République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A /MIRA de Béjaia
Faculté des sciences Exactes

جامعة بجاية
Tasdawit n'Bgayet
Université de Béjaïa

Département de Physique

Mémoire de fin de Cycle

En vue de l'obtention d'un Master en Physique

Spécialité
Astrophysique

Thème

Oscillateur de Duffin-Kemmer-Petiau dans l'espace des phases non commutatif : Traitement dans le cadre relativiste et dans le cadre de la covariance Galiléenne.

Présenté par :
M[elle] ***AMARI Kahina***

Soutenue le 06/07/2022 devant le Jury composé de :

AMATOUS	**Nawel**	**Université A/Mira, Bejaia**	**Pr**	**Présidente**
CHENNIT	**Makhlouf**	**Université A/Mira, Bejaia**	**MAA**	**Examinateur**
MAMERI	**Samir**	**Université B.Ibrahimi, BBA**	**MCB**	**Invité**
KASRI	**Yazid**	**Université A/Mira, Bejaia**	**Pr**	**Encadreur**

Année universitaire 2021/2022

Dédicace :

Je dédie ce modeste travail :

A MA TRES CHERE MERE Source inépuisable de tendresse, de patience et de sacrifice. Ta prière et ta Bénédiction m'ont été d'un grand secours tout au long de ma vie. Quoique je puisse dire et écrire, je ne pourrais exprimer ma grande affection et ma profonde reconnaissance. Puisse Dieu tout puissant, te préserver et t'accorder santé, longue vie et Bonheur.

A MON TRES CHER PERE Pourriez vous trouver dans ce travail le fruit de toutes vos peines et tous de vos efforts. En ce jour, j'espère réaliser l'un de tes rêves. Aucune dédicace ne saurait exprimer mes respects, ma reconnaissance et mon profond amour. Puisse Dieu vous préserver et vous procurer santé et bonheur.

A MES FRERES ET SŒURS : Nouredine, Toufik, Samira, Rozina, Rabiaa, Farida et Fouzia. Aucune dédicace ne peut exprimer la profondeur des sentiments fraternels et d'amour, d'attachement que j'éprouve à votre égard. Puisse dieu vous protéger, garder et renforcer notre fraternité.

A MES TRES CHERS NEVEUX ET NIECES: Salas , Tiniri , Dassine , Akram , Ayoub , Alice et Ania.

A MES TRES CHERS AMIS en particulier : Yousra , Nawel , Nihad , Koukou , Mariem , Koutiba , Zoubir , Madjid.

Remerciement

Je tiens à remercier tout particulièrement le Professeur KASRI Yazid, de m'avoir préposé ce travail, pour l'avoir dirigé, pour son attention discrète, ses recommandations mesurées, ses précieux conseils et surtout ses qualités humaines et scientifiques toujours en toute Modestie. Je le remercie également et vivement pour la confiance qu'il m'a accordée, pour sa disponibilité et pour sa gentillesse.

J'exprime ainsi mes sincères remerciements à M^elle^ AMATOUSSE Nawel, Professeur à l'université de Bejaia, d'avoir accepté de présider le jury de ce mémoire.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur Makhlouf CHENNIT enseignant chercheur à l'université de Bejaia, Monsieur Samir MAMERI enseignant chercheur à l'université de Bordj Bou Arreridj, d'avoir accepté d'évaluer ce travail..

Enfin, merci à tout ceux, qui m'ont soutenu de prés ou de loin pour l'achèvement de ce travail.

Table des matières

.

Introduction

La découverte de l'oscillateur de Dirac 1989, a suscité un grand intérêt et de très nombreux travaux ont été publiés dans ce domaine. L'introduction en 1994 de l'oscillateur de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) a permis la généralisation de l'oscillateur de Dirac aux cas des bosons (spin 0 et 1). La prise en compte de l'interaction avec l'oscillateur harmonique s'obtient en faisant la substitution de l'opérateur impulsion par un terme constitué par la différence entre l'impulsion et un terme dépendant linéairement du vecteur position.

L'objectif principal de ce mémoire est l'établissement des équations d'onde de l'oscillateur harmonique dans le cas d'une particule scalaire. Pour ce faire, nous ferons appel à l'équation DKP adaptée aux particules sans spin. Notre étude portera sur trois approches ; la première est relativiste, la seconde mettra en application le formalisme de la covariance galiléenne appliqué à l'équation DKP et la troisième approche sera galiléenne pure. L'étude de l'oscillateur DKP sera effectuée dans deux contextes différents : le premier est la mécanique quantique standard et le second sera la mécanique quantique dans un espace des phases non-commutatif.

Ce manuscrit est divisé en quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, nous allons présenter les équations de Klein-Gordon, de Feshbach-Villars et de Dirac.

Dans le deuxième chapitre, nous allons déterminer les propriétés de l'équation DKP dans le cadre relativiste, où nous avons trouvé l'équation de continuité et la forme covariante associée à l'équation de DKP, ainsi que les matrices β^{μ} et leurs représentations.

Après avoir trouvé la représentation des matrices de Kemmer, nous allons introduire une substitution non-minimale, afin que nous puissions trouver l'équation de mouvement de l'oscillateur DKP dans l'espace des phases commutatif et non-commutatif.

Le troisième chapitre sera consacré à étudier l'équation de DKP dans le cadre de la covariance Galiléenne, premièrement nous allons présenter le formalisme de covariance galiléenne, ensuite nous trouverons l'oscillateur de DKP dans l'espace phase commutatif et non commutatif.

Finalement, dans le quatrième chapitre, nous allons utiliser l'équation de Schrödinger linéarisée par la méthode de Duffin-Kemmer-Petiau, dans le but d'analyser l'oscillateur harmonique commutatif et non-commutatif.

Chapitre 1

Equations d'onde relativistes

1.1 Equation de Klein-Gordon

1.1.1 Etablissement de l'équation de Klein-Gordon

Durant tout ce chapitre, on adoptera la convention (sans dimention) $\hbar = c = 1$.

Afin d'établir l'équation d'onde d'une particule de masse m au repos et de spin zéro, on fait appel au principe de correspondance

$$\begin{array}{c} E \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}, \\ \boldsymbol{p} \rightarrow -i\boldsymbol{\nabla} \end{array} \tag{1.1}$$

L'équation de conservation de l'énergie d'une particule au repos et d'impulsion $\boldsymbol{p}$ est donnée par

$$E^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2 = 0 \tag{1.2}$$

L'application du principe de correspondance donné par la relation (1.1), dans l'équation (1.2) conduit à

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle + m^2\right)\psi(\boldsymbol{r}, t) = 0, \tag{1.3}$$

le d'Alembertien est définit par

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle \tag{1.4}$$

En introduisant le d'Alembertien, l'équation (1.3) prend la forme suivante

$$\left(\Box + m^2\right)\psi(\boldsymbol{r},t) = 0 \tag{1.5}$$

l'équation d'onde (1.3) ou (1.5) présente l'équation d'onde relativiste de Klein-Gordon (KG) [1], d'une particule de masse m et de spin zéro.

1.1.2 Equation de continuité

Afin de donner une interprétation à la fonction d'onde, il faut définir une densité de probabilité de présence ρ et une densité de courant $\boldsymbol{j}$. On cherche donc une équation de continuité de la forme

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{j} = \boldsymbol{0}, \tag{1.6}$$

associé à l'équation de Klein Gordon.

Le complexe conjugué de l'équation (1.3) est donnée par

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle + m^2\right)\psi^*(\boldsymbol{r},t) = 0, \tag{1.7}$$

nous multiplions l'équation (1.3) par ψ^* et (1.7) par ψ, et après soustraction on aboutit à

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi - \psi\frac{\partial}{\partial t}\psi^*\right] + \boldsymbol{\nabla}\left[-\left(\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi - \psi\boldsymbol{\nabla}\psi^*\right)\right] = 0, \tag{1.8}$$

on multiplie l'équation (1.8) par $\frac{i}{2m}$ pour avoir une densité de courant égale à celle du cas non relativiste [2], on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{i}{2m}(\psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi - \psi\frac{\partial}{\partial t}\psi^*)\right] + \boldsymbol{\nabla}\left[-\frac{i}{2m}\left(\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi - \psi\boldsymbol{\nabla}\psi^*\right)\right] = 0. \tag{1.9}$$

Cette équation a la forme de l'équation de continuité (1.6), où la densité de probabilité ρ est définit par

$$\rho = \frac{i}{2m}(\psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi - \psi\frac{\partial}{\partial t}\psi^*), \tag{1.10}$$

et la densité du courant est définit par

$$\boldsymbol{j} = -\frac{i}{2m}\left(\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi - \psi\boldsymbol{\nabla}\psi^*\right). \tag{1.11}$$

En analysant l'expression de la densité de probabilité, on remarque que la présence de la dérivée $\frac{\partial}{\partial t}$ mène à une indétermination du signe de la densité ρ. A cause de ce défaut cette équation est restée pendant des années sans aucune importance. Pour surmonter les difficultés rencontrées avec l'équation de Klein Gordon, les physiciens se sont mis à la recherche d'une équation d'onde relativiste linéaire par rapport au temps pour d'écrire l'électron avec une densité ρ positive. Celle-ci a été établit par Dirac.

1.1.3 Forme covariante

Le tenseur métrique est définit par

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

Un point de l'espace de Minkowski permet de définir un quadrivecteurx^μ tel que :

$$x^\mu = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) = \left(x^0, x^k\right) \tag{1.13}$$

en tenant compte de la relation définissant le d'alembertien $\Box = \partial^\mu \partial_\mu$, l'équation de Klein Gordon (1.5) s'écrit sous forme covariante comme :

$$\left(\partial^\mu \partial_\mu + m^2\right) \psi(\boldsymbol{r}, t) = 0. \tag{1.14}$$

1.1.4 Limite non-relativiste de l'équation de Klein-Gordon

Pour obtenir la limite non-relativiste (NR) de l'équation de KG libre, nous allons séparer l'énergie de masse dans la fonction d'onde , c-à-d nous faisons l'ansatz suivant sur la forme génerale de la fonction d'onde :

$$\psi(\boldsymbol{r}, t) = \varphi(\boldsymbol{r}, t) \exp(-imt), \tag{1.15}$$

Alors la limite NR s'obtient en séparant l'énergie totale E en deux parties comme suit

$$E = \varepsilon + m, \tag{1.16}$$

où m est la masse au repos, et on considère que :

$$\varepsilon \ll m, \tag{1.17}$$

donc il est facile de montrer à partir des équations (1.15), (1.16) et (1.17) que

$$\left| i\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| \cong \varepsilon\varphi \ll m\varphi, \tag{1.18}$$

et ainsi

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \ll -im\frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{1.19}$$

Maintenant, nous allons trouver la première et la deuxième dérivée de (1.15) :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - im\varphi \right) \exp(-imt) \tag{1.20}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \left(-2im\frac{\partial \varphi}{\partial t} - m^2\varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) \exp(-imt), \tag{1.21}$$

on a aussi

$$\left(- \triangle + m^2\right) \psi(r,t) = \left(-\triangle\varphi + m^2\varphi\right) \exp(-imt) \tag{1.22}$$

On insert les équations (1.21), (1.22) dans l'équation (1.3), et en utilisant les deux relations (1.18) et (1.19) on trouve

$$i\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{2m}\triangle\varphi, \tag{1.23}$$

qui n'est autre que l'équation de Schrödinger d'une particule libre.

1.2 Forme hamiltonienne et Equation de Feshbach-Villars

L'équation de Klein-Gordon étant une équation différentielle du deuxième ordre par rapport au temps, elle n'est pas de la forme :

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi \tag{1.24}$$

Dans le but, de donner une interprétation correcte à l'équation de KG, Feshbach et Villars ont transformé l'équation de Klein-Gordon pour pouvoir la réécrire sous la forme (1.24) dite hamiltonienne [[3]]

On introduit un champ χ par :

$$\chi = \frac{-i}{m}\frac{\partial}{\partial t}\psi, \tag{1.25}$$

et l'équation (1.3) devient

$$\begin{cases} im\frac{\partial}{\partial t}\chi = \left(\triangle - m^2\right)\psi, \\ \chi = \frac{-i}{m}\frac{\partial}{\partial t}\psi, \end{cases} \tag{1.26}$$

le système (1.26) est évidemment équivalent à l'équation(1.3).

On introduit deux nouveaux champs

$$u = u(\boldsymbol{r}, t), \quad v = v(\boldsymbol{r}, t), \tag{1.27}$$

définit par

$$\begin{cases} \psi = u + v, \\ \chi = v - u \end{cases} \tag{1.28}$$

On insert les relations (1.28) dans le système (1.26), on trouve

$$\begin{cases} im\frac{\partial}{\partial t}(v-u) = \left(\triangle - m^2\right)(u+v), \\ v - u = \frac{-i}{m}\frac{\partial}{\partial t}(u+v), \end{cases} \tag{1.29}$$

Avec des opérations algébriques simples, on arrive au système suivant :

$$\begin{array}{c} i\frac{\partial}{\partial t}u = -\frac{\triangle}{2m}(u+v) + mu, \\ i\frac{\partial}{\partial t}v = \frac{\triangle}{2m}(u+v) - mv, \end{array} \tag{1.30}$$

ce système peut se mettre sous forme matricielle

$$i\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \left[-\frac{\triangle}{2m}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{1.31}$$

En introduisant les matrices de Pauli :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{1.32}$$

on obtient l'équation de Fechbach-Villars (FV) :

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi_{FV} = \left((\sigma_3 + i\sigma_2)\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + \sigma_3 m\right)\psi_{FV} \tag{1.33}$$

L'équation (1.33) peut s'écrire sous la forme standard suivante :

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi_{FV} = H\psi_{FV}, \tag{1.34}$$

où :

$$H = (\sigma_3 + i\sigma_2)\,\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + \sigma_3 m, \tag{1.35}$$

est l'hamiltonien de Fechbach-Villars.

1.3 Equation de Dirac

1.3.1 Introduction

Les problèmes posés par l'équation de Klein-Gordon ont conduit Dirac à chercher une autre équation d'onde relativiste en 1928, dans laquelle les dérivées temporelle et spatiales sont du premier ordre. Cette équation décrit le comportement de particules élémentaires de spin demi-entier. Dirac cherchait à établir une équation possédant la forme de l'équation Schrödinger et qui soit invariante par l'action du groupe de Lorentz. Cette équation prend en compte de manière naturelle la notion de spin introduite peu de temps avant et permit de prédire l'existence des antiparticules. En effet, outre la solution correspondant à l'électron , il découvre une solution correspondante à une particule d'énergie négative et de charge opposée à celle de l'électron. Afin de surmonter le problème d'interprètation de ρ rencontré dans l'équation de KG, Dirac postulait une équation de type :

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = (-i\boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{\nabla} + \beta m)\,\psi, \tag{1.36}$$

où $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et β indiquent 4 opérateurs hermétiques qui ne dépendent ni d temps ni de l'espace, et ψ est spineur à quatre composantes complexes.

En introduisant les relations (1.1) dans (1.36) , on trouve :

$$(E - \boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{p} - \beta m)\,\psi = 0 \tag{1.37}$$

Pour trouver $\boldsymbol{\alpha}$ et β, on impose que les solutions de cette dernière devrait être aussi solution de l'équation de Klein-Gordon

$$\left(E^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2\right)\psi = 0, \tag{1.38}$$

en multipliant l'équation (1.37) à gauche par l'opérateur $(E+\boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{p}+\beta m)$, on obtient

$$(E+\boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{p}+\beta m)(E-\boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{p}-\beta m)\psi=0, \tag{1.39}$$

en utilisant la convention de sommation d'Einstein , on peut écrire

$$\left(E^2-\alpha_i^2p_i^2-\beta^2m^2-(\alpha_i\alpha_j+\alpha_j\alpha_i)p_ip_j-m(\alpha_i\beta+\beta\alpha_i)p_i\right)\psi=0, \quad i,j=1,2,3 \tag{1.40}$$

L'identification de l'équation (1.40) avec (1.38) conduit aux relations que doivent satisfaire $\boldsymbol{\alpha}$ et β :

$$\begin{cases} \alpha_i\alpha_j+\alpha_j\alpha_i=0, \quad i\neq j \\ \alpha_i^2=1, \qquad \beta^2=1, \\ \alpha_i\beta+\beta\alpha_i=0 \end{cases} \tag{1.41}$$

Ces relations indiquent que les matrices $\boldsymbol{\alpha}$ et β possèdent des valeurs propres 1et -1,ainsi elles sont de trace nulle. Toutes ces propriétés sont également vérifiées par les matrices de Pauli. la seule différence est que les matrices de Pauli ne sont que trois, alors qu'il fait quatre pour l'équation de Dirac. On démontre que ces matrices doivent être de taille4×4. [[4, 5]] .L'équation (1.37) représente l'équation de Dirac qui décrit une particule relativiste de spin 1/2, dans laquelle les matrices hermétiques $\boldsymbol{\alpha}$ et β satisfaisant aux relations (1.41). Un choix possible de ces matrices est fourni par la représentation dite de Dirac :

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \beta=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.42}$$

Finalement l'équation de Dirac s'écrit sous la forme

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}E-\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}.\boldsymbol{p}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}m\right]\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}=0 \tag{1.43}$$

1.3.2 Equation de continuité

L'équation adjointe de l'équation (1.36) est donnée par

$$\begin{aligned} -i\tfrac{\partial}{\partial t}\psi^+ &= \psi^+\left(i\boldsymbol{\alpha}.\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{\nabla}}+\beta m\right) \\ &= i\boldsymbol{\nabla}\psi^+.\boldsymbol{\alpha}+m\psi^+\beta \end{aligned} \tag{1.44}$$

Où ψ^+ est le transposé conjugué (l'adjoint) de ψ.

On multiplie l'équation (1.44) par ψ à droite, et l'équation (1.36) par ψ^+ à gauche, on obtient

$$\begin{array}{c} i\psi^+\frac{\partial}{\partial t}\psi = (-i).\psi^+\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\nabla}\psi) + m\psi^+\beta\psi, \\ -i\left(\frac{\partial}{\partial t}\psi^+\right)\psi = i(\boldsymbol{\nabla}\psi^+)\boldsymbol{\alpha}\psi + m\psi^+\beta\psi. \end{array} \tag{1.45}$$

La soustraction entre ces deux dernière équations conduit à :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi^+\psi\right) + \boldsymbol{\nabla}\left(\psi^+\boldsymbol{\alpha}\psi\right) = 0, \tag{1.46}$$

en conséquence, la densité de probabilité ρ est strictement positive pour la théorie de Dirac, et ρ et le courant sont définit comme suit

$$\rho = \left(\psi^+\psi\right) \quad , \quad \boldsymbol{j} = \psi^+\boldsymbol{\alpha}\psi. \tag{1.47}$$

1.3.3 Forme covariante

Pour écrire l'équation de Dirac sous forme covariante, on introduit

$$\begin{array}{c} \gamma^0 = \beta \quad , \quad \boldsymbol{\gamma} = \beta\boldsymbol{\alpha}, \\ \gamma^\mu \equiv \left(\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3\right), \end{array} \tag{1.48}$$

dans la représentation standard

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.49}$$

En multipliant l'équation (1.36) par β, on obtient :

$$\begin{array}{c} i\beta\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(\beta\boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{p} + m\right)\psi \\ \Rightarrow (i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^i\partial_i - m)\psi = 0, \end{array} \tag{1.50}$$

alors, l'équation de Dirac prend la forme covariante ci-dessous

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi = 0 \tag{1.51}$$

Avec γ^μ vérifiant les relations de commutation suivantes

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\delta^{\mu\nu} \tag{1.52}$$

Chapitre 2

Formalisme de Duffin-Kemmer-Petiau dans le cadre relativiste

2.1 Introduction

Au milieu des années 30 du siècle passé, le succès de l'équation de Dirac dans la description des particules relativistes de spin 1/2 incitent les physiciens à rechercher une équation d'onde relativiste du premier ordre similaire, telles que les matrices γ^{μ} de Dirac sont remplacées par les matrices β^{μ} qui satisfont à une algèbre plus compliqué dite algèbre DKP, pour des particules de spin 0 et 1. R. J. Duffin [6], N. Kemmer [7] et G .Petiau [8] sont arrivés par la linéarisation (veut dire que les opérateurs doivent apparaitre sous forme linéaire dans l'expression de l'équation d'onde) de l'équation de Proca [10, 9] ,à introduire une équation d'onde du premier ordre . L'équation de Duffin ,Kemmer et Petiau fournie une représentation à cinq dimensions pour le spin 0 et une représentation à 10 dimensions pour le spin 1. Le formalisme de DKP est très intéressant car il contient des composantes scalaires et vectorielles décrivant les forces résultant des interactions des noyaux de basse énergie. Ce formalisme possède ainsi un avantage qui facilite l'introduction systématiques des couplages non-minimaux en théorie quantique. L'équation DKP est souvent utilisée pour étudier les interactions des particules de spin 0 et 1 dans diverses études de physique des particules, pour la diffusion nucléaire élastique ainsi que dans l'interaction méson-noyaux ...etc.

Dans ce chapitre , nous allons étudier quelques propriétés de l'équation de DKP et à partir de cette dernière nous nous proposons de dériver l'oscillateur DKP dans l'espace-phase commutatif ainsi que dans un espace-phase non-commutatif.

L'équation DKP relativiste qui décrit une particule libre de masse m est la suivante [11]

$$\left(c\boldsymbol{\beta}.\boldsymbol{p}+mc^2\right)\psi=i\hbar\beta^0\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{2.1}$$

avec : m, c et $\hbar$ représentent respectivement la masse, la vitesse de la lumière et la constante de Planck respectivement.

Dans l'équation (2.1), les $\beta^\mu(\mu=0,1,2,3)$ sont des matrices singulières vérifiant les relations de commutation suivantes :

$$\beta^\mu\beta^\upsilon\beta^\lambda+\beta^\lambda\beta^\upsilon\beta^\mu=g^{\mu\nu}\beta^\lambda+g^{\upsilon\lambda}\beta^\mu. \tag{2.2}$$

L'algèbre DKP (2.2) possède trois représentations irréductibles : une représentation triviale à une dimension , la représentation de dimension cinq décrivant la particule scalaire et la représentation de dimension dix conduit à la particule de spin 1.

L'opérateur de spin peut être exprimé comme suit [11]

$$S_k=i\left[\beta^l,\beta^m\right]=i\epsilon_{klm}\beta^l\beta^m \qquad (k,l,m)\ \text{ cyclique },\tag{2.3}$$

où (k,l,m) cyclique et ϵ_{klm} représente le symbole de Levy-Cevita ,les trois composantes de l'opérateur de spin $S_{[lm]}=S_k$ obéissent à la condition

$$S_{[lm]}^3=S_{[lm]}, \tag{2.4}$$

on voit que les valeurs propres λ de ces matrices obéissent à l'équation :

$$\lambda^3-\lambda=0, \tag{2.5}$$

d'où $\lambda=0,\pm1$. A partir de ces conditions, nous comprenons la raison pour laquelle les matrices β^μ sont utilisées pour décrire les particules de spin 0 et1 [12]

2.1.1 Les matrices β^{μ} por un particule de spin 0

Dans la représentation de spin 0 , les quatre matrices de Kemmer β^{μ} sont des matrices 5×5 qui sont donnée explicitement par les expressions suivantes [11]

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} \vartheta & \tilde{0} \\ \bar{0}_T & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad \beta^i = \begin{pmatrix} \hat{0} & \rho^i \\ -\rho^i_T & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{2.6}$$

avec $\hat{0}$, $\tilde{0}$,$\mathbf{0}$ sont respectivement des matrices nulles de dimensions 2×2 , 2×3 , 3×3 et ϑ , ρ^i sont donnée par

$$\vartheta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \rho^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \rho^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \ \rho^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

ou ρ^i_T est la matrice transposé de ρ^i.

Puisque les matrices β^{μ} de dimension5×5 , alors ψ est un spineur à cinq composantes [13], qui s'exprime :

$$\psi(r) = \begin{pmatrix} \psi_{upper} \\ i\psi_{lower} \end{pmatrix}, \text{ avec } \psi_{upper} = \begin{pmatrix} \phi \\ \varphi \end{pmatrix} \text{ et } \psi_{lower} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

2.2 Forme covariante de l'équation de Duffin-Kemmer-Petiau

Afin de trouver la forme covariante de l'équation de Duffin-Kemmer-Petiau, tout d'abord , nous allons adopter les notations suivantes ($\hbar = c = 1$) :

$$\beta^{\mu} = \left(\beta^0, \boldsymbol{\beta}\right) \tag{2.9}$$

Le quadrivecteur gradient est donné par :

$$\partial_{\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \boldsymbol{\nabla}\right) \tag{2.10}$$

$$\partial^{\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\boldsymbol{\nabla}\right) \tag{2.11}$$

Le quadrivecteur impulsion s'exprime comme suit

$$p^\mu = \left(p^0, \boldsymbol{p}\right) = i\partial^\mu \tag{2.12}$$

$$p_\mu = (p_0, \boldsymbol{p}) = i\partial_\mu \tag{2.13}$$

Le produit scalaire entre deux quadrivecteurs quelconque est définit de cette manière

$$x^\mu y_\mu = x^0 y_0 - \boldsymbol{x}\boldsymbol{y} \tag{2.14}$$

On écrit l'équation de DKP comme

$$(i\beta^0 \frac{\partial}{\partial t} - \boldsymbol{\beta.p} - m)\psi = 0. \tag{2.15}$$

En utilisant les propriétés (2.9) et (2.13), l'équation(2.15), devient

$$\left(\beta^0 p - \beta^1 p_1 - \beta^2 p_2 - \beta^3 p_3 - m\right)\psi = 0, \tag{2.16}$$

en utilisant la relation (2.14), on aboutit à

$$(\beta^\mu p_\mu - m)\psi = 0, \tag{2.17}$$

Finalement, la forme covariante est donnée par

$$(i\beta^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0. \tag{2.18}$$

On remarque que cette équation est similaire a la forme covariante de l'équation de Dirac, la seule différence est que les matrices γ sont remplacées par les matrices β.

2.3 L'équation de continuité et courant conservé

Dans ce qui suit, on travaillera dans le système d'unité naturel de la mécanique quantique relativiste, pour lequel $\hbar = c = 1$.

Sous forme covariante l'équation (2.1) s'écrit

$$\left(i\beta^{\mu}\partial_{\mu}-m\right)\psi=0. \tag{2.19}$$

L'équation adjointe de DKP est obtenue à partir (2.19)et (2.2), et prend la forme

$$\left(-i\partial_{\mu}\bar{\psi}\beta^{\mu}-m\bar{\psi}\right)=0, \tag{2.20a}$$

avec $\bar{\psi}=\psi^{+}\eta^{0}$ présente le spineur adjoint pour lequel $\left(\eta^{0}=2\left(\beta^{0}\right)^{2}-1\right)$.

En multipliant à gauche (2.19) par $\bar{\psi}$,et à droite (2.20a) par ψ on obtient

$$\begin{array}{c} i\bar{\psi}\beta^{\mu}\partial_{\mu}\psi-m\bar{\psi}\psi=0, \\ -i\partial_{\mu}\bar{\psi}\beta^{\mu}\psi-m\psi\bar{\psi}=0. \end{array} \tag{2.21}$$

L'équation de continuité s'obtient par la soustraction de la deuxième équation dans (2.21) de la première

$$\partial_{\mu}\left(\bar{\psi}\beta^{\mu}\psi\right)=0, \tag{2.22}$$

cela implique que $\bar{\psi}\beta^{\mu}\psi$ est le quadrivecteur densité courant , puisque l'opérateur $\partial_{\mu}=\left(\partial_{0},\partial_{i}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial t},\boldsymbol{\nabla}\right)$,l'équation (2.22) s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\psi}\beta^{0}\psi\right)+\boldsymbol{\nabla}\left(\bar{\psi}\boldsymbol{\beta}\ \psi\right)=0, \tag{2.23}$$

l'équation (2.23) a la forme de l'équation de continuité

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla.j=0,} \tag{2.24}$$

où ρ et $\boldsymbol{j}$ présente respectivement la densité de probabilité de présence et la densité de courant

$$\begin{array}{c} \rho=\bar{\psi}\beta^{0}\psi, \\ \boldsymbol{j}=\ \bar{\psi}\boldsymbol{\beta}\ \psi. \end{array} \tag{2.25}$$

Pour mettre en évidence le contenue physique du courant DKP , la décomposition de Gordon peut être effectuée

$$j^{\mu}=\bar{\psi}\beta^{\mu}\psi=\frac{i}{2m}\left(\bar{\psi}\beta^{\mu}\beta^{\nu}\partial_{\nu}\psi-\partial_{\nu}\bar{\psi}\beta^{\nu}\beta^{\mu}\psi\right), \tag{2.26}$$

et en utilisant les équations (2.19), (2.2) et (2.20a) pour séparer les termes $\upsilon=\mu$ de $\upsilon\neq\mu$, on obtient

$$j^{\mu}=j^{\mu}_{\upsilon=\mu}+j^{\mu}_{\upsilon\neq\mu}, \tag{2.27}$$

où :

$$j^{\mu}_{\upsilon=\mu} \equiv j^{\mu}_{conv} = \frac{i}{2m}\left(\bar{\psi}\left(\partial^{\mu}\psi\right) - \left(\partial^{\mu}\bar{\psi}\right)\psi\right)$$

$$= \begin{cases} \rho_{conv} = \frac{i}{2m}\left(\bar{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial t}\psi\right) \\ \boldsymbol{j}_{conv} = \frac{-i}{2m}\left(\bar{\psi}\left(\boldsymbol{\nabla}\psi\right) - \left(\boldsymbol{\nabla}\bar{\psi}\right)\psi\right), \end{cases} \tag{2.28}$$

et le second terme de (2.27) est

$$j^{\mu}_{\upsilon\neq\mu} \equiv j^{\mu}_{int} = \frac{i}{2m}\partial_{\upsilon}\left(\bar{\psi}\left[\beta^{\mu},\beta^{\nu}\right]\psi\right) \tag{2.29}$$

$$\begin{cases} \rho_{int} = \frac{i}{2m}\boldsymbol{\nabla}\left(\bar{\psi}\left[\beta^{0},\boldsymbol{\beta}\right]\psi\right) \\ \boldsymbol{j}_{int} = \frac{+i}{2m}\left(-\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\psi}\left[\beta^{0},\boldsymbol{\beta}\right]\psi\right) + \boldsymbol{\nabla}\wedge\bar{\psi}\left(\boldsymbol{\beta}\wedge\boldsymbol{\beta}\right)\psi\right) \end{cases} \tag{2.30}$$

Le courant $j^{\mu}_{\upsilon=\mu}$ ne contient aucune matrice β, et on constate que les expressions correspondantes pour la densité ρ et le courant $\boldsymbol{j}$ sont absolument identique à ceux de la théorie de Schrödinger. Il s'agit de la composante du courant DKP. L'autre composante, $\left(j^{\mu}_{\upsilon\neq\mu} \equiv (\rho_{int}, \boldsymbol{j}_{int})\right)$, est relative à un mouvement interne car il implique la moyennes des combinaisons de variables internes β^{μ} [13].Nedjadi et Barret recommandent, dans l'étude d'une particule dans un champ électromagnétiqu, de considérer les quantités $\left[\beta^{0},\boldsymbol{\beta}\right]\psi$ et $\bar{\psi}\left(\boldsymbol{\beta}\wedge\boldsymbol{\beta}\right)\psi$ comme quantités liés respectivement à la densité de polarisation $\boldsymbol{P}$ et à une densité de magnétisation $\boldsymbol{M}$, c'est à dire $(\rho_{int} = -\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{P})$ et $\left(\boldsymbol{j}_{int} = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{M}\right)$ [13].

2.4 Oscillateur de Duffin-Kemmer-Petiau dans l'espace-phase commutatif

Notre objective dans cette section est d'étudier un autre modèle intéressant d'oscillateur bosonique relativiste pour les spins entiers 0 et 1, qui a une analogie avec l'oscillateur de Dirac de spin 1/2 [14]. Le système obtenu est appelé oscillateur de Duffin-Kemmer-Petiau. ce dernier a fait l'objet d'un développement notable et d'un grand intérêt dans diverses études physique , interactions des hadrons avec les noyaux , en chromodynamique quantique...etc. Récemment, on a observ' que oscillateur DKP s'est développé de manière significative dans différents contextes notamment dans le cadre des algèbres déformées et de nombreux travaux ont été réalisés ainsi que dans le contexte de l'espace non-commutatif [15], dans la gravité quantique. Afin de d'établir l'oscillateur de DKP, nous allons introduire une substitution non-minimale et qui est linéaire en $\boldsymbol{r}$, en faisant la substitution $\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{p} - im\omega\eta^0\boldsymbol{r}$ où ω est la fréquence d'oscillation et $\eta^0 = 2(\beta^0)^2 - 1$.

L'équation de DKP pour ce système est

$$(c\ \boldsymbol{\beta}.(\boldsymbol{p} - im\omega\eta^0\boldsymbol{r}) + mc^2) = i\hbar\beta^0\frac{\partial\psi}{\partial t}, \tag{2.31}$$

où $(\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{p} - im\omega\eta^0\boldsymbol{r})$ est le potentiel externe que nous présentons avec la substitution non minimale. Ce potentiel extérieur conserve uniquement le moment angulaire total $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$, cependant ne conserve ni le moment angulaire orbital ni le moment angulaire de spin [11].

2.4.1 Particule spin 0

Dans la représentation du spin 0, la matrice η^0 est donnée par

$$\eta^0 = 2(\beta^0)^2 - 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.32}$$

Après développement et simplifications de l'équation (2.31), on arrive à un système d'équation donnée par

$$\begin{aligned} &mc^2 - ic(p_1 + im\omega r_1)A_1 - ic(p_2 + im\omega r_2)A_2 - ic(p_3 + im\omega r_3)A_3 = E\varphi, \\ &mc^2\varphi = E\phi, \\ &ic(p_1 - im\omega r_1)\phi + imc^2 A_1 = 0, \\ &ic(p_2 - im\omega r_2)\phi + imc^2 A_2 = 0, \\ &ic.(p_3 - im\omega r_3)\phi + imc^2 A_3 = 0, \end{aligned} \tag{2.33}$$

d'une manière plus simple, l'équation (2.33) peut s'écrire comme un système à trois équations [11] :

$$\begin{aligned} mc^2\phi &= E\varphi + ic(\boldsymbol{p} + im\omega\boldsymbol{r}).\boldsymbol{A}, \\ mc^2\varphi &= E\phi, \\ mc^2\,\boldsymbol{A} &= ic(\boldsymbol{p} - im\omega\boldsymbol{r})\phi, \end{aligned} \tag{2.34}$$

l'élimination de φ et A en faveur de ϕ, conduit à une équation équivalente à celle de Klein-Gordon

$$\begin{aligned} \left(E^2 - m^2c^4\right)\phi &= c^2\left(\boldsymbol{p} + im\omega\boldsymbol{r}\right).(\boldsymbol{p} - im\omega\boldsymbol{r})\phi \\ &= c^2(\boldsymbol{p}^2 + im\omega(\boldsymbol{rp} - \boldsymbol{pr}) + m^2\omega^2\boldsymbol{r}^2)\phi, \end{aligned} \tag{2.35}$$

en utilisant la relation d'incertitude d'Heisenberg $[r_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$, on trouve :

$$(E^2 - m^2c^4)\phi = \left[c^2(\boldsymbol{p}^2 + m^2\omega^2\boldsymbol{r}^2) - 3\hbar\omega mc^2\right]\phi, \tag{2.36}$$

2.4.2 Limite non relativiste

en utilisant la relation $\left(E = \varepsilon + mc^2\right)$, à la limite non relativiste $\varepsilon \ll mc^2$; l'équation (2.36) se transforme en

$$\varepsilon\phi = \left[\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\boldsymbol{r}^2 - \frac{3}{2}\hbar\omega\right]\phi, \tag{2.37}$$

qui représente l'oscillateur harmonique isotrope traditionnel.

2.5 Oscillateur DKP dans l'espace-phase non commutatif

2.5.1 Introduction

La forme la plus simple de la non-commutativité des opérateurs de la coordonnée de position est postulée par la relation de commutation suivante [16]

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu} \tag{2.38}$$

avec$(\mu, \nu = 1, ...d)$,et $\theta^{\mu\nu}$ est un tenseur antisymétrique et $(\hat{x} \equiv \hat{r})$.

Pour la mécanique quantique standart dans l'espace phase commutatif , les relations d'Heisenberg s'expriment sous cette forme

$$[x_i, x_j] = 0, [p_i, p_j] = 0, [x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{2.39}$$

où $(i, j = 1, 2, 3)$.

A très petite échelles par exemple celle des cordes, les coordonnées de la position et de l'impulsion ne commutent pas entre elles, dans l'espace phase non-commutatif les opérateurs de la position et de l'impulsion sont respectivement $\hat{x}_i$et $\hat{p}_i$.

Ces nouveaux opérateurs $\hat{x}_i$et $\hat{p}_i$ satisfaisant aux relations de commutations suivantes [17] :

$$\begin{aligned} [\hat{x}_i, \hat{x}_j] &= i\theta_{ij} \\ [\hat{p}_i, \hat{p}_j] &= i\eta_{ij} \\ [\hat{x}_i, \hat{p}_j] &= i\hbar\triangle_{ij} \end{aligned} \tag{2.40}$$

Où la matrice$\triangle_{ij}$est donné par :

$$\triangle_{ij} = (1 + \frac{\boldsymbol{\theta}.\boldsymbol{\eta}}{4\hbar^2})\delta_{ij} - \frac{\theta_i\eta_i}{4\hbar^2}, \tag{2.41}$$

avec δ_{ij} est le symbole de Kronecker et où θ_{ij} et η_{ij} sont des paramètres de la non-commutativité.

On peut choisir une façon possible pour construire des variables non commutatives $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z)$ à partir des variables commutatives (x, y, z, p_x, p_y, p_z) a travers des transformations linéaires dite généralisée de Bopp Shift [18]

$$\begin{aligned} \hat{x}_i &= x_i - \tfrac{\theta_{ij}}{2\hbar} p_j, \\ \hat{p}_i &= p_i + \tfrac{\eta_{ij}}{2\hbar} x_j, \end{aligned} \tag{2.42}$$

les paramètres non-commutatifs peuvent être identifiés par $\left(\theta_{ij} = \epsilon_{ijk}\theta_k, \eta_{ij} = \epsilon_{ijk}\eta_k\right)$, avec $\theta_k = (0, 0, \theta)$, , $\eta_k = (0, 0, \eta)$ et

$$\begin{aligned} \theta^{12} &= -\theta^{21} = \theta^3 = \theta, \\ \eta^{12} &= -\eta^{21} = \eta^3 = \eta. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Donc, nous avons

$$\begin{array}{c} [\hat{x},\hat{y}]=i\theta, \qquad [\hat{p}_x,\hat{p}_y]=i\eta, \\ [\hat{x},\hat{p}_x]=i\hbar_{eff} \quad [\hat{y},\hat{p}_y]=i\hbar_{eff} \quad , \quad [\hat{z},\hat{p}_z]=i\hbar, \end{array} \tag{2.44}$$

avec

$$\hbar_{eff}=\hbar\left(1+\frac{\theta\eta}{4\hbar^2}\right), \tag{2.45}$$

qui est la constante de Planck déformé. Les relations (2.42) s'écrivent

$$\begin{array}{ll} \hat{x}=x-\frac{\theta}{2\hbar}p_y, & \hat{p}_x=p_x+\frac{\eta}{2\hbar}y \\ \hat{y}=y+\frac{\theta}{2\hbar}p_x, & \hat{p}_y=p_y-\frac{\eta}{2\hbar}x \\ \hat{z}=z, & \hat{p}_z=p_z, \end{array} \tag{2.46}$$

où, dans les deux dernières relations nous avons identifié

$$x^1\equiv\hat{x},\ x^2\equiv\hat{y},\ x^3\equiv\hat{z},\ p^1\equiv\hat{p}_{x,},\ p^2\equiv\hat{p}_y \text{ et } p^3=\hat{p}_z \tag{2.47}$$

L'équation de DKP libre pour une particule scalaire et vectorielle de masse m est donnée par

$$\left(c\boldsymbol{\beta}.\hat{\boldsymbol{p}}+mc^2\right)\psi=i\hbar\beta^0\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{2.48}$$

Pour déterminer l'oscillateur DKP dans l'espace phase non-commutatif, nous introduisons la substitution non minimale

$$\hat{\boldsymbol{p}}\rightarrow\hat{\boldsymbol{p}}-im\omega\eta^0\hat{\boldsymbol{r}} \tag{2.49}$$

Où ω la fréquence de l'oscillateur , avec $\eta^0=2(\beta^0)^2-1$ et $\left(\eta^0\right)^2=1$, 1 est la matrice identité de dimension 5.

L'équation (2.48) avec cette substitution, devient

$$\left(c\boldsymbol{\beta}.\left(\hat{\boldsymbol{p}}-im\omega\eta^0\hat{\boldsymbol{r}}\right)+mc^2\right)\psi=i\hbar\beta^0\frac{\partial\psi}{\partial t}, \tag{2.50}$$

à trois dimensions cette équation est donnée par

$$\left(E\beta^0-mc^2-c\beta^1\left(\hat{p}_x-im\omega\eta^0\hat{x}\right)-c\beta^2\left(\hat{p}_y-im\omega\eta^0\hat{y}\right)-c\beta^3\left(\hat{p}_z-im\omega\eta^0\hat{z}\right)\right)\psi=0 \tag{2.51}$$

En introduisant la relation (2.8) dans l'équation (2.51), cette dernière s'écrit donc comme suit

$$\begin{pmatrix} -mc^2 & E & -c(\hat{p}_x+im\omega\hat{x}) & -c\left(\hat{p}_y+im\omega\hat{y}\right) & -c\left(\hat{p}_z+im\omega\hat{z}\right) \\ E & -mc^2 & 0 & 0 & 0 \\ c(\hat{p}_x-im\omega\hat{x}) & 0 & -mc^2 & 0 & 0 \\ c\left(\hat{p}_y-im\omega\hat{y}\right) & 0 & 0 & -mc^2 & 0 \\ c\left(\hat{p}_z-im\omega\hat{z}\right) & 0 & 0 & 0 & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \varphi \\ iA_1 \\ iA_2 \\ iA_3 \end{pmatrix} = 0 \tag{2.52}$$

Pour les états DKP stationnaire, l'équation de mouvement se décompose de la façon suivante

$$-mc^2\phi+E\varphi-ic\left(\hat{p}_x+im\omega\hat{x}\right)A_1-ic\left(\hat{p}_y+im\omega\hat{y}\right)A_2-ic\left(\hat{p}_z+im\omega\hat{z}\right)A_3=0, \tag{2.53}$$

$$\begin{aligned} E\phi &= mc^2\varphi, \\ c\left(\hat{p}_x-im\omega\hat{x}\right)\phi-imc^2A_1&=0, \\ c\left(\hat{p}_y-im\omega\hat{y}\right)\phi-imc^2A_2&=0, \\ c\left(\hat{p}_z-im\omega\hat{z}\right)\phi-imc^2A_3&=0, \end{aligned} \tag{2.54}$$

les relations (2.54) sont équivalentes au système d'équations suivant

$$\begin{aligned} \varphi &= \tfrac{E}{mc^2}\phi, \\ iA_1 &= \tfrac{c(\hat{p}_x-im\omega\hat{x})}{mc^2}\phi, \\ iA_2 &= \tfrac{c(\hat{p}_y-im\omega\hat{y})}{mc^2}\phi, \\ iA_3 &= \tfrac{c(\hat{p}_z-im\omega\hat{z})}{mc^2}\phi, \end{aligned} \tag{2.55}$$

en injectant les équations (2.55) dans (2.53), on aura

$$\begin{aligned} \left(E^2-m^2c^4\right)\phi = [c^2\left(\hat{p}_x+im\omega\hat{x}\right)\left(\hat{p}_x-im\omega\hat{x}\right)+\left(\hat{p}_y+im\omega\hat{y}\right)\left(\hat{p}_y-im\omega\hat{y}\right) \\ +\left(\hat{p}_z+im\omega\hat{z}\right)\left(\hat{p}_z-im\omega\hat{z}\right)]\phi \end{aligned} \tag{2.56}$$

Le coté droit de l'équation précédente se développe comme suit

$$\begin{aligned} \left(E^2-m^2c^4\right)\phi = c^2[&\hat{p}_x\hat{p}_x+im\omega\left(\hat{x}\hat{p}_x-\hat{p}_x\hat{x}\right)+m^2\omega^2\hat{x}\hat{x} \\ &+\hat{p}_y\hat{p}_y+im\omega\left(\hat{y}\hat{p}_y-\hat{p}_y\hat{y}\right)+m^2\omega^2\hat{y}\hat{y} \\ &+\hat{p}_z\hat{p}_z+im\omega\left(\hat{z}\hat{p}_z-\hat{p}_z\hat{z}\right)+m^2\omega^2\hat{z}\hat{z}]\phi, \end{aligned} \tag{2.57}$$

en utilisant l'algèbre de la non-commutativité (2.46), les termes de la partie droite se laissent développer de la sorte

$$\begin{aligned} \hat{p}_x\hat{p}_x &= \left(p_x+\tfrac{\eta}{2\hbar}y\right)\left(p_x+\tfrac{\eta}{2\hbar}y\right), & \hat{x}\hat{x} &= \left(x-\tfrac{\theta}{2\hbar}p_y\right)\left(x-\tfrac{\theta}{2\hbar}p_y\right), \\ &= p_x^2+\tfrac{\eta}{2\hbar}p_xy+\tfrac{\eta}{2\hbar}yp_x+\tfrac{\eta^2}{4\hbar^2}y^2, & &= x^2-\tfrac{\theta}{2\hbar}xp_y-\tfrac{\theta}{2\hbar}p_yx+\tfrac{\theta^2}{4\hbar^2}p_y^2, \\ \hat{p}_y\hat{p}_y &= \left(p_y-\tfrac{\eta}{2\hbar}x\right)\left(p_y-\tfrac{\eta}{2\hbar}x\right), & \hat{y}\hat{y} &= \left(y+\tfrac{\theta}{2\hbar}p_x\right)\left(y+\tfrac{\theta}{2\hbar}p_x\right), \\ &= p_y^2-\tfrac{\eta}{2\hbar}p_yx-\tfrac{\eta}{2\hbar}xp_y+\tfrac{\eta^2}{4\hbar^2}x^2, & &= y^2+\tfrac{\theta}{2\hbar}yp_x+\tfrac{\theta}{2\hbar}p_xy+\tfrac{\theta^2}{4\hbar^2}p_x^2, \\ \hat{p}_z\hat{p}_z &= p_z^2 & \hat{z}\hat{z} &= z^2 \end{aligned} \tag{2.58}$$

L'insertion des relations (2.58) dans l'équation (2.57), et l'utilisation de la deuxième relation de (2.44), nous conduisent aux équations suivantes

$$\begin{aligned}\left(E^2-m^2c^4\right)\phi = c^2[&\left(1+\tfrac{m^2\omega^2\theta^2}{4\hbar^2}\right)\left(p_x^2+p_y^2\right)+\left(m^2\omega^2+\tfrac{\eta^2}{4\hbar^2}\right)\left(x^2+y^2\right)\\ &+\tfrac{1}{2\hbar}\left(\eta+m^2\omega^2\theta\right)\left(p_xy-p_yx\right)+\tfrac{1}{2\hbar}\left(\eta+m^2\omega^2\theta\right)\left(yp_x-xp_y\right)\\ &-2m\omega\hbar_{eff}-m\omega\hbar+m^2\omega^2z^2+p_z^2]\phi\end{aligned} \tag{2.59}$$

Le moment angulaire $\boldsymbol{L}$ de la particule est définit par

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}, \tag{2.60}$$

où $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{p}$ étant respectivement le vecteur position et impulsion de la particule.

En coordonnés cartésiennes les composantes du moment angulaire sont :

$$L_x = yp_z - zp_y, \tag{2.61}$$

$$L_y = xp_z - zp_x, \tag{2.62}$$

$$L_z = xp_y - yp_x, \tag{2.63}$$

à l'aide des relations de commutation canonique dans l'espace commutatif, on trouve

$$\begin{aligned}&[x,p_y]=0\Rightarrow xp_y-p_yx=0\Rightarrow p_yx=xp_y,\\ &[y,p_x]=0\Rightarrow yp_x-p_xy=0\Rightarrow yp_x=p_xy,\end{aligned} \tag{2.64}$$

en substituant les relation (2.64) dans l'équation (2.59), on aboutit à

$$\begin{aligned}\left(E^2-m^2c^4\right)\phi = c^2[&\left(1+\tfrac{m^2\omega^2\theta^2}{4\hbar^2}\right)\left(p_x^2+p_y^2\right)+\left(m^2\omega^2+\tfrac{\eta^2}{4\hbar^2}\right)\left(x^2+y^2\right)\\ &+\tfrac{1}{2\hbar}\left(\eta+m^2\omega^2\theta\right)\left(yp_x-xp_y\right)+\tfrac{1}{2\hbar}\left(\eta+m^2\omega^2\theta\right)\left(yp_x-xp_y\right)\\ &-2m\omega\hbar_{eff}-m\omega\hbar+m^2\omega^2z^2+p_z^2]\phi,\end{aligned} \tag{2.65}$$

Aprés l'insertion de la relation (2.63) ,l'équation (2.65) devient

$$\begin{aligned}\left(E^2-m^2c^4\right)\phi = c^2[&\left(1+\tfrac{m^2\omega^2\theta^2}{4\hbar^2}\right)\left(p_x^2+p_y^2\right)+\left(m^2\omega^2+\tfrac{\eta^2}{4\hbar^2}\right)\left(x^2+y^2\right)\\ &-\tfrac{1}{\hbar}\left(\eta+m^2\omega^2\theta\right)L_z-2m\omega\hbar_{eff}-m\omega\hbar+m^2\omega^2z^2+p_z^2]\phi,\end{aligned} \tag{2.66}$$

Le résultat qu'on vient de trouver dans l'équation (2.66), est analogue à celui de Young ([19]) dans l'espace non-commutatif. Si nous fixons le paramètre $\eta = 0$, le résultat sera identique au résultat de l'article de Falek ([15]), et si nous comparons les résultats de l'espace phase bidimensionnel non-commutatif et ceux obtenus dans l'espace commutatif avec $\eta = 0$ et $\theta = 0$, nous trouverons qu'ils sont semblables à ceux des articles de Guo ([20]) et Nedjadi ([11]) respectivement.

2.5.2 Limite non relativiste

En utilisant la relation $\left(E = \varepsilon + mc^2\right)$, et dans la limite non relativiste l'équation (2.66) devient :

$$\begin{aligned} \varepsilon\phi = [& \left(\tfrac{1}{2m} + \tfrac{m\omega^2\theta^2}{8\hbar^2}\right)\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \left(\tfrac{m\omega^2}{2} + \tfrac{\eta^2}{8m\hbar^2}\right)\left(x^2 + y^2\right) \\ & - \tfrac{1}{2m\hbar}\left(\eta + m^2\omega^2\theta\right)L_z - \omega\hbar_{eff} - \tfrac{\omega\hbar}{2} + \tfrac{m\omega^2}{2}z^2 + \tfrac{p_z^2}{2m}]\phi, \end{aligned} \tag{2.67}$$

Chapitre 3

Formalisme de Duffin-Kemmer-Petiau dans le cadre de la Covariance Galiléenne

3.1 Formalisme de la covariance galiléenne

Bien que la cinématique galiléenne ne soit qu'une approximation de la cinématique relativiste, la structure de la cinématique galiléenne est plus complexe que celle de la cinématique relativiste. Par exemple, l'algèbre de Galilée admet une extension centrale non triviale et une représentation projective, contrairement à l'algèbre de Poincaré. En fait les représentations des algèbres galiléenne peuvent être construite de trois manières possibles : premièrement, directement à partir d'algèbre galiléenne, deuxièment : à partir de contraction d'algèbres de Poincaré de même dimension d'espace temps et finalement, à travers l'algèbre de Poincaré dans un espace temps à une dimension supplémentaire que nous appelons Covariance Galiléenne, car les équations sont covariantes par transformation de Lorentz sur un collecteur étendu, qui deviennent invariantes après projection à une dimension inférieur [21]

Un des avantages de ce formalisme est que la Covariance Galiléenne est omniprésente et très similaire aux formules relativistes. De plus, les problèmes sont souvent plus élégants et simplifiés, d'autant plus que l'on considère des représentations vectorielles du groupe de Galilée plutôt que des représentations projectives [22]. Un des objectifs de cette approche covariante est qu'elle puisse formener une autre caractéristique unificatrice des modèles de la théorie des champs, et ainsi pour étudier la physique de la matière condensé comme la condensation dans les gaz dilués et les systèmes non relativiste tel que les fluides [23].

Le cadre de la Covariance Galiléenne est obtenue en ajoutant une coordonnée supplémentaire "s" où "x" à la variété de Minkowski $(4,1)$. Cette variété étendue se compose de cinq vecteurs avec des coordonnées différentes [21]

$$x^{\mu} = (x^1, x^2, x^3, x^4, x^5) = (\boldsymbol{r}, t, s), \tag{3.1}$$

sous l'effet des boosts Galiléen, il se transforme en

$$\begin{aligned} \acute{\boldsymbol{r}} &= \boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t, \\ \acute{t} &= t, \\ \acute{s} &= s - \boldsymbol{r}.\boldsymbol{v} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 t, \end{aligned} \tag{3.2}$$

avec $\boldsymbol{r}$, t, $\boldsymbol{v}$ représentent respectivement la position, le temps et la vitesse de la particule.

Cette transformation laisse invariant le produit scalaire

$$(\boldsymbol{r}, t, s) . (\acute{\boldsymbol{r}}, \acute{t}, \acute{s}) \equiv \boldsymbol{r}.\acute{\boldsymbol{r}} - t\acute{s} - \acute{t}s, \tag{3.3}$$

défini par la métrique suivante :

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

où $\mu, \nu = 1, .., 5$. Cette métrique est connue sous le nom de la métrique galiléenne, bien qu'elle soit l'équivalent spatio-temporel de la métrique de Lorentz. Selon l'article de Omote et Takashi, cette métrique peut être diagonalisée $(+,+,+,+,-)$.Notons que le terme Galiléen décrit le processus de projection dans l'espace-temps à quatre dimensions, aboutissant à la théorie de Galilée. On note que la coordonnée "s" semble être liée à l'invariance lagrangienne de la particule libre sous transformation de Galilée ; puisqu'elle se transforme comme la phase de la fonction d'onde quantique, garantissant l'invariance de l'équation de Schrödinger sous transformation de Galilée [21].

La version non relativiste de l'équation de DKP est donnée par [24]

$$(\beta^{\mu}\partial_{\mu}+k)\,\psi=0, \tag{3.5}$$

avec $\mu=1,..,5$,et k est une constante arbitraire, qui est absorbé en énergie par la définition suivante [22]

$$E\to E-\frac{\hbar^{2}k^{2}}{2m} \tag{3.6}$$

Afin de construire l'équation de DKP pour des particules de spin 0, nous avons besoin de cinq matrices dont chacune de dimension six et qui satisfont à l'algèbre de DKP

$$\beta^{\mu}\beta^{\upsilon}\beta^{\lambda}+\beta^{\lambda}\beta^{\upsilon}\beta^{\mu}=g^{\mu\nu}\beta^{\lambda}+g^{\upsilon\lambda}\beta^{\mu} \tag{3.7}$$

où $g^{\mu\nu}$ est la métrique galiléenne. On note que les matrices β dépend du spin. Une représentation de ces matrices est donnée par [24]

$$\beta^{1}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \beta^{2}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\beta^{3}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\end{pmatrix},\quad \beta^{4}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&-1&0\end{pmatrix} \tag{3.8}$$

$$\beta^{5}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&-1&0&0\end{pmatrix}$$

L'opérateur de la quantité de mouvement à cinq dimensions s'exprime d'un coté comme suit

$$p^{\mu} = (\boldsymbol{p}, E, m) \text{ et } p_{\mu} = (\boldsymbol{p}, -E, -m)\,, \tag{3.9}$$

et d'un autre coté comme

$$p_{\mu} = -i\hbar\partial_{\mu} = (-i\hbar\nabla, -i\hbar\partial_t, -i\hbar\partial_5)\,. \tag{3.10}$$

Pour trouver l'équation de DKP dans la représentation de l'impulsion ,on multiplie l'équation(3.5) par $-i\hbar$

$$(\beta^{\mu} p_{\mu} - i\hbar k)\,\psi = 0 \tag{3.11}$$

d'une façon plus explicite l'équation (3.11) s'écrit

$$\left(\boldsymbol{\beta}.\boldsymbol{p} - \beta^4 E - m\beta^5 - i\hbar k\right)\psi = 0, \tag{3.12}$$

puisque les matrices β^{μ} sont de dimensions 6×6, alors le ψ est un spineur à 6 composantes ,qui s'exprime de la façon suivante [24]

$$\psi = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \theta \\ \varphi \\ \phi \end{pmatrix} \quad , \text{ avec } \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

3.2 Oscillateur de DKP dans l'espace-phase commutatif

L'oscillateur de DKP est décrit, en insérant le couplage non-minimale ci-dessous [22]

$$\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p} + im\omega\eta\boldsymbol{r} \tag{3.14}$$

L'équation (3.12), devient

$$(\boldsymbol{\beta}.\,(\boldsymbol{p} + im\omega\eta\boldsymbol{r}) - \beta^4 E - m\beta^5 - i\hbar k)\psi = 0, \tag{3.15}$$

avec m la masse de la particule, ω la fréquence de l'oscillation et η est une matrice 6×6 , définie comme suit

$$\eta = \left(\beta^4+\beta^5\right)^2 + \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

La décomposition de l'équation matricielle (3.15), nous mène au système suivant

$$\begin{cases} -i\hbar k A_x + \left(p_x - im\omega x\right)\phi = 0, \\ -i\hbar k A_y + \left(p_y - im\omega y\right)\phi = 0, \\ -i\hbar k A_z + \left(p_z - im\omega z\right)\phi = 0, \\ -i\hbar k\theta - E\phi = 0, \\ -i\hbar k\varphi - m\phi = 0, \\ \left(p_x + im\omega x\right)A_x + \left(p_y + im\omega y\right)A_y + \left(p_z + im\omega z\right)A_z + m\theta + E\varphi - -i\hbar k\phi = 0, \end{cases} \tag{3.17}$$

qui peut être convertis à un système à quatre équations

$$\begin{cases} i\hbar k\,\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{p} - im\omega\boldsymbol{r}\right)\phi, \\ -i\hbar k\theta = E\phi, \\ -i\hbar k\varphi = m\phi, \\ \left(\boldsymbol{p} + im\omega\boldsymbol{r}\right).\,\boldsymbol{A} + m\theta + E\varphi - i\hbar k\phi = 0 \end{cases} \tag{3.18}$$

Pour éliminer θ, φ, $\boldsymbol{A}$ en faveur de ϕ, on remplace les trois premières équations du système (3.18) dans la dernière équation du même système, et on obtient

$$[(\boldsymbol{p} + im\omega\boldsymbol{r}).(\boldsymbol{p} - im\omega\boldsymbol{r}) - 2mE + k^2]\phi = 0 \tag{3.19}$$

Le premier terme de l'équation précédente se laisse développer de sorte à

$$(\boldsymbol{p} + im\omega\boldsymbol{r}).(\boldsymbol{p} - im\omega\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{p}^2 + im\omega(\boldsymbol{r}.\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}.\boldsymbol{r}) + m^2\omega^2\boldsymbol{r}^2 = 0, \tag{3.20}$$

en utilisant la relation de commutation d'Heisenberg $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}] = 3i\hbar$ et la relation (3.6), il est facile d'aboutir à l'équation de mouvement qui décrit l'oscillateur harmonique

$$E\phi = \left[\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\boldsymbol{r}^2 - \frac{3}{2}\hbar\omega\right]\phi \tag{3.21}$$

3.3 Oscillateur de DKP dans l'espace phase non-commutatif

Nous allons maintenant étudier l'équation de mouvement qui décrit l'oscillateur DKP .Pour cela nous allons introduit le couplage non minimale ci-dessous

$$\hat{\boldsymbol{p}} \rightarrow \hat{\boldsymbol{p}} + im\omega\eta^0\hat{\boldsymbol{r}} \tag{3.22}$$

Après développement et simplification, on aboutit à ce système d'équations

$$\begin{aligned}
&-i\hbar k A_x + (\hat{p}_x - im\omega\hat{x})\phi = 0,\\
&-i\hbar k A_y + (\hat{p}_y - im\omega\hat{y})\phi = 0,\\
&-i\hbar k A_z + (\hat{p}_z - im\omega\hat{z})\phi = 0,\\
&-i\hbar k\theta - E\phi = 0,\\
&-i\hbar k\varphi - m\phi = 0,\\
&(\hat{p}_x + im\omega\hat{x})A_x + (\hat{p}_y + im\omega\hat{y})A_y + (\hat{p}_z + im\omega\hat{z})A_z + m\theta + E\varphi - -i\hbar k\phi = 0,
\end{aligned} \tag{3.23}$$

d'une façon plus explicite, ce système se réduit à

$$\begin{aligned}
&i\hbar k\boldsymbol{A} = (\hat{\boldsymbol{p}} - im\omega\hat{\boldsymbol{r}})\phi,\\
&-i\hbar k\theta = E\phi,\\
&-i\hbar k\varphi = m\phi,\\
&(\hat{\boldsymbol{p}} + im\omega\hat{\boldsymbol{r}}).\boldsymbol{A} + m\theta + E\varphi - -i\hbar k\phi = 0.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

En éliminant θ, φ et $\boldsymbol{A}$ en faveur de ϕ et en multipliant par$i\hbar k$, on arrivera à cette équation

$$\left[(\hat{\boldsymbol{p}} + im\omega\hat{\boldsymbol{r}}).(\hat{\boldsymbol{p}} - im\omega\hat{\boldsymbol{r}}) - 2mE + \hbar^2k^2\right]\phi = 0. \tag{3.25}$$

Le premier terme de l'équation (3.25), se développe comme suit

$$(\hat{p}_i + im\omega\hat{r}_i).(\hat{p}_i - im\omega\hat{r}_i) = \hat{p}_i.\hat{p}_i + im\omega\left(\hat{r}_i.\hat{p}_i - \hat{p}_i.\hat{r}_i\right) + m^2\omega^2\hat{r}_i.\hat{r}_i, \tag{3.26}$$

où $i = 1, 2, 3$.

Pour évaluer les termes de l'équation (3.26), on va utiliser les relations de la non commutativité données par (2.42). Tout d'abord en calculant le premier terme

$$\begin{aligned}
\hat{p}_i.\hat{p}_i &= \left(p_i + \tfrac{1}{2\hbar}\eta_{ij}r_j\right)\left(p_i + \tfrac{1}{2\hbar}\eta_{ij}r_j\right)\\
&= p_i^2 + \tfrac{1}{2\hbar}\eta_{ij}p_ir_j + \tfrac{1}{2\hbar}\eta_{ij}r_jp_i + \tfrac{1}{4\hbar^2}\left(\eta_{ij}r_j\right)^2,
\end{aligned} \tag{3.27}$$

avec $\eta_{ij} = \epsilon_{ijk}\eta_k$ $(i, j, k = 1, 2, 3)$,et sachant que

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_k = \epsilon_{ijk}A_iB_j \tag{3.28}$$

et

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = -(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}), \tag{3.29}$$

où $\boldsymbol{A}$ et$\boldsymbol{B}$ sont deux vecteurs quelconque.

Alors, on simplifie l'équation (3.27) comme suit

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2\hbar}\eta_{ij}p_ir_j &= \tfrac{1}{2\hbar}\epsilon_{ijk}\eta_kp_ir_j \\ &= \tfrac{1}{2\hbar}\eta_k\epsilon_{ijk}p_ir_j \\ &= \tfrac{1}{2\hbar}\eta_k(p\times r)_k \\ &= -\tfrac{1}{2\hbar}\eta_k(r\times p)_k\end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2\hbar}\eta_{ij}p_ir_j &= \tfrac{1}{2\hbar}\epsilon_{ijk}\eta_kr_jp_i \\ &= -\tfrac{1}{2\hbar}\eta_k\epsilon_{jik}r_jp_i \\ &= -\tfrac{1}{2\hbar}\eta_k\epsilon_{ijk}r_ip_j \\ &= -\tfrac{1}{2\hbar}\eta_k(r\times p)_k\end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}\eta_{ij}r_j &= \epsilon_{ijk}\eta_kr_j \\ &= (\eta\times r)_i \\ &= -(r\times\eta)_i\end{aligned} \tag{3.32}$$

En combinant ces résultats, on aura

$$\hat{p}_i.\hat{p}_i = p_i^2 - \frac{1}{\hbar}\eta_k(r\times p)_k + \frac{1}{4\hbar^2}(r\times\eta)_i^2 \tag{3.33}$$

Ensuite, en utilisant la troisième relation de (2.40), le deuxième terme de l'équation (3.26) devient

$$(\hat{r}_i.\hat{p}_i - \hat{p}_i.\hat{r}_i) = i\hbar((1+\frac{\boldsymbol{\theta.\eta}}{4\hbar^2})\delta_{ii} - \frac{\eta_i\theta_i}{4\hbar^2}) \tag{3.34}$$

avec $\delta_{ii} = 3$ et $\eta_i\theta_i = \theta_i\eta_i = \boldsymbol{\theta.\eta}$.

L'équation (3.34), s'écrit

$$(\hat{r}_i.\hat{p}_i - \hat{p}_i.\hat{r}_i) = 3i\hbar + i\frac{\boldsymbol{\theta.\eta}}{2\hbar} \tag{3.35}$$

Enfin, le troisième terme de (3.26) se laisse calculer de sorte que

$$\begin{aligned}\hat{r}_i.\hat{r}_i &= \left(r_i - \tfrac{1}{2\hbar}\theta_{ij}p_j\right)\left(r_i - \tfrac{1}{2\hbar}\theta_{ij}p_j\right) \\ &= r_i^2 - \tfrac{1}{2\hbar}\theta_{ij}r_ip_j - \tfrac{1}{2\hbar}\theta_{ij}p_jr_i + (\tfrac{1}{2\hbar}\theta_{ij}p_j)^2\end{aligned} \tag{3.36}$$

Avec $\theta_{ij} = \epsilon_{ijk}\theta_k$ et en utilisant les identités (3.28)et(3.29), on trouve

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2\hbar}\theta_{ij}r_i p_j &= \tfrac{1}{2\hbar}\epsilon_{ijk}\theta_k r_i p_j \\ &= \tfrac{1}{2\hbar}\theta_k(r\times p)_k \end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2\hbar}\theta_{ij}p_j r_i &= \tfrac{1}{2\hbar}\epsilon_{ijk}\theta_k p_j r_i \\ &= -\tfrac{1}{2\hbar}\epsilon_{jik}\theta_k p_j r_i \\ &= -\tfrac{1}{2\hbar}\theta_k\epsilon_{ijk}p_i r_j \\ &= -\tfrac{1}{2\hbar}\theta_k(p\times r)_k \\ &= \tfrac{1}{2\hbar}\theta_k(r\times p)_k \end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned} \theta_{ij}p_j &= \epsilon_{ijk}\theta_k p_j \\ &= (\theta\times p)_i \\ &= -(p\times\theta)_i \end{aligned} \tag{3.39}$$

En combinant les relations (3.37) , (3.38) et (3.39), on obtient

$$\hat{r}_i.\hat{r}_i = r_i^2 - \frac{1}{\hbar}\theta_k(r\times p)_k + \frac{1}{4\hbar^2}(p\times\theta)_i^2 \tag{3.40}$$

La substitution des relations (3.33), (3.35)et (3.40), donne

$$\begin{aligned} (\hat{p}_i + im\omega\hat{r}_i).(\hat{p}_i - im\omega\hat{r}_i) = [&p_i^2 + m^2\omega^2 r_i^2 - 3m\omega\hbar \\ &- \tfrac{1}{\hbar}\left(\eta_k + m^2\omega^2\theta_k\right).(r\times p)_k - \tfrac{m\omega}{2\hbar}\boldsymbol{\theta}.\boldsymbol{\eta} \\ &+ \tfrac{1}{4\hbar^2}((r\times\eta)_i^2 + m^2\omega^2(p\times\theta)_i)^2)\ ] \end{aligned} \tag{3.41}$$

En insérant ce résultat dans (3.25) et en utilisant la relation(2.60), on obtient

$$\begin{aligned} 2mE\phi = [&p_i^2 + m^2\omega^2 r_i^2 - 3m\omega\hbar - \tfrac{1}{\hbar}\left(\eta_k + m^2\omega^2\theta_k\right).L_k \\ &+ \tfrac{1}{4\hbar^2}((r\times\eta)_i^2 + m^2\omega^2(p\times\theta)_i{}^2) - \tfrac{m\omega}{2\hbar}\boldsymbol{\theta}.\boldsymbol{\eta} + \hbar^2k^2]\phi, \end{aligned} \tag{3.42}$$

cette équation peut s'écrire comme suit

$$\begin{aligned} E\phi = \tfrac{1}{2m}[&\boldsymbol{p}^2 + m^2\omega^2\boldsymbol{r}^2 - 3m\omega\hbar - \tfrac{1}{\hbar}\left(\boldsymbol{\eta} + m^2\omega^2\boldsymbol{\theta}\right).\boldsymbol{L} \\ &+ \tfrac{1}{4\hbar^2}((\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\eta})^2 + m^2\omega^2(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\theta})^2 - \tfrac{m\omega}{2\hbar}\boldsymbol{\theta}.\boldsymbol{\eta} + \hbar^2k^2]\phi \end{aligned} \tag{3.43}$$

Chapitre 4

Approche galiléenne pure

En plus, de la méthode de Levy-Leblond utilisée pour la linéarisation de l'équation de Schrödinger, cette dernière peut être linéarisée en suivant une autre manière basée sur la méthode de Duffin-Kemmer-Petiau.

L'équation d'onde linéarisée est donné par [12]

$$\left(\boldsymbol{K.p} + iK_4E + 2miL\right)\psi = 0, \tag{4.1}$$

avec $\boldsymbol{K}\left(K_1, K_2, K_3\right), K_4$ et L sont des opérateurs indépendants des coordonnées. Ses opérateurs sont des matrices carrées, qui s'expriment sous cette forme :

$$\begin{gathered}
K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, K_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
L = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{gathered} \tag{4.2}$$

Et le spineur $\psi(\boldsymbol{r}, t)$, prend la forme ci-dessous

$$\psi(\boldsymbol{r},t) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \varphi \end{pmatrix}, \text{avec } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

4.1 Oscillateur harmonique commutatif

Une particule de masse m oscille à une fréquence angulaire ω sous l'influence d'un potentiel harmonique, dont l'hamiltonien est

$$H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \quad (4.4)$$

Dans cette section, on va analyser l'oscillateur harmonique en procédant par analogie au cadre relativiste du chapitre 1, et cela en utilisant l'équation d'onde linéaire (4.1).

En introduisant le potentiel de l'oscillateur harmonique via la substitution suivante :

$$\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p} - im\omega\eta_4\boldsymbol{r}, \quad (4.5)$$

où ω est la fréquence d'oscillation , η_4 est une matrice 4×4 définit par :

$$\eta_4 = 2K_4^2 - 1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Avec cette substitution l'équation (4.1), devient

$$\left(\boldsymbol{K}.\left(\boldsymbol{p} - im\omega\eta_4\boldsymbol{r}\right) + 2miL\right)\psi = K_4\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (4.7)$$

Les quatre matrices K_i et K_4 peuvent s'écrire :

$$K_i = \begin{pmatrix} \tilde{0} & \rho^i \\ \rho_T^i & 0 \end{pmatrix}, K_4 = \begin{pmatrix} \tilde{0} & \hat{0} \\ \hat{0}^T & 1 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Avec $\tilde{0}, \hat{0}, \hat{0}^T$ sont respectivement des matrices zéro d'ordre $3 \times 3, 3 \times 1, 1 \times 3$, et

$$\rho^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \rho^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \rho^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{4.9}$$

et ρ^i_T est la matrice transposé de ρ^i.

Le terme $(\boldsymbol{p} - im\omega\eta_4\boldsymbol{r})$, se développe comme suit :

$$p_i - im\omega\eta_4 r_i = \begin{pmatrix} (p_i + im\omega r_i)\,\mathbf{1}_{3\times 3} & \hat{0} \\ \hat{0}^T & (p_i - im\omega r_i) \end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

avec l'adoptation des ces nouvelles relations les termes constituants l'équation (4.7), s'expriment de la façon suivante :

$$\boldsymbol{K}.(\boldsymbol{p} - im\omega\eta_4\, \boldsymbol{r}) \equiv \begin{pmatrix} \tilde{0} & \rho^i \\ \rho^i_T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (p_i + im\omega r_i)\,\mathbf{1}_{3\times 3} & \hat{0} \\ \hat{0}^T & (p_i - im\omega r_i) \end{pmatrix}, \tag{4.11}$$

et comme par exemple $\rho^i_T\,(p_i + im\omega r_i) \equiv (p_i + im\omega r_i)$, donc :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}.(\boldsymbol{p} - im\omega\eta_4\boldsymbol{r})\psi &= \begin{pmatrix} \tilde{0} & (\boldsymbol{p} - im\omega\boldsymbol{r}) \\ (\boldsymbol{p} + im\omega\boldsymbol{r}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\boldsymbol{p} - im\omega\boldsymbol{r})\,\varphi \\ (\boldsymbol{p} + im\omega\boldsymbol{r})\boldsymbol{A} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.12}$$

Pour la matrice K_4 et la matrice $L = K_4 - \mathbf{1}$,, on aura

$$K_4 \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \varphi \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \tilde{0} & \hat{0} \\ \hat{0}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}\varphi \end{pmatrix}, \tag{4.13}$$

$$L \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \varphi \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} \tilde{0} & \hat{0} \\ \hat{0}^T & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1_{3\times 3} & \hat{0} \\ \hat{0}^T & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \varphi \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

$$= - \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

L'insertion des relations (4.12)et(4.13) dans (4.15) donne :

$$\left(\begin{pmatrix} (\boldsymbol{p} - im\omega\boldsymbol{r})\,\varphi \\ (\boldsymbol{p} + im\omega\boldsymbol{r})\boldsymbol{A} \end{pmatrix} + 2mi \begin{pmatrix} -\boldsymbol{A} \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}\varphi \end{pmatrix}, \tag{4.16}$$

finalement, on aboutit à un système de deux équations couplées :

$$\begin{array}{l} (\boldsymbol{p} - im\omega\boldsymbol{r})\,\varphi = 2mi\boldsymbol{A}, \\ (\boldsymbol{p} + im\omega\boldsymbol{r})\,.\,\boldsymbol{A} = \frac{\partial}{\partial t}\varphi, \end{array} \tag{4.17}$$

en éliminant la composante vectorielle $\boldsymbol{A}$ en faveur de φ,on obtient

$$(\boldsymbol{p} + im\omega\boldsymbol{r})\,.\,(\boldsymbol{p} - im\omega\boldsymbol{r})\,\varphi = 2mi\frac{\partial}{\partial t}\varphi \tag{4.18}$$

En évaluant le coté gauche de l'équation (4.18), on arrive

$$\left(\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\boldsymbol{r}^2 - \frac{3}{2}\hbar\omega\right)\varphi = E\varphi, \tag{4.19}$$

ce qui caractérise l'oscillateur harmonique usuel en mécanique quantique. On remarque aussi que ce dernier résultat est exactement similaire à celui obtenue dans le chapitre1, lorsque on effectue la limite non relativiste de l'oscillateur DKP.

4.2 Oscillateur harmonique non-commutatif

Nous allons maintenant, utiliser l'algèbre de la non commutativité énoncé dans le deuxième chapitre afin de trouver l'équation de mouvement associé à l'oscillateur harmonique.

L'équation (4.1) s'écrit :

$$(\boldsymbol{K}.\hat{\boldsymbol{p}} + 2miL)\,\psi = K_4\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{4.20}$$

Pour cela, on va injecter le couplage non minimale $(\hat{\boldsymbol{p}} - im\omega\eta_4\hat{\boldsymbol{r}})$ dans l'équation(4.20), on trouve

$$(\boldsymbol{K}.\,(\hat{\boldsymbol{p}} - im\omega\eta_4\hat{\boldsymbol{r}}) + iK_4E + 2miL)\,\psi = 0 \tag{4.21}$$

En remplaçant les expressions de $\boldsymbol{K}$, K_4 et L dans l'équation (4.21), on obtient un système d'équations couplées en φ et $\boldsymbol{A}$

$$\begin{array}{l} (\hat{\boldsymbol{p}} - im\omega\hat{\boldsymbol{r}})\,\varphi = 2mi\boldsymbol{A}, \\ (\hat{\boldsymbol{p}} + im\omega\hat{\boldsymbol{r}})\,.\boldsymbol{A} = -iE\varphi, \end{array} \tag{4.22}$$

afin de découpler le système d'équations, on multiplie la deuxième équation de (4.22) par $2mi$ et en utilisant la première équation de (4.22), on trouve

$$\left(\hat{p}_i + im\omega\hat{r}_i\right).\left(\hat{p}_i - im\omega\hat{r}_i\right)\varphi = 2mE\varphi, \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{4.23}$$

La partie gauche de l'équation (4.23), se laisse développer de telle sorte à avoir

$$(\hat{p}_i + im\omega\hat{r}_i).(\hat{p}_i - im\omega\hat{r}_i) = \hat{p}_i.\hat{p}_i + im\omega\left(\hat{r}_i.\hat{p}_i - \hat{p}_i.\hat{r}_i\right) + m^2\omega^2\hat{r}_i.\hat{r}_i \tag{4.24}$$

Pour calculer les termes de l'équation (4.24), nous allons faire appel aux relations(2.40) et (2.42) ,cités dans le chapitre 2 , on aura donc

$$\begin{array}{c} \hat{p}_i.\hat{p}_i = p_i^2 - \frac{1}{\hbar}\eta_k(r \times p)_k + \frac{1}{4\hbar^2}\left(r \times \eta\right)_i^2 \\ \left(\hat{r}_i.\hat{p}_i - \hat{p}_i.\hat{r}_i\right) = 3i\hbar + i\frac{\boldsymbol{\theta}.\boldsymbol{\eta}}{2\hbar} \\ \hat{r}_i.\hat{r}_i = r_i^2 - \frac{1}{\hbar}\theta_k(r \times p)_k + \frac{1}{4\hbar^2}(p \times \theta)_i^2. \end{array} \tag{4.25}$$

La combinaison de ces relations donne

$$\begin{array}{r} 2mE\varphi = [p_i^2 + m^2\omega^2 r_i^2 - 3m\omega\hbar - \frac{1}{\hbar}\left(\eta_k + m^2\omega^2\theta_k\right).L_k \\ + \frac{1}{4\hbar^2}((r \times \eta)_i^2 + m^2\omega^2(p \times \theta)_i{}^2) - \frac{m\omega}{2\hbar}\boldsymbol{\theta}.\boldsymbol{\eta}]\varphi. \end{array} \tag{4.26}$$

D'une manière plus condensée et en utilisant la définition du moment angulaire, l'équation (4.26), s'écrit

$$\begin{array}{r} E\varphi = \frac{1}{2m}[\boldsymbol{p}^2 + m^2\omega^2\boldsymbol{r}^2 - 3m\omega\hbar - \frac{1}{\hbar}\left(\boldsymbol{\eta} + m^2\omega^2\boldsymbol{\theta}\right).\boldsymbol{L} \\ + \frac{1}{4\hbar^2}((\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\eta})^2 + m^2\omega^2(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{\theta})^2) - \frac{m\omega}{2\hbar}\boldsymbol{\theta}.\boldsymbol{\eta}]\varphi. \end{array} \tag{4.27}$$

Nous allons maintenant prendre le cas ou

$$\boldsymbol{\theta} = \theta_k = (0, 0, \theta), \boldsymbol{\eta} = \eta_k = (0, 0, \eta). \tag{4.28}$$

On utilise ces deux relations, on trouve que

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\eta})^2 &= (y\eta\boldsymbol{i} - x\eta\boldsymbol{j})^2 \\ &= \left(y^2 + x^2\right)\eta^2 \end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{\theta})^2 &= (p_y\theta\boldsymbol{i} - p_x\theta\boldsymbol{j})^2 \\ &= \left(p_x^2 + p_y^2\right)\theta^2 \end{aligned} \tag{4.30}$$

$$\left(\boldsymbol{\eta} + m^2\omega^2\boldsymbol{\theta}\right).\boldsymbol{L} = \left(\eta + m^2\omega^2\theta\right)L_z \tag{4.31}$$

En insérant ces relations dans l'équation (4.27), on aboutit à

$$\begin{aligned} E\varphi = [&\left(\tfrac{1}{2m} + \tfrac{m\omega^2\theta^2}{8\hbar^2}\right)\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \left(\tfrac{m\omega^2}{2} + \tfrac{\eta^2}{8m\hbar^2}\right)\left(x^2 + y^2\right) \\ &- \tfrac{1}{2m\hbar}\left(\eta + m^2\omega^2\theta\right) L_z - \omega\hbar_{eff} - \tfrac{\omega\hbar}{2} + \tfrac{m\omega^2}{2} z^2 + \tfrac{p_z^2}{2m}]\varphi \end{aligned} \tag{4.32}$$

Ce dérnier résultat coincide exactement avec celui de la limite non relativiste de l'équation (2.67) traité dans le chapitre précèdent.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'oscillateur de Duffin-Kemmer-Petiau. Notre étude a été effectuée pour une particule scalaire dans le cadre de la mécanique quantique standard (MQS) et dans le cadre d'un espace des phases non-commutatif (NC).

Dans le premier chapitre, une introduction à trois équations d'ondes relativiste a été présentée : L'équation de Klein-Gordon (spin zéro), l'équation de Feshbach-Villars (spin zéro) et l'équation de Dirac (spin un demi).

Le chapitre deux a été consacré à l'équation DKP. L'étude de l'oscillateur harmonique dans le cadre non-commutatif a montré l'apparition d'un terme en plus qui dépend des paramètres de la non-commutativité de l'espace des phases. Lorsque ces derniers s'annulent, on retrouve bien l'oscillateur DKP relativiste standard. Nous avons également calculé la limite non-relativiste en MQS et dans le cadre de la MQNC.

Au chapitre trois, nous avons examiné l'oscillateur DKP dans le contexte de la covariance Galiléenne. Nous avons pu reproduire les résultats obtenus dans la littérature dans le cadre standard (MQS) ainsi que dans le cas non-commutatif. La comparaison avec la limite non-relativiste abordée au chapitre précédent, a été concluante puisque les équations de mouvement obtenues coïncident parfaitement.

Le chapitre quatre vient compléter le traitement de l'oscillateur DKP en suivant cette fois une approche purement non-relativiste basée sur l'équation de Schrödinger. Après avoir reproduit une forme linéaire de l'équation d'onde de Schrödinger, nous avons procédé à l'étude de l'oscillateur harmonique en faisant appel au même type de substitution utilisée dans les chapitres précédents. le calcul dans le cadre de la MQS a conduit au résultat déjà dérivé dans le cadre de la Covariance Galiléenne. Dans le cas de la MQNC, nons avons pu retrouver un résultat identique au résultat obtenu précédemment dans le cas de la limite NR de l'oscillateur DKP

Bibliographie

[1] A. Messiah : Mécanique Quantique, Tome 2 (Dunod edition 1995).

[2] F. Schwabl : Advanced Quantum Mechanics, 4th Edition,Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2008.

[3] H. Feshbach and F. Villars, Rev. Mod. Phys **30**, 24 (1958)

[4] W. Greiner, Relativistic Quantum Mechanics : Wave Equations (Springer, Berlin, 1990)

[5] J. D. Bjorken and S.D. Drell, Relativistic Quantum Mechanics, McGraw-Hill,New York (1964)

[6] R. J .Duffin, phys.Rev 54,1114(1938).

[7] N. Kemmer, Proc.Roy.Soc.Lond.A (952), 91-116 (1939).

[8] G. Petiau : Acad.Roy.de Bel.16(2),**3** (1936).

[9] W. Greiner, Quntum Mechanics : An Introduction (Springer, Berlin, 1989)..

[10] A. Proca, Comp. Ren. Acad. Sci. Paris 202, 1366 (1936).

[11] Y. Nedjadi et R. C. Barrett J. Phys.A **27**, 4301 (1994).

[12] Y. Kasri, Thèse de Doctorat, Laboratoire de Physique Theorique (2010)

[13] Y. Nedjadi, R.C.Barret, J. Phys G **19** (1993) 87.

[14] M. Moshinsky and A. Szczepaniak, J. phys. A 22,L817 (1989).

[15] M. Falek, M. Merad : Commun. Theor. Phys.**50**,587-592 (2008)..

[16] O. Bertolami, J.G Rosa, de Aragao, C. M. L.,etal. :Phys.Rev.D **72**,025010 (2005).

[17] G. R .de Melo, de.Montigny, P. J . Pompeia, E.S. Santos : Int. J. Theor. Phys. **52**(2), 441 (2013).

[18] Li. Kang, W. Jianhua, C. Chiyi : Mod. Phys. Lett. A.**20**(28),2165(2005).

[19] Z. H. Yang, C.Y. Long, S.J. Qin, Z.W. Long. : Int.J. Theor.Phys.**49**,644(2010).

[20] G. Guo, C.Long, Z.Yang, S. Quin :DKP oscillator in noncommutative phase space [J]. Can. J.Phys.**87,**989-993 (2009)**.**

[21] G. R. de Melo, M . de. Montigny, E. S. Santo : Int.J. Theor.Phys.**51**(8),2524(2012).

[22] M. de Montigny,F. C. Khanna,A. E .Santana and E. S. Santos : J. Phys. A : Math. Gen.**34**,8901,(2001)

[23] L. M. Abreu, F. J. S. Ferreira and E.S. Santos :Braz.J.Phys.**40**(2), (2010).

[24] M. de Montigny, F. C. Khanna, A. E . Santana, E. S. Santos and J. D. M. Vianna : J. Phys.A :Math. Gen.**33** L273-8 (2000).