur ont une valeur de 1. Si toutes les valeurs dans le tableau de transport sont entières, la solution le sera aussi. On peut donc ignorer cette contrainte si elle surgit. En passant : peut on avoir un problème d'affectation  $n \times m$  avec  $n \neq m$  si oui, à quelle situation avons nous affaire, et que faire? Les problèmes de transport, affectation et transbordement sont des cas particuliers de LP, qu'on ne résout pas par le simplexe habituel. Il existe une méthode de résolution plus simple, non matricielle. Si les coûts sont entiers, la solution est également entière, donc si on peut formuler un problème sous forme de transport, la solution en entier est également facilement calculable.

## 1.2 Modèles de résolution approchée et efficace pour les problèmes des réseaux de transport et de télécommunication

Le transport des personnes et des marchandises soulève un grand nombre de problèmes difficiles à résoudre. En général, l'objectif des compagnies de transport est souvent de visiter un ensemble de points (représentant des clients) à un moindre coût. Ces clients peuvent être considérés ponctuels comme un site bien précis, une station ou même un numéro de rue. Les délocalisations des sites de production, de distribution, de commercialisation et l'ouverture des marchés augmentent de plus en plus, l'intérêt des entreprises de transport à minimiser les coûts. En effet, pour rester

---

compétitif, les professionnels du transport doivent réduire des coûts d'exploitation (carburant, péage, location, etc) et contrôler l'empreinte écologique engendrée par leurs activités. Ceci revient alors, à optimiser le nombre de véhicules opérationnels et le nombre de trajets pour chaque véhicule, tout en respectant les contraintes liées à l'activité de l'entreprise (délais des livraisons, horaires des livraisons, temps de travail réglementaire des chauffeurs, type de marchandises transportées, nature et handicap éventuel des personnes à transporter, etc).

Aujourd'hui, la recherche opérationnelle sur ce type de problèmes s'avère très importante car elle permet de concevoir des systèmes d'informations essentiels dans la prise de décision. En effet, ces systèmes permettent de modéliser et de traiter les flux d'informations de l'entreprise dans le but d'aider à la prise de décision. Notons ainsi que le but final est de satisfaire les clients tout en respectant les contraintes à un moindre coût. Cette thèse porte sur la résolution approchée de deux problèmes de l'optimisation combinatoire bien connus en recherche opérationnelle. Ces problèmes trouvent de larges champs d'application dans le domaine de transport des personnes ou de marchandises et dans le domaine de la télécommunication. La première partie de la thèse est consacrée au problème d'orientation d'équipe qui est une variante du célèbre problème de tournées de véhicules. La deuxième partie de la thèse s'attaque au problème de K-clusters dans un graphe biparti. Ce dernier est utile pour décomposer et faciliter la résolution d'un problème combinatoire.[12]

### **1.3 Modélisation Mathématique et Simulation du Trafic Routier : Analyse Statistique de Modèles d'insertion et Simulation Probabiliste d'un Modèle Cinétique**

Dans cette thèse, il a été proposé des modèles d'insertion de trafic sur une bretelle d'entrée d'autoroute. Deux types de modélisation ont été élaborés. Une approche statistique utilisant les techniques de régression logistique qui a permis de sélectionner les variables jouant un rôle dans le choix par les véhicules provenant de la voie d'accélération du lieu où ils s'insèrent. Dans un second temps, une modélisation comportementale basée sur le principe d'acceptation de créneaux a été effectuée. Les modèles proposés ont été validés à l'aide de données issues d'un site d'observations expérimentales situé près d'Angers en France, le site SAROT. Par la suite, une méthode particulière probabiliste permettant de simuler un modèle mésoscopique de trafic a été développée : le modèle cinétique de Pavari-Fontana. La complexité algorithmique de cette méthode proposée comme alternative aux méthodes déterministes couramment utilisées est optimisée. La comparaison des résultats obtenus à ceux d'une méthode déterministe plus standard de différences finies sur des cas-tests bien choisis a permis de valider la méthode particulière.

Ces expériences numériques ont mis en valeur ses qualités notamment sa rapidité (coût numérique) par rapport à la méthode déterministe ainsi que sa capacité à mieux reproduire certains phénomènes observés dans le trafic.[18]

---

## 1.4 Modélisation et Simulation dans le contexte du trafic routier

En résumé, ce travail se proposait de mettre en avant que les modèles et simulations se distinguent par leurs champs d'application (simulations pour les tests de scénarios, modélisation pour l'analyse et l'explication), mais aussi par la multiplicité d'applications et des données disponibles. Malgré tout, ils restent complémentaires et mêmes nécessaires l'un à l'autre. Il s'agit d'un champ en constant renouvellement, s'accommodant des nouvelles technologies, à l'image des données de téléphones mobiles intelligents que l'on cherche à exploiter dorénavant. Historiquement, modélisation et simulation ont conjointement permis l'éclosion de concepts théoriques comme l'équilibre entre offre et demande des systèmes, l'affectation statique, les lois de poursuite, les lois d'offre et demande locales de trafic ou encore la notion d'utilité de l'utilisateur.[12]

## 1.5 Modélisation du trafic routier : Le modèle de Lighthill-Whitham-Richards

Dans ce travail, un premier modèle mathématique destiné à étudier le trafic routier a été présenté. Notamment, on cherche à réduire l'encombrement des routes, le risque d'accidents et la pollution. Le modèle étudié a été développé par M.J. Lighthill, G.B. Whitham et P.I. Richards pendant les années 1950. On a considéré une route empruntée par des voitures, mais bien évidemment les résultats énoncés restent valides dans d'autres conditions, comme par exemple la circulation de piétons. L'étude de ce modèle mathématique a amené l'auteur à se pencher sur le domaine des Équations aux Dérivées Partielles, et plus précisément sur les outils de résolution de ces équations. Il s'est particulièrement concentré sur la méthode des caractéristiques. Ensuite, il a découvert que ces équations n'admettaient pas toujours une solution au sens classique et il a donc fallu définir une notion plus faible de solution. Plusieurs approches permettent de décrire l'évolution du trafic sur une route, notamment on fait une distinction selon le point de vue adopté, microscopique ou macroscopique.

Le modèle de Lighthill-Whitham-Richards fait partie de ces derniers car le flot de véhicules est ici considéré comme un milieu continu. On s'intéresse alors à la densité de véhicules  $\rho(x; t)$  le long de la route, qui est à la fois une fonction du temps et de l'espace, et pour cela on utilisera des équations issues de la mécanique des fluides. [13]

On note  $v(x; t)$  et  $q(x; t)$  respectivement la vitesse moyenne et le flux de véhicules en un point et un instant donné. Ces deux grandeurs sont liées par la relation  $q = \rho v$ .

Hypothèses Dans ce modèle, on considère une route unidimensionnelle et de longueur infinie, et nous ferons de plus les hypothèses suivantes :

- Il n'y a pas d'intersections le long de la route. Ainsi, le nombre de voitures sur la route est constant.
- Il n'y a pas de dépassement possible.
- La vitesse moyenne  $v$  dépend uniquement de la densité de véhicules  $\rho$ . On suppose de plus

---

que :

$$v(\rho) = v_m \left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right) \text{ où } v_m \text{ et } \rho_m \text{ sont des constantes.}$$

### 1.5.1 Introduction d'un temps de réaction dans un modèle simplifié de trafic : émergence de la métastabilité

Dans le cadre de cette étude, un modèle de transport très simple dans lequel les véhicules ont un certain délai de réaction après l'arrêt a été présenté. Cette caractéristique rend le système métastable et permet l'émergence de structures complexes d'embouteillages. Les auteurs ont évoqué des résultats expérimentaux permettant de faire le lien avec des situations de trafic routier réel. L'étude présentée ici permet de mettre en évidence le caractère fondamental de la métastabilité et de la stochasticité des modèles appliqués au trafic.

Depuis une dizaine d'années, de nouvelles approches basées sur les automates cellulaires se sont développées pour l'étude du trafic routier. Ce mouvement a été principalement initié lorsque Nagel et Schreckenberg ont proposé un modèle à temps, espace et vitesses discrets, chaque cellule spatiale pouvant être occupée ou non par un véhicule. Les voitures avancent en interagissant entre elles selon des règles simples qui permettent une grande vitesse de simulation. Depuis, plusieurs variantes de ce modèle ont été proposées, en vue d'une modélisation de plus en plus réaliste du trafic. Le travail que nous présentons ici se situe dans une perspective un peu différente. Ici, on s'est intéressés à une version très simplifiée d'automate cellulaire, appelée TASEP (totally symmetric exclusion process), qui se trouve être considérée dans le domaine de la physique statistique comme un archétype des modèles de transport hors équilibre, et à ce titre a largement été étudiée analytiquement et numériquement. On connaît par exemple la solution exacte en régime stationnaire, i.e. on peut donner la probabilité d'avoir n'importe quelle configuration microscopique dans le système, ce qui est très rare pour un système hors équilibre.

Partant de ce modèle très bien connu, on voulait étudier l'effet de l'introduction dans le modèle d'un temps de réaction des conducteurs. Cette modification qui peut paraître a priori anodine transforme en fait profondément la nature des phases observées. On va en particulier mettre en évidence que ce temps de réaction est intimement lié à l'émergence de la métastabilité dans le système. On étudiera d'abord le système en conditions aux limites périodiques, pour concrétiser la dynamique intrinsèque du système. Ensuite, on considère des conditions aux limites ouvertes. Les taux d'injection et de retrait de véhicules aux deux extrémités du système induisent alors diverses phases dans le système. On étudiera l'ensemble du diagramme de phase.[6]

## 1.6 Un modèle probabiliste pour les interactions entre véhicules et les temps de parcours

Dans ce travail, un modèle probabiliste des situations et des événements de trafic sur route a été donné, en traitant un cas simple à deux classes de mobiles, les rapides (voitures) et les lents (camions), par sens de circulation. Grâce à un modèle markovien à deux états, on a obtenu des

---

formules analytiques pour les taux de transition entre états de vitesse, et pour le temps de parcours en moyenne et en variance.

Ces formules permettent de traiter des situations variées : en topologie de route (un ou deux sens, une ou plusieurs voies) et en structure de trafic, avec plusieurs classes de vitesse libre dans chaque sens de circulation.[6]

## 1.7 Propriétés statistiques du temps d'itinéraire, et généralisation de deux formules de Wardrop

En ingénierie du trafic, on utilise couramment des formules établies par l'ingénieur anglais Wardrop dans les années 1950 : notamment la formule entre les vitesses moyennes temporelle et spatiale, et la formule du véhicule flottant.

Ces deux formules résultent d'un modèle de distribution des vitesses parmi une population de déplacements : avec une vitesse fixée pour chaque déplacement considéré isolément.

Dans des articles précédents, on a modélisé à la fois la distribution des allures individuelles, et, pour chaque déplacement d'allure fixée, les variations locales de la vitesse qui résultent des aléas de circulation.

Le présent article établit les propriétés statistiques des temps d'itinéraire dans ce modèle des allures individuelles et des aléas de circulation. On montre que ces propriétés relativisent les formules de Wardrop.

La formule des vitesses moyennes reste valable au niveau local. On donne des résultats originaux au niveau bipolaire d'un itinéraire : d'abord dans l'analyse d'une trajectoire individuelle, ensuite pour un ensemble de trajectoires.

On revisite aussi la méthode du véhicule flottant, avec une nouvelle méthode d'estimation capable de révéler non seulement la moyenne mais encore l'écart-type des temps bipolaires.[6]

## 1.8 Forme fonctionnelle d'un modèle mensuel agrégé de risque routier

Ce texte présente un modèle explicatif de l'évolution des nombres mensuels d'accidents corporels et de tués sur les routes nationales et les autoroutes françaises. Deux facteurs de risque sont pris en compte : l'exposition au risque, mesurée par une variable principale de trafic, et le facteur climatique, mesuré par des variables secondaires relatives à la température, à l'occurrence de gel et de la pluie.

Un modèle avec transformation logarithmique de l'endogène et transformation de Box-cox sur l'exogène principale a été établi sur la période 1975-1993, puis sur la période étendue 1975-1998. Des tests de comparaison de la spécification initiale à deux cas particuliers ont été réalisés, et les réponses à ces tests sont les mêmes sur la période 1975-1993 et sur la période 1975-1998.

Il ressort qu'il n'y a pas de différence significative entre le modèle avec transformation de Box-Cox sur l'exogène principale et le modèle avec transformation logarithmique sur l'exogène principale,

---

en sorte que l'on peut pour des raisons de parcimonie retenir cette seconde spécification, largement utilisée

Toutefois, l'utilisation de la forme fonctionnelle optimale permet de s'affranchir de l'hypothèse d'une élasticité constante au trafic, et de prendre en compte certains effets de saturation relativement au trafic.[6]

## 1.9 Une méthode d'évaluation a priori des résultats issus de modèles de simulation et de prévision du trafic

Dans l'étude présentée dans cet article, on a utilisé le concept de prévision d'ensemble pour procéder à une évaluation a priori des prévisions de trafic préparées un an à l'avance par le dispositif Bison Futé. Ce rapprochement n'est pas absurde, puisque l'effet de variables exogènes, telles que le comportement de l'automobiliste (par exemple son degré de désobéissance aux conseils de Bison Futé), une grève, tous événements imprévisibles à l'horizon d'un an rend incertaine la prévision de l'état du trafic.

Cette approche d'évaluation peut être également appliquée aux résultats provenant des modèles de simulation du trafic.[6]

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une synthèse des résultats analytiques sur les problèmes de transport, ainsi qu'une synthèse sur les méthodes possibles appliquées. Lors de l'étude de ces problèmes, on a constaté les difficultés de leurs analyses. Même dans le cas où des solutions analytiques existent, leurs exploitations restent difficiles et nécessitent souvent des méthodes numériques laborieuses. En plus de la simulation, programmation linéaire, équations différentielles, les problèmes du trafic routier peuvent être en appliquant les plusieurs techniques des mathématiques appliquées. Parmi les principales approches développées dans ce but, on trouve la méthode de stabilité forte, qui conduit à des estimations quantitatives des caractéristiques du système étudié. La présentation de cette approche fera l'objet du prochain chapitre.

# 2

## Stabilité forte : Présentation et éléments de base

### 2.1 Introduction

Il existe dans le monde des mathématiques appliquées une multitude de méthodes qui permettent de calquer au mieux un système réel souvent complexe à résoudre par un système idéal beaucoup plus souple et représentatif. Dans la plupart des temps, ces méthodes se basent sur l'ensemble des données recueillies. Mais généralement, ces dernières s'avèrent manquantes et voire même aberrantes ce qui les rend inefficaces et inexploitable. C'est exactement à ce stade de la recherche qu'on se rend compte de l'apport et de l'utilité de la méthode de la stabilité forte qui propose justement une solution à ce problème. Dans ce chapitre, nous allons présenter cette méthode ainsi que ses théorèmes fondamentaux.

### 2.2 Historique

[2] La méthode en question a été élaborée au début des années 1980 par le biais des deux mathématiciens Aïssani et Kartashov. Elle est connue sous le nom de méthode des opérateurs de la théorie de stabilité. Ses concepteurs ont notamment étudié la propriété de la stabilité de la distribution stationnaire de la *chaîne* de Markov récurrente au sens de Harris dans des espaces de phase quelconques. Il est à noter que cette méthode est applicable à tous les modèles stochastiques de la recherche opérationnelle pouvant être régis par des *chaînes* de Markov. Notons aussi qu'un passage par une série de recherches intermédiaires est nécessaire avant son application. Cette méthode fait partie d'une famille dite de méthodes de stabilité qui englobe en plus d'elle : La méthode des fonctions test, la méthode métrique, la méthode de renouvellement, la méthode de convergence faible, la méthode de stabilité uniforme, etc.

---

Cette méthode permet aussi aux spécialistes d'étudier l'ergodicité et la stabilité des caractéristiques stationnaires et non stationnaires des *chaînes* de Markov après avoir soumis leurs opérateurs de transition à de petites perturbations. Autrement dit, elle vise à clarifier les conditions pour lesquelles les caractéristiques du système complexe peuvent être approximées par celles du système plus simple (que l'on sait étudier). Ajoutons à cela le fait qu'elle soit flexible et qu'elle s'adapte selon le modèle étudié.

## 2.3 Notions et concepts fondamentaux

**Notation 1** *Dans cette partie, on se focalisera sur les concepts de la stabilité forte et son application aux modèles de risque.[5]*

*Commençons par la présentation de tous les objets dont on aura besoin au cours de cette partie.*

- *Soit  $(E, \varepsilon)$  un espace mesurable, où  $\varepsilon$  est une  $\sigma$  – algèbre engendrée par une partie dénombrable de  $E$ .*
- *On considère  $X = X_n, n = 0, 1, \dots$  une chaîne de Markov homogène à valeurs dans  $E$ , donnée par un noyau de transition régulier  $P(x, A), x \in E, A \in \varepsilon$*
- *On suppose que la chaîne admet une unique mesure invariante  $\pi$  de l'opérateur  $P$  tel que  $\pi(E) = 1$  (mesure de probabilité).*
- *On considère  $m\varepsilon$  ( $m\varepsilon^+$ ), l'espace des mesures finies (non-négatives) sur  $\varepsilon$ .*
- *On considère  $f\varepsilon$  ( $f\varepsilon^+$ ), l'espace des fonctions mesurables bornées (non-négatives).*

*Associons à chaque noyau de transition  $P$  les deux applications linéaires suivantes :*

$$Lp : m\varepsilon \rightarrow m\varepsilon$$

*et*

$$L^*p : f\varepsilon \rightarrow f\varepsilon$$

*Dont les valeurs aux points  $\mu \in m\varepsilon$  et  $f \in f\varepsilon$  sont données respectivement par*

$$\mu P(A) = Lp(\mu)(A) = \int_E \mu(dx)P(x, A), \forall A \in \varepsilon$$

*et*

$$Pf(x) = L^*p(f)(x) = \int_E P(x, dy)f(y), \forall x \in E.$$

*Le produit de la mesure  $\mu \in m\varepsilon$  et la fonction  $f \in f\varepsilon$ , noté  $\mu f$ , désigne l'intégrale suivante*

$$\mu f = \int_E \mu(dx)f(x)$$

*Le produit de deux noyaux de transition  $P$  et  $Q$  est le noyau*

$$PQ(x, A) = \int P(x, dy)Q(y, A), \forall x \in E, \forall A \in \varepsilon.$$

---

Supposons que l'espace  $m\varepsilon$  est muni d'une norme  $\|\cdot\|$  qui met en évidence l'espace normé complet et par suite l'espace de Banach  $M = \mu \in m\varepsilon : \|\mu\| < \infty$  de plus pour chaque noyau de transition  $P$ , nous mettons en correspondance l'espace  $B$  des opérateurs bornés dont la norme induite par celle de  $M$  est définie par

$$\|P\| = \sup\|\mu P\|, \|\mu\| \leq 1.$$

Notons par  $M^+ = m\varepsilon^+ \cap M$  et  $\eta^+ = f\varepsilon^+ \cap \eta$  les cônes des mesures non négatives bornées et des fonctions non-négatives bornées respectivement.

On suppose de plus que la norme  $\|\cdot\|$  est compatible avec l'ordre structurel sur  $M$ , c'est-à-dire

$$\|\mu_1\| \leq \|\mu_1 + \mu_2\|, \forall \mu_1 \in M^+, \quad (2.1)$$

$$\|\mu_1\| \leq \|\mu_1 - \mu_2\|, \forall \mu_1 \in M^+ \quad \text{et} \quad \mu_1 \perp \mu_2 \quad (2.2)$$

et

$$|\mu|(E) \leq k\|\mu\|, \forall \mu \in M \quad (2.3)$$

où  $|\mu|$  est la variation de la mesure  $\mu$  et  $k$  une certaine constante positive finie.

Supposons également que l'opérateur linéaire  $P : M \rightarrow M$  est borné :

$$\|P\| \leq \infty.$$

Supposons en plus, dans certaines situations que la propriété suivante est vérifiée

$$\|\mu_1 \mu_2\| = \|\mu_1 - \mu_2\|, \forall \mu_1 \in M^+ \quad \text{et} \quad \mu_1 \perp \mu_2 \quad (2.4)$$

Cette dernière propriété 2.4 signifie que  $|\mu|$  et  $\mu$  ont la même norme. De plus

$$|\mu(E)| \leq k\|\mu\| \text{ pour tout } \mu \in M$$

**Remarque 2.3.1** Les trois conditions 2.1, 2.2 et 2.3 sont particulièrement satisfaites pour des normes de la forme suivante

$$\|\mu\|_v = \int_E v(x)|\mu|(dx),$$

Où  $v$  est une fonction mesurable bornée inférieurement par une constante positive (pas nécessairement finie) sur  $E$ .

Notons que dans l'expression 2.3

$$|\mu \mathbf{1}| = |\mu(E)| \leq |\mu|(E) \leq k\|\mu\|, \forall \mu \in M \Rightarrow \|\mathbf{1}\| \leq k < \infty \Rightarrow \mathbf{1} \in f\varepsilon,$$

Où  $\mathbf{1}$  est la fonction identiquement égale à l'unité.

Pour  $\mu \in m\varepsilon$  et  $f \in f\varepsilon$  on note par  $f \circ \mu$  le noyau de transition défini comme suit

$$f \circ \mu = f(x)\mu(A), x \in E, A \in \varepsilon.$$


---

On note par  $\Pi = 1 \circ \pi$  le projecteur stationnaire du noyau  $P$  avec  $\mathbf{1} \in f\varepsilon$  est la fonction identiquement égale à l'unité[21]. En d'autres termes, le noyau défini par :

$$\Pi(x, dy) = \mathbf{1}(x)\pi(dy), \forall(x, dy) \quad \forall E \times \varepsilon.$$

$I$  est l'opérateur identité sur  $M$ .

Munissons l'espace  $M$  de la norme  $\|\cdot\|_v$  définie par

$$\|\mu\|_v = \int_E v(x)|\mu|(dx).$$

Les normes induites dans les espaces  $f\varepsilon$  et  $\varepsilon$ , sont respectivement

$$\|f\|_v = \sup\{|\mu f|, \|\mu\|_v \leq 1\} = \sup_{x \in E} [v(x)]^{-1} |f(x)|$$

et

$$\|P\|_v = \sup\left(\frac{\int_{\infty} v(y)|P(x,dy)|}{v(x)}, x \in E\right)$$

## 2.4 Ergodicité uniforme et stabilité forte

### Définition 2.4.1 [3]

La chaîne  $X$  est dite uniformément ergodique par rapport à la norme  $\|\cdot\|$  si elle possède une unique mesure invariante  $\pi$  et

$$\|P^t\| - \Pi \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty$$

### Définition 2.4.2 [16]

La chaîne  $X$  est dite fortement stable par rapport à la norme  $\|\cdot\|$  si chaque noyau stochastique  $Q$  dans un certain voisinage  $Q : \|Q - P\| < \epsilon$  admet une probabilité invariante unique  $v$  et

$$\|v - \pi\| \rightarrow 0 \text{ quand } \|Q - P\| \rightarrow 0$$

### Théorème 1 [16]

La chaîne  $X$  est uniformément ergodique par rapport à la norme  $\|\cdot\|$  si et seulement si l'opérateur  $I - P + \Pi$  est inversible et borné  $\Leftrightarrow \|(I - P + \Pi)^{-1}\| < \infty$  où  $I$  est l'opérateur identité.

### Théorème 2 [16]

La chaîne  $X$  est fortement stable par rapport à la norme  $\|\cdot\|$  si et seulement si elle est uniformément ergodique par rapport à la même norme.

**Remarque 2.4.1** Une chaîne de Markov peut être uniformément ergodique ou fortement stable par rapport à une norme et ne pas l'être par rapport à une norme si les deux normes ne sont pas équivalentes.

---

**Théorème 3** [16]

Soit  $X$  une chaîne uniformément ergodique. Alors chaque noyau stochastique dans un certain voisinage  $Q : \|Q - P\| < \epsilon$  correspond à une chaîne de Markov uniformément ergodique et fortement stable par rapport à la norme  $\|\cdot\|$

**Remarque 2.4.2** L'énoncé de ce théorème revient à dire que l'ergodicité uniforme par rapport à la norme  $\|\cdot\|$  est préservée sous de petites perturbations du noyau de transition.

**Théorème 4** [16]

Supposons que la chaîne  $X$  est fortement stable par rapport à la norme  $\|\cdot\|$ . Alors, pour tout noyau stochastique au voisinage de  $P$ , on a :

$$\|v - \pi\| \leq C\|Q - P\| \quad \text{et} \quad \sup_t \|Q^t - P^t\| \leq \|Q - P\| \quad (2.5)$$

Où  $v$  est la mesure invariante de  $Q$  et  $C = C(P)$  une certaine constante.

## 2.5 Récurrence au sens de Harris

Dans cette partie, nous allons introduire une notion importante concernant les conditions qu'imposent les théorèmes d'ergodicité et de stabilité. Il s'agit donc de la notion de la récurrence au sens de Harris.

**Définition 2.5.1** [2]

Une mesure  $\pi\sigma$  - finie sur l'espace  $(E, \varepsilon)$  est dite invariante par le noyau de transition  $P$  (ou  $P$ -invariante) d'une chaîne de Markov à espace de phase  $(E, \varepsilon)$ , si  $\pi P = \pi$ , où

$$\pi P(A) = \int_E P(x, A)\pi(dx) \quad (2.6)$$

**Définition 2.5.2** [3][16]

La chaîne de Markov  $X$  d'espace de phase  $(E, \varepsilon)$  et de noyau de transition  $P$  est récurrente au sens de Harris s'il existe une mesure invariante  $\pi\sigma$  - positive telle que  $\pi(A) > 0$  entraîne

$$Pr_x \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_A(X_n) = \infty \right] = 1 \quad (2.7)$$

Pour tout  $x \in E$ , où  $\mathbb{1}_A$  est la fonction indicatrice sur  $A$

Nous dirons tout simplement que  $X$  est une chaîne de Harris et le noyau de transition de  $X$  est dit également de Harris.

**Définition 2.5.3** [2]

La chaîne  $X$  est dite fortement récurrente s'il existe une mesure  $\pi\sigma$  - finie positive  $P$ -invariante

telle que  $\pi \gg v$  pour toute mesure finie  $v$  vérifiant  $v(E) = 0$ , et telle que  $\pi(A) > 0$  entraîne

$$Pr_x \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{K}_A(X_n) = \infty \right] = 1 \quad (2.8)$$

pour tout  $x \in E$ , où  $\mathbb{K}_A$  est la fonction indicatrice sur  $A$

**Propriétés 2.5.1** *Énonçons certaines propriétés :*

- Toute chaîne de Harris est récurrente irréductible.
- Si la  $\sigma$ -algèbre  $\varepsilon$  n'est pas séparable (engendrée par un ensemble dénombrable), alors une chaîne récurrente irréductible n'est pas nécessairement de Harris.
- Toute chaîne de Harris est irréductible.
- Toute chaîne récurrente irréductible et discrète est de Harris.

**Théorème 5** *Une chaîne de Markov récurrente au sens de Harris est uniformément ergodique par rapport à la norme  $\| \cdot \|$  et apériodique si et seulement s'il existe un entier  $n \geq 1$  [3], une mesure positive  $\alpha \in \mathbf{M}^+$  et une fonction mesurable  $h \in f_{\varepsilon}^+$  telles que les conditions suivantes soient satisfaites :[3]*

$$\pi h > 0, \alpha \mathbf{1} = 1, \alpha h > 0, \quad (2.9)$$

$$\text{Le noyau } T = P^n - h \circ \alpha \text{ est non négatif,} \quad (2.10)$$

$$\|T^m\| \leq \rho \text{ pour un certain entier } m \geq 1, \rho < 1. \quad (2.11)$$

## 2.6 V-stabilité forte d'une chaîne de Markov

Comme nous l'avions souligné précédemment, les conditions 2.1, 2.2, 2.1 de la section 2.3 sont notamment satisfaites par des normes de la forme

$$\|\mu\|_v = \int_{x \in E} v(x) |\mu|(dx) \quad (2.12)$$

où  $v$  est une fonction mesurable bornée inférieurement par une constante positive (pas nécessairement finie) sur  $E$ ,  $\mu \in m\varepsilon$  et  $|\mu|$  est la variation de la mesure  $\mu$ .

**Remarque 2.6.1** *Toute intégrale sans précision du domaine d'intégration signifie que l'on intègre sur  $E$ . Dans le cas où  $E$  est discret, l'intégrale se transforme en une somme discrète.*

**Définition 2.6.1** [3]

*On dit qu'une chaîne de Markov est  $v$ -fortement stable, si elle est fortement stable par rapport à une*

norme  $|\cdot|_v$ . Dans ce cas, les normes induites par  $\|\cdot\|_v$  dans les espaces  $f\varepsilon$  et  $\beta$  sont respectivement :

$$\|f\|_v = \sup|\mu f|, \|\mu\|_v \leq 1 = \sup_{x \in E} [v(x)]^{-1} |f(x)|, \quad \forall f \in f\varepsilon \quad (2.13)$$

$$\|P\|_v = \sup|\mu P_v|, \|\mu\|_v \leq 1 = \sup_{x \in E} [v(x)]^{-1} \left| \int v(y) |P(x, dy)| \right| \quad (2.14)$$

**Remarque 2.6.2** *Le choix de la norme correspondante (convenable)  $\|\cdot\|_v$  conduit à chercher une fonction test  $v$ . La construction de la fonction test  $v$  et le choix de  $h$  et de  $\alpha$  constituent la difficulté majeure dans l'étude de la  $v$ -stabilité forte, puisqu'elles dépendent essentiellement de la forme du noyau de transition de la chaîne de Markov  $X$ .*

## 2.7 Inégalités de stabilité

Dans les conditions de la section 2.3, on peut obtenir les estimations quantitatives de la stabilité, telles que la déviation de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov  $X$  en termes des fonctions  $v$ ,  $h$  et la mesure  $\alpha$ .

### Théorème 6 [3]

*Soit une chaîne  $X$  fortement  $v$ -stable et vérifiant la récurrence au sens de Harris.*

*Si  $v$  est la mesure invariante du noyau  $Q$ , alors, pour des  $\|Q - P\|_v$  suffisamment petites, on a l'égalité :*

$$\square = \pi [I - \Delta R_0 (I - \Pi)]^{-1} = \pi + \sum_{t=1}^{\infty} \pi [\Delta R_0 (I - \Pi)]^{-1} \quad (2.15)$$

Où  $\Delta = Q - P$  et  $R_0 = (I - T)^{-1}$

### Conséquence 1 [19]

$$v = \pi + \pi \Delta R_0 (I - \Pi) + o(\|\Delta\|_v^2) \quad (2.16)$$

Pour  $\|\Delta\|_v \rightarrow 0$

### Conséquence 2 [19]

Pour  $\|\Delta\|_v < \frac{(1-p)}{c}$ , on a l'estimation

$$\|v - \pi\|_v \leq \|\Delta\|_v c \|\pi\|_v (1 - p - c \|\Delta\|_v)^{-1} v = \pi + \pi \Delta R_0 (I - \Pi) + o(\|\Delta\|_v^2) \quad (2.17)$$

Où

$$c = m \|P\|_v^{m-1} (1 + \|\mathcal{K}\|_v \|\pi\|_v); \|\pi\|_v \leq (\alpha v) (1 - p)^{-1} (\pi h) m \|P\|_v^{m-1} \quad (2.18)$$

---

## 2.8 Quelques applications de la méthode de stabilité forte

Dans cette partie, nous allons présenter quelques applications déjà réalisées de la méthode de stabilité forte dans certaines disciplines des mathématiques appliquées.

### 2.8.1 En Gestion des Stocks

La recherche opérationnelle trouve application dans divers domaines y compris celui de la gestion des stocks. L'étude faite à ce sujet s'agit globalement de l'applicabilité de la méthode de la stabilité forte aux modèles de la gestion des stocks. Comme le comportement du modèle de gestion des stocks à revue périodique de type  $(R, s, S)$  avec livraison instantanée peut être décrit par une chaîne de Markov, alors on applique la méthode de la stabilité forte sur cette dernière.

L'objectif d'une étude pareille est celui d'analyser la sensibilité de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov qui décrit le modèle en question par rapport à la perturbation de la loi de demande.[20]

### 2.8.2 En Assurances

L'évolution permanente et constante que connaît le monde de l'actuariat et des mathématiques financières a incité les chercheurs à s'intéresser de plus en plus à l'analyse de la stabilité de fonctionnement des systèmes complexes. Par conséquent, l'objectif premier de l'analyse de stabilité d'un système est celui d'établir à quel point le système étudié dans les calculs représente au mieux le processus de fonctionnement du système réel. En actuariat et dans la plupart des cas, il n'existe pas encore de formules explicites pour le calcul de probabilités de ruine chose qui conduit systématiquement à l'apparition du concept de la stabilité lorsque les modèles de risque ne peuvent être estimés qu'avec incertitudes. La théorie de la ruine sert donc à modéliser l'évolution de la richesse d'une compagnie d'assurance par un processus stochastique et naturellement d'évaluer sa probabilité de la ruine. Ainsi que de présenter et de proposer de nouvelles bornes de stabilité des probabilités. L'application de la méthode de la stabilité forte faite à ce sujet s'intéresse à un modèle de risque que nous appelons processus de réserves et qui est défini comme suit :[9]

$$X(t) = u + ct - Z(t)$$

Où  $Z(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$ , avec  $\{Z_i, i \geq 1\}$  est une séquence des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées représentant le montant des réclamations de fonction de distribution  $F$  et de moyenne  $\mu$ ,  $\{N(t), t \geq 0\}$  étant un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$  représentant le nombre de réclamations,  $c$  le taux de prime constant par unité de temps et  $u$  le surplus initial de la compagnie d'assurance.

---

### 2.8.3 En Fiabilité

Dans cette étude, on s'était intéressés à un système de fiabilité avec maintenance préventive modélisée sous forme d'un système  $M/G/1/N$  avec vacances. La *chaîne* de Markov dans ce cas représente le nombre de machines qui sont en panne à la fin de la réparation de la  $n^{\text{ième}}$  machine et elle est fortement stable. Par conséquent, il est possible d'approximer les caractéristiques du système réparable  $M/G/1/N$  avec maintenance préventive par celles du système réparable  $M/G/1/N$  classique. Du coup, lorsqu'il s'agit d'un taux de défaillance constant alors il n'est pas nécessaire de faire la maintenance préventive.[22]

### 2.8.4 En Évaluation des Performances des Réseaux Informatiques

Concernant le travail réalisé dans ce cadre et sachant qu'en général les méthodes de stabilité sont utilisées afin de détecter les parties du système étudié qui peuvent causer une instabilité ou un goulot, il a été prouvé que la méthode de la stabilité forte plus précisément peut être très utile dans la modélisation et la mesure des performances de certains systèmes informatiques. L'essence de cette étude consiste en la perturbation du flot des arrivées et de la durée de service dans les systèmes classiques, les systèmes prioritaires ainsi que dans les systèmes avec rappels. Par la suite un algorithme a été élaboré donnant ainsi la possibilité d'étudier d'autres systèmes d'attente.[10]

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté dans un premier temps la méthode de la stabilité forte. Cette dernière peut s'appliquer sur tous les modèles des mathématiques appliquées qui peuvent être régis par des chaînes de Markov. Elle offre beaucoup d'avantages par rapport aux autres méthodes mais elle s'applique sous des conditions très strictes. Dans un second temps, nous avons introduit ses théorèmes fondamentaux ainsi que les critères d'ergodicité. Lors du chapitre suivant, nous aurons à faire recours à cette méthode pour proposer une nouvelle borne de perturbation au modèle de trafic routier choisi après avoir cherché la probabilité de dépassement du seuil critique de congestion.

# 3

## Stabilité forte pour un modèle de trafic routier

### Introduction

Dans le présent chapitre, nous allons présenter un certain modèle mathématique qui a pour objectif d'étudier le trafic routier. L'étude en question s'intéresse à l'arrivée des sinistres. Autrement dit, la modélisation du trafic routier en question puis l'approximation de ses caractéristiques stationnaires par la méthode de stabilité forte s'avèrent très intéressantes. Ce chapitre se propose de dépeindre aussi synthétiquement que possible les évolutions récentes dans le domaine du trafic routier. Ainsi que de mettre en avant la démarche à suivre dans la recherche du domaine de perturbation puis la clarification de la borne de la stabilité forte adéquate.

### 3.1 Trafic routier

Le trafic routier peut être défini très trivialement comme étant le processus de transport par le moyen des infrastructures routières et ce depuis une origine et vers une destination donnée. Le trafic routier est donc le résultat des comportements de chacun de ces individus sur un réseau donné. On parle généralement d'instabilité ou du trafic perturbé lors d'occurrences de congestions qui peuvent être soit récurrentes ou non-récurrentes.

### 3.2 Présentation du modèle étudié

Le modèle en question est celui qui est défini par le processus suivant :

$$X(t) = X(0) - ct + W(t) \tag{3.1}$$

---

**Définition 3.2.1**  $X(t)$  est l'état du trafic à l'instant  $t$ .

1.  $X(0) = u$  l'état initial du trafic
2.  $W(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} W_i$  le processus cumulé des temps en blocage du trafic.
3.  $W_i, i \geq 1$  est une séquence de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées représentant le temps en baisse fluidité du trafic, notons que  $F$  est sa fonction de répartition et sa moyenne  $\mu$ .
4.  $N(t), t \geq 0$  étant un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$  représentant le nombre de fois où l'évènement en question se produit.
5.  $c$  le taux de récupération du trafic fluide. .

Une autre représentation pour ce modèle est exprimée par la chaîne de Markov suivante

$$X_n = X_{n-1} - c\theta_n + W_n, \quad n \geq 1, X_0 = u$$

où  $(\theta_n)_{n \geq 1}$  représente le temps séparant deux arrivées consécutives des blocages de la route.

### 3.3 Perturbation du modèle de trafic routier

Avant de commencer de perturber l'un des facteurs du modèle, nous définissons la probabilité que notre processus dépasse un seuil critique de congestion qui est donnée comme suit :

$$\psi(u, b) = P(\inf_{t \geq 0} \{X(t) > b \mid X(0) = u\} < \infty) \quad (3.2)$$

#### 3.3.1 Présentation du processus inverse $\{Y_n\}_{n \geq 1}$

Soit  $\{\sigma_n\}_{n \geq 1}$  une séquence stationnaire qui est considérée (sans perte de généralité) comme partie d'une autre séquence stationnaire  $\{\sigma_n\}_{-\infty \leq n \leq \infty}$ , prenant des valeurs d'un espace approprié  $\Sigma$ , [23]

Et appelons la séquence  $\{\sigma_n\}$  une gouvernante.

$$Y_{n+1}^{(N)} = (Y_n^{(N)} + \eta_{n+1}^{(N)})_+, Y_0^{(N)} = 0 \quad (3.3)$$

$$\psi(u, b) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}(Y_N^{(N)} > b - u).$$

Revenons à la définition 3.3 de la séquence  $\{Y_n^{(N)}\}$ . Puisque  $\{\sigma_n\}_{-\infty < n < \infty}$  est stationnaire, on peut définir une autre séquence  $\{Y_n\}_{n \geq 0}$  par la relation :

$$Y_{n+1} = (Y_n + \eta_{n+1})_+, Y_0 = 0$$

$$\{Y_n\}_{0 \leq n \leq N} = \{Y_n^{(N)}\}_{0 \leq n \leq N}$$

Et par conséquent,

$$\psi(u, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(Y_n > b - u)$$

Où  $\eta_i$  sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées générées par :

$$c \int_0^\theta \exp(X_\theta - X_0) dt$$

Le processus inverse  $\{Y_v\}$  qu'on peut associer au modèle considéré dans le cadre de ce travail est donc de la forme : [23]

$$Y_{n+1} = Y_n - c\theta + W_n$$

### 3.3.2 Construction du processus spécial $\{Y_n\}_{n \geq 1}$

Soit  $b$  la capacité du trafic et  $u$  l'état du trafic à l'instant  $t = 0$ . Fixons  $N > 0$  et supposons que le dépassement de seuil ait lieu entre  $[1, N]$ , puis la forme du processus spécial est donnée par :

$$\begin{aligned} Y_n &= (Y_{n-1} - c\theta_n + W_n)_+, \quad Y_0 = 0 \\ &= \sup(0, Y_{n-1} - c\theta_n + W_n), \quad Y_0 = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

de plus, nous avons  $Y_n$  dépend seulement de  $Y_{n-1}$ ,  $\theta_n$  et  $W_n$  sont indépendants de  $n$  et de l'état du système, donc  $\{Y_n\}_{n \geq 1}$  est une chaîne de Markov homogène dans l'espace continu  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^*$ . Depuis  $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ , nous avons :

$$\psi(u, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n > b - u) \quad (3.5)$$

**Preuve 1** Par définition de la chaîne de Markov  $(X_n)_n$  donnée aussi en haut, on peut écrire  $X_n = u - S_n$  avec  $S_n = c\theta_n - W_n$   $n \geq 1$ . Etant donné  $N > 0$ , nous supposons que le dépassement de seuil  $b$  dans  $[1, N]$ . Nous exprimons la probabilité de dépassement d'un seuil  $b$  en 3.6

$$\sup_{n \in [1, N]} X_n > b = - \sup_{n \in [1, N]} X_n < -b := b - \sup_{n \in [1, N]} X_n < 0 \quad (3.6)$$

Notons que  $R_n = b - u + S_n$ , nous utilisons l'équation 3.6, on écrit :

$$\begin{aligned} b - \sup_{n \in [1, N]} X_n < 0 &= b - \sup_{n \in [1, N]} u - S_n < 0 = b + \inf_{n \in [1, N]} S_n - u < 0 \\ &:= \inf_{n \in [1, N]} R_n < 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Depuis la chaîne de Markov  $Y_n^N = Y_{n-1}^N + \eta_n^N$ , avec  $\eta_n^N = -c\theta_n^N + W_n^N$ . En vertu des résultats obtenus par [14] en pages [23-25] Les résultats donnés en haut sont confirmés.

**Définition 3.3.1** On définit les deux modèles idéal noté  $Y_n$  et perturbé noté  $Y_n'$  ainsi que que leurs noyaux de transition

- 
1. Le processus idéal est le processus inverse représenté par  $(Y_n)_{n \geq 1}$ , on obtient le noyau de transition défini dans l'espace mesurable  $(\mathbb{E}, \mathcal{E})$ , pour  $\forall v \in \mathbb{R}^+$  et  $\forall A \in \mathcal{E}$ ,  $\sigma$ -algèbre espace des états donnée comme suit, avec  $v = b - u$

$$\begin{aligned}
Q(v, A) &= P(Y_n \in A / Y_{n-1} = v) \\
&= P((Y_{n-1} - c\theta_n + W_n)_+ \in A / Y_{n-1} = v) \\
&= P((v - c\theta_n + W_n)_+ \in A) \\
&= P((0 < v - c\theta_n + W_n) \in A) + P(0 \in A, v - c\theta_n + W_n \leq 0) \\
Q(v, A) &= P((0 < v - c\theta_n + W_n) \in A) + P(0 \in A)P(v - c\theta_n + W_n \leq 0)
\end{aligned}$$

Donc, ce noyau de transition  $Q$  peut s'écrire sous la forme du théorème donné en chapitre 1 5 et on obtient :

$$T(v, A) = P(0 < v - c\theta_n + W_n) \in A) + P(0 \in A), \alpha(A) = P(0 \in A) \text{ et } h(v) = P(v - c\theta_n + W_n \leq 0).$$

2. Le processus perturbé est le processus inverse représenté par  $(Y'_n)_{n \geq 1}$ . On obtient de la même manière le noyau de transition défini dans l'espace mesurable  $(\mathbb{E}, \mathcal{E})$ , pour  $\forall v \in \mathbb{R}^+$  et  $\forall A \in \mathcal{E}$ ,  $\sigma$ -algèbre espace des états donnée comme suit, avec  $v = b - u$

$$\begin{aligned}
Q'(v, A) &= P(Y'_n \in A / Y'_{n-1} = v) \\
&= P((Y'_{n-1} - c'\theta'_n + W'_n)_+ \in A / Y'_{n-1} = v) \\
&= P((v - c'\theta'_n + W'_n)_+ \in A) \\
&= P((0 < v - c'\theta'_n + W'_n) \in A) + P(0 \in A, v - c'\theta'_n + W'_n \leq 0) \\
Q'(v, A) &= P((0 < v - c'\theta'_n + W'_n) \in A) + P(0 \in A)P(v - c'\theta'_n + W'_n \leq 0)
\end{aligned}$$

De même pour le noyau de transition  $Q'$  qui peut s'écrire sous la forme du théorème donné en chapitre 1 5 et on obtient :

$$T'(v, A) = P(0 < v - c'\theta'_n + W'_n) \in A) + P(0 \in A), \alpha'(A) = P(0 \in A) \text{ et } h'(v) = P(v - c'\theta'_n + W'_n \leq 0)$$

### 3.3.3 Les bornes de stabilité forte

Dans cette partie, on détermine la déviation entre les deux noyaux de transition des modèles perturbé et idéal  $Q$  et  $Q'$  respectivement donnés dans la définition 2.5.1 en fonction de la fonction poids définie par  $g(v) = e^{\epsilon v}$ , avec  $v = b - u$ , cette fonction dépend du seuil  $b$ , l'état initial  $u$  et l'existence d'une constante  $\epsilon > 0$ . On peut aussi obtenir la déviation entre les deux probabilités des modèles idéal et perturbé pour que notre processus dépasse un seuil  $\psi$  et  $\psi'$  en fonction de la même fonction de poids.

Nous commençons tout d'abord par définir la norme associée au noyau de transition  $sT$  en fonction

de la fonction poids  $g$ . [8]

$$\begin{aligned}
\|T\|_g &= \sup_{v \geq 0} e^{-\epsilon v} \int_0^\infty e^{vy} T(v, dy) \\
&= \sup_{v \geq 0} \mathbb{E}(e^{\epsilon(v+W_n-c\theta_n)} \mathbb{1}_{(v+W_n-c\theta_n) > 0}) \\
&\leq \mathbb{E}(e^{\epsilon(W_n-c\theta_n)}) = r
\end{aligned} \tag{3.8}$$

**Remarque 3.3.1** Pour un  $\epsilon > 0$ , nous dérivons quelques cas particuliers de  $r = \mathbb{E}(e^{\epsilon(W_n-c\theta_n)})$ .

1. Considérons que la durée des incidents  $W_n \sim \mathcal{E}(\mu)$  et l'inter-occurrence des incidents  $\theta_n \sim \mathcal{E}(\lambda)$ ,

$$r = \frac{\lambda}{\lambda + c\epsilon} \left(1 - \frac{\mu}{\epsilon}\right)^{-1} \text{ avec } \epsilon \geq \mu \tag{3.9}$$

2. Considérons que la durée des incidents  $W_n \sim \mathcal{G}(\mu, \sigma^2)$  et l'inter-occurrence des incidents  $\theta_n \sim \mathcal{E}(\lambda)$

$$r = \frac{\lambda}{\lambda + c\epsilon} \exp\left(\mu\epsilon + \frac{\sigma^2\epsilon^2}{2}\right) \tag{3.10}$$

3. Considérons que la durée des incidents  $W_n \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$  et l'inter-occurrence des incidents  $\theta_n \sim \mathcal{E}(\lambda)$

$$r = \frac{\lambda}{\lambda + c\epsilon} \left(1 - \frac{\epsilon}{\beta}\right)^\alpha, \text{ pour } \epsilon < \beta. \tag{3.11}$$

4. Considérons que la durée des incidents  $W_n \sim \mathcal{E}(\mu)$  et l'inter-occurrence des incidents  $\theta_n \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ , nous avons :

$$r = \left(\frac{\beta}{\beta + c\epsilon}\right)^\alpha \left(1 - \frac{\mu}{\epsilon}\right)^{-1} \tag{3.12}$$

5. Considérons que la durée des incidents  $W_n \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$  l'inter-occurrence des incidents  $\theta_n \sim \text{Hyper} - \mathcal{E}(q_i, \lambda_i)$

$$r = \left(1 - \frac{\epsilon}{\beta}\right)^\alpha \sum_{i=1}^n \frac{q_i \lambda_i}{\lambda_i + c\epsilon}, \text{ pour } \epsilon < \beta. \tag{3.13}$$

### 3.3.4 Présentation des deux modèles idéal fortement stable et le modèle réel

Ici, dans cette partie, nous allons présenter les deux modèles à étudier, le modèle réel (perturbé) et le modèle perturbé (fortement stable).

1. Le modèle idéal :

$$X_n = X_{n-1} - c\theta_n + W_n$$

Vérifions à présent que ce processus est un processus markovien c'est à dire que la propriété de l'absence de mémoire est vérifiée. Autrement dit, l'état du système à l'instant  $t$  dépend uniquement de l'état du système à l'instant  $t - 1$  et non des instants précédents.

Le processus qui nous intéresse est la suite  $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ .

Afin d'établir qu'il s'agit bien d'un processus Markovien, nous avons la propriété suivante :

$$\mathbb{P}(X_n = j) = \mathbb{P}(X_{n-1} = i - c\theta_n = i' + W_n = i'')$$

$$\mathbb{P}(X_n = j) = \mathbb{P}(X_{n-1} = i) - c\mathbb{P}(\theta_n = i') + \mathbb{P}(W_n = i'')$$

Les suites  $\{\theta_n, n \geq 0\}$  et  $\{W_n, n \geq 0\}$  étant indépendantes entre elles et forment de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées alors la suite  $\{X_n, n \geq 0\}$  définit bien un processus Markovien.

2. Le modèle perturbé :

Pour démontrer que le modèle perturbé est un processus markovien, on suit exactement le même raisonnement que celui du modèle idéal.

$$X'_n = X'_{n-1} - c\theta'_n + W'_n$$

### 3.3.5 Calcul de la déviation des noyaux de transition

On suppose qu'il existe un  $\varepsilon > 0$  tel que :

$$\mathbb{E}exp(\varepsilon(W_n - c\theta_n)) = r < 1$$

On considère la norme  $\|\cdot\|_g$

Où  $g(v) = e^{\varepsilon v}$ ,  $v \in R^+$  et  $\alpha(\cdot) = \delta_0(\cdot)$  les conditions du critère de stabilité forte sont alors satisfaites.

On utilise la condition donnée dans le chapitre 1 ( 3) et qui satisfait.

$$\begin{aligned} \|Q - Q'\|_g &= \sup_{v \geq 0} e^{-\varepsilon v} \int_0^\infty e^{\varepsilon y} |Q(v, dy) - Q'(v, dy)| \\ &\leq \sup_{v \geq 0} e^{-\varepsilon v} \left( \int_0^\infty e^{\varepsilon(v+w)} |F_W(dw) - F_{W'}(dw)| \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty e^{\varepsilon(v+w)} F(dw) \int_0^\infty |F_\theta(dy/c) - F_{\theta'}(dy/c)| \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$= \|F_W - F_{W'}\|_g + \mathbb{E}(e^{\varepsilon W}) \|F_\theta - F_{\theta'}\|_g =: \mu(a, a'). \quad (3.15)$$

### 3.3.6 Calcul de la déviation entre les probabilités de dépasser le seuil

Soit un processus de risque en trafic routier déterminé par le triplet  $a = \lambda, c, F$ , sa probabilité de dépassement de seuil  $\psi_a(v)$  coïncide avec la probabilité stationnaire de la chaîne de Markov  $\{V_n\}$  pour dépasser le niveau  $v$ . Soit un autre processus défini quant à lui par le triplet  $a' = \lambda', c', F'$  sa probabilité de dépasser le seuil de congestion est de  $\psi_{a'}(v)$

Soit  $\varepsilon$  tel que :

---


$$\mathbf{E} \exp(\varepsilon)(W_n - c\theta_n) = r < 1 \text{ et } g(v) = e^{\varepsilon v}, v = b - u.$$

Alors la distance  $v(\psi_a - \psi_{a'})$  entre les deux probabilités de dépassement de seuil peut être exprimée en termes des distributions stationnaires  $\pi$  et  $\pi'$  respectivement des modèles réel et perturbé comme suit :

$$v(\psi_a, \psi_{a'}) = \int e^{\varepsilon v} |\psi_a - \psi_{a'}|(du) = \|\pi - \pi'\|_\varphi$$

**Théorème 7**

$$\|\psi - \psi'\|_g \leq \frac{1}{1-r} \frac{\mu(a, a')}{(1-r)^2 - \mu(a, a')} \quad (3.16)$$

**Preuve 2** Dans l'exemple 4.1 de l'article d'Eneekiva [14] [29, 30], il a été démontré que  $k = \|G\|_\varphi = 1$ . Si on remplace dans le corollaire 1, on arrive à l'équation 3.20.

**Lemme 3.3.1**

$$\Delta \leq \frac{(1-r)}{1 + (k\|\pi\|_\varphi kr)} \equiv \Delta_0 \quad (3.17)$$

possède une mesure de probabilité invariante et unique et

$$\|\pi' - \pi\| \leq \frac{\Delta\|\pi\|_\varphi}{\Delta_0 - \Delta}, \quad (3.18)$$

Où la norme  $\|\pi\|_\varphi$  peut être estimée comme étant

$$\|\pi\|_\varphi \leq \frac{\|G\|_\varphi}{1-r} \quad (3.19)$$

**Corollaire 1**

$$\|\pi' - \pi\| \leq \frac{\Delta\|G\|_\varphi}{(1-r)(\delta_0 - \Delta)} \quad (3.20)$$

Si

$$\Delta \leq \frac{(1-r)^2}{1 + (k\|G\|_\varphi - 1)_r} \equiv \Delta_0 \quad (3.21)$$

Si on remplace  $\|\psi_\alpha - \psi_{\alpha'}\| = \|\pi' - \pi\|$ ,  $\Delta \equiv \mu(\alpha, \alpha')$  et  $\|G\|_\varphi = 1$  dans 3.20 alors on obtiendra l'inégalité suivante :

$$\|\psi - \psi'\|_g \leq \frac{1}{1-r} \frac{\mu(a, a')}{(1-r)^2 - \mu(a, a')} \quad (3.22)$$

## Conclusion

Dans cette deuxième partie du travail, nous avons commencé par la présentation du modèle de trafic routier qui est notre sujet d'étude. Ce dernier se présente comme une chaîne de Markov évoluant avec le temps. L'objectif principal est celui de trouver la probabilité que notre système dépasse le seuil de congestion critique  $b$ . Autrement dit, on cherche le premier instant où les

---

capacités de notre système soient dépassées. Pour se faire, nous avons une première fois trouvé une équivalence avec le modèle de risque en assurances et ce en suivant certaines propriétés algébriques. Une deuxième possibilité a été de mise, elle est plus fondée et c'est elle que nous avons explorée le plus. Il s'agit ici exactement de la construction de ce qu'on appelle "le processus inverse" qui n'est autre qu'un processus dual de plusieurs processus souvent présents en théorie de files d'attente et celle de la gestion des stocks. Le processus inverse est donc plus précisément une suite d'équations récursives, le suivi de ces dernières nous a permis d'atteindre notre objectif principal qui est celui de définir la probabilité de dépassement de la capacité du trafic. Par la suite, nous avons calculé les déviations entre les noyaux de transition et entre les probabilités de dépassement de seuil des deux modèles réel et perturbé. Dans le prochain chapitre, nous allons entamer notre partie pratique avec la mise en place d'un programme où nous allons pouvoir clarifier toutes les étapes citées dans ce deuxième chapitre. Il nous permettra plus précisément de connaître les domaines de perturbation où la borne est bonne.

# 4

## Analyse de perturbation du modèle étudié

### Introduction

Dans ce qui précède, une présentation du modèle de trafic routier en question puis une étude théorique ont été menées. Dans l'optique de pouvoir concrétiser ces réalisations et avoir la possibilité d'étudier et de voir de plus près les résultats de la perturbation du modèle réel par un modèle idéal, et ce, par le biais de la méthode de la stabilité forte, nous allons dans ce chapitre entamer notre partie pratique. Cette partie consiste essentiellement en la comparaison des résultats générés par la perturbation des paramètres du modèle.

### 4.1 Application numérique

Nous allons à présent appliquer la méthode de la stabilité forte sur un exemple numérique.

#### 4.1.1 Les étapes de l'algorithme

---

**Algorithm 1** Calcul de la déviation entre les probabilités de dépassement de seuil

---

**Début**

**1. Étape 01** Introduire les paramètres  $\lambda, \mu, c$  du modèle idéal et  $\lambda', \mu', c'$  du modèle perturbé, ainsi que  $b$  la capacité du trafic et  $u$  l'état initial du trafic;

**2. Étape 02** Vérifier si  $\epsilon \geq \mu$

**3. Étape 03** Générer une valeur de  $\varepsilon$  entre 0 et 1 qui vérifie  $0 < r(\varepsilon) < 1$

**4. Étape 04** Calculer  $\mu(\alpha, \alpha')$

Avec  $\mu(\alpha, \alpha') = \|Q - Q'\|_g = \|F_w - F_{w'}\|_g + \mathbb{E}(e^{\varepsilon w}) \|F_\theta - F_{\theta'}\|_g$ ;

**5. Étape 05** Calculer  $r$  tel que  $r = \mathbb{E}(e^{w_n - c\theta_n})$ ;

**6. Étape 06** Tester si  $\mu(\alpha, \alpha') < (1 - r)^2$ ;

Si oui, (\*On peut déduire l'inégalité de stabilité forte\*) passer à l'**Étape 07**;

Sinon retourner à l'**Étape 03**;

**7. Étape 07** Calculer la déviation  $\|\psi - \psi'\|_g$ , la borne  $\Gamma$

Avec  $\Gamma = \frac{1}{(1-r)} \frac{\mu(\alpha, \alpha')}{(1-r)^2 - \mu(\alpha, \alpha')}$ ;

**Fin.**

---

Dans ce qui suit, nous allons montrer les résultats obtenus après le déroulement de l'algorithme présenté ci-dessus et qui consiste en le suivi des étapes de la méthode de la stabilité forte. L'étude de la stabilité du trafic routier par le biais d'une méthode d'approximation pour la première fois nous a donné des résultats très importants ce qu'illustre d'ailleurs les représentations graphiques jointes. Et ce, contrairement à d'autres études du trafic où l'on a appliqué des méthodes exactes. Dans la construction des étapes de cet algorithme on vérifie d'abord les conditions du critère de stabilité forte ainsi que d'autres qui nous évitent le dépassement certain du seuil de congestion critique. L'idée principale derrière cet algorithme est de générer des valeurs aléatoires comprises entre 0 et 1 du paramètre de la norme  $\epsilon$  puis calculer la déviation  $\|\psi - \psi'\|_v$ , avec  $v = b - u$ . Ses étapes principales consistent en la génération des valeurs aléatoires de  $\epsilon$  comprises entre  $\mu$  et 1, vérifier le non dépassement du seuil critique de gestion ainsi que de calculer les différentes quantités dont les formules sont présentées lors du deuxième chapitre.

Il est à noter que pour chaque application, on a deux cas possibles. Variation ou fixation des deux seuils minimal et maximal de congestion.

#### 4.1.2 Perturbation N°1 : fixation du 'u' et variation du 'b'

Le tableau suivant présente les résultats obtenus pour quelques valeurs significatives des ' $\epsilon$ ' générés :

---

$\lambda = 0.02, \mu = 0.04, c = 0.51, \lambda' = 0.021, \mu' = 0.041, c' = 0.52,$						
$u$	$b$	$\epsilon$	$r$	$\ Q - Q'\ _g$	$\ \psi - \psi'\ _g$	$\Gamma$
<b>40</b>	<b>80</b>	<b>0.8147</b>	<b>0.0483</b>	<b>0.1147</b>	<b>0.0953</b>	<b>0.1524</b>
40	82	0.1270	0.3445	0.1437	0.0957	0.7646
40	85	0.0975	0.4861	0.1656	0.0963	3.2725
40	86	0.2785	0.1441	0.1332	0.0965	0.2596
40	87	0.5469	0.0722	0.1292	0.0967	0.1696
40	90	0.1576	0.2670	0.1532	0.0973	0.5440
40	94	0.8003	0.0492	0.1342	0.0981	0.1938
40	95	0.1419	0.3016	0.1682	0.0983	0.7531
40	101	0.8491	0.0463	0.1543	0.0994	0.2142
40	107	0.6557	0.0601	0.1679	0.1006	0.2497
<b>40</b>	<b>111</b>	<b>0.0971</b>	<b>0.4890</b>	<b>0.2350</b>	<b>0.1013</b>	<b>17.5620</b>
40	115	0.9502	0.0414	0.1830	0.1021	0.2593
40	130	0.1190	0.3734	0.2690	0.1048	3.47
40	143	0.1386	0.3099	0.2933	0.1072	2.3252
40	144	0.1493	0.2842	0.2910	0.1074	1.8353
40	149	0.2435	0.1660	0.2815	0.1083	0.8152
40	152	0.1966	0.2088	0.2977	0.1088	1.1458
40	157	0.8308	0.0474	0.2808	0.1097	0.4704
40	161	0.2858	0.1403	0.3069	0.1103	0.8303
40	164	0.3804	0.1044	0.3086	0.1109	0.6983

TABLE 4.1 – Comparaison entre les variations de  $\|\psi - \psi'\|_g$  et  $\Gamma$  en fonction du paramètre de perturbation  $\epsilon$

La figure ci-dessous illustre graphiquement les résultats obtenus dans le tableau précédent :

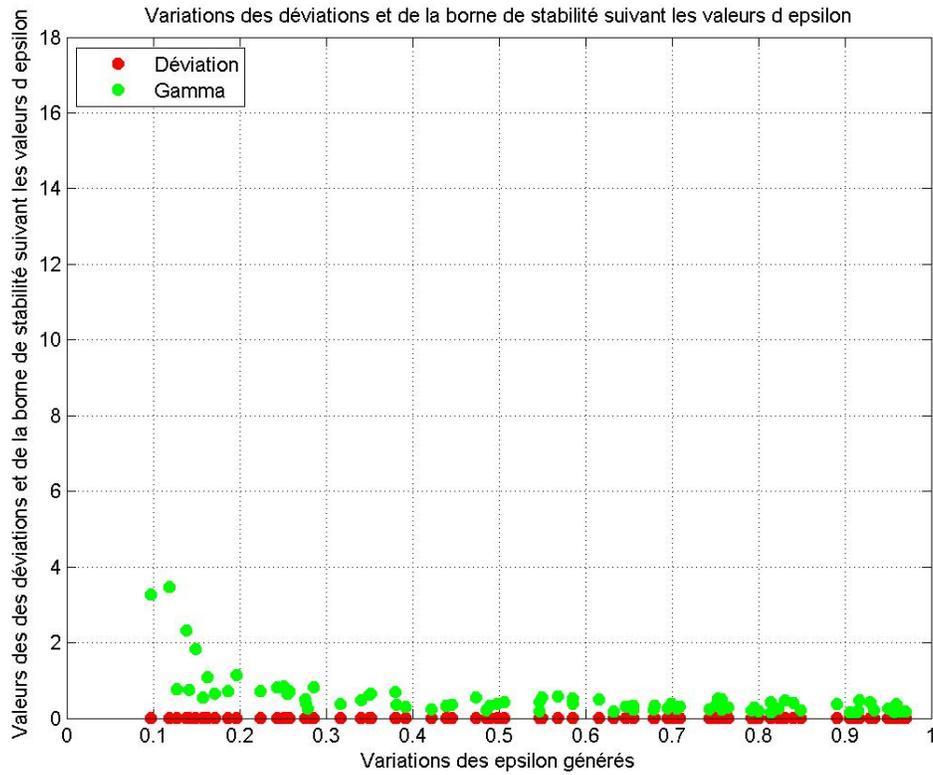


FIGURE 4.1 – Comparaison entre les variations de  $\|\psi - \psi'\|_g$  et  $\Gamma$  en fonction du paramètre de perturbation  $\epsilon$  sous forme d'un nuage de points avec fixation de  $u$  et variation de  $b$

### 4.1.3 Perturbation N°2 : variation du 'u' et 'b'

Dans le tableau suivant, on présente certains résultats obtenus en prenant quelques valeurs significatives de ' $\epsilon$ ' :

---

$\lambda = 0.02, \mu = 0.04, c = 0.51, \lambda' = 0.021, \mu' = 0.041, c' = 0.52,$						
$\epsilon$	$u$	$b$	$\Gamma$	$\ \psi - \psi'\ _g$	$r$	$\ Q - Q'\ _g$
0.8147	40	80	0.1524	0.0953	0.0483	0.1147
<b>0.9058</b>	<b>40.5</b>	<b>81</b>	<b>0.1507</b>	<b>0.0954</b>	<b>0.0434</b>	<b>0.1153</b>
0.1270	41	82	0.7492	0.0955	0.0445	0.1415
0.9134	41.5	83	0.1531	0.0956	0.0431	0.1170
0.6324	42	84	0.1674	0.0957	0.0957	0.0623
0.0975	42.5	85	2.9705	0.0958	0.04861	0.1596
0.9575	44	88	0.1585	0.0961	0.0411	0.1213
0.9649	44.5	89	0.1597	0.0962	0.0407	0.1222
0.1576	45	90	0.4923	0.0963	0.2670	0.1425
0.1419	47.5	95	0.6438	0.0968	0.3016	0.1594
0.1712	54	108	0.5095	0.0981	0.2432	0.1926
<b>0.0971</b>	<b>55.5</b>	<b>111</b>	<b>5.4947</b>	<b>0.0984</b>	<b>0.7890</b>	<b>0.1702</b>
0.1869	57.5	115	0.4995	0.0992	0.2207	0.1849
0.1626	64.5	129	0.6806	0.1001	0.2577	0.2015
0.1190	65	130	1.6829	0.1002	0.3734	0.2090
0.1386	71.5	143	1.1341	0.1014	0.3090	0.2066
0.1493	72	144	0.9438	0.1015	0.2842	0.2066
0.2435	74.5	149	0.4722	0.1020	0.1660	0.1966
0.1926	76	152	0.6190	0.1023	0.2088	0.2058
0.2511	76.5	153	0.4741	0.1023	0.1607	0.2005

TABLE 4.2 – Comparaison entre les variations de  $\|\psi - \psi'\|_g$  et  $\Gamma$  en fonction du paramètre de perturbation  $\epsilon$

La figure suivante illustre graphiquement les résultats obtenus dans le tableau précédent :

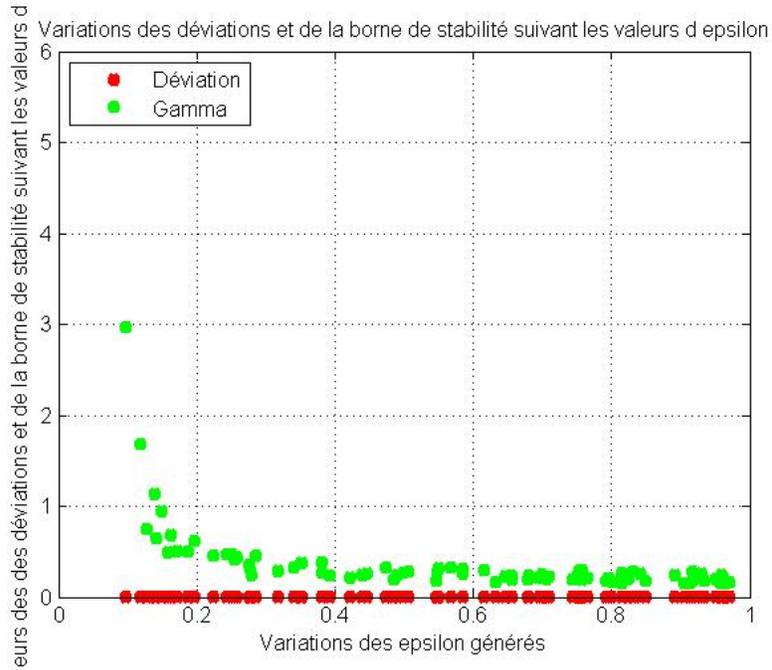


FIGURE 4.2 – Nuage de points montrant une comparaison entre les variations de  $\|\psi - \psi'\|_g$  et  $\Gamma$  en fonction du paramètre de perturbation  $\epsilon$

#### 4.1.4 Perturbation N°3 : fixation du 'u' et variation du 'b'

En prenant quelques valeurs illustratives de ' $\epsilon$ ', on a obtenu les résultats qu'on présente dans le tableau suiant :

---

$\lambda = 0.02, \mu = 0.04, c = 0.51, \lambda' = 0.021, \mu' = 0.041, c' = 0.52, \alpha = 4.25, \beta = 6, \alpha' = 5, \beta' = 5$						
$\epsilon$	$u$	$b$	$\Gamma$	$\ \psi - \psi'\ _g$	$r$	$\ Q - Q'\ _g$
0.8147	18	100	0.0484	0.1034	0.0189	0.0437
<b>0.9058</b>	<b>18</b>	<b>101</b>	<b>0.0432</b>	<b>0.1036</b>	<b>0.0153</b>	<b>0.0395</b>
0.9134	18	103	0.0436	0.1039	0.0150	0.0399
0.8003	18	114	0.0571	0.1059	0.0195	0.0509
0.1419	18	115	0.2366	0.1061	0.1875	0.1064
0.4218	18	116	0.1039	0.1063	0.0548	0.0799
0.9157	18	117	0.0501	0.1065	0.0149	0.0436
0.7922	18	118	0.0601	0.1066	0.0199	0.0535
0.9595	18	119	0.0481	0.1068	0.0135	0.0441
0.6557	18	120	0.0746	0.1070	0.0279	0.0639
0.0357	18	121	2.1271	0.1072	0.5050	0.1257
<b>0.0344</b>	<b>18</b>	<b>139</b>	<b>3.4697</b>	<b>0.1103</b>	<b>0.5143</b>	<b>0.1481</b>
0.1869	18	144	0.2563	0.1112	0.1434	0.1321
0.1493	18	168	0.3949	0.1152	0.1788	0.1652
0.2543	18	171	0.2580	0.1157	0.1029	0.1512
0.2435	18	173	0.2715	0.1161	0.1081	0.1551
0.9293	18	174	0.0809	0.1162	0.0145	0.0717
0.6160	18	178	0.1324	0.1169	0.0310	0.1068
0.2511	18	177	0.2743	0.1167	0.1044	0.1588
0.28758	18	185	0.2648	0.1180	0.0899	0.1608

TABLE 4.3 – Comparaison entre les variations de  $\|\psi - \psi'\|_g$  et  $\Gamma$  en fonction du paramètre de perturbation  $\epsilon$  avec un  $u$  fixé et  $b$  qui varie

La prochaine figure illustre graphiquement les résultats obtenus dans le tableau précédent :

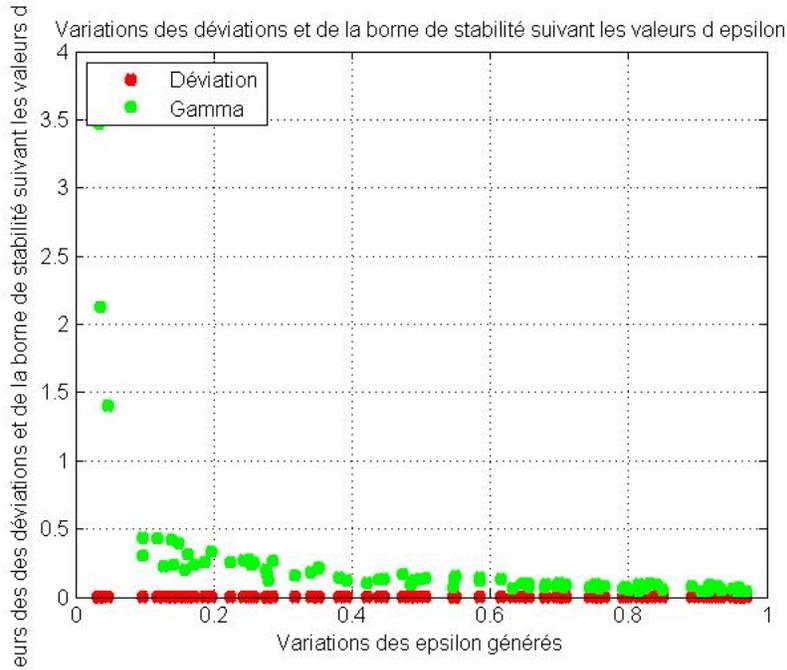


FIGURE 4.3 – Une comparaison entre les variations de  $\|\psi - \psi'\|_g$  et  $\Gamma$  en fonction du paramètre de perturbation  $\epsilon$  tout en fixant  $u$  et variant  $b$

#### 4.1.5 Perturbation N°4 : variation du 'u' et 'b'

Dans ce qui suit, on représente quelques résultats démonstratifs pour sous forme d'un tableau : suivant présente les résultats obtenus pour quelques valeurs significatives des ' $\epsilon$ ' générés :

---

$\lambda = 0.02, \mu = 0.04, c = 0.51, \lambda' = 0.021, \mu' = 0.041, c' = 0.52, \alpha = 5, \beta = 5, \alpha' = 4.25, \beta' = 6$						
$u$	$b$	$r$	$\ Q - Q'\ _g$	$\Gamma$	$\ \psi - \psi'\ _g$	$\epsilon$
50	100	0.0247	0.522	0.0522	0.0595	0.0973
50.5	101	0.0207	0.0491	0.0551	0.0974	0.9058
52.5	105	0.2675	0.0796	0.2378	0.0978	0.0975
54.5	109	0.0185	0.0455	0.0505	0.0982	0.9649
55.5	111	0.0183	0.0450	0.0499	0.0984	0.9706
<b>59.5</b>	<b>119</b>	<b>0.0187</b>	<b>0.0445</b>	<b>0.0414</b>	<b>0.0991</b>	<b>0.9595</b>
60.5	121	0.5103	0.0847	1.1150	0.0993	0.0357
<b>65.5</b>	<b>131</b>	<b>0.5396</b>	<b>0.0879</b>	<b>1.5383</b>	<b>0.1003</b>	<b>0.0318</b>
69.5	139	0.5195	0.0908	1.3483	0.1010	0.4387
70	140	0.0594	0.0683	0.0889	0.1011	0.0345
70.5	141	0.0705	0.0715	0.0970	0.1012	0.3816
73	146	0.0583	0.0697	0.0906	0.1017	0.4456
75.5	151	0.0327	0.0596	0.0704	0.1022	0.6797
77	154	0.2276	0.0920	0.2360	0.1024	0.1190
79.5	159	0.1269	0.0875	0.1484	0.1029	0.2238
83.5	167	0.1997	0.0970	0.2229	0.1036	0.1386
84	168	0.1869	0.0967	0.2108	0.1037	0.1493
88	176	0.1443	0.0974	0.1793	0.1045	0.1966
88.5	177	0.1126	0.0941	0.1529	0.1046	0.2511
92.5	185	0.098	0.0955	0.1474	0.1053	0.2858

TABLE 4.4 – Comparaison entre les variations de  $\|\psi - \psi'\|_g$  et  $\Gamma$  en fonction du paramètre de perturbation  $\epsilon$

La figure suivante illustre graphiquement les résultats obtenus dans le tableau précédent :

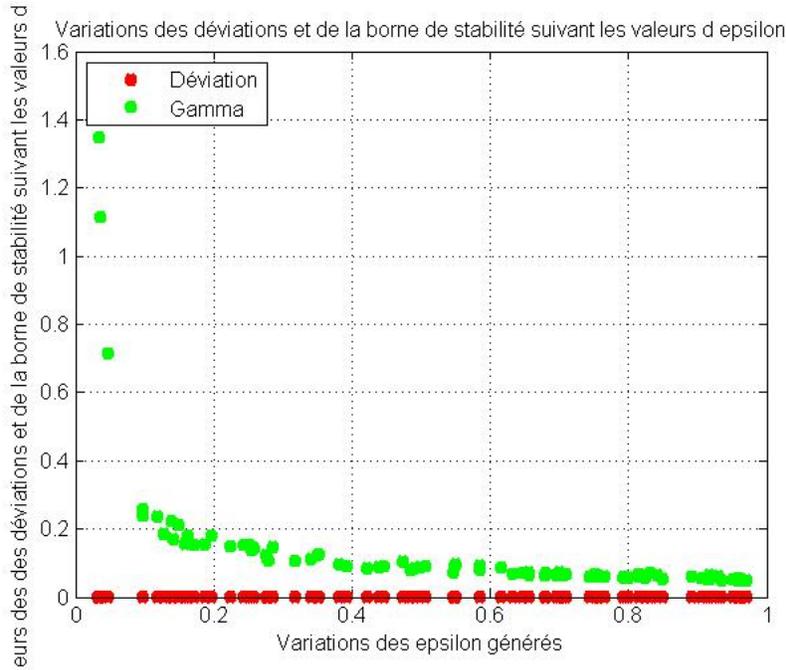


FIGURE 4.4 – Représentation graphique des variations de  $\|\psi - \psi'\|_g$  et  $\Gamma$  en fonction du paramètre de perturbation  $\epsilon$  lorsqu'on varie  $u$  et  $b$

#### 4.1.6 Discussion des résultats

Dans la première situation, on a supposé que l'arrivée des sinistres et leurs montants suivent une distribution exponentielle. Tandis que dans la deuxième situation, on a supposé que l'arrivée des sinistres est d'une distribution exponentielle et celle des montants des sinistres suit une loi Gamma.

En analysant le tableau 1, on constate que : les valeurs possibles de  $\epsilon$  sont comprises entre 0.0971 et 0.9502.

Pour  $\epsilon = 0.0971$ ,  $\Gamma = 17.5620$  n'est pas une borne de stabilité forte.

En analysant le tableau 2, on constate que : les valeurs possibles de  $\epsilon$  sont comprises entre 0.0971 et 0.9649.

Pour  $\epsilon = 0.0971$ ,  $\Gamma = 5.4947$  n'est pas une borne de stabilité forte.

En analysant le tableau 3, on constate que : les valeurs possibles de  $\epsilon$  sont comprises entre 0.0344 et 0.9595.

Pour  $\epsilon = 0.0344$ ,  $\Gamma = 3.4697$  n'est pas une borne de stabilité forte.

En analysant le tableau 4, on constate que : les valeurs possibles de  $\epsilon$  sont comprises entre 0.0345 et 0.9706.

Pour  $\epsilon = 0.0318$ ,  $\Gamma = 1.5383$  n'est pas une borne de stabilité forte.

---

Au bout de ces deux algorithmes, il s'avère que le choix du paramètre de la norme est très important dans la définition du domaine de perturbation ainsi que l'obtention d'une bonne estimation de la déviation. On remarque que plus le paramètre de la norme  $\epsilon$  est grand, meilleure est la borne.

---

## Conclusion

Les résultats obtenus au bout de cette troisième partie du travail viennent nous confirmer l'efficacité de la méthode de la stabilité forte dans la résolution des problèmes réels. En effet, l'élaboration d'un algorithme puis son implémentation sous l'environnement MATLAB nous a permis d'obtenir des résultats numériques qui confirment que le choix du paramètre de la norme  $\epsilon$  est crucial par rapport à l'estimation de la déviation.

---

# Conclusion générale

Etant donné l'intérêt particulier que l'homme moderne porte au transport, ce dernier a fini par devenir une pièce maîtresse dans sa vie quotidienne.

Cependant, la nature mais aussi les choix de l'homme mettent ce dernier souvent devant des épreuves difficiles. Dans le cadre du trafic routier, on parle plus exactement d'arrivées de sinistres qui déstabilisent son bon fonctionnement. C'est à dire s'intéresser à la fluidité du trafic routier et l'influence des blocages sur elle.

Arrivés au terme de ce projet de fin d'études, il y a lieu de faire le point sur l'objectif fixé pour ce travail et qui n'est autre que d'appliquer pour la première fois la méthode de la stabilité forte sur un modèle de risque en trafic routier.

La majorité des travaux antérieurs faits au sujet du trafic routier s'intéressaient à la modélisation de ce dernier sur un point de vue vitesse, charges, type de route... Dans notre travail, nous avons dégagé trois axes principaux :

1. Recherche de la probabilité de dépassement du seuil. Pour se faire, on s'est référé aux travaux de Farida Enikeeva [14] en construisant le processus inverse qui convient au modèle du trafic étudié.
2. L'identification du paramètre à perturber. L'écriture des noyaux de transition des chaînes de Markov et le choix des normes poids. Trois étapes importantes qui demeurent au même temps, les difficultés essentielles de l'application du critère de la stabilité forte.
3. Application numérique et validation des résultats : Dans cette optique, nous avons opté pour l'environnement Matlab comme langage de programmation. Un outil efficace qui offre une vitesse de calcul et un affichage des résultats. Dans ce sens on a conçu, développé puis implémenté un algorithme dont les paramètres considérés sont tirés du système réel.

Les résultats auxquels nous sommes arrivés prouvent que l'approche adoptée est très performante. Sa force consiste en le fait qu'elle permet d'analyser des modèles réels qui sont extrêmement difficiles à étudier vu qu'ils sont très proches de la réalité en les approximant par des modèles plus simples.

En terme de perspectives de recherche, nous voyons un intérêt très particulier qui émerge quant à l'étude de certains types de trafic très particuliers tout en ajoutant d'autres contraintes. La présentation graphique en trois dimensions (3D) de tels résultats est également intéressante afin de comprendre l'effet de la variation des seuils de congestion sur la déviation résultante. On propose également toujours dans le cadre des perspectives de recherche qui découlent de ce travail d'étudier l'impact du changement des paramètres sur la qualité de la borne ainsi que de la translation du modèle de risque en un modèle de risque en files d'attente.

---

# Bibliographie

- [1] Actes du Séminaire International sur le Transport, Béjaia, 2009 [http ://www.univ-bejaia.dz/staff/d\\_aissani-publication](http://www.univ-bejaia.dz/staff/d_aissani-publication) 12
- [2] Abbas, K. Approximation dans les systèmes de files d'attente à Serveur Non Fiabe, Thèse de doctorat, Université de Bejaia.
- [3] Aissani, D. and Kartashov, N. Ergodicity and stability of Markov Chains with Respect to Operator Topology in the Space of Transition Kernel, Dokl. Akad.Nank.SSR,ser.a, vol.11, p.59-60.
- [4] Aissani, D et collaborateurs, vingt cinq ans d'Application des Méthodes et Outils de la Recherche Opérationnelle aux Problèmes de Transport, conférence plénière, Université de Bordj Bou Arreridj, 2015.
- [5] Aissani, D. Benouaret, Z. et Touazi, A. Stabilité Forte de la Distribution Stationnaire du Temps d'Attente par le Concept de Dualité, Conférence Internationale de Modélisation et de Simulation, Quebec, Canada, 2016.
- [6] Aron, M. Boillot, F. Lebacqz, J.Modélisation du Trafic, Institut français des Sciences et Techniques des réseaux, de l'aménagement et du transport, p.9-10, France, 2002.
- [7] Azzouguen, F. Babouri, D. Boukenna, R. Sur les Bornes de Perturbation des Chaînes de Markov à Temps Discret et à espace d'états fini, mini-projet de Licence, p.34-35, Université de Bejaia, 2016.
- [8] Benouaret, Z. Touazi, A. Aissani, D. Adjabi, S. Méthode du Noyau et Approche de Stabilité Forte dans l'Approximation de la Probabilité de Ruine, Conférence Internationale de Modélisation et de Simulation, Quebec, Canada.
- [9] Benouaret, Z. Aissani, D. Modèles de Risque et Files d'Attente : la Méthode de Stabilité Forte, Afrika Statistica, vol n° 03, p.210-218, 2010.
- [10] Berglund, B. Cours Processus Aléatoires et Applications. Master 2 pro de mathématiques, p3-5, Université d'Orléans, France, janvier 2014.
- [11] Bouallouche-Medjkoune, L. L'Approche de Stabilité Forte dans l'Evaluation des Performances des Systèmes Informatiques, Thèse de doctorat en Informatique, Université de Sétif, 2006.
- [12] Chibout, H. Stabilité Forte dans les Systèmes d'Attente avec Arrivées par Groupes  $m^{Geo(x)}/g/1$ , mémoire de Magistère, Université de Bejaia, 2008.
- [13] Costeseque, G. Modélisation et Simulation dans le contexte du Trafic Routier, livre, p.803-807, Ecole des ponts Paristech, France, 2013.
- [14] Dupuis, G. Modélisation du Trafic Routier : le modèle de Lighthill-whitham-richards, p.1-2, Université Paris Dauphine, France, 2013.
- [15] Enikeeva, F. Kalashnikov, D. Rusaytite, D. Estimations de continuité des probabilités de ruine , Planethoster, Scandinavian Actuarial Journal, p.18-39, 2001.
- [16] Hamoudi, Z. Développement en Série et Stabilité Forte du Système M/M/1/N, mémoire de Magistère, Université de Bejaia, 2008.
- [17] Kartashov, N. Criteria for Uniform Ergodicity and Strong Stability of Markov Chains with a common phase space, theor.prob and math stat, 30 : 29-71, 1983.

- 
- [18] Mouhoubi, Z. Aissani, D. Some Inequalities of the Uniform Ergodicity and Strong Stability of Homogeneous Markov Chains. *Pliska Studia Mathematica Bulgarica*, 17 : 171-186, 2005.
- [19] Moustapha, J. Modélisation Mathématique et Simulation du Trafic Routier : Analyse Statistique de Modèles d'Insertion et Simulation Probabiliste d'un Modèle Cinétique, thèse de Doctorat, Université de Paris Est, p.109-110, France, 2014.
- [20] Moutari, M. Performance de Méthode de Stabilité Forte dans les Systèmes Prioritaires et les Systèmes avec Rappels, mémoire d'Ingéniorat, p.43-44, Université de Bejaia, 2013.
- [21] Rabta, B. Stabilité Forte dans un Modèle Stochastique de la Gestion des Stocks, thèse de Magistère, Université de Bejaia, 2002.
- [22] Rabta, B. Aissani, Dj. Lekadir, L. Stabilité Forte des Systèmes et Réseaux de Files d'Attente : Synthèses et Perspectives, in the "Queing Theory", Wilen ed, 2001, p.259-292.
- [23] Rahmoune, F. Stabilité Forte dans un Système d'Attente M/G/1/N avec Vacances, thèse de Magistère, Université de Bejaia, 2003.
- [24] Rusaytite, D. Bornes de Stabilité des Probabilités de Ruine, thèse de Doctorat, p.59-60, Université de Copenhague, Danemark, 2002.

---

# RÉSUMÉ

---

Dans notre travail, nous avons appliqué une méthode d'approximation à un problème de risque en Trafic Routier, afin de comprendre l'effet de l'arrivée de sinistres sur sa fluidité.

Dans un premier temps, une étude théorique a été effectuée. Elle consiste à présenter le modèle en question en mettant en avant ses différentes composantes. Nous avons également rappelé le principe et les théorèmes fondamentaux de la méthode de stabilité forte.

Dans un second temps, nous avons appliqué la méthode de stabilité forte en perturbant les trois paramètres  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $c$  après avoir obtenu la probabilité de dépassement du seuil de congestion du modèle étudié.

**Mots-clés :** Trafic routier, Modèles de Risque, Stabilité forte, Borne de perturbation, Processus inverse, probabilité de dépassement de seuil.

---

# ABSTRACT

---

In our work, we have applied an approximation method to a road traffic risk problem in order to understand the effect of the arrival of claims on its fluidity.

First, a theoretical study was carried out. In which, we have presented the model studied by highlighting its different components. We have also recalled the principle and the fundamental theorems of the strong stability method.

Secondly, we have applied strong stability method by disturbing the three parameters  $\lambda$ ,  $\mu$  and  $c$  after obtaining the probability of exceeding the congestion threshold of the model studied.

**Keywords :** Road traffic, Risk models, Strong stability, Disturbance boundary, Reverse process, probability of exceeding a threshold.