

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Abderrahmane Mira de Béjaïa



Faculté des Sciences Exactes  
Département de Physique

## THÈSE

Présentée par

Naima MESKINE

Pour l'obtention du grade de

Docteur en Sciences

Filière : Physique

Option : Physique Théorique

Thème

---

*Contribution à la Modélisation Analytique et Numérique  
des Instabilités de Pompage dans les Compresseurs Axiaux*

---

Soutenue le 29 09 2022

Devant le jury composé de :

Mr SADAoui Djamel	Professeur	U. Béjaïa	Président
Mr Faïçal NAIT-BOUDA	Professeur	U. Béjaïa	Examineur
Mme Nawel AMATOUSSE	Professeur	U. Béjaïa	Examinatrice
Mr Mohamed ZAMOUM	Professeur	U. Boumerdes	Examineur
Mr Mohand KESSAL	Professeur	U. Boumerdes	Rapporteur
Mr Sofiane KHELLADI	Professeur	ENSAM-Paris	Co-Promoteur

Année scolaire : 2022/2023

*Je dédie cette thèse*

À mes parents,  
À ma très chère sœur,  
À mes très chers frères et à toute ma famille.

# Remerciements

Mes plus grands remerciements vont à mon encadreur, le professeur **Mohand KESSAL** de m'avoir guidée dans la réalisation de cette thèse et du soutien scientifique et moral qu'il m'a apporté.

Je remercie vivement le professeur **Djamila SEBA** pour l'aide fournie pendant ces deux dernières années. Ses commentaires constructifs, son ouverture d'esprit ainsi que son sens critique m'ont permis d'apprendre et de débloquer des situations difficiles rencontrées pendant la réalisation de cette thèse.

Je voudrai aussi adresser mes vifs remerciements ainsi que ma reconnaissance à mon Co-directeur de thèse, professeur **Sofiane KHELLADI** de l'ENSAM de Paris, qui m'a accueilli dans son laboratoire Dynamique des fluides.

Je voudrais aussi remercier tous les membres des deux laboratoires, Génie Physique des Hydrocarbures. Un grand merci notamment au professeur **Abdelkader NOUR**, Directeur du Laboratoire Dynamique des Moteurs et Vibroacoustique pour ses précieux conseils.

Mes sincères remerciements au Professeur **Djamel SADAOUI** pour avoir accepté de présider ce jury. Je remercie le Professeur **Mohamed ZAMOUM**, le Professeur **Nawel AMATOUSSE** et le Professeur **Faïçal NAIT-BOUDA** d'avoir accepté de faire partie du jury de ma soutenance et d'examiner mon travail.

# Résumé

**D**ans cette thèse, une étude paramétrique et qualitative a été réalisée à l'aide des modèles de Greitzer pour un compresseur axial à un seul étage, dans le but de connaître le comportement du système de compression pendant l'apparition des phénomènes d'instabilités aérodynamiques. Les effets du coefficient de la vanne de contrôle et du paramètre de Greitzer sur ces instabilités sont analysés et comparés. Une extension du modèle de Greitzer à cinq équations différentielles est présentée. Ainsi qu'une expression générale développée pour la courbe caractéristique du compresseur, adaptée au système de compression en mode de fonctionnement, est proposée. La validation de cette expression a été obtenue par une comparaison avec celle de Greitzer. Une solution approchée lorsque le système de compression se déplace vers le point de bifurcation de Hopf pendant le pompage est obtenue.

**Mots clés :** Compresseur, pompage, décrochage tournant, système de compression, bifurcation, bifurcation de Hopf.

---

**Abstract :** In this thesis, a parametric and qualitative study was carried out using Greitzer models with axial compressor, in order to know the behavior of the compression system during the aerodynamic instabilities appearance. The control valve coefficient and the Greitzer parameter effects on these instabilities are analyzed and compared. An extension of the Greitzer model to five differential equations is presented. As well as a general expression developed for the compressor's characteristic curve, adapted to the compression system in operating mode, is proposed. The

validation of this expression was obtained by comparison with that of Greitzer. An approximate solution, when the compression system moves towards the Hopf bifurcation point during surge, is obtained.

**Key words :** Compressor, surge, rotating stall, compression system, bifurcation, Hopf bifurcation.

ملخص : في هذه الرسالة أجريت دراسة بارامترية ونوعية باستخدام نماذج جريتر ذات الضاغط المحوري لمعرفة سلوك نظام الانضغاط أثناء ظهور عدم الاستقرار الديناميكي الهوائي. تم تحليل ومقارنة تأثيرات معامل صمام التحكم ومعامل جريتر على حالات عدم الاستقرار هذه. كما عرض امتداد لنموذج جريتر إلى خمس معادلات تفاضلية. بالإضافة إلى التعبير العام الذي تم تطويره لنحني خصائص الضاغط، والذي تم تكييفه مع نظام الضغط في وضع التشغيل. تم الحصول على التحقق من صحة هذا التعبير من خلال المقارنة مع تلك الخاصة بجريتر. تم الحصول على حل تقريبي عندما يتحرك نظام الضغط باتجاه نقطة تشعب هوبف أثناء زيادة التيار.

الكلمات المفتاحية : ضاغط، ضخم، توقف دوار، نظام ضغط، تشعب، تشعب هوبف

# Nomenclature

$a_0$	: Vitesse du son [m /s]
$A$	: Matrice Jacobéenne
$A_c$	: Surface du débit de compresseur
$A_t$	: Surface du débit de la vanne de contrôle
$A_0$	: Paramètre représente les caractéristiques physiques du système
$B$	: Paramètre de Greitzer
$B_0$	: Coefficient lié à la géométrie du système
$C$	: Augmentation de la pression du compresseur [Pa]
$C_0$	: Coefficient représentant les caractéristiques physiques de l'écoulement
$C(m_c)$	: Pression dans le compresseur à une vitesse donnée [Pa]
$C(m_t)$	: Pression dans la vanne de contrôle [Pa]
$C_{ss}$	: Caractéristique du compresseur en régime permanent
$D_0$	: Coefficient lié aux caractéristiques physiques et géométriques du système
$F$	: Chute de la pression au niveau de la vanne de contrôle
$F_0$	: Valeur de la chute de pression à l'état d'équilibre
$G$	: Constante définissant les caractéristiques géométriques
$H$	: Demi hauteur de la caractéristique du compresseur
$J$	: Amplitude au carré de l'amplitude du décrochage tournant
$K$	: Inverse du coefficient de la vanne de contrôle sans dimension
$K_1$	: Coefficient de perte dans la vanne de contrôle sans dimension

---

$l_c$	: Longueur du compresseur avec les conduits [m]
$L_c$	: Longueur du compresseur avec le conduit sans dimension $l_c/r$
$l_T$	: Longueur de la vanne de contrôle [m]
$L_T$	: Longueur de la vanne de contrôle sans dimension $l_T/r$
$m_c$	: Débit massique à travers le compresseur [ $m^3.s^{-1}$ ]
$m_r$	: Débit massique de refoulement du compresseur [ $m^3.s^{-1}$ ]
$m_{vol}^e$	: Débit volumique refoulé d'équilibre [ $m^3.s^{-1}$ ]
$m^e$	: Débit de refoulement d'équilibre [ $m^3.s^{-1}$ ]
$N$	: Nombre de révolutions du rotor
$P$	: Pression dans le système [Pa]
$P_0$	: Pression dans les conditions ambiantes [Pa]
$P_P$	: Pression du Plénum [Pa]
$\Delta P$	: Différence de pression [Pa]
$r$	: Rayon moyen du rotor
$R$	: Constante thermodynamique du gaz [ $J.Kg^{-1}.K^{-1}$ ]
$S_t$	: Section de la conduite [ $m^2$ ]
$t$	: Temps [s]
$T_0$	: Température de l'entrée [K]
$T^e$	: Température à l'état d'équilibre [K]
$U_t$	: Vitesse tangentielle du compresseur [m /s]
$V_p$	: Volume dans le plénum
$W$	: La demi largeur de la caractéristique du compresseur
$Z$	: Coefficient de compressibilité du gaz (déviation par rapport aux gaz parfait)

**Symboles grecques**

$\alpha$	: Pente de la courbe
$\gamma$	: Rapport de la chaleurs spécifiques à pression et à volume constants
$\zeta$	: Temps sans dimension
$\eta_P$	: Rendement poly-tropique
$\theta$	: l'angle de la phase
$\lambda$	: Valeurs propres de la matrice jacobéenne
$\rho$	: Densité du gaz [ $Kg/m^3$ ]
$\rho^e$	: Masse volumique d'état de l'équilibre
$\rho_0$	: Vitesse des valeurs propre sur l'axe imaginaire suivant le paramètre de la bifurcation
$\rho_1$	: Partie réelle de $\rho_0$ de la valeur du paramètre de bifurcation
$\tau$	: Constante du temps du compresseur
$\Phi$	: Coefficient débit massique à travers le compresseur
$\Phi_t$	: Coefficient débit massique à travers la vanne de contrôle
$\Phi_0$	: le débit du point d'équilibre
$\Psi$	: Augmentation de pression dans le plénum
$\Psi_c$	: Caractéristique du compresseur
$\Psi_{css}$	: Augmentation de pression dans le compresseur en régime permanent
$\Psi_0$	: Pression au point d'équilibre
$\omega$	: Vitesse de rotation du compresseur en [tr/min]
$\omega_H$	: Fréquences d'Helmholtz
$\omega_0$	: Valeur propre purement imaginaire

**Indices**

c	: Compresseur
p	: Plénum
t	: Vanne de contrôle



# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>iii</b>
<b>Nomenclature</b>	<b>v</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Synthèse Bibliographique et formulation mathématique</b>	<b>6</b>
1.1 Introduction . . . . .	6
1.2 Contexte Bibliographique . . . . .	6
1.3 Introduction aux systèmes de compression et leurs instabilités . . . . .	11
1.4 Description des compresseurs . . . . .	11
1.4.1 Répartition des compresseurs . . . . .	12
1.4.1.1 Compresseurs volumétriques . . . . .	12
1.4.1.2 Compresseurs dynamiques (Turbo- compresseur) . . . . .	13
1.4.1.2.1 Compresseurs centrifuges . . . . .	13
1.4.1.2.2 Compresseurs axiaux . . . . .	14
1.4.1.3 Courbe caractéristique d'un compresseur . . . . .	16
1.5 Instabilités dans les compresseurs . . . . .	18
1.5.1 Décrochage tournant . . . . .	19
1.5.2 Pompage . . . . .	20

---

1.6	Revue sur la théorie de bifurcation . . . . .	22
1.6.1	Systèmes dynamiques non linéaires . . . . .	23
1.6.1.1	Système dynamique autonome . . . . .	24
1.6.1.2	Bifurcations dans un système dynamique autonome . . . . .	24
1.6.1.3	Bifurcation de Hopf . . . . .	25
	<b>Définition 1.3.1</b> . . . . .	26
	<b>Définition 1.3.2</b> . . . . .	27
	<b>Théorème 1.3.1</b> . . . . .	27
1.7	Formulation Mathématique . . . . .	28
1.7.1	Introduction . . . . .	28
1.7.2	Formulation du système de compression . . . . .	28
1.7.2.1	Modèle de Greitzer . . . . .	29
<b>2</b>	<b>Etude paramétrique des phénomènes d'instabilité et leurs transitions</b>	<b>33</b>
2.1	Modélisation du système de compression . . . . .	33
2.1.1	Modèle géométrique . . . . .	33
2.1.2	Modèle analytique . . . . .	34
2.1.3	Point d'équilibre . . . . .	35
2.2	Résultats et discussion . . . . .	36
2.3	Conclusion . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Analyse de bifurcation locale d'un paramètre dans le modèle de Greitzer avec une caractéristique générale du compresseur</b>	<b>51</b>
3.1	Modèle réduit de Greitzer . . . . .	52
3.1.1	Équations du système . . . . .	52
3.1.2	Point d'équilibre . . . . .	53
3.1.3	Analyse généralisée de la courbe de performance du compresseur . . . . .	54
3.1.4	Analyse de stabilité linéaire du système planaire de Grietzer . . . . .	56
	<b>Théorème 3.1.1</b> . . . . .	57

---

3.2	Stabilité et bifurcation locale de Hopf . . . . .	59
3.3	Résultats et discussion . . . . .	62
3.4	Conclusion . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Analyse des conditions de stabilité d'un système de compression</b>	<b>69</b>
4.1	Modélisation Mathématiques . . . . .	70
4.1.1	Hypothèses . . . . .	71
4.1.2	Formulation du modèle Mathématique . . . . .	71
4.2	Résultats et Discussion . . . . .	73
4.2.1	Analyse paramétrique du système d'équations (4.1) . . . . .	76
4.3	Conclusion . . . . .	77
	<b>Bibliographie</b>	<b>81</b>

# Table des figures

1.1	Classification des types de compresseurs [7] . . . . .	12
1.2	Rouet de compresseur centrifuge . . . . .	14
1.3	Rotor et Stator d'un compresseur . . . . .	16
1.4	Comparaison entre les compresseurs : axial et centrifuge . . . . .	16
1.5	La courbe caractéristique d'un compresseur [64] . . . . .	17
1.6	Courbes caractéristiques d'un compresseur à plusieurs vitesses [19] . . . . .	17
1.7	Diagramme de l'instabilité dans les turbocompresseurs . . . . .	19
1.8	Types de cellules de décrochage et décrochage tournant . . . . .	20
1.9	Caractéristique du compresseur avec un pompage profond . . . . .	21
1.10	Diagramme de bifurcation . . . . .	26
1.11	Bifurcation Réelle . . . . .	26
2.1	Schéma du système de compression . . . . .	34
2.2	$K_1 = 1, 3$ et $5$ , avec $B = 0.3$ . Condition initiale : $(0.1, 0.8)$ . . . . .	37
2.3	$K_1 = 6, 8$ et $12$ , avec $B = 0.3$ . Conditions initiales : $(0.1, 0.8)$ . . . . .	38
2.4	$K_1 = 13, 15$ et $18$ , avec $B = 0.3$ . Conditions initiales : $(0.1, 0.8)$ . . . . .	39
2.5	$K_1 = 1, 3$ et $5$ , avec $B = 0.6$ . Condition initiale : $(0.1, 0.8)$ . . . . .	40
2.6	$K_1 = 6, 8$ et $12$ , avec $B = 0.6$ . Conditions initiales : $(0.1, 0.8)$ . . . . .	41
2.7	$K_1 = 13, 15$ et $18$ , avec $B = 0.6$ . Conditions initiales : $(0.1, 0.8)$ . . . . .	42
2.8	$K_1 = 1, 3$ et $5$ , avec $B = 1$ . Condition initiale : $(0.1, 0.8)$ . . . . .	43

2.9	$K_1 = 6, 8$ et $12$ , avec $B = 1$ . Conditions initiales : $(0.1, 0.8)$ . . . . .	44
2.10	$K_1 = 13, 15$ et $18$ , avec $B = 1$ . Conditions initiales : $(0.1, 0.8)$ . . . . .	45
2.11	$K_1 = 1, 3$ et $5$ , avec $B = 2$ . Condition initiale : $(0.1, 0.8)$ . . . . .	47
2.12	$K_1 = 6, 8$ et $12$ , avec $B = 2$ . Conditions initiales : $(0.1, 0.8)$ . . . . .	48
2.13	$K_1 = 13, 15$ et $18$ , avec $B = 2$ . Conditions initiales : $(0.1, 0.8)$ . . . . .	49
3.1	Courbe caractéristique de Greitzer et courbe caractéristique proposée [52] . . . . .	55
3.2	Décrochage juste avant pompage $a = 0, b = 1.5, c = 0, B = 1, K = \frac{1}{12}$ et $dt = 0.01$ . . . . .	63
3.3	Portrait de phase du système (3.6a)-(3.6b) pendant le pompage avec $(a, b, c, B, K, \Phi_1, \Psi_1) = (0, 1, 1.5, 1, \frac{1}{12}, -0.55, 1.5)$ et $dt = 0.1$ . . . . .	64
3.4	(a), (b) Évolutions du débit massique et du taux de pression, (c) portrait de phase du système linéarisé (3.6a)-(3.6b) au point de la bifurcation, avec les paramètres choisis : $a = 0, b = 1, c = 1.5, B = 1, K = \frac{1}{8}, L_c = 1.46$ avec conditions initiales : $\Phi_1 = -0.5, \Psi_1 = 1.5$ et $dt = 0.1$ . . . . .	65
3.5	Bifurcation de Hopf dans le système non linéaire (3.6a)-(3.6b) près de $\alpha_{2,crit} = \alpha_2$ , (a) Évolution du débit massique, (b) Évolution du taux de pression, (c) portrait de phase avec bifurcation de Hopf, en prenant $(a, b, c, B, K, \Phi_1, \Psi_1) = (0, 1, 1, 1, \frac{1}{12}, -0.55, 1.5)$ . . . . .	66
3.6	Bifurcation de Hopf dans le système non linéaire (3.6a)-(3.6b) près de $\alpha_{2,crit} > \alpha_2$ , (a) Évolution du débit massique, (b) Évolution du taux de pression, (c) portrait de phase avec bifurcation de Hopf, en prenant $(a, b, c, B, K, \Phi_1, \Psi_1) = (0, 1, 1, 1, \frac{1}{12}, -0.55, 1.5)$ . . . . .	67
3.7	Bifurcation de Hopf dans le système non linéaire (3.6a)-(3.6b) près de $\alpha_{2,crit} < \alpha_2$ , (a) Évolution du débit massique, (b) Évolution du taux de pression, (c) portrait de phase avec bifurcation de Hopf, avec $(a, b, c, B, K, \Phi_1, \Psi_1) = (0, 1, 1, 1, \frac{1}{12}, -0.55, 1.5)$ . . . . .	68
4.1	Schéma de base de l'installation (compresseur et réseaux) . . . . .	70
4.2	L'évolution de la pression dans le plénum pour trois volumes . . . . .	73
4.3	L'évolution du débit $m_r$ au refoulement du compresseur pour trois valeurs de $V_p$ . . . . .	73
4.4	Portrait de phase $P_p$ et $m_r$ pour trois valeurs de volume . . . . .	74
4.5	L'évolution de la pression dans le plénum pour trois longueurs de la tuyauterie . . . . .	74

---

4.6	L'évolution du débit en fonction du temps pour trois longueurs de la tuyauterie . . . . .	75
4.7	Portrait de phase $P$ et $m_r$ pour trois longueurs . . . . .	75
4.8	Portrait de phase $P_p(m_r)$ pour trois valeurs de pente $\alpha$ . . . . .	76
4.9	Le signe du déterminant suivant les valeurs de la pente caractéristique . . . . .	77
4.10	L'évolution de la partie réelle en fonction de $V_p$ . . . . .	78

# Liste des tableaux

2.1 Répartition des valeurs de $B$ , selon quelques valeurs de $K_1$ . . . . .	36
4.1 Les données de base de calcul . . . . .	72

# Introduction générale

L'évolution constatée aux niveaux des applications industrielles, dans le domaine de la production d'énergie ainsi que dans tous les types d'appareils aéronautiques, est liée au développement des systèmes de compression. Ces derniers sont une combinaison de composants essentiels à savoir le compresseur, le plénum et la vanne de contrôle ; dans le but de produire de l'énergie mécanique et des gaz d'échappement à grande vitesse et à haute température. L'histoire du système de compression remonte aux années cinquante et les progrès technologiques se succèdent à ce jour.

Le compresseur est l'élément principal du système de compression pour comprimer du gaz à des pressions très élevées, et exploiter la source d'énergie potentielle qui en résulte pour transporter ces fluides compressibles dans des conduites pour des longues distances vers les grandes stations de compression. Il est aussi l'un des composants fondamentaux pour la production d'énergie destinée à alimenter les installations industrielles et les réseaux de climatisation des bâtiments commerciaux. Il existe généralement quatre types de compresseurs : alternatif, rotatif, centrifuge et axial. Les compresseurs rotatifs fonctionnent selon le principe de la réduction du volume de gaz, et ne seront pas traités dans cette thèse. Les compresseurs dynamiques, centrifuge et axiaux, aussi connu comme turbocompresseurs sont des compresseurs à flux continu. Ils s'appuient sur le principe de l'accélération du fluide à une vitesse élevée. Cependant, ces compresseurs sont soumis à des phénomènes d'instabilités non linéaires appelées aussi instabilités aérodynamiques (pompage et décrochage tournant) qui empêchent le bon fonctionnement du système de compression. Les

instabilités aérodynamiques sont souvent à l'origine de graves problèmes mécaniques qui affectent tous les composants du système de compression, voir leur endommagement.

L'apparition des instabilités se produit lorsque le débit diminue au-dessous de la valeur critique qui est représentée par l'abscisse du point d'intersection de la courbe caractéristique et de la ligne de pompage à une vitesse fixée. Afin de limiter les dégâts, réduire l'impact de ces phénomènes et éviter leur apparition, il est indispensable de développer l'analyse des systèmes de compression et d'améliorer leurs performances à tous les niveaux. Pour cela, plusieurs modèles mathématiques de différentes dimensions ont été développés pour ces types de compresseurs ; dont lesquelles les fonctions principales sont la pression et le coefficient du débit massique. Ces modèles représentent réellement le système de compression dans les cas linéaire et non linéaire.

Greitzer [34] a introduit en 1976, le premier modèle mathématique représentant le comportement instable des unités de compression et il l'a vérifié empiriquement durant la même année. Bien que Greitzer a initialement développé le modèle pour les compresseurs axiaux uniquement, il a été démontré également par Hansen et al. [37] qu'il est aussi valable pour les compresseurs centrifuges.

Ce modèle est un système dynamique non linéaire de quatre équations avec quatre fonctions d'état. Il implique tous les composants du système de compression. Ce dernier se compose d'un compresseur axial à l'avant du système, de la chambre de combustion appelée plénum, et à la sortie, le système se termine par une vanne de contrôle.

Les fonctions d'état pour ce système sont le coefficient de la pression au niveau du plénum, le coefficient de débit de masse à travers le compresseur, le coefficient de débit de masse dans la vanne de contrôle et le coefficient de l'augmentation de pression dans le compresseur.

Ce modèle a été transformé par Moore et Greitzer [33] vers une version capable de capturer les formes transitoires complètement formées. Le modèle renforcé contient trois équations différentielles ordinaires pour modéliser le pompage et le décrochage tournant.

La capacité de prédire la nature des instabilités est très importante du point de vue de la conception des compresseurs, car leurs conséquences pourraient entraîner des avaries très variables

affectant les performances des systèmes dynamiques des fluides. Bien que des efforts de recherche au cours des dernières décennies ont conduit à des avancées importantes dans le domaine, de nombreuses études se sont concentrées sur l'analyse de ces instabilités à l'aide des moyens théoriques et expérimentaux, et une littérature abondante est disponible sur les études théoriques et numériques. Aussi le comportement de pompage et de décrochage tournant est cité dans peu de littératures. Il est à noter qu'une analyse approfondie n'est pas traitée.

Par conséquent, compte tenu de la compréhension approfondie de ces phénomènes d'instabilités, le présent travail traite l'analyse de ces instabilités avec plus de détail.

- a) **Dans la première partie**, l'influence des paramètres géométriques et physiques sur la nature du pompage et du décrochage tournant sera étudiée. De plus, l'effet des principaux paramètres du modèle de Grietzer tels que le paramètre de Greitzer  $B$  et le coefficient de la vanne de régulation seront traités et discutés.

Pour atteindre les objectifs mentionnés précédemment, une analyse de transition entre les deux phénomènes de l'instabilité, en se basant sur les domaines de la variation du paramètre de Greitzer  $B$  en fonction du coefficient de la vanne de contrôle du système de compression sera effectuée. Le modèle classique validé de Greitzer a été utilisé lors du présent travail avec certaines conditions sur les composants du système de compression, en tenant compte des hypothèses suivantes : fixation de la forme géométrique telle que le volume du plénum et la longueur des conduites qui relient les composants associés. Une étude numérique sous un code de calcul avec Fortran et à l'aide de simulations numériques nous a permis par des illustrations, de retrouver les résultats du comportement de transition entre ces deux phénomènes d'instabilité.

- b) **Dans la deuxième partie**, le modèle de compression adopté est celui de base de Greitzer. C'est un système dynamique non-linéaire qui est apte pour détecter les phénomènes d'instabilité aérodynamiques. La résolution ou l'analyse de ses équations dynamiques non linéaires est très difficile et nécessite des techniques particulières. Pour éviter ces difficultés, le système est transformé à l'état linéaire pour prévoir son comportement. Ces équations

développées peuvent ne pas prédire son réel comportement. Néanmoins, les progrès de la théorie des systèmes dynamiques non linéaires et de la théorie de bifurcation ont rendu l'analyse systématique de ces systèmes réalisable. Ces théories montrent comment la non linéarité impacte le comportement d'un système.

Pour cela, notre recherche se concentre sur l'analyse de la bifurcation locale du modèle adopté, en injectant un développement d'une autre formule générale de la courbe caractéristique axisymétrique pour le compresseur axial à une vitesse donnée. Ceci a deux objectifs : le premier est de comparer cette formule à celle de Greitzer et le second est de localiser la bifurcation de Hopf lorsque le paramètre retenu dans ce travail passe à sa valeur critique. Dans le but de définir les effets des paramètres du système sur la stabilité locale, une étude analytique de la stabilité basée sur l'approche du système de bifurcation locale et par le biais de la théorie de bifurcation est faite.

Une étude numérique sous Matlab nous a permis par des illustrations de déterminer les résultats théoriques. Les résultats présentés dans ce travail de thèse élucident clairement l'effet dominant des paramètres utilisés sur le développement des instabilités d'écoulement interne du système de compression comme le décrochage tournant et le pompage. Ils peuvent donc servir pour éviter de telles instabilités.

La structure de la présente thèse est décrite comme suit :

**Un premier chapitre scindé en deux parties :**

**La première partie** est consacrée à des préliminaires sur les compresseurs et leurs fonctionnements avec les types d'instabilités rencontrés dans ces compresseurs. Ainsi que des notions de base dans la théorie des systèmes dynamiques non linéaires avec ses bifurcations atteintes.

**La deuxième partie** traite de l'évolution des équations constituant le modèle mathématique non linéaire de Greitzer qui décrivent les instabilités rencontrées dans les compresseurs axiaux.

**Un deuxième chapitre** qui porte sur une étude de l'influence des paramètres :  $B$  de Greitzer et le coefficient de la vanne de contrôle dans le système de compression sur les phénomènes instabilités dont le modèle est celui de Greitzer.

---

**Un troisième chapitre** basé sur une analyse analytique d'une formule de la courbe caractéristique du compresseur que nous avons proposé dans le cadre de notre travail, et où nous avons déterminé les zones d'instabilité du compresseur. La validation de notre modèle est réalisée par une comparaison détaillée à celle de Greitzer. Par la suite, nous avons appliqué notre modèle à celui réduit de Greitzer à travers une étude de bifurcation locale. Les conditions de l'instabilité aérodynamique sur un modèle de compresseur axial, sur la base d'un système dynamique linéaire, sont discutées dans le quatrième chapitre. Enfin, on termine notre travail par une conclusion générale.

# Synthèse Bibliographique et formulation mathématique

## 1.1 Introduction

Ce chapitre fait un bref retour sur les travaux antérieurs en lien avec les instabilités aérodynamiques et leurs apparitions dans les compresseurs axiaux. Des travaux sur de développement analytiques et des simulations numériques seront présentés pour rappeler les réalisations dans les compresseurs axiaux à basse et haute vitesse en lien avec les phénomènes d'instabilité. Ces travaux antérieurs ont servi de référence de base en termes de validation des critères.

## 1.2 Contexte Bibliographique

L'évolution des systèmes de compression est un sujet de recherche qui a attiré beaucoup de chercheurs au cours des quatre dernières décennies. Ces derniers rencontrent plusieurs problèmes de dis-fonctionnement, sous la forme des instabilités aérodynamiques des principaux fonctions (taux de pression et coefficient du débit massique). Ces instabilités et leurs transitions ont fait, aussi, l'objet de nombreuses études afin de déterminer leurs limites et leurs évolutions. Un certain nombre d'études théoriques et expérimentales ont été menées sur le processus de démarrage des instabilités dans les compresseurs axiaux. Ces phénomènes d'instabilités aérodynamiques sont spécifiés pour

les compresseurs dynamiques. Ils ont été remarqués, pour la première fois, par Emmons [21], où il a identifié et analysé les deux phénomènes. De plus, il a expliqué leurs apparitions et la propagation des cellules de décrochage sur les deux faces de l'aube du rotor. Les instabilités des systèmes de compression ont également fait l'objet d'une attention particulière ces dernières années. De nombreuses études se sont concentrées sur la détermination de leurs limites de transition dans tous les types de compresseurs, [3, 13, 18, 32, 62]. Parmi ces instabilités, on peut rappeler le décrochage tournant qui se manifeste par l'apparition de cellules non stationnaires sur les aubes et qui se propagent à travers l'anneau du compresseur, tandis que le pompage commence lorsque le débit décroît au-dessous d'une certaine valeur critique de la vitesse de rotation qui dû au développement global de décrochage tournant. De nombreux autres modèles ont été développés ultérieurement. Le modèle mathématique le plus couramment utilisé pour décrire les phénomènes est le modèle de Greitzer [34] développé en 1976, sur la base du modèle de Emmons. Ce modèle a été testé expérimentalement pour la première fois durant la même année par Greitzer. A l'origine, ce modèle a été développé pour les compresseurs axiaux mais il peut également être utilisé avec succès dans les compresseurs centrifuges, comme le prouvent de nombreuses études parmi eux nous avons la référence [37].

Des études expérimentales sur les instabilités des compresseurs ont suggéré différents scénarios d'apparition du décrochage tournant. Erskine et al. [13] ont observé une onde de pré-décrochage circulant autour de la face du rotor à une fréquence similaire à celle du décrochage tournant (Chen et al. [8]). En revanche, d'autres auteurs (Cumpsty et Day [16], Day [14]) ont rapporté un « pic » précurseur de l'apparition du décrochage. Une explication définitive des mécanismes de déclenchement du décrochage reste insaisissable. Plusieurs chercheurs ont contribué à l'évolution du système de compression, en commençant par Greitzer et Moore [33], qui ont été parmi les premiers à développer le modèle mathématique de Greitzer pour ces systèmes. Leur modèle contient de nouveaux éléments dans le domaine de la modélisation des Systèmes de compression à gaz. Une vanne couplée (Coupled close vane, CCV) est ajoutée au système compression et ils ont supposé le cas où la vitesse de l'ensemble (Système + compresseur) est constante. Or, en pratique, la vitesse peut varier.

Ce modèle se constitue de quatre équations différentielles ordinaires où la troisième équation introduit la fonction de l'amplitude du premier harmonique de potentiel et l'équation de la CCV comme quatrième équation du système a été ajoutée au modèle. Ce dernier vise le fonctionnement de tous les composants du système et détecte l'apparition des phénomènes d'instabilités dont souffrent ces systèmes. Ils ont montré dans leurs travaux fondateurs qu'un système de compression axiale fonctionnant en décrochage tournant présente une courbe d'équilibre significativement différente de la caractéristique axisymétrique. En outre, ils ont souligné que l'apparition d'un phénomène d'instabilité ne dépend pas seulement du fonctionnement du compresseur et des conduits connectés, mais aussi de la dynamique de l'ensemble du système dans lequel il est placé. Puis il y a eu l'apparition d'autres modèle, entre autres, le modèle de Gravdhal et al. [29] est une extension du modèle de Greitzer-Moore. Il a considéré la variation de vitesse du compresseur comme une autre équation différentielle additive au système. C'est aussi un modèle multi modes qui permet une meilleure compréhension des non linéarités aérodynamiques : le décrochage tournant et le pompage. Ce modèle contient des paramètres parmi lequel on trouve le paramètre B de Greitzer comme un variable d'état. Il intègre de plus la dynamique du spool (l'arbre reliant le compresseur au système géométrique).

Gravdahl et Egeland ont développé une commande qui est capable de contrôler la vitesse. Cependant, elle n'a aucun contrôle sur les non linéarité.

La modélisation du plénum, dans le modèle d'origine de Greitzer, a introduit le paramètre de Greitzer, B, qui est adimensionnel et dépend, entre autres, du volume du plénum. Tout le reste étant fixe, plus le volume du plénum est grand, plus la valeur de B est grande. Une grande valeur de B favorise le pompage, tandis qu'une petite valeur favorise le décrochage tournant. Le modèle a été validé par des études expérimentales [34, 31, 56].

Le paramètre B peut être physiquement interprété comme le rapport de la différence de pression à travers un compresseur sur la force d'inertie. Il joue un rôle important dans l'apparition et l'évolution des instabilités dans les compresseurs axiaux, [12, 34]. Eddie Ng et al. [20] ont analysé certaines caractéristiques liées au décrochage tournant dans le modèle incluant le paramètres B de Greitzer via la méthode de Taguchi.

La méthode Taguchi, inventée par Gen'ichi Taguchi, est une méthode statistique pour réaliser des plans d'expériences. Appliquée dans l'industrie, cette méthode se concentre avant tout à minimiser les variations autour de la valeur de consigne.

Des résultats importants ont été trouvés concernant d'autres paramètres du modèle de Grietzer-Moore, et qui ont des effets sur le comportement du système de compresseur axial.

La modélisation d'un compresseur à l'aide des modèles mathématiques est toujours très difficile par rapport aux données expérimentales. En se basant sur le modèle d'origine de Greitzer qui est composé de quatre équations différentielles non linéaires à quatre dimensions. Les modifications apportées à ce système pourraient soit augmenter légèrement le nombre de dimension [17,18] soit le diminuer à seulement deux dimensions [7,19,20]. On pourrait s'attendre à ce que de tels modèles fournissent une réponse beaucoup plus importante que les données mesurées affectées par de nombreux phénomènes. De plus, afin de développer un moyen efficace et fiable de supprimer ou d'éviter le pompage, il est très important de modéliser précisément le compresseur pendant le pompage. Le modèle de Greitzer dépend également d'un ensemble de paramètres qui doivent être définis. Certains d'entre eux ont un aspect physique clair comme le volume du plénum, la vitesse du son, la fréquence du résonateur de Helmholtz et le temps nécessaire pour développer un modèle de décrochage rotatif complet. D'autres pourraient être interprétés de différentes manières : la surface du conduit du compresseur, la longueur du conduit du compresseur, la surface du conduit de la vanne et la longueur du conduit de la vanne. L'effet des paramètres géométriques sur les instabilités aérodynamiques telles que la longueur efficace du compresseur, la section annulaire et le volume du plénum ainsi que l'apparition d'instabilités ont été les principaux éléments de préoccupation de Malathi et al. [48]. Ces derniers ont identifié les limites de transition entre le post-décrochage et le décrochage, et vice versa. Ils ont montré que l'effet combiné des paramètres physiques est déterminé par le biais de paramètre B de Greitzer. La croissance en puissance des ordinateurs a ouvert la voie à des simulations numériques de plus en plus sophistiquées de l'écoulement dans les compresseurs. Ils ont également été utilisés pour des études plus fondamentales, notamment sur les instabilités des compresseurs (He [38], Hös et al. [39], Dumas. [19], Du et al. [18]). L'écoulement in-stationnaire autour des aubes du compresseur est simulé en détail (Gravdahl et al. [28], Yamaguchi, et al. [14],

Jaeschke et al. [40])). Les résultats permettent d'identifier les instabilités. Les précurseurs de pics de décrochage ont fait l'objet d'un intérêt particulier (Day. [14], Margrida et al. [50]). L'utilisation de la modélisation de la turbulence signifie que les résultats ne sont que des approximations de la réalité et qu'ils sont souvent en désaccord avec les expériences. Dans le cadre d'une étude sur les paramètres du système de compression, à savoir le débit et la pression du compresseur, nous avons utilisés la théorie de bifurcation afin de déterminer les zones de l'instabilité du système de compression. Ce qui pourrait constituer à l'avenir une autre voie de recherche.

La théorie des bifurcations a été introduite pour la première fois par Henri Poincaré en 1885 puis utilisée et développée par un grand nombre de chercheurs. Une bifurcation se produit lorsqu'un petit changement progressif apporté aux valeurs des paramètres de bifurcation d'un système porte un changement qualitatif de son comportement. Les bifurcations s'engendrent à la fois dans les systèmes continus décrits par les équations différentielles ordinaires, les équations aux dérivées partielles et les systèmes discrets qui peuvent être décrits dans des modèles précis [5, 9, 25, 41, 47]. Les utilitaires de la théorie de la bifurcation non linéaire pour les systèmes de compression ont été abordés et développés par McCaughan [51], Abed et al. [1] et Chen [8]. Ils ont concentré leurs efforts sur l'analyse de bifurcation avec deux ou trois équations pour les systèmes de compression afin de trouver les paramètres adimensionnels liés à l'évolution des instabilités.

Dans ce contexte, Gu et al [36], Liaw et al. [45] et McCaughan, ont conclu que l'apparition de deux phénomènes d'instabilité est essentiellement définie par  $B$ , qui est le principal dominant dans la prédiction des types post-décrochage pour le comportement du système de compression. La plupart de ces études ont conçu l'effet de gain des gaz comme un paramètre de bifurcation du système de compression, ce qui a été confirmé récemment [50]. L'analyse de la bifurcation dans le cas d'un phénomène de décrochage tournant ou de pompage a été étudié [36, 39, 44, 45], en considérant un système dynamique selon le modèle de Greitzer avec un compresseur axial. Ils ont déterminé le domaine de stabilité ainsi que les bifurcations de Hopf, noeud de selle et Bogdnov-Takens (ou double zéro).

Le but de ce travail consiste à une étude paramétrique des phénomènes d'instabilité présentés ci-dessus, sur la base de deux modèles théoriques à savoir : un modèle à quatre équations (modèle

d'origine de Greitzer ) et le même modèle réduit à deux équations.

### 1.3 Introduction aux systèmes de compression et leurs instabilités

Dans cette partie, on donne quelques détails concernant les éléments composants le système de compression à gaz ou liquide et la différente configuration de cette dernière dans l'industrie des procédés et l'aérospatial. Les turbomachines sont constituées des machines tournantes qui transforment l'énergie d'un fluide compressible ou incompressible. Pour le fluide incompressible on trouve les pompes. Pour celui qui est compressible on a les compresseurs.

### 1.4 Description des compresseurs

Le système de compression est composé par un guide directeur à l'entrée de compresseur, un compresseur qui peut être un axial ou centrifuge, un plénum qui prend le rôle de chambre de combustion et une vanne de contrôle assemblé au système de compression par l'intermédiaire d'un arbre de transmission. Le compresseur est un composant critique dans le système de compression, car ses performances vont avoir des conséquences directes sur le fonctionnement global d'un moteur (efficacité, rendement, consommation de carburant...). C'est une machine indispensable pour augmenter la pression d'un fluide compressible qui le traverse. Ceci se traduit par le fait que le volume du fluide, (gaz, vapeur ou liquide), se réduit au fur et à mesure de la croissance de la pression. Il est généralement constitué d'un ou plusieurs étages, comme il peut être axial ou centrifuge. Un étage de ce compresseur contient une roue d'aubes tournante, (rotor), à une vitesse bien déterminée pour renforcer la vitesse du fluide, et une autre roue fixe (stator), qui va changer l'énergie cinétique acquise en pression.

### 1.4.1 Répartition des compresseurs

Les compresseurs sont utilisés dans une grande variété d'applications. Il s'agit notamment des turboréacteurs utilisés dans la propulsion aérospatiale, de la production d'électricité à l'aide de turbines à gaz industrielles, de la suralimentation des moteurs à combustion interne, de la pressurisation des gaz et des fluides dans l'industrie de transformation, du transport des fluides dans les pipelines, etc. Il existe quatre types généraux de compresseurs : à pistons, rotatifs, centrifuges et axiaux. voir la Figure 1.1. Pour cela, il existe deux types principaux des compresseurs : Les compresseurs volumétriques et les compresseurs dynamiques

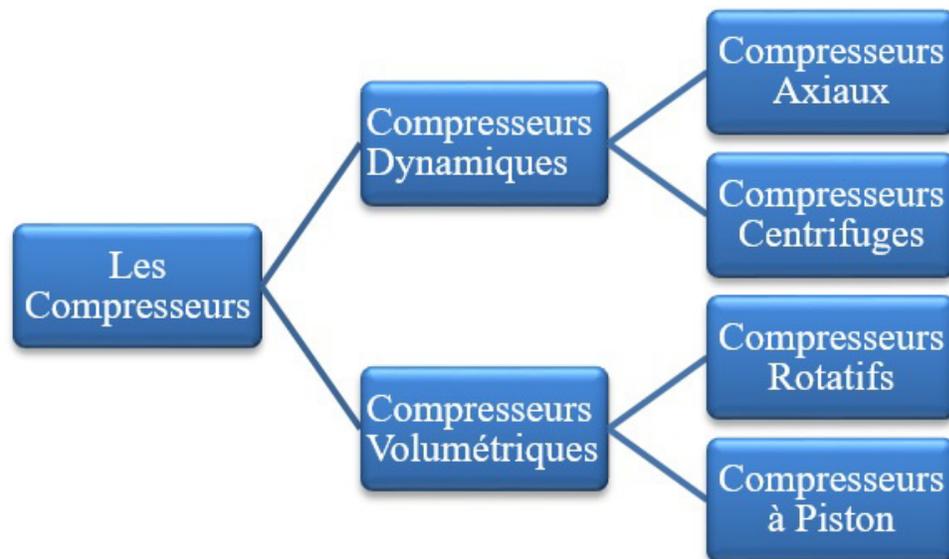


FIGURE 1.1 – Classification des types de compresseurs [7]

#### 1.4.1.1 Compresseurs volumétriques

Il existe deux catégories :

- a) Alternatifs : compresseurs à piston.
- b) Rotatifs : compresseurs à vis.

Ces compresseurs fonctionnent généralement avec le principe de compression par réduction du volume. Ils utilisent le mode de compression intermittent (discontinu) qui est de nature cyclique

(périodique). Ce mode est défini par une absorption d'une quantité de gaz par le compresseur désigné, évacuée avant que le cycle ne se répète. Ce groupe de compresseurs produit un débit de refoulement discontinu. Il est généralement combiné à un réservoir qui absorbe les fluctuations et assure une pression de refoulement uniforme.

#### 1.4.1.2 Compresseurs dynamiques (Turbo- compresseur)

On distingue deux principaux types de compresseurs dynamiques appelés aussi turbocompresseurs : les centrifuges et les axiaux.

Ces types de compresseurs se caractérisent par le fonctionnement en mode de compression continue, où le gaz circule dans le compresseur, ensuite il se déplace à travers le compresseur en quittant sans interruption du débit à aucun moment du processus.

##### 1.4.1.2.1 Compresseurs centrifuges

Les compresseurs centrifuges sont des machines qui renforcent l'énergie cinétique du fluide compressible grâce à la force centrifuge qui est provoquée par le mouvement de rotation des roues aux aubes. Les roues consolidées à l'arbre du système fournissant de l'énergie au fluide, une partie de cette énergie se transforme en pression directement dans les roues, le reste dans le stator (le diffuseur, voir Figure 1.2. Ce type de compresseurs, généralement, est formé d'un nombre d'aubes orientées vers l'extérieur, tangentiellement au rotor, [figure.1.2], où le passage de l'écoulement entre ces aubes diverge pour convertir la vitesse du point en pression. Ces compresseurs sont constitués de deux éléments principaux :

- 1) Rouet est un organe de rotation qui augmente la vitesse du fluide.
- 2) Le diffuseur (stator) est une partie intégrante du corps fixe. Il est important pour la conversion de l'énergie.

Les deux éléments constituent un étage d'un compresseur. Le fonctionnement de ces compresseurs est la transformation de l'énergie cinétique produite par le rouet à l'énergie de pression. Le fluide compressible entre dans le compresseur centrifuge en direction axiale et l'évacue perpendiculairement à l'axe de rotation (l'arbre du moteur) dans le sens radial vers le diffuseur.

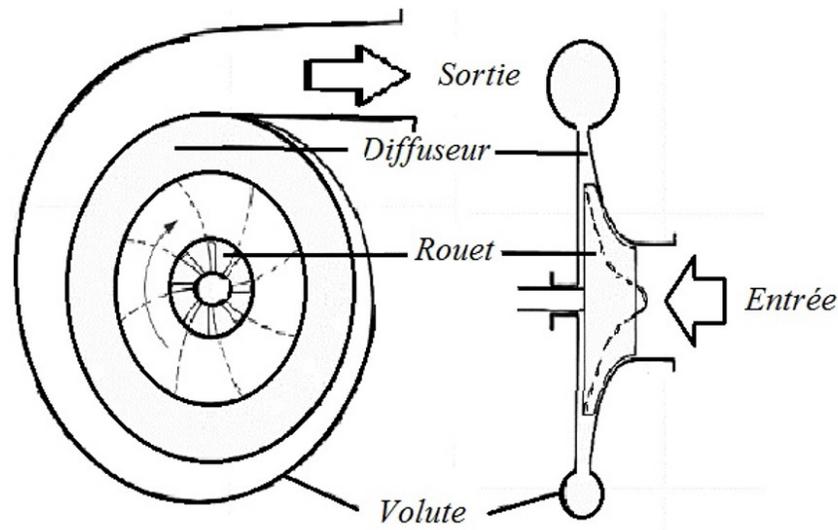


FIGURE 1.2 – Rouet de compresseur centrifuge

**Principe de fonctionnement [70] :**

L'arbre du compresseur fait tourner la roue à grande vitesse et le gaz est continuellement aspiré au centre de la roue. Les palettes étant divergentes, le gaz sous l'effet de la force centrifuge va être accéléré, comprimé et refoulé radialement vers l'extérieur le long des aubes jusqu'à l'extrémité de la roue. Pour faciliter l'écoulement axial du gaz dans le conduit d'entrée sur la roue en rotation, les aubes au centre de la roue sont courbées dans le sens de la rotation. Cet écoulement passe ensuite dans deux diffuseurs, le premier radial, le second axial pour être redressé. La majeure partie de l'énergie cinétique (vitesse du gaz) est alors transformée en énergie de pression. Un collecteur récupère finalement le gaz comprimé pour l'amener dans l'axe de la chambre de combustion.

**1.4.1.2.2 Compresseurs axiaux**

Les compresseurs axiaux sont caractérisés par un écoulement du fluide compressible axial parallèle à l'axe de rotation (arbre de rotation) où le fluide quitte le compresseur dans une direction axiale (Figure 1.4).

Ils sont composés de deux éléments principaux :

- Un rotor constitué d'un ensemble d'aubes de section aérodynamique. Cet ensemble est monté entre des paliers dans les carters (Figure 1.3) ;

- Un stator ou redresseur constitué d'un ensemble d'aubes fixes.

Un compresseur axial est généralement composé :

- D'un équipement basse pression (Rotor/Stator) ;
- D'un attelage haute pression (Rotor/Stator).

Le taux de compression des compresseurs est lié à sa vitesse de rotation et au nombre d'étages qu'il comporte.

Les compresseurs basse et haute pression se différencient par la taille de leurs aubes et par leur vitesse de rotation.

Un compresseur axial se compose d'une suite d'étages axiaux disposés en série chacun comprenant une roue à aubes mobiles rotor et d'un stator à aubes redresseur, tous ces étages sont calculés pour adapter parfaitement leurs conditions de fonctionnement à celles des étages en amont et en aval.

L'aubage mobile rotor est constitué d'un disque circulaire sur lequel sont fixées des aubes (ailettes) et tourne devant l'aubage fixe redresseur.

L'arbre du rotor est supporté par des roulements à billes et à rouleaux et couplé à l'arbre du système de manière à permettre toute légère variation d'alignement ;

Un compresseur simple corps est constitué d'un ensemble rotor/stator (redresseur) avec au-tant d'étages que nécessaire pour obtenir le rapport de pression souhaité.

Ce genre de compresseurs est utilisé dans les turbines à grande puissance et les turboréacteurs d'aviation. Ils peuvent accepter des débits d'air beaucoup plus élevé que celui de centrifuge, comme ils sont déterminés par le taux de compression faible et avec un nombre important d'étages. En plus, ces compresseurs offrent un meilleur rendement, assurant une consommation moins importante dans un système de compression à fluide compressible.

**Principe de fonctionnement [70] :**

- Le rotor aspire et accélère le flux d'air en le déviant par rapport à l'axe du moteur.
- Le redresseur ou stator qui suit, redresse le flux dans l'axe et le ralentit en transformant une partie de sa vitesse en pression.

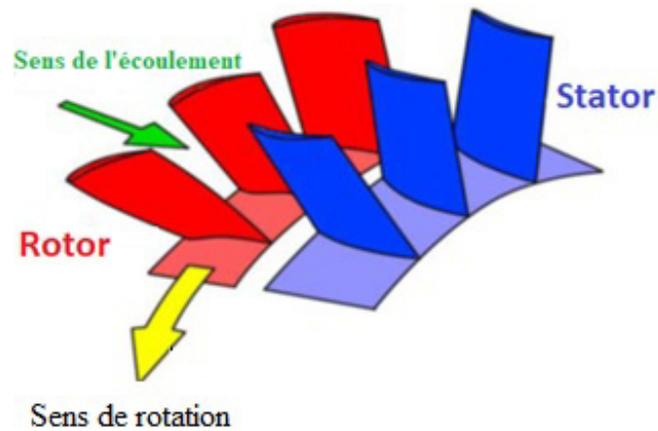


FIGURE 1.3 – Rotor et Stator d'un compresseur

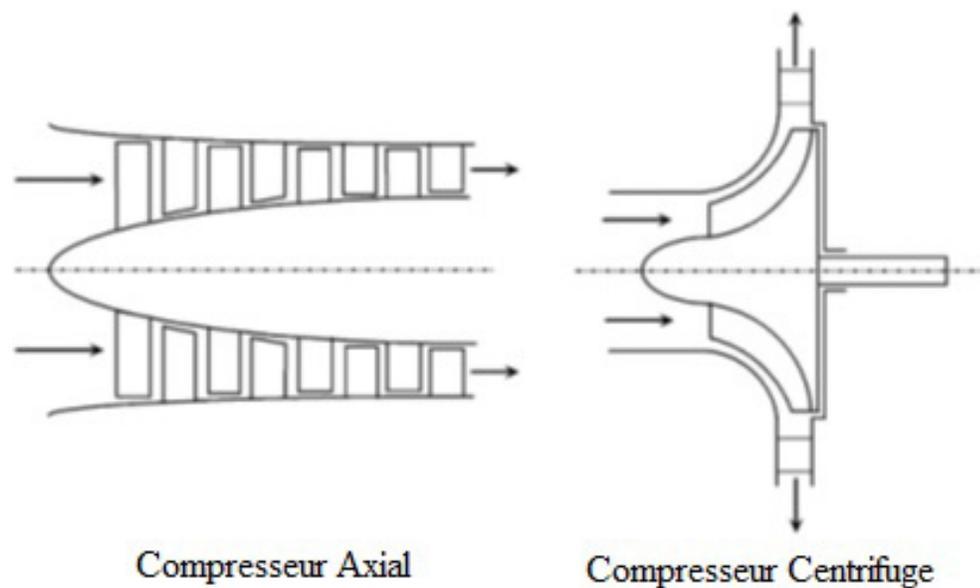


FIGURE 1.4 – Comparaison entre les compresseurs : axial et centrifuge

- Le rotor suivant ré-accélère le flux d'air en le déviant à nouveau de l'axe du moteur.
- Le stator suivant va de nouveau redresser le flux le ralentir et transformer sa vitesse en pression.

### 1.4.1.3 Courbe caractéristique d'un compresseur

La courbe caractéristique d'un compresseur [63] est une représentation du taux de compression en fonction du débit (Figure 1.5) pour différentes vitesses de rotation. Elle est représentée par une

surface de fonctionnement utile, limitée par une ligne de pompage (Figure 1.6) au-delà duquel le compresseur entre en mode de l'instabilité (pompage ou en décrochage tournant) et une ligne de blocage (Figure 1.6) où le débit masse ne peut plus augmenter. La stabilité de fonctionnement d'un système de compression dépend à la fois des caractéristiques du compresseur et du dispositif d'écoulement en aval. Mathématiquement, si la pente de la carte de performance du compresseur est inférieure à celle de la vanne, le système est stable. Sinon, le système n'est pas stable. Où  $\Phi$

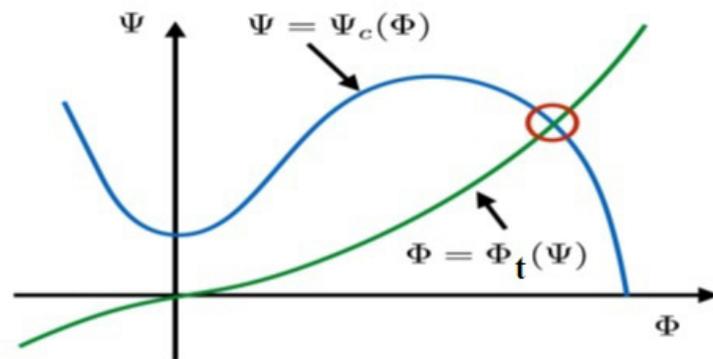


FIGURE 1.5 – La courbe caractéristique d'un compresseur [64]

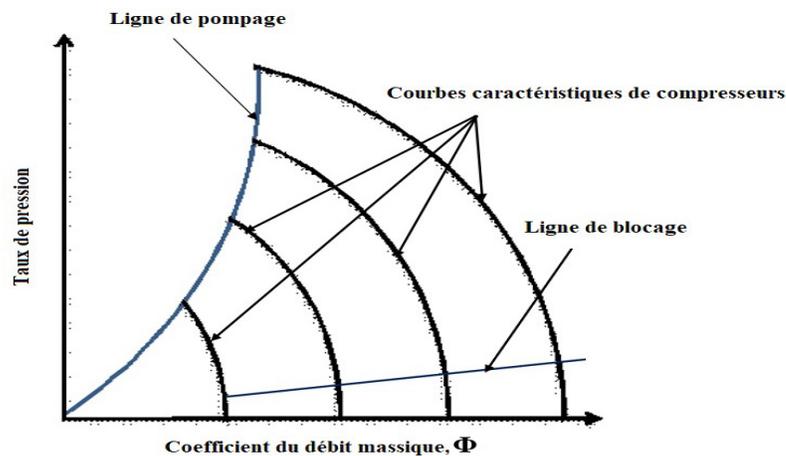


FIGURE 1.6 – Courbes caractéristiques d'un compresseur à plusieurs vitesses [19]

est le coefficient du débit massique à travers le compresseur,  $\Psi$  est l'augmentation de pression dans le plénum,  $\Psi_c$  est la courbe caractéristique du compresseur et  $\Psi_t$  est la pression au niveau de la vanne de contrôle.

## 1.5 Instabilités dans les compresseurs

Plusieurs instabilités peuvent apparaître dans un système de compression (turbines à gaz), à savoir les instabilités de combustion, les instabilités aéroélastiques (telles que le flottement) et les instabilités d'écoulement aérodynamiques. L'instabilité aéroélastique est une instabilité dans un système couplé fluide-structure. Elle correspond à l'excitation de la structure par le fluide. Les oscillations de la structure sont induites de l'interaction entre l'écoulement et les modes élastiques de la structure. Lors de la vibration, des forces aérodynamiques instationnaires s'appliquent à la structure qui se déplace, induisant ainsi un échange d'énergie entre le fluide et la structure. Si le fluide extrait de l'énergie à la structure, l'amplitude de vibration diminue jusqu'au retour à l'équilibre d'où la stabilité aéroélastique. D'autre part, l'instabilité aérodynamique s'intéresse à l'instabilité d'une structure vibrant dans un écoulement. En se basant sur les instabilités d'écoulement aérodynamiques, ces phénomènes d'instabilité apparaissent lorsque le débit de l'écoulement traversant le compresseur diminue au dessous de sa valeur critique. Cette dernière peut être représentée par l'intersection de la courbe caractéristique du compresseur avec la ligne du pompage pour chaque vitesse de rotation donnée. On distingue deux types d'instabilités connus sous les noms décrochage tournant et le pompage. Ces deux instabilités délimitent le bon fonctionnement d'un compresseur, et limitent également les performances (augmentation de pression) et l'efficacité du compresseur selon Greitzer [34]. La stabilité dans les compresseurs peut être étudiée suivant deux sens différents : Le premier est appelé stabilité opérationnelle, qui touche l'étude de l'adaptation des performances du compresseur avec un dispositif d'écoulement en aval tel qu'une vanne ou une turbine. Le second est la stabilité dynamique qui traite des détériorations du fonctionnement due à la séparation de l'écoulement de la surface, au décrochage tournant ou au pompage.

En mouvement régulier d'un compresseur, le débit du fluide compressible qui le traverse est essentiellement stable et axisymétrique dans le système de coordonnées en rotation.

Cette stabilité est la capacité d'un compresseur à recouvrir des perturbations qui modifient la progression du compresseur au voisinage du point optimal du système de compression.

Le bon fonctionnement des compresseurs est limité par plusieurs types de phénomènes d'in-

stabilités aérodynamiques illustré dans la Figure 1.7. et plus précisément les deux principales

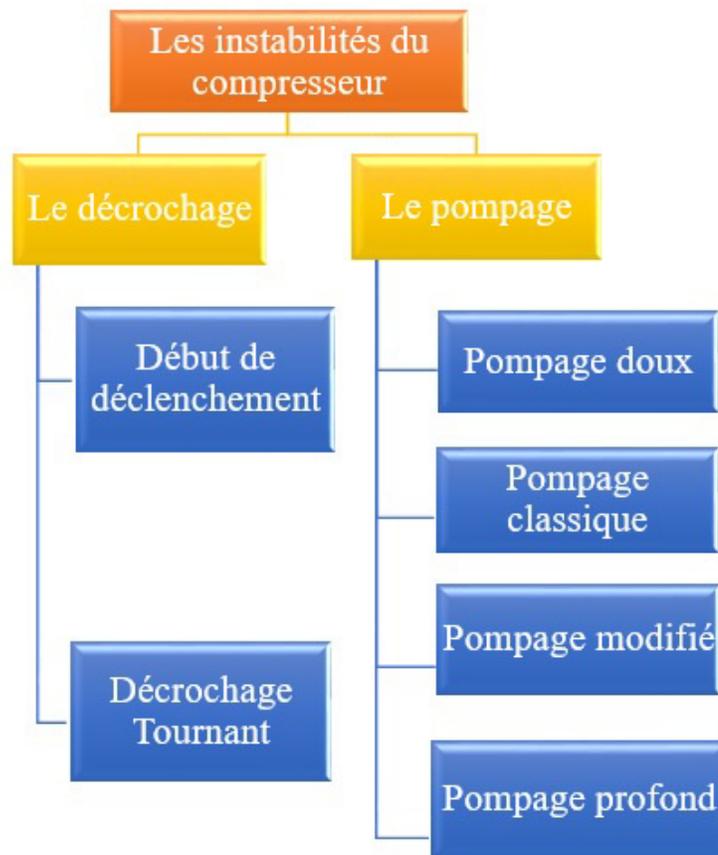


FIGURE 1.7 – Diagramme de l’instabilité dans les turbocompresseurs

instabilités à savoir le pompage et le décrochage tournant. Ces deux phénomènes d’instabilité sont souvent à l’origine de graves problèmes mécaniques, ils influencent les composants du système de compression, et peuvent même aller jusqu’à les endommager.

### 1.5.1 Décrochage tournant

Le décrochage tournant est un phénomène d’instabilité aérodynamique du compresseur qui limite le fonctionnement du système de compression [19, 58]. Ce phénomène se localise au niveau de l’anneau du rotor et se caractérise par la formation des cellules (poches) de déficience vitesse. Ces cellules se présentent sur la surface extérieure de certaines aubes (pales) et se déplacent en

mouvement circonférentielle à une vitesse inférieure et suivant le même sens à celle de rotation du rotor d'après [16]. À l'intérieure de la cellule (poche) tournante, l'écoulement se sépare de la surface extérieure de l'aube due au grande angle d'incidence d'où l'appellation de décrochage tournant. L'apparition de ces cellules va entraîner un blocage partiel de l'écoulement au niveau du compresseur, ce qui va réduire la croissance du débit et de pression et provoque des vibrations incitent le rotor. D'après Pampreen [56], on distingue deux types de cellules : Le premier type est appelé le Full-span (Figure 1.8, a), où les cellules occupent la hauteur totale de l'aube et elles sont peu nombreuses de 1à 2. Le second type est appelé le part-span (Figure 1.8, b), dans ce type, les cellules sont beaucoup plus nombreuses, mais le décrochage ne touche pas toute la hauteur de l'aube d'après [38].

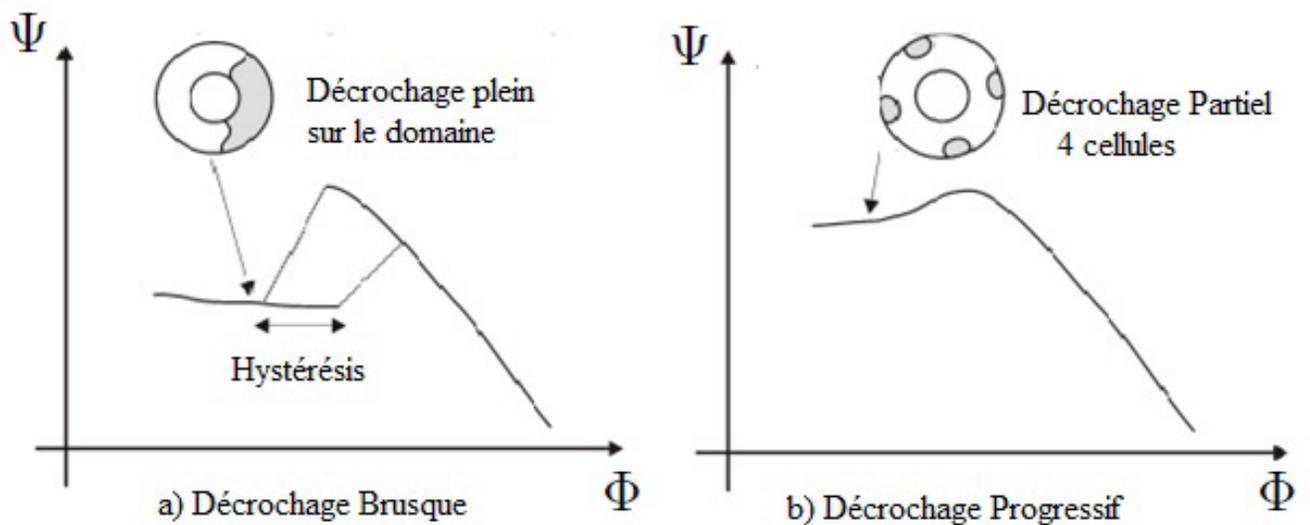


FIGURE 1.8 – Types de cellules de décrochage et décrochage tournant

### 1.5.2 Pompage

Le pompage est un phénomène d'instabilité aérodynamique non stationnaire. Il se manifeste lorsque le compresseur atteint sa limite de stabilité et qu'il ne peut plus fournir la pression nécessaire pour maintenir le niveau de celui dans le plénum en raison du décrochage tournant. Ainsi que le débit massique du gaz descend en dessous de la valeur d'abscisse du point de fonctionnement sur la courbe caractéristique du compresseur à vitesse constante.

Dans cette situation, le débit dans le compresseur devient instable et subit les oscillations de la limite de haute amplitude du débit massique et de la pression.

C'est un phénomène propre aux compresseurs dynamiques, qu'ils se caractérisent par le fait que la compression est obtenue par échange d'énergie mis en mouvement dans les rangées de plaques. Les compresseurs axiaux et centrifuges appartiennent à cette catégorie.

L'apparition de cycle limite, dans la courbe caractéristique du compresseur, est due à l'interaction entre le compresseur et le plénum qui se trouve en aval du compresseur.

Un refoulement partiel ou total du flux de gaz en amont du compresseur peut être observé. Les oscillations du pompage, dans la plupart des applications, sont indésirables et peuvent même, dans des cas extrêmes, endommager le compresseur voir les composants du système, comme discutés par Erskine et Hensmen [22] et Greitzer [35].

Un exemple d'une telle caractéristique est illustré sur une carte de compresseur par la courbe en forme de  $S$  à une vitesse de rotation donnée sur la Figure 1.9. Les segments (1–2) et (3–4) sur la courbe indiquent que cette section est généralement une approximation du système physique car c'est difficile de la mesurer expérimentalement.

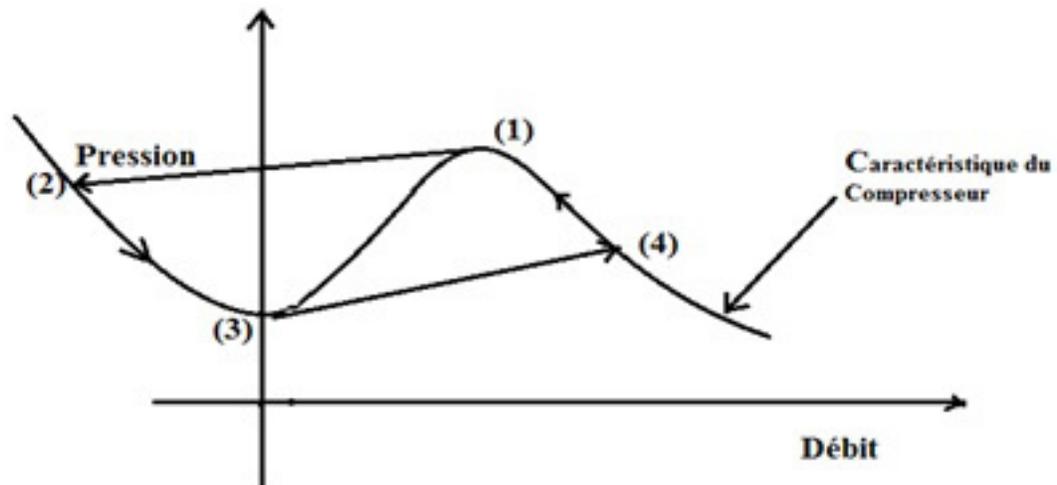


FIGURE 1.9 – Caractéristique du compresseur avec un pompage profond

La Figure 1.9 représente le cycle de pompage profond où sa naissance a lieu au point (1). A ce moment, le compresseur atteint sa limite de stabilité et la pression dans le plénum ne diminue

pas rapidement ainsi que les aubes décrochent en même temps. Ce qui met le compresseur en difficulté à conduire le débit. Ceci provoque une inversion du flux de gaz qui se déplace vers l'amont du compresseur pour équilibrer la haute pression dans le plénum. Le débit massique atteint la caractéristique opposée (2) où se situe la seconde partie du cycle de pompage. La pression du plénum commence à diminuer et le gaz accélère jusqu'à ce que le débit massique atteigne la valeur nulle à (3). Le compresseur retrouve sa stabilité et se comprime à nouveau lorsque le débit dans le compresseur devient supérieur à celui dans la vanne de régulation. La pression dans le plénum commence à augmenter et devient plus importante que celle du compresseur (4). Le cycle recommence lorsque la limite de stabilité du compresseur est à nouveau atteinte.

Sur la base des fluctuations de débit massique et de pression, on distingue quatre classes différentes : pompage moyen, pompage classique (léger), pompage modifié et pompage profond.

- a. **Pompage moyen** est caractérisé par aucune inversion du flux et petites fluctuations (oscillations) de pression périodiques régies par la fréquence de résonance de Helmholtz.
- b. **Pompage classique** est caractérisé par aucune inversion de flux et oscillations plus importantes à une fréquence inférieure à celle du pompage moyen.
- c. **Pompage modifié** est une combinaison du pompage classique et décrochage tournant, tout flux annulaire fluctue dans la direction axiale et non-axisymétrique.
- d. **Pompage profond** est une version de pompage classique plus puissante, il peut se manifester par un retour du fluide lorsque la pression dans le plénum (chambre de combustion) est supérieure à celle du compresseur. Ce phénomène se manifeste par une distribution symétrique uniforme.

## 1.6 Revue sur la théorie de bifurcation

La théorie de la bifurcation est devenue un axe de recherche primordiale dans l'analyse des systèmes dynamiques non linéaires. Au centre de ce sujet se trouve la question de savoir si les propriétés qualitatives d'un système dynamique changent avec la variation de certains de ses

paramètres. Généralement, si certains paramètres d'un système physique ou naturel connaissent une variation, un stade critique peut être atteint au cours où le système fait un saut soudain d'un état à un autre. Le nouvel état peut être qualitatif, et parfois quantitatif, différent de l'état d'origine.

Le changement d'état est décrit en terme de valeur propre du système dynamique. Si le paramètre varie lentement, les valeurs propres du jacobien évaluées sur le chemin de la solution changent en conséquence. Si la partie réelle des valeurs propres se déplace vers la droite de l'axe imaginaire dans les espaces propres, le système peut atteindre un état critique.

Le déplacement des valeurs propres d'un demi-plan à un autre peut être réalisé de deux manières qualitativement différentes. Souvent, lorsque les valeurs propres réelles croisent l'axe imaginaire, de nouvelles branches de solutions stationnaires apparaissent. Si une paire de valeurs propres conjuguées complexes croise l'axe imaginaire, alors il y a une possibilité d'une branche périodique. D'autres cas sont possibles, mais cette étude se limite aux cas où une valeur propre réelle devient nulle, ou une paire de valeurs propres conjuguées complexes est purement imaginaire.

### 1.6.1 Systèmes dynamiques non linéaires

Un système non linéaire est un système qui ne peut pas être décrit par des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Cette définition explique la complexité et la diversité des systèmes non linéaires et des méthodes qui s'y appliquent. Il n'y a pas de théorie générale pour ces systèmes, mais plusieurs méthodes adaptées à certaines classes de systèmes non linéaires. Les chercheurs ont également concentré leurs efforts sur l'exploration du comportement qualitatif et analyse de bifurcation des modèles pour déterminer l'impact des paramètres du modèle sur l'évolution de l'instabilité. La théorie de la bifurcation peut être utilisée pour caractériser chaque type d'écoulement et localiser les régions de l'espace des paramètres où un tel écoulement est stable ou instable. Il existe deux types de bifurcations, à savoir des bifurcations locales et globales. Une bifurcation locale est une bifurcation qui peut être détectée en regardant n'importe quel petit voisinage du point d'équilibre ou de l'orbite périodique. Il existe plusieurs types des systèmes dynamiques non linéaire parmi lequel nous rappelons le système dynamique non linéaire

autonome.

### 1.6.1.1 Système dynamique autonome

Considérons un modèle dynamique de système de compression décrit par des équations différentielles autonomes de la forme vectorielle dans un espace à  $n$  dimensions,

$$\dot{X} = F(X, \alpha), \quad (1.1)$$

où  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  et  $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)^T$

Ici,  $x_i$  désigne la variable d'état (Taux de pression à travers le plénum, Coefficient de débit massique à travers le compresseur, Taux de pression à travers le compresseur, Taux de pression à travers la vanne de contrôle, amplitude, angle de la tangente de la courbe caractéristique, etc.),  $\alpha$  est un paramètre scalaire invariant dans le temps

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T \text{ et } \dot{X} = \frac{dX}{dt} \quad \text{où } t \text{ est le temps.}$$

Le système est autonome lorsque la variable de temps n'apparaît pas explicitement dans la partie droite de l'équation (1.1). On suppose que le membre de droite est continu et continûment dérivable. Comme le champ vectoriel ne dépend pas du temps, le temps initial peut toujours être pris à  $t_0 = 0$ . La solution s'appelle la trajectoire et est notée  $X(t, x_0)$ . Le système dynamique (1.1) est linéaire si  $F(X_i)$  l'est.

### 1.6.1.2 Bifurcations dans un système dynamique autonome

Au voisinage du point d'équilibre, le terme de gauche de l'équation (1.1) devient nul ; c'est-à-dire que la solution  $X$  de l'équation (1.1) en régime permanent (stationnaire) satisfait l'ensemble des équations algébrique non linéaires

$$F(X, \alpha) = 0. \quad (1.2)$$

A noter que les systèmes non linéaires peuvent avoir plusieurs points d'équilibres, par contre les systèmes linéaires possèdent un seul point d'équilibre. La stabilité de la solution stationnaire  $X$  pour une valeur de  $\alpha$  donnée est déterminée par les valeurs propres du système linéarisé,

c'est-à-dire par les valeurs propres de la matrice jacobienne  $J = \left( \frac{dF_i}{dx_j} \right)$ , où  $1 \leq i, j \leq n$ ; évaluée au point d'équilibre. Les coefficients de la matrices  $J$  dépendent continûment de  $\alpha$ , avec dépendance continue de la solution stationnaire  $X(\alpha)$ . Cependant les valeurs propres dépendent aussi continûment de  $\alpha$ . Lorsque on fait varier ce paramètre, une ou plusieurs valeurs propres croisent l'axe imaginaire, la stabilité de la solution stationnaire peut changer.

Soit  $\alpha_0$  la valeur critique d'un paramètre pour laquelle la partie réelle d'un ou plusieurs valeurs propres devient nulle. Pour  $\alpha < \alpha_0$  toutes les valeurs propres de  $J$  sont dans la gauche de demi-plan complexe.

Ensuite, la solution stationnaire satisfait les conditions suivantes à l'issue de l'analyse locale :

- $\alpha < \alpha_0$  est stable .
- $\alpha = \alpha_0$  est critique.
- $\alpha > \alpha_0$  est instable.

En  $(X^*, \alpha_0)$ , si la valeur propre est égale à zéro, il découle du théorème de la fonction implicite que les équilibres de (1.1) pour une valeur  $\alpha$  différente de  $\alpha_0$  peuvent être exprimés par la fonction lisse  $X = X(\alpha)$ . La fonction  $X(\alpha)$  est appelée une branche d'équilibres. Si en  $(X^*, \alpha_0)$ , plusieurs branches d'équilibres se rejoignent, le point  $(X^*, \alpha_0)$  est dit point de bifurcation. Dans les Figures 1.10 et 1.11, les lignes pleines et en pointillés représentent les branches d'équilibre. Les lignes pleines représentent un équilibre stable et la ligne cendrée un équilibre instable. Comme on peut le voir sur le diagramme de bifurcation.

### 1.6.1.3 Bifurcation de Hopf

Dans ce paragraphe, nous discuterons du cas dans lequel la partie réelle d'une paire de valeurs propres conjuguées complexes devient nulle. Dans certaines circonstances, une branche de solutions périodiques (cycles limites) apparaît adjacente à la branche de solutions stationnaires.

Le type de bifurcation qui relie les équilibres au mouvement périodique est communément appelé bifurcation de Hopf.

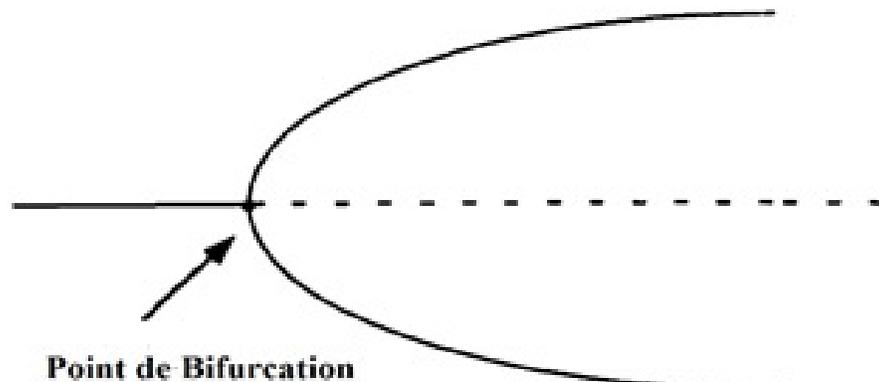


FIGURE 1.10 – Diagramme de bifurcation

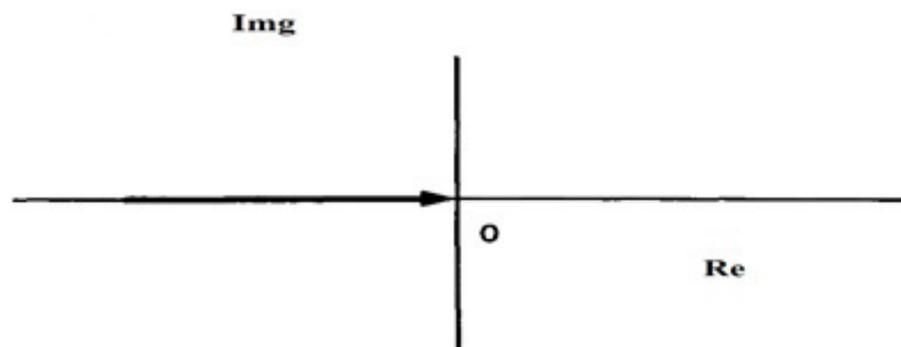


FIGURE 1.11 – Bifurcation Réelle

**Définition 1.3.1** - L'apparition d'un portrait de phase topologique non équivalent sous variation des paramètres s'appelle une bifurcation. Un point d'équilibre est dit hyperbolique si la Jacobienne n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire.

- Un équilibre est localement asymptotiquement stable si pour toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne  $\Re(\lambda) < 0$ . Si pour au moins une valeur propre  $\Re(\lambda) > 0$ , le point d'équilibre est instable. Ici,  $\Re(\lambda) < 0$  représente la partie réelle de  $\lambda$ .

Par exemple, une bifurcation de Hopf, où l'équilibre change de stabilité et une orbite périodique est née, est une bifurcation locale. Cependant, il existe également des bifurcations qui ne peuvent pas être détectées en regardant l'alentour du point d'équilibre ou d'orbite périodique, Ce

sont des bifurcations globales. Un système présente une bifurcation de Hopf lorsqu'un paramètre approprié passe la valeur critique. Les conditions de bifurcation de Hopf sont discutées selon le théorème de bifurcation de Poincaré-Andronov - Hopf. Les stabilités du point d'équilibre et de l'orbite périodique émergent, (naissant), du point d'équilibre sont également utilisés. Un point de bifurcation de Hopf relie des solutions périodiques. En fait, la bifurcation précédente où un point fixe stable se transformait continuellement en une orbite périodique stable était une bifurcation dite de Hopf super critique. Contrairement à cela, dans une bifurcation de Hopf sous-critique, une orbite périodique instable fusionne en un point fixe stable de sorte que ce dernier devient répulsif et qu'aucune orbite stable n'est plus présente dans son voisinage lorsque le paramètre pertinent dépasse la valeur de bifurcation.

**Définition 1.3.2** La bifurcation correspondant à la présence des valeurs propres  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0, \omega_0 > 0$ , s'appelle une bifurcation de Hopf ou bifurcation de Andronov- Hopf. Pour cette bifurcation, une orbite périodique est née et il y a un échange de stabilité du point d'équilibre.

**Théorème 1.3.1** [67] Le champ vectoriel subit une bifurcation de Hopf s'il satisfait simultanément les trois conditions suivantes :

1.  $F(X_c, \alpha_c) = 0$  Où  $\alpha_c$  est le paramètre critique qui fait annuler la partie réelle de la paire valeurs propres.
2. La matrice jacobienne,  $J = \left( \frac{dF_i}{dx_j} \right)$ , où  $1 \leq i, j \leq n$ , a une paire de valeurs purement imaginaires  $\lambda(\alpha_c) = \pm i\omega_0$ , et
- 3.

$$\frac{d(\Re(\lambda(\alpha_c)))}{d\alpha} \neq 0 \quad (1.3)$$

Il y a ensuite apparition ou disparition des cycles limites en  $(X_c, \alpha_c)$  selon le signe de la dérivée en (1.3).

La valeur  $\alpha_c$  est la valeur de bifurcation de Hopf. L'exigence (1.3) garantit qu'il y a un croisement transversal de l'axe imaginaire par la paire de valeurs propres complexes conjuguées.

La bifurcation de Hopf conclut plus spécifiquement la famille des solutions périodiques paramétrées  $X(t, \alpha_c)$  de l'équation (1.1) existent toujours au voisinage de  $(X_c, \alpha_c)$ .

## 1.7 Formulation Mathématique

### 1.7.1 Introduction

Jusqu'à maintenant, nous avons décrit le fonctionnement nominal d'un compresseur axial et ses principales formes d'instabilité. Dans cette partie, nous allons concentrer notre attention sur la modélisation théorique à travers un modèle développé par Greitzer. Le modèle de Greitzer et ses conséquences pour l'instabilité sont décrits dans la section 1.7.2.1.

Les systèmes de compression sont toujours soumis à des perturbations de différentes natures qui empêchent leur bon fonctionnement. Plusieurs modèles mathématiques ont été développés dans la littérature pour représenter nettement ces systèmes réels.

### 1.7.2 Formulation du système de compression

Modèles pour développer les systèmes de compression, à la fois axiale et centrifuge, ont été proposés par de nombreux auteurs. Une référence classique est Emmons et al. [21]. Dans ce qui suit, un système de compression se rapportera à un système constitué par un compresseur de mise sous pression le fluide incompressible, qui est déchargé dans un volume de plénum se trouvant dans le système qui se décharge en suite par l'intermédiaire d'une vanne de contrôle. Ensuite, d'autres auteurs comme Moore et Greitzer sont les premiers spécialisés dans la théorie non linéaire traitant le décrochage tournant et le pompage. L'analyse et la modélisation effectives remontent aux travaux de Greitzer [34] puis de Greitzer et Moore [33]. Parmi ces travaux, le modèle de Greitzer [34] à paramètre  $B$  est bien connu et efficace pour analyser les caractéristiques de décrochage et de pompage.

### 1.7.2.1 Modèle de Greitzer

En 1976, Greitzer [34] a mis en place un modèle mathématique qui cartographie non seulement le compresseur mais également l'ensemble du système. Aussi, il permet d'avoir une analyse effective de prédire le type d'instabilité qui se déclenche avant l'autre suivant les conditions et la configuration étudiée [66]. Ce modèle a été obtenu pour les systèmes de compression axiale, mais Hansen et al. [37] a prouvé que ce dernier peut être utilisé avec succès dans les compresseurs centrifuges, ce qui a été prouvé dans [34] :

#### Les hypothèses du modèle :

Le modèle de Greitzer est développé selon les hypothèses suivantes :

- La vitesse du compresseur est constante.
- L'écoulement incompressible, non visqueux et unidimensionnel dans les conduits, donc le débit massique le long des tuyaux du compresseur et de la vanne de contrôle sont constants.
- L'écoulement est compressible ainsi que la pression est uniforme (isentropique) dans tout le plénum.
- La force gravitationnelle est négligée.

Le système de compression est constitué d'un conduit d'admission à l'entrée, d'un compresseur, d'un autre conduit à la sortie du compresseur en liaison avec le plénum, le plénum et une vanne de contrôle attachée par un conduit de sortie à la fin du système. La longueur de tuyau à section constante pour tenir compte de la dynamique de l'écoulement dans le conduit du compresseur.

L'évacuation du plénum se fait alors via un étranglement dans un conduit de sortie dont le diamètre est là encore bien inférieur à celui du plénum. La vanne de contrôle en pratique peut souvent n'être qu'une tuyère annulaire à section variable, est également, à travers lequel la pression chute, plus un conduit à section constante.

#### 1. Équations du mouvement [30]

La variation du débit massique dans le conduit du compresseur peut être lié à la différence de pression dans le conduit  $\Delta P = (P_p - P_0)$  et l'augmentation de la pression à travers le

compresseur,  $C(m_c)$ , en terme du débit massique est donné par l'équation suivante :

$$-\Delta P + C(m_c) = \frac{l_c}{A_c} \frac{dm_c}{dt} \quad (1.4)$$

Cette équation est l'intégrale première de l'équation du moment dans le cas unidimensionnel.

La même approche est utilisée pour le conduit de la vanne de contrôle, ce qui donne :

$$\frac{dm_t}{dt} = \frac{A_t}{l_t} [-\Delta P + C(m_t)] \quad (1.5)$$

Où  $C(m_t)$  est un terme non linéaire qui décrit la chute de pression à travers la vanne de contrôle du système.

## 2. Équation de la continuité dans le plénum [30]

Dans le plénum, les vitesses du fluide sont négligeables. En outre, les dimensions du plénum sont typiquement très inférieures à la longueur d'onde d'une onde acoustique ayant une fréquence de l'ordre de celle associée au pompage. Par conséquent, la pression statique sera uniforme dans tout le plénum à tout instant. En appliquant le principe de la conservation de la masse dans le plénum, le bilan de masse peut s'écrire :

$$V_p \frac{d(\rho_p)}{dt} = (m_c - m_t), \quad (1.6)$$

Où  $\rho$  est la densité du gaz dans le plénum,  $m_c$  est le débit massique entrant dans le plénum depuis le compresseur et  $m_t$  est le débit massique sortant du plénum vers la vanne de contrôle. En supposant que le changement dans le plénum est polytropique alors le changement de la densité est lié aux variations de pression dans le plénum par l'équation suivante :

$$\frac{d(\rho_p)}{dt} = \frac{1}{K_0 P_p} \frac{d(\rho_p P_p)}{dt},$$

où  $K_0$  est l'indice polytropique. Dans les travaux expérimentaux de Greitzer [34], il a prouvé que c'est une hypothèse extrêmement bonne de prendre  $K_0$  égal à  $\gamma$ , le rapport de chaleur spécifique. De plus, les rapports de pression et de température globaux des systèmes de compression étudiés étant au voisinage de l'unité, la quantité  $(\rho_p/P_p)$  n'est pas différente de  $(\rho/P)$  et on peut remplacer cette dernière dans la relation pression-densité .

Donc l'expression de l'équation de la conservation de la masse dans le plénum peut s'écrire :

$$\frac{\rho V_p}{\gamma P} \frac{d(P_p - P)}{dt} = (m_c - m_t) \quad (1.7)$$

### 3. Réponse transitoire du compresseur

L'augmentation de pression dans le compresseur noté,  $C$ , est une fonction fortement non linéaire du débit massique à travers le compresseur. Comme ce n'est pas facile de prédire la forme de la courbe sur les différents régimes de mode stable et instable d'écoulement et plus particulièrement pendant le cycle rencontré en pompage, la forme de cette dernière doit être obtenue par la voie expérimentale. L'un des résultats obtenus, d'après Greitzer [34], fournit une courbe caractéristique de la croissance de pression dans le compresseur en débit massique pendant le régime permanent défini comme un fonctionnement avec un débit massique dans l'anneau du compresseur. L'hypothèse dans les analyses précédentes, l'équation (1.7) était cette corrélation est la même transitoirement qu'elle l'est en régime permanent. Cependant, Greitzer [34] déclare que le compresseur ne répond pas de manière quasi constante aux changements de débit massique dans la pratique. Plus précisément, des expériences ont montré qu'il existe un décalage temporel certain entre l'apparition d'une instabilité du compresseur et l'établissement d'un modèle de décrochage rotatif pleinement développé. Le décalage temporel mentionné est considéré comme suffisamment long pour permettre un changement significatif du débit massique du compresseur durant le développement des cellules de décrochage. Pour tenir compte des écarts par rapport au comportement quasi-stationnaire, un modèle dynamique du premier ordre est proposé :

$$\tau \frac{d(C)}{dt} = (C_{ss} - C), \quad (1.8)$$

où  $C_{ss}$  désignant l'augmentation de pression du compresseur en régime permanent qui peut être déterminée à partir de la carte mesurée du compresseur durant le même régime. La constante du temps,  $\tau$ , est le temps de relaxation du débit du compresseur, peut être obtenue par la formule suivante :

$$\tau = \frac{N \ 2\pi r \omega}{U_t},$$

où  $N$  est la vitesse de rotation du rotor,

$$\omega_H = a \sqrt{\frac{A_C}{V_P L_C}}$$

est la fréquence de Helmholtz. La chute de pression à travers la vanne de contrôle en terme du débit massique est donnée par la formule suivante :

$$\frac{m_t^2}{2\rho A_t^2} = C(m_t)$$

Les équations (1.4), (1.5), (1.6) et (1.8) sont les équations décrivant la dynamique du système de compression à compresseur axial.

#### 4. Échelle aérodynamique (Adimensionnel)

En général, la mise à l'échelle aérodynamique est utilisée pour permettre une meilleure comparaison entre les différentes turbomachines. Un choix de facteurs d'échelle appropriés dépend par exemple du type de machine et de l'importance relative des différentes variables impliquées. Diverses méthodes de mise à l'échelle appropriées sont discutées par Cumpsty [11]. En plus de permettre la comparaison entre différentes machines, la mise à l'échelle présente un autre avantage. En choisissant des facteurs d'échelle appropriés, le nombre de paramètres pertinents dans un modèle mathématique peut être réduit. En d'autres termes, ce ne sont généralement pas les paramètres individuels mais des groupes de paramètres (sans dimension) qui déterminent le comportement dynamique. Pour le modèle de Greitzer, il est courant de reformuler les équations différentielles sous une forme non dimensionnelle. A cet effet, la densité ambiante,  $\rho$ , la vitesse axiale désirée moyenne du rotor,  $U_t$  et la surface du conduit de compresseur,  $A_c$ , (en mètre carré), sont combinées pour normaliser les débits massiques en utilisant la quantité  $\rho U_t A_c$ , la différence de pression avec  $\frac{1}{2}\rho U_t^2$  et le temps en utilisant le terme  $\frac{r}{U_t}$  comme l'a fait Greitzer [34]. Le modèle normalisé de Greitzer est donné par le système (2.1a)-(2.1d).

# Etude paramétrique des phénomènes d'instabilité et leurs transitions

L'apparition et la propagation des instabilités aérodynamiques dans les compresseurs axiaux peuvent conduire à la dégradation des composants internes. Leur évolution dans ces machines est étroitement liée aux paramètres de fonctionnement, qui sont capables de produire les phénomènes de pompage et de décollement tournant. Dans ce travail, en considérant un compresseur à un seul étage, le comportement de ces deux phénomènes est étudié en détail. Sur la base du modèle de Greitzer, les différentes étapes relatives à leur distribution ont été modélisées par un système dynamique à quatre équations, résolu par une méthode Rung-Kutta du quatrième ordre. Les effets du papillon et des coefficients de Greitzer sur ces instabilités, exprimés respectivement par  $B$  et  $K_1$ , sont analysés et comparés. De plus, à la fin de ce travail, nous avons déduit principalement des conditions de transition entre ces deux instabilités.

## 2.1 Modélisation du système de compression

### 2.1.1 Modèle géométrique

Le modèle physique d'écoulement considéré est présenté sur la Figure 2.1, avec les variables principales d'état associées  $\Phi$  et  $\Psi$  liées au débit massique du gaz à travers le compresseur et au

taux de pression à travers le plénum respectivement.

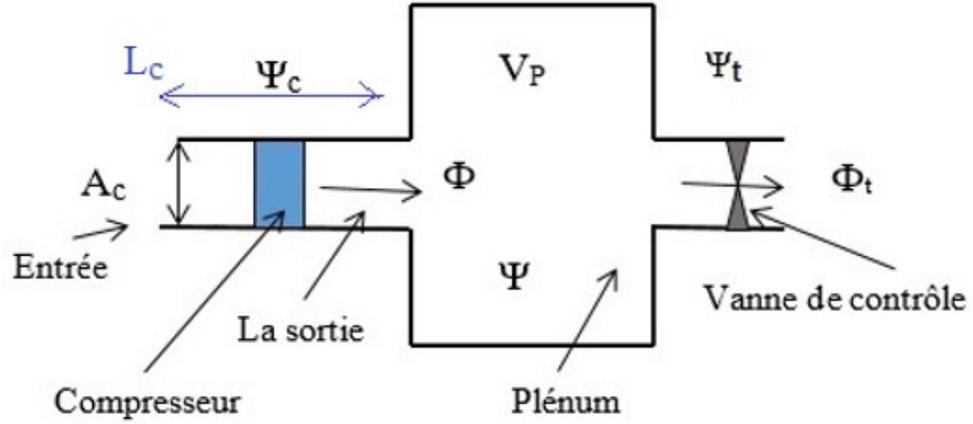


FIGURE 2.1 – Schéma du système de compression

### 2.1.2 Modèle analytique

Notre modèle comporte quatre équations différentielles ordinaires du premier ordre avec quatre variables d'état  $(\Phi, \Phi_t, \Psi, \Psi_c)$ , qui ont été obtenues à partir de l'équation de l'écoulement de mouvement dans le système de compression. On obtient ainsi le système dynamique suivant [20] :

$$\begin{cases} \frac{d\Phi}{d\xi} = B(\Psi_c - \Psi) & (2.1a) \\ \frac{d\Phi_t}{d\xi} = \frac{B}{G}(\Psi - F_1) & (2.1b) \\ \frac{d\Psi_t}{d\xi} = \frac{1}{B}(\Phi - \Phi_t) & (2.1c) \\ \frac{d\Psi_c}{d\xi} = \frac{1}{\tau}(\Psi_{c_{ss}} - \Psi_c) & (2.1d) \end{cases}$$

où les variables d'état non dimensionnelles sont les suivantes :  $\Phi = \frac{m_c}{\rho A_c U_t}$  est le coefficient de débit massique à travers le compresseur,  $U_t$  est la vitesse tangentielle constante du compresseur au diamètre moyen  $r$ ,  $m_c$  est le débit massique dans le compresseur,  $A_c$  est la surface de la section du conduit du compresseur,  $\rho$  est la densité du gaz,  $\Psi = \frac{\Delta P}{0.5\rho U_t^2}$  le taux de pression dans le plénum,  $\Delta P$  la différence de pression entre le plénum et la sortie de la vanne de contrôle,  $\Phi_t = \frac{m_t}{\rho A_c U_t}$  le coefficient du débit massique à travers la vanne de contrôle à la sortie du système de compression,  $m_t$  le débit massique à travers le papillon,  $\Psi_c$  le taux de pression à travers le compresseur,  $\xi = t\omega_H$

où  $t$  est le temps réel et  $\omega_H = a_0 \sqrt{\frac{A_c}{V_P L_c}}$  est la fréquence de Helmholtz avec  $V_P$  est le volume du Plenum.  $\Psi_{c_{ss}}$  est le taux de pression caractéristique en régime permanent et  $F = \frac{A_c^2}{A_t^2} \Phi_t^2$  est la caractéristique de la vanne de contrôle qui représente la chute de pression. Ces dernières sont les sources non linéaires du système.  $a_0$  la vitesse du son.  $\tau$  est le temps du système de compression qui serait différent en décrochage et en décrochage tournant [51].

Les paramètres sans dimension inclus dans ce système sont :

- Le paramètre de Greitzer :  $B = \frac{U_t}{2a} \sqrt{\frac{V_p}{A_c L_c}}$ , le rapport des paramètres géométriques entre la vanne et la conduite du compresseur est donné par  $G = \frac{L_T A_c}{L_c A_T}$ .
- Le coefficient de la vanne de contrôle qui est le rapport de la section de passage du compresseur à celle de la section de commande vanne de contrôle donné par l'expression  $K_1 = \frac{A_c^2}{A_T^2}$ .
- $\tilde{\tau}$  : est le temps constant du compresseur qui serait différent en décrochage et en décrochage tournant.
- $\xi$  : est le décalage temporel sans dimension.

### 2.1.3 Point d'équilibre

Le point de fonctionnement correspondant au régime permanent du système (2.1a)-(2.1d) est donné par le système algébrique suivant :

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = \frac{d\Phi_t}{d\xi} = \frac{d\Psi}{d\xi} = \frac{d\Phi_c}{d\xi} = 0 \quad (2.2)$$

où :

$$\Psi_0 = \Psi_{c_{ss0}} = \Psi_{c_0} = F_0 \quad \text{et} \quad \Phi_0 = \Phi_{t_0}.$$

Il existe un point fixe unique pour le système dynamique (2.1a)-(2.1d) à quatre dimensions  $(\Phi_0, \Phi_{t_0}, \Psi_0, \Psi_{c_{ss0}})$ , ce point est défini par  $(\Phi_0, \Psi_0)$  dans le plan  $(\Phi, \Psi)$  par la courbe caractéristique du compresseur et l'intersection de la vanne de régulation ( Figure 1.5).

## 2.2 Résultats et discussion

Les résultats obtenus en utilisant la méthode de Runge-Kutta du quatrième ordre pour résoudre le système non linéaire (2.1a)-(2.1d), nous ont permis d'analyser le système de compression en fonction des nombres adimensionnels  $B$  et  $K_1$ . Nous avons ainsi détecté les limites de transition de phase d'un phénomène à un autre.

Cette analyse basée sur la variation de  $B$  en fonction de  $K_1$ . Chaque étape contient trois valeurs de  $K_1$  qui forment trois colonnes (voir : tableau 1) pour des valeurs fixées de  $B$ , à savoir, les valeurs basses ( $B < 1$ ), les valeurs moyennes au voisinage de 1 et les grandes valeurs ( $B > 1$ ).

Ce travail considère que les caractéristiques géométriques du compresseur sont constantes. Ainsi, chacun des exemples considérés ne fait varier que les paramètres  $B$  et  $K_1$ .

Comme valeurs de calcul initiales, nous avons considéré :  $Lc = 1.46$ ,  $G = 0.36$ , et  $\xi = 0$ , ce qui donne  $(\Phi_1, \Psi_1) = (0.1, 0.8)$  qui est le point du départ de tous les cas considérés dans ce travail.

Le tableau suivant résume les différentes conditions de départ de  $B$  et  $K_1$  pour les différentes figures relatives aux résultats obtenus :

	$K_1 = 1, 3, 5$	$K_1 = 6, 8, 12$	$K_1 = 13, 15, 18$
B=0.3	Figure 2.2	Figure 2.3	Figure 2.4
B=0.6	Figure 2.5	Figure 2.6	Figure 2.7
$B_{crit} = 0.8$			
B=1	Figure 2.8	Figure 2.9	Figure 2.10
B=2	Figure 2.11	Figure 2.12	Figure 2.13

TABLE 2.1 – Répartition des valeurs de  $B$ , selon quelques valeurs de  $K_1$

- **Pour les faibles valeurs de  $B$  ( $B < 1$ ) :**

- **Pour  $B = 0.3$  :**

Suivant les faibles valeurs de  $K_1$ , ( $K_1 = 1, 3, 5$ ), les séries de chiffres correspondantes nous montrent clairement l'effet du coefficient  $K_1$ , concernant la naissance du décro-

chage. Ce dernier apparaît pour  $K_1 > 3$ . Cependant, on observe un pré-décrochage débutant pour  $K_1 = 1$ , (Figure 2.2 (a), (b), (c)).

De plus, on peut observer l'influence de  $K_1$  sur les amplitudes et la durée au début des instabilités sur les Figures 2.2 (a), (b), 2.3 (a), (b) et 2.4 (a), (b).

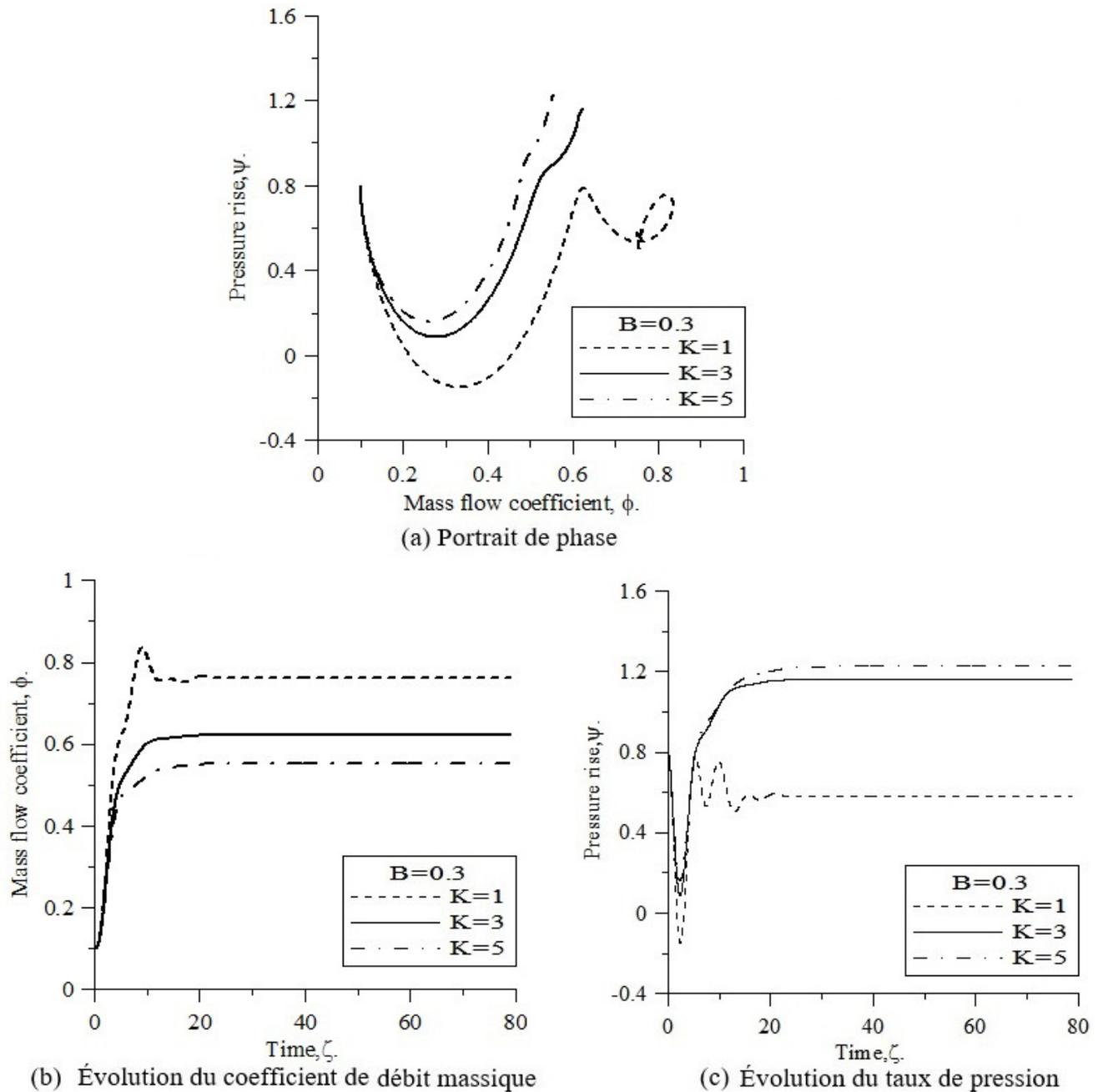
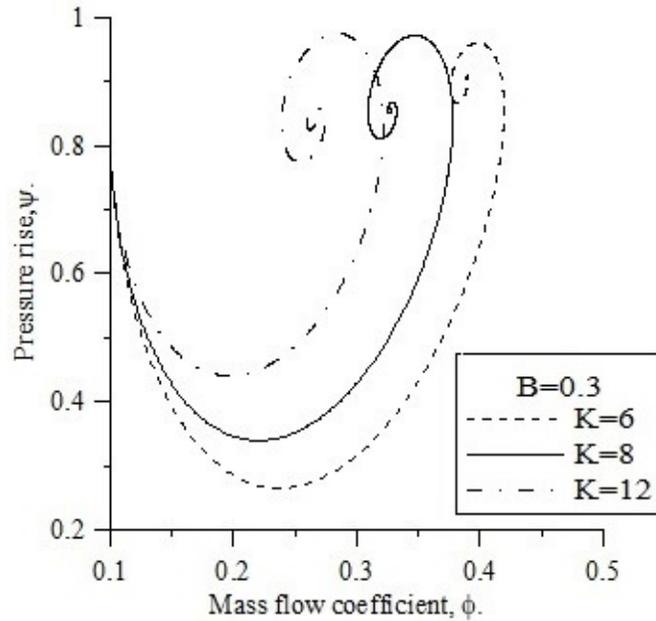
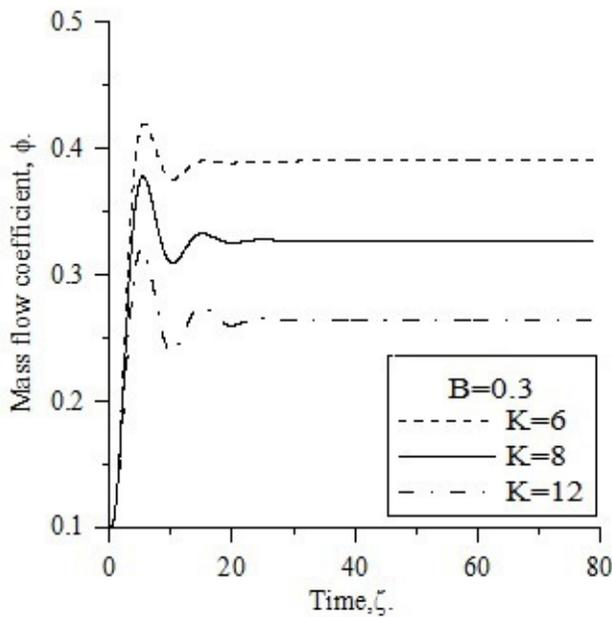


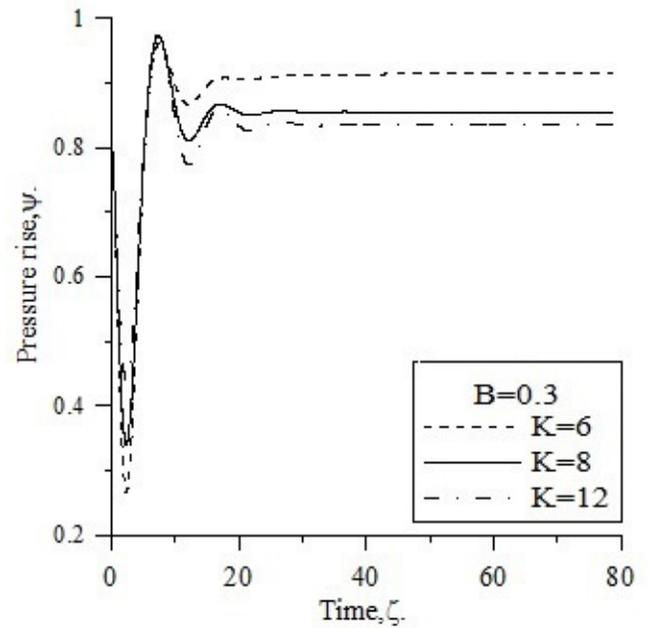
FIGURE 2.2 –  $K_1 = 1, 3$  et  $5$ , avec  $B = 0.3$ . Condition initiale :  $(0.1, 0.8)$ .



(a) Portrait de phase



(b) Évolution du coefficient de débit massique



(c) Évolution du taux de pression

FIGURE 2.3 –  $K_1 = 6, 8$  et  $12$ , avec  $B = 0.3$ . Conditions initiales :  $(0.1, 0.8)$ .

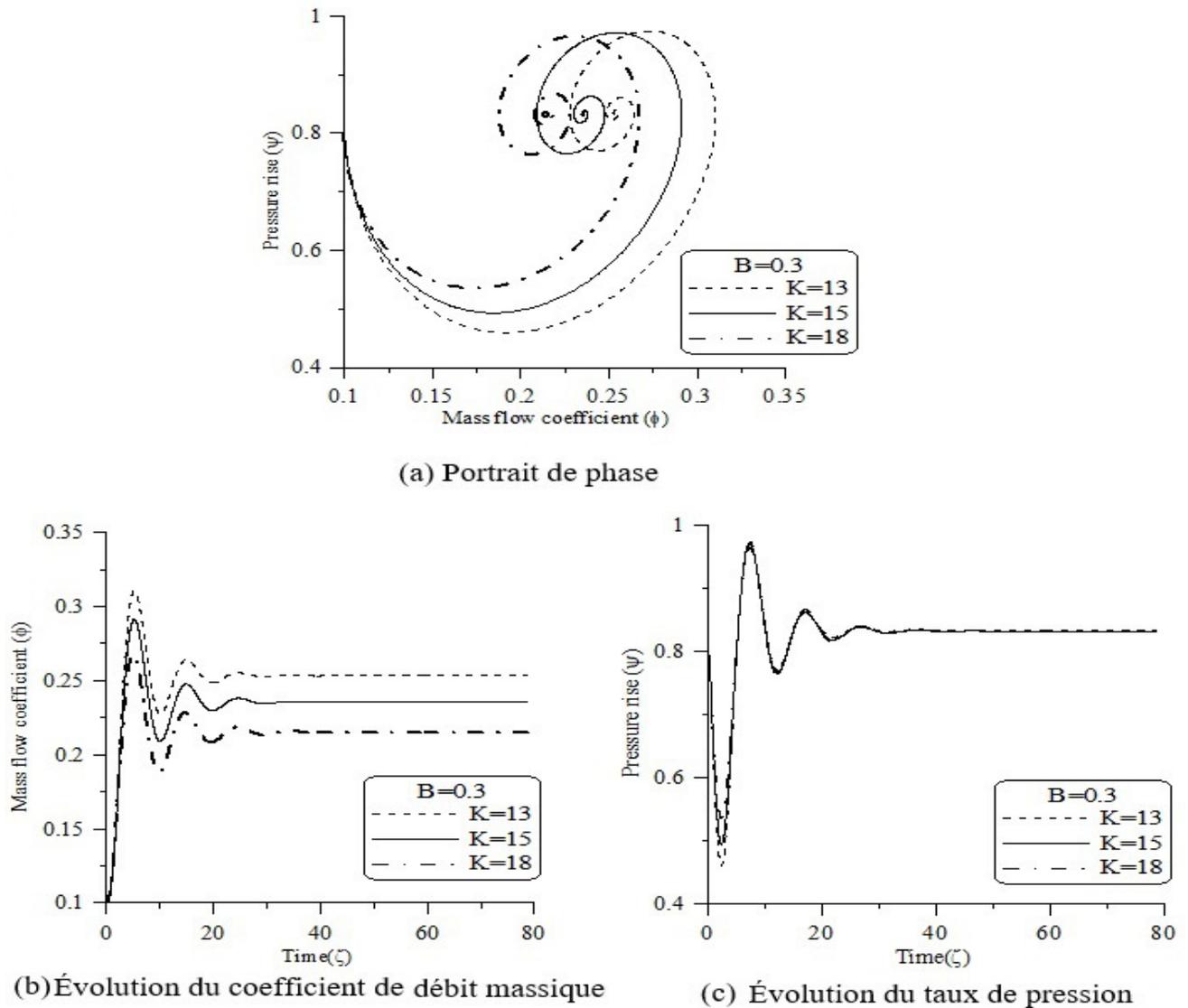


FIGURE 2.4 –  $K_1 = 13, 15$  et  $18$ , avec  $B = 0.3$ . Conditions initiales :  $(0.1, 0.8)$ .

— Pour  $B = 0.6$  :

Dans ce cas, pour toutes les valeurs précédentes de  $K_1$ , la naissance et l'évolution de décrochage tournant est clairement observable sur les Figures 2.5 (a), 2.6 (a) et 2.7 (a). En résumé, pour les faibles valeurs de  $B$ , premièrement, l'évolution des instabilités de débit massique et d'amplitudes de pression, ainsi que le déplacement des points d'équilibre correspondants sont fortement influencés par les valeurs de  $K_1$ . De plus, on remarque un fonctionnement du plénum similaire à celui de la canalisation.

Aussi, on remarque qu'avec la croissance de  $K_1$ , partant du même point initial  $(\Phi_1, \Psi_1) = (0.1, 0.8)$ , qui représente les conditions initiales, s'approche presque au même point d'équilibre.

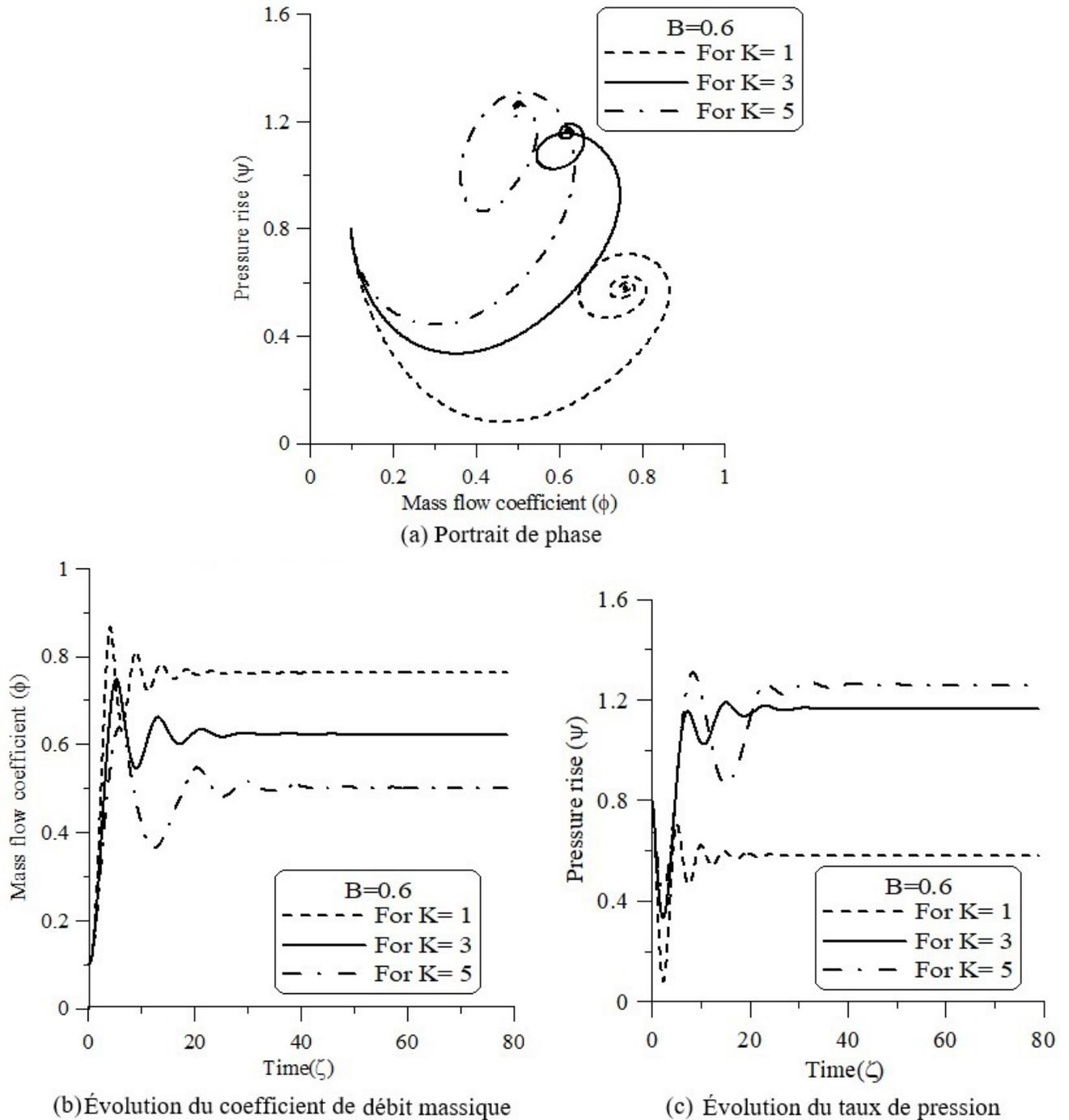


FIGURE 2.5 –  $K_1 = 1, 3$  et  $5$ , avec  $B = 0.6$ . Condition initiale :  $(0.1, 0.8)$ .

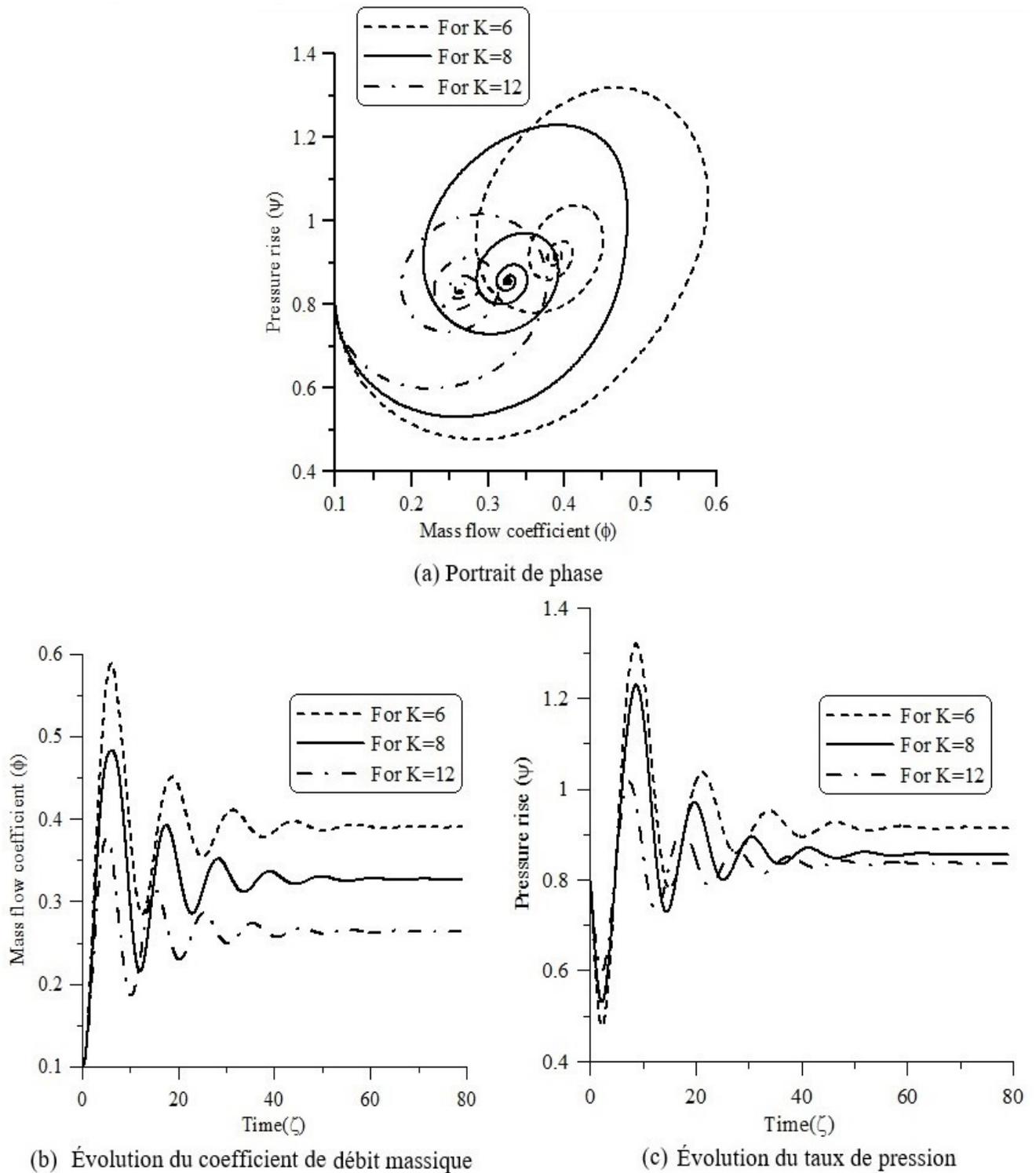


FIGURE 2.6 –  $K_1 = 6, 8$  et  $12$ , avec  $B = 0.6$ . Conditions initiales :  $(0.1, 0.8)$ .

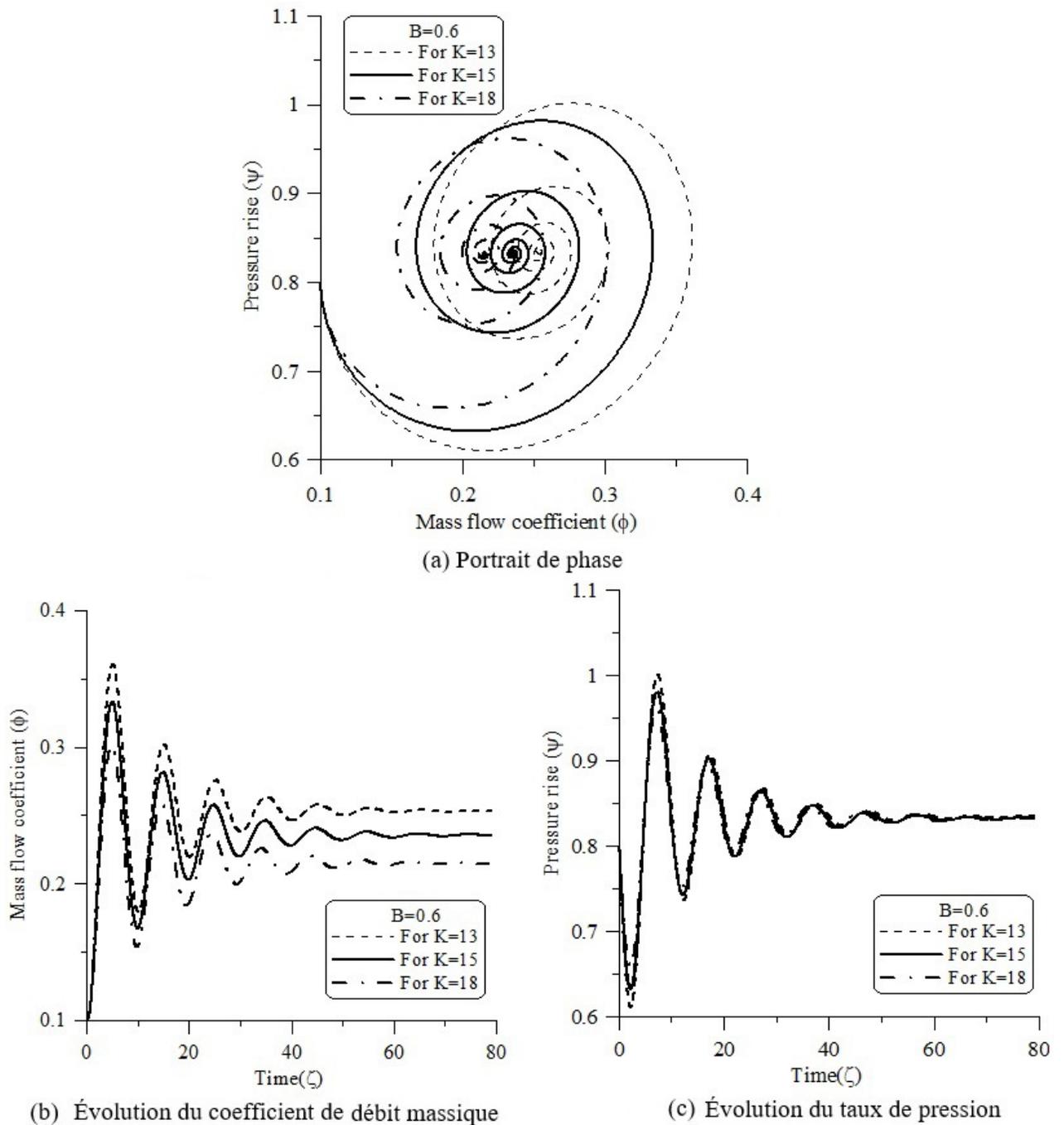


FIGURE 2.7 –  $K_1 = 13, 15$  et  $18$ , avec  $B = 0.6$ . Conditions initiales :  $(0.1, 0.8)$ .

- Pour les valeurs de  $B$  au voisinage de 1 ( $B \approx 1$ ) :

Dans ce cas, l'influence des valeurs basses et moyennes de  $K_1$ , sur l'apparition du phénomène d'instabilité de pompage, est clairement identifiable sur les Figures 2.8 et Figure 2.9. Plus

particulièrement, pour  $K_1 = 1, 3$  et  $K_1 = 5$ , la sensibilité de ces valeurs est très élevée, lorsque l'on observe la période du débit massique et celle de l'évolution de la pression, ainsi que les distances entre les positions des points d'équilibre. On peut également conclure que la valeur de  $B = 1$  est proche de la phase de transition entre décrochage tournant et pompage.

Ainsi, les oscillations de débit massique et de pression nous montrent une interaction entre le pompage et le décrochage tournant. Sur la Figure 2.9, le système reste continûment sous l'effet du pompage pour  $K_1 = 6$  et  $K_1 = 8$ . Cependant, son passage au décrochage se manifeste à la valeur de  $K_1 = 12$ . La croissance de  $K_1 = 13, 15$  et  $18$  indique clairement le retour au décrochage (Figure 2.10 (a), (b), (c)).

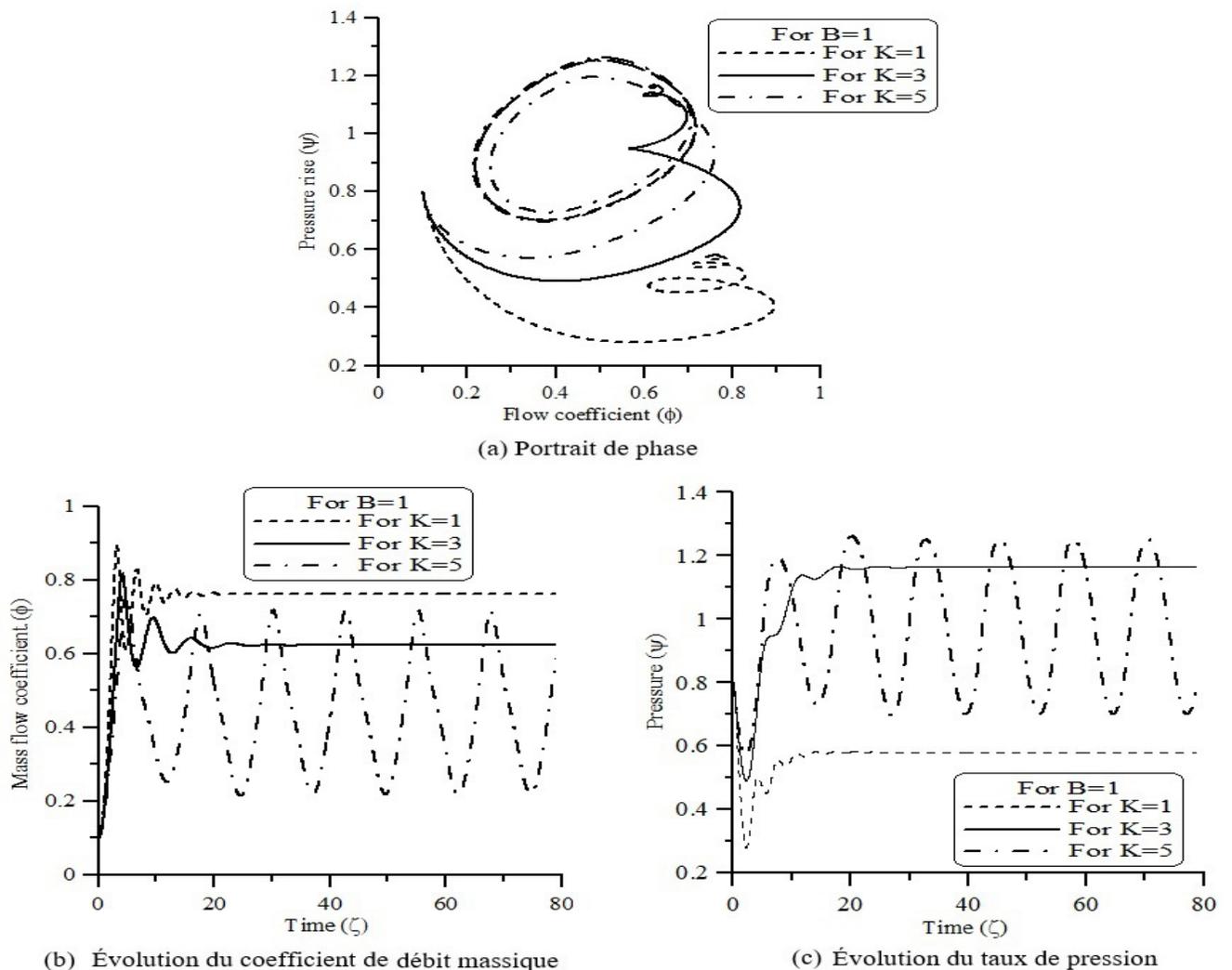
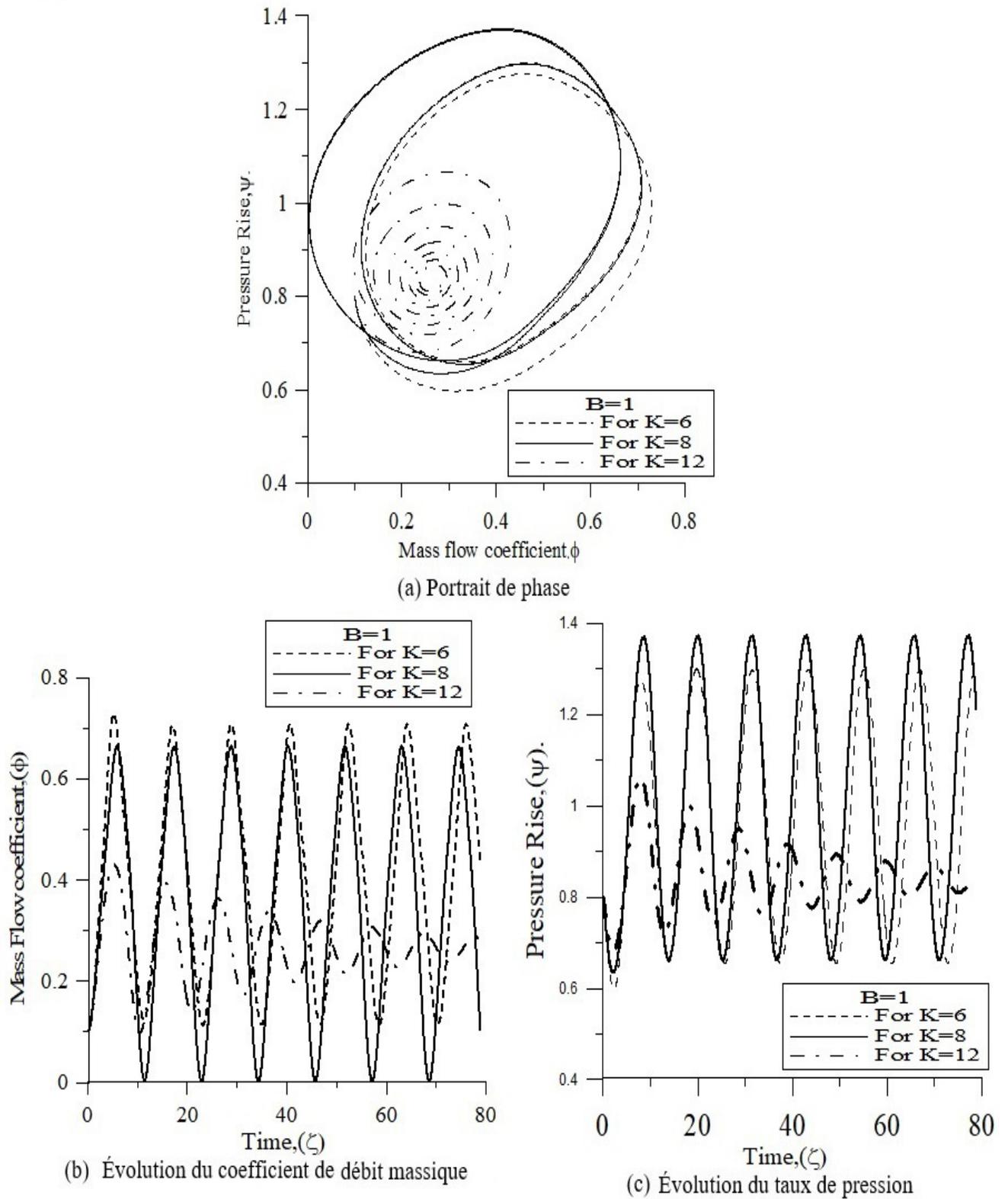
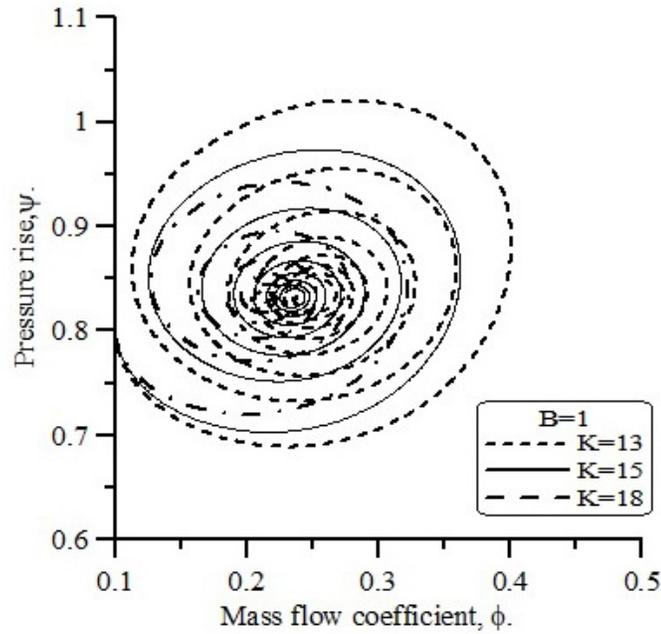
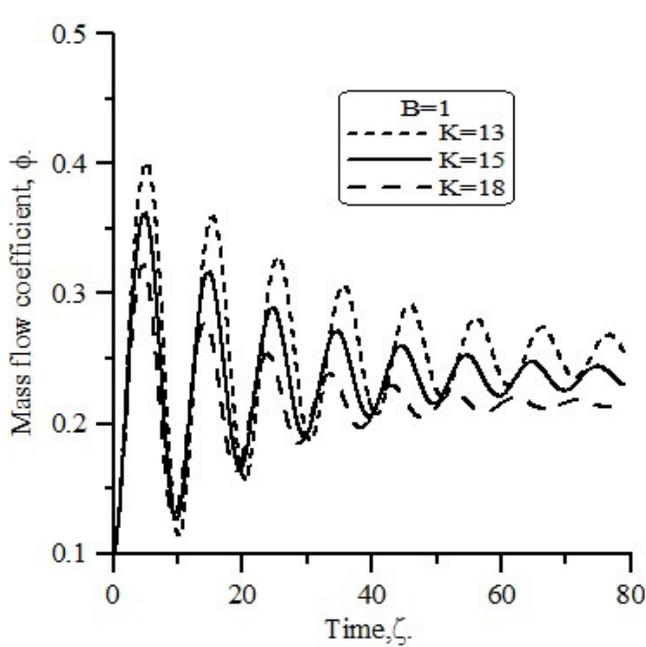


FIGURE 2.8 –  $K_1 = 1, 3$  et  $5$ , avec  $B = 1$ . Condition initiale :  $(0.1, 0.8)$ .

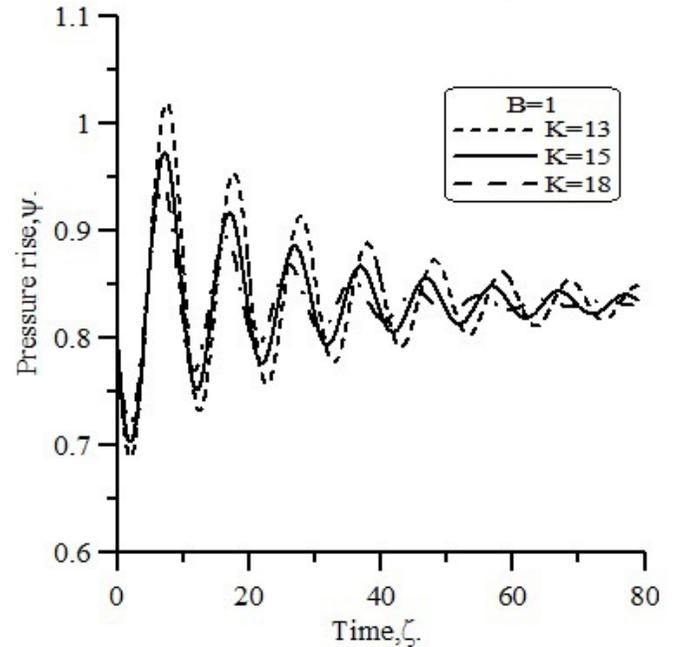
FIGURE 2.9 –  $K_1 = 6, 8$  et  $12$ , avec  $B = 1$ . Conditions initiales :  $(0.1, 0.8)$ .



(a) Portrait de phase



(b) Évolution du coefficient de débit massique



(c) Évolution du taux de pression

FIGURE 2.10 –  $K_1 = 13, 15$  et  $18$ , avec  $B = 1$ . Conditions initiales :  $(0.1, 0.8)$ .

- Pour les grandes valeurs de  $B$  ( $B > 1$ ) :

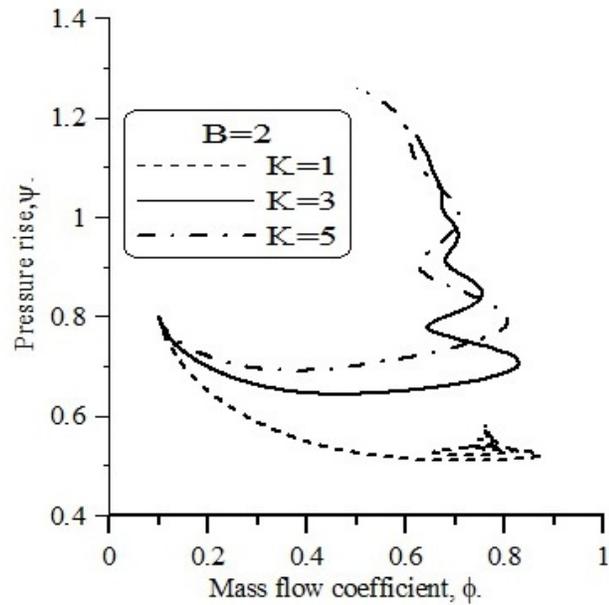
Pour  $B = 2$ , on remarque que le passage au pompage est détecté pour certaines valeurs du

coefficient  $K_1$ . Sur la Figure 2.11, avec de faibles valeurs de  $K_1$ , ( $K_1 = 1, 3$  et  $5$ ), compte tenu de la conservation de l'énergie entre la vanne et le plénum, on remarque qu'une ouverture de la vanne au voisinage de  $K_1 = 1$  a provoqué une chute de pression dans le plénum. L'impact de l'énergie cinétique du gaz pour ( $B = 2$ ), est plus grand et le résultat de  $B$  est prépondérant.

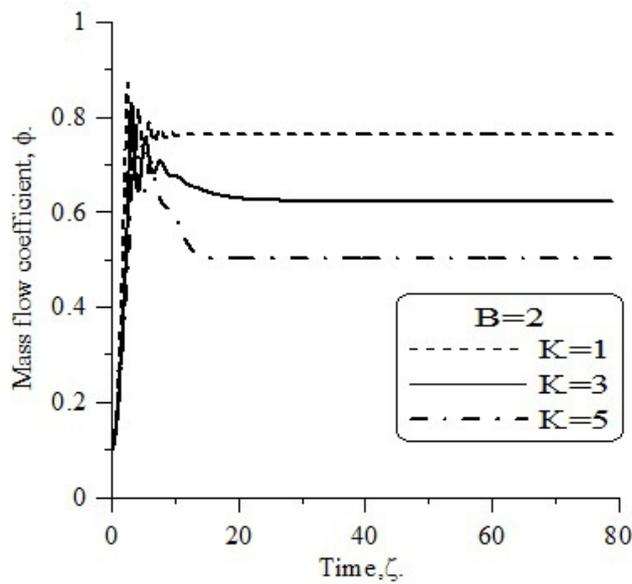
Pour  $K_1 \geq 2$ , on détecte une forte montée en pression jusqu'à environ ( $\Psi = 1.3$ ), les amplitudes sont constantes pour le débit massique, Figure 2.11 (b), (c) vérifie parfaitement ce phénomène. Dans la Fig.14, où les valeurs moyennes de  $K_1$ , avec la même valeur de  $B$  fixée précédemment, le phénomène nous montre un pompage profond pour ces trois valeurs de  $K_1$ .

Enfin, pour  $B = 2$ , on remarque sur la Figure 2.12 et la Figure 2.13 que le phénomène de pompage est soumis à des valeurs particulières de coefficient du débit massique et de taux pression de gaz, déterminées par les évolutions de ces deux derniers, on le voit bien sûr (Figure 2.12 (a) et Figure 2.13 (a)).

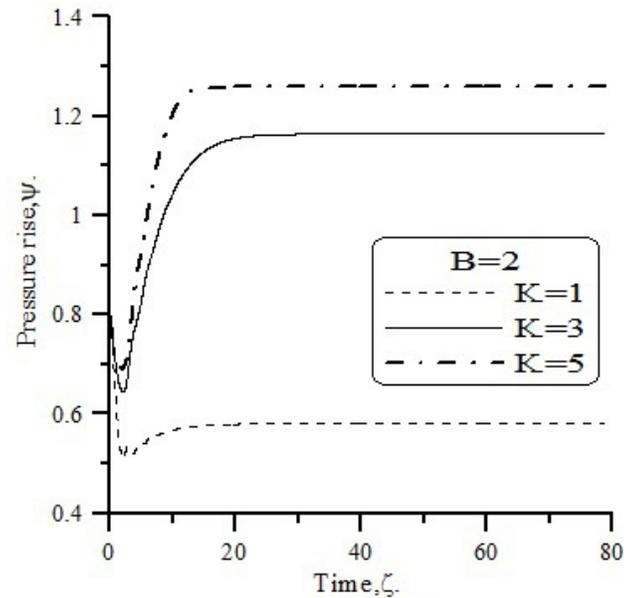
Aussi, on remarque que pour  $K_1 = 18$ , le fonctionnement du système devient moins instable à cause du retour vers le décrochage tournant.



(a) Portrait de phase

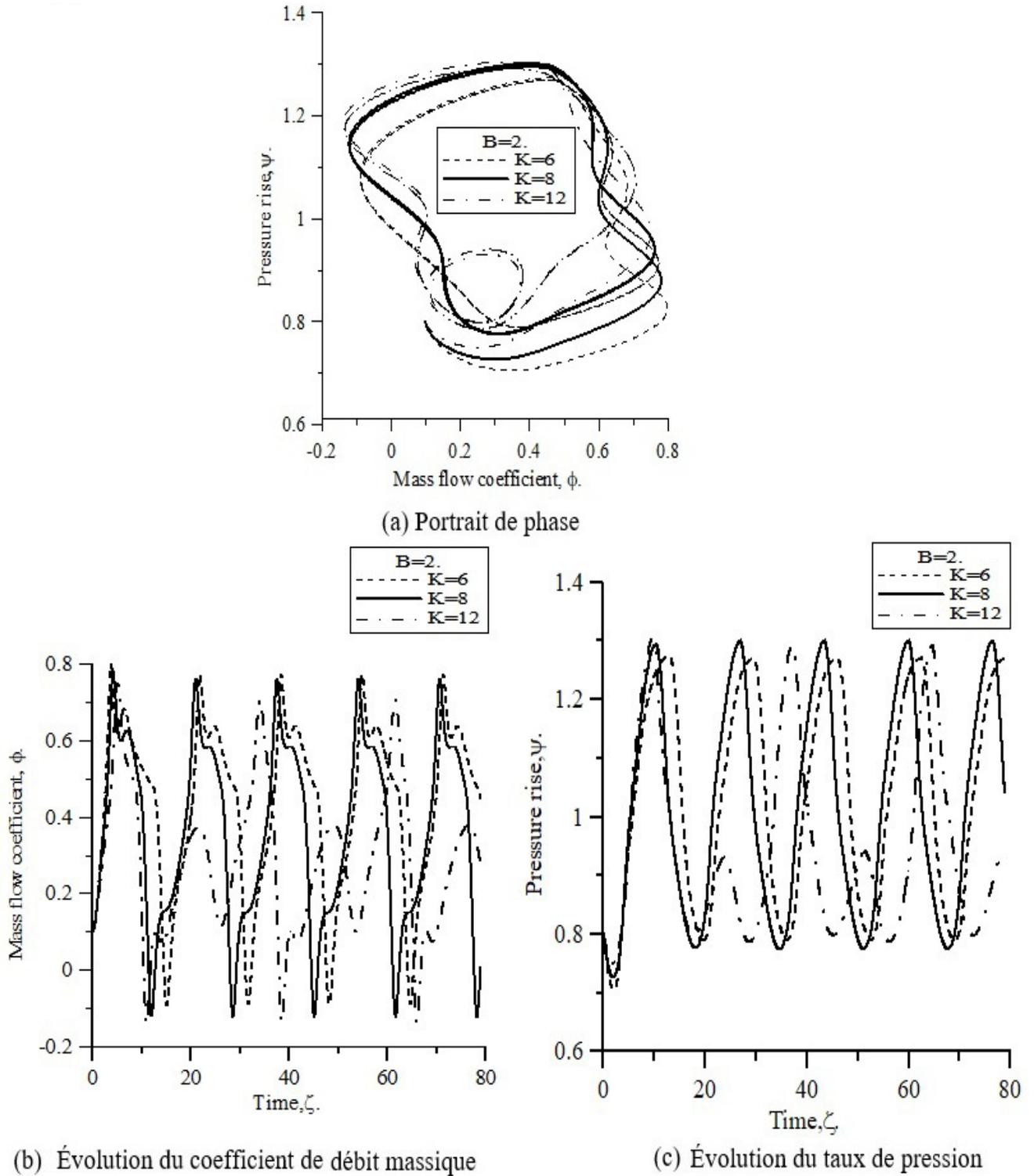


(b) Évolution du coefficient de débit massique



(c) Évolution du taux de pression

FIGURE 2.11 –  $K_1 = 1, 3$  et  $5$ , avec  $B = 2$ . Condition initiale :  $(0.1, 0.8)$ .

FIGURE 2.12 –  $K_1 = 6, 8$  et  $12$ , avec  $B = 2$ . Conditions initiales :  $(0.1, 0.8)$ .

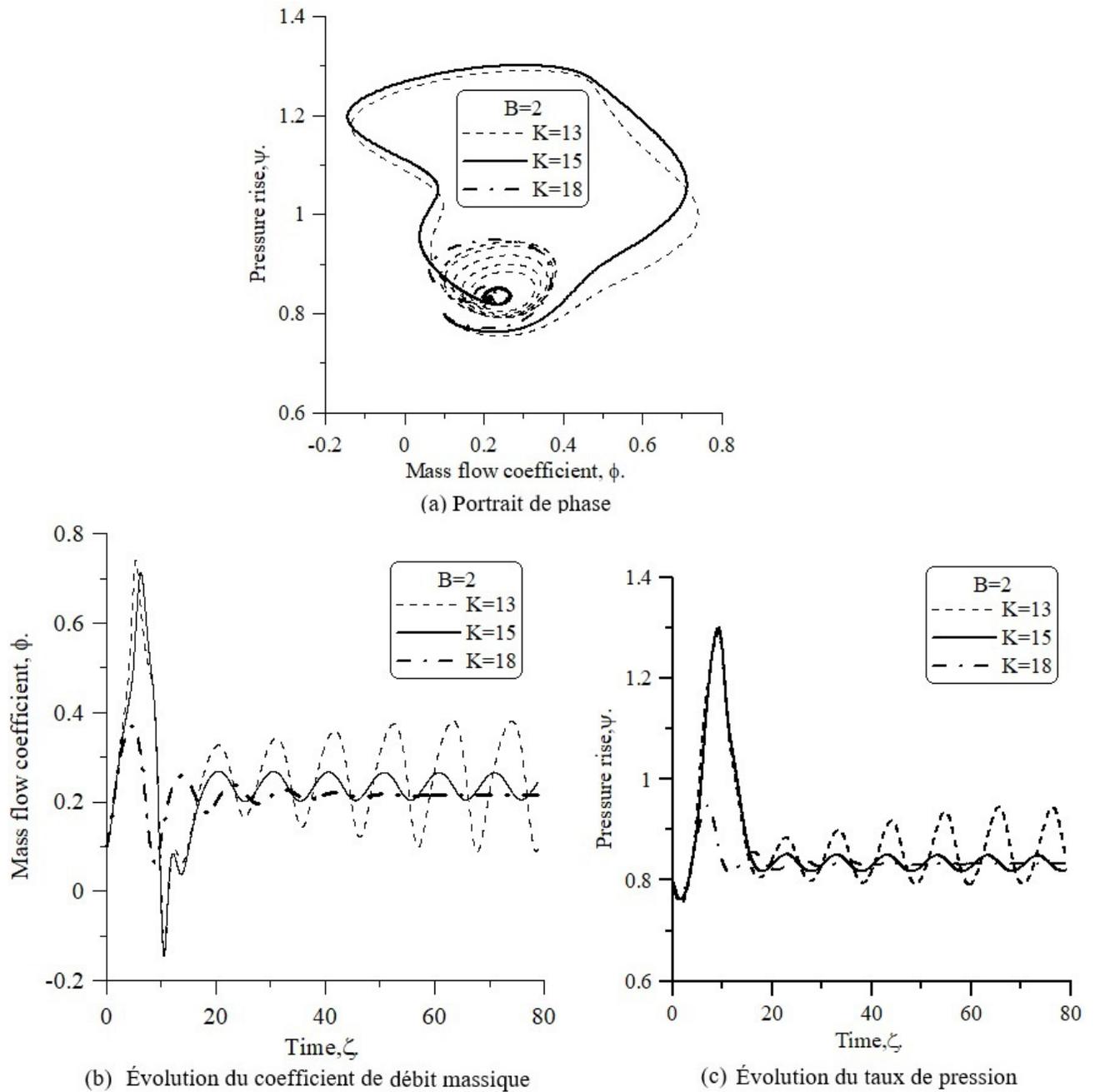


FIGURE 2.13 –  $K_1 = 13, 15$  et  $18$ , avec  $B = 2$ . Conditions initiales :  $(0.1, 0.8)$ .

## 2.3 Conclusion

Sur la base des écoulements internes de gaz dans le compresseur axial, nous avons ainsi supposé deux zones d'écoulement : une zone subsonique et une autre zone supersonique séparées par

un point critique dont la vitesse atteint une valeur critique de  $B$ . Ainsi, nous avons considéré l'influence du nombre  $K_1$ , avant et après la valeur critique de  $B_{crit} = 0.8$  selon les travaux de Greitzer, obtenant ainsi l'impact du nombre  $B$  sur le fonctionnement du système de compression. Pour les faibles valeurs du paramètre  $B$  ( $B = 0.3$  et  $B = 0.6$ ), le système évolue alternativement, entre les deux modes de pré-décrochage et de décrochage, et pour les grandes valeurs de  $K_1$ , ( $B = 2$ ), le mode de décrochage tournant est conservé. Pour les mêmes valeurs de  $B$ , les fluctuations des amplitudes  $\Psi$  et  $\Phi$  diminuent, selon la même croissance des valeurs du paramètre  $K_1$ . L'évolution des fonctions  $\Psi$  et  $\Phi$  pour  $B = 1$  et  $B = 2$  nous montre respectivement un passage du pompage classique vers le décrochage et du pompage profond vers le décrochage. Par la suite, on observe une transition vers le mode d'instabilité propre pour les valeurs moyennes de  $K_1$ . Par la suite, on observe une transition vers le mode d'instabilité propre pour les valeurs moyennes de  $K_1$ . Enfin, pour de grandes valeurs de  $K_1$  le système revient au décrochage tournant.

# Analyse de bifurcation locale d'un paramètre dans le modèle de Greitzer avec une caractéristique générale du compresseur

Sur la base du modèle réduit de Greitzer, une étude analytique sur les phénomènes d'instabilités du point de fonctionnement est présentée en utilisant certaines propriétés de base du système dynamique non linéaire. De plus, une proposition de courbe caractéristique du compresseur, adaptée au système non-stationnaire, est donnée. Le théorème de Routh-Hurwitz est appliqué pour déterminer les conditions de stabilité sur les paramètres du modèle. Une analyse accompagnée d'une discussion est présentée lorsque le système de compression atteint le point de bifurcation de Hopf pendant le pompage. Pour le cas de la bifurcation de Hopf, une expression approximative, pour l'amplitude du cycle périodique de la solution du système à partir du point d'équilibre, est obtenue et la direction est déterminée en utilisant la théorie de stabilité de Lyapunov. Une simulation numérique est exécutée pour justifier les résultats théoriques.

## 3.1 Modèle réduit de Greitzer

### 3.1.1 Équations du système

Le modèle mathématique choisi a été implémenté par Greitzer [34] en 1976, dans son analyse sur les caractéristiques de décrochage et de pompage. Ce modèle prend en compte toutes les parties du système de compression. De plus, il est spécifique au décrochage tournant ou à la prédiction du pompage qui se produisent à la limite d'instabilité. Le modèle se compose d'un compresseur, d'un conduit d'entrée annulaire, d'un plénum et d'une vanne de contrôle de l'écoulement à travers d'un conduit de sortie. Les diamètres du conduit de la vanne et du conduit du plénum ne sont pas liés. Ce modèle est un système dynamique non linéaire d'équations différentielles ordinaires à cinq variables d'état sans dimension  $(\Phi_c, \Phi_t, \Psi, \Psi_c, J)$ , et qui exprime les équations de mouvement de chaque composant du système de compression :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Phi}{d\xi} = B(\Psi_c - \Psi - 3\Phi J) \\ \frac{d\Phi_t}{d\xi} = \frac{B}{G}(\Psi - F) \\ \frac{d\Psi_t}{d\xi} = \frac{1}{B}(\Phi - \Phi_t) \\ \frac{d\Psi_c}{d\xi} = \frac{1}{\tau}(\Psi_{css} - \Psi_c) \\ \frac{dJ}{d\xi} = \sigma J(1 - \Phi^2 - J) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.1a) \\ (3.1b) \\ (3.1c) \\ (3.1d) \\ (3.1e) \end{array}$$

où les variables d'état non dimensionnelles sont les suivantes :  $\Phi = \frac{m_c}{\rho A_c U_t}$  est le coefficient de débit massique à travers le compresseur,  $U_t$  est la vitesse tangentielle constante du compresseur au diamètre moyen  $r$ ,  $m_c$  est le débit massique dans le compresseur,  $A_c$  est la surface de la section du conduit du compresseur,  $\rho$  est la densité du gaz,  $\Psi = \frac{\Delta P}{0.5\rho U_t^2}$  le taux de pression dans le plénum,  $\Delta P$  la différence de pression entre le plénum et la sortie de la vanne de contrôle,  $\Phi_t = \frac{m_t}{\rho A_c U_t}$  le coefficient du débit massique à travers la vanne de contrôle à la sortie du système de compression,  $m_t$  le débit massique à travers le papillon,  $\Psi_c$  le taux de pression à travers le compresseur,  $J$  la valeur au carré de l'amplitude de décrochage tournant,  $\xi = t\omega_H$  où  $t$  est le temps réel et

$\omega_H = a_0 \sqrt{\frac{A_c}{V_P L_c}}$  est la fréquence de Helmholtz avec  $V_P$  est le volume du Plenum.  $\Psi_{css}$  est le taux de pression caractéristique en régime permanent et  $F = \frac{A_c^2}{A_t^2} \Phi_t^2$  est la caractéristique de la vanne de contrôle qui représente la chute de pression. Ces dernières sont les sources non linéaires du système.  $a_0$  la vitesse du son.  $\tau$  est le temps du système de compression qui serait différent en décrochage et en décrochage tournant [51]. Les paramètres  $B$ ,  $L_c$ ,  $K$  et  $G$  sont le paramètre de Greitzer  $B = \frac{U_t}{2a_0} \sqrt{\frac{V_P}{A_c L_c}}$ , la longueur du conduit et du compresseur, le coefficient de la vanne de contrôle de gaz  $K = \frac{A_t}{A_c}$  le rapport de la section de passage de la vanne de contrôle du gaz au compresseur (des valeurs élevées de  $K$  impliquent une capacité d'étranglement élevée), et  $G = \frac{L_t A_c}{L_c A_t}$ , respectivement ;  $L_t$  est la longueur de la vanne de contrôle de gaz et  $A_t$  est la section transversale de la vanne de contrôle. La constante  $\sigma = \frac{3\delta H}{(1 + \delta\zeta)W}$ ,  $\zeta$  est le paramètre d'écoulement compresseur-conduit et  $\delta$  est le paramètre du retard réciproque du passage de l'aube.

### 3.1.2 Point d'équilibre

Les conditions d'équilibre du système sont :

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = \frac{d\Phi_t}{d\xi} = \frac{d\Psi}{d\xi} = \frac{d\Psi_c}{d\xi} = \frac{dJ}{d\xi} = 0$$

A partir du système d'équations algébriques, le système (3.1a)-(3.1e) est en équilibre lorsque  $\Psi_0 = \Psi_{css_0} = F_0$ . C'est l'accroissement de pression à travers le compresseur égale à la chute de pression à travers la vanne de contrôle.  $\Phi_0 = \Phi_{t_0}$  signifie que le débit massique à travers le compresseur et la vanne de contrôle sont les mêmes.  $J_0 = 0$  en pompage (représentant le débit axisymétrique) ou  $J_0 = 1 - \Phi_0^2$  en dynamique post de décrochage. Il y a donc deux points d'équilibre  $(\Phi_0, \Psi_0, 0)$  et  $(\Phi_0, \Psi_0, 1 - \Phi_0^2)$ .

Le point d'équilibre, dans la carte plane  $(\Phi_0, \Psi_0)$ , se situe à l'intersection de la courbe caractéristique du compresseur et celle de la vanne du contrôle.

Les hypothèses suivantes sont nécessaires pour réduire l'ordre du modèle :

- a) La relaxation de la caractéristique du compresseur en régime permanent impliquée par cinq équations se produit en très peu de temps.

b) Les forces d'inertie de la vanne sont négligées.

Ici, nous nous concentrons sur les états non stationnaires et de pompage du système où la vitesse de rotation est constante et  $J = 0$  respectivement. Nous remplaçons  $\Psi_c$  by par  $\Psi_{c_{ss}}$  dans (3.1a)-(3.1e) en utilisant le théorème de Tikhonov pour la théorie des perturbations singulières en prenant comme petit paramètre  $\tau$ . Le théorème de Tikhonov est ensuite utilisé pour (3.1b)-(3.1c) en prenant  $G$  comme deuxième petit paramètre. Le débit massique peut également s'écrire  $\Phi_t = F^{-1}(\Psi)$ . Dans ce cas, le système du plan est en pure pompage ce qui signifie qu'il devient axisymétrique, avec une grande amplitude et une faible fréquence de vibration du débit massique adimensionnel.

Par conséquent, les variables  $\Phi$  et  $\Psi$  sont régies approximativement par le système dynamique de deux dimension autonome suivant :

$$\begin{cases} \frac{d\Phi}{d\xi} = \frac{1}{L_c}(\Psi_c - \Psi) & (3.2a) \\ \frac{d\Psi}{d\xi} = \frac{1}{4B^2L_c}(\Phi - F^{-1}(\Psi)) & (3.2b) \end{cases}$$

où

$$F^{-1}(\Psi) = K\sqrt{\Psi}.$$

Le modèle (3.2a)-(3.2b) a été développé sous certaines hypothèses sur la géométrie du système de compression et ses conditions de fonctionnement. L'écoulement dans la section de conduit était supposé unidimensionnel et incompressible. Le processus de compression dans le plénum a été considéré comme isentropique avec une distribution uniforme de la pression et la force gravitationnelle a été négligée.

### 3.1.3 Analyse généralisée de la courbe de performance du compresseur

La courbe caractéristique du compresseur a une approximation des performances en fonction des signaux de pression provenant de différents points optimaux [4, 49]. Selon Greitzer [30, 33], la courbe est tracée expérimentalement à partir de données d'état stationnaire, alors qu'elle est approximée dans la situation instable avec l'apparition de la pompage. Sa formule est un cas

généralisé de la courbe caractéristique du compresseur, décrite par l'équation suivante :

$$\Psi_c(\Phi) = \Psi_{c_0} + H \left[ 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right)^3 \right],$$

où  $\Psi_c$  est l'augmentation de pression sans dimension dans le compresseur qui représente la relation non linéaire entre l'augmentation de pression à la sortie du compresseur et le débit massique  $\Phi$ ,  $H$  est le facteur de hauteur caractéristique du compresseur,  $W$  est le facteur de largeur caractéristique du compresseur, et la constante  $\Psi_{c_0} > 0$  est la valeur d'arrêt du compresseur.

Dans ce travail, la courbe caractéristique du compresseur est approximée par un polynôme cubique général à coefficients constants liés aux points d'équilibre du système de compression, donné par :

$$\Psi_c(\Phi) = -\Phi^3 + \frac{3}{2}[a + b]\Phi^2 - 3ab\Phi + \frac{1}{2}(2c + 3ab^2 - b^3) \quad (3.3)$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des paramètres réels et la constante  $\frac{1}{2}(2c + 3ab^2 - b^3)$  est la valeur de coupure de la caractéristique du compresseur (Figure 3.1).

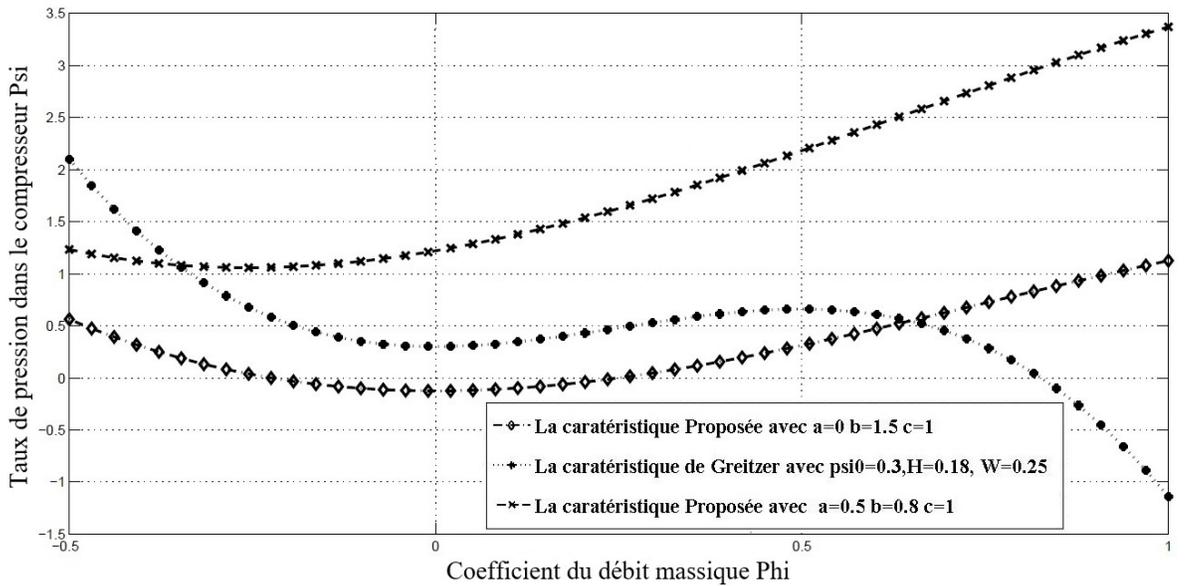


FIGURE 3.1 – Courbe caractéristique de Greitzer et courbe caractéristique proposée [52]

Le débit moyen du compresseur  $\Phi$  et l'élévation de la pression du plénum  $\Psi_c$  du compresseur, sont positifs près du point de fonctionnement. Le système est alors en équilibre si  $\Psi_0 = \Psi_c(\Phi_0) = \frac{1}{K^2} \Phi_0^2$ .

De la formule proposée (3.3), nous obtenons

$$\frac{d\Psi_c}{d\Phi} = -3\Phi^2 + 3(a+b)\Phi - 3ab \quad (3.4)$$

et  $\frac{d^2\Psi_c}{d\Phi^2} = -6\Phi + 3(a+b)$ . Aux extrémités de l'intervalle  $[a, b]$ , ( $a < b$ ), on a

$$\frac{d\Psi_c}{d\Phi}\Big|_{\Phi=a} = \frac{d\Psi_c}{d\Phi}\Big|_{\Phi=b} = 0. \quad (3.5)$$

Cela signifie que la courbe caractéristique du compresseur  $\Psi_c$  admet deux extremums :

- Un minimum local lorsque  $\Phi = a$ , car  $\frac{d^2\Psi_c}{d\Phi^2}\Big|_{\Phi=a} = 3(b-a) > 0$ .
- Un maximum local lorsque  $\Phi = b$ , car  $\frac{d^2\Psi_c}{d\Phi^2}\Big|_{\Phi=b} = 3(a-b) < 0$ .

Donc  $a < \Phi < b$  représente la région d'instabilité.

### 3.1.4 Analyse de stabilité linéaire du système planaire de Grietzer

La stabilité linéaire est étudiée autour du point d'équilibre  $(\Phi_0, \Psi_0)$ , qui est le point optimal de la courbe caractéristique du compresseur.

Pour cela, nous introduisons de petites perturbations  $x(\tilde{t})$  et  $y(\tilde{t})$  par :

$$\begin{cases} x(\tilde{t}) = \Phi - \Phi_0 \\ y(\tilde{t}) = \Psi - \Psi_0 \end{cases}$$

Pour trouver comment la perturbation évolue avec le temps, on substitue  $x(\tilde{t})$  et  $y(\tilde{t})$  dans le système (3.2a)-(3.2b), on obtient :

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tilde{t}} = \frac{1}{L_c} (\Psi_c(x + \Phi_0) - y - \Psi_0) \end{cases} \quad (3.6a)$$

$$\begin{cases} \frac{dy}{d\tilde{t}} = \frac{1}{4B^2L_c} (x + \Phi_0 - F_K^{-1}(y + \Psi_0)) \end{cases} \quad (3.6b)$$

Bien que cette transformation ne soit pas donnée pour résoudre le problème mais pour nous aider à comprendre le comportement de la solution. En notant le point d'équilibre par  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  dans le plan du système linéaire  $(xOy)$  et la matrice Jacobienne du système autour du point d'équilibre par  $A$ , le système linéarisé prend la forme :

$$X' = AX + F(X) \quad (3.7)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_c}\alpha_1 & -\frac{1}{L_c} \\ \frac{1}{4B^2L_c} & -\frac{1}{4B^2L_c}\alpha_2 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

et

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{\partial \Psi_c(x + \Phi_0)}{\partial x} \Big|_{x=0} = -3(\Phi_0 - a)(\Phi_0 - b) \\ \alpha_2 = \frac{\partial F_K^{-1}(y + \Psi_0)}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{K}{2\sqrt{\Psi_0}}, \end{cases}$$

où  $\alpha_1$  est la pente de la caractéristique du compresseur et  $\alpha_2$  la pente de la vanne de contrôle,

avec  $F(X) = \begin{pmatrix} f_1(X) \\ f_2(X) \end{pmatrix}$ , où

$$\begin{cases} f_1(X) = \frac{1}{L_c}[-3x^2 + 3(a + b - 2\Phi_0)x], \\ f_2(X) = \frac{-\alpha_2}{4B^2L_c} \left( \frac{y}{2\Psi_0} - \frac{3}{4} \frac{y^2}{\Psi_0^2} \right), \end{cases} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique du Jacobien est donné par :

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \frac{1}{4B^2L_c}(4B^2\alpha_1 - \alpha_2)\lambda + \frac{1}{4B^2L_c^2}(1 - \alpha_2\alpha_1). \quad (3.9)$$

La stabilité autour du point d'équilibre dépend du signe des valeurs propres et des paramètres du système. Le comportement du point d'équilibre peut être déterminé à l'aide de la théorie de Routh-Hurwitz.

**Théorème 3.1.1** Les racines du polynôme caractéristique (3.9) sont négatives ou ont des parties réelles négatives si et seulement si tous les déterminants des matrices de Hurwitz sont positifs.

Le polynôme caractéristique du système dynamique linéarisé (3.6a)-(3.6b) autour du point d'équilibre a trois coefficients réels constants. Ainsi, les deux matrices de Hurwitz du polynôme (3.9) sont :

$$M1 = \left[ \frac{-1}{4B^2L_c}(4B^2\alpha_1 - \alpha_2) \right],$$

$$M2 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{4B^2L_c}(4B^2\alpha_1 - \alpha_2) & 1 \\ 0 & \frac{1}{4B^2L_c^2}(1 - \alpha_2\alpha_1) \end{pmatrix}$$

D'après le théorème 3.1.4 et la théorie de Routh-Hurwitz, le système (3.6a)-(3.6b), stabilisant le point d'équilibre, doit satisfaire les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 - 4B^2\alpha_1 > 0 \\ \text{et} \\ 1 - \alpha_2\alpha_1 > 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.10a) \\ \\ (3.10b) \end{array}$$

Ce qui signifie que le point d'équilibre  $(x_0, y_0)$  ne peut pas être stable pour  $\Phi$  quelconque.

Les valeurs  $\alpha_2$ ,  $B$ ,  $L_c$  et  $y$  sont positives. La pente de la courbe caractéristique du compresseur est négative pour le point de fonctionnement stable et positive dans la région la plus sujette à l'apparition d'instabilité. Pour toutes ces raisons, l'utilisation d'une étude d'analyse au voisinage du point d'équilibre nous donnerait en détail les zones d'instabilité autour du point de fonctionnement.

Cette analyse est présentée en deux cas :

— Le premier cas est celui où  $\Phi_0$  est en dehors de l'intervalle  $(a, b)$ .

De (3.9), On obtient

$$-(\Phi_0 - a)(\Phi_0 - b) < 0,$$

alors  $\alpha_1 = -12B^2(\Phi_0 - a)(\Phi_0 - b) < 0$  as  $\Phi_0 \notin (a, b)$ .

donc (3.10a) et (3.10b) sont satisfaits.

Dans cette région, le point  $(x_0, y_0)$  est stable, les valeurs propres sont négatives et le type de stabilité dépend du signe du discriminant

$$\alpha_2 + 12B^2(\Phi_0 - a)(\Phi_0 - b) > 4B\sqrt{L_c(1 - \alpha_2\alpha_1)} > 0$$

— Le deuxième cas est celui où  $\Phi_0 \in [a, b]$ ,

(i) Lorsque  $\Phi_0 = a$  ou  $\Phi_0 = b$ ,  $\alpha_1 = 0$  est le pic ou le minimum local de la pression et les deux coefficients du polynôme caractéristique deviennent positifs, alors nous avons un système stable autour du point d'équilibre.

(ii) Quand  $a < \Phi_0 < b$ , alors

— Si

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 > -12B^2(\Phi_0 - a)(\Phi_0 - b) \\ \text{et} \\ K < \frac{2\sqrt{\Psi_0}}{\alpha_1} \end{array} \right.$$

Les deux coefficients du polynôme caractéristique deviennent positifs, puis le système est stable autour du point d'équilibre.

— Si

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 < -12B^2(\Phi_0 - a)(\Phi_0 - b) \\ \text{et} \\ K > \frac{2\sqrt{\Psi_0}}{\alpha_1} \end{array} \right.$$

Le deuxième coefficient devient négatif puis de la théorie Hurwitz, le système perd sa stabilité et devient en mode d'instabilité.

— Aussi, si

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 > -12B^2(\Phi_0 - a)(\Phi_0 - b) \\ \text{et} \\ K > \frac{2\sqrt{\Psi_0}}{\alpha_1} \end{array} \right.$$

Les deux racines sont de signes opposés, donc le système est également instable.

## 3.2 Stabilité et bifurcation locale de Hopf

D'après l'analyse précédente, le comportement du système local perd sa stabilité au voisinage du point d'équilibre unique  $(0, 0)$ , et la bifurcation de Hopf apparaît lorsque le paramètre de valeur critique est

$$\left\{ \begin{array}{l} a < \Phi_0 < b \\ \alpha_{2,crit} = -12B^2(\Phi_0 - a)(\Phi_0 - b) > 0 \\ \text{et} \\ K < \frac{2\sqrt{\Psi_0}}{\alpha_1} \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Dans ce cas, le système dynamique a une paire de valeurs propres conjuguées purement complexes avec une vitesse non nulle par rapport au paramètre variable  $\alpha_2$ . On note que ce paramètre modifie la structure du système étudié autour du point d'équilibre  $(0, 0)$ .

L'analyse de la bifurcation donnera une simple approximation de la grande amplitude et de la basse fréquence du cycle limite, et déterminera le comportement à proximité de la bifurcation de Hopf. Sous la condition de la pente de la courbe caractéristique de la vanne (3.11) et la condition (3.10b) avec  $a$  et  $b$  des nombres réels positifs, on considère le champ de vecteur

$$X' = f(X, \alpha_2), \quad X = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

Il est nécessaire d'introduire le théorème de bifurcation de Hopf de base autour du point d'équilibre  $(0, 0)$  du système (3.6a)-(3.6b). Le champ de vecteur doit satisfaire aux conditions de bases de bifurcation de Hopf [65] :

1.  $f(X_0, \alpha_2) = 0$ , la matrice Jacobienne  $A$  à deux valeurs propres purement imaginaires  $\lambda_1(\alpha_2)$  et  $\lambda_2(\alpha_2)$ , lorsque  $\alpha_2 = \alpha_{2,crit}$ .
2. Condition de transversalité : la partie réelle de la vitesse des valeurs propres sur l'axe imaginaire sous variation du paramètre  $\alpha_2$  n'est pas nulle.
3. Le numéro d'index est différent de zéro.

Considérons l'équation caractéristique du compresseur (3.3) et soit  $\alpha_2$  le paramètre de bifurcation. Nous devons vérifier que le système planaire (3.6a)-(3.6b) remplit les trois conditions ci-dessus :

Pour  $\alpha_2 = \alpha_{2,crit}$ , le système a des valeurs propres conjuguées  $\lambda_{1,2}(\alpha_{2,crit}) = \pm i\omega_0$ ,  $\omega_0 \in \mathbb{R}^+$ . purement imaginaires. En substituant une de ces valeurs propres dans (3.9), on obtient

$$\lambda_{1,2} = \pm i \frac{1}{2BL_c} \sqrt{1 - 4B^2\alpha_1^2} = \pm i\omega_0, \quad (3.12)$$

Cela nécessite  $1 - 4B^2\alpha_1^2 > 0$  et  $\alpha_{2,crit} = 4B^2\alpha_1 > 0$ . D'où la première condition est satisfaite.

Pour la deuxième condition, supposons que  $\rho_0$  est la vitesse de valeurs propres sur l'axe imaginaire sous variation de  $\alpha_2$ . En substituant la valeur propre  $\lambda(\alpha_2)$  dans  $p(\lambda) = 0$  et en passant à

la différentielles des deux côtés de  $p(\lambda) = 0$  par rapport à  $\alpha_2$ , il s'ensuit que

$$\rho_0 = \frac{d\lambda(\alpha_2)}{d\alpha_2} = -\frac{\frac{\lambda}{4B^2L_c} - \frac{\alpha_1}{4B^2L_c^2}}{2\lambda - \frac{1}{4B^2L_c}(4B^2\alpha_1 - \alpha_2)},$$

ce qui implique que

$$\rho_1 = \Re(\lambda'(\alpha_2))|_{\alpha_2=\alpha_{2,crit}} = -\frac{1}{8B^2L_c} \neq 0 \quad (3.13)$$

la deuxième condition est donc satisfaite.

Calculons maintenant l'indice  $\varepsilon_1$  pour vérifier la dernière condition. En prenant les valeurs propres (3.12) de la matrice jacobienne (3.8), ainsi que les vecteurs propres correspondants :

$$V1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 - i\omega_0L_c \end{pmatrix} \text{ et } V2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 + i\omega_0L_c \end{pmatrix},$$

On définit la transformation suivante :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{où } T = (\Re(v1), \Im(v1)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_1 & -\omega_0L_c \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

En substituant l'expression (3.14) dans (3.7) et en multipliant par l'inverse de la matrice  $T$ , (3.7) devient

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0 \\ -\omega_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1(x_1, y_1) \\ h_2(x_1, y_1) \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{cases} h_1(x_1, y_1) = \frac{1}{L_c}(-3x_1^2 + 3(a + b - 2\Phi_0)x_1 \\ h_2(x_1, y_1) = \frac{\alpha_1\omega_0}{2\Psi_0}y_1 - \frac{\alpha_1^2}{2L_c\Psi_0}x_1 - \frac{3\alpha_1^2\omega_0}{2\Psi_0^2}x_1y_1 \\ \quad + \frac{3\alpha_1^3}{4L_c\Psi_0^2}x_1^2 + \frac{3\alpha_1L_c\omega_0^2}{4\Psi_0^2}y_1^2 \end{cases}$$

le premier coefficient (exposant) de Lyapunov peut être calculé au paramètre critique comme suit :

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 = & \frac{1}{16} \left( h_{1x_1x_1x_1} + h_{1x_1y_1y_1} + h_{2x_1x_1y_1} + h_{2y_1y_1y_1} \right) \\ & + \frac{1}{16\omega_0} \left( h_{1x_1y_1} \left[ h_{1x_1x_1} + h_{1y_1y_1} \right] - h_{2x_1y_1} \left[ h_{2x_1x_1} \right. \right. \\ & \left. \left. + h_{2y_1y_1} \right] - h_{1x_1x_1} h_{2x_1x_1} + h_{1y_1y_1} h_{2y_1y_1} \right)\end{aligned}$$

où

$$h_{s \ x_1^i y_1^j} = \frac{\partial^{i+j} h_k}{\partial^i x_1 \partial^j y_1}, \quad s = 1, 2, \quad i, j \in \{1, 2\}$$

Par conséquent

$$\varepsilon_1 = \frac{9}{32} \frac{\alpha_1^3}{\Psi_0^4} \left( \frac{\alpha_1^2}{L_c^2} + L_c \omega_0^2 \right) + \frac{9\alpha_1^3}{L_c^3 \Psi_0^2}$$

Le signe de  $\varepsilon_1$  suit le signe de  $\alpha_1$ . Si les conditions (3.12) et (3.13) sont vérifiées et  $\varepsilon_1 \neq 0$ , alors le système (3.6a)-(3.6b) subi une bifurcation de Hopf au point d'équilibre  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ . De plus, l'orbite périodique de bifurcation issue de l'origine pour un proche  $\alpha_{2,crit}$  est stable pour  $\varepsilon_1 < 0$  et instable pour  $\varepsilon_1 > 0$ . La direction de la bifurcation est au-dessus de  $\alpha_{2,crit}$  pour  $\rho_1 \varepsilon_1 < 0$  et au-dessous de  $\alpha_{2,crit}$  pour  $\rho_1 \varepsilon_1 > 0$ .

Donc pour  $\varepsilon_1 > 0$ , il y a une bifurcation de Hopf sous-critique à la valeur du paramètre critique et le cycle limite est instable. Il s'ensuit que la solution périodique existe pour  $\alpha_2 > \alpha_{2,crit}$ .

L'approximation de l'amplitude du cycle limite est donnée par (voir [39]) :

$$\eta = \sqrt{\frac{-\rho}{\varepsilon_1} (\alpha_2 - \alpha_{2,crit})}$$

alors l'approximation de la solution périodique locale du système (3.6a)-(3.6b) est la suivante :

$$x(\tilde{t}) = \eta \sin(\omega_0 \tilde{t} + \theta), \quad \text{et} \quad y(\tilde{t}) = \eta \cos(\omega_0 \tilde{t} + \theta).$$

où  $\theta = \arctan\left(\frac{\alpha_1}{L_c \omega_0}\right)$  est l'angle de phase.

### 3.3 Résultats et discussion

Pour vérifier la théorie analytique ci-dessus, des simulations numériques du pompage et de la bifurcation de Hopf autour de la valeur critique du paramètre sont présentées.

Un groupe de paramètres est adopté lors du calcul numérique et la méthode directe est implémentée avec Matlab, en effectuant 10000 itérations.  $dt = 0.1$  est la taille du pas non dimensionnelle choisie,  $\Phi_1 = -0.55$ ,  $\Psi_1 = 1.5$ , et  $L_c = 1.46$  sont les valeurs initiales des variables d'états et du paramètre fixe du système (3.6a)-(3.6b).

Nous commençons par localiser les instabilités aérodynamiques (décrochage et de pompage) du système dans les Figures 3.2 et 3.3 respectivement. La simulation est basée sur le paramètre de Grietzer  $B$  qui est exprimé par des grandeurs physiques. On observe, à partir de la Figure 3.2, que le système tombe en pompage profond pour  $B = 1 > 0.7$  (la valeur critique de Grietzer). Le mode de transition se produit du décrochage sur la Figure 3.2 au pompage sur la Figure 3.3 lorsque  $K = \frac{1}{12}$ . Cette transition est confirmée en (a) et (b), des deux Figures 3.2 et 3.3, par l'évolution du débit massique et du taux de pression respectivement. Le portrait de phase en (c) souligne également cette transition. L'instabilité de décrochage est représentée dans les mêmes conditions initiales avec la valeur fixée de la longueur effective du compresseur en pompage. Selon

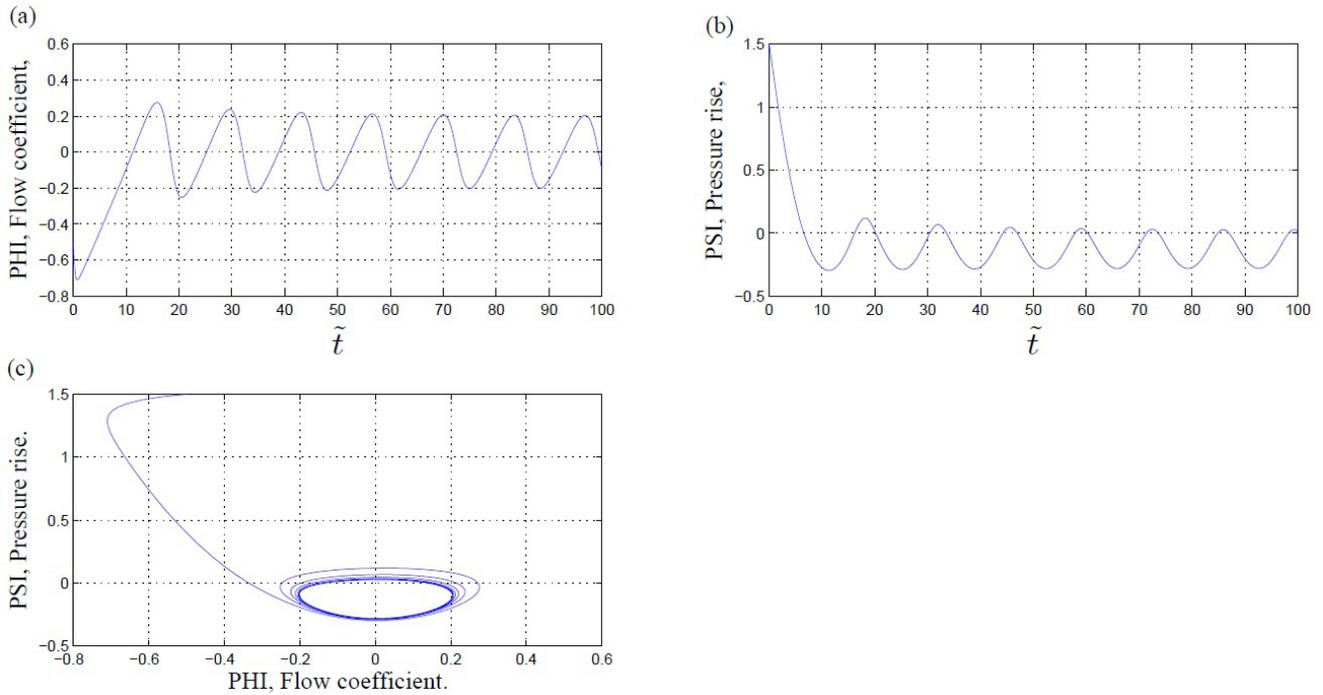


FIGURE 3.2 – Décrochage juste avant pompage  $a = 0$ ,  $b = 1.5$ ,  $c = 0$ ,  $B = 1$ ,  $K = \frac{1}{12}$  et  $dt = 0.01$ .

la définition de la bifurcation de Hopf, la courbe au point de bifurcation du système linéarisé

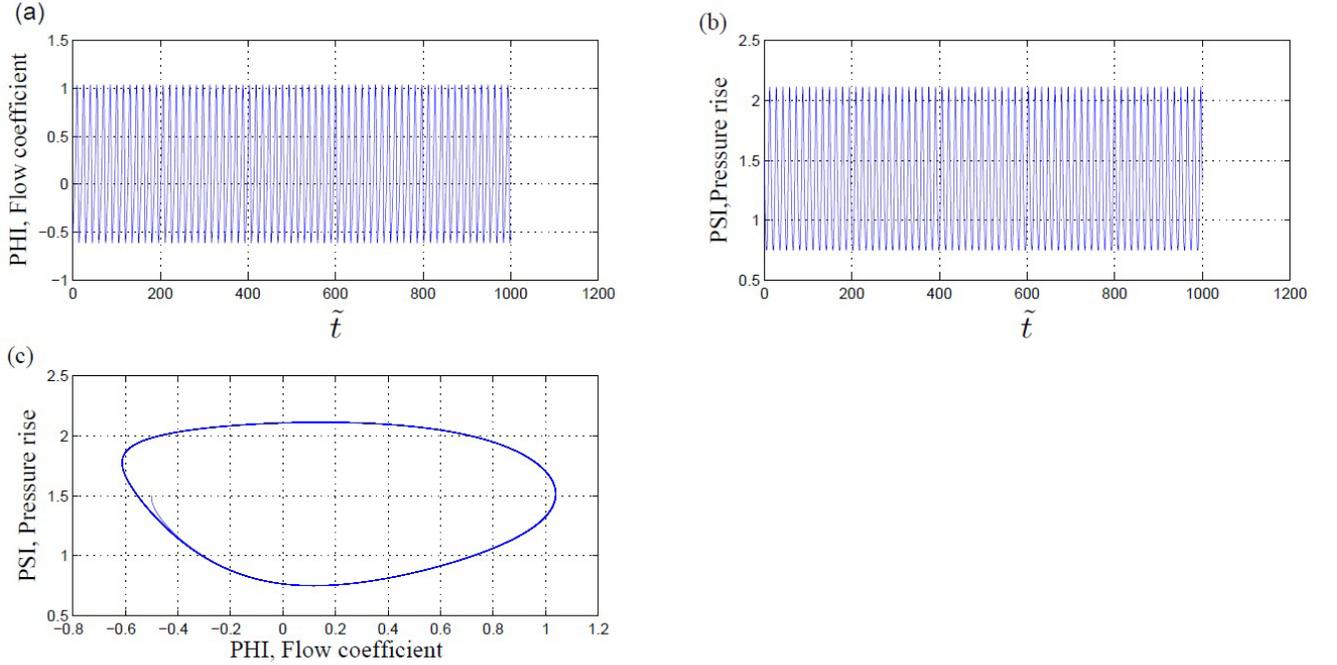


FIGURE 3.3 – Portrait de phase du système (3.6a)-(3.6b) pendant le pompage avec  $(a, b, c, B, K, \Phi_1, \Psi_1, ) = (0, 1, 1.5, 1, \frac{1}{12}, -0.55, 1.5)$  et  $dt = 0.1$

(3.6a)-(3.6b) est donnée sur la Figure 3.4, avec les mêmes valeurs des paramètres physiques lors de la pompage au point de fonctionnement. Aussi avec les paramètres

$$(a, b, c, B, K, \Phi_1, \Psi_1) = (0, 1, 1.5, 1, \frac{1}{12}, -0.55, 1.5),$$

$dt = 0.1$ , et le paramètre critique  $\alpha_{2,crit} = \alpha_2$ , le système dynamique non linéaire (3.6a)-(3.6b) subit une bifurcation de Hopf. L'origine est un point d'équilibre stable pour  $\varepsilon_1 < 0$  et instable pour  $\varepsilon_1 > 0$ ,  $\alpha_1 > 0$  comme illustré sur la Figure 3.5. Les courbes d'évolution du débit massique et le taux de pression concordent avec l'analyse théorique aux mêmes valeurs de paramètres fixées précédemment. Cet accord est prouvé par la croissance de l'amplitude de la perturbation pour les deux variables  $x$  et  $y$  (Figure 3.5 (a) et (b)).

Dans le cas :  $\varepsilon_1 > 0$  ( $\alpha_1 > 0$  dans le domaine instable) et  $\rho_1 < 0$  d'après l'équation (3.13), on a le point d'équilibre instable pour  $\alpha_2 - \alpha_{2,crit} < 0$  est asymptotiquement stable pour  $\alpha_2 - \alpha_{2,crit} > 0$ , avec une orbite périodique instable pour cette inégalité  $\alpha_2 - \alpha_{2,crit} > 0$  que l'on voit dans (Figure 3.6 et figure 3.7).

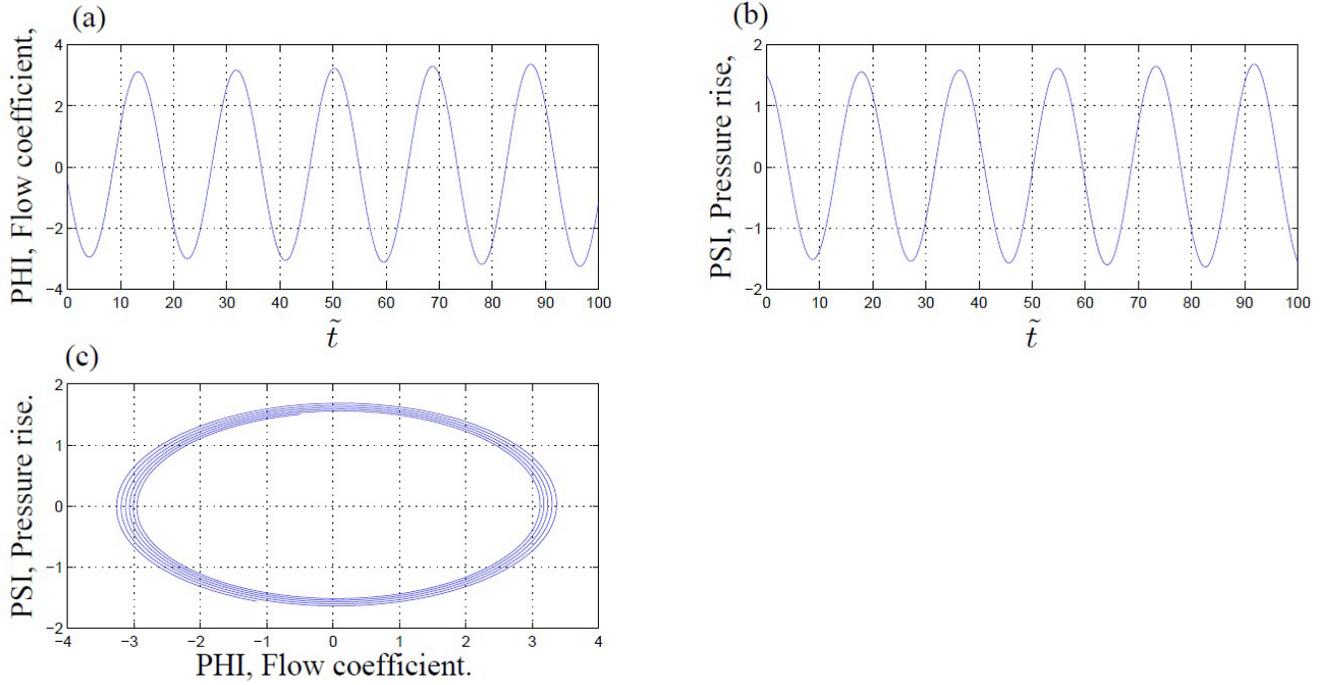


FIGURE 3.4 – (a), (b) Évolutions du débit massique et du taux de pression, (c) portrait de phase du système linéarisé (3.6a)-(3.6b) au point de la bifurcation, avec les paramètres choisis :  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $c = 1.5$ ,  $B = 1$ ,  $K = \frac{1}{8}$ ,  $L_c = 1.46$  avec conditions initiales :  $\Phi_1 = -0.5$ ,  $\Psi_1 = 1.5$  et  $dt = 0.1$

Alors que pour  $\varepsilon_1 < 0$  ( $\alpha_1 < 0$  dans le domaine stable) et  $\rho_1 < 0$  :

L'origine est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour  $\alpha_2 - \alpha_{2,crit} < 0$  et instable pour  $\alpha_2 - \alpha_{2,crit} > 0$ , avec une orbite périodique stable pour  $\alpha_2 - \alpha_{2,crit} < 0$ . Ce cas n'est pas étudié ici car il est une zone de stabilité à droite du point optimal (point de peak) de la courbe caractéristique du compresseur. Il est impossible de conclure pour le cas  $\varepsilon_1 = 0$ , d'autres méthodes doivent être utilisées. Il n'y a pas de cycle limite et un centre peut exister pour la bifurcation.

Le signe négatif de  $\rho_1$  signifie que les valeurs propres traversent l'axe imaginaire du demi-plan droit au plan gauche lorsque  $\alpha_2$  augmente. Les contraintes exercées dans cette partie tendent à inverser la bifurcation sous critique.

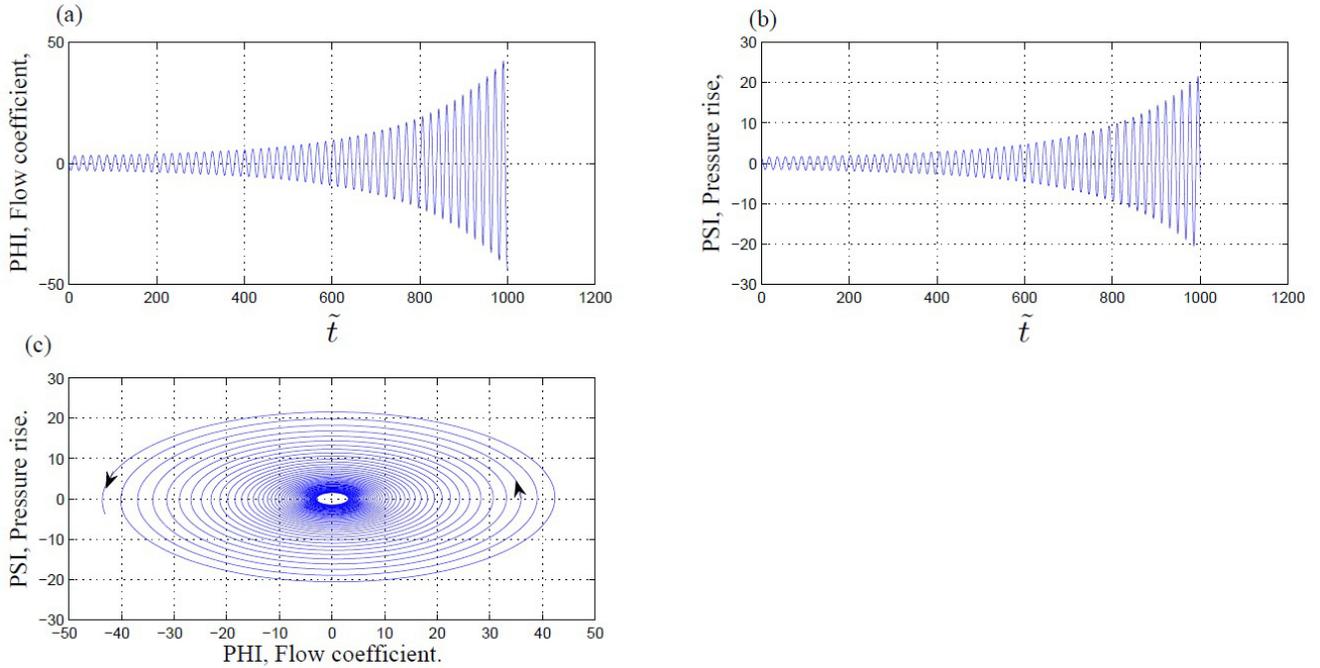


FIGURE 3.5 – Bifurcation de Hopf dans le système non linéaire (3.6a)-(3.6b) près de  $\alpha_{2,crit} = \alpha_2$ , (a) Évolution du débit massique, (b) Évolution du taux de pression, (c) portrait de phase avec bifurcation de Hopf, en prenant  $(a, b, c, B, K, \Phi_1, \Psi_1) = (0, 1, 1, 1, \frac{1}{12}, -0.55, 1.5)$

### 3.4 Conclusion

Nous avons étudié les phénomènes d'instabilités dans le modèle de compression de Greitzer sur la base du système dynamique non linéaire pour un compresseur à flux axial. Utilisation, pour la première fois, d'une expression caractéristique différente pour le compresseur axial en régime permanent avec une identification à celle de Greitzer pour certaines valeurs adoptées. Nous avons analysé certaines propriétés des éléments de base dans le système dynamique non linéaire. Nous avons utilisé le critère de Routh-Hurwitz pour déterminer les conditions de stabilité et définir le comportement du système au voisinage du point de fonctionnement, lorsque le paramètre de bifurcation passe par le point de bifurcation de Hopf lors du pompage. Le cycle périodique à partir du point zéro fixe dans le cas de la bifurcation de Hopf a été obtenu pendant le cycle de pompage. Nous avons effectué l'approximation au premier ordre de l'amplitude et de la fréquence du cycle limite pour déterminer le comportement et la direction de la bifurcation de Hopf qui est

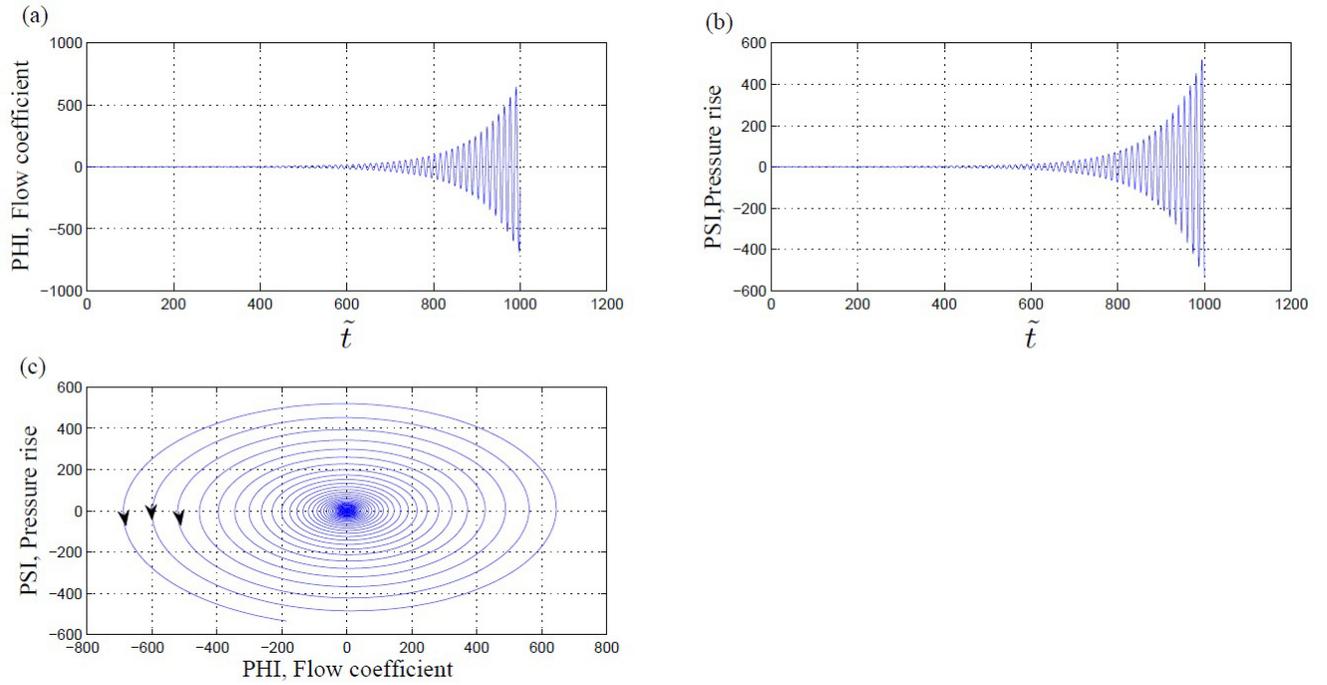


FIGURE 3.6 – Bifurcation de Hopf dans le système non linéaire (3.6a)-(3.6b) près de  $\alpha_{2,crit} > \alpha_2$ , (a) Évolution du débit massique, (b) Évolution du taux de pression, (c) portrait de phase avec bifurcation de Hopf, en prenant  $(a, b, c, B, K, \Phi_1, \Psi_1) = (0, 1, 1, 1, \frac{1}{12}, -0.55, 1.5)$

sous-critique inverse.

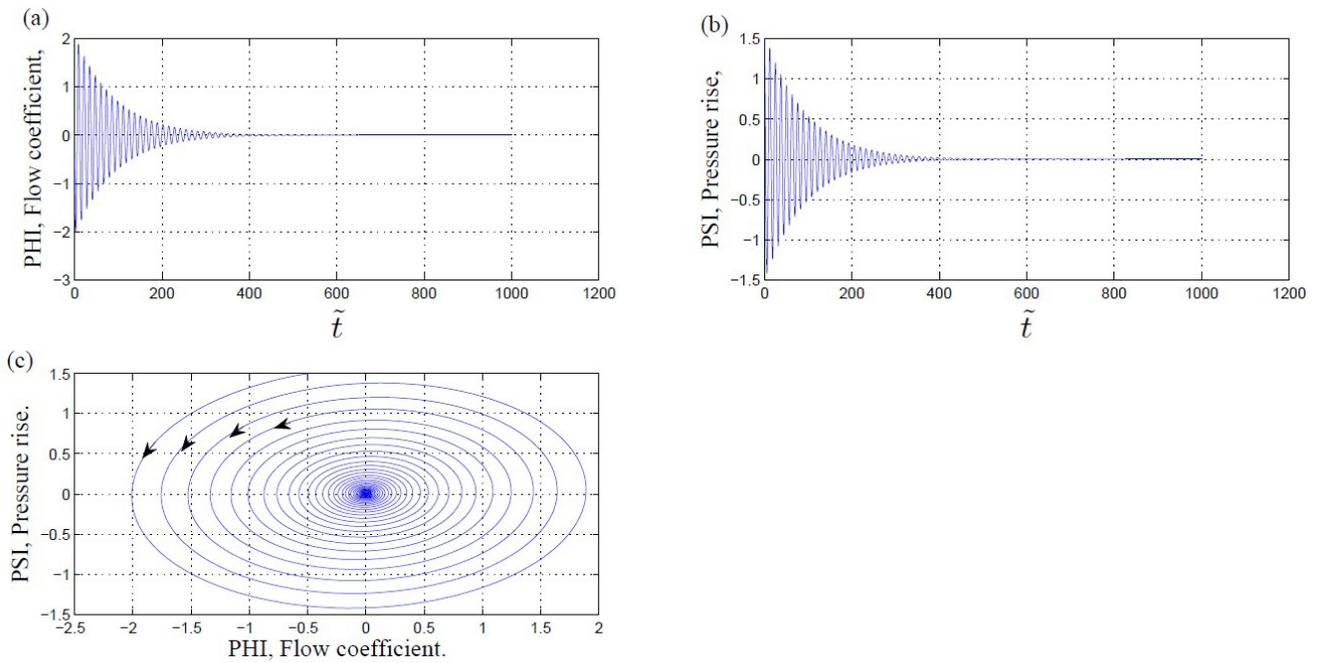


FIGURE 3.7 – Bifurcation de Hopf dans le système non linéaire (3.6a)-(3.6b) près de  $\alpha_{2,crit} < \alpha_2$ , (a) Évolution du débit massique, (b) Évolution du taux de pression, (c) portrait de phase avec bifurcation de Hopf, avec  $(a, b, c, B, K, \Phi_1, \Psi_1) = (0, 1, 1, 1, \frac{1}{12}, -0.55, 1.5)$

# Analyse des conditions de stabilité d'un système de compression

Les instabilités aérodynamiques lors du fonctionnement du compresseur, dans des conditions critiques et à faible pression, ont été observées et étudiées principalement par plusieurs auteurs tant du point de vue théorique qu'expérimental [34, 30, 57]. Les deux premiers ont posé chacun un modèle de base essentiel pour le développement de la théorie des turbomachines de compression, compte tenu de leurs régimes instables. Sur la base du modèle de Greitzer, une vanne couplée (CCV) est introduit au modèle de compression par Gravdahl- Egeland, qui est une extension du modèle de Moore-Greitzer avec une vitesse variable du compresseur afin de stabiliser le fonctionnement du compresseur. Cela a permis d'obtenir des résultats d'un grand intérêt, ouvrant ainsi la porte à une nouvelle base de travail sur la modélisation de ces phénomènes. Sur le plan expérimental, Greitzer et al. [33], Hansen et al. [37] et Gravdhal [30] ont procédé à l'analyse des effets de la géométrie des aubages sur les performances de ces machines. Ainsi, les conditions d'entrées, avec des efforts fournis par des procédés d'améliorations des organes, ont fait l'objet de travaux utiles [6, 30, 43]. La plupart de ces auteurs recommandent des améliorations des procédés ainsi que la fabrication d'éléments (aubages et autres composants) de plus en plus adaptés aux conditions de fonctionnement. Gravdahl a développé le modèle du précédent et les travaux d'Emmons [21], en ajoutant une troisième équation portant sur la vitesse de rotation de compresseur intégré au système de compression. Ce paramètre a permis de vérifier son effet

sur l'évolution des instabilités. Compte tenu des paramètres  $B$ ,  $G$ ,  $K$  et  $L_T$ . Eddie et al. [20] ont procédé à l'analyse de leur influence sur la naissance du pompage et de l'instabilité aérodynamique. Les équations associées sont résolues par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. L'analyse des résultats a donné une bonne satisfaction, quant à l'étendue de cette influence. Dans sa thèse, Zaiet [63], a utilisé un ensemble de méthodes pour la résolution d'un modèle non linéaire du système de compression, parmi lesquelles, la méthode de linéarisation des systèmes non linéaires. De bons résultats sont obtenus par l'approche de la géométrie différentielle dans le cas d'un compresseur axial associé à une turbine à gaz. Nous nous attacherons à agrémenter l'influence des conditions d'évacuation du gaz à travers la vanne de sortie de plénum ( $P_p$ ), vers le réseau entraînant une augmentation de pression dans ce dernier. Ceci étant le point de départ du retour de gaz, vers la sortie de compresseur où il donnera naissance à une instabilité aérodynamique au point de fonctionnement.

## 4.1 Modélisation Mathématiques

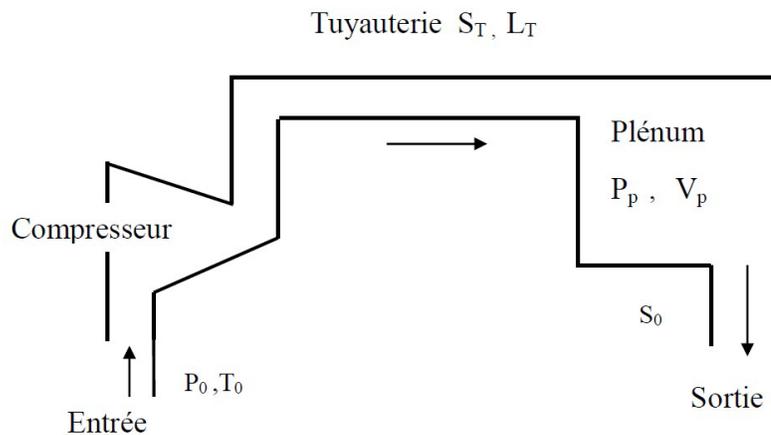


FIGURE 4.1 – Schéma de base de l'installation (compresseur et réseaux)

La Figure 4.1 présente un système de compression plus simple que celui de Greitzer. Ce système est constitué d'une conduite d'admission vers l'entrée du compresseur axial qui aspire le gaz aux conditions  $P_0$  et  $T_0$ , généralement constantes. Ce dernier refoule le fluide vers le plénum (chambre) de volume  $V_p$  et de pression  $P_p$ , muni d'une vanne de sortie à l'amont d'une conduite de section

$S_T$  et de longueur  $L_T$  qui précède généralement 'le réseau' ou autre système de consommation de gaz.

#### 4.1.1 Hypothèses

Le modèle est développé en supposant un écoulement unidimensionnel et incompressible sans frottement dans les tuyauteries. Par contre, le fluide est compressible et à vitesse négligeable dans le plénum (chambre).

#### 4.1.2 Formulation du modèle Mathématique

Le développement du modèle est basé sur les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, selon le schéma de la Figure 4.1, qui représente le système de compression référentiel avec les principales composantes, à savoir le compresseur, le plénum et le réseau. Le modèle d'équations obtenu, régissant le système de compression suscité, est un système dynamique linéaire, qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{dm_r}{dt} = B_0(\alpha m_r - P_p) \\ \frac{dP_p}{dt} = C_0(m_r - D_0 P_p) \end{cases} \quad (4.1)$$

Où :  $m_r$  est le débit massique refoulé par le compresseur

$$B_0 = \frac{S_t}{L_T(1 - m_{vol}^e \alpha A_0)} \text{ est le coefficient lie à la géométrie ;}$$

$$m_{vol}^e = \frac{m^e}{\rho^e} \text{ est le débit volumique refoulé,}$$

$A_0 = \frac{1 - \frac{\gamma-1}{\gamma m_p}}{ZRT^e}$ ,  $C_0 = \gamma \frac{ZRT^e}{V_p}$  et  $D_0 = \frac{m^e}{\rho^e} \frac{3\gamma - 1}{2\gamma}$  sont les Paramètres représentant les caractéristiques physiques et géométriques du système.

$\gamma$  est le coefficient isentropique du gaz considéré,  $\alpha$  la pente de la caractéristique de compresseur,  $P_p$  représente la pression dans le plénum,  $t$  est le temps.

Les données de base de calcul sont présentées dans la table suivante : Dans ce modèle,  $\alpha$  (pente en chaque point de la courbe caractéristique) est constante, contrairement aux modèles

Paramètres	Valeurs	Paramètres	Valeurs
$T^e$	472 K	$S_T$	$\Pi * 0.01 m^2$
$T_0$	288 K	$m_{vol}^e$	$0.34 m^3/s$
$\gamma$	1.4	$L_T$	50, 100, 150
$P_0$	$1.10^5 pa$	$V_p$	$10 m^3$
$P^e$	$4.10^5 pa$	$n_p$	0.80
$m_r^e$	1	$\alpha$	$-1.5.10^5 pa.s/kg$
$R$	$287 J/kg.K$	$z$	1

TABLE 4.1 – Les données de base de calcul

de Greitzer, Gravdahl et Emmons où la pression est donnée sous forme polynomiale, en fonction du débit. Néanmoins, pour chaque type de calcul  $\alpha$  prendra une autre valeur, en fonction de sa position (point d'équilibre) sur la courbe caractéristique du compresseur ( $p - m_r$ ).

L'exemple de l'application suivante considère un compresseur axial pour lequel les conditions de la stabilité de l'écoulement sont à vérifier. Dans ce cas, nous avons tenu à procéder au calcul numérique des variations (instabilités) du débit ( $m_r$ ) de refoulement du compresseur et de la pression ( $P_p$ ) à l'intérieur de la chambre (plénum).

Pour cela, le système d'équations précédent a été résolu par la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 avec les conditions initiales précitées. En plus de la variation temporelle de ( $m_r$ ) et ( $P_p$ ) pour trois valeurs de chacune de  $V_p$  et de  $L_T$  par la suite un portrait de phase est tracé pour chacune de ces valeurs à savoir un portrait de phase pour  $V_p$  et un autre pour  $L_T$ . Dans cette première partie de calcul, nous avons choisi une valeur de la pente de la caractéristique du compresseur constante ( $\alpha = -5.10^{-5}$ ). Ceci, ayant pour objectif non seulement la validation du programme de calcul mais aussi pour les conditions initiales et aux limites considérées.

## 4.2 Résultats et Discussion

Pour les conditions suivantes : volume de plénum,  $V_p$  et longueur de la tuyauterie,  $L_T$ , comme conditions géométrique initiales ainsi que la pente de la caractéristique de la courbe stationnaire du compresseur,  $\alpha$ , nous avons considéré l'évolution de la pression et du débit sur la base de ces hypothèses. Pour trois volumes de plénum, 5, 10, 15  $m^3$  (Figure 4.2), l'effet de l'évolution de ces volumes du plénum conduit à des fluctuations importantes de la pression, compte tenu de la relation entre la pression et le débit ( $P$  et  $m_r$ ) dans le mouvement du gaz.

Dans la Figure (3), le débit de refoulement du compresseur nous montre la même évolution pour les mêmes valeurs de volume  $V_p$ .

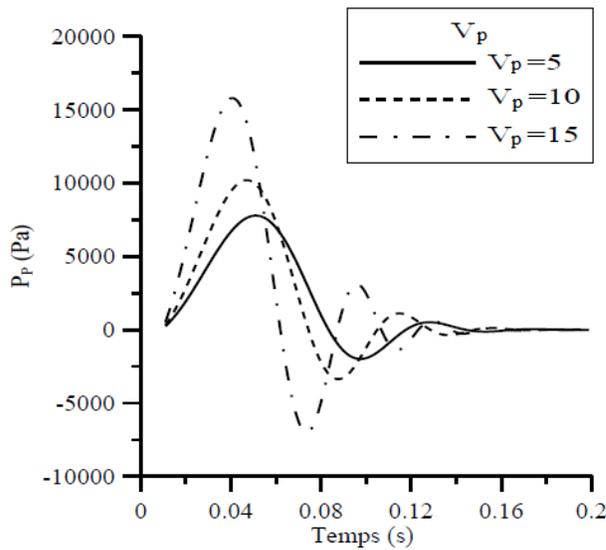


FIGURE 4.2 – L'évolution de la pression dans le plénum pour trois volumes

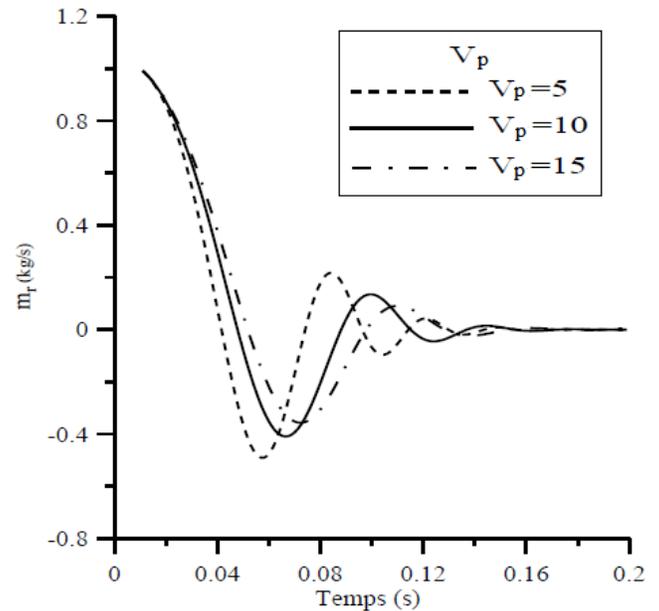


FIGURE 4.3 – L'évolution du débit  $m_r$  au refoulement du compresseur pour trois valeurs de  $V_p$

La Figure 4.4 montre un portrait de phase entre  $P_p$  et  $m_r$  afin de vérifier l'influence du volume sur l'instabilité du système. Le portrait de phase obtenu permet de vérifier que pour le même

point du départ, les trajectoires entrantes tendant vers le même point. Ceci pour des conditions initiales similaires aux précédentes.

L'influence des dimensions du plénum, tel que les nous avons fixées, dans cette figure, reproduisent parfaitement les phénomènes précédents dans le portrait de phase Les trajectoires entrantes convergent vers le même point, ce qui confirme la stabilité du premier point  $(m_0, P_0)$  qui est le point de départ.

Le même processus de calcul est répété pour trois valeurs de  $L_T$  (50, 100, et 150) pour l'évolution  $P_p$  (Figures 4.5, 4.6 et 4.7).

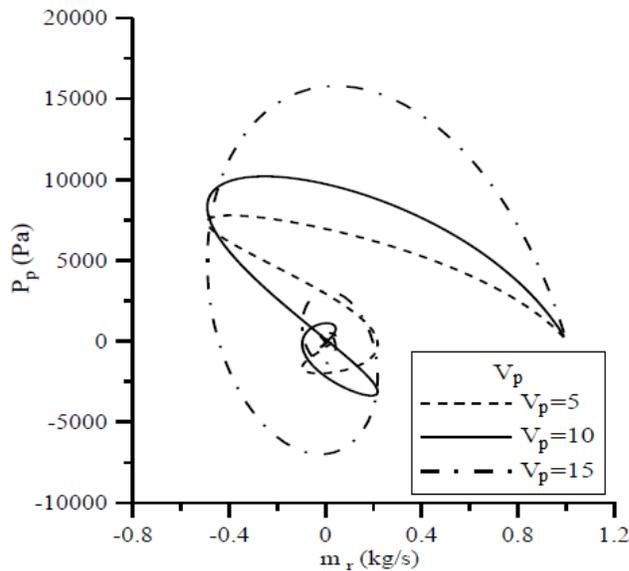


FIGURE 4.4 – Portrait de phase  $P_p$  et  $m_r$  pour trois valeurs de volume

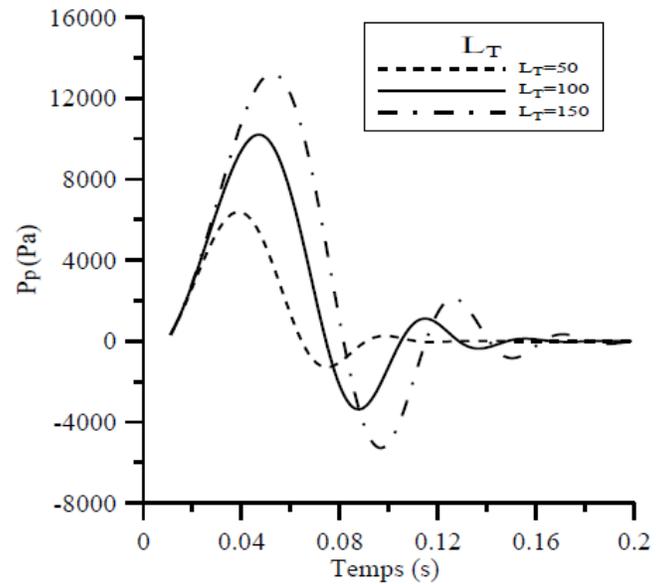


FIGURE 4.5 – L'évolution de la pression dans le plénum pour trois longueurs de la tuyauterie

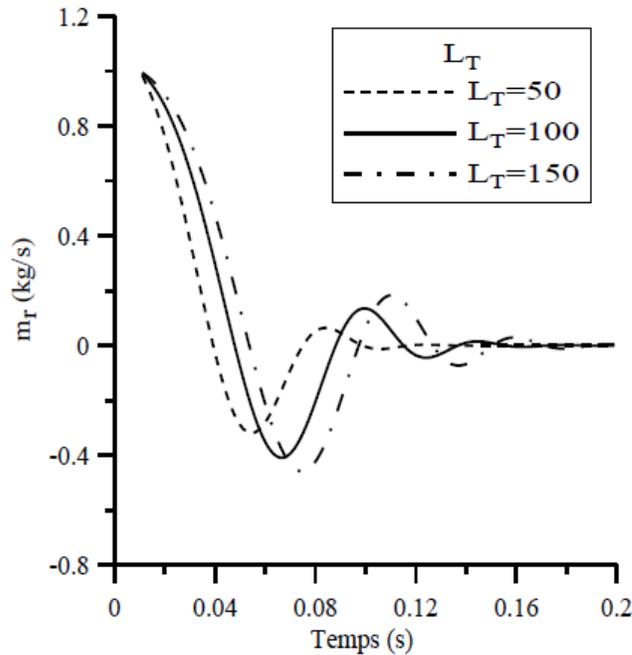


FIGURE 4.6 – L'évolution du débit en fonction du temps pour trois longueurs de la tuyauterie

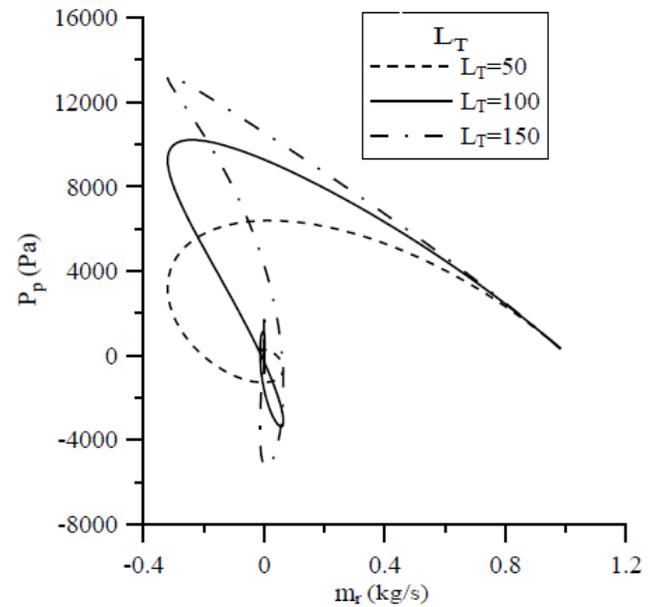
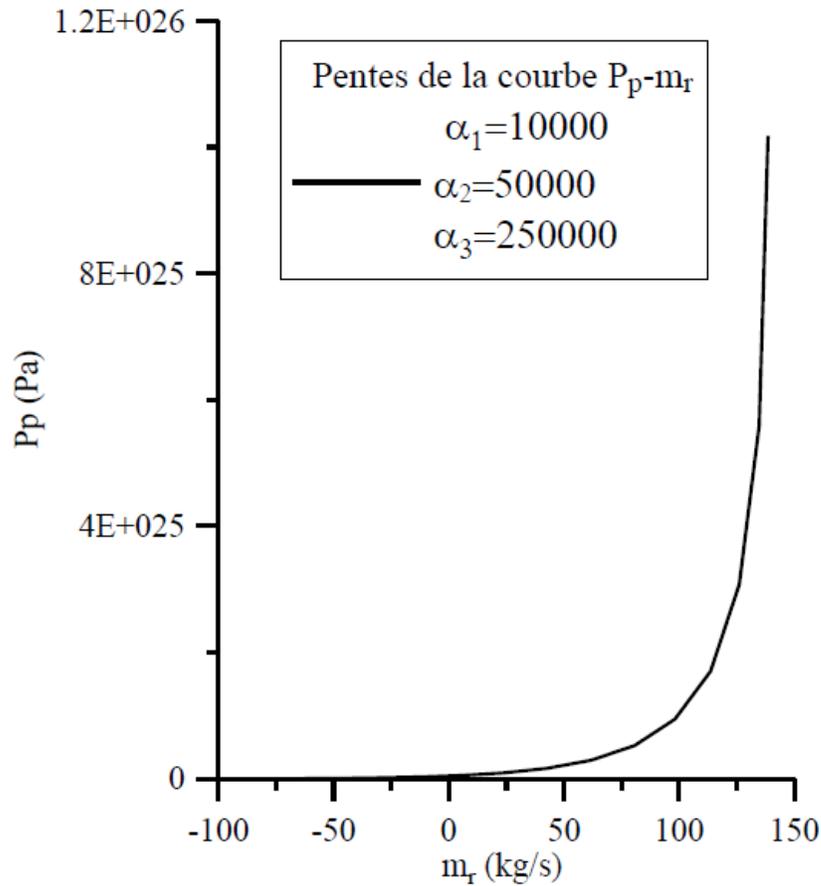


FIGURE 4.7 – Portrait de phase  $P$  et  $m_r$  pour trois longueurs

Dans le but d'illustrer l'influence de la longueur de la tuyauterie sur la stabilité du système de compression, la Figure 4.7 nous montre la convergence des courbes vers un même point.

Sur la Figure 4.8, nous avons fait varier les valeurs de  $\alpha$  pour des pentes positives de la caractéristique du compresseur. Il est à remarquer que le graphe reproduit seulement des valeurs correspondantes à  $\alpha_2$ . Pour celle correspondant à  $\alpha_1$ , elles sont nettement inférieures et celle correspondant à  $\alpha_3$  sont nettement supérieures, c'est pour cela qu'elles n'apparaissent pas, compte tenu de l'échelle que nous avons fixée au graphe. Néanmoins, la stabilité n'existe pas pour toutes ces valeurs.

Pour une valeur de  $\alpha_2 = 5 \cdot 10^4$  positive, nous avons remarqué qu'une variation quasi-exponentielle des paramètres (plan  $P_p$ - $m_r$ ) dénote une instabilité évidente du point d'équilibre dans la zone.

FIGURE 4.8 – Portrait de phase  $P_p(m_r)$  pour trois valeurs de pente  $\alpha$ 

#### 4.2.1 Analyse paramétrique du système d'équations (4.1)

L'étude du problème aux valeurs propres du système (4.1) nous donne le polynôme caractéristique suivant :

$$P(\lambda) = \lambda^2 + (C_0 D_0 - B_0 \alpha) \lambda + B_0 C_0 (1 - \alpha D_0), \quad (4.2)$$

Où  $\lambda$  est la valeur propre du système. Ceci, pour des valeurs :

$$V_p = 5, 10 \text{ et } 15 \text{ et de } -105 < \alpha < 105$$

Pour cela, nous obtenons, sur le graphe de la Figure 4.9, deux zones de signes différents du déterminant, séparées par la valeur nulle de ce dernier. Nous remarquons une dépendance affichée par rapport aux valeurs de  $V_p$ .

La nature du système est donc liée à ces paramètres géométriques d'où une forte sensibilité

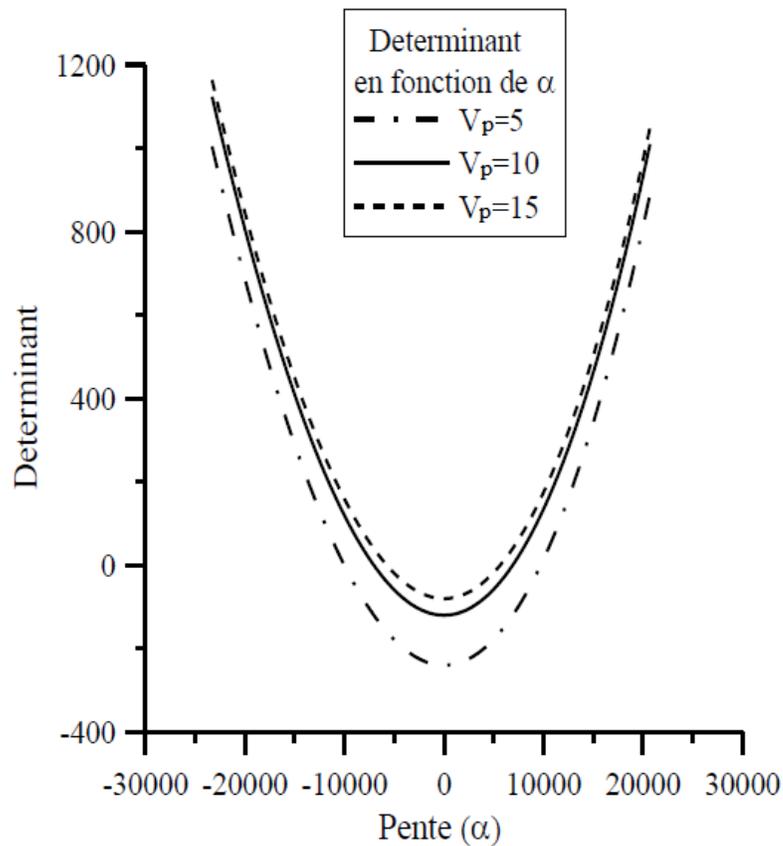


FIGURE 4.9 – Le signe du déterminant suivant les valeurs de la pente caractéristique

aux dimensions des parties composants ce système de pression.

L'évolution de la partie réelle des racines caractéristiques du système (4.1), en fonction de  $V_p$  montrée sur la Figure 4.10 explique pour des valeurs  $V_p$  supérieures à 0.441, l'instabilité du système. Cette forme de stabilité est en fait celle du compresseur lui-même, puisque elle nous permet de choisir un dimensionnement adéquat.

### 4.3 Conclusion

L'implémentation de l'influence des dimensions des différentes parties du système de compression nous a montré leurs effets sur la stabilité du compresseur. Néanmoins, nous avons prit comme exemple des conditions initiales du calcul situées dans la zone stable de la courbe caractéristique

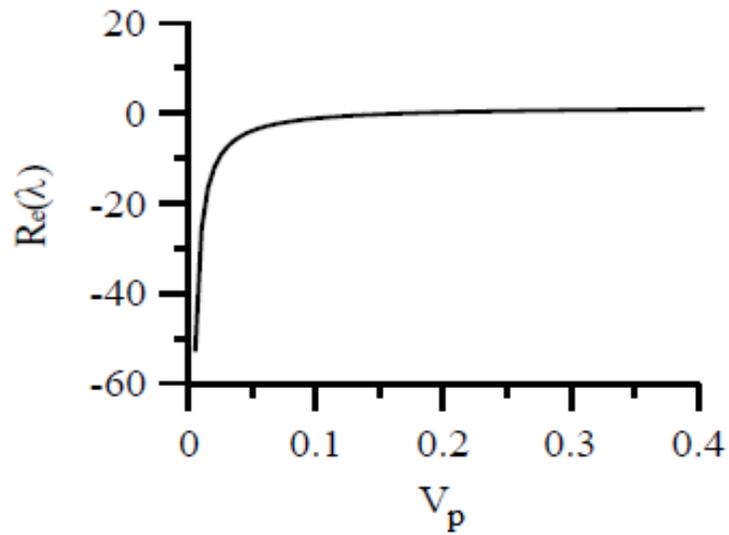


FIGURE 4.10 – L'évolution de la partie réelle en fonction de  $V_p$

du compresseur. Aussi, le modèle des équations considéré présente ainsi une réelle adéquation avec l'exemple considéré. L'analyse et le développement du système d'équations considéré nous a permis de produire les limites de validité du modèle considéré à travers le développement et l'analyse des valeurs propres.

# Conclusion

Le but de ce travail est d'atteindre deux objectifs principaux. Le premier consiste à étudier la modélisation du pompage et du décrochage tournant sur le compresseur axial, ainsi qu'une étude paramétrique appliquée sur le modèle classique de Grietzer à paramètres, ( $B$  et  $K$ ). Cette dernière est utilisée, dans ce travail, pour étudier les caractéristiques des deux phénomènes d'instabilités et d'analyser en détail l'influence et l'impact de ces deux paramètres sur le système de compression à compresseur axial.

L'analyse de ces deux paramètres ( $B$  et  $K$ ) a permis d'obtenir des résultats satisfaisants. On constate qu'ils sont primordiaux pour maintenir le bon fonctionnement en régime permanent de l'ensemble du système. Sur la base des écoulements internes de gaz dans le compresseur axial, nous avons ainsi supposé deux zones d'écoulement : une zone subsonique et une autre zone supersonique séparées par un point critique dont la vitesse atteint une valeur critique de  $B$ . Ainsi, nous avons considéré l'influence du nombre  $K$  avant et après la valeur critique  $B_{crit} = 0.8$ , obtenant de ce fait l'impact du nombre  $B$  sur le fonctionnement du système de compression.

L'évolution des fonctions d'état à  $B = 1$  et  $B = 2$ , nous montre respectivement un passage du pompage classique au décrochage et du pompage profond au décrochage tournant. Dès lors, on observe une transition vers le mode d'instabilité propre pour les valeurs moyennes de  $K$ . Ensuite, une transition vers le mode d'instabilité propre pour les valeurs moyennes de  $K$  est observée. Enfin, pour de grandes valeurs de  $K$ , le système revient sur le décrochage tournant.

Pour le second objectif, nous avons effectué une étude qualitative des phénomènes d'instabilités sur le modèle de compression de Greitzer, sur la base du système dynamique non linéaire, pour un

compresseur axial muni d'un nouveau développement analytique pour l'expression de la courbe caractéristique du compresseur axial. La validation de ce développement a été réalisée par une comparaison, graphique et numérique, à celle de Greitzer.

Nous avons analysé certaines propriétés des éléments de base dans le système dynamique non linéaire. Ainsi, nous avons utilisé le critère de Routh-Hurwitz pour déterminer les conditions de stabilité et définir le comportement du système au voisinage du point de fonctionnement ; lorsque le paramètre de bifurcation passe par le point de bifurcation de Hopf durant le pompage. Le cycle périodique à partir du point zéro fixe dans le cas de la bifurcation de Hopf a été obtenu pendant le cycle du pompage muni dans le nouveau modèle développée. Aussi nous avons effectué l'approximation au premier ordre de l'amplitude du cycle limite pour déterminer le comportement et la direction de la bifurcation de Hopf qui est sous-critique inverse.

Le modèle développé dans le cadre de ce travail semble plus générale et intéressant. En effet, il peut être utilisé en chaque régime d'écoulement avec précision des limites en débit des valeurs optimales de pression sans passer par les résultats expérimentaux.

Les résultats fournis par la simulation numérique de cette expression développée, sont cohérents et adéquats avec les résultats obtenus théoriquement.

Le travail en perspective consistera à analyser les extensions des modèles de Greitzer développés du système de compressions au compresseur centrifuge en traitant d'autres paramètres, en usant de la formule proposée dans notre travail. En outre, on peut entamer l'analyse de bifurcations locale et globale des paramètres de ces modèles conservant le compresseur centrifuge. Comme on peut aussi appliquer la théorie de contrôle à ces modèles avec les deux types de compresseurs dans le nouveau modèle développé. D'autres paramètres peuvent être ajoutés aux paramètres existants pour limiter l'ampleur des phénomènes d'instabilité . En particulier, le rôle de la température à la sortie du compresseur peut donner une amélioration dans le modèle de Greitzer. Cette dernière a été considérée comme constante dans le développement du modèle de Greitzer

# Bibliographie

- [1] E. H. Abed, P. K. Houpt, W. M. Hosny, *Bifurcation analysis of surge and rotating stall in axial flow compressors*. J.Turbomachinery **115** (1993), 817–824.
- [2] T. Abe, H. Mitsui, and Y. Ohta. Coexisting phenomena of surge and rotating stall in an axial flow compressor. Journal of Thermal Science, 22(6) :547–554, 2013. doi : 10.1007/s11630-013-0661-7. UR <http://dx.doi.org/10.1007/s11630-013-0661-7>
- [3] N. Ananthkrishnan, U. G. Vaidya, V. W. Walimbe, *Global stability and control analysis of axial compressor stall and surge phenomena using bifurcation methods* Proc. Institution of Mech. Engrs Vol.**217** part A, J. Power and Energy 2003.
- [4] C. Bitikofer, M. P. Schoen, J. Li, F. Lin, *Characteristic Moore-Greitzer model parameter identification for a one stage axial compressor system*. 2017 American Control Conference (ACC). doi :10.23919/acc.2017.7962948, 2017.
- [5] P. Blanchard, R. L. Devaney, G. R. Hall, *Differential equations*. London : Thompson. (2006) 96–111.
- [6] K. K. Botros, Transient phenomena in compressor stations during surg, Journal of Engineering for Gaz Turbines and Power, 116, (1994) 133-142.
- [7] N.C. Chattopadhyay, H.E.M. Zahidul Islam Eunos, Md. Imtiaz Ikram, Roohany Mahmud . Compressor Instability : Stall, Surge and their Control. Applied Mechanics and Materials. Vol. 390, PP 408-413 . 2013 Trans Thec Publications . Switzerland (Volume 390) :

- [8] X. Chen, G. Gu, P. Martin, K. Zhou, *Rotating stall control via bifurcation stabilization*. Elsevier Science. Automatica, **34(4)** (1998), 437–443.
- [9] B. Coll, A. Gasull, R. Prohens, *Degenerate Hopf bifurcations in discontinuous planar systems*. J. Math. Anal. Appl. **253(2)** (2001), 671–690.
- [10] W. T. Cousins, "The dynamics of stall and surge behavior in axial-centrifugal compressors," Virginia Polytechnic Institute and State University, 1997.
- [11] N.A. Cumpsty, Compressor Aerodynamics, Longman.
- [12] I. J. Day, "Active suppression of rotating stall and surge in axial compressors," Journal of Turbomachinery, vol. 115, pp. 40-47, 1993.
- [13] I. J. Day, *Axial compressor performance during surge*. J. Propulsion and Power. **10(3)** (1994), 329–336.
- [14] I. J. Day. Stall inception in axial flow compressors. Journal of Turbomachinery, 115(1) :1–9, 01 1993. URL <http://dx.doi.org/10.1115/1.2929209> .
- [15] I. J. Day. Stall, surge, and 75 years of research. Journal of Turbomachinery, 138 (1) : 011001–011001, 10 2015. URL <http://dx.doi.org/10.1115/1.4031473>.
- [16] I. Day and N. Cumpsty, The measurement and interpretation of flow within rotating stall cells in axial compressors, Journal of Mechanical Engineering Science, vol. 20, pp. 101-114, 1978.
- [17] R. Dehner. A. Selamet, and P. Killer P. Simulation of Deep Surge in Turbocharger Compression System. Journal of Turbomachinery, Vol.138/ 111002-1-12, 2016.
- [18] W. Du, O. Léonard, *Numerical simulation of surge in axial compressor*. Int. J. Rotating Machinery 2012, (2012).
- [19] M. Dumas, Développement d'une méthode de simulation de pompage au sein d'un compresseur multi-étagé, thèse, Université de Montréal, 2013.
- [20] Ng. Y. Eddie, N. Liu, S. Y. Tan, *Parametric study of Greitzer's instability flow model through compressor system using the Taguchi method*. Int. J. Rotating Machinery **10** (2004), 91–97.

- [21] H.W. Emmons, C.E Pearson and H.P. Grand, Compressor surge and stall propagation, Transaction of the ASME, pp. 455-469. 1955
- [22] J. B. Erskine and N. Hensman, "Vibration induced by pump instability and surging," in Vibrations and Noise in Pump, Fan, and Compressor Installations, pp. 87–98, The Institution of Mechanical Engineers, Mechanical Engineering Publications, Southampton, UK, (1975).
- [23] D. Fink, N. Cumpsty, and E. Greitzer, "Surge dynamics in a free-spool centrifugal compressor system," Journal of Turbomachinery, vol. 114, pp. 321-331, 1992.
- [24] R. Gamache, "Axial compressor reversed flow performance," 1985.
- [25] G. Gentile, M. V. Bartuccelli, J. H. B. Deane, *Bifurcation curves of subharmonic solutions and Melnikov theory under degeneracies*. Reviews in Mathematical Physics **19(03)** (2007), 307–348.
- [26] F. Grapow, G. Liskiewicz, Study of the Greitzer Model for Centrifugal Compressors : Variable  $L_c$  Parameter and Two Types of Surge. MDP. energies ; 2020.
- [27] J. T. Gravdahl, O. Egeland, Compressor and rotating stall : Modelling and control. Springer Verlag, 2011.
- [28] J.T. Gravdahl, O. Egeland, Compressor surge control using a close coupled valve and back stepping. In proceeding of the 1997 American Control Conference. Albuquerque, NM.
- [29] J. T. Gravdahl, O. Egeland, *Moore-Greitzer axial compressor model with spool Dynamics*. Proc : 36th IEEE Conf, Decision and Control, San Diego, CA. (1997), 4714–4719.
- [30] J. T. Gravdahl, *Modeling and control of surge and rotating stall in compressors*. PhD thesis, University of Science and technology, N-7034 Trondheim- Norway (1998).
- [31] J.T. Gravdahl; F. Willems; , B.De Jager; O. Egeland, Modeling for surge control of centrifugal compressors : Comparison with experiment. In Proceedings of the 39th IEEE 14) Conference on Decision and Control (Cat. No. 00CH37187), Sydney, Australia, 12–15 December 2000; Volume 2, pp. 1341–1346.

- [32] E. M. Greitzer, Review—axial compressor stall phenomena, *Journal of Fluids Engineering*, vol. 102, no. 2, pp. 134–151, 1980.
- [33] E. M. Greitzer, F. K. Moore, *A Theory of post-stall transients in axial compression systems. Parts I and II : Applications*, *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* **108** (1986), 231–240.
- [34] E. M. Greitzer, *Surge and rotating stall in axial flow compressors*. *Journal of Engineering for Power* **98** Parts. I and II, (1976), 190–217.
- [35] E. M. Greitzer, The Stability of Pumping Systems - The 1980 Freeman Scholar Lecture. *ASME J. Fluids Eng.*, 1981, 103 :193-242.
- [36] G. Gu, A. G. Sparks, and S. S. Banda, *Bifurcation based nonlinear feedback control for rotating stall in axial flow compressors*. *Int. J. control* **68** (1997), 1241–1257.
- [37] K. E. Hansen, P. Jorgensen, and P. S. Larsen, *Experimental and theoretical study of surge in a small centrifugal compressor* *Journal of Fluids Engineering*, 103, (1981) 391-394.
- [38] L. He, "Computational study of rotating-stall inception in axial compressors," *Journal of Propulsion and Power*, vol. 13, pp. 31-38, 1997.
- [39] C. Hös, A. R. Champneys, L. Kullmann, *Bifurcation analysis of surge and rotating stall in the Moore-Greitzer compression system*. *IMA J. Applied Mathematics* **68(2)** (2003), 205–228.
- [40] A. Jaeschke, G. Liskiewicz, Sensitivity Study of Greitzer Model Based on Physical System Parameters of Radial Compressing Units , MDP, energies, 2020
- [41] H. Kielhöfer, *Bifurcation Theory : An introduction with applications to PDEs* 1st ed. *Applied Mathematical Sciences* 156 Springer, (2003).
- [42] S. G. Koff and E. M. Greitzer, *Stalled flow performance for axial compressors-I : Axisymmetric characteristics*. *ASME* 84-GT-93, (1984).
- [43] M .Krstic, J.M. Protz, J.D Paduano. and P.V .Kokotovic,. Back stepping designs for jet engine, pp. 3049-3055. (1995)

- [44] Y. Kuznetsov, *Elements of applied bifurcation Theory*. Springer-Verlag New York Inc., (1998).
- [45] D. C. Liaw, R. A. Adomaitis, E. H. Abed, *Two-parameters bifurcation analysis of axial flow compressor dynamics*. Elsevier, IFAC Proceedings Volumes **25** (1992), 295–300.
- [46] G. Liskiewicz, L. Horodko, M. Stickland, W. Kryllowicz, *Identification of phenomena preceding blower surge by means of pressure spectral maps*. Exp. Therm. Fluid Sci. 2014, 54, 267–278.
- [47] R. Ma, S. Wang, *Positive solutions for some semi-positone problems with nonlinear boundary conditions via bifurcation theory*. Mediterr. J. Math. **17** 12 (2020), <https://doi.org/10.1007/s00009-019-1443-6>.
- [48] S. A. Malathi, A. Kushari, *A parametric investigation of geometric variation on fluid dynamic instabilities in axial compression systems*. Int. J. Rotating Machinery, **2012**, ID 687354, (2012).
- [49] A. Maqsood, M. K-Khan Tareen, R. Riaz, L. Dala, *Analysis of generalized compressor characteristic on surge phenomena in axial compressors*. Computational and Applied Research in Mechanical Engineering (2020), <https://doi.org/10.22061/JCARME.2020.5182.1639>.
- [50] G. Margrida, P. Joseph, O. Roussette, A. Dazin, *Comparison and sensibility analysis of warning parameters for rotating stall detection in axial compressor*. I.J. Turbomachenery Propulsion and Power, (MDP), (2020), <https://doi.org/10.3390/ijtp5030016>.
- [51] F. E. McCaughan, *Application of bifurcation theory to axial flow compressor instability*. Journal of Turbomachinery **III(4)** (1989), 426–433.
- [52] N. Meskine, M. Kessal, D. Seba, *Local Bifurcation analysis of one parameter in the Greitzer's model with a general compressor characteristic*. Mediterr. J. Math. 2022, <https://doi.org/10.1007/s00009-021-01933-z>.
- [53] R. W. Mickers, *Comparative Parameter Studies of Dynamic Models for centrifugal Compression systems*, Technische Universities Eindhoven, 2006.

- [54] M. Morini, M. Pinelli, and M. Venturini. Development of a one-dimensional modular dynamic model for the simulation of surge in compression systems. *Journal of Turbomachinery*, 129(3) :437–447, 06 2006. URL <http://dx.doi.org/10.1115/1.2447757>.
- [55] S. Niazi, "Numerical simulation of rotating stall and surge alleviation in axial compressors," Ph.D. 9978412, Georgia Institute of Technology, United States – Georgia, 2000.
- [56] R. C. Pampreen, *Compressor surge and stall*, Concepts Eti Vermont, 1993.
- [57] J.M. Pugnet, *Pompage des compresseurs. Techniques de l'ingénieur Machines Aérodynamiques et compresseurs . Vol. Base documentaire : TIB176DUO*. (1999).
- [58] H. Rabezandriny, *Prédiction du décrochage tournant dans les compresseurs axiaux multi-étagés*, thèse, Université de Montréal, 2012.
- [59] E. Sandstorm. *Flow Instabilities in Centrifugal Compressors at Low Mass Flow Rate*. Thesis. Institute of Technology. SE-100 44 Stockholm, Sweden, 2017.
- [60] H. Tamaki, Effect of piping on surge in centrifugal compressor. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 22 (2008) 1857–1863
- [61] S. Tanaka and S. Murata. On the partial flow rate performance of axial-flow compressor and rotating stall : 2nd report, influences of impeller load and a study of the mechanism of unstable performances. *Bulletin of JSME*, 18(117) : 264–271, 1975. doi : 10.1299/jsme1958.18.264.
- [62] S. Tavakoli, I. Griffin, and P. Fleming, *An Overview of Compressor Instabilities : Basic Concepts and Control*. Elsevier, IFAC Proceedings Volumes **37**(6) (2004), 523–528. [https://doi.org/10.1016/S1474-6670\(17\)32228-0](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)32228-0)
- [63] C. Zaiet, *Commande Non Linéaire d'une turbine à Gaz* , Thèse Université de Québec, (2005).
- [64] L. Zhang, *Analytical and Experimental Studies of Instability of an Axial Compression System*. Thesis, Lyon University, 2016. English. NNT :2016LYSEC046.
- [65] Z. Wang, Z. Chen, L. Zhou, *Local bifurcation analysis and topological horseshoe of a 4D hyper-chaotic system*. *Nonlinear Dyn.* **83** (2015), 2055–2066.

- 
- [66] F. Willems, Modeling and Bounded Feedback Stabilization of Centrifugal Compressor Surge. thesis, Technische Universiteit Eindhoven, 2000.
- [67] Wiggins, S. : Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, pp. 200–253. Springer, New York (1990).
- [68] N. Yamaguchi, Analytical Study on Stall Stagnation Boundaries in Axial-Flow Compressor and Duct Systems. International Journal, Fluid Machinery and systems, vol.6, n 2, 2013.
- [69] N. Yamaguchi. Effects of Pressure Ratios of axial Flow compressors on The deep surge frequencies, Part I : Effective Reduced Surge Frequency and Its Behaviours. International Journal of Fluid Machinery and systems, vol.11, n 4, 2018.
- [70] [https ://lavionnaire.fr](https://lavionnaire.fr)

## Résumé

**Résumé :** Dans cette thèse, une étude paramétrique et qualitative a été réalisée à l'aide des modèles de Greitzer muni d'un compresseur axial à un seul étage, dans le but de connaître le comportement du système de compression pendant l'apparition de deux phénomènes des instabilités aérodynamiques. Les effets du coefficient de la vanne de contrôle et du paramètre de Greitzer sur ces instabilités sont analysés et comparés.

Une extension du modèle de Greitzer à cinq équations différentielles est présentée. Ainsi qu'une expression générale développée pour la courbe caractéristique du compresseur, adaptée au système de compression en mode de fonctionnement, est proposée. La validation de cette expression a été obtenue par une comparaison avec celle de Greitzer.

Une solution approchée lorsque le système de compression se déplace vers le point de bifurcation de Hopf pendant le pompage est obtenue.

**Mots clés :** Compresseur, pompage, décrochage tournant, système de compression, bifurcation, bifurcation de Hopf

**Abstract:** In this thesis, a parametric and qualitative study was carried out using Greitzer models with axial compressor, in order to know the behavior of the compression system during the appearance of the aerodynamic instabilities. The effects of the control valve coefficient and the Greitzer parameter on these instabilities are analyzed and compared. An extension of the Greitzer model to five differential equations is presented. As well as a general expression developed for the compressor's characteristic curve, adapted to the compression system in operating mode, is proposed. The validation of this expression was obtained by a comparison with that of Greitzer.

An approximate solution when the compression system moves towards the Hopf bifurcation point during surge is obtained.

**Key words:** Compressor, surge, rotating stall, compression system, bifurcation, Hopf bifurcation

**ملخص:** في هذه الرسالة أجريت دراسة بارامترية ونوعية باستخدام نماذج جريتر ذات الضاغط المحوري لمعرفة سلوك نظام الانضغاط أثناء ظهور عدم الاستقرار الديناميكي الهوائي. تم تحليل ومقارنة تأثيرات معامل صمام التحكم ومعامل جريتر على حالات عدم الاستقرار هذه. تم عرض امتداد لنموذج جريتر إلى خمس معادلات تفاضلية. بالإضافة إلى التعبير العام الذي تم تطويره لمنحنى خصائص الضاغط، والذي تم تكيفه مع نظام الضغط في وضع التشغيل، تم اقتراحه. تم الحصول على التحقق من صحة هذا التعبير من خلال المقارنة مع تلك الخاصة بجريتر. يتم الحصول على حل تقريبي عندما يتحرك نظام الضغط باتجاه نقطة تشعب هوبف أثناء زيادة التيار.

الكلمات المفتاحية: ضاغط، ضخ، توقف دوار، نظام ضغط، تشعب، تشعب هوبف