République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A/Mira de Bejaia
Faculté des Sciences Exactes
Département Recherche Opérationnelle

Mémoire de Master

en Mathématiques Appliquées
Option :
Mathématiques Financières
Sujet :

Jeux bayésiens appliqués dans les assurances

Réalisé par :

Mlle AYOUZ Dyhia

Mme AMMARI Hamida

Devant le jury composé de :

Présidente :	Mme. HALIMI Naouel	MCA	U. A/Mira Bejaia.
Promotrices :	Mme. BOUIBED Karima	MCB	U. A/Mira Bejaia.
	Mme. ANZI Aicha	MCA	U. A/Mira Bejaia.
Examinatrice :	Mme. SAIT Razika	MAA	U. A/Mira Bejaia.
Examinateur :	Mr. OUCHERIF Walid	Doctorant (Cadre à la SAA)	U. A/Mira Bejaia.

Année Universitaire 2021/2022

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du département de Recherche Opérationnelle, à l'Université Abderrehamne Mira campus Targua Ouzmour, Béjaia.

On aimerait en premier lieu remercier Dieu qui nous a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

On tiens à remercier tout d'abord nos encadrantes Mme Bouibed Karima et Mme Anzi Aicha, grâce à qui on a appris beaucoup de choses au cours de la réalisation de ce travail, pour la proposition du thème de ce mémoire ainsi que leur présence et leur enseignement, leurs critiques et leurs conseils nous ont été précieux.

On voudrait également remercier les membres du jury d'avoir accepter d'évaluer ce travail et pour toutes leurs remarques et critiques, ainsi que tous ceux qui nous ont enseigné durant toutes nos études, en particulier nos enseignants des deux années de Master.

On tient à remercier également le personnel administratif du département de Recherche Opèrationnelle de l'université de Béjaia.

Enfin on adresse nos sincères remerciement à nos parents, nos frères et nos soeurs, nos amis et à tous ceux qui ont contribué de prés ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Dédicace

Je dédie ce travail :

A mes parents qui ont illuminé mon chemin tout au long de mon parcours d'élève et d'étudiante, ils m'ont soutenue et encouragé sans répit. Qu'ils trouvent ici le témoignage de ma profonde reconnaissances.

A mes sœurs qui me sont d'une valeur inestimable, à mon unique et petit frère, vous m'avez chaleureusement supporté et aidé, vous avez partagé avec moi tous les moments d'émotions lors de la réalisation de ce modeste travail. Je vous en suis éternellement reconnaissante.

A mes amis qui m'ont manifesté toute leur disponibilité particulièrement mes deux chérs amis d'enfance, mille merci à tous.

A mes compagnons de la promotion 2020-2022, particulièrement ma binome, à qui je souhaite un énorme succès durant leurs parcours et chemin de vie.

Ayouz Dyhia

Je dédie ce travail :

A mes parents devant lesquels tous les mots de l'univers sont incapables d'exprimer mon amour, mes chers qui m'ont apporté le soutien au long de ma vie. Que dieu m'aide à vous rendre un petit peu de vos sacrifices.

A mon époux pour son aide et sa présence à mes côtés depuis toujours.

A mes chers frères, ainsi que mes douces sœurs qui m'ont soutenu et encouragé chaleureusement jusqu'au dernier instant de la réalisation de ce modeste travail.

A mes tantes Djouhra et Malika, ces anges qui veillent sur moi.

A mes chères amies, ma binôme ainsi que toute ma famille.

Ammari Hamida

Table des matières

Introduction générale

La théorie des jeux a fait son apparition dans la seconde partie du XXème siècle sur les contributions séminales de John Nash [15] et Von Neumann et Morgenstern [16], qui ont proclamé que la plupart des problèmes économiques peuvent se ramener à un jeu de stratégies entre acteurs rationnels, et que cette théorie est un des moyens de les analyser. La théorie des jeux étudie donc des situations d'interactions stratégiques où le sort de chacun dépend non seulement de ses propres décisions, mais aussi des décisions prises par les autres.

La théorie des jeux tire son nom du fait à l'origine elle était consacrée à l'analyse des jeux de société comme le Poker ou les échecs. Cependant, l'objet d'étude de cette théorie, à savoir les interactions et les comportements stratégiques a donné lieu à un champ très vaste d'applications. On trouve notamment l'économie [3] et [8], la gestion et même les sciences politiques et bien d'autres. Elle a connu un développement majeur dans les années 50 grâce aux travaux du mathématicien John Nash et de plusieurs extensions sur ses réalisations [11] et [18] ce que a fait de la théorie des jeux l'outil méthodologique de référence de la science économique.

L'apparition de l'assurance est un phénomène ancien, pourtant elle fait aujourd'hui totalement partie de notre cadre de vie quotidien. Cette industrie financière se consacre à la gestion du risque des agents économiques (particuliers et entreprises) désirant se prémunir des pertes financières entraînées par la réalisation casuelle d'un événement entraînant des conséquences fâcheuses. Pour gérer les risques, l'assurance recourt à son outil principal, les statistiques, plus excatement la loi des grands nombres. Pour l'assurance automobile par exemple, il est impossible de savoir à quel moment un assuré sera impliqué dans un accident, ni pour quelle gravité, par contre on connaît la fréquence des accidents sur une zone donnée. On peut ainsi disposer d'une approximation du montant des dommages sur des périodes déterminées.

Dans un marché d'assurance, on agit à la fois sur l'assuré en l'incitant à signer un contrat pour se couvrir chez un assureur concurrent à celui où il a signé son contrat actuel, et sur l'assureur en le contraignant dans une certaine mesure à réduire ses primes d'assurances à des niveaux acceptables. En effet, l'assureur est tenu de respecter ses engagements envers ses assurés mais devra également faire face à la concurrence autour de lui, son choix de stratégies à adopter et des tarifs à fixer est un sujet d'étude en développement continu.

La théorie des jeux a pour ambition de chercher à formaliser des situations dans lesquelles deux ou plusieurs agents (individus, entreprises, états...) poursuivent chacun son propre objectif, mais où les conséquences de l'action de l''un dépendent aussi de la réaction des autres. En mettant en évidence l'existence du phénomène de l'asymétrie d'information sur le fonctionnement d'un marché concurrentiel, notamment le marché des assurances, on trouve que les jeux bayésiens en particulier sont utiles dans ce cas.

Un des exemples les plus répandus de l'asymétrie d'information dans le domaine des assurances est l'assurance automobile. Les compagnies d'assurance automobile offrent des contrats d'assurance et cherchent à maximiser leurs profits. Ces compagnies ignorent si les clients sont prudents au volant ou pas. Elles sont donc confrontées à un manque d'information.

Dans ce travail, nous proposons de modéliser cette situation d'asymétrie d'information par un jeu bayésien se déroulant entre une compagnie d'assurance automobile et un client. En s'inspirant du modèle de base de Rothschild et Stiglitz [21], nous supposons l'existence d'assurés à bas risque et d'autres à haut risque. La compagnie d'assurance ne pouvant distinguer les deux, elle propose alors des contrats d'assurance identiques à tout le monde. Pour évaluer la stratégie de la compagnie et étudier le comportement des assurés vis à vis cette politique et selon leur type, nous avons réalisé une analyse générale des gains espérés des deux joueurs. Nous avons également illustré notre modèle par des exemples numériques permettant de l'assimiler aisément.

Le mémoire s'articule autour de trois chapitres, une introduction générale, une conclusion générale et une bibliographie :
Le premier chapitre contient deux parties ; la première partie comprend une présentation de la théorie des jeux dans un contexte général à savoir : les éléments de base d'un jeu, les différents types de jeu ainsi que quelques concepts de solutions des jeux non coopératifs, le tout illustré par des exemples simples issus majoritairement du domaine financier et économique. La deuxième partie fera le point sur une classe particulière et très importante des jeux, qui sont les jeux bayésiens. Ces jeux sont les jeux qui modélisent le mieux des si-

tuations d'interactions de la vie réelle, cela revient au fait que nous affrontons quotidiennement le manque d'information. Dans cette partie nous présentons le modèle de Harsanyi qui est le modèle le plus connu dans la théorie des jeux à information incomplète.

Le second chapitre de ce travail sera également composé de deux parties. La première partie sera consacrée à un aperçu général sur le secteur des assurances ainsi que les principales notions constituant ce domaine. La seconde partie est entièrement consacrée à la présentation de quelques modèles d'application de la théorie des jeux dans le marché des assurances. Ces modèles d'application nous donnent une vision globale sur ce qui a été étudié dans le domaine des assurance par la théorie des jeux et par conséquent nous sert d'aide pour la réalisation de notre modèle d'étude.

Le dernier chapitre fera l'objet de notre contribution et nous terminons par une conclusion générale et quelques références bibliographiques.

1
Généralités sur la théorie des jeux

1.1 Introduction

Comme dans la vie quotidienne, un jeu est décrit par un certain nombre de règles qui doivent indiquer : combien de joueurs jouent ou peuvent jouer le jeu en question, quelles sont les actions (les choix) qui s'offrent aux joueurs, peuvent ils coopérer les uns avec les autres ...etc, afin de déterminer qui peut faire quoi et quand ?

La théorie des jeux a connu une forte évolution ces dernières années. Outre le champ de l'économie, elle trouve des applications dans les sciences politiques, l'analyse stratégique, ou alors dans le domaine de la finance tels que les assurances [6] et les crédits bancaires [8] .

Ce chapitre est réparti en deux parties. Nous allons présenter dans la première partie les notions élémentaires de la théorie des jeux : les différentes classes de jeux, leurs représentations ainsi que les concepts de leurs solutions. La seconde partie sera consacrée à un type bien spécifié de jeux qui est les jeux bayésiens.

1.2 Éléments de base d'un jeu

Un jeu est une situation où les joueurs sont conduits à faire des choix stratégiques parmi un certain nombre d'actions possibles [9], et dans un cadre défini à l'avance qui sera les règles du jeu. Le résultat de ces choix constituant une issue du jeu, à laquelle est associé un gain (ou une perte) pour chacun des joueurs.
Nous définissons ci-dessous les notions de base de la théorie des jeux ainsi que les notations utilisées tout au long de ce travail. Commençons par définir ce qu'est un joueur, puis les termes décrivant la situation interactive dans laquelle ils sont.

- **Le joueur** : un joueur peut s'agir d'une personne, un groupe de personnes, une société, un état ou de la nature. Autrement dit, tout agent participant au jeu et capable de prendre des décisions et avoir un impact sur l'issue des interactions.
- **La stratégie** : une stratégie de jeu dans un jeu est un plan d'action qu'un joueur choisit parmi un nombre d'actions mises en sa disposition et qui est la meilleure selon ses préférences. Le résultat des choix de tous les joueurs constitue une (issue) ou profil d'actions du jeu. Il existe différents types de stratégies à savoir :
  1. **Les stratégies pures** : une stratégie pure d'un joueur est un plan d'actions qui prescrit une action de ce joueur pour chaque fois qu'il est susceptible de jouer.
  2. **Les stratégie mixtes** : une stratégie mixte d'un joueur est une distribution de probabilité sur son ensemble de stratégies pures.
- **L'utilité** : une utilité d'un joueur est le bénéfice négatif (perte) ou positif (gain) résultant des actions de tous les joueurs, elle dépend non seulement de ses décisions mais aussi de celles de tous les autres joueurs. Aussi, selon la situation du jeu, l'utilité peut se figurer en plusieurs qualités : elle peut être par exemple un prix dans un marché, le montant d'une enchère, un nombre de point...etc.
- **Rationnalité** : la rationnalité individuelle d'un joueur est une règle de maximisation du gain individuel, cette notion est fondamentale en théorie des jeux.

1.3 La classification des jeux

La théorie des jeux classifie les jeux en plusieurs catégories en fonction de différents critères, par exemple, selon le nombre des coups joués, le type d'information dont disposent les joueurs sur le jeu, le type de relation entre les joueurs, le nombre de joueurs ou de stratégies ou alors selon la forme des fonctions de gain des joueurs. On distingue ainsi différents types de jeu et les catégories les plus ordinaires sont comme suit :

1.3.1 Selon l'ordre du jeu

On distingue selon l'ordre d'intervention des joueurs deux types de jeu à savoir : les jeux simultanés (ou stratégiques) et les jeux séquentiels :

Jeux stratégiques ou simultanés : ce sont les jeux qui se déroulent en un seul coup et dans ce cas, les joueurs décident en même temps de leurs stratégies.

Jeux séquentiels : ce sont les jeux qui se déroulent en plusieurs coups et qui disposent d'une liste de règles qui déterminent l'agissement de chaque joueur et les gains associés à chaque issue possible du jeu. Autrement dit, les joueurs choisissent leurs actions à tour de rôle et peuvent observer ou non les actions des autres avant de jouer leurs propres coups. Par exemple, le jeu des échecs est un jeu séquentiel.

1.3.2 Selon l'information

Les jeux peuvent se catégoriser selon l'information détenue par les joueurs sur les décisions prises par leurs adversaires ou alors sur la structure du jeu lui même. Cette information influe d'une façon directe les stratégies des joueurs et donc leurs actions, on distingue les types d'informations suivants :

Information complète/ incomplète

- **Information complète** : on dit qu'un jeu est à information complète si chaque joueur connaît lors de la prise de décision :
  - Ses possibilités d'actions (stratégies).
  - L'ensemble d'actions des autres joueurs.
  - Les gains résultants des actions choisies.

  Les joueurs ont ainsi une connaissance commune de la situation à laquelle ils sont confrontés : ils connaissent les autres joueurs, leurs ensembles de stratégies et leurs fonctions de gains.
- Si par contre l'un des éléments précédents n'est pas connu par au moins un des joueur, le jeu est alors à **information incomplète**. Ce type de jeu fera l'objet d'étude de la seconde partie de ce chapitre.

Information parfaite/ imparfaite

On parle des jeux à information parfaite/ imparfaite dans le cas d'un jeu à mécanisme séquentiel.

- **Information parfaite** : un jeu est dit à information parfaite si tous les joueurs connaissent parfaitement au moment de prendre une décision, tous les choix passés de leurs adversaires.
- **Information imparfaite** : un jeu est à information imparfaite si au moins un des joueurs ne connaît pas, à un moment du déroulement du jeu, ce qu'a joué un des autres joueurs. Dans ce cas, il est amené à deviner les futurs coups de ses adversaires, ce qu'on appelle l'anticipation. On peut déduire instinctivement que les jeux simultanés sont des jeux à information imparfaite.

1.3.3 Selon la possibilité de coopération ou non

Il existe deux types de jeu selon le comportement des joueurs.
Jeux coopératifs : dès que le jeu compte plus de deux joueurs, ceux-ci peuvent envisager de former des coalitions, en coopérant, d'une certaine façon. Un jeu coopératif est donc un jeu où les joueurs peuvent se concerter et s'engager à coopérer avant de définir la stratégie à adopter. Chacun ayant pour objectif de maximiser les gains de tous les joueurs coalisés et ne pas être individuellement en situation défavorable.

Jeux non coopératifs : un jeu non coopératif est tout jeu où les joueurs ne peuvent pas former de coalition, mais peuvent communiquer entre eux et s'échanger des informations, cependant aucun joueur ne cherche à manipuler les autres, il ne cherche qu'à maximiser son propre gain. Un jeu non coopératif est donc un jeu dans lequel aucun des joueurs n'a le droit de coopérer avec un autre.

1.3.4 Autres classes de jeux

Outre les jeux énoncés précédemment, on peut classifier les jeux selon d'autres critères. On a alors trois classifications supplémentaires.

Selon le nombre de stratégies des joueurs

On distingue selon l'ensemble des stratégies des joueurs les types suivants :

Jeux finis : un jeu fini est un jeu où l'ensemble des stratégies de chacun des joueurs est fini.

Jeux infinis : il ya au moins un joueur qui a un nombre infini de stratégies.

Exemple 1.1. ***Le duopole de Cournot*** *[3] :*
Le duopole de Cournot porte le nom d'Antoine-Augustin Cournot (1801-1877), un mathématicien qui en observant le comportement des entreprises en concurrence par rapport à leurs quantités de production a défini un modèle économique. Ces entreprises sont rationnelles. Ce jeu est l'un parmi les exemples les plus connus de l'économie industrielle. On considère deux entreprises en situation de conflit sur un marché homogène, les deux entreprises décident quelle quantité produire d'un bien ou service similaire et chacune cherche à maximiser son profit. Les coûts marginaux de production sont supposés constants et on les dénote par C *pour les deux entreprises. Chaque firme choisit son niveau de production et le prix du marché s'ajuste de façon à ce que l'offre soit égale à la demande. Cette situation est modélisée comme un jeu stratégique non coopératif à information complète et imparfaite, dont les joueurs sont les deux entreprises, les stratégies sont les quantités à produire* q_1 *et* q_2 *et les gains* u_1 *et* u_2*. La production totale est ainsi* $Q = q_1 + q_2$*. La fonction de demande globale* $Q = Q(p)$ *est connu à l'avance, la fonction de demande inverse est donc* $P = P(Q) = P(q_1 + q_2)$*. Les profits sont alors :*

$$u_1(q_1, q_2) = P(Q) \times q_1 - C(q_1) = P(q_1 + q_2) \times q_1 - C(q_1). \tag{1.1}$$

$$u_2(q_1, q_2) = P(Q) \times q_2 - C(q_2) = P(q_1 + q_2) \times q_2 - C(q_2). \tag{1.2}$$

Le modèle de Cournot standard peut être étendu à des situations où il n'y a pas deux producteurs seulement, mais un ensemble composé de n producteurs, $n > 2$*.*

Selon le nombre de joueurs

On distingue des jeux à deux joueurs, à n joueurs...

Selon la somme des gains

On distingue selon les gains des joueurs :

Les jeux à somme nulle : ce sont tous les jeux où la somme algébrique des gains des joueurs est nulle, c.à.d ce que gagne l'un est nécessairement perdu par l'autre. On les appelle aussi les jeux strictement compétitifs. Dans ce type de jeu un total fixé généralement au préalable est répartie sur les joueurs et la somme des gains et des pertes de tous les joueurs est égale à 0. Les échecs ou le poker sont des jeux à somme nulle car les gains de l'un sont

très exactement les pertes de l'autre.
Les jeux à somme non nulle : ce sont des jeux dans lesquels le gain d'un joueur peut profiter à l'autre, la somme des gains et des pertes est alors différente de zéro.
Les jeux à somme constante : dans ce type de jeu, la somme algébrique des gains des joueurs est une constante tout au long du jeu.

Exemple 1.2. ***Le dilemme du prisonnier :***
Le dilemme du prisonnier est un jeu énoncé par Albert Tucker en 1950, il décrit une situation dans laquelle les intérêts individuels s'opposent aux intérêts collectifs et les rationnalités individuelles et collectives se contrarient du fait de l'interdépendance des décisions. Une version du jeu appliquée en économie peut être décrite comme suit :
Deux entreprises dans un marché oligopole[1]*, vendant un bien homogène, ont le choix entre être en entente et donc se partager un pouvoir du marché, ou alors être en concurrence exacerbée. Si les deux entreprises jouent la coopération, les deux réaliseront un profit moyen. Si par contre une seule des entreprises joue la coopération elle aura un profit très faible et l'entreprise ayant jouée la non-coopération aura un profit très élevé. Si les deux entreprises jouent la non coopération, tous les deux auront un profit faible.*
Notant la stratégie coopération par (C) et la stratégie non coopération par (NC). Supposons que la matrice des gains est la suivante :

$J_1 \diagdown J_2$	*C*	*NC*
C	*(5, 5)*	*(1, 10)*
NC	*(10, 1)*	*(3, 3)*

Dans cette situation peu importe le choix des joueurs, la somme des gains et des pertes ne sera pas zéro, c'est un jeu à somme non nulle.

1.4 Jeux stratégiques non coopératifs

Le modèle des jeux stratégiques (jeux sous forme normale), appelés aussi jeux statiques, est très utile pour décrire des situations dans lesquelles les joueurs jouent en même temps. Il oblige à supposer que les joueurs choisissent leurs stratégies une fois pour toute [25].
Un jeu stratégique est défini par :

1. Oligopole est un mot qui vient du grec *oligos* (petit nombre) et *polein* (vendre). L'oligopole est ainsi un type de marché qui se caractérise par une forte demande (clients) et seulement quelques offreurs (vendeurs). Si on trouve seulement deux offreurs, on parlera alors de duopole.

1. $N = \{1, ...n\}$: l'ensemble des joueurs, $n >= 2$.
2. $S_i, i \in N$: l'ensemble des stratégies disponibles pour le joueur i.
3. $s = (s_1, s_2, ...s_n)$: le profil de stratégies qui contient la stratégie de chaque joueur, appelé aussi une issue du jeu, $S = \prod_{i=1}^{n} S_i$ l'ensemble des issues.
   On note par $s_{-i} = (s_1, ...s_{i-1}, s_{i+1}...s_n)$, le profil de stratégies des joueurs autres que le joueur i.
4. Pour chaque joueur i, $u_i : S \to \mathbb{R}$: la fonction d'utilité définie sur l'ensemble des profils de stratégies. Elle représente les préférences du joueur i sur les issues. Autrement dit :
   $u_i(s) > u_i(s^{'})$ signifie que le joueur i préfère strictement l'issue s à l'issue $s^{'}$.
   $u_i(s) = u_i(s^{'})$ signifie que le joueur i est indifférent vise à vis des deux issues.

Le jeu sous forme normale est modélisé par le triplet :

$$\langle N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} \rangle. \tag{1.3}$$

Dans un jeu sous forme normale, deux hypothèses importantes sont considérées :

1. Les joueurs choisissent leurs stratégies indépendamment les uns des autres et simultanément, on l'appelle *l'indépendance stratégique.*
2. Les joueurs ont une connaissance commune et complète de la situation dans laquelle ils sont confrontés : les autres joueurs, leurs gains, et leurs ensembles de stratégies.

Exemple 1.3. *Deux entreprises se font concurrence afin d'attirer le plus grand nombre de clients, chacune s'appuie sur deux stratégies en proposant des offres alléchantes tel que : la première entreprise s'appuie A et B comme stratégies et la deuxième choisit a et b.*
Cette situation peut être modélisée par un jeu stratégique comme suit :
- $N = \{entreprise\ 1\ (J_1),\ entreprise\ 2\ (J_2)\}$ *ensemble des joueurs.*
- $S_1 = \{A,\ B\}$ *(respectivement* $S_2 = \{a,\ b\}$*) l'ensemble des stratégies du joueur* J_1 *(respectivement du joueur* J_2*).*

Les gains des joueurs sont donnés par la matrice suivante :

$J_1 \diagdown J_2$	a	b
A	*(8, 2)*	*(4, 6)*
B	*(7, 3)*	*(5, 3)*

1.5 Concepts de solution des jeux stratégiques

Maintenant que nous avons défini les jeux stratégiques, la question naturelle à poser est : sachant qu'un jeu est un modèle dans lequel les joueurs doivent choisir une stratégie, quelle peut alors être la solution d'un tel modèle ?
Un concept de solution d'un jeu est une situation décrivant quelles stratégies seront adoptées par les joueurs et, par conséquent, le résultat du jeu.
Sachant que chaque joueur cherche à maximiser son gain individuel dans le cas d'un jeu non coopératif ; la solution d'un jeu correspondrait alors à un état de satisfaction de tous les joueurs. Cet équilibre est une issue où tous les joueurs sont satisfaits de leurs gains. Si cet équilibre est unique, on peut dans ce cas prédire la solution de ce jeu. Néanmoins, on a souvent des équilibres multiples et parfois il n'en existe pas !

1.5.1 Équilibre en stratégies dominantes

On dit qu'un jeu possède un équilibre en stratégies dominantes s'il admet un profil de stratégies composé uniquement de stratégies dominantes de tous les joueurs.

Définition 1.1. Une stratégie $s_i \in S_i$ du joueur i est dite **dominée** par la stratégie $s_i^{'}$ si et seulement si :

$$\forall s_{-i} \in S_{-i},\ u_i(s_i,\ s_{-i}) \leq u_i(s_i^{'},\ s_{-i}).$$

Définition 1.2. Une stratégie $s_i \in S_i$ du joueur i est dite **strictement dominée** par la stratégie $s_i^{'}$ si et seulement si :

$$\forall s_{-i} \in S_{-i},\ u_i(s_i,\ s_{-i}) < u_i(s_i^{'},\ s_{-i}).$$

Définition 1.3. La stratégie s_i qui apporte pour un joueur i, plus de gain que ses autres stratégies quelles que soient les actions des joueurs adversaires est dite une stratégie dominante. Autrement dit :

$$\forall s_i^{'} \in S_i, \forall s_{-i} \in S_{-i} :\ u_i\left(s_i,\ s_{-i}\right) \geq u_i(s_i^{'},\ s_{-i}).$$

Exemple 1.4. *Soit le jeu sous forme normale dont la matrice des gains est donnée par :*

- *On remarque que* $9 > 7$ *et* $6 > 4$ *et* $4 > 1$ *d'où la stratégie dominante du joueur 1 est* a_2.

$J_1 \diagdown J_2$	b_1	b_2	b_3
a_1	(7, 5)	(4, 7)	(1, 8)
a_2	(9, 4)	(6, 3)	(4, 6)

- *Par le même raisonnement, on déduit que* b_3 *est la stratégie dominante du joueur 2.*

Pour trouver l'équilibre en stratégies (strictement) dominantes (**ESD**), on procède à l'élimination successive des stratégies (strictement) dominées, tant qu'il en existe. Son issue permet au pire, de réduire le jeu, avant de recourir à d'autres concepts de solutions, ou au mieux, de déterminer directement une solution du jeu. La méthode d'élimination des stratégies dominées est appelé *méthode de la dominance itérée.*

Exemple 1.5. *En utilisant l'Exemple 1.4 énoncé précédemment :*

— *Pour* J_1 *: on a la stratégie* a_1 *est strictement dominées par* a_2 *et le jeu devient :*

$J_1 \diagdown J_2$	b_1	b_2	b_3
a_2	(9, 4)	(6, 3)	(4, 6)

- *Passons maintenant à* J_2 *: il est clair que* b_3 *domine les deux stratégies* b_1 *et* b_2*.*

On conclut que le profil (a_2, b_3) *avec les gains* $(4, 6)$ *restant à la fin du procédé d'élimination des stratégies strictement dominées est l'équilibre en stratégies dominantes pour ce jeu.*

Mais dans le cas où le jeu stratégique n'admet pas d'équilibre en stratégies dominantes, comment procéderons nous pour trouver la solution du jeu ? Prenons comme exemple le jeu sous forme normale suivant avec les gains respectifs de chaque stratégie pour les deux joueurs sont donnés dans le tableau suivant :

$J_1 \diagdown J_2$	L	M	R
T	(0,6)	(6,0)	(4,3)
M	(6,0)	(0,6)	(4,3)
B	(3,3)	(3,3)	(5,5)

Dans ce jeu aucune stratégie n'est dominante, cependant il existe un couple de stratégie potentiellement intéressant pour les deux joueurs. En effet, le couple de stratégie (B,R) donnant les gains (5,5) est une paire de stratégie dont les deux joueurs n'ont aucun intérêt de dévier de cette dernière. Si les deux devaient jouer (B,R), aucun n'a intérêt à changer tout seul de stratégie. Par exemple si le joueur 2 envisage de jouer M à la place de R, il obtient un gain de seulement 3 alors qu'il aura un gain de 5 en jouant R. Dans ce cas, on aura recours à l'équilibre de Nash.

1.5.2 Équilibre de Nash

Par équilibre, nous entendrons une situation dans laquelle, aucun joueur ne souhaite modifier son comportement compte tenu du comportement des autres joueurs. Une fois que l'équilibre est atteint dans un jeu il n'y a aucune raison de le quitter.
L'équilibre de Nash, appelé également équilibre non coopératif, est introduit par le mathématicien et économiste américain John Nash en 1950 [15], c'est un concept fondamental en théorie des jeux, il est basé sur le principe de la rationnalité individuelle. Il s'agit d'une combinaison de stratégies telle qu'aucun des joueurs n'a d'incitation à changer sa stratégie unilatéralement une fois connue les stratégies des autres joueurs. Pour plus de détails, voir [7].

Définition 1.4. Équilibre de Nash en stratégies pures
Un profil de stratégies $s^* = (s_i^*, s_{-i}^*) \in S$ est un équilibre de Nash en stratégies pures pour le jeu (1.3) si et seulement si

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*), \forall s_i \in S_i, \forall i = 1, ..., n.$$

Cela veut dire, aucun joueur ne peut augmenter son gain en changeant unilatéralement de stratégie.

Définition 1.5. Un profil de stratégies $s^* = (s_i^*, s_{-i}^*) \in S$ est dit équilibre de Nash strict pour le jeu (1.3) si et seulement si

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) > u_i(s_i, s_{-i}^*), \forall s_i \in S_i, \forall i = 1, ..., n.$$

Existence de l'équilibre de Nash

Comme mentionné précédemment, un jeu peut avoir plusieurs équilibres comme il peut n'en avoir aucun. Quelles sont alors les conditions de son existence ? Existent elles des conditions d'unicité ?

Théorème 1.1. *(Théorème de Nash, [15]).*
Considérons le jeu sous forme normale (1.3). Si :

1. *$\forall i \in N$, S_i est convexe et compact.*
2. *$\forall i \in N$, la fonction $u_i(.) : S \to \mathbb{R}$ est continue.*

3. $\forall i \in N$, *la fonction* $u_i(., s_{-i}) : S \to \mathbb{R}$ *est concave.*

Alors le jeu (1.3) admet au moins un équilibre de Nash.

Si un jeu admet un équilibre de Nash en stratégies pures, une des méthodes pour le trouver (ou les trouver s'il en existe plusieurs) est de vérifier, pour chaque combinaison de stratégies possibles, si des joueurs ont intérêt à changer de stratégie unilatéralement.
Une autre méthode pour trouver l'équilibre de Nash est de repérer dans la matrice des gains **les meilleures réponses** de chacun des joueurs face aux stratégies de ses adversaires.

Définition 1.6. On appelle fonction de meilleures réponses du joueur i, le sous ensemble de stratégies $MR_i \in S_i$ maximisant son gain lorsque le reste des joueurs maintiennent la stratégie s_{-i}.

$$\begin{aligned} MR_i : S_i &\longrightarrow S_i \\ s_i &\longmapsto MR_i(s_{-i}). \end{aligned}$$

Avec

$$MR_i(s_{-i}) = \{s_i^* \in S_i : \sup_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}) = u_i(s_i^*, s_{-i})\}.$$

Cette correspondance est bien définie pour un jeu fini, et un équilibre de Nash est alors un point fixe de la correspondance de meilleure réponse.

Définition 1.7. Le profil de stratégies $s^* = (s_i^*, s_{-i}^*) \in S$ est un équilibre de Nash pour le jeu (1.3) si et seulement si

$$\forall i \in N, \forall s_i \in S_i, u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geqslant u_i(s_i, s_{-i}^*).$$

C'est à dire :

$$\forall i \in N, \quad s_i^* \in MR_i(s_{-i}^*).$$

Exemple 1.6. *Revenons à l'Exemple 1.2, dont la matrice des gains est la suivante :*

$J_1 \diagdown J_2$	*C*	*NC*
C	*(5, 5)*	*(1, 10)*
NC	*(10, 1)*	*(3, 3)*

Notons que dans cet exemple, l'objectif de chaque joueur est de minimiser le nombre d'années de prison.

<u>Méthode 1</u> : par la fonction de meilleures réponses :

1. *(NC) est la meilleure réponse du joueur 1 face aux stratégies du joueurs 2.*

2. (NC) est la meilleure réponse du joueur 2 face aux stratégies du joueurs 1.

L'équilibre de Nash en stratégies pures est l'intersection des deux meilleures réponses donc (NC, NC).

Méthode 2 : pour trouver l'équilibre on va tester chaque issue du jeu et vérifier si oui ou non le joueur a intérêt à choisir une autre.

- (C, C) n'est pas un équilibre de Nash car :

$$u_2(C, C) = 5 < 10 = u_2(C, NC).$$

Le joueur 2 choisira donc de jouer la non coopération au lieu d'une coopération.
Par le même raisonnement et en testant toutes les issues restantes on trouve que :

$$u_1(NC, NC) = 3 > 1 = u_1(C, NC).$$

Le joueur 1 n'a pas intérêt à dévier de (NC) quand l'autre joue (NC).
Et

$$u_2(NC, NC) = 3 > 1 = u_2(NC, C).$$

Le joueur 2 non plus n'a pas intérêt à dévier de sa stratégie.
L'unique équilibre de Nash résultant est alors l'issue (NC, NC).

Remarque 1.1. On remarque d'après le théorème de Nash que dans un jeu fini, les ensembles des stratégies sont des ensembles discrets et donc pas compacts. On ne peut donc pas exclure qu'il existe des jeux finis n'admettant aucun équilibre de Nash en stratégies pures. Dans ce cas, on cherche l'équilibre de Nash en stratégies mixtes.

1.5.3 Équilibre de Nash en stratégies mixtes

Définition 1.8. Stratégie mixte
On suppose qu'un joueur i dispose d'un ensemble S_i de m stratégies pures tel que $S_i = \{s_i^1, s_i^2, ..., s_i^m\}$, et il doit en jouer une. Ce joueur décide de choisir une stratégie particulière $s_i^j,\ j = 1, ..., m$ qu'il va jouer en respectant une distribution de probabilité. Le joueur i choisit alors les nombres $\alpha_i^1, \alpha_i^2, ..., \alpha_i^m$ correspondant aux probabilités avec lesquelles il va jouer les stratégies pures $s_i^1, s_i^2, ..., s_i^m$ respectivement.
Le vecteur $\alpha_i = (\alpha_i^1, \alpha_i^2, ..., \alpha_i^m)$ est dit une stratégie mixte du joueur i, et puisque α_i est une distribution de probabilité on a :

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_i^j = 1, \quad 0 \leq \alpha_i^j \leq 1 \quad , \quad j = \overline{1, m}.$$

Remarque 1.2.
1. On note l'ensemble des stratégies mixtes du joueur i par $\triangle_i$ et par $\alpha_i \in \triangle_i$ la stratégie mixte du joueur i.
2. Le joueur i qui utilise une stratégie mixte conserve toujours la possibilité de choisir directement une stratégie pure particulière, il lui suffit, pour cela, d'affecter la probabilité 1 à la stratégie s_i et d'affecter une probabilité nulle aux autres stratégies.

Définition 1.9. Équilibre de Nash en stratégie mixtes
Un équilibre de Nash en stratégies mixtes pour l'extension mixte du jeu (1.3) est un profil de stratégies mixtes $\alpha^* = (\alpha_i^*, \alpha_{-i}^*) \in \triangle_n = \prod_{i=1}^{n} \triangle_i$ tel que :

$$\forall i \in N, \quad \forall \alpha_i \in \triangle_i \ : \ E_i(\alpha_i, \alpha_{-i}^*) \leq E_i(\alpha_i^*, \alpha_{-i}^*),$$

avec E_i est le gain espéré du joueur i.
Autrement dit, un profil de stratégies mixtes $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, ..., \alpha_n^*) = (\alpha_i^*, \alpha_{-i}^*)$ est un équilibre de Nash en stratégies mixtes pour le jeu (1.3) si, pour chaque joueur $i \in N$, la stratégie mixte α_i^* est une meilleure réponse aux stratégies mixtes des autres joueurs $(\alpha_1^*, \alpha_2^*, ..., \alpha_{i-1}^*, \alpha_{i+1}^*, ..., \alpha_n^*)$.

Théorème 1.2. *Tout jeu statique fini possède au moins un équilibre de Nash si les stratégies mixtes sont autorisées [15].*

Ce résultat est fondamental car il assure l'existence d'un équilibre de Nash, cependant cette existence n'est assurée que si l'on considère les stratégies mixtes, ce qui est une garantie appréciable pour les utilisateurs de la théorie des jeux, notamment les économistes.

1.6 Jeux sous forme extensive

La modélisation sous forme extensive s'agit d'un modèle qui dépend du concept de "séquence d'événements" où les joueurs choisissent leurs actions séquentiellement, c'est l'un des moyens les plus simples de représenter un jeu fini.
Un jeu sous forme extensive est donné par :
- Un ensemble N de n joueurs.
- Un arbre fini composé de nœuds (nœud initial, nœuds de décisions et des nœuds terminaux) et des branches pour lier les n nœuds à ceux qui succèdent tels que :
  - Pour chaque nœud de décision on associe le nom du joueur qui choisit sa stratégie à ce nœud.

- Pour chaque joueur i, la spécification de l'ensemble des actions permises à chaque nœud où il est susceptible de prendre la décision.
- La spécification des gains de chaque joueur i à chaque nœud terminal.

Exemple 1.7. *Une firme A est en situation de monopole sur un marché, une autre firme B choisit soit " d'entrer" dans le marché, soit "ne pas entrer".*

- *Si B n'entre pas alors A aura un gain de* 10 *et B aura* 0*.*
- *Si B décide d'entrer, la firme A a le choix entre être "agressive" ou rester "neutre".*
  - *Si A choisit d'être agressive, les gains seront* $(-8, -8)$*.*
  - *Si A reste neutre, les deux firmes auront* $(8, 8)$*.*

La représentation du jeu de cet exemple peut être donnée comme suit :

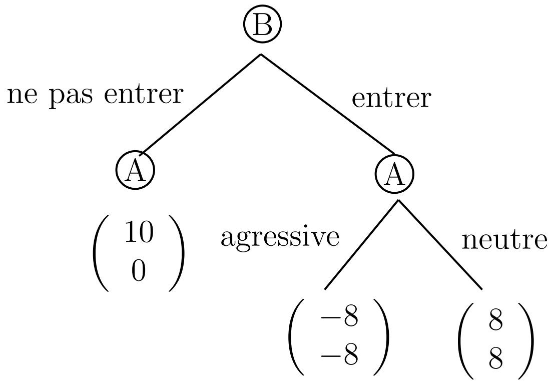

FIGURE 1.1 – Arbre du jeu d'Entrer.

Définition 1.10. L'ensemble d'information dans chaque étape d'un jeu sous forme extensive est un ensemble de tous les nœuds indiscernables pour le joueur à qui c'est le tour de jouer.
Les actions possibles sur des nœuds qui appartiennent à un même ensemble d'information doivent être strictement les mêmes.

- Un jeu sous forme extensive peut être :
  - Un jeu à information parfaite où chaque ensemble d'information ne contient qu'un seul nœud.
  - Un jeu à information imparfaite où l'ensemble d'information (les ensembles d'information) contient plus d'un nœud.

Exemple 1.8. *Considérons les deux jeux sous forme extensive suivants :*

- *Comme il parait sur la Figure 1.2, les ensembles d'informations sont des singletons où chaque ensemble ne contient qu'un seul nœud, on dit que ce jeu est à information parfaite.*

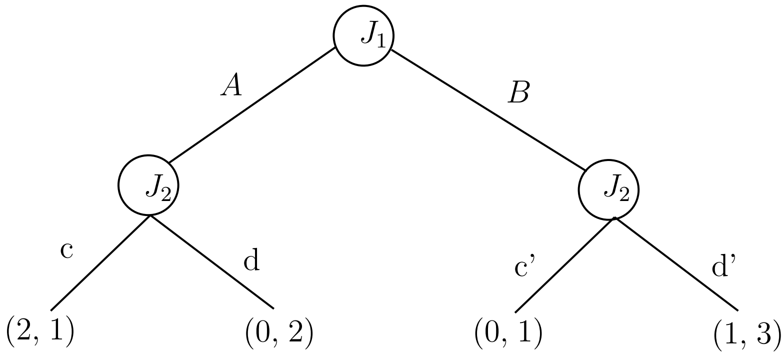

FIGURE 1.2 – Arbre d'un jeu à information parfaite

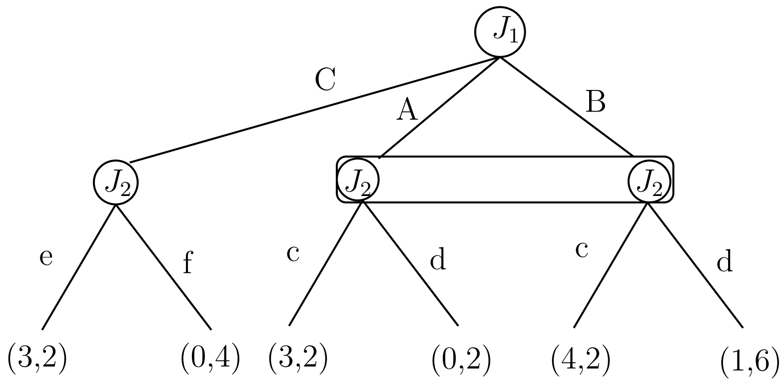

FIGURE 1.3 – Arbre d'un jeu à information imparfaite

- *La Figure 1.3 est la représentation par la forme extensive d'un jeu à information imparfaite où le joueur 1 joue au niveau du sommet J_1. Le joueur 2 ne connait pas le choix du joueur 1, deux parmi les sommets auxquels joue le joueur 2 figurent dans le même ensemble d'information.*

1.7 La relation entre un jeu stratégique et un jeu sous forme extensive

Proposition 1.1. *[12]*

- *Chaque jeu sous forme extensive correspond à un seul jeu sous forme normale dont les joueurs choisissent leurs stratégies simultanément.*

Exemple 1.9. *Considérons un jeu à deux joueurs J_1 et J_2 tel que sa forme normale est la suivante :*

$J_1 \diagdown J_2$	U	V
X	(1, 2)	(0, 6)
Y	(4, 3)	(9, 8)

- *Ce jeu peut correspondre au jeu sous forme extensive suivant :*

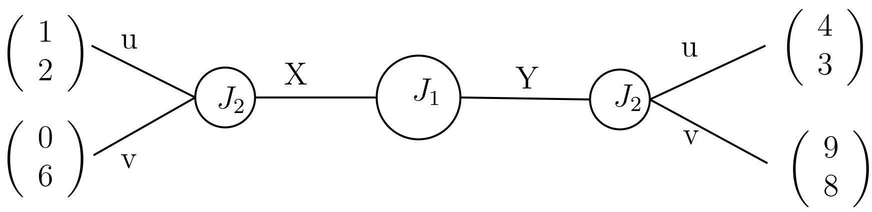

FIGURE 1.4 – Forme extensive du jeu de l'Exemple 1.9

- *On ne trouvera pas de représentation sous forme normale correspondante à ce jeu autre que celle qu'on a mentionnée dans le tableau précédemment.*

Nous allons maintenant mettre le point sur un type de jeu qui nous intéresse tout particulièrement, ce type de jeu fait l'objet de plusieurs études dernièrement, et ce revient à sa grande utilité dans la modélisation et à sa principale caractéristique qui est le manque d'information qui n'est pas négligeable de nos jours.

1.8 Les jeux à information incomplète

Dans la classe des jeux que nous avons évoquée dans la première partie, les caractéristiques du jeu étaient connues par tous les joueurs, c'est le cas par exemple du jeu d'échec où les joueurs connaissent les règles du jeu et où ils observent tous les coups qui ont lieu avant de prendre une décision. Ce n'est pas du tout le cas dans un jeu de cartes comme le poker où les joueurs disposent chacun d'une information à laquelle il est le seul à avoir accès. Dans ce cas, chaque joueur doit non seulement anticiper la stratégie de ses adversaires, mais aussi deviner ce qu'ils ont en main.
Les jeux à information incomplète cherchent à analyser ce type de situations où les joueurs manquent de certaines informations concernant les données du jeu. Il est clair que c'est typiquement la situation à laquelle nous sommes confrontés dans la vie réelle. Prenons par exemple, les enchères au second prix, où le vainqueur paye la seconde offre la plus élevée, les enchérisseurs

ignorent la somme exacte à payer et donc leurs gains respectifs. Ou encore les crédits offerts par les banques à leurs clients peuvent être modélisés par un jeu à information incomplète car la banque ignore au moment d'octroyer le crédit si le créditeur le remboursera ou non [8].
Les joueurs intervenant dans ce type de jeu sont appelés *joueurs bayésiens*, et le jeu en lui même est appelé *jeu bayésien.*
Dans cette partie, nous exposerons d'abord le modèle le plus célèbre et le plus utilisé dans la littérature qui est le modèle de Harsanyi, puis nous nous pencherons sur l'équilibre d'un jeu bayésien, que nous illustrerons par quelques exemples.

1.8.1 Modèle de Harsanyi et déroulement du jeu

John Harsanyi [2] a proposé une solution pour traiter les jeux à information incomplète dans son article [11].
L'approche proposée par Harsanyi consiste à transformer un jeu à information incomplète en un jeu à information complète, mais imparfaite. Pour cela, Harsanyi a proposé des modifications consistants à supposer que certains des paramètres du modèle à information incomplète prennent des valeurs aléatoires et donc une distribution de probabilités. Dans ce cas, il faut introduire un nouveau joueur "**la Nature**" qui est totalement indifférent à l'issue du jeu, c'est un joueur non rationnel qui tire au hasard les valeurs des paramètres inconnus du jeu. Cependant les probabilités de chacune des actions de la "Nature" sont spécifiées.
Si dans un jeu sous forme stratégique $\langle N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\rangle$ au moins un joueur ne dispose que d'information partielle sur les données du jeu et/ou sur les autres joueurs, alors le jeu se déroule comme suit :

1. Le jeu commence par le mouvement de la Nature qui procède au tirage aléatoire de tous les types $\theta_1, ..., \theta_n$, selon la distribution de probabilité P qui est de connaissance commune pour tous les joueurs.
2. La Nature révèle le type θ_i au joueur i, c.à.d que chaque joueur ne prendra connaissance que de son propre type, cette connaissance constitue une information privée pour le joueur.
3. En ne connaissant que la distribution $P(\theta), \theta = (\theta_1, ..., \theta_n)$ et son type θ_i, chaque joueur i ne peut que se référer à des *croyances.* Ces croyances correspondent à des probabilités sur la valeur θ_{-i} du type des autres joueurs sachant que lui même est de type θ_i. Nous notons les proba-

2. Lauréat du prix Nobel d'économie en 1994.

bilités du joueur $i, i \in N$:

$$P_i(\theta_1, ..., \theta_{i-1}, \theta_{i+1}..., \theta_n/\theta_i) = P_i(\theta_{-i}/\theta_i).$$

4. Chaque joueur i choisit une stratégie dans son espace S_i. Ce choix se fait en fonction du type θ_i révélé au début du jeu, on peut donc écrire $s_i(\theta_i)$.
5. Le gain de chaque joueur i dépend non seulement du profil de stratégies pures $s = (s_1, ...s_n)$, mais également de sa caractéristique privée θ_i. Il devient alors une espérance de gain qui sera définie par la suite.

Le jeu bayésien peut alors être modélisé par le 6-Tuplet suivant [25] :

$$\langle N, \{\Theta_i\}_{i\in N}, \{A_i\}_{i\in N},\ P, \{S_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N}, \rangle. \tag{1.4}$$

Où :
- $N = \{1, \cdots, n\}$ est l'ensemble des joueurs ;
- Θ_i l'ensemble des types du joueur i et $\Theta = \prod_{i=1}^{n} \Theta_i$ est l'ensemble des profils de types ;
- A_i est l'ensemble des actions du joueurs i, et $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ est l'ensemble de profils d'actions ;
- P la distribution de probabilité jointe sur le profil de types ; $P : \Theta \rightarrow [0,\ 1]$;
- S_i est l'ensemble des stratégies pures du joueur i tel que $S : \Theta \rightarrow A$;
- u_i la fonction de gain du joueur i tel que $u_i : A \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$;

Plus précisément on a :
- **Le Type** : dans le formalise d'un jeu bayésien, le joueur possède une information privée, cette information qui lui est propre est appelée le type que seul lui connaît et qu'il n'a pas forcément intérêt à révéler.
- **Les croyances** : le joueur ne possédant pas l'information privée de ses adversaires, il construira alors ce qu'on appelle *des croyances* sur leurs types afin de compléter l'information manquante.
  Les croyances sont une distribution de probabilités sur l'ensemble des types des autres joueurs.

1.8.2 Jeux statiques bayésiens

En introduisant le joueur fictif "Nature", une situation de jeu statique à information incomplète est réinterprétée comme étant un jeu à information complète, mais imparfaite. En effet, lorsque la Nature choisit aléatoirement le type θ_i du joueur i, les autres joueurs ne peuvent observer ce choix. Cette extension du jeu par sa transformation en un jeu à information complète mais imparfaite permet d'appliquer les techniques standards de la résolution d'un jeu stratégique à information complète.

Définition 1.11. Les stratégies
Rappelons que dans le jeu sous forme normale (1.3), une stratégie est un plan d'actions spécifiant l'ensemble des décisions d'un joueur chaque fois qu'il doit jouer, mais dans ce contexte d'incomplitude, il convient de modifier légèrement cette notion car les décisions de chaque joueur dépendent désormais de son type.
Une *stratégie pure* du joueur i dans le jeu bayésien (1.4) est une fonction représentant le choix d'actions du joueur i s'il est de type θ_i :

$$\begin{aligned} s_i : \Theta_i &\longrightarrow A_i \\ \theta_i &\longmapsto s_i(\theta_i). \end{aligned}$$

Définition 1.12. Profil de stratégies
Un profil de stratégies est une fonction $s : \Theta \to A$ tel que :

$$\forall \theta \in \Theta : s(\theta) = (s_i(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i})), \quad i = 1, ...n.$$

Définition 1.13. Les gains espérés
Chaque joueur i reçoit un gain qui dépend non seulement de son profil de stratégies pures $s(\theta) = (s_1(\theta_1), ..., s_n(\theta_n))$, mais également de son type θ_i.

Pour déterminer l'espérance de gain d'un joueur il est nécessaire de recourir à la formule de Bayes donné par :

$$P_i(\theta_{-i}/\theta_i) = \frac{P(\theta_{-i}, \theta_i)}{P(\theta_i)} = \frac{P(\theta_{-i}, \theta_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(\theta_{-i}, \theta_i)}, P(\theta_i) \neq 0. \tag{1.5}$$

En connaissant son type θ_i et la distribution jointe $P(\theta)$, l'espérance de gain du joueur i noté $\tilde{u}_i$ pour un profil de stratégies pures $s(\theta) \in S$ est donné par :

$$E[u_i(s_i(\theta_i), s_{-i}(\theta_{_i}))] = \tilde{u}_i(s_i(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i})) = \sum_{\theta_i \in \Theta} u_i(s_i(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i})) \times P_i(\theta_{-i}/\theta_i).$$

Le jeu bayésien (1.4) devient alors un jeu sous forme normale à information complète mais imparfaite modélisé par :

$$\langle N, (S_i)_{i \in N}, (\tilde{u}_i)_{i \in N} \rangle. \tag{1.6}$$

Par exemple, dans le jeu du poker, le type d'un joueur est alors l'ensemble des cartes qu'il a en main, et sa stratégie détermine sa réaction à ce type.

Exemple 1.10. *Voici un exemple donné par Munoz-Gracia, d'un jeu bayésien appelé le jeu de la dispute. Les joueurs 1 et 2 ont chacun deux stratégies, combattre (C) et s'entendre (S). Le joueur 1 a deux types différents, Fort (a) et Faible (b), le joueur 1 connaît son propre type mais le joueur 2 ne connaît pas le type du joueur 1.*
La modélisation de cette situation peut se faire sous forme d'un jeu bayésien sur les types du joueur 1 où les caractéristiques du jeu sont définies comme telles :

- ***les joueurs*** *: d'une part, nous avons le joueur 1 et d'une autre part le joueur 2, d'où $N = \{1, 2\}$.*
- ***Les types des joueurs*** *: le joueur 1 dispose de deux type $\Theta_1 = \{\theta_1, \theta_2\} = \{a, b\}$, correspondant respectivement à : Fort et Faible.*
- ***Les croyances du joueur 2 à priori*** *: le joueur 2 distribue des probabilités sur l'ensemble des types du joueur 1, avec p la probabilité que le joueur 1 soit du type a et $(1 - p)$ pour qu'il soit du type b.*
- ***Les fonctions d'utilité*** *: les gains pour les deux joueurs sont décrits selon le type du joueur 1 dans les tableaux ci-dessous :*

Type a

$J_1 \diagdown J_2$	C	S
C	(-1,1)	(1, 0)
S	(0, 1)	(0, 0)

Type b

$J_1 \diagdown J_2$	C	S
C	(1, -1)	(1, 0)
S	(0, 1)	(0, 0)

Pour construire le jeu bayésien correspondant, il faut redéfinir les stratégies du joueur 1 en tenant compte de son type, celles du joueur 2 restent inchangées. On a l'ensemble des stratégies du joueur 1 noté S_1 et l'ensemble des stratégies du joueur 2 noté S_2 :

$$S_1 = \{C^aC^b, C^aS^b, S^aC^b, S^aS^b\} \quad et \quad S_2 = \{C, S\}.$$

Où C^aC^b signifie que le joueur 1 choisit la stratégie C (combattre), qu'il soit de type a ou de type b, alors que C^aS^b signifie que le joueur 1 choisit la stratégie C s'il est de type a et la stratégie S (S'entendre) s'il est de type b. De même pour les stratégies S^aC^b et S^aS^b.
Afin de pouvoir calculer les gains espérés de chacune des stratégies du joueur 1, on suppose les croyances du joueur 2 sur les types du joueur 1 : la probabilité que le joueur 1 soit de type a est p et donc la probabilité qu'il soit de type

b est $(1-p)$. Le gain espéré de chaque stratégie est donné par les formules suivantes :

— *Si le joueur 2 choisit la stratégie C, le joueur 1 choisit la stratégie C s'il est de type a ou la stratégie C s'il est de type b on a :*

$$\tilde{u}_1(C^aC^b, C) = (-1)p + (1)(1-p) = 1-2p.$$
$$\tilde{u}_2(C^aC^b, C) = (1)p + (-1)(1-p) = 2p-1.$$

— *Si le joueur 2 choisit la stratégie C, le joueur 1 choisit la stratégie C s'il est de type a et la stratégie S s'il est de type b on a :*

$$\tilde{u}_1(C^aS^b, C) = (-1)p + 0(1-p) = -p.$$
$$\tilde{u}_2(C^aS^b, C) = (-1)p + (1)(1-p) = 1.$$

En procédant de la même manière, on trouve les gains espérés des joueurs résumés dans le tableau ci-dessous :

$J_1 \diagdown J_2$	C^aC^b	C^aS^b	S^aC^b	S^aS^b
C	$(1-2p, 2p-1)$	$(-p, 1)$	$(1, p-1)$	$(1, 0)$
S	$(0, 1)$	$(0, p)$	$(0, 1-p)$	$(0, 0)$

1.8.3 Équilibre de Nash bayésien

Après avoir pris connaissance de son type, chaque joueur détermine la stratégie qui maximise son gain, prenant en considération les types que peuvent prendre les autres joueurs et les probabilités de leur réalisation.
Maintenant, tout le monde ayant annoncé son choix et le jeu est terminé. Pour parler de l'équilibre de Nash, il faut que le choix de chacun des joueurs ait été fait en anticipant correctement celui des autres. Or, ces anticipations portent non seulement sur les probabilités de réalisation des types pour chaque joueur (dans le cas où elle ne fait pas partie de la connaissance commune), mais aussi sur la façon dont les uns et les autres réagissent en fonction de leur type.
Dans le cas général, pour vérifier leurs croyances, il est supposé que les joueurs utilisent la règle de Bayes, c'est pourquoi l'équilibre de Nash correspondant est appelé équilibre bayésien.

1.8.4 Équilibre de Nash bayésien en stratégies pures

Définition 1.14. (Équilibre de Nash bayésien)
Un profil de stratégies s^*est un équilibre de Nash bayésien en stratégies pures pour le jeu (1.6) si :

$$\forall i \in N,\ \forall s_i \in S_i,\ \forall \theta_i \in \Theta_i;\ \tilde{u}_i(s_i^*(\theta_i),\ s_{-i}^*(\theta_{-i})) \geq \tilde{u}_i(s_i(\theta_i),\ s_{-i}^*(\theta_{-i})).$$

Dans ce qui suit, nous cherchons l'équilibre de Nash bayésien sur un exemple pour mieux comprendre ce concept.

Exemple 1.11. *(Duopole de Cournot)*
Considérons un duopole jouant la concurrence Cournot (quantité), le profit quadratique de la firme i s'écrit comme suit :

$$u_i(q_1, q_2) = q_i(a - (q_1 + q_2) - c_i) = q_i(\theta_i - (q_1 + q_2)),$$

avec $\theta_i = a - c_i$. θ_i *est la différence entre l'intersection de la courbe de la demande linéaire et du coût unitaire constant de l'entreprise* $i, i \in \{1,\ 2\}$, *et* q_i *la quantité choisie par l'entreprise i.*
Pour la firme $1,\ \theta_1 = 1$. *La firme 2 a des informations complètes sur la firme 1 et la firme 1 n'a qu'un seul type potentiel.*
Cependant la firme 2 *a des informations privées sur son coût unitaire.*
La firme 1 pense que $\theta_2 = \frac{3}{4}$ *avec une probabilité* $\frac{1}{2}$ *et* $\theta_2 = \frac{5}{4}$ *avec probabilité* $\frac{1}{2}$ *et cette croyance est commune. Ainsi la firme 2 a deux types potentiels :*

$$\text{" type low-cost"} \left(\theta_2 = \tfrac{5}{4}\right),$$

et

$$\text{"typee high-cost"} \left(\theta_2 = \tfrac{3}{4}\right).$$

Les deux firmes choisissent leurs quantités simultanément.
Maintenant on cherche l'équilibre en stratégies pures de ce jeu qui est le vecteur (q_1, q_2^1, q_2^2), *où* q_1 *est la quantité optimale de la firme 1, et la quantité optimale de la firme 2 est :* q_2^1 *quand* $\theta_2 = \frac{3}{4}$, *et* q_2^2 *quand* $\theta_2 = \frac{5}{4}$.
La firme 2 choisit une quantité optimale en fonction de son type (High ou Low), ce qui s'exprime par $q_2(\theta_2)$, *cette quantité maximise* u_2.

$$\max_{q_2} u_2(q_1, q_2) = \max_{q_2}(q_2(\theta_2 - q_1 - q_2)) = \max_{q_2}(-(q_2)^2 + \theta_2 q_2 - q_1 q_2).$$

$$\frac{\partial u_2(q_1, q_2)}{\partial q_2} = -2q_2 - q_1 + \theta_2 = 0$$
$$\frac{\partial^2 u_2(q_1, q_2)}{\partial^2 q_2} = -2 < 0.$$

Donc

$$q_2(\theta_2) = \frac{\theta_2 - q_1}{2}.$$

La condition d'équilibre s'écrit comme suit :

$$q_2^1 = \frac{3/4 - q_1}{2} \quad et \quad q_2^2 = \frac{5/4 - q_1}{2}.$$

La firme 1 choisit la quantité optimale q_1 en fonction de ses croyances à priori sur la valeur de θ_2, c'est à dire celle qui maximise son profit espéré, soit :

$$\max_{q_1} u_1(q_1, q_2) = \max_{q_1}[1/2(q_1(1 - q_1 - q_2^1)) + 1/2(q_1(1 - q_1 - q_2^2))].$$

$$\frac{\partial u_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} = -2q_1 - 1/2q_2^1 - 1/2q_2^2 + 1 = 0$$
$$\frac{\partial^2 u_1(q_1, q_2)}{\partial^2 q_1} = -2 < 0.$$

Donc

$$q_1 = \frac{2 - (q_2^1 + q_2^2)}{4}.$$

En branchant pour $q_2(\theta_2)$, on obtient $\left(q_1 = \frac{1}{3}, q_2^1 = \frac{5}{24},\ q_2^2 = \frac{11}{24}\right)$ comme équilibre de Nash bayésien unique pour ce jeu.

Remarque 1.3. On remarque que l'existence d'un équilibre de Nash bayésien dans ce modèle est garantie par le théorème de Nash car les ensembles de types et d'actions sont finis.

1.8.5 Équilibre de Nash bayésien en stratégies mixtes

Le théorème de Nash [15] précise deux conditions suffisantes pour qu'un jeu statique possède un équilibre de Nash : le nombre fini de joueurs et le nombre fini de stratégies pures à la disposition de chacun de ces joueurs. Le théorème peut être appliqué à la version étendue du jeu qui nous a permis de modéliser le caractère incomplet de l'information. Dans ce contexte, la deuxième condition exige que chaque joueur i dispose d'un nombre fini de stratégies pures s_i. Il suffit donc que, pour chaque joueur, le nombre de types envisageables et le nombre d'actions possibles soient finis. En appliquant le théorème de Nash à la version étendue du jeu, on obtient des conditions suffisantes pour que le jeu étendu possède un équilibre.

Définition 1.15. Une *stratégie mixte* du joueur i dans le jeu bayésien (1.4) est une distribution $\alpha_i : \Theta_i \to \Delta(S_i)$, où $\alpha_i(\theta_i)(s_i)$, également notée $\alpha_i(s_i/\theta_i)$, est la probabilité de l'action s_i pour un joueur du type θ_i.

Définition 1.16. Un profil de stratégies mixtes $(\alpha_1^*, ..., \alpha_i^*, ..., \alpha_n^*)$ constitue un équilibre bayésien en stratégies mixtes si, pour chaque joueur $i, i = \overline{1, n}$, la stratégie mixte α_i^* est une meilleure réponse aux stratégies mixtes $(\alpha_1^*, ..., \alpha_{i-1}^*, \alpha_{i+1}^*, ..., \alpha_n^*)$ des autres joueurs.

Exemple 1.12. *Dans un jeu simultané, deux agents doivent prendre leurs décisions tel que : le joueur* 1 *ne peut être que d'un seul type* $\theta_1 = A$ *et il doit choisir entre les stratégies* H *et* D *en ignorant le type du joueur* 2. *Le joueur* 2 *peut être de deux types différents :* $\theta_2^1 = X$ *et* $\theta_2^2 = Y$ *avec des probabilités* $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$, *et il doit choisir entre les stratégies* E *et* F *en connaissant son type. Les gains des deux joueurs sont donnés comme suit :*

$\theta_1 = X$

$J_1 \diagdown J_2$	E	F
H	$(0, -1)$	$(4, 5)$
D	$(-5, 1)$	$(2, 2)$

$\theta_2 = Y$

$J_1 \diagdown J_2$	E	F
H	$(4, 1)$	$(-4, 3)$
D	$(-2, 2)$	$(-1, -1)$

- *Les stratégies pures du joueur* 1 *sont :*

$$S_1 = \{s_1^1, s_1^2\} = \{H, D\}.$$

- *Les stratégies pures du joueur 2 sont :*

$$S_2 = \{s_2^1, s_2^2, s_2^3, s_2^4\} = \{EE, EF, FE, FF\}.$$

- *Cherchons maintenant l'équilibre bayésien en stratégies pures.*

Un coup préliminaire joué par la nature, confirme le type A *du joueur* 1 *et détermine le type* X *ou* Y *du joueur* 2.
La forme normale du jeu est la suivante :

$J_1 \diagdown J_2$	EE	EF	FE	FF
H	$(0,\ -1) \mid (4,\ 1)$	$(0,\ -1) \mid (-4,\ 3)$	$(4,\ 5) \mid (4,\ 1)$	$(4,\ 5) \mid (-4,\ 3)$
D	$(-5,\ 1) \mid (-2,\ 2)$	$(-5,\ 1) \mid (-1,\ -1)$	$(2,\ 2) \mid (-2,\ 2)$	$(2,\ 2) \mid (-1,\ -1)$

- *Le tirage aléatoire des types des joueurs utilise les probabilités suivantes :*

$$P(\theta_1 = A,\ \theta_2 = X) = P(\theta_1 = A,\ \theta_2 = Y) = \frac{1}{2}.$$

Par exemple :

$$\tilde{u}_1(H, EE) = 0 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{2} = 2.$$

$$\tilde{u}_2(H, EE) = -1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = 0.$$

Dans chaque case du tableau précédent, les joueurs considèrent que les gains sont équiprobables. Il en découle les espérances des gains suivantes :

$J_1 \diagdown J_2$	EE	EF	FE	FF
H	$(2,\ 0)$	$(-2,\ 1)$	$(4,\ 3)$	$(0,\ 4)$
D	$(\frac{-7}{2},\ \frac{3}{2})$	$(-3,\ 0)$	$(0,\ 2)$	$(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})$

Conservons les notations suivantes : les meilleures réponses du joueur 1 *sont repérées par* $\square$ *et celles du joueur* 2 *sont repérées par* $\times$

$J_1 \diagdown J_2$	EE	EF	FE	FF
H	$\square$	$\square$	$\square$	$\times$
D			$\times$	$\square$

Comme il n'existe pas de case contenant les deux signes, on déduit que l'équilibre bayésien en stratégies pures n'existe pas.

- *Passons à l'équilibre bayésien en stratégies mixtes. Nous devons élargir l'espace stratégique des joueurs et rechercher les meilleures réponses de chacun d'eux dans l'espace des stratégies mixtes.*

Observons que pour le joueur 2*, les stratégies pures* s_2^1 *et* s_2^2 *ne sont jamais des meilleures réponses, elles ne seront donc pas retenues avec des probabilités positives.*
Pour le joueur 2*, demeurent les deux stratégies pures* s_2^3 *et* s_2^4*.*
Notons par $\alpha_1(s_1^1)$ *et* $\alpha_1(s_1^2)$ *(respectivement par* $\alpha_2(s_2^3)$ *et* $\alpha_2(s_2^4)$*) les probabilités respectives avec lesquelles le joueur* 1 *(respectivement le joueur* 2*) retient ses deux stratégies pures* $s_1^1 = H$ *et* $s_1^2 = D$ *(respectivement* $s_2^3 = FE$ *et* $s_2^4 = FF$*), où*

$$\alpha_1(s_1^1) + \alpha_1(s_1^2) = 1 \quad et \quad \alpha_2(s_2^3) + \alpha_2(s_2^4) = 1.$$

— *Sur l'axe des abscisses, portons les différentes probabilités $\alpha_1(s_1^1)$, et sur l'axe des coordonnées, portons les différentes probabilité $\alpha_2(s_2^3)$ pouvant être retenues par le joueur 2.*

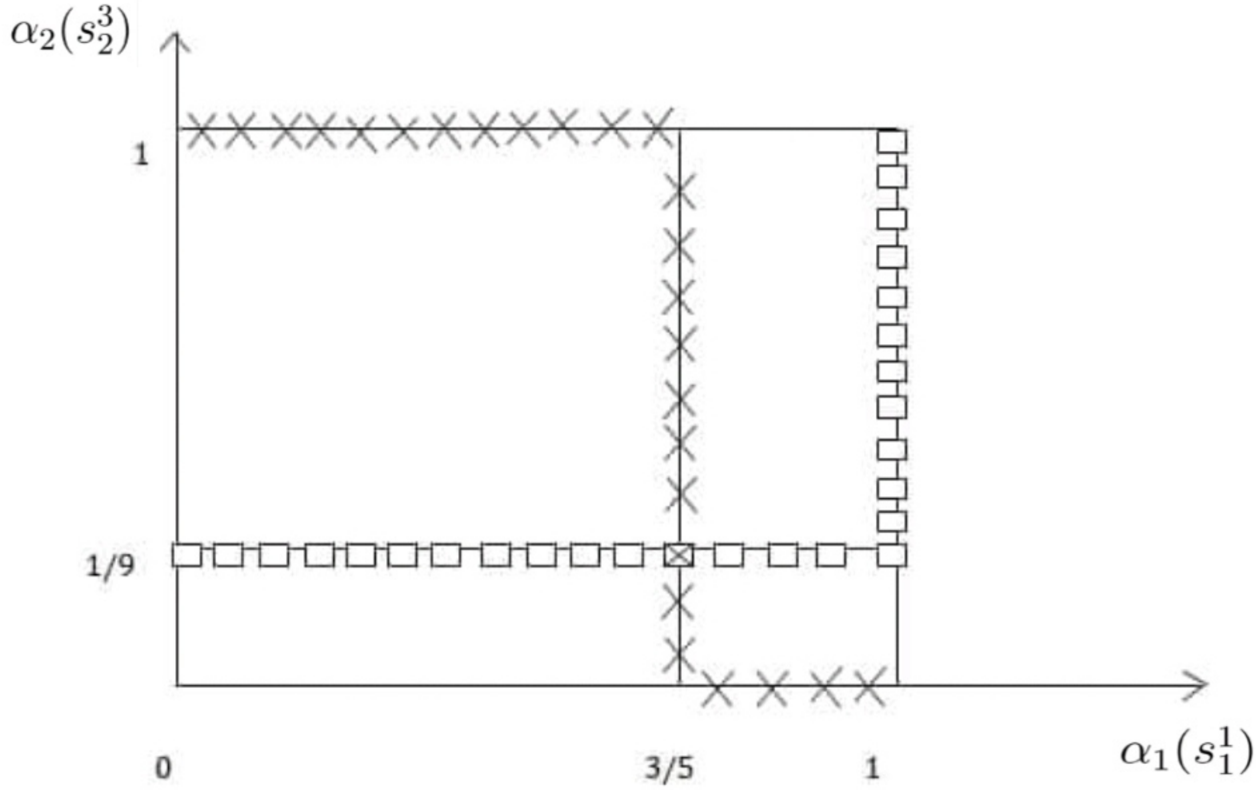

FIGURE 1.5 – Fonction de meilleurs réponses en stratégies mixtes

Pour déterminer les meilleures réponses $\square$ *du joueur* 1 *aux différents choix de son adversaire, on doit comparer les espérances des gains apportées par ses deux stratégies* s_1^1 *et* s_1^2 *:*

- *le gain du joueur* 1 *avec la stratégie* s_1^1 *est :*

$$4 \times \alpha_2(s_2^3) + 0 \times \alpha_2(s_2^4) = 4 \times \alpha_2(s_2^3),$$

- *le gain du joueur* 1 *avec la stratégie* s_1^2 *est :*

$$0 \times \alpha_2(s_2^3) + (\frac{1}{2})\alpha_2(s_2^4) = \frac{1}{2}(1 - \alpha_2(s_2^3)).$$

La meilleure réponse du joueur 1 *est sa stratégie* s_1^1*, c'est-à-dire* $\alpha_1(s_1^1) = 1$*,* *si :*

$$4\alpha_2(s_2^3) > \frac{1}{2}(1 - \alpha_2(s_2^3) \Leftrightarrow \alpha_2(s_2^3) > \frac{1}{9}.$$

Dans le cas contraire ($\alpha_2(s_2^3) < \frac{1}{9}$), *la meilleure réponse du joueur* 1 *est sa stratégie D, c'est-à-dire* $\alpha_1(s_1^1) = 0$.
Face à $\alpha_2(s_2^3) = \frac{1}{9}$, *les stratégies* s_1^1 *et* s_1^2 *conduisent au même résultat :* $\frac{4}{9}$.
Toute stratégie mixte $(\alpha_1(s_1^1),\ \alpha_1(s_1^2))$ *conduit également à ce résultat et constitue donc une meilleure réponse.*

Pour déterminer les meilleures réponses du joueur 2 *aux différentes stratégies mixtes de son adversaire, nous procédons de façon analogue :*

- *le gain du joueur* 2 *avec la stratégie* s_2^3 *est :*

$$3\alpha_1(s_1^1) + 2\alpha_1(s_1^2) = 3\alpha_1(s_1^1) + 2(1 - \alpha_1(s_1^1)),$$

- *le gain du joueur* 2 *avec la stratégie* s_2^4 *est :*

$$4\alpha_1(s_1^1) + \frac{1}{2}\alpha_1(s_1^2) = 4\alpha_1(s_1^1) + \frac{1}{2}(1 - \alpha_1(s_1^1)).$$

La meilleure réponse du joueur 2 *est sa stratégie* s_2^3, *c'est-à-dire* $\alpha_2(s_2^3) = 1$, *si :*

$$3\alpha_1(s_1^1) + 2(1 - \alpha_1(s_1^1)) > 4\alpha_1(s_1^1) + \frac{1}{2}(1 - \alpha_1(s_1^1)) \Leftrightarrow \alpha_1(s_1^1) < \frac{3}{5}.$$

Dans le cas contraire ($\alpha_1(s_1^1) > \frac{3}{5}$), *la meilleure réponse du joueur* 2 *est sa stratégie* s_2^4, *c'est-à-dire* $\alpha_2(s_2^3) = 0$.
Face à $\alpha_1(s_1^1) = \frac{3}{5}$, *les stratégies* s_2^3 *et* s_2^4 *conduisent au même résultat :* $\frac{13}{5}$.
Toutes les valeurs $(\alpha_2(s_2^3),\ \alpha_2(s_2^4))$ *conduisent également à ce résultat et constituent donc des meilleures réponses.*
On cherche maintenant le(s) équilibre(s) bayésien(s). Ils sont repérables par le fait que les deux signes sont superposés : $\boxtimes$.
En effet, le signe $\square$ *indique que* $\alpha_1(s_1^1)$ *est une meilleure réponse à* $\alpha_2(s_2^3)$ *et le signe* $\times$ *indique que* $\alpha_2(s_2^3)$ *est une meilleure réponse à* $\alpha_1(s_1^1)$. *Il apparait ainsi qu'il existe un seul équilibre, ce dernier correspond aux valeurs :*

$$\alpha_1(s_1^1) = \frac{3}{5} \quad et \quad \alpha_2(s_2^3) = \frac{1}{9}.$$

Dans ce jeu, il existe donc qu'un seul équilibre bayésien. Il s'agit de l'équilibre bayésien en stratégies mixtes constitué du couple de stratégies mixtes :

$$((\alpha_1^*(s_1^1), \alpha_1^*(s_1^2)),\ (\alpha_2^*(s_2^1), \alpha_2^*(s_2^2), \alpha_2^*(s_2^3), \alpha_2^*(s_2^4)) = ((\frac{3}{5},\ \frac{2}{5}), (0, 0, \frac{1}{9}, \frac{8}{9})).$$

1.9 Conclusion

Ce chapitre est consacré à la présentation des notions fondamentales de la théorie des jeux qui est un outil mathématique essentiel et efficace pour traiter et modéliser différentes situations d'interactions. Dans la première partie, nous avons traité les jeux non coopératifs à information complète. Dans un second temps, dans la deuxième partie, nous avons traité le type de jeux le plus important pour la suite de ce travail : les jeux à information incomplète (ou jeux bayésiens).
L'étude de ces deux classes de jeux nous a permet par la suite de pouvoir faire le lien entre une situation de conflit quelconque et les éléments de la théorie des jeux.

2
Théorie des jeux dans le domaine des assurances

2.1 Introduction

L'individu a vécu tout au long de sa vie confronté à des problèmes et des risques qu'il ne peut pas résoudre. L'assurance est alors le meilleur remède pour une vie sereine et sans menaces, mais l'événement incertain reste toujours incontrôlable dans ce monde.

Le secteur des assurances fait aujourd'hui totalement partie de notre vie, il est devenu un concept familier pour beaucoup de gens. L'assurance peut être définie comme une opération par laquelle une partie s'engage à délivrer une prestation en cas de réalisation d'un risque, à une partie dans un cadre d'un contrat d'assurance. Ce service apparait sous un aspect plutôt commercial qu'autre chose, une compagnie d'assurance est comme un marchand de sécurité.

Souscrire à un contrat d'assurance est devenu un acte naturel chez la plupart des personnes désirant se prémunir des pertes financières entrainées par la réalisation d'un événement (incendie, vol, accident, maladie, ...).

Dans ce chapitre, on fait en premier lieu le point sur les principales notions rattachées au concept d'assurance et vise à expliquer les différents mécanismes de son fonctionnement et à identifier les différents agents participant dans une compagnie d'assurance. Dans un second temps nous ferrons le point sur quelques applications de la théorie des jeux dans ce domaine.

2.2 Généralités sur les assurances

L'assurance est un service financier correspondant à une opération d'épargne collective dans laquelle, une prestation spécifique est offerte à un tiers en cas de survenance d'un risque moyennant une rémunération [24].

Définition 2.1. L'assurance est une opération par laquelle une compagnie s'engage à réaliser une prestation au profit de la personne bénéficiaire, en cas de réalisation d'un événement aléatoire en contrepartie de paiement d'une prime unique ou annuelle soit elle.

L'assurance peut être envisagée sous deux angles complémentaires :

- **L'aspect juridique** : l'assurance est définie comme un contrat par lequel une partie (souscripteur) se fait promettre par une autre partie (l'assureur), une prestation en cas d'un risque réalisé, moyennant un certain paiement d'un prix appelé prime ou cotisation.
- **L'aspect technique et mutualiste** : dans cet aspect, l'assurance est l'opération par laquelle un assureur organisant en mutualité une multitude d'assurés exposés à la réalisation de certains risques, indemnise ceux d'entre eux qui subissent un sinistre grâce à la masse commune des primes collectées.

Exemple 2.1. *Pour illustrer le mécanisme de l'assurance, prenons un exemple de l'assurance santé complémentaire. Dans le domaine dentaire, voyons le risque fréquent et si naturel de la perte des dents avec l'âge ou, en conséquence d'un accident :*
Pour l'appareil dentaire nécessaire, supposons une facture de 2000 *euros.*
La sécurité sociale prévoit en 2016 un tarif de référence à $182,50$ *euros, tarif sur lequel l'assurance maladie rembourse* 70%*, soit* $127,75$ *euros. Reste à votre charge* $2000 - 127,75 = 1872,25$ *euros.*
Votre assurance complémentaire santé interviendra pour prendre en charge une partie de ce solde restant. Le niveau de la prise en charge des soins dentaires dépendra des garanties souscrites, par exemple : 100% *du tarif de la sécurité sociale (tarif de convention), ou alors moins.*

2.2.1 Les participants dans une opération d'assurance

Les relations entre les parties de l'opération sont définies par un contrat d'assurance. Par conséquent, les acteurs d'une opération d'assurance sont :

- **L'assuré** : c'est la personne à laquelle s'applique les garanties du contrat d'assurance, autrement dit, c'est lui qui court le risque. En langage technique, l'assuré est dénommé preneur d'assurance.
- **L'assureur** : c'est celui qui couvre le risque, il peut être une société commerciale ou une société d'assurance mutuelle. [1]
- **Le souscripteur(contracteur)** : également appelé contractant, c'est la personne physique ou morale qui conclut le contrat d'assurance avec l'assureur. Il porte l'essentiel des obligations nées de la formation du contrat car il doit déclarer sincèrement le risque et payer les primes.
- **Le bénéficiaire** : c'est la personne qui reçoit le capital versé par l'assureur.

Remarque 2.1.

1. Le bénéficiaire, le souscripteur et l'assuré peuvent être une seule et la même personne.
2. Les primes peuvent être régulières, c-à-d, l'assuré verse régulièrement une somme qui est définie à l'avance dans le contrat, ou alors libre, l'assuré va dans ce cas effectuer des versements au rythme des possibilités d'épargne de l'assuré.

2.2.2 Les spécificités de l'assurance

L'assurance est un secteur très spécifique par rapport aux autres secteurs d'activité, dans la mesure où son cycle de production est inversé.

1. La principale caractéristique qui différencie le fonctionnement de l'assurance des autres secteurs de production est **l'inversion du cycle de production**. Contrairement à la situation classique où le producteur d'un bien ou service quelconque connait le coût de production et par conséquent propose un prix de vente en adéquation, en assurance, on fixe le prix du produit avant que son coût ne soit connu, c'est à dire, la compagnie d'assurance reçoit une prestation versée sans connaitre le montant réel des sinistres que l'assuré est susceptible de subir.
2. Une autre des caractéristiques du domaine de l'assurance est **l'utilisation de la loi des grands nombres**. En effet, pour qu'une compagnie

1. Les mutuelles sont des sociétés de personnes à but non lucratif (et c'est la principale différence avec une assurance qui est à but lucratif) : elles ne versent pas de dividendes et l'intégralité de leurs bénéfices est investie en faveur de leurs adhérents. Régies par le code de la Mutualité, elles ne pratiquent pas la sélection des risques.

d'assurance ne s'affaiblit pas et soit rentable, elle est dans l'obligation d'exercer en appliquant les lois actuarielles. Cette loi montre que, quand on fait un tirage aléatoire dans une série de grande taille, plus la taille de l'échantillon est importante, plus les résultats de l'estimation statistique de risque est plus précise et se rapproche des caractéristiques de la population-mère.

3. Le rôle économique de l'assurance est majeur, cela revient au fait que les entreprises émergent et se développent plus aisément à travers la prise en charge des risques par l'assurance.
   Rajoutant à cela le fait que l'investissement des sommes encaissées par la compagnie d'assurance est un important collecteur d'épargne.

Dans ce qui suit, nous donnons quelques notions fondamentales du domaine des assurances que nous jugeons importantes et pour plus de détail voir [17].

- **Un risque** : le risque est la probabilité de survenance d'un événement, c'est contre cette probabilité que le particulier ou le professionnel souhaite s'assurer. A noter que ce n'est pas tous les types de risque qui sont assurables par une compagnie d'assurance, nous citerons plus tard les conditions d'assurabilité d'un risque.
- **La prime** : la prime ou la cotisation est le prix que le preneur d'assurance (assuré) doit payer pour profiter des garanties de son contrat. On parlera de prime lorsque l'assureur est une société à but lucratif, lorsque l'assureur est une mutuelle ou société à forme mutuelle, on utilise le terme cotisation.
  La formule mathématique de prime est la suivante :
  $$C = P \times F.$$
  Où C désigne le montant de la prime, P est le capital et F représente le taux de prime ou la fréquence de survenance du sinistre.
- **Un sinistre** : un sinistre est une réalisation totale ou partielle de l'événement prévu au contrat et susceptible d'entraîner la prise en charge financière du dommage par l'assureur. Un bénéficiaire d'assurance peut faire jouer ses garanties de contrat afin de recevoir une indemnisation partielle et complète en cas de sinistre.
- **Indemnité** : l'indemnité est une prestation en argent ou en nature (aide à la personne) que verse la compagnie d'assurance à l'assuré ou à la victime.
- **La franchise** : la franchise est le montant qui reste à la charge de l'assuré en cas de sinistre. Si le montant de sinistre est inférieure à celui de la franchise, l'assuré ne sera pas indemnise, dans le cas contraire, l'assuré sera entièrement indemnise.

- **Le pooling** : un pool d'assurance est un regroupement d'assureurs, c'est une sorte de coopération entre plusieurs compagnies d'assurance. Se rassembler ainsi leur permet d'augmenter leurs capacités d'assurance et donc de couvrir des risques particuliers qu'ils ne pourraient pas assumer seuls.

Exemple 2.2. *Un pool d'assurance est un pool d'actifs collectifs provenant de plusieurs compagnies d'assurance. La mise en commun est utilisée comme un moyen de fournir une assurance à haut risque.*
Le regroupement d'assurances est souvent utilisé comme méthode pour fournir une assurance à des personnes qui ne pourraient pas l'acheter autrement. Par exemple, les Californiens souscrivent souvent une assurance contre les tremblements de terre par l'intermédiaire d'un pool d'assurance, car l'assurance habitation en Californie peut spécifiquement exclure les tremblements de terre des risques mentionnés sur la police.
Un autre exemple de pool d'assurance à haut risque est un pool crée pour étendre la couverture de responsabilité environnementale aux fabricants et producteurs industriels. Une telle assurance est requise par la loi dans de nombreuses régions du monde, de sorte que si une entreprise cause une contamination environnementale, elle sera remboursée. Cependant, cette assurance est très risquée pour une compagnie d'assurance, car la contamination de l'environnement peut être extrêmement coûteuse à nettoyer. Pour cette raison, de nombreuses entreprises choisissent de créer un pool d'assurance pour fournir une telle couverture.

2.2.3 Les événements assurables

Pour qu'un risque soit considéré comme assurable par une compagnie d'assurance, il doit avoir certaines caractéristiques :

1. **Aléatoire** : l'événement doit être imprévisible.
2. **Peu probable** : les assurances visent à fournir une couverture en cas d'événements improbables contrairement à ceux dont la survenue est très probable et fréquente.
3. **Licite** : les assurances ne couvrent que les événements non opposés à la loi.
4. **Non contrôlable** : la survenue de l'événement ne peut être, dans la mesure du possible, sous le contrôle direct de l'assuré.
5. **La perte financière** : la survenue de l'événement doit engendrer une perte financière pour l'assuré. Si l'assuré ne subit aucune perte financière, alors il n'aura pas d'intérêt à se prémunir contre la réalisation d'un risque. Cet intérêt financier est appelé intérêt assurable.

A noter que, un risque non assurable pour une compagnie d'assurance donnée ne l'est pas nécessairement pour d'autres, chacune prend grand soin d'établir l'étendue de sa police. Certaines offrent des produits d'assurance à risque élevé ou à risques spéciaux qui protègent advenant des situations qui sont rarement couvertes.

Exemple 2.3. *En matière d'assurance habitation par exemple, certains événements ne sont pas couverts dans le cadre d'une assurance habitation. Les dommages causés par la guerre, l'infestation d'animaux nuisibles et les dommages causés par des avalanches de neige ou des glissements de terrain ne sont pas couverts, peu importe le type de police que vous avez souscrit. Certains risques sont exclus des polices de base (par exemple, les inondations et les tremblements de terre).*
En assurance vie, un style de vie trop risqué peut rendre une personne non admissible à l'assurance vie. Si vous occupez une profession très dangereuse, une compagnie d'assurance pourrait être réticente à vous offrir une police. Toutefois, certains métiers ne sont pas propices aux assurances (pensons à celui de cascadeur professionnel, par exemple).
Pour l'assurance santé, elle ne couvre généralement pas, par exemple, les épidémies, car elles sont considérées comme des événements extraordinaires.

2.2.4 Les grandes catégories de l'assurance

On distingue deux grands types de l'assurance auxquels on peut souscrire :

1. **Les assurances de personnes** : considérés comme les branches de l'assurance les plus dynamiques, les contrats d'assurance de personnes couvrent les risques qui portent atteinte à la personne.
   Il existe trois types de contrats d'assurance-vie : l'assurance en cas de vie, l'assurance en cas de décès et un contrat mixte de vie et décès.
   - **Les assurances en cas de vie** : les assurances-vie garantissent le versement d'un capital ou d'une rente au souscripteur ou au bénéficiaire désigné dans le contrat en fin de contrat si le souscripteur est vivant [23]. Autrement dit, si l'assuré décède avant la mise à terme du contrat, le capital ne sera pas verser.
   - **Les assurances en cas de décès** : dans ce cas, le capital (ou la rente) convenu à la souscription sera versé au bénéficiaire si l'assuré décède, et seulement dans ce cas. Le paiement des primes peut être jusqu'au décès, périodique ou unique. L'assurance décès peut être soit temporaire soit vie entière. De plus, c'est une assurance à "fonds perdus" c-à-d : pas de sinistre donc pas de remboursement. L'assurance en cas de décès constitue une garantie pour les proches

de l'assuré, alors que l'assurance en cas de vie est davantage utilisée comme placement, l'assuré pouvant être lui-même le bénéficiaire du contrat.

- **Les assurances mixtes** : comme son nom l'indique, ce type d'assurances regroupe les deux assurances énoncées précédemment. Chacune de ces assurances est amenée à jouer, alternativement, en fonction du risque qui se réalise avant(ou après) le terme convenu. Si l'assuré est toujours en vie au terme, l'assureur lui reverse, sous forme de capital ou de rente viagère [2], le montant de l'épargne constituée. Dans cette configuration, les primes affectées à l'assurance décès ont alors été versées à fonds perdus.

2. **Les assurances des biens et de responsabilité** : les assurances de biens et de responsabilité sont des assurances qui visent à indemniser l'assuré en cas de sinistre.
   - Les assurances des biens s'agissent des biens dont on est propriétaire, qu'ils soient mobiliers, immobiliers. L'assurance des biens garantie les choses appartenant à l'assuré (garantie directe du patrimoine).
     Par exemples : les assurances automobile, habitation, assurances des entreprise, assurances de construction.
   - Les assurances de responsabilité s'agissent de l'assurance de la responsabilité civile. Être responsable c'est être obligé de réparer. Quand la responsabilité est civile, il s'agit de réparer un préjudice causé à un individu.
     Les assurances de responsabilité garantissant les dommages que l'assuré peut occasionner à des biens appartenant à des tiers (garantie directe du patrimoine de l'assuré parce que ce dernier n'a pas à prélever les sommes nécessaires à la réparation)
     Par exemple : dédommagement des tiers lorsque la responsabilité de l'assuré est engagée.

2. La rente viagère est une somme d'argent versée, chaque mois ou chaque trimestre, à un bénéficiaire, jusqu'à son décès. En contrepartie, le capital ne peut pas être récupéré, ni être transmis aux héritiers.

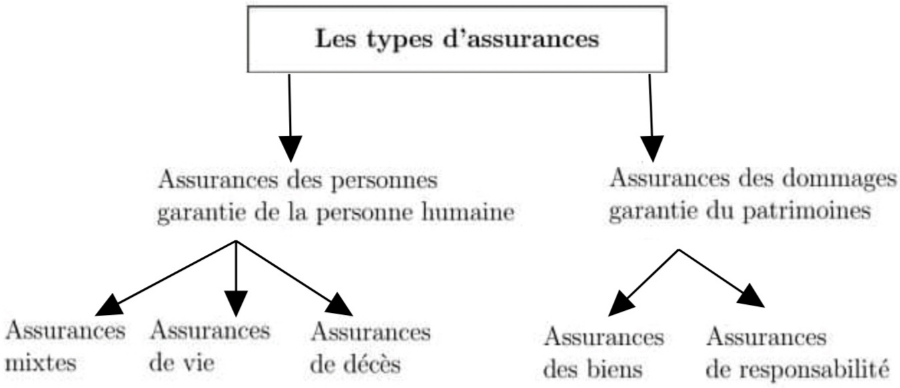

FIGURE 2.1 – Les types d'assurance

2.2.5 Les contrats d'assurance

Le contrat d'assurance est la base de la relation entre une société d'assurance, une mutuelle ou une institution de prévoyance et un assuré, il représente une obligation juridique [5].

Définition 2.2. Un contrat est un accord entre deux ou plusieurs personnes qui s'engagent respectivement à faire ou à ne pas faire quelque chose.

Dans un contrat de vente par exemple, le vendeur s'engage à livrer l'objet, l'acheteur à en payer le prix convenu.
Le contrat d'assurance est donc un accord passé entre un assureur et un assuré pour la garantie d'un risque : l'assureur accepte de couvrir le risque, le souscripteur s'engage à payer la prime ou la cotisation convenue.

Les conditions d'un contrat d'assurance

Les conditions d'un contrat d'assurance sont réparties en deux parties, en premier lieu on retrouve les conditions générales, dont la lecture est longue et ennuyeuse, et les conditions particulières qui sont courtes mais sans doute plus importantes.

1. **Les conditions générales** : les conditions générales pour tout contrat sont des informations essentielles qui déterminent les termes du contrat, elles sont communes et s'appliquent à tous les assurés.
   Les conditions générales précisent les points suivants :

- Termes du contrat ;
- Garanties ;
- Exclusions générales ;
- Procédure de résiliation ou la déchéance du contrat ;
- Procédure de déclaration et d'indemnisation ;
- Recours et contestations.

2. **Les conditions particulières** : les conditions particulières sont adaptées au profil de l'assuré en apportant une certaine personnalisation du contrat.
   Les conditions particulières sont les suivantes :
   - Le profil du souscripteur ;
   - Les personnes ainsi que les biens couverts ;
   - La valeur des biens assurés ;
   - Le montant de la prime ;
   - Le montant de la franchise ;
   - La date d'effet du contrat ;
   - Les modalités de paiement.

2.3 Le modèle de Rothschild et Stiglits

L'anti-sélection désigne les dysfonctionnements des marchés d'assurance qui résultent de l'information cachée dont les assurés peuvent disposer sur leurs propres risques et qui n'est pas accessible aux assureurs.
Pour les risques qui ne peuvent être couverts que par un seul contrat d'assurance (en assurance automobile par exemple), les assureurs peuvent accommoder leur information imparfaite sur les risques en proposant plusieurs types de contrat simultanément et en laissant les individus choisir. Ce mécanisme a été étudié par Rothschild et Stiglits [21].
Le modèle de Rothschild-Stiglits qui fait partie des manuels d'études supérieures en microéconomie est l'un des modèles standards les plus connus des marchés d'assurance au cours des dernières décennies.
Il repose sur le fait qu'ils existent deux types d'individus :

- Les individus de type H, avec un haut risque. Leur probabilité d'avoir le risque est p_H.
- Les individus de type B, à bas risque. Leur probabilité d'avoir le risque est p_B.

Ce modèle envisage le cas d'un marché où il existe des individus, que lors d'un phénomène d'antisélection, les assureurs ne sont pas en mesure de dif-

férencier a priori les hauts des bas risques. S'ils proposent le contrat b[3], les hauts risques auront intérêt à le souscrire et les assureurs réaliseront un déficit. S'il se contentent de proposer le contrat h[4], ils perdent des parts du marché car les assurés à bas risques refusent de le souscrire.
Les deux auteurs ont montré que si les assureurs offrent des couples de contrats qui se différencient par la quantité d'assurance proposée, les assurés sont conduits à révéler leur niveau de risque et un équilibre[5] peut émerger. Cet équilibre a été défini par les auteurs comme étant un ensemble de contrats satisfaisant simultanément deux conditions lesquelles :

- Ces contrats maximisent l'espérance du gain des individus.
- Ils sont tels que : aucun des contrats de l'équilibre ne donne à la compagnie d'assurance une espérance de profit négative, de plus, aucun contrat est hors équilibre.

Cependant, il y a quelques problèmes que les économistes ont du mal à comprendre avec ce modèle : par exemple, le fait que tous les équilibres peuvent ne pas exister sous certaines conditions.

2.4 Applications de le théorie des jeux dans le domaine des assurances

Un des domaines d'application majeur de la théorie des jeux est sans doute l'économie industrielle. Les qualités de rigueur et de discipline de la théorie des jeux dans l'analyse des comportements stratégiques des entreprises expliquent cela. Étant donné le succès qu'a connu la modélisation de ces situations par la théorie des jeux, cette approche s'est élargie à d'autres domaines liés à l'industrie, entre autres : les assurances, les banques, les marchés financiers etc.

L'utilisation de la théorie des jeux dans la science actuarielle a une longue histoire. Le premier article mentionnant la théorie des jeux a été rédigé par Borch [4]. Dans des articles ultérieurs, il a développé son célèbre modèle d'échange de risque qui est en fait un jeu non coopératif à n joueurs. Ce modèle a été développé des années plus tard par le Professeur Lemaire et plusieurs de ses étudiants [13].

3. Un contrat spécifique aux assurés à bas risque.
4. Un contrat spécifique aux assurés à haut risque.
5. Un équilibre est un ensemble de contrats tel que, lorsque les différentes catégories de consommateurs choisissent un contrat particulier de façon à maximiser leur utilité, chaque contrat réalise un profit non négatif et il n'existe pas d'autre contrat ou ensemble de contrats qui, offert, réalise un profit positif.

Dans cette partie nous citerons quelques travaux où la théorie des jeux a été appliquée dans le domaine des assurances. Les applications proposées montrent l'efficacité de la théorie des jeux face à des problèmes dans ce secteur où les interactions stratégiques sont incontournables.

2.4.1 Modèle de Bertrand dans les assurances

Le duopole de Bertrand est un modèle de l'économie industrielle qui porte le nom de Joseph Louis François Bertrand, c'est un modèle de compétition où, en concurrence les entreprises fixent leurs prix simultanément. Ce modèle a été appliqué par Warren et al [19] pour un marché d'assurance.
L'application de duopole de Bertrand a pour objet la modélisation des différents cas de concurrences afin d'éviter les pertes de l'entreprise d'assurance causées par son ignorance des réactions de ses concurrents lors de la fixation de la prime.
Le modèle se base sur les hypothèses suivantes :

1. Le marché compte deux entreprises d'assurance.
2. Chaque entreprise fabrique un produit homogène et vend une unité à chaque consommateur.
3. Les consommateurs achètent auprès de l'entreprise qui propose le prix moins cher
4. Les deux entreprises ne coopèrent pas et se font concurrence en fixant les prix (les primes) simultanément.
5. Chaque entreprise i a un coût marginal constant c_i.

Le jeu est donc un jeu simultané et non coopératif avec l'ensemble des joueurs noté par $I = \{1, 2\}$ qui représente les compagnies d'assurance, l'ensemble des stratégies de chaque compagnie $i \in I$ est considéré comme étant le prix p_i.
La fonction de gain de la compagnie i, est donné par :

$$u_i(p_2, p_2) = (p_i - c_i)D_i(p_2, p_2),$$

avec D_i la demande individuelle de chaque entreprise.
Dans ce modèle, la demande est déterminée par le taux de conversion qui est la proportion de consommateur qui achète le produit de l'entreprise i. Par la suite, la fonction de la demande ainsi que les profits de chaque entreprise du marché ont été déterminés. L'application des conditions nécessaires d'optimalité sur les profits permet de donner les fonctions des meilleures réponses pour les deux entreprises.
Les résultats obtenus par cette étude sont résumés comme suit :

- Pour le modèle étudié, il n'y a pas de solution analytique générale contrairement au modèle classique et standard de Bertrand.
- Le niveau de la prime d'équilibre dans la concurrence en prix entre deux entreprises d'assurance dépend de l'élasticité-prix du marché.
- La prime d'équilibre doit être supérieure au coût marginal (sinistre), ce qui est différent du modèle standard de Bertrand où à l'équilibre les deux entreprises fixent le même prix qui est égal au coût marginal.

2.4.2 Théorie des jeux et marché d'assurances non vie

Un cadre théorique de jeu est adapté à la modélisation de certaines situations dans les marchés financiers en général et les marchés d'assurances en particulier, tels que l'étude des coûts des sinistres, la concurrence entre compagnies d'assurances et bien d'autres.
La tarification des contrats d'assurance est un sujet de recherche classique. Dans la pratique, les compagnies d'assurance utilisent diverses approches, notamment les principes généraux de calcul des primes comme la théorie de la crédibilité ou alors les modèles linéaires généralisés.
En outre, pour modéliser les comportements rationnels des assureurs dans la fixation des primes dans un environnement concurrentiel, un exemple de modèle de jeu est présenté dans la thèse de Doctorat de Dutang [6], où l'auteur propose d'étudier la pertinence de la théorie des jeux pour la modélisation de la situation concurrentielle.
La problématique traitée dans cette thèse est de modéliser la concurrence sur les marchés de l'assurance non-vie en utilisant la théorie des jeux et le jeu proposé se déroule comme suit :
Les assureurs sont en concurrence sur un marché d'assurance contenant n assurés (n est considéré constant), chaque compagnie propose des contrats d'une durée d'un an.
Les assureurs se doivent de fixer une prime, leur but est de vendre le plus de police d'assurance. Suite à la fixation de la prime, les assurés choisissent de renouveler ou de se retirer de leur assureur actuel.
Une fois les contrats établies pour chaque compagnie, elle rembourse les sinistres, en fonction de la taille de son portefeuille, au cours de l'année de couverture. A la fin de l'année, les résultats de souscription sont déterminés et le capital de la compagnie est mis à jour, c'est a ce moment la que la compagnie d'assurance détermine si elle est en faillite ou pas.
Le jeu est donc dynamique et non coopératif. Il se déroule entre I compagnies d'assurances et n assurés. Soit $i \in \{1, ..I\}$ un assureur et $j \in \{1, ..n\}$ un assuré.
Les compagnies d'assurances débutent le jeu en fixant la prime x_i, $i \in \{1, ..l\}$

et les assurés jouent en second, ils ont deux stratégies : *Renouveler le contrat chez le même assureur* ou alors *se retirer de l'assureur actuel.*
Les fonctions de gain sont données par deux formules $f(x_i, x_l); i, l \in \{1...I\}$, les deux sont en fonction de la prime proposée par l'assureur et celle proposée par l'assureur concurrent.
Le modèle proposé repose sur quelques hypothèses parmi lesquelles on cite :

1. La probabilité qu'un assuré se retire de son assureur actuel est très inférieur à la probabilité que l'assuré renouvelle le contrat chez le même assureur.
2. La taille du portefeuille de la compagnie d'assurance i au début du jeu est n_i, pour la période qui suit, le portefeuille de cet assureur devient une variable aléatoire déterminée par la somme des polices renouvelées.

L'existence et l'unicité de l'équilibre de Nash sont vérifiées, et c'est en analysant les propriétés des primes d'équilibres que les auteurs essayent de comprendre au mieux les facteurs clés d'une position dominante d'un assureur par rapport aux autres.
Par la suite le jeu est répété sur plusieurs périodes, des approches de simulation, entre autre la célèbre méthode de Monte-Carlo, sont utilisés pour évaluer la probabilité pour un assureur d'être ruiné. Or, les procédures de tarification actuarielle sont sujettes à l'incertitude du coût des sinistres et au décalage de l'information. De tels effets sont susceptibles de générer des fluctuations autour d'un prix d'équilibre.
Dans cette mesure les auteurs Albrecher et Dalit [2] ont proposé une modélisation d'une situation semblable à celle décrite dans la thèse [6], avec une légère modification concernant l'information détenue par les joueurs.
Le jeu est dans ce cas un jeu non coopératif entre assureurs non-vie où les joueurs ne disposent pas d'informations complètes sur leurs concurrents. Puisque un manque d'information est présent, le jeu est donc bayésien.
La modélisation par un tel jeu a permis d'étudier les effets sur les équilibres des primes qui en résultent. Les équilibres étudiés sont les équilibres de Nash bayésiens et les équilibres de Stackelberg bayésiens. Les deux équilibres ont été illustrés et analysés à travers une implémentation numérique pour plusieurs scénarios possibles.

2.4.3 Théorie des jeux et marché d'assurances en présence de fraude

La fraude est un phénomène bien connu et fréquent sur les marchés des assurances. Entre déclarations de faux sinistres, oublis volontaires de don-

nées et fausses déclarations à la souscription, la fraude peut être partout. Les conséquences qui en découlent peuvent être lourdes, à la fois pour l'assureur et pour l'assuré.
Dans [22], Seog et Kang se penchent sur la fraude dans les assurances, cette fraude cause de grave pertes aux compagnies d'assurance. Ils proposent de l'analyser avec une information asymétrique sur le type des assurés. Ils ont supposé que certains assurés peuvent être opportunistes c.à.d, présenter des demandes frauduleuses à la compagnie, et d'autres assurés peuvent être honnête, ils vont alors classer les assurés selon leur type de risque et leur type d'honnêteté, ils déduisent alors quatre types d'assurés dans leur modèle qui est décrit et résumé comme suit :
Tout d'abord, la compagnie d'assurance et les assurés établissent une politique concernant la prime d'assurance, la couverture et la stratégie de vérification sur la base des informations dont dispose chaque partie.
Ensuite, les assurés prennent conscience de leur situation et décident de déclarer ou non le sinistre. Les assurés honnêtes ne déclarent des sinistres que lorsqu'ils en subissent réellement les conséquences, tandis que les assurés opportunistes peuvent déclarer des sinistres frauduleux dans le cadre d'une stratégie de fraude.
Enfin, les compagnies d'assurance vérifient les demandes d'indemnisation par le biais d'une stratégie de vérification contractuelle et respectent le contrat. Si des assurés opportunistes sont découverts par une compagnie d'assurance en train de déposer des demandes d'indemnisation frauduleuses, ils doivent payer une amende à la compagnie d'assurance.
Le jeu est donc un jeu non coopératif à information incomplète, il se déroule entre la compagnie d'assurance et ses assurés qui peuvent être de plusieurs types, selon leur risque : *assuré à risque faible* et *assuré a risque élevé* et selon leur honnêteté : *assuré honnête* et *assuré opportuniste*.
Les compagnies d'assurance ne peuvent pas distinguer le type de chaque assuré. Cependant elles connaissent la distribution de chaque type sur le marché. En se basant sur ces croyances, elles établissent les contrats d'assurances. Le sinistre se produit et chaque assuré détermine s'il dépose ou non une demande d'indemnisation. La compagnie d'assurance vérifient les réclamations des assurés, si un assuré est reconnu coupable de fraude, il doit payer une amende. Les fonctions de gain sont données par des formules selon le type des assurés.
Le modèle pose des hypothèses afin de garantir l'existence et l'unicité d'un équilibre de marché.

2.4.4 Théorie des jeux et le modèle de Rothschild-Stiglits

Une extension du modèle de Rothschild et Stiglits a été proposée par Mamada [14] en abordant la problématique sous forme d'un jeu bayésien en y incluant l'aspect de l'information détenue au moment de la conclusion d'un contrat. Dans cet article, l'auteur tente de combler le fossé entre le modèle Rothschild-Stiglitz et les résultats empiriques du marché de l'assurance en utilisant des indices d'observation.
L'utilisation d'indices en plus de la connaissance de certaines informations sont suffisantes pour éviter la non-existence d'équilibres.
De plus, obtenir des indices est plus facile que de spécifier la fonction d'utilité de chaque assuré. Les indices tels que le sexe, la race, l'âge, la religion, la nationalité,... etc, sont largement utilisés pour la sélection des contrats dans de nombreux domaines. Par exemple, sur les marchés de l'assurance automobile, une corrélation peut exister entre le risque des assurés et leurs âges, leurs états de santé, leurs lieux de résidence actuel,... etc.
La situation est décrite comme suit :
Les assurés ont soit *un bon indice*, soit *un mauvais indice*, ils sont également de deux types différents : assuré à *risque faible* et assuré à *risque élevé.*
Les probabilités qu'un assuré ait un indice particulier et soit d'un type donné sont résumés dans le tableau ci dessous. Ces probabilités sont une connaissance commune des assurés et de la compagnie d'assurance.

	faible risque	haut risque
Bon indice	p	q
Mauvais indice	r	s

Comme hypothèse nous avons :

$$p > q, r \quad et \quad s > q, r.$$

C.à.d, les assurés avec un bon (mauvais) indice sont susceptibles d'être à faible (haut) risque, et bien évidement $p + q + s + r = 1$.
L'article analyse en premier lieu le cas ou les compagnies d'assurance créent une police pour les assurés avec un bon indice, dans la seconde analyse, il traite le cas où la compagnie d'assurance crée une police destinée aux consommateurs dont l'indice est mauvais.
La situation se modélise par un jeu bayésien qui se déroule entre la compagnie d'assurance et ses assurés, la nature joue le premier coup et donne à chaque assuré son type respectif : faible risque ou haut risque. D'une part, l'assuré connait son type de risque et décide de souscrire ou non au contrat d'assurance proposé par la compagnie. D'une autre part, la compagnie d'assurance ignore le type de risque des assurés, elle construit des croyances et

donne des probabilités sur les types des assurés et décide d'offrir le contrat ou non.
Les fonctions de gain sont données par des formules en fonction de la prime, le côut du sinistre, le montant de remboursement et les probabilités d'avoir des accidents pour chaque type d'assuré.
Cet article montre que :

1. L'approche indicielle est très utile pour l'étude des situations avec asymétrie d'information. En ajustant de manière appropriée les primes et les coûts de l'information pour savoir si les consommateurs ont un bon ou un mauvais indice, l'équilibre existe.
2. Il y a toujours quelques consommateurs à haut risque qui ont un bon indice. Ainsi, pour la police destinée aux consommateurs ayant un bon indice, il y a toujours un mélange de consommateurs à faible risque et à haut risque.
3. L'idéale pour la compagnie d'assurance est d'offrir des polices d'assurances différentes a ses assurés et cela selon leurs types.

2.4.5 Théorie des jeux dans un marché avec anti-sélection

L'étude des marchés où les échanges sont affectés par l'asymétrie de l'information a été l'objet de nombreux articles [21].
Les compagnies d'assurance offrent des contrats aux clients, dont elles ignorent le risque d'accidents, mais les clients connaissent parfaitement leurs probabilités d'en avoir. Toutefois, en dépit d'une situation concurrentielle, les assurés à bas risque ne souscrivent qu'à une assurance partielle et atteignent un niveau de satisfaction inférieur à la situation qui prévaudrait en information parfaite et l'équilibre n'existe pas toujours.
Une étude réalisée par Fagart [10] a pour objet la précision et la généralisation des résultats obtenus par le modèle de Rothschild-Stiglitz dans un contexte de la théorie des jeux en modélisant la relation concurrentielle par un jeu à information incomplète entre deux principaux d'une compagnie d'assurance qui sont des responsables afin que chacun d'eux cherche à développer les contrats proposés par cette compagnie et un agent qui est l'assuré.
L'auteur a proposé des hypothèses pour ce modèle, on cite :

- Le principal peut toujours proposer un contrat qui augmente l'utilité de l'assuré quel que soit son type.
- Un principal A et un autre B proposent simultanément les contrats C_A et C_B à l'assuré.
- Cet assuré peut choisir un échange dans l'ensemble total proposé.

- Dans le cas où l'assuré décide de ne pas choisir le contrat d'un des principaux de la compagnie d'assurance, il obtient une utilité nulle.

Le modèle de l'étude a été présenté par :
un jeu à information incomplète entre deux principaux d'une compagnie d'assurance et un assuré. Soit θ le type de l'assuré ; $\theta \in \{\theta_1, \theta_2\}$ dont le principal ignore la valeur avec γ_i la probabilité que l'assuré soit du type $\theta_i,\ i = 1, 2 \quad ; \gamma_i > 0, \quad \gamma_1 + \gamma_2 = 1$. Si l'échange est y et si le type de l'assuré est θ alors la fonction de gain du principal est $V(y, \theta)$, et celle de l'assuré est $U(y, \theta)$.

Les résultats sont exposés dans deux cas : un marché avec asymétrie de l'information peut être aussi efficace qu'un marché avec information parfaite dans le cas où la relation entre les joueurs est à valeurs privées [6], de plus, l'existence d'un équilibre du jeu et l'efficacité d'un contrat du modèle de Rothschild-Stiglits sont deux problèmes équivalents dans le cas où le gain du principal dépend du type de l'agent.

2.5 Conclusion

Le principe de l'assurance est fondé sur la notion de risque. C'est-à-dire, l'exposition à un danger potentiel, inhérent à une situation ou une activité et dont on ne pourrait affronter les conséquences financières. C'est pourquoi, ce secteur occupe une place essentielle.
La théorie des jeux est l'un des moyens efficaces de modélisation de différentes situations dans ce marché.
Dans la première partie de ce chapitre, nous avons défini les principaux fondements concernant le secteur des assurances illustrés par quelques exemples permettant de mieux comprendre certaines notions.
Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous avons cité quelques travaux où la théorie des jeux a été utilisée pour modéliser des situations d'interactions dans un marché d'assurance, débutant par le plus célèbre dans le domaine des assurances qui est le modèle de Rothschild et Stigliz.

6. Modèle à valeur privée : dire qu'un modèle est à valeur privée équivaut à dire que pour un échange donné, l'incertitude de l'utilité du principal n'est pas garantie car elle ne dépend pas d'une information qu'il ne connait pas.

3
Un modèle de jeu bayésien pour les assurances automobiles

3.1 Introduction

Une révolution importante dans le champ de la théorie économique en se basant sur les effets des asymétries d'information a été lancée par Akerlof [1] dans son article [1] pour étudier les interactions entre différents agents dans un marché concurrentiel.

L'asymétrie d'information, comme son nom l'indique, désigne une situation dans laquelle les agents ont des informations *différentes*. Plus précisément, on parle d'asymétrie d'information si dans une situation d'interaction, certains agents disposent de plus d'informations que d'autres sur certains éléments relatifs à cette interaction. Cette asymétrie d'information influe les comportements des agents et donc joue un rôle principal sur les décisions qu'ils sont amenées à prendre.

Dans ce chapitre, nous modélisons par un jeu bayésien statique une situation d'interaction entre une compagnie d'assurance automobile et ses clients potentiels. Notre modèle est inspiré du travail de *Mamada* [14] qui se base sur le modèle de base de Rothschild et Stiglitz [21] dans lequel les assurés ont

1. George Akerlof a été lauréat du prix Nobel d'économie en 2001.

plus d'information que la compagnie d'assurance.

3.2 Description de notre modèle

L'automobile est le moyen de transport le plus répandu mais aussi le plus dangereux. Les dégâts d'un accident peuvent s'avérer dramatiques sur tous les plans, d'où la nécessité d'être bien assuré. Ainsi, en cas de survenue d'un sinistre dans la réalisation duquel, le véhicule assuré est impliqué (accident, incendie ou explosion, chute...), l'assureur intervient pour réparer les conséquences pécuniaires des dommages matériels et/ou corporels causés aux tiers assurés.

Dans ce qui suit nous supposons une compagnie d'assurance automobile vendant plusieurs polices d'assurances. Elle propose des polices identiques pour tout individu souhaitant souscrire à une assurance. Elle fixe une prime mensuelle $C > 0$ et exige également à ses clients des frais de souscription à la police d'assurance λ si les deux parties s'accordent sur la souscription du contrat tel que $C > \lambda$. C.à.d, la compagnie d'assurance n'encaisse pas de frais de souscription si elle rejette la souscription du client.

Dans le cas de la réalisation d'un sinistre, l'assureur se doit d'indemniser l'assuré et lui rembourser un montant μ, $\mu \geq 0$.
Le montant de remboursement est évidement inférieur au coût réel du sinistre qu'on note α ($\alpha \geq \mu$), α >0.

Un assuré dispose d'une réserve initiale qu'on note w et court un risque faible ou élevé d'accidents. Les assurés à risque élevé ont une probabilité v_1 d'avoir un accident et les assurés à risque faible ont une probabilité v_2 d'avoir un accident ; v_1, $v_2 \in [0, 1]$, $v_1 > v_2$.

L'assuré connaît son type de risque, il décide alors de souscrire ou non à la police proposée par la compagnie. Si l'assuré choisit de souscrire, il paiera les frais de souscription λ et évidement la prime mensuelle C et la compagnie garantit l'indemnisation en cas de sinistre. Dans le cas inverse, il ne doit aucun frais à la compagnie, cependant il devra s'indemniser seul en cas de sinistre.

Un potentiel assuré sait exactement s'il est du type *risque élevé* (RE) ou du type *risque faible* (RF) ; qui constitue alors son information privée ; la compagnie d'assurance ignore cette information et donc ne peut avoir que des croyances.

La compagnie croit qu'un individu est du type (RE) avec une probabilité p et qu'il est du type (RF) avec une probabilité $q = 1 - p$, $p \in [0, 1]$.
Le client a donc plus d'informations que la compagnie d'assurance. Cette asymétrie d'information peut être modélisée par un jeu bayésien entre la compagnie d'assurance et un client potentiel.

Le but de la modélisation de cette situation par un jeu bayésien est de montrer qu'en présence d'incertitude, ce type de jeu est très efficace et nous permet de faire une étude globale de la situation d'interaction afin de trouver quelles sont les meilleures stratégies à adopter pour les deux parties et essayer de trouver un état (ou plusieurs états) d'équilibre.

3.2.1 Les hypothèses du modèle

Nous supposons dans ce qui suit que :

1. Le jeu se déroule entre la compagnie d'assurance et un seul assuré.
2. Les assurés à risque élevé ont plus d'accidents que les assurés à risque faible et donc $v_1 > v_2$.
3. Durant le mois courant : la compagnie d'assurance vend n polices d'assurance et l'assuré a eu un accident.
4. Les gains de la compagnie d'assurance sur les n polices d'assurance sont supposés positifs.

3.2.2 Le modèle du jeu

Afin de modéliser sous forme de jeu la situation énoncée ci dessus, nous devons définir les principaux éléments constituant un jeu qui sont :

- **Les joueurs** : les joueurs intervenant dans cette situation sont d'une part le client potentiel, d'une autre part la compagnie d'assurance. Soit donc l'assuré le joueur 1 et la compagnie d'assurance le joueur 2, notés respectivement par J_1 et J_2, d'où l'ensemble des joueurs est :

$$N = \{J_1, J_2\}.$$

- **Les types du joueur 1** : le joueur 1 dispose de deux types, risque élevé et risque faible :

$$\Theta = \{\theta_1, \theta_2\} = \{RE, RF\}.$$

- **Les stratégies des joueurs**
  - Le joueur 1 qui est le client a deux stratégies pures, *Souscrire* (S) à la police d'assurance et *Ne pas Souscrire* (NS) à la police.
  -La compagnie d'assurance a le choix entre *Accepter* (A) ou *Refuser* (R) la souscription du client, donc le joueur 2 a aussi deux stratégies pures.
  -L'ensemble des stratégies pures du joueur 1 est donné par :

  $$S_1 = \{s_1^1, s_1^2, s_1^3, s_1^4\} = \{NS\ S, NS\ NS, S\ S, S\ NS\};$$

  Où $NS\ S$ signifie que le joueur 1 choisit la stratégie NS s'il est du type θ_1 et la stratégie S s'il est du type θ_2 et de même pour le reste des stratégies.
  - L'ensemble des stratégies pures du joueur 2 est :

  $$S_2 = \{s_2^1, s_2^2\} = \{A, R\}.$$

- **Les gains des joueurs** : les gains des deux joueurs sont énoncés dans les tableaux suivants pour les différents types du joueur 1 :

	$J_2 \diagdown J_1$	NS	S
$\theta_1 = RE$	A	$\Big(b, a\Big)$	$\Big(f, e\Big)$
	R	$\Big(b, a\Big)$	$\Big(d, c\Big)$

Par exemple, le couple (b, a) représente le gain de la compagnie d'assurance (b) et le gain de l'assuré (a) pour la stratégie A de la compagnie d'assurance et la stratégie NS de l'assuré du type RE et de même pour le reste des gains.

	$J_2 \diagdown J_1$	NS	S
$\theta_2 = RF$	A	$\Big(l, k\Big)$	$\Big(j, i\Big)$
	R	$\Big(l, k\Big)$	$\Big(h, g\Big)$

3.2.3 Déroulement du jeu

Le jeu se déroule comme dans la Figure 3.1 ci-dessous. Premièrement, la Nature joue le premier coup et tire aléatoirement suivant la distribution de probabilité (p, q) les types des assurés.

Les assurés connaissent leurs types et décident alors de souscrire (S), ou ne pas souscrire (NS) à la police d'assurance.
La compagnie ne sait pas si le risque d'un tel assuré est faible ou élevé, elle construit alors des croyances sur ces types. En se basant sur ces croyances, la compagnie décide alors si elle accepte (A) la souscription ou la refuse (R).

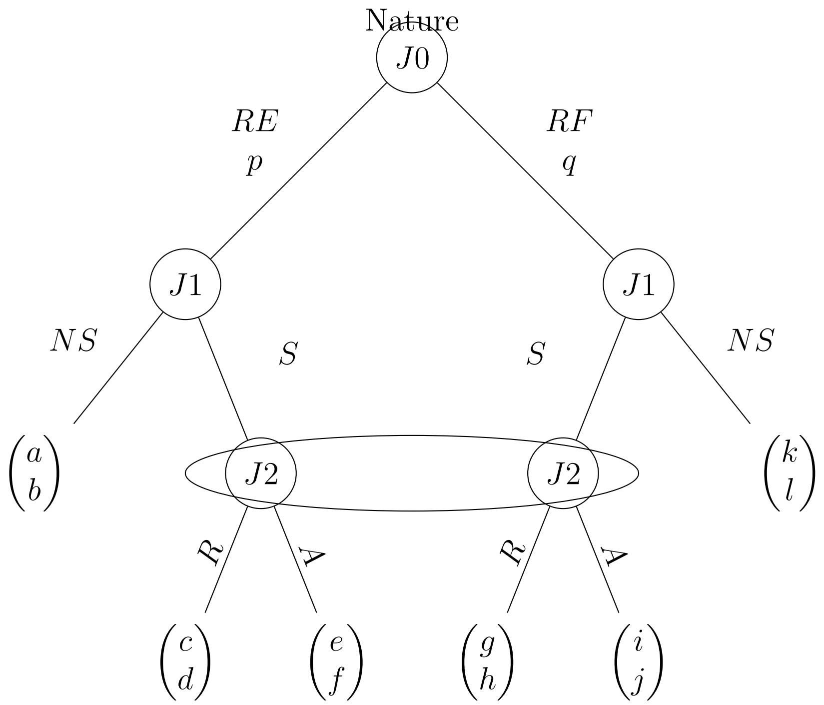

FIGURE 3.1 – Forme extensive du jeu.

Déterminons les gains des deux joueurs selon leurs choix de stratégies et leurs types.
Tout d'abord

$$b = l = 0,$$

car si l'assuré choisit de ne pas souscrire à une police d'assurance, la compagnie ne reçoit aucun bénéfice et donc son gain est nul. Ensuite lorsque l'accident a eu lieu, le revenu de l'assuré est réduit à $w - \alpha$, s'il n'est pas souscrit à une police d'assurance. D'où :

$$a = v_1(w - \alpha) + (1 - v_1)w,$$

$$k = v_2(w - \alpha) + (1 - v_2)w,$$

qui sont les gains de l'assuré quand il n'est pas protégé par une assurance, et ce quand il est du type θ_1 (RE) et du type θ_2 (RF) respectivement.

Si l'assuré souscrit à une police d'assurance mais que la compagnie refuse de lui octroyer un contrat, il ne doit aucun frais à cette compagnie donc son gain selon son type est le même que dans le cas où il choisit de ne pas souscrire à une police d'assurance, on a alors :

$$c = v_1(w - \alpha) + (1 - v_1)w,$$

et

$$g = v_2(w - \alpha) + (1 - v_2)w.$$

Dans ce cas la compagnie ne reçoit aucun gain et donc :

$$d = h = 0.$$

Enfin si l'assuré choisit de souscrire à une police d'assurance et la compagnie accepte de signer le contrat, il paiera les frais de souscription λ ainsi que la prime mensuelle C. La compagnie rembourse alors un montant μ a cet assuré en cas de sinistre. Par conséquent les gains de l'assuré sont :

$$e = v_1(w - \alpha + \mu) + (1 - v_1)w - C - \lambda,$$

et

$$i = v_2(w - \alpha + \mu) + (1 - v_2)w - C - \lambda.$$

La compagnie d'assurance reçoit comme gain :

$$f = n(C + \lambda) - v_1 \times \mu,$$

et

$$j = n(C + \lambda) - v_2 \times \mu.$$

Les gains espérés des deux joueurs selon la distribution de probabilité faite par la Nature sont alors :

- Si l'assuré choisit la stratégie NS s'il est du type θ_1 et la stratégie S s'il est du type θ_2 et que la compagnie choisit la stratégie R on a :

$$\tilde{u}_1(NS\ S; R) = p \times a + q \times g,$$

$$\tilde{u}_2(NS\ S; R) = p \times b + q \times h.$$

- Si l'assuré choisit la stratégie NS s'il est du type θ_1 et la stratégie NS s'il est du type θ_2 et que la compagnie choisit la stratégie R on a :

$$\tilde{u}_1(NS\ NS; R) = p \times a + q \times k,$$

$$\tilde{u}_2(NS\ NS; R) = p \times b + q \times l.$$

En calculant le reste des gains espérés des deux joueurs, on obtient le tableau suivant :

$J_2 \diagdown J_1$	$NS\ \ S$	$NS\ \ NS$	$S\ \ S$	$S\ \ NS$
A	$(pb+qj, pa+qi)$	$(pb+ql, pa+qk)$	$(pf+qj, pe+qi)$	$(pf+ql, pe+qk)$
R	$(pb+qh, pa+qg)$	$(pb+ql, pa+qk)$	$(pd+qh, pc+qg)$	$(pd+ql, pc+qk)$

TABLE 3.1 – Tableau des gains espérés des deux joueurs.

3.2.4 Calcul d'équilibre et analyse

L'équilibre est une issue du jeu dont aucun des joueurs n'a intérêt à dévier unilatéralement. Intuitivement, dans cette situation on est amené à penser que si l'assuré joue la stratégie *Souscrire*, la compagnie d'assurance a intérêt à *Accepter* la souscription. Si par contre l'assuré décide de jouer la stratégie *Ne pas souscrire*, la compagnie d'assurance est ainsi indifférente entre *Accepter* et *Refuser* car dans les deux cas, son gain est nul.
Si nous remplaçons dans le Tableau 3.1 les gains espérés par les valeurs suivantes :

$$b = l = d = h = 0 \quad , a = c \quad et \quad g = k,$$

on obtient le tableau suivant :

$J_2 \diagdown J_1$	$NS\ \ S$	$NS\ \ NS$	$S\ \ S$	$S\ \ NS$
A	$(qj, pa+qi)$	$(0, pa+qk)$	$(pf+qj, pe+qi)$	$(pf, pe+qk)$
R	$(0, pa+qk)$	$(0, pa+qk)$	$(0, pa+qk)$	$(0, pa+qk)$

Après une analyse de ce tableau, nous remarquons que la stratégie $Refuser$ est dominée par la stratégie *Accepter* pour la compagnie d'assurance, donc cette stratégie ne sera pas jouée.
En l'éliminant, le tableau se réduit à :

$J_2 \diagdown J_1$	$NS\ \ S$	$NS\ \ NS$	$S\ \ S$	$S\ \ NS$
A	$(qj, pa+qi)$	$(0, pa+qk)$	$(pf+qj, pe+qi)$	$(pf, pe+qk)$

Pour qu'un équilibre apparait (ou des équilibres), il suffit que le gain associé à une des stratégies du joueur 1 soit une meilleure réponse pour lui face à la

stratégie A du joueur 2.
Destinée à protéger les tiers victimes de dommages matériels et corporels consécutifs à un accident, l'assurance auto est pourtant obligatoire et rouler non assuré fait encourir au conducteur des risques non seulement financiers mais également judiciaires. Par conséquent, la stratégie $NS \;\; NS$ ne sera pas jouée par l'assuré, car cette situation est défavorable à son égard et il a tout intérêt à souscrire à une assurance.
La stratégie $NS \;\; S$ est également une situation défavorable pour l'assuré à risque élevé, car peu importe la dépense qu'il effectue pour souscrire à une police d'assurance, il sera bénéficiaire dans le sens où il a une probabilité élevée d'avoir des accidents et donc se protéger et être indemniser lui est indispensable.
Si :

$$pe + qi \geq pa + qi \tag{3.1}$$
$$pe + qi \geq pa + qk \tag{3.2}$$
$$pe + qi \geq pe + qk, \tag{3.3}$$

ce qui donne :

$$e \geq a \tag{3.4}$$
$$i \geq k. \tag{3.5}$$

Il en résulte alors l'équation :

$$p(e - a) \geq q(k - i); \forall p, q \in [0, 1]. \tag{3.6}$$

Alors la stratégie $(S \;\; S)$ devient une meilleure réponse du joueur 1 et l'issue $(S \;\; S, A)$ sera donc un équilibre de Nash quelques soient les valeurs de p et q.
Cependant comme l'assuré à faible risque ne génère pas beaucoup d'accidents, il ne lui convient alors pas de payer des frais couteux à une compagnie d'assurance. Par conséquent si les frais de la police d'assurance s'avère trop élevé à son goût, il préférera de jouer la stratégie *Ne pas souscrire.*
Si les équations suivantes sont vérifiées :

$$pe + qk \geq pa + qi \tag{3.7}$$
$$pe + qk \geq pa + qk \tag{3.8}$$
$$pe + qk \geq pe + qi, \tag{3.9}$$

ce qui donne :

$$e \geq a \tag{3.10}$$

$$k \geq i. \tag{3.11}$$

Alors dans ce cas, la stratégie ($S \quad NS$) devient une meilleure réponse du joueur 1 et l'issue ($S \quad NS, A$) est alors un équilibre de Nash quelques soient les valeurs de p et q.
On remarque que seuls les gains espérés i et k de l'assuré du type risque faible influent d'une manière directe sur l'équilibre résultant du jeu, car l'équation (3.4) surgit dans les deux cas.

- Si $i \geq k$, donc :

  $$i = v_2(w-\alpha+\mu)+(1-v_2)w-C-\lambda \geq k = v_2(w-\alpha)+(1-v_2)w, \tag{3.12}$$

  alors :

  $$v_2\mu \geq C + \lambda, \tag{3.13}$$

- Si $k \geq i$, donc :

  $$k = v_2(w-\alpha)+(1-v_2)w \geq i = v_2(w-\alpha+\mu)+(1-v_2)w-C-\lambda, \tag{3.14}$$

  alors :

  $$C + \lambda \geq v_2\mu. \tag{3.15}$$

En conclusion, cette analyse nous démontre que l'assuré du type (RF) choisit sa stratégie selon la perte que lui génère un accident et la prime payée pour la souscription à la police d'assurance.

- Si la perte $v_2\mu$ causée par un accident est plus importante que la prime C dépensée pour la souscription, il choisira la stratégie ($Souscrire$).
- Si par contre la perte $v_2\mu$ causée par un accident est beaucoup moins importante que la prime C dépensée pour la souscription, il préférera de jouer la stratégie ($Ne \quad pas \quad souscrire$).

Afin d'illustrer notre analyse, nous prenons des exemples numériques avec des valeurs numériques proches de la vie réelle.

3.3 Application numérique

Afin d'illustrer le modèle proposé et de pouvoir en chercher l'équilibre bayésien, nous donnerons des valeurs numériques aux données énoncées au dessus :

<u>*Premier cas*</u> : Supposons que la réserve initiale d'un assuré est $w = 50000\ da$, et que les dommages générés par un accident sont $\alpha = 20000\ da$ si ce dernier n'est pas assuré par une compagnie d'assurance.
La compagnie propose des polices d'assurance avec une prime mensuelle

$C = 600\ da$, les frais de souscription sont $\lambda = 50\ da$, durant le mois courant, la compagnie vend 100 contrats d'assurance et donc $n = 100$. Le montant de remboursement en cas d'accident est $\mu = 18000\ da$.
On suppose également que $v_1 = 0.1$ et $v_2 = 0.01$, qui, rappelons le, sont les probabilités d'avoir un accident pour un assuré du type $\theta_1 = RE$, $\theta_2 = RF$ respectivement.
Par conséquent on a :

$$\begin{aligned}
a &= v_1(w-\alpha) + (1-v_1)w = 48000,\\
b &= 0,\\
c &= v_1(w-\alpha) + (1-v_1)w = 48000,\\
d &= 0,\\
e &= v_1(w-\alpha+\mu) + (1-v_1)w - C - \lambda = 49150,\\
f &= n \times (C+\lambda) - v_1 \times \mu = 63200,\\
g &= v_2(w-\alpha) + (1-v_2)w = 49800,\\
h &= 0,\\
i &= v_2(w-\alpha+\mu) + (1-v_2)w - C - \lambda = 49330,\\
j &= n \times (C+\lambda) - v_2 \times \mu = 64820,\\
k &= v_2(w-\alpha) + (1-v_2)w = 49800,\\
l &= 0.
\end{aligned}$$

La forme extensive du jeu est donnée par :

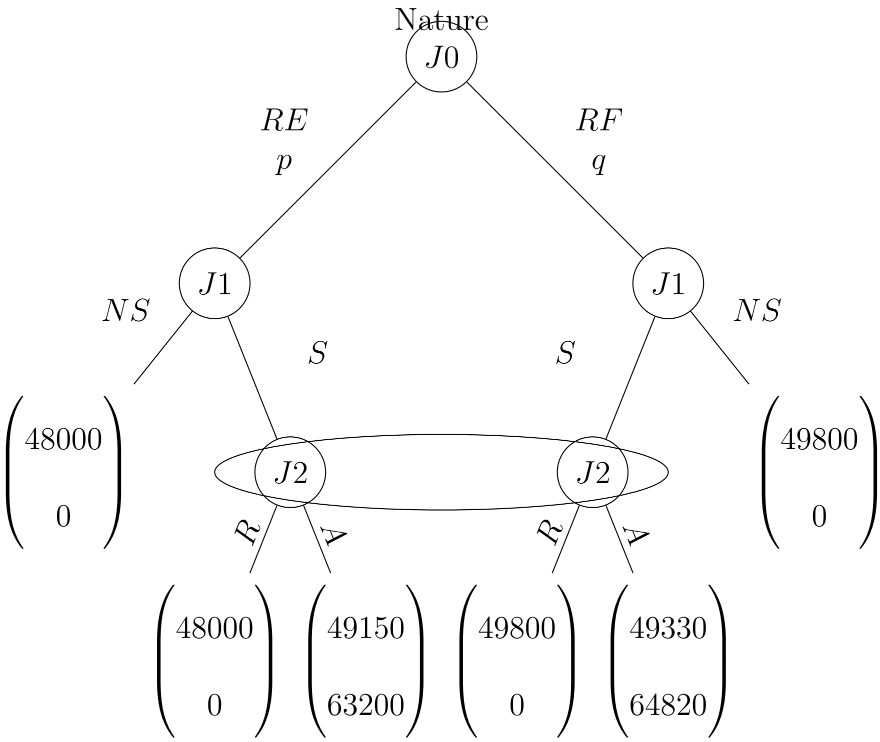

FIGURE 3.2 – Forme extensive du jeu dans le premier cas.

Les gains des deux joueurs après l'élimination des stratégies dominées sont résumés dans les deux tableaux suivant :

$\theta_1 = RE$

$J_2 \diagdown J_1$	NS	S
A	$\big(0, 48000\big)$	$\big(63200, 49150\big)$

$\theta_2 = RF$

$J_2 \diagdown J_1$	NS	S
A	$\big(0, 49800\big)$	$\big(64820, 49330\big)$

Le tirage aléatoire des types des joueurs utilise les probabilités suivantes :

$$p = P(\theta_1) = \frac{2}{3}.$$

$$q = P(\theta_2) = \frac{1}{3}.$$

Les gains espérés des joueurs 1 et 2 sont donnés comme suit :

$J_2 \diagdown J_1$	$NS\ \ S$	$NS\ \ NS$	$S\ \ S$	$S\ \ NS$
A	$\left(21606.66, 48443.33\right)$	$\left(0, 48600\right)$	$\left(63740, 49210\right)$	$\left(42133.33, 49366.66\right)$

3.3.1 Calcul de l'équilibre

Maintenant que le jeu bayésien est devenu un jeu sous forme normale, nous allons chercher l'équilibre de Nash bayésien pour ce jeu, nous utilisons sa forme normale qui correspond au tableau au dessus.
En notant par $\square$ les meilleures réponses du joueur 1, et par $\times$ celles du joueur 2, on obtient le tableau suivant :

$J_2 \diagdown J_1$	$NS\ \ S$	$NS\ \ NS$	$S\ \ S$	$S\ \ NS$
A	$\times$	$\times$	$\times$	$\boxtimes$

Comme il paraît dans ce dernier tableau, il existe un seul équilibre de Nash bayésien pour ce jeu, il s'agit de l'équilibre constitué des stratégies pures suivantes :

$$\{s_1(\theta_1) = S,\ s_1(\theta_2) = NS;\ s_2 = A\}.$$

Correspondant aux stratégies pures : $\{$**Souscrire Ne pas souscrire** ; **Accepter**$\}$.

Remarque 3.1. Les valeurs de p et q n'influent pas sur l'équilibre de Nash bayésien résultant du jeu.

On va essayer maintenant de changer les valeurs des probabilités v_1 et v_2 afin de voir si elles influent sur l'équilibre du jeu résultant. Prenons par exemple $v_1 = 0.8$ et $v_2 = 0.03$, toutes les autres données restent inchangées. Les gains deviennent :

$\theta_1 = RE$

$J_2 \diagdown J_1$	NS	S
A	$\left(0, 34000\right)$	$\left(50600, 47750\right)$

$\theta_2 = RF$

$J_2 \diagdown J_1$	NS	S
A	$\left(0, 49400\right)$	$\left(64460, 49290\right)$

Les gains espérés des joueurs 1 et 2 sont donc :

$J_2 \diagdown J_1$	$NS \;\; S$	$NS \;\; NS$	$S \;\; S$	$S \;\; NS$
A	$\left(21486.66, 39096.66\right)$	$\left(0, 39133.33\right)$	$\left(55220, 48263.33\right)$	$\left(33733.33, 48300\right)$

Notant $\square$ les meilleures réponses du joueur 1, et $\times$ celles du joueur 2, on obtient :

$J_2 \diagdown J_1$	$NS \;\; S$	$NS \;\; NS$	$S \;\; S$	$S \;\; NS$
A	$\times$	$\times$	$\times$	$\boxtimes$

Remarque 3.2. Nous constatons que :

- Les valeurs des probabilités n'ont une influence que sur les gains des deux joueurs. En effet, on remarque que les gains ont diminué.

- Même avec une probabilité v_2 plus élevée que la précédente, l'assuré du type risque faible ne change pas de stratégie pour autant.

Interprétation des résultats

Cet équilibre de jeu est attendu, car dans une situation semblable, la compagnie d'assurance a intérêt à vendre le plus de polices d'assurance possible, et donc a toujours intérêt de jouer la stratégie **Accepter** dans le but d'accepter toutes les éventuelles souscriptions.
Quant à l'assuré, on remarque que l'assuré du type risque élevé a intérêt à jouer la stratégie *Souscrire* afin de se protéger, de plus qu'il est susceptible d'avoir plus d'accidents et par conséquent ne pourrait affronter les conséquences financières. Contrairement à l'assuré du type risque faible qui préfère jouer la stratégie *Ne pas Souscrire* au lieu de s'assurer auprès d'une compagnie d'assurance (sa probabilité d'avoir un accident est presque nulle) dans laquelle il paye la même prime (une prime chère vis à vis de sa situation) que l'assuré générant beaucoup plus d'accidents.

<u>*Second cas*</u> : Considérons maintenant le cas où la compagnie d'assurance fixe une prime moins élevée, par exemple $C = 120$ et gardant toutes les autres données inchangées.

La forme extensive du jeu après avoir calculer tous les gains des deux joueurs est donnée par : :

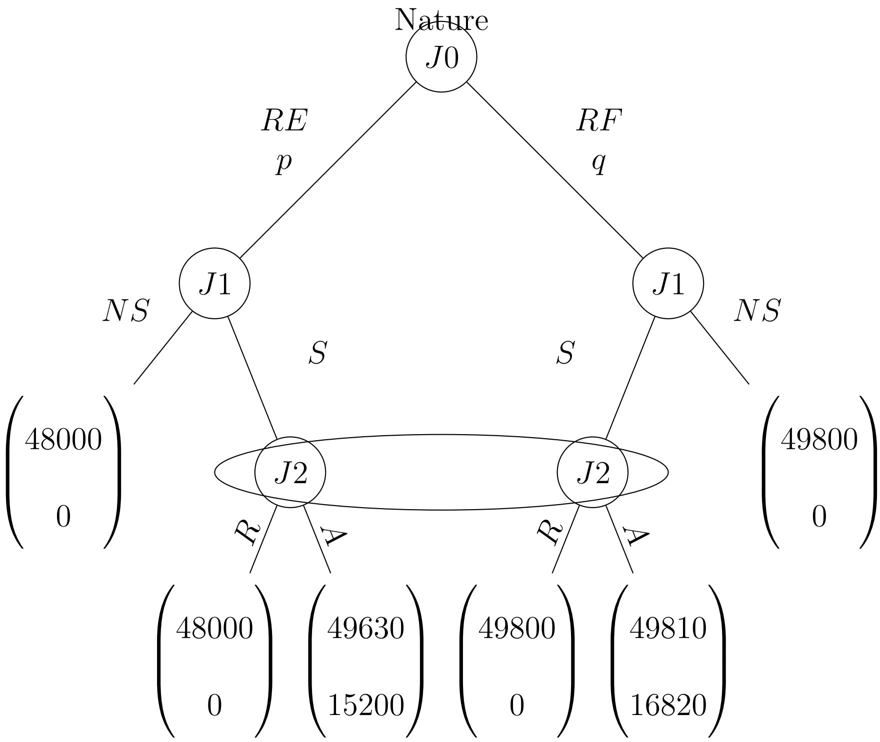

Figure 3.3 – Forme extensive du jeu dans le second cas.

Les gains des deux joueurs pour $n = 100$ contrats vendus après l'élimination des stratégies dominées sont donnés comme suit :

$\theta_1 = RE$

$J_2 \diagdown J_1$	NS	S
A	$\big(0, 48000\big)$	$\big(15200, 49630\big)$

$\theta_2 = RF$

$J_2 \diagdown J_1$	NS	S
A	$\big(0, 49800\big)$	$\big(16820, 49810\big)$

Les probabilités tirées aléatoirement par la Nature sur les types du joueur 1 restent inchangées :

$$p = P(\theta_1) = \frac{2}{3}.$$

$$q = P(\theta_2) = \frac{1}{3}.$$

Par conséquent, les gains espérés des joueurs deviennent :

$J_2 \diagdown J_1$	$NS \quad S$	$NS \quad NS$	$S \quad S$	$S \quad NS$
A	$\Big(5606.66, 48603.33\Big)$	$\Big(0, 48600\Big)$	$\Big(15740, 49690\Big)$	$\Big(10133.33, 49686.66\Big)$

Notant $\square$ les meilleures réponses du joueur 1, et $\times$ celles du joueur 2, on obtient :

$J_2 \diagdown J_1$	$NS \quad S$	$NS \quad NS$	$S \quad S$	$S \quad NS$
A	$\times$	$\times$	$\boxtimes$	$\times$

L'équilibre de Nash bayésien résultant dans ce cas est l'issue :

$$\{s_1(\theta_1) = S,\ s_1(\theta_2) = S; s_2 = A\},$$

correspondant aux stratégies pures : $\{$**Souscrire Souscrire** ; **Accepter**$\}$.
Cet équilibre de Nash bayésien signifie que peu importe le type de l'assuré, il a intérêt à souscrire à une police d'assurance et la compagnie à intérêt a accepter la souscription.
L'assuré du type risque faible après le changement du montant de la prime, inévitablement change la stratégie à opter. La souscription devient alors son choix.
Comme dans l'analyse citée précédemment, nous déduisons qu'en effet l'assuré se réfère au montant dépensé pour une souscription d'assurance et au montant de perte qu'il est susceptible d'engendrer. Le montant de la prime est alors une donnée déterminante pour le choix de l'assuré ainsi que pour la compagnie d'assurance.

Or, une compagnie d'assurance cherche toujours à faire du bénéfice mais elle est tout de même dans l'obligation d'indemniser tous ses assurés même s'ils ont tous subi des dommages. Elle devra donc être prudente quant aux souscriptions qu'elle reçoit afin de minimiser ses pertes.
Pour cela elle devra établir des tarifs d'assurance à partir de nombreux paramètres. Par exemple un assuré ayant son permis de conduire depuis 10 ans et n'a généré aucun accident devra payer son assurance moins chére qu'un assuré ayant obtenu son permis de conduire depuis 2 ans et a généré 3 accidents. De même si l'assuré dispose d'une voiture de marque couteuse à l'encontre d'un assuré dont la voiture est à un prix abordable.

3.3.2 Les solutions envisageables

Le plus convenable pour une compagnie d'assurance si elle désire maximiser ses gains en ayant plus de clients mais d'une autre part minimiser ses pertes, sera de proposer des polices d'assurance spécifiées à chaque type d'individu.
Pour ce fait, nous proposons ces quelques solutions :

1. Fixer une prime élevée aux assurés à risque élevé, ce qui permettra à la compagnie d'indemniser plus facilement leurs sinistres qui sont fréquents.
2. Proposer une police d'assurance aux assurés à faible risque avec une prime appropriée à leur fréquence d'accidents.
3. Lors du renouvellement des contrats d'assurance, la compagnie se servira de l'historique d'accidents de l'assuré afin de savoir de quel type est t-il, conséquemment savoir quel type de contrat lui proposer.
4. Les compagnies d'assurances ont tendance à accepter toutes les souscriptions, mais, en réalité ce n'est pas la meilleure option car quand un assureur sait que le client est un mauvais client (dans le sens où ce dernier génère beaucoup d'accidents à répétions), elle a tout intérêt à refuser sa souscription.

Mais malencontreusement, ces approches s'avèrent très coûteuses et demandent au minimum une année complète d'analyse afin d'avoir une idée sur le type de chaque assuré d'après son historique.

3.4 Conclusion

Ce chapitre est consacré à la modélisation par un jeu bayésien du fonctionnement d'une compagnie d'assurance automobile proposant une police d'assurance à ses clients. Le modèle que nous avons proposé repose sur des hypothèses simples afin de faciliter la modélisation et de ne pas alourdir les concepts de résolution d'un jeu bayésien.
Une analyse des gains espérés des deux joueurs ainsi que d'autres éléments du jeu nous ont montré qu'en effet, la modélisation par un jeu bayésien facilite l'étude et donne des résultats concrets. Cette analyse nous a permis de comprendre que pour une compagnie d'assurance, *Refuser* les souscriptions n'est pas la stratégie qui lui procure le plus de gain, ce qui explique le fait que cette stratégie soit dominée par la stratégie *Accepter*.
Par la suite, nous avons illustré la situation d'interaction proposée par deux différentes applications numériques. Ces applications numériques nous ont

permis dans un premier temps d'appuyer l'analyse faite sur les gains espérés des joueurs. Dans un second temps, elles nous ont prouvé que dans une compagnie d'assurance, la prime est le facteur le plus important influant d'une manière directe sur le choix des clients potentiels, plus particulièrement les clients dont le risque d'accidents est faible.
A la lumière de ce qui précède, on peut dire que les jeux bayésiens ont un grand intérêt et sont très utiles pour traiter et analyser des problèmes de l'asymétrie d'information dans le domaine des assurances automobiles.

Conclusion générale

DAns la vie de tous les jours, nous faisons face à un nombre infini d'interactions. Afin de comprendre et d'expliquer les comportements de différents agents faisant partie de ces interactions, on fait souvent appel à la théorie des jeux et ses différents modèles. .

Or, parfois avoir une information complète sur ses adversaires et sur les éléments de l'interaction n'est pas possible. Les jeux à information incomplète ou bayésiens s'avèrent alors un outil indispensable pour modéliser ces situations.

Ce mémoire a pour objectif la modélisation du problème d'asymétrie de l'information, qui resurgit dans les contrats d'assurance, par un jeu bayésien.

L'assurance est une branche nécessaire et très utile dans notre quotidien. Elle est tout de même complexe à étudier et cela revient au fait qu'elle se caractérise par l'inversion du cycle de production car en assurance, on fixe le prix du produit, c'est à dire la prime d'assurance, avant que son coût qui est le montant de la prestation versée, ne soit connu.

Notre étude s'est porté sur le marché des assurances qui se caractérise par le manque d'information en général. Nous avons proposé un modèle d'un jeu bayésien entre une compagnie d'assurance automobile et ses assurés dont elle ignore le type. Après la résolution du jeu, nous déduisons qu'une compagnie d'assurance vendant des polices identiques à tous ses assurés, se met indirectement dans un dilemme.

D'une part, une prime trop faible peut mettre la compagnie d'assurance dans une situation délicate dans le sens où elle peut ne pas parvenir à indemniser ses assurés de par ses faibles bénéfices. A l'opposé, une prime trop élevée peut dissuader plusieurs clients de souscrire, notamment les assurés dont le risque d'accidents est faible. La compagnie dans ce cas perd des clients et donc génère moins de bénéfice.

L'idéal serait alors que les compagnies d'assurances offrent plusieurs types de contrats d'assurance, en se référant à certains paramètres, tel que l'age, la date d'obtention du permis de conduire, le type de voiture..., dans le cas d'une assurance automobile afin de déterminer les types de ses assurés et leur proposer des polices adaptés à chacun.

Pour conclure, le travail que nous avons réalisé nous montre que les jeux bayésiens sont un outil très efficace pour traiter et analyser des problèmes de l'asymétrie d'information de plusieurs situations issues d'un large choix de domaine.

Il serait intéressant de compléter cette étude dans plusieurs sens. A savoir :

- Améliorer le modèle en affaiblissant les hypothèses : supposer à titre d'exemple que l'assuré a eu plusieurs accidents dans le mois courant. Ou alors en supposant que la compagnie d'assurance peut avoir des gains négatifs.
- Faire une analyse détaillée sur les gains de la compagnie d'assurance.
- Lors du renouvellement des contrats d'assurance, le jeu devient un jeu dynamique, une étude de ce cas serait intéressante.

Bibliographie

[1] Akerlof, G. The market for lemons : Quality uncertainty and the market mechanism. *The MIT Press* (2010).

[2] Albrecher, H., and Dalit, D. *On effects of asymmetric information on non-life insurance prices under competition*, vol. 9. Int. J. Data Analysis Techniques and Strategies, 2017.

[3] Billand. Les modèles de comportements adaptatifs appliqués à l'oligolope de cournot. *Université Jean Monnet Sait-Etienne* (2006).

[4] Borch, K. Reciprocal remsurance treaties. *ASTIN Bulletin* (1960).

[5] Couilbault, F., Eliashberg, C., and Latrasse, M. *Les grands principes de l'assurance.* L'argus de l'assurance, 2002.

[6] Dutang, C. *Etude des marchés d'assurance non-vie à l'aide d'équilibres de Nash et de modèle de risques avec dépendance.* PhD thesis, Université Claude Bernard - Lyon I, 2012.

[7] Eber, N. *Théorie des jeux.* DUNOD, Paris, 2013.

[8] Ekeland, I. *La théorie des jeux et ses applications à l'économie mathématique.* Presse Universitaire de France, 1974.

[9] Ernst, L., and Thadden, V. *Introduction à la théorie des jeux Théorie -Application-Problème.* 2004.

[10] Fagart, M. C. Concurrence en contrats, anti-sélection et structure d'information. *Annuels d'économie et de statique* (1996).

[11] Harsanyi, J. *Game with incomplete information played by "Bayesian" players, I. The basic model.* Management science, 14, 17-334, 1967.

[12] Konieczny, S. *Introduction á la théorie des jeux.* Université d'Artois - Lens, 2011.

[13] Lemaire, J., and Baron, B. The bargaining set of a reinsurance market. *ASTIN Bulletin* (1981).

[14] Mamada, R. A reconsideration of the rothschild-stiglitz insurance market model by information theory. *Grand Canyon University 30* (2021).

[15] Nash, J. *Non cooperative games.* Annals of Mathematic, 54, 286-295, 1951.

[16] Neuman, J. V., and Morgenstern, O. *The theory of games and economic behavior.* Princeton University Press, 1944.

[17] Petauton, P., and Fromenteau, M. *Théorie et pratique de l'assurance vie.* DUNOD, 2017.

[18] Ponssard, G. Théorie des jeux et analyse économique. *Presse universitaire de France* (2012).

[19] R. Warren, J.Yao, T. R. J. I. Game theory in general insurance : How to outdo your adversaires while they are trying to outdo you. *Institute and Faculty of Actuaries, GIRO* (2012).

[20] Rasmusen, E. *Jeux et Information : Introduction à la théorie des jeux.* Francis Bismans, 2001.

[21] Rothschild, M., and Stiglitz, J. Equilibrium in competitive insurance markets :an essay on the economics of imperfect information. *The Quarterly Journal of Economics* (1976).

[22] Seog, S. H., and Kang, C. M. Equilibrium in the insurance market with adverse selection and fraud.

[23] Tosseti, A. *Weissf and Pioncelint, Les outils de l'assurance vie.* Édition Economica, France, 2003.

[24] Trainar, P., and Thourot, P. *Gestion de l'entreprise d'assurance.* DUNOD, 2017.

[25] Yildizoglu, M. *Introduction á la théorie des jeux manuels et exercices corrigés.* DUNOD, Paris, 2011.

[26] Zamir, S. Bayesian games : Games with incomplete information. *Center for the Study of Rationality, Hebrew University* (2008).

Résumé

Dans ce travail, nous avons étudié une situation d'interaction stratégique issue du domaine des assurances et caractérisée par la présence d'asymétrie d'information. Plus précisément, nous avons proposé un jeu bayésien statique pour modéliser et analyser l'interaction entre une compagnie d'assurance automobile et ses clients potentiels pour établir des contrats d'assurance. En utilisant l'équilibre de Nash bayésien, nous avons résolu le jeu proposé, par la suite, nous avons effectué une analyse générale des équilibres trouvés et nous avons donné des exemples d'application pour illustrer les résultats obtenus.

Mots clés : Théorie des jeux, Marché d'assurance, Jeux bayésiens, Asymétrie d'information, Équilibre de Nash bayésien.

Abstract

In this work, we have studied a situation of strategic interaction resulting from the field of insurance and characterized by the presence of information asymmetry. Specifically, we proposed a static Bayesian game to model and analyze the interaction between an automobile insurance company and its potential customers to establish insurance contracts. By using the Bayesian Nash equilibrium, we have solved the proposed game, then we have performed a general analysis of the found equilibria and we gave application examples to illustrate the obtained results.

Key words: Game theory, Insurance market, Bayesian games, Information asymmetry, Bayesian Nash equilibrium.