

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ ABDERRAHMANE MIRA-BÉJAIA-ALGÉRIE  
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



جامعة بجاية  
Tasdawit n Bgayet  
Université de Béjaïa

*Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master  
en Mathématiques*

**OPTION**

Analyse Mathématique

**THÈME**

*Introduction à la dynamique non linéaire : étude de  
la dynamique d'un modèle discret proie-prédateur*

**Présenté par**  
TAOURIRT Amar

Devant le jury :

<b>Président</b>	Mr. N. AKROUNE	Professeur	Université de Bejaia
<b>Rapporteur</b>	Mr. Y. YAHIAOUI	M.C.B	Université de Bejaia
<b>Examineur</b>	Mr. B. FARHI	Professeur	Université de Bejaia

Soutenu publiquement le : 06 - 07 - 2022

---

## Remerciements

Je tiens à exprimer ici toute ma gratitude à Monsieur **YAHIAOUI Yaniss**, Maître de Conférence classe B à l'Université de Bejaia, pour l'honneur qu'il m'a fait en assurant l'encadrement de ce mémoire; je le remercie pour sa disponibilité et ses précieux conseils.

Je suis heureux de pouvoir remercier Monsieur **AKROUNE Nourredine**, Professeur à l'Université de Bejaia, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de soutenance. Qu'il veuille agréer l'expression de ma haute considération.

Je remercie profondément Monsieur **FARHI Bakir**, Professeur à l'Université de Bejaia, d'avoir accepté d'examiner ce travail et m'honorer par sa présence parmi les membres du jury.

Je remercie tous les enseignants qui ont assuré ma formation au sein du département de mathématiques de l'Université de Bejaia.

Enfin, je tiens à remercier mon père et ma mère pour leur soutien pendant toutes ces longues années, mes sœurs **Lamia** et **Linda** et ma cousine **Lilia**, et aussi tous mes amis qui m'ont aidé à réaliser ce travail, plus particulièrement mon ami **AREZKI Samir**.

---



---

## Table des figures

1.3	le cycle $\{0, -1, 1\}$ d'ordre 3, de la fonction $f_2$ . . . . .	9
1.1	Le cycle $\{0, 1\}$ d'ordre 2, de la fonction $f_1$ . . . . .	10
1.2	En partant du point initial $x_0 = 0.5$ , les itérés de $f_1$ représentés sur cette figure. . . . .	10
1.4	En partant du point initial $X_0 = (-2, 9)$ . . . . .	23
1.5	En partant du point initial $X_0 = (3, -9)$ . . . . .	23
1.6	En partant du point initial $X_0 = (\frac{1}{7}, -\frac{1}{8})$ . . . . .	24
1.7	En partant du point initial $X_0 = (-\frac{1}{7}, \frac{1}{8})$ . . . . .	24
1.8	En partant du point initial $X_0 = (3, 9)$ . . . . .	24
1.9	En partant du point initial $X_0 = (-5, -8)$ . . . . .	24
1.10	En partant du point initial $X_0 = (3, 2)$ . . . . .	25
1.11	En partant du point initial $X_0 = (0.5, 0.3)$ . . . . .	25
1.12	En partant du point initial $X_0 = (1, 2)$ . . . . .	26
1.13	En partant du point initial $X_0 = (-1, -1)$ . . . . .	26
1.14	En partant du point initial $X_0 = (1, 2)$ . . . . .	26
1.15	En partant du point initial $X_0 = (0.5, 0.7)$ . . . . .	27
1.16	En partant du point initial $X_0 = (3, 8)$ . . . . .	27
1.17	Les itérés de $F$ en fonction des paramètres $a$ et $b$ . . . . .	31
2.1	Diagramme de bifurcation de la fonction logistique $F_\mu$ . . . . .	36
2.2	Diagramme de bifurcation de la fonction logistique $F_\mu$ , pour $2 < \mu \leq 4$ . . . . .	36
2.3	Bifurcation de nœud-col de l'exemple 2.1 . . . . .	37
2.4	Bifurcation de nœud-col type transcritique de l'exemple . . . . .	38
2.5	Bifurcation nœud-col type fourche. . . . .	38
2.6	Bifurcation de doublement de période de l'exemple 2.1 . . . . .	39
2.7	Diagramme de bifurcation de l'exemple 2.1 . . . . .	39
2.8	Bifurcation de Neimark-Sacker de l'exemple 2.3. . . . .	41
2.9	Bifurcation de Neimark-Sacker de l'exemple 2.4 . . . . .	41
2.10	Bifurcation d'une courbe invariante fermée, et la création des oscillations. . . . .	47
2.11	$f$ est $h$ -conjugué de $g$ . . . . .	51
3.1	Diagramme de bifurcation du système (3.1), en partant de point initial $(1.1, 0.1)$ . . . . .	62

---

3.2	Les courbes critiques de $F$ . . . . .	73
3.3	Portrait de phase du système (3.1) pour le paramètre $b, r = 3, d = 1$ . . . . .	74
3.4	Portrait de phase du système (3.1), $r = 6, d = 1$ , le point initial $X_0 = (0.5, 1.5)$ . . . . .	75
3.5	Portrait de phase du système (3.1). . . . .	76
3.6	Portrait de phase du système (3.1). . . . .	77
3.7	Le bassin d'attraction et l'attracteur du système (3.1) . . . . .	78
3.8	Portrait de phase du système (3.1). . . . .	79
3.9	Portrait de phase du système (3.1). . . . .	80
3.10	Le bassin d'attraction et l'attracteur du système (3.1) . . . . .	81

---

---

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Généralités sur les systèmes dynamiques discrets</b>	<b>8</b>
1.1	Définitions et notations . . . . .	8
1.2	Stabilité . . . . .	10
1.2.1	Stabilité dans $\mathbb{R}$ . . . . .	11
1.2.2	Stabilité des points fixes hyperboliques . . . . .	11
1.2.3	Point fixe non hyperbolique . . . . .	12
1.3	Stabilité dans $\mathbb{R}^2$ . . . . .	14
1.3.1	Stabilité dans le cas d'une fonction linéaire . . . . .	14
1.3.2	Classification de Poincaré . . . . .	18
1.3.3	Stabilité dans le cas d'une fonction non linéaire . . . . .	28
1.4	Attracteur et bassin d'attraction . . . . .	31
1.4.1	Attracteur . . . . .	31
1.4.2	Bassin d'attraction d'un point fixe . . . . .	32
<b>2</b>	<b>Bifurcation et chaos</b>	<b>33</b>
2.1	Bifurcation . . . . .	33
2.1.1	Exemple de bifurcation dans $\mathbb{R}$ (La fonction logistique) [9] . . . . .	33
2.1.2	Bifurcation nœud-col . . . . .	37
2.1.3	Bifurcation de doublement de période . . . . .	38
2.1.4	Bifurcation de Neimark-Sacker . . . . .	40
2.1.5	Variété centrale . . . . .	42
2.1.6	Bifurcation bidimensionnelle . . . . .	43
2.2	Les courbes critiques . . . . .	44
2.2.1	Classification des transformations non inversibles . . . . .	45
2.2.2	Bifurcation d'une Courbe Invariante Fermée . . . . .	46
2.2.3	Rôle des courbes critiques dans les bifurcations fondamentales des bassins . . . . .	47
2.3	Chaos . . . . .	48
2.3.1	Transitivité . . . . .	48
2.3.2	Chaos selon Devaney . . . . .	49
2.3.3	Conjugaison topologique . . . . .	51
2.3.4	Chaos selon Li-Yorke [18] . . . . .	52

---

<b>3 Étude de la dynamique d'un modèle discret proies-prédateurs</b>	<b>54</b>
3.1 Existence des points fixes et leurs stabilités locales . . . . .	55
3.1.1 Classification topologique et stabilités des points fixes . . . . .	56
3.2 Étude de bifurcations locales . . . . .	58
3.2.1 Bifurcation nœud-col . . . . .	58
3.2.2 Bifurcation de doublement de période . . . . .	62
3.2.3 Bifurcation de Neimark-Sacker . . . . .	67
3.2.4 Courbes critiques . . . . .	71
3.3 Simulations numériques . . . . .	74
3.3.1 Bifurcation de Neimark-Sacker . . . . .	74
3.3.2 Bifurcation d'une courbe invariante fermée . . . . .	75
3.3.3 Bifurcation de contact de l'attracteur avec son bassin d'attraction . . . . .	77
3.3.4 Simulation numérique pour $r = 3$ , $d = 2$ . . . . .	78
<b>Conclusion</b>	<b>82</b>

---

## Introduction

La théorie des systèmes dynamiques a pour objet de modéliser les processus qui évoluent dans le temps et de pouvoir ainsi étudier leur comportement. Ces processus peuvent être des phénomènes physiques, biologiques, environnementaux, économiques ou encore financiers. Un système dynamique est fondamentalement ce que l'on appelle un "espace des phases" (ou "espace des états"), c'est-à-dire l'espace de tous les états possibles du système considéré, muni d'une équation d'évolution qui décrit l'évolution temporelle de l'état du système. On distingue essentiellement deux types de systèmes dynamiques : les systèmes à temps continu (la variable temps évolue dans  $\mathbb{R}$ ) et les systèmes à temps discret (la variable temps évolue dans  $\mathbb{N}$ ). Pour les premiers, l'équation d'évolution prend la forme d'une équation différentielle ou d'une équation aux dérivées partielles, alors que dans le second cas elle se présente comme une application de l'espace des phases dans lui-même.

La théorie des systèmes dynamiques est née avec l'étude du mouvement des planètes en astronomie. Au 15<sup>ème</sup> siècle, Kepler et Galilée fournissent d'importants résultats qualitatifs, puis Newton (1687) formalise les lois de Kepler sur les mouvements des planètes et les observations de Galilée (mécanique newtonienne). Les mathématiciens développent cette théorie à l'aide des méthodes analytiques, faisant émerger l'analyse dynamique. Cependant, à la fin du 19<sup>ème</sup> siècle, en tentant de résoudre le "problème des trois corps", Poincaré montre qu'il n'en existe pas de solutions générales et développe un certain nombre d'outils d'ordre topologique qui seront à la base de la théorie moderne des systèmes dynamiques. Liapounov, avec sa théorie de la stabilité, et Birkhoff, avec ses nombreuses contributions en dynamique topologique, fondent cette nouvelle théorie qualitative des systèmes dynamiques. Cela aboutira à la théorie des bifurcations ou à celle du chaos.

La théorie des systèmes dynamiques cherche à comprendre les propriétés qualitatives et statistiques de l'évolution à long terme d'un système, et plus particulièrement la notion de stabilité. L'étude de ces systèmes a mis en évidence deux grands types de comportement, que l'on retrouve dans de très nombreuses situations : les phénomènes quasi périodiques et les phénomènes chaotiques.

L'histoire des systèmes dynamiques a connu trois périodes bien distinctes, chacune est caractérisée par le mathématicien qui s'est saisi du problème. La période Newton correspond à

l'idée que nous disposons d'une équation différentielle et que l'on cherche à résoudre. La période Poincaré stipule qu'il faut étudier le comportement qualitatif des solutions sans résoudre l'équation différentielle. Enfin, la période Andronov se distingue des deux périodes précédentes dans la mesure où nous n'avons pas d'équation différentielle mais où nous devons toujours étudier le comportement qualitatif des solutions.

En mathématiques, la théorie du chaos étudie le comportement des systèmes dynamiques très sensibles aux conditions initiales, un phénomène généralement illustré par l'effet papillon ou le double pendule (voir l'animation sur le lien "Simulation double pendule"). Pour de tels systèmes, des différences infimes dans les conditions initiales entraînent des résultats totalement différents, rendant en général toute prédiction impossible à long terme. Cela concerne même les systèmes purement déterministes (ceux dont le comportement futur est entièrement déterminé par les conditions initiales, sans aucune intervention du hasard) : leur nature déterministe ne les rend pas prévisibles car on ne peut pas connaître les conditions initiales avec une précision infinie. Ce comportement paradoxal est connu sous le nom de chaos. Le comportement chaotique est à la base de nombreux systèmes naturels, tels que la météo. Ce comportement peut être étudié grâce à l'analyse par des modèles mathématiques chaotiques, ou par des techniques analytiques de récurrence et des applications de Poincaré. La théorie du chaos a des applications en météorologie, sociologie, physique, informatique, ingénierie, économie, biologie et philosophie.

Historiquement le phénomène de sensibilité aux conditions initiales a été découvert dès la fin du 19<sup>ème</sup> siècle par Henri Poincaré, dans des travaux concernant le problème à N corps en mécanique céleste, puis par Hadamard ; et le premier attracteur étrange a été découvert par le météorologue Edward Lorenz en 1963. Mais ce n'est véritablement que dans les années 1970 que la théorie du chaos s'est progressivement imposée sur le devant de la scène scientifique. Le terme suggestif de "chaos" n'a d'ailleurs été introduit qu'en 1975 par les deux mathématiciens Tien-Yien Li et James A. Yorke. Otto E. RöSSLer, connu pour avoir découvert l'un des attracteurs chaotiques le plus étudié (et appelé aujourd'hui attracteur de RöSSLer), utilisa le terme de "chaos" dans la plupart de ses articles dès 1976.

L'objet de ce mémoire consiste en une étude de la dynamique complexe générée par un modèle discret proies-prédateurs et expliquer les mécanismes qui ramènent vers le chaos.

Dans le premier chapitre, nous définissons les notions de base des systèmes dynamiques discrets, et les critères de stabilité, et la classification qualitatif de Poincaré.

Au deuxième chapitre on s'intéresse à la bifurcation et ces types avec des exemples illustratifs, après le chaos selon Devaney et Li-Yorke avec les outils nécessaires comme la transitivité et la conjugaison topologique.

Enfin le troisième chapitre est consacré à l'étude d'un système proies-prédateurs qui possède des bifurcations les quels mènent à des comportements chaotiques ; des attracteurs étranges apparaissent pour certaines valeurs des paramètres.



---

## Généralités sur les systèmes dynamiques discrets

Dans ce premier chapitre, on rappelle les définitions de base et les principales notions de la théorie des systèmes dynamiques discrets, ainsi que certains de leurs propriétés que l'on utilisera ultérieurement.

### 1.1 Définitions et notations

**Définition 1.1.** On appelle **système dynamique discret** le couple  $(X, f)$ , où généralement  $X \subset \mathbb{R}^N : N \in \mathbb{N}^*$ , et  $f : X \rightarrow X$  est une application continue qui vérifie  $f(X) \subset X$ .

#### Notations

1. On note  $f^0 = Id_X$  où  $Id_X$  désigne l'application identité ( $f^0(x) = x, \forall x \in X$ ).
2. On note la relation de récurrence  $f^{n+1} = f \circ f^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On a donc :

$$\forall n, m \in \mathbb{N} : f^{n+m} = f^n \circ f^m = f^m \circ f^n.$$

3. Si  $f$  est inversible, on définit  $f^{-n} := (f^{-1})^n$ , on a alors

$$\forall n, m \in \mathbb{Z} : f^{n+m} = f^n \circ f^m = f^m \circ f^n, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} : f^{-n} \circ f^n = f^n \circ f^{-n} = Id_X.$$

**Remarque 1.1.** L'ensemble  $X$  est appelé **espace des phases** ou **espace d'états**, et  $f$  est appelée **fonction d'évolution**.

**Définition 1.2.** Soit  $x \in X$ , on définit l'orbite de  $x$  noté  $\theta_x$  par

$$\theta_x = \{x, f(x), f^2(x), \dots\} = \{f^k(x), k \in \mathbb{N}\}.$$

Si  $f$  est inversible, on définit l'orbite positive de  $x$  par

$$\theta_x^+ = \{x, f(x), f^2(x), \dots\} = \{f^k(x), k \in \mathbb{N}\},$$

et l'orbite négative de  $x$  par :

$$\theta_x^- = \{\dots, f^{-2}(x), f^{-1}(x), x\} = \{f^{-k}(x), k \in \mathbb{N}\},$$

et l'orbite de  $x$  par :

$$\theta_x = \{\dots, f^{-1}(x), x, f(x), \dots\} = \{f^k(x), k \in \mathbb{Z}\}.$$

**Définition 1.3.**

1. On appelle **point fixe** de  $f$ , tout point  $x \in X$  qui vérifie  $f(x) = x$ .
2. On dit que  $x \in X$  est un **point périodique** de  $f$  si  $\exists n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $f^n(x) = x$ .
  - (a) Le plus petit entier naturel  $n \in \mathbb{N}^*$  qui vérifie  $f^n(x) = x$  est appelé la **période** de  $x$ .
  - (b) L'ensemble  $\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$  est appelé **cycle** engendré par  $x$  d'ordre  $n$ .
  - (c) Si  $N \in \mathbb{N}^*$  est la période du point  $x$ , alors on a :  $\forall n \in \mathbb{N} : f^{n+N}(x) = f^n(x)$ .

**Exemple 1.1.**

1. Le système dynamique  $(X, f_1)$ , où  $f_1(x) = -x^2 + 1$  et  $X = [0, 1]$  admet un seul point fixe  $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ . D'autre part, comme  $f_1(0) = 1$  et  $f_1(1) = 0$ , alors les deux points  $p_1 = 0$  et  $p_2 = 1$  sont des points périodiques de période 2. Par suite,  $\{0, 1\}$  est un cycle d'ordre 2.
2. Le système dynamique  $(Y, f_2)$ , où  $f_2(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 1$  et  $Y = [-1, 1]$  admet un seul point fixe  $r \in [-0.53, -0.52]$ . D'autre part, comme  $f_2(0) = -1$ ,  $f_2(-1) = 1$  et  $f_2(1) = 0$ , alors les points  $q_1 = 0$ ,  $q_2 = -1$  et  $q_3 = 1$  sont des points périodiques de période 3. Par suite,  $\{0, -1, 1\}$  est un cycle d'ordre 3.

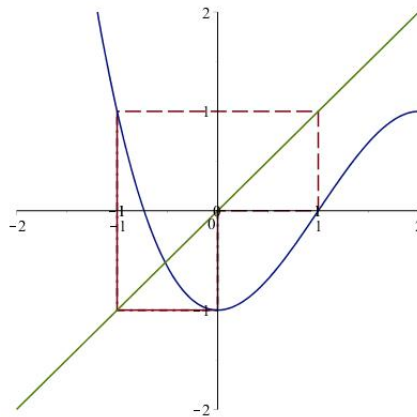


FIGURE 1.3 – le cycle  $\{0, -1, 1\}$  d'ordre 3, de la fonction  $f_2$ .

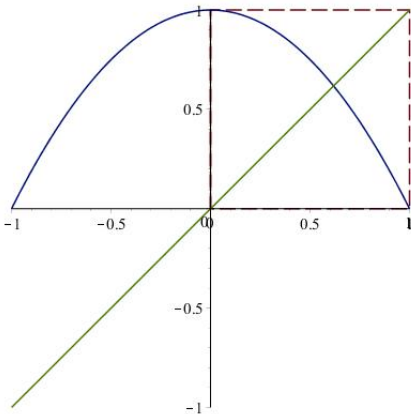


FIGURE 1.1 – Le cycle  $\{0, 1\}$  d'ordre 2, de la fonction  $f_1$ .

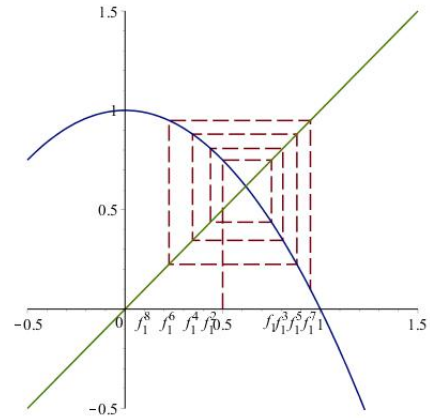


FIGURE 1.2 – En partant du point initial  $x_0 = 0.5$ , les itérés de  $f_1$  représentés sur cette figure.

## 1.2 Stabilité

L'un des objectifs essentiels de la théorie du système dynamique discret est d'étudier la stabilité des singularités afin de cerner la structure des solutions.

**Définition 1.4.** Soit  $(X, f)$  un système dynamique et  $x \in X$  un point fixe de  $f$ .

1. Le point fixe  $x$  est **stable** si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 : \forall y : d(x, y) < \alpha \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : d(x, f^n(y)) < \epsilon.$$

2. Le point fixe  $x$  est **attractif** si :

$$\exists \alpha > 0 \forall y : d(x, y) < \alpha \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(y) = x.$$

3. Le point fixe  $x$  est **asymptotiquement stable** s'il est stable et attractif. De plus si  $\alpha = +\infty$  on dit que  $x$  est un point fixe **asymptotiquement stable global**.

4. Un point fixe est **instable** s'il n'est pas stable. Autrement dit :

$$\exists \epsilon > 0, \forall \alpha > 0 : \exists y : d(x, y) < \alpha \text{ et } \exists n \in \mathbb{N} : d(x, f^n(y)) > \epsilon.$$

**Remarque 1.2.** Un cycle d'ordre  $(n+1)$  est dit **stable** (respectivement : **attractif**, **asymptotiquement stable**) si l'un de ces points est stable (respectivement : **attractif**, **asymptotiquement stable**) comme point fixe de l'application  $f^n$ .

### 1.2.1 Stabilité dans $\mathbb{R}$

Dans le cas où  $X$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f$  est une fonction suffisamment dérivable, il existe une méthode pratique pour étudier la stabilité.

**Définition 1.5.** Soit  $(I, f)$  un système dynamique et  $r \in I$  un point fixe de  $f$ , où  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

1. Le point fixe  $r$  est semi-stable à droite si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 : \forall y : 0 < y - r < \alpha \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : |r - f^n(y)| < \epsilon.$$

2. Le point fixe  $r$  semi-attractif à droite si :

$$\exists \alpha > 0 \forall y : y - r < \alpha \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(y) = r.$$

3. Le point fixe  $r$  est dit semi-asymptotiquement stable si le point  $r$  est à la fois semi-stable et semi-attractif.

**Remarque 1.3.** De manière similaire on définit la semi-stabilité à gauche, semi-attractivité à gauche et semi-asymptotiquement stable à gauche.

**Définition 1.6.** Soit  $(I, f)$  un système dynamique, où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $r \in I$  est un point fixe de  $f$ . On suppose que  $f$  est dérivable en  $r$ .

1. Le point fixe  $r$  est **hyperbolique** si  $|f'(r)| \neq 1$ .

2. Le point fixe  $r$  est **non hyperbolique** si  $|f'(r)| = 1$ .

### 1.2.2 Stabilité des points fixes hyperboliques

**Théorème 1.1.** Soit  $(I, f)$  un système dynamique, où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $r \in I$  est un **point fixe hyperbolique** de  $f$ . On suppose que  $f$  est dérivable en  $r$ .

1. Le point fixe  $r$  est asymptotiquement stable si  $|f'(r)| < 1$ .

2. Le point fixe  $r$  est instable si  $|f'(r)| > 1$ .

**Démonstration.** Comme  $f$  est dérivable au voisinage de  $r$ , alors :

$$\lim_{x \rightarrow r} \frac{f(x) - f(r)}{x - r} = \lim_{x \rightarrow r} \frac{f(x) - r}{x - r} = f'(r).$$

Autrement dit, au voisinage de  $r$  on a :

$$\frac{f(x) - r}{x - r} \sim f'(r).$$

1. *Premier cas : si  $|f'(r)| < 1$ , alors :*

$$\exists l < 1, \forall n \in \mathbb{N} : |f'(r)|^n < l,$$

par suite,

$$|f(x) - r| < l|x - r|.$$

Et par récurrence, on obtient :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} : |f^n(x) - r| &< l^n|x - r| \\ &< l|x - r|. \end{aligned}$$

En prenant  $\alpha = \frac{\epsilon}{l}$ , on aura pour tout  $x$  :

$$|x - r| < \alpha \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : |f^n(x) - r| < \epsilon.$$

D'où, le point fixe  $r$  est stable.

D'autre part, comme  $l < 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N} : |f^n(x) - r| < l^n|x - r|$ , alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |f^n(x) - r| = 0.$$

D'où, le point fixe  $r$  est attractif.

2. *Deuxième cas : si  $|f'(r)| > 1$ , alors :*

$$\exists l > 1 : |f'(r)| > l,$$

par suite,

$$|f(x) - r| > l|x - r|.$$

Il en résulte que le point fixe  $r$  est instable.

### 1.2.3 Point fixe non hyperbolique

**Théorème 1.2.** *Soit  $(I, f)$  un système dynamique, où  $I$  un intervalle et  $r \in I$  est un **point fixe non hyperbolique** de  $f$  tel que  $f'(r) = 1$ . Supposons que  $f$  est une fonction au moins de classe  $C^3$  au voisinage de  $r$ . Alors,*

1. *Le point fixe  $r$  est semi-stable si  $f''(r) \neq 0$ .*
2. *Le point fixe  $r$  est instable si  $f''(r) = 0$  et  $f^{(3)}(r) > 0$ .*
3. *Le point fixe  $r$  est stable si  $f''(r) = 0$  et  $f^{(3)}(r) < 0$ .*

**Remarque 1.4.** *Si  $f^{(3)}(r) = 0$ , on refait le même processus en calculant les dérivées  $n$ -ème de la fonction  $f$ , où  $n$  correspond à la  $n$ -ème dérivée non nulle.*

**Démonstration.** La démonstration est similaire à la précédente en utilisant la formule de Taylor à l'ordre  $n$ , avec  $f^{(n)}(r) \neq 0$ .

Dans le cas d'un point fixe non hyperbolique avec  $f'(r) = -1$ , avant d'annoncer le critère de stabilité, on va définir d'abord la notion de **dérivée Schwarzienne**.

**Définition 1.7.** On définit la **dérivée Schwarzienne** noté  $Sf$  de la fonction  $f$  par :

$$Sf(x) = \frac{f^{(3)}(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2,$$

et dans le cas,  $f'(r) = -1$  :

$$Sf(r) = -f^{(3)}(r) - \frac{3}{2}(f''(r))^2.$$

**Théorème 1.3.** Soit  $(I, f)$  un système dynamique, où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $r \in I$  est un **point fixe non hyperbolique** de  $f$  tel que  $f'(r) = -1$ . Supposons que  $f$  est une fonction au moins de classe  $C^3$  au voisinage de  $r$ , alors

1. Le point fixe  $r$  est asymptotiquement stable si  $Sf(r) < 0$ .
2. Le point fixe  $r$  est instable si  $Sf(r) > 0$ .

**Remarque 1.5.** Si  $Sf(r) = 0$ , on refait le même processus en calculant  $S_n f(x)$  définie par

$$\begin{cases} S_1 f(x) = Sf(x) \\ S_n f(x) = \frac{1}{2} g^{(2n+1)}(x), \forall n \in \mathbb{N} : n > 1, \text{ où } g = f^2. \end{cases}$$

**Démonstration.** La démonstration se fait en utilisant la formule de Taylor pour  $g = f^2$ .

**Théorème 1.4.** Soit  $(I, f)$  un système dynamique, où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $C = \{p, f(p), f^2(p), \dots, f^{k-1}(p)\} = \{p, p_1, p_2, \dots, p_{k-1}\}$  est un cycle de point  $p \in I$  de période  $k$ . Supposons que  $f$  est une fonction dérivable en  $p$ , alors :

1. Le cycle  $C$  est asymptotiquement stable si  $|f'(p)f'(p_1)f'(p_2) \cdots f'(p_{k-1})| < 1$ .
2. Le cycle  $C$  est instable si  $|f'(p)f'(p_1)f'(p_2) \cdots f'(p_{k-1})| > 1$ .

**Démonstration.** La démonstration repose sur l'application du théorème 1.1, pour la fonction  $f^k$ , avec  $(f^k(p))' = f'(p)f'(p_1)f'(p_2) \cdots f'(p_{k-1})$ , et  $p$  est un point fixe de la fonction  $f^k$ .

## 1.3 Stabilité dans $\mathbb{R}^2$

### 1.3.1 Stabilité dans le cas d'une fonction linéaire

Soit  $f$  une fonction linéaire définie sur  $G \subset \mathbb{R}^2$  (ou sur  $\mathbb{R}^2$ ) à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$  par :

$$f(X) = AX,$$

où  $A$  est une matrice carrée d'ordre 2. Dans ce cas il est facile d'étudier la stabilité du point fixe  $X^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**Définition 1.8.** Soit  $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,2}}$  une matrice réelle et le vecteur  $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ . On définit le rayon spectral de  $A$  noté  $\rho(A)$ , par  $\rho(A) = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|)$ , où  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les valeurs propres de la matrice  $A$ . On définit aussi  $\|A\|_1 = \max(|a_{11}| + |a_{21}|, |a_{12}| + |a_{22}|)$ ,  $\|A\|_\infty = \max(|a_{11}| + |a_{12}|, |a_{21}| + |a_{22}|)$ .  $\|V\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$  est la norme euclidienne de  $V$ .

**Théorème 1.5** ([8]).

1. L'origine est asymptotiquement stable si  $\rho(A) < 1$ .
2. L'origine est instable si  $\rho(A) > 1$ .
3. L'origine est instable si  $\rho(A) = 1$  et la Jordanisation de la matrice  $A$  sous la forme  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ , et stable si elle est sous la forme  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  ou  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ .

**Démonstration.** On sais que  $f(X) = PDP^{-1}X$ , où  $P$  est la matrice de passage  $AP = PD$ , et  $D$  une matrice peut-être uniquement sous trois forme.

1. On suppose que  $\rho(A) < 1$ , alors on distingue trois cas :

(a) Si  $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  une matrice diagonale, alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} : f^n(X) = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} P^{-1}X,$$

$$\|f^n(X)\| \leq \rho(A)^n \|P\| \|P^{-1}\| \|X\|,$$

comme  $\rho(A) < 1$ , alors on aura :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \rho(A)^n < 1.$$

On prend  $\alpha = \frac{\epsilon}{c}$  avec  $c = \|P\| \cdot \|P^{-1}\|$ . Donc, pour tout  $X$ , on a :

$$\|X\| < \alpha \implies \forall n \in \mathbb{N} : \|f^n(X)\| < \epsilon,$$

ce qui entraîne la stabilité de l'origine.

D'autre part, comme  $\rho(A) < 1$ , alors on a :

$$\exists M_1 : \rho(A) \leq M_1 < 1,$$

par suite, pour tout  $X \in G$  on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(A)^n \|P\| \cdot \|P^{-1}\| \cdot \|X\| = 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f^n(X)\| = 0,$$

ce qui entraîne l'attractivité de l'origine.

(b) si  $D = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ , dans ce cas, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} : f^n(X) = P \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} P^{-1} X$$

$$\|f^n(X)\| \leq (|\lambda|^n + n|\lambda|^{n-1}) \|P\| \cdot \|P^{-1}\| \cdot \|X\|,$$

comme  $\rho(A) < 1$ , alors on aura :

$$\exists M_2 : \rho(A) = \lambda \leq M_2 < 1,$$

par suite on aura :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (|\lambda|^n + n|\lambda|^{n-1}) = 0,$$

donc,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (|\lambda|^n + n|\lambda|^{n-1}) \|P\| \cdot \|P^{-1}\| \cdot \|X\| = 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f^n(X)\| = 0,$$

ce qui entraîne l'attractivité de l'origine.

Et d'autre part,

$$\exists L > 0, \forall n \in \mathbb{N} : |\lambda|^n + n|\lambda|^{n-1} < L,$$

donc on prend  $\alpha = \frac{\epsilon}{l}$ , où  $l = L \cdot \|P\| \cdot \|P^{-1}\|$ . Par suite, on aura pour tout  $X$  :

$$\|X\| < \alpha \implies \forall n \in \mathbb{N} : \|f^n(X)\| < \epsilon.$$

Ce qui entraîne la stabilité de l'origine.



(c) Si les valeurs propres de  $A$  sont complexes,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ , donc  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  et  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$  :

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \text{ alors } D = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \text{ et donc } D = |\lambda_1| \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{|\lambda_1|} & \frac{\beta}{|\lambda_1|} \\ \frac{-\beta}{|\lambda_1|} & \frac{\alpha}{|\lambda_1|} \end{pmatrix}.$$

Par suite, on pose  $w = \begin{cases} \arctan(\frac{\beta}{\alpha}) & \text{si } \alpha \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$ , donc  $D = |\lambda_1| \begin{pmatrix} \cos(w) & \sin(w) \\ -\sin(w) & \cos(w) \end{pmatrix}$ . Par récurrence sur  $\mathbb{N}$ , on obtient :

$$D^n = |\lambda_1|^n \begin{pmatrix} \cos(nw) & \sin(nw) \\ -\sin(nw) & \cos(nw) \end{pmatrix},$$

ce qui nous donne,

$$\forall n \in \mathbb{N} : f^n(X) = |\lambda_1|^n P \begin{pmatrix} \cos(nw) & \sin(nw) \\ -\sin(nw) & \cos(nw) \end{pmatrix} P^{-1} X,$$

$$\|f^n(X)\| \leq 2|\lambda_1|^n \|P\| \|P^{-1}\| \|X\|.$$

Comme  $\rho(A) < 1$ , donc  $\exists M_3 : \rho(A) = |\lambda_1| \leq M_3 < 1$ . Alors, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (2|\lambda_1|^n \|P\| \|P^{-1}\| \|X\|) = 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f^n(X)\| = 0,$$

ce qui implique l'attractivité de l'origine.

D'autre part,  $\exists L' > 0, \forall n \in \mathbb{N} : |\lambda_1|^n < L'$  donc on prend,  $\delta = \frac{\epsilon}{L'}$  où  $L' = 2L' \|P\| \|P^{-1}\|$ , alors on a pour tout  $X : \|X\| < \delta \implies \forall n \in \mathbb{N} : \|f^n(X)\| < \epsilon$ , ce qui implique la stabilité de l'origine.

2. On suppose que  $\rho(A) > 1$ , là aussi on distingue trois cas

(a) Si  $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  on a donc,

$$\forall n \in \mathbb{N} : f^n(X) = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} P^{-1} X,$$

$$= (P_1, P_2) \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix},$$

tel que,  $(P_1, P_2) = P$  et  $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = P^{-1} X$ .

Par suite

$$\forall n \in \mathbb{N} : f^n(X) = k_1 \lambda_1^n P_1 + k_2 \lambda_2^n P_2,$$

alors dans la base  $\{P_1, P_2\}$ , on aura :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \|f^n(X)\| = \sqrt{(k_1 \lambda_1^n)^2 + (k_2 \lambda_2^n)^2},$$

et comme  $\rho(A) > 1$ , on aura :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f^n(X)\| = +\infty.$$

D'où, l'origine est instable.

(b) Si  $D = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ , alors dans ce cas, on aura :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} : f^n(X) &= k_1 \lambda^n P_1 + k_2 (n \lambda^{n-1} P_1 + \lambda^n P_2), \\ &= (k_1 \lambda^n + k_2 n \lambda^{n-1}) P_1 + k_2 \lambda^n P_2, \end{aligned}$$

dans la base  $\{P_1, P_2\}$ , comme  $\rho(A) > 1$ , on aura

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f^n(X)\| = +\infty.$$

D'où, l'origine est instable.

(c) Si  $D = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ , donc  $D = |\lambda_1| \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{|\lambda_1|} & \frac{\beta}{|\lambda_1|} \\ \frac{-\beta}{|\lambda_1|} & \frac{\alpha}{|\lambda_1|} \end{pmatrix}$ . Alors, on a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} : f^n(X) &= |\lambda_1|^n P \begin{pmatrix} \cos(nw) & \sin(nw) \\ -\sin(nw) & \cos(nw) \end{pmatrix} P^{-1} X, \\ &= |\lambda_1|^n (P_1, P_2) \begin{pmatrix} \cos(nw) & \sin(nw) \\ -\sin(nw) & \cos(nw) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

tel que  $(P_1, P_2) = P$  et  $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = P^{-1} X$ ,

Par suite,

$$\forall n \in \mathbb{N} : f^n(X) = |\lambda_1|^n [(k_1 \cos(nw) + k_2 \sin(nw)) P_1 + (k_2 \cos(nw) - k_1 \sin(nw)) P_2].$$

Dans la base  $\{P_1, P_2\}$ , on aura :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \|f^n(X)\| = |\lambda_1|^n \sqrt{k_1^2 + k_2^2},$$

et comme  $\rho(A) > 1$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f^n(X)\| = +\infty.$$

D'où, l'origine est instable.

3. Similaire aux démonstrations précédentes.

**Théorème 1.6** ([8]). Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre 2, alors

$$\rho(A) < 1 \iff |\operatorname{tr} A| - 1 < \det A < 1.$$

### 1.3.2 Classification de Poincaré

On présente les notations suivantes de point fixe  $X^*$  de la fonction linéaire  $f(X) = AX$ , tel que  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les valeurs propres de la matrice  $A$ , ([8], [10], [20])

Le système dynamique  $(G, f)$  peut s'écrire sous forme d'un système de récurrence

$$X_{n+1} = f(X_n). \tag{1.1}$$

On reprend la démonstration précédente :

1. Si  $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$ , on dit que l'origine est un **col** ou un **point selle**.

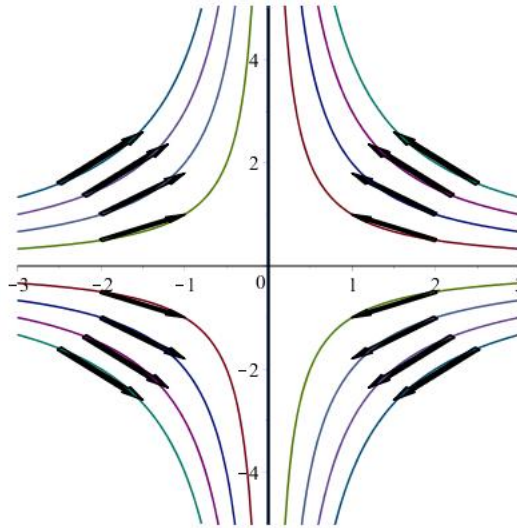
**Explication :** on a,

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} : f^n(X) &= k_1 \lambda_1^n P_1 + k_2 \lambda_2^n P_2, \\ &= k_1 e^{n \log(\lambda_1)} P_1 + k_2 e^{n \log(\lambda_2)} P_2, \\ &= k_1 e^{n \log(\lambda_1)} P_1 + k_2 (e^{n \log(\lambda_1)})^{\frac{\log(\lambda_2)}{\log(\lambda_1)}} P_2, \end{aligned}$$

donc  $\{x, x^s\} : x = (e^{n \log(\lambda_1)})$  et  $s = \frac{\log(\lambda_2)}{\log(\lambda_1)}$ , forme une base de solutions du système (1.1).

Et comme  $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$ , on a :  $s = \frac{\log(\lambda_2)}{\log(\lambda_1)} < 0$ , donc les orbites du système (1.1) (ou les trajectoires du système (1.1)) sont des hyperboles dans la base  $\{P_1, P_2\}$  partant pour (n tend vers  $-\infty$ ), asymptotiquement à la droite passant par l'origine de direction  $P_1$ , et fini (pour n tend vers  $+\infty$ ) asymptotique à la droite passant par l'origine de direction  $P_2$ .

Selon les signes de  $k_1$  et de  $k_2$ , les orbites du système (1.1) reste dans l'un des quatre quadrants du plan déterminés par les droites de direction  $P_1$  et  $P_2$ .



2. si  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$ , on dit que l'origine est un **nœud attractif** ou un **nœud stable**.

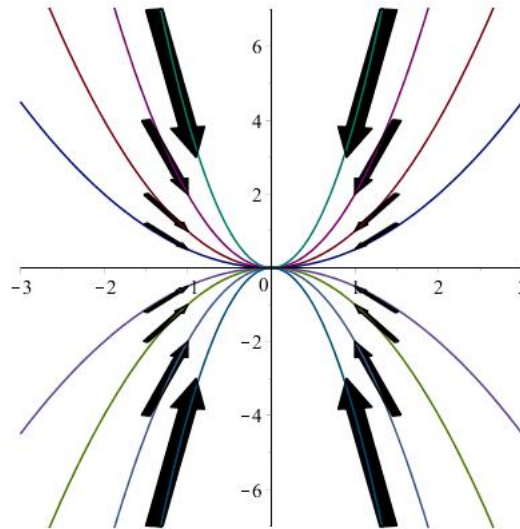
**Explication :** on a,

$$\forall n \in \mathbb{N} : f^n(X) = k_1 e^{n \log(\lambda_1)} P_1 + k_2 (e^{n \log(\lambda_1)})^{\frac{\log(\lambda_2)}{\log(\lambda_1)}} P_2,$$

donc  $\{x, x^s\} : x = (e^{n \log(\lambda_1)})$  et  $s = \frac{\log(\lambda_2)}{\log(\lambda_1)}$  forme une base de solutions du système (1.1).

Et comme  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$  on a  $s = \frac{\log(\lambda_2)}{\log(\lambda_1)} > 0$ , donc les orbites du système (1.1) sont des paraboles partant en branche infinie parabolique de direction  $P_2$  (pour  $n$  tend vers  $-\infty$ ) vers l'origine (pour  $n$  tend vers  $+\infty$ ).

Selon les signes de  $k_1$  et de  $k_2$ , les solutions du système (1.1) reste dans un des quarts du plan déterminés par les droites de direction  $P_1$  et  $P_2$ .



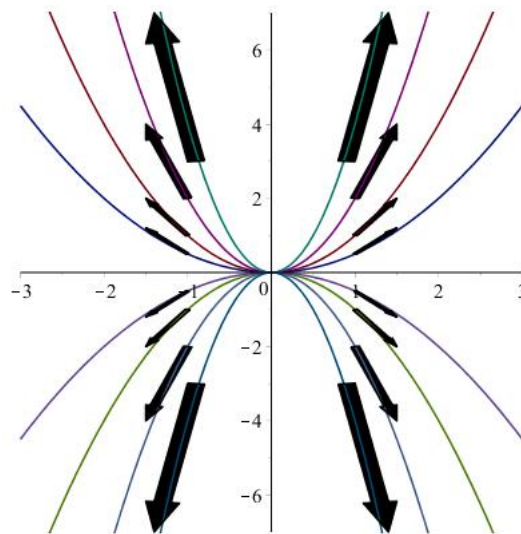
3. Si  $\lambda_2 > \lambda_1 > 1$ , on dit que l'origine est un **nœud répulsif** ou un **nœud instable**.

**Explication :** on a,

$$\forall n \in \mathbb{N} : f^n(X) = k_1 e^{n \log(\lambda_1)} P_1 + k_2 (e^{n \log(\lambda_1)})^{\frac{\log(\lambda_2)}{\log(\lambda_1)}} P_2$$

donc  $\{x, x^s\} : x = (e^{n \log(\lambda_1)})$  et  $s = \frac{\log(\lambda_2)}{\log(\lambda_1)}$  forme une base de solutions du système (1.1).

Et comme  $1 < \lambda_1 < \lambda_2$  on a  $s = \frac{\log(\lambda_2)}{\log(\lambda_1)} > 0$  donc les orbites sont du même type que le cas précédent, mais parcourue au sens inverse, partants du l'origine (pour  $n$  tend vers  $-\infty$ ) tangentiellment à  $P_1$  vers une branche infinie parabolique de direction  $P_2$  (pour  $n$  tend vers  $+\infty$ ).

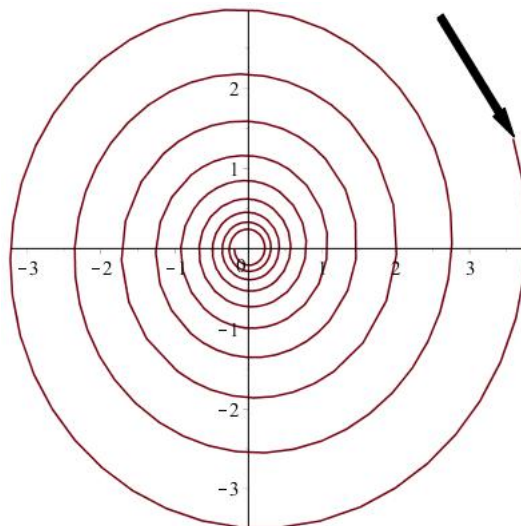


4. Si  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ , donc  $\lambda_1 = \alpha - i\beta$  et  $\lambda_2 = \alpha + i\beta$ , et  $|\lambda_1|, |\lambda_2| < 1$ ,  $\beta \neq 0$  : on dit que l'origine est un **foyer attractif** ou un foyer stable.

**Explication :** on a,

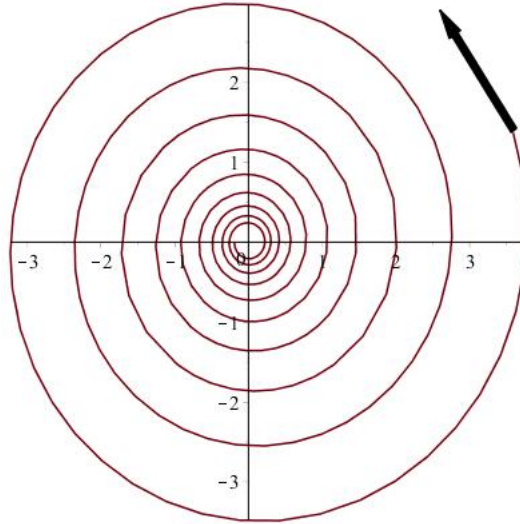
$$\forall n \in \mathbb{N} : f^n(X) = |\lambda_1|^n [(k_1 \cos(nw) + k_2 \sin(nw))P_1 + (k_2 \cos(nw) - k_1 \sin(nw))P_2],$$

donc  $\{|\lambda_1|^n(k_1 \cos(nw) + k_2 \sin(nw)), |\lambda_1|^n(k_1 \cos(nw) - k_2 \sin(nw))\}$  forme une base de solutions du système (1.1), qui sont des spirales qui partant de l'infinie (quand  $n$  tend vers  $-\infty$ ) en spirant vers l'origine (quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ).



5. Si  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ , donc  $\lambda_1 = \alpha - i\beta$  et  $\lambda_2 = \alpha + i\beta$ , et  $|\lambda_1|, |\lambda_2| > 1$ ,  $\beta \neq 0$  : on dit que l'origine est un **foyer répulsif** ou un foyer instable.

Les orbites sont du même type que le cas précédent, mais parcourue au sens inverse, partants du l'origine (pour  $n$  tend vers  $-\infty$ ), puis spiralent et tendent en module vers l'infini (pour  $n$  tend vers  $+\infty$ ).



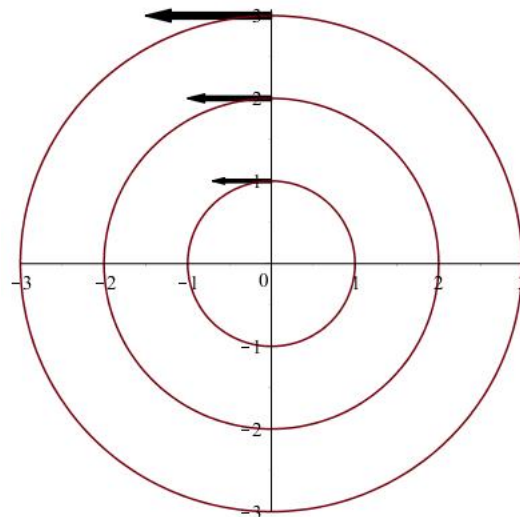
6. Si  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ , donc  $\lambda_1 = \alpha - i\beta$  et  $\lambda_2 = \alpha + i\beta$ , et  $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ ,  $\beta \neq 0$  : on dit que l'origine est un **centre**.

**Explication** : on a,

$$\forall n \in \mathbb{N} : f^n(X) = (k_1 \cos(nw) + k_2 \sin(nw))P_1 + (k_2 \cos(nw) - k_1 \sin(nw))P_2,$$

et comme  $(k_1 \cos(nw) + k_2 \sin(nw))^2 + (k_2 \cos(nw) - k_1 \sin(nw))^2 = k_1^2 + k_2^2$

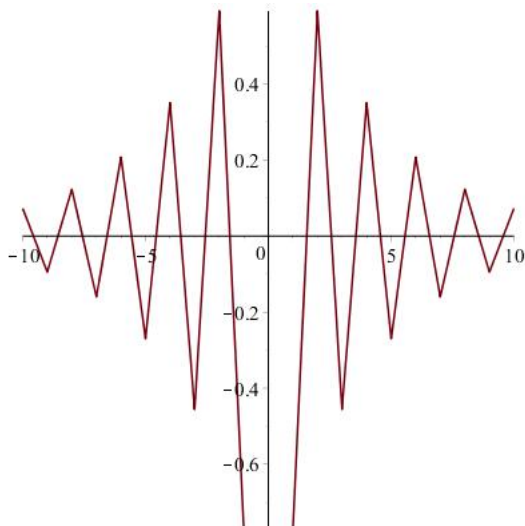
Les orbites du système (1.1) sont des cercle centré à l'origine et de rayon  $\sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ .



7. Si  $(-1 < \lambda_1 < 0$  et  $|\lambda_2| > 1)$  ou  $(|\lambda_1| < 1$  et  $\lambda_2 < -1)$ , alors l'origine est un "oscillant" col.  
**Explication :** on a,

$$\forall n \in \mathbb{N} : f^n(X) = k_1 \lambda_1^n P_1 + k_2 \lambda_2^n P_2,$$

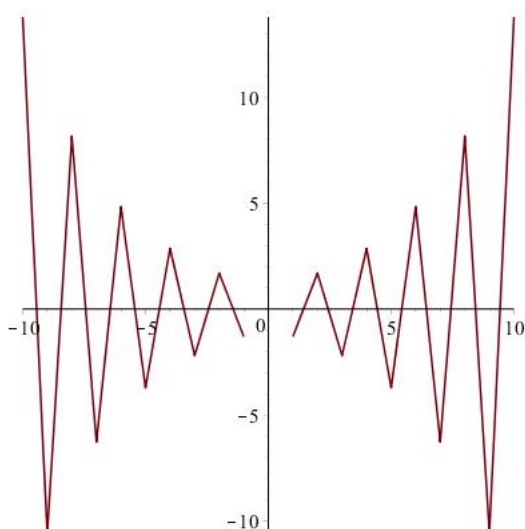
Les points des solutions du système (1.1) alternent entre deux hyperboles dans deux quarts de plan, déterminés par les droites de direction  $P_1$  et  $P_2$ .



8. Si  $-1 < \lambda_1 < 0$  et  $|\lambda_2| < 1$ , alors l'origine est un "oscillant" nœud attractif.  
**Explication :** on a,

$$\forall n \in \mathbb{N} : f^n(X) = k_1 \lambda_1^n P_1 + k_2 \lambda_2^n P_2,$$

Les points des solutions du système (1.1) alternent entre deux paraboles dans deux quarts de plan, déterminés par les droites de direction  $P_1$  et  $P_2$  en direction de l'origine.



9. Si  $\lambda_1 < -1$  et  $|\lambda_2| > 1$ , alors l'origine est un "oscillant" nœud répulsif.

**Explication** on a,

$$\forall n \in \mathbb{N} : f^n(X) = k_1 \lambda_1^n P_1 + k_2 \lambda_2^n P_2,$$

Les points des solutions du système (1.1) alternent entre deux paraboles dans deux quarts de plan déterminés par les droites de direction  $P_1$  et  $P_2$  en direction de l'infini.

**Exemple 1.2.** Dans tout ces exemples  $f(x, y) = AX$  et  $\lambda_1, \lambda_2$  sont les valeurs propres de la matrice  $A$ , et  $\{P_1, P_2\}$  la nouvelle base.

1. L'origine est un Col.

L'orbite de  $f$ , tel que  $A = \begin{pmatrix} \frac{56}{45} & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{77}{90} \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_1 = 1.3$ ,  $\lambda_2 = 0.8$ ,  $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ,  $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ .

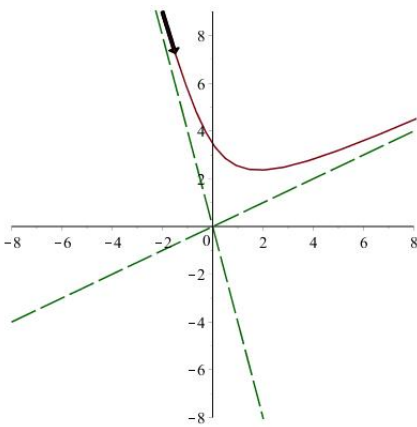


FIGURE 1.4 – En partant du point initial  $X_0 = (-2, 9)$ .

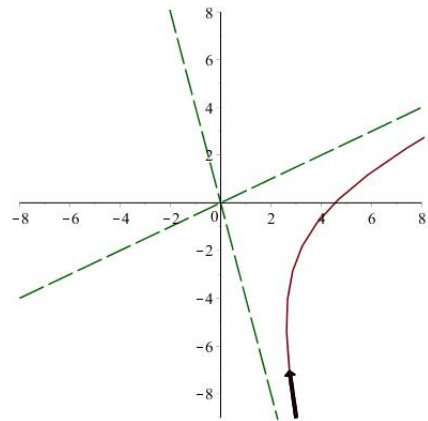


FIGURE 1.5 – En partant du point initial  $X_0 = (3, -9)$ .

2. L'origine est un nœud répulsif.

L'orbite de  $f$ , tel que  $A = \begin{pmatrix} \frac{58}{45} & \frac{1}{109} \\ \frac{2}{45} & \frac{90}{90} \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_1 = 1.3$ ,  $\lambda_2 = 1.2$ ,  $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ,  $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ .



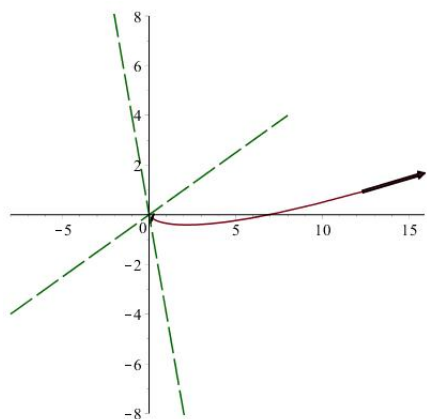


FIGURE 1.6 – En partant du point initial  $X_0 = (\frac{1}{7}, -\frac{1}{8})$ .

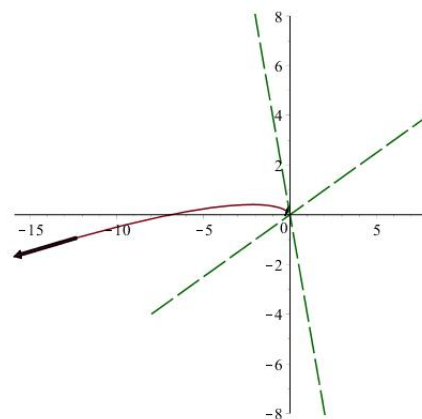


FIGURE 1.7 – En partant du point initial  $X_0 = (-\frac{1}{7}, \frac{1}{8})$ .

3. L'origine est un nœud attractif.

L'orbite de  $f$ , tel que  $A = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{2}{90} \\ \frac{4}{90} & \frac{73}{90} \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_1 = 0.9$ ,  $\lambda_2 = 0.8$ ,  $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

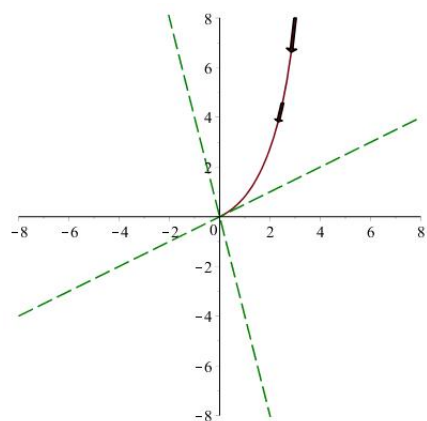


FIGURE 1.8 – En partant du point initial  $X_0 = (3, 9)$ .

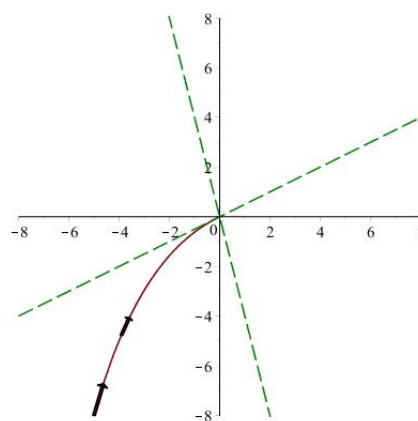


FIGURE 1.9 – En partant du point initial  $X_0 = (-5, -8)$ .

4. *L'origine est un foyer attractif.*

*L'orbite de  $f$ , tel que  $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_1 = 0.7 + 0.6i$ ,  $\lambda_2 = 0.7 - 0.6i$ ,*

*$|\lambda_1| = \sqrt{0.85} < 1$ ,  $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ .*

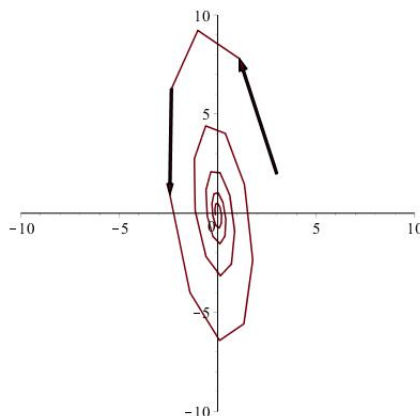


FIGURE 1.10 – En partant du point initial  $X_0 = (3, 2)$ .

5. *L'origine est un foyer répulsif.*

*L'orbite de  $f$ , tel que  $A = \begin{pmatrix} \frac{13}{30} & -\frac{4}{15} \\ \frac{8}{3} & \frac{29}{30} \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_1 = 0.7 + 0.8i$ ,  $\lambda_2 = 0.7 - 0.8i$ ,*

*$|\lambda_1| = \sqrt{1.13} > 1$ ,  $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ .*

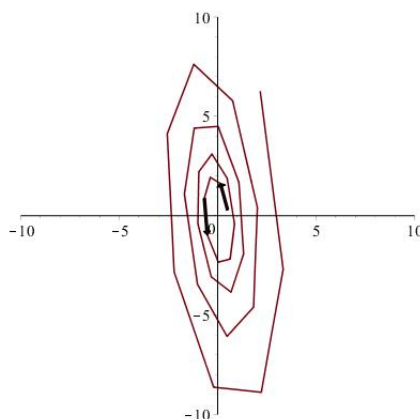


FIGURE 1.11 – En partant du point initial  $X_0 = (0.5, 0.3)$ .

6. *L'origine est un centre.*

L'orbite de  $f$ , tel que  $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ 5\frac{\sqrt{2}}{3} & 2\frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ,  $\lambda_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ,  $|\lambda_1| = 1$ ,  
 $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ .

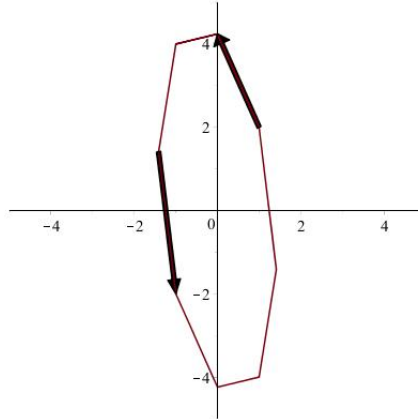


FIGURE 1.12 – En partant du point initial  $X_0 = (1, 2)$ .

7. L'origine est un "oscillant" col.

L'orbite de  $f$ , tel que  $A = \begin{pmatrix} \frac{7}{15} & -\frac{19}{30} \\ -\frac{19}{15} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_1 = 1.1$ ,  $\lambda_2 = 0.8$ ,  $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  sur la figure 1.13.

Et L'orbite de  $f$ , tel que  $A = \begin{pmatrix} -\frac{11}{10} & 0 \\ 0 & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_1 = -\frac{11}{10}$ ,  $\lambda_2 = \frac{7}{9}$  dans la base canonique sur la figure 1.14.

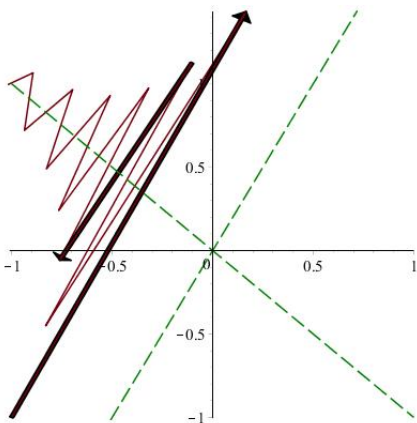


FIGURE 1.13 – En partant du point initial  $X_0 = (-1, -1)$ .

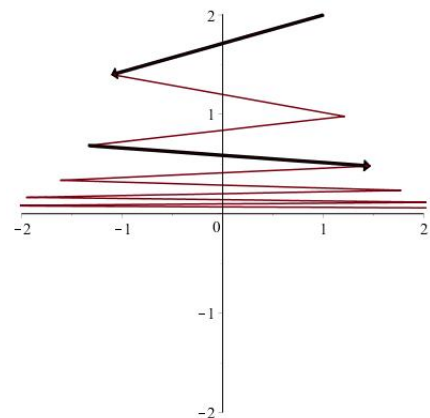


FIGURE 1.14 – En partant du point initial  $X_0 = (1, 2)$ .

8. L'origine est un "oscillant" nœud.

L'orbite de  $f$ , tel que  $A = \begin{pmatrix} \frac{21}{40} & \frac{23}{40} \\ \frac{69}{40} & -\frac{5}{8} \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_1 = 1.1$ ,  $\lambda_2 = -1.2$ ,  $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$  sur la figure 1.15 (ici l'origine est un "oscillant" nœud répulsif).

Et L'orbite de  $f$ , tel que  $A = \begin{pmatrix} -\frac{19}{60} & -\frac{7}{12} \\ -\frac{7}{6} & \frac{4}{15} \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_1 = -0.9$ ,  $\lambda_2 = 0.85$ ,  $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  sur la figure 1.16 (ici l'origine est un "oscillant" nœud attractif).

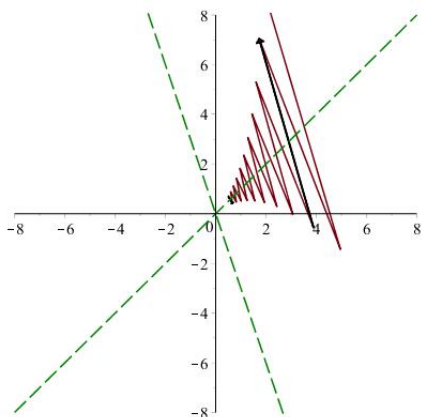


FIGURE 1.15 – En partant du point initial  $X_0 = (0.5, 0.7)$ .

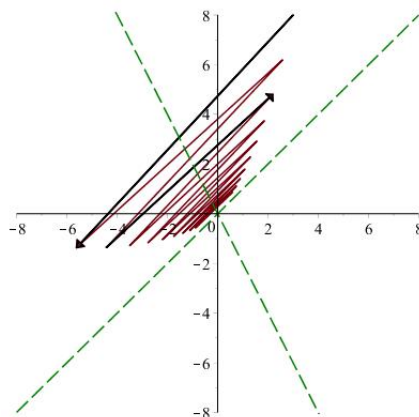


FIGURE 1.16 – En partant du point initial  $X_0 = (3, 8)$ .

### 1.3.3 Stabilité dans le cas d'une fonction non linéaire

On considère un système dynamique  $(G, F)$ , où  $G \subset \mathbb{R}^2$  et  $F = (f_1, f_2)$ , avec  $f_1$  et  $f_2$  sont des fonctions définies dans  $G$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ . on va présenter deux méthodes pour étudier la stabilité des points fixes de la fonction  $F$ .

**Définition 1.9.** On définit la matrice Jacobienne de  $F$  par :

$$J_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

**Définition 1.10** ([8], [10]). Soit  $X^*$  un point fixe de la fonction  $F$ .

1. Si pour toutes les valeurs propres de la matrice  $J_F(X^*)$ , on a :  $|\lambda| \neq 1$ , alors le point fixe  $X^*$  est dit **hyperbolique**.
2. S'il existe au moins une valeur propre de la matrice  $J_F(X^*)$  :  $|\lambda| = 1$ , alors le point fixe  $X^*$  est dit **non hyperbolique**.

#### La linéarisation

Soit  $X^*$  un point fixe de  $F$ , et on suppose que  $F$  est une fonction dérivable en  $X^*$ . On utilisant la formule de Taylor de  $F$  d'ordre 1 au voisinage de point  $X^*$ , on obtient :

$$F(X) = F(X^*) + J_F(X^*)(X - X^*) + o(X - X^*), \quad (1.2)$$

tel que  $J_F$  est la matrice Jacobienne de  $F$  et  $\lim_{X \rightarrow X^*} \frac{\|o(X - X^*)\|}{\|X - X^*\|} = 0$ .

Par suite,

$$F(X) = X^* + J_F(X^*)(X - X^*) + o(X - X^*),$$

avec le changement de variable  $Y = X - X^*$ , l'équation (1.2) devient :

$$f(Y + X^*) - X^* = J_f(X^*)Y + o(Y),$$

tel que  $\lim_{Y \rightarrow 0_{\mathbb{R}^2}} \frac{\|o(Y)\|}{\|Y\|} = 0$ .

On considère la fonction  $g(Y) = F(Y + X^*) - X^*$ , on voit que  $0_{\mathbb{R}^2}$  est un point fixe de  $g$ , et ces propriétés coïncide avec celle de point fixe  $X^*$  de  $F$ .

Et l'équation (1.2) devient alors,

$$g(Y) = J_F(X^*)Y + o(Y),$$

et comme la quantité  $o(Y)$  est négligeable au voisinage de l'origine, il suffit d'étudier la stabilité de l'origine de la fonction linéaire  $h(Y) = J_F(X^*)Y$ .

Enfin d'après le théorème 1.5, on a le résultat suivant :

**Corollaire 1.1** ([8]).

1. Le point fixe  $X^*$  est asymptotiquement stable si  $\rho(J_F(X^*)) < 1$ .
2. Le point fixe  $X^*$  est instable si  $\rho(J_F(X^*)) > 1$ .
3. Si  $\rho(J_F(X^*)) = 1$ , on peut rien déduire.

### Fonction de Lyapunov

En 1892, le mathématicien A. M. Liapunov introduit une nouvelle méthode pour étudier la stabilité d'un point fixe. Dans cette section on s'intéresse au cas bidimensionnel, pour plus de détail voir ([8], [17]).

On considère l'équation de récurrence suivante

$$X_{n+1} = f(X_n) \quad (1.3)$$

où  $f : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  une fonction continue, et  $X^*$  est un point fixe de  $f$ .

Pour toute fonction  $V : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , on définit la variation  $\Delta V$  de  $V$  relative à (1.3) par :

$$\Delta V(X) = V(f(X)) - V(X).$$

**Définition 1.11** ([8]). Une fonction  $V : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est dit **fonction de Lyapunov** relative à l'équation (1.3) sur  $G$  si :

1. La fonction  $V$  est continue sur  $G$ .
2.  $\Delta V(X) \leq 0$ ,  $\forall X \in G$  et  $f(X) \in G$ .

Soit la boule ouvert de centre  $X$  et de rayon  $\gamma$ ,  $B(X, \gamma) = \{Y \in \mathbb{R}^2 : \|X - Y\| < \gamma\}$ , alors la fonction de Lyapunov  $V$  est définie positive en  $X^*$  s'il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $X \in B(X^*, \delta)$ ,  $X \neq X^*$ , on a :  $V(X) > 0$ , et  $V(X^*) = 0$ .

**Théorème 1.7** ([8]). On suppose que  $V$  est une fonction de Lyapunov définie positive en point fixe  $X^*$  de la fonction continue  $f$ ,  $V$  définie sur une boule ouvert  $B(X^*, \delta)$ , alors :

1. Le point fixe  $X^*$  est stable.
2. Si de plus  $\Delta V(X) < 0 \forall X \in G$  et  $f(X) \in G$ ,  $X \neq X^*$ , alors le point fixe  $X^*$  est asymptotiquement stable.
3. Si  $G = \mathbb{R}^2$  et  $\lim_{\|X\| \rightarrow \infty} V(X) = \infty$ , alors le point fixe  $X^*$  est asymptotiquement stable global.

**Théorème 1.8** ([8]). Soit  $V : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction relative à l'équation (1.3), tel que  $\Delta(V)$  définie positive (respectivement définie négative) sur un voisinage de point fixe  $X^*$ . S'il existe une suite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = X^*$ , avec  $V(X_n) > 0$  (respectivement  $V(X_n) < 0$ ), alors le point fixe  $X^*$  est instable.

**Exemple 1.3.** Soit le système 
$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{ay_n}{e^{|x_n|} + 1} \\ y_{n+1} = \frac{bx_n}{e^{|y_n|} + 1} \end{cases} .$$

Le système s'écrit  $X_{n+1} = F(X_n)$ , où  $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ , et

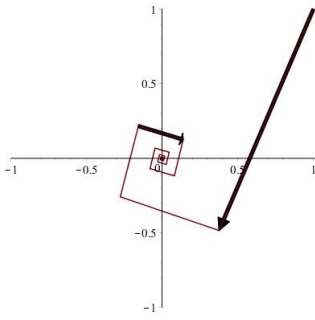
$$F(X) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) = \left( \frac{ay}{e^{|x|} + 1}, \frac{bx}{e^{|y|} + 1} \right).$$

Soit la fonction  $V(x, y) = x^2 + y^2$ , il est clair que la fonction  $V$  est définie positive. On calcule alors, la variation de  $V$ .

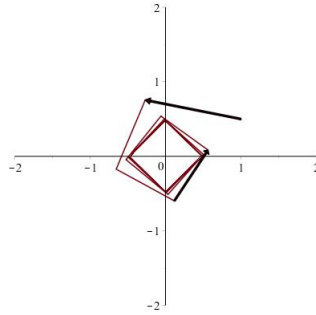
$$\begin{aligned} \Delta V(x, y) &= V(f(x, y)) - V(x, y) \\ &= \frac{a^2 y^2}{(e^{|x|} + 1)^2} + \frac{b^2 x^2}{(e^{|y|} + 1)^2} - x^2 - y^2 \\ &= \left( \frac{b^2}{(e^{|y|} + 1)^2} - 1 \right) x^2 + \left( \frac{a^2}{(e^{|x|} + 1)^2} - 1 \right) y^2 \\ &\leq \left( \frac{b^2}{4} - 1 \right) x^2 + \left( \frac{a^2}{4} - 1 \right) y^2, \end{aligned}$$

alors,

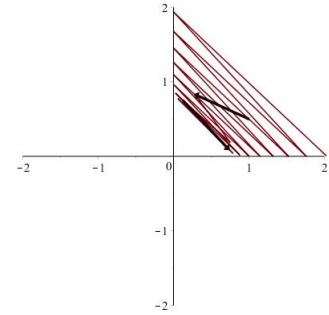
1. Si  $|a| < 2$  et  $|b| < 2$ , comme  $\lim_{\|X\| \rightarrow \infty} V(X) = \infty$ , alors l'origine est asymptotiquement stable global, voir la figure 1.17a.
2. Si  $|a| \leq 2$  et  $|b| \leq 2$ , alors l'origine est stable, voir la figure 1.17b.
3. Si  $|a| > 2$  et  $|b| > 2$ , alors l'origine est instable, voir la figure 1.17c.



(a) En partant du point initial  $X_0 = (1, 1)$  avec  $a = 1.4, b = -1.8$  (donc l'origine est asymptotiquement stable).



(b) En partant du point initial  $X_0 = (1, 0.5)$  avec  $a = -2, b = 2$  (donc l'origine est stable).



(c) En partant du point initial  $X_0 = (1, 0.5)$  avec  $a = 2.1, b = 2.2$  (donc l'origine est instable).

FIGURE 1.17 – Les itérés de  $F$  en fonction des paramètres  $a$  et  $b$ .

## 1.4 Attracteur et bassin d'attraction

Dans cette section on va définir des singularités plus générales que les points fixes et les cycles, ce sont les attracteurs avec leurs bassins d'attraction, ([8], [11]).

### 1.4.1 Attracteur

**Définition 1.12.** Soit  $(X, f)$  un système dynamique, et  $Y \subset X$  un fermé non vide.

1. On dit que l'ensemble  $Y$  est un **attracteur** s'il est invariant et

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall y : d(y, Y) < \alpha \implies \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} : d(f^n(y), Y) < \epsilon \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(y), Y) = 0 \end{cases}$$

2. L'ensemble  $Y$  est un **attracteur minimal** s'il ne possède pas un sous ensemble qui est un attracteur.

**Remarque 1.6.** Tout cycle asymptotiquement stable est un attracteur.

**Définition 1.13.** Soit  $(X, f)$  un système dynamique, et  $Y \subset X$  un attracteur.

On définit le bassin d'attraction de  $Y$  par :

$$B^a(Y) := \{x \in X : \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(x), Y) = 0\}.$$

La plus grande boule ouvert connexe qui est incluse dans  $B^a(Y)$  et contient  $Y$  est appelé le bassin d'attraction immédiat de  $Y$ , noté  $B^i(Y)$ .



### 1.4.2 Bassin d'attraction d'un point fixe

**Définition 1.14.** Soit  $(G, f)$  un système dynamique et  $X^*$  un point fixe de  $f$ . On définit le bassin d'attraction (ou ensemble invariant) de  $X^*$  par :

$$W^a(X^*) := \{x \in G : \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = X^*\}.$$

Donc le bassin d'attraction de  $X^*$  est l'ensemble des points qui sont attractif vers  $X^*$ .

Si  $X^*$  est asymptotiquement stable alors  $W^a(X^*)$  contient une boule ouvert de centre  $X^*$ , La plus grande boule connexe qui est incluse dans  $W^a(X^*)$  et contient  $X^*$  est appelée le bassin d'attraction immédiat de  $X^*$  et noté  $B^i(X^*)$ .

**Remarque 1.7.** Si  $r_1, r_2$  deux points fixes distincts  $r_1 \neq r_2$ , alors  $W(r_1) \cap W(r_2) = \emptyset$ . Sinon  $\exists x \in W(r_1), x \in W(r_2)$ . Par suite,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = r_1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = r_2$ . D'où,  $r_1 = r_2$ .

**Définition 1.15.** On dit qu'un ensemble  $M$  est positivement invariant par  $f$ , si  $f(M) \subset M$ . Autrement dit,

$$\forall x \in M : \theta_x \subset M.$$

**Définition 1.16.** Soit  $(G, f)$  un système dynamique et le cycle  $c_n = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ . Le bassin d'attraction de  $c_n$  est défini par :

$$W^a(c_n) := \bigcup_{1 \leq i \leq n} W(p_i).$$

Et le bassin d'attraction immédiat de  $c_n$  est défini par :

$$B^i(c_n) := \bigcup_{1 \leq i \leq n} B(p_i).$$

---

## Bifurcation et chaos

### 2.1 Bifurcation

La théorie des bifurcations étudie les changements subis par une application lorsqu'un paramètre change. Les changements quantitatifs de ces paramètres conduiront à des changements qualitatifs du système dans l'espace des phases, tels que : l'apparition ou la disparition de singularités, des changements de stabilité, des changements dans les types de singularités, etc. Ces changements sont regroupés sous le nom de *bifurcations*, ([8], [16], [15], [20]). On considère un système dynamique  $(G, f_\lambda)$ , où  $G \subset \mathbb{R}^n$  et  $f_\lambda : G \rightarrow G$  une fonction continue dépendant du paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}^m$ .

**Définition 2.1.** On appelle **bifurcation**, le changement qualitatif des singularités (points fixes, cycles, attracteurs) du système dynamique  $(G, f_\lambda)$  pour une certaine valeur du paramètre  $\lambda$ , et cette valeur est appelée **valeur de bifurcation**.

#### 2.1.1 Exemple de bifurcation dans $\mathbb{R}$ (La fonction logistique) [9]

Soit  $(I, F_\mu)$  un système dynamique, où  $I = [0, 1]$  et la fonction logistique  $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$  tel que  $\mu \in ]0, 4]$  est un paramètre.

##### Existence de points fixes et stabilité locale

La fonction  $F_\mu$  possède deux points fixes  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1 - \frac{1}{\mu}$ .

1. On a  $F'_\mu(x_1) = \mu$ , alors :

- (a) Le point fixe  $x_1$  est asymptotiquement stable, si  $0 < \mu < 1$ .
- (b) Le point fixe  $x_1$  est instable, si  $1 < \mu \leq 4$ .
- (c) Si  $\mu = 1$  on a  $F_1''(x_1) = -2 \neq 0$ , donc le point fixe  $x_1$  est instable (semi-stable).
- 2. On a  $F'(x_2) = 2 - \mu$ , alors :
  - (a) Le point fixe  $x_2$  est asymptotiquement stable, si  $1 < \mu < 3$ .
  - (b) Le point fixe  $x_2$  est instable, si  $0 < \mu < 1$  ou  $3 < \mu \leq 4$ .
  - (c) Si  $\mu = 1$  on a  $F_1''(x_2) = -2 \neq 0$ , donc le point fixe  $x_0$  est instable (semi-stable).
  - (d) Si  $\mu = 3$  on a  $SF_3(x_2) = -56 < 0$ , donc le point fixe  $x_2$  est asymptotiquement stable.

Il en résulte,

- 1. Le point fixe  $x_1$  est asymptotiquement stable si  $\mu \in ]0, 1]$ , et instable si  $\mu \in ]1, 4]$ .
- 2. Le point fixe  $x_2$  est asymptotiquement stable si  $\mu \in ]1, 3]$ , et instable si  $\mu \in ]0, 1] \cup ]3, 4]$ .

### Les cycles d'ordre 2

On a,

$$F_\mu^2(x) = x \implies \mu^2 x(1-x)[1-\mu x(1-x)] - x = 0,$$

et comme  $x_1 = 0$  et  $x_2 = 1 - \frac{1}{\mu}$  sont des points fixe de  $F_\mu$ , on divise les deux cotés de l'équation par  $x(x + \frac{1}{\mu})$ , on obtient :

$$\mu^2 x^2 - \mu(\mu + 1)x + (\mu + 1) = 0.$$

D'où,  $\bar{x}_1 = \frac{(1-\mu) - \sqrt{(\mu^2 - 2\mu - 3)}}{\mu}$  et  $\bar{x}_2 = \frac{(1+\mu) + \sqrt{(\mu^2 - 2\mu - 3)}}{\mu}$  sont des point 2-périodiques de  $F_\mu$  pour  $\mu > 3$ .

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} & |F'_\mu(\bar{x}_1)F'_\mu(\bar{x}_2)| < 1 \\ & -1 < \mu^2 (1 - 2\bar{x}_1)(1 - 2\bar{x}_2) < 1 \\ & -1 < \mu^2 \left(1 - \frac{(1-\mu) - \sqrt{(\mu^2 - 2\mu - 3)}}{\mu}\right) \left(1 - \frac{(1+\mu) + \sqrt{(\mu^2 - 2\mu - 3)}}{\mu}\right) < 1 \\ & -1 < -\mu^2 + 2\mu + 4 < 1. \end{aligned}$$

La solution de cette inégalité donne :

le cycle  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  est asymptotiquement stable si  $\mu \in ]3, 1 + \sqrt{6}[$ . Dans le cas où  $\mu = 1 + \sqrt{6}$ , on a :  $(F_\mu^2)'(\bar{x}_1) = -1$ . En utilisant la dérivée Schwarzienne, on obtient :

$$SF_\mu^2(\bar{x}_1) < 0.$$

Par suite, le cycle  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  est asymptotiquement stable. Et enfin le cycle  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  est instable si  $\mu \in ]1 + \sqrt{6}, 4]$ .

Autrement dit

1. Le cycle  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  est asymptotiquement stable, si  $\mu \in ]3, 1 + \sqrt{6}]$ .
2. Le cycle  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  est instable, si  $\mu \in ]1 + \sqrt{6}, 4]$ .

**Remarque 2.1.** *Le point fixe  $x_2$  est asymptotiquement stable si  $\mu \in ]1, 3]$ . Il devient instable à partir de la valeur  $\mu_1 = 3$ . Un cycle asymptotiquement stable apparaît pour  $\mu \in ]3, 1 + \sqrt{6}]$ , ce dernier se déstabilise à partir de la valeur  $\mu_2 = 1 + \sqrt{6}$ .*

**Les cycles de période  $2^n$**

On commence par les cycles d'ordre  $2^2$ , ce qui revient à résoudre l'équation  $F_\mu^4 = x$ . Il apparaît un cycle d'ordre 4 quand  $\mu > \mu_2 = 1 + \sqrt{6}$ , qui est asymptotiquement stable pour  $\mu \in ]\mu_2, 3.54409 \dots]$ , et devient instable à partir de la valeur  $\mu_3 = 3.54409 \dots$ . Ce processus se répète indéfiniment et produit une suite  $(\mu_n)_{n \geq 1}$ . Le tableaux ci-dessus illustre les résultats numériques.

$n$	$\mu_n$	$\mu_n - \mu_{n-1}$	$\frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n+1} - \mu_n}$
1	3	-	-
2	3.449489 ...	0.449489 ...	-
3	3.544090 ...	0.094601 ...	4.751419 ...
4	3.564407 ...	0.020317 ...	4.656248 ...
5	3.568759 ...	0.0043521 ...	4.668321 ...
6	3.569692 ...	0.00093219 ...	4.668683 ...
7	3.569891 ...	0.00019964 ...	4.669354 ...

**Remarque 2.2.** *La suite  $(\mu_n)$  converge vers un  $\bar{\mu} \approx 3.570 \dots$ . La suite des fractions  $\frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n+1} - \mu_n}$  converge vers une constante  $\delta \approx 4.669201609 \dots$ , appeler **nombre de Feigenbaum** [9].*

**Diagramme de bifurcation** On représente sur l'axe des abscisses le paramètre  $\mu$ , on choisi un point initial  $x_0$  (dans cet exemple on prend  $x_0 = 0.5$ ), et pour chaque valeur de  $\mu$  avec un petit pas (dans cet exemple on prend  $h = 0.001$ , et  $\mu$  varié dans  $]0, 4]$ ), on calcule les 500 premiers itérés  $(F_\mu(x_0) \dots F_\mu^{500}(x_0))$ , et on présente les dix derniers itérés  $(F_\mu^{491}(x_0) \dots F_\mu^{500}(x_0))$  sur l'axe des ordonnées.

**Autres cycles**

Le plus grand diagramme de bifurcation apparaît pour des valeurs de  $\mu$  comprises entre  $3, 828 \dots$  et  $3, 857 \dots$ . Un cycle d'ordre 3 asymptotiquement stable apparaît d'abord à  $\mu = 1 + \sqrt{8} \approx 3, 828 \dots$ , après le phénomène de dédoublement de période apparaît. Ce dernier perd alors sa stabilité et donne naissance à des cycles asymptotiquement stables d'ordres  $3 \cdot 2^n, n \in \mathbb{N}$ , jusqu'à la valeur  $\mu \approx 3, 8415 \dots$

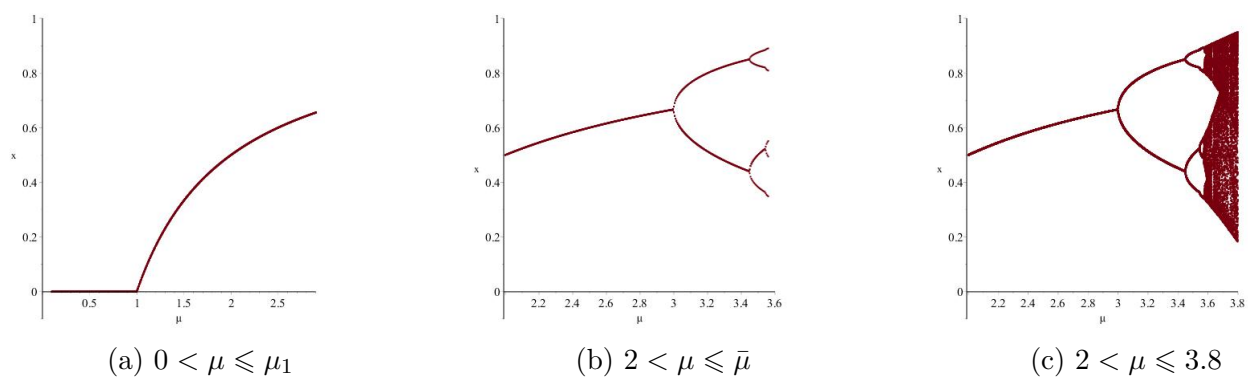


FIGURE 2.1 – Diagramme de bifurcation de la fonction logistique  $F_\mu$

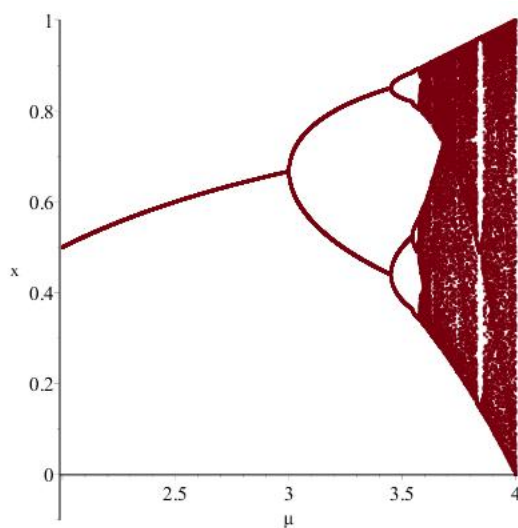


FIGURE 2.2 – Diagramme de bifurcation de la fonction logistique  $F_\mu$ , pour  $2 < \mu \leq 4$

Dans tout ce qui suit, on considère un système dynamique  $(G, f_\lambda)$ , où  $G \subset \mathbb{R}^n$  et  $f_\lambda : G \rightarrow G$  une fonction continue et dérivable, dépend du paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}^m$ , et  $\mu_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , sont les valeurs propres de la matrice jacobienne  $J_{f_\lambda}(X^*)$ , où  $X^*$  est un point fixe de  $f_\lambda$ .

### 2.1.2 Bifurcation nœud-col

**Définition 2.2.** Une bifurcation associée à une apparition d'une valeur propre égale à un,  $\mu_1 = 1$  est dite bifurcation **nœud-col**.

**Remarque 2.3.** Cette bifurcation appelé aussi bifurcation tangentielle (ou fold).

Cette bifurcation peut être représentée par :

$$\emptyset \rightleftharpoons \text{point fixe attractif} + \text{point fixe répulsif}$$

où,  $\emptyset$  signifier absence de point fixe.

**Exemple 2.1** (Bifurcation nœud col). On considère la fonction  $f_c : x \mapsto c - x^2$ , on a :  $x_1^* = -\frac{1}{2}$  est un point fixe pour la valeur  $c_1^* = -\frac{1}{4}$  qui vérifie  $f'_{c_1^*}(x_1^*) = 1$ . Il en résulte, une bifurcation nœud-col apparait. Si  $c < -\frac{1}{4}$ , alors  $f_c$  n'a aucun point fixe, sinon ( $c > -\frac{1}{4}$ ), il apparait deux points fixes  $x_1$  et  $x_2$  de stabilité différentes, où  $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4c}}{2}$ .

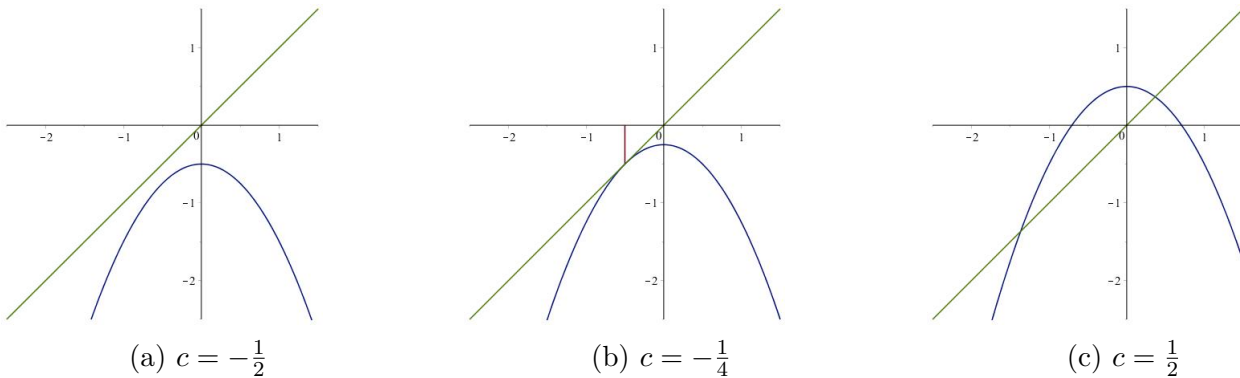


FIGURE 2.3 – Bifurcation de nœud-col de l'exemple 2.1

### Bifurcation transcritique

Ce type de bifurcation, peut être représentée par un échange de stabilité entre deux points fixes, voir la figure 2.4

$x_1$  stable, et  $x_2$  instable  $\rightarrow$  échange de stabilité :  $x_1$  instable et  $x_2$  stable.

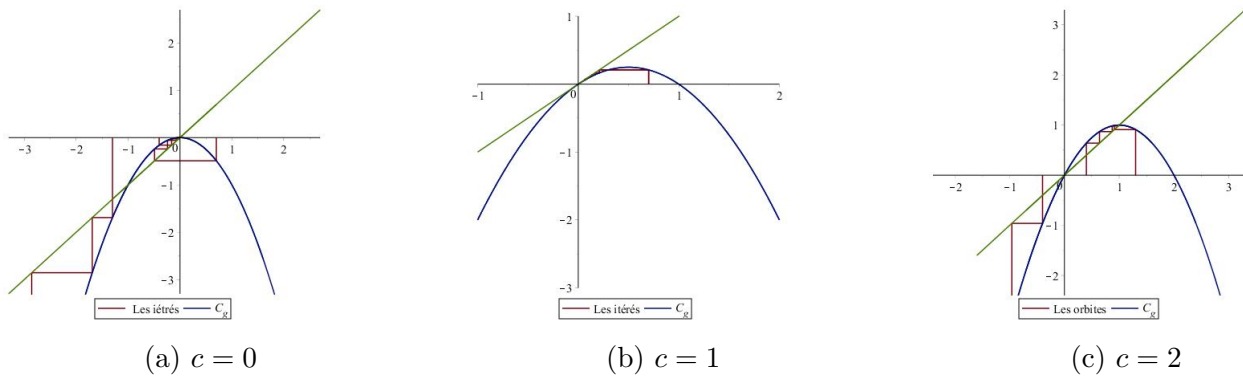


FIGURE 2.4 – Bifurcation de nœud-col type transcritique de l'exemple

### Bifurcation fourche

Cette bifurcation peut être représentée par :

Point fixe stable  $x_1 \rightleftharpoons$  deux points fixes stables  $x_2$  et  $x_3$ , et  $x_1$  devient instable.

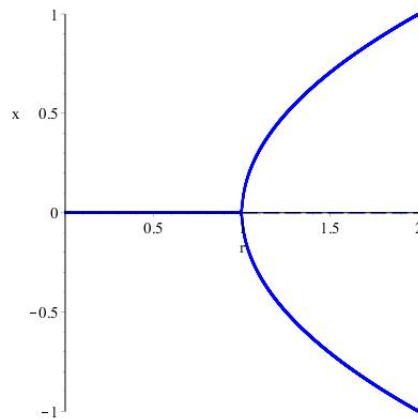


FIGURE 2.5 – Bifurcation nœud-col type fourche.

### 2.1.3 Bifurcation de doublement de période

**Définition 2.3.** Une bifurcation associée à une apparition d'une valeur propre égale à  $-1$ ,  $\mu_1 = -1$  est dite bifurcation **doublement de période** (ou flip).

**Exemple 2.2.** On reprend la fonction de l'exemple précédent,  $f_c : x \mapsto c - x^2$ . On a,  $x_2^* = \frac{1}{2}$  est un point fixe pour la valeur  $c_2^* = \frac{3}{4}$  qui vérifie  $f'_{c_2^*}(x_2^*) = -1$ . Il en résulte qu'une bifurcation

de doublement de période apparait. Le point fixe  $x_2^*$  est stable d'après le théorème 1.3, et quand  $\frac{3}{4} < c \leq \frac{5}{4}$  il apparait un cycle d'ordre 2 asymptotiquement stable  $\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2\}$ , où  $\tilde{x}_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{4c - 3}}{2}$ .

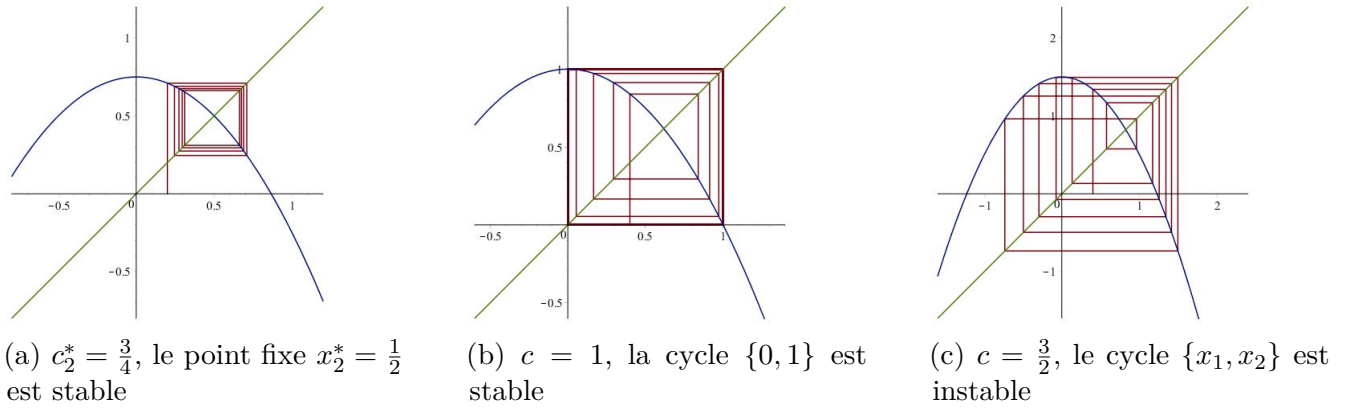


FIGURE 2.6 – Bifurcation de doublement de période de l'exemple 2.1

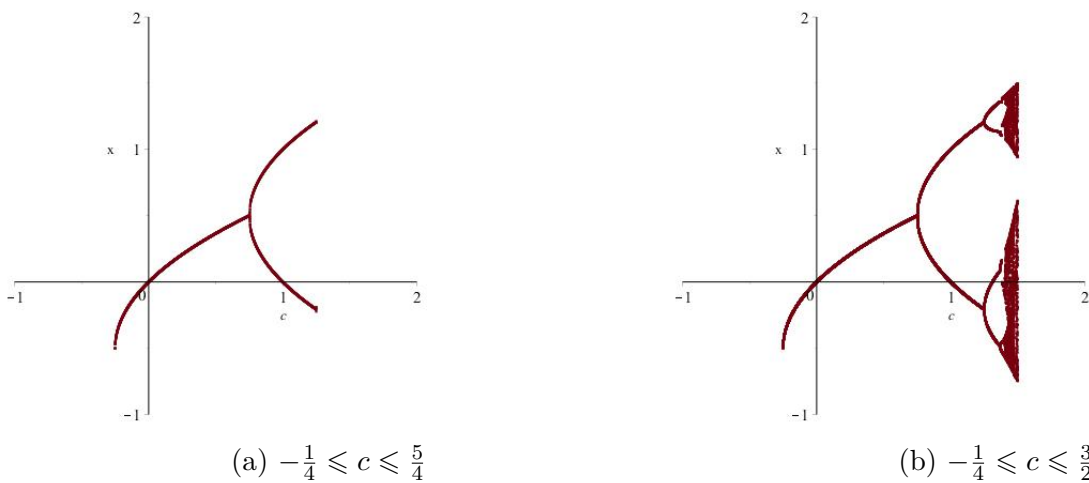


FIGURE 2.7 – Diagramme de bifurcation de l'exemple 2.1



### 2.1.4 Bifurcation de Neimark-Sacker

**Définition 2.4.** Une bifurcation de **Neimark-Sacker** correspond à la présence de deux valeurs propres complexes  $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$  tel que,  $|\mu_1| = |\mu_2| = 1$ .

**Remarque 2.4.** Les bifurcations nœud-col et doublement de période sont définies pour tout  $n \geq 1$ , mais la bifurcation Neimark-Sacker est définie seulement si  $n \geq 2$ , où  $n = \dim(G)$ .

**Exemple 2.3.** On considère la famille de fonction suivante :

$$F_\mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1 + \mu - x^2 - y^2) \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

tel que  $\beta$  est un paramètre qui dépend de  $\mu$  ( $\beta = \beta(\mu)$ ), remarquant que l'origine est un point fixe de  $F_\mu$  pour tout  $\mu$ , et la matrice jacobienne de  $F_\mu$  est :  $J_{F_\mu} = (1 + \mu) \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$ .

Les valeurs propre de la matrice  $J_{F_\mu}$  sont  $\lambda_{1,2} = (1 + \mu)(\cos \beta \pm i \sin \beta)$  avec  $|\lambda_{1,2}| = |1 + \mu|$ , quand  $\mu = 0$  on a  $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ , par suit une bifurcation de Neimark-Sacker se apparait.

L'origine est stable si  $-2 < \mu < 0$ , pour étudier la bifurcation quand  $\mu = 0$ , en utilise les cordonnées polaires.

On représente la fonction  $F_\mu$  par l'équation de récurrence suivante :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = (1 + \mu - x_n^2 - y_n^2) \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

On pose,  $x_n = r \cos \theta$  et  $y_n = r \sin \theta$ , on obtient :

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= (1 + \mu)r_n - r_n^3 \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + \beta. \end{aligned}$$

L'équation  $r_{n+1} = (1 + \mu)r_n - r_n^3$  nous indique l'existence d'un cercle invariant, l'équation

$$r = (1 + \mu)r - r^3$$

la solution positif de cette équation, qui est le rayon de ce cercle, est  $r = \sqrt{\mu}$ . Si  $\mu = 0$ , on a :  $r = 0$ . Donc l'origine est un point fixe asymptotiquement stable. En effet,

$$(r - r^3)' = 1, (r - r^3)'' = 0 \text{ et } (r - r^3)^{(3)} < 0.$$

Quand  $\mu > 0$ , l'origine perd sa stabilité et un cercle invariant stable apparait de rayon  $r = \sqrt{\mu}$ .

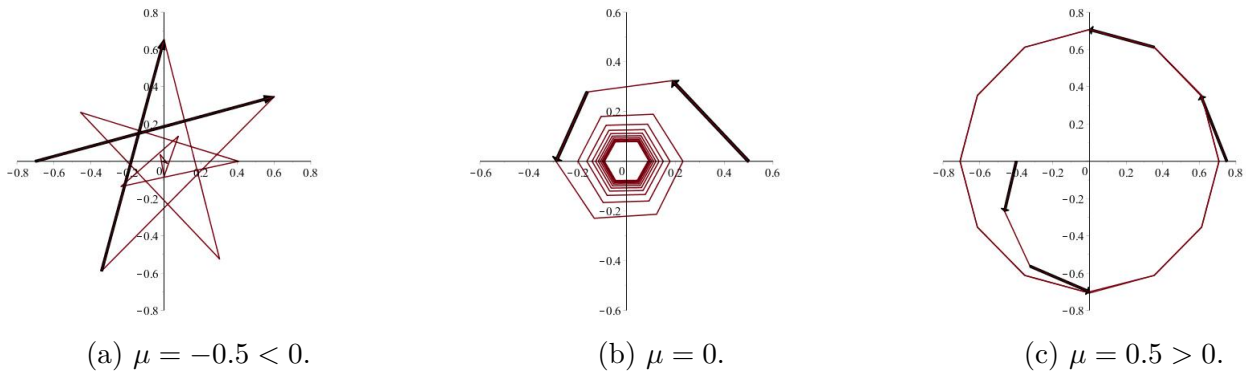


FIGURE 2.8 – Bifurcation de Neimark-Sacker de l'exemple 2.3.

**Remarque 2.5.** *Le cercle est attractif, mais si on change les données de la fonction  $F_\mu$  par exemple :*

**Exemple 2.4.**

$$F_\mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1 + \mu + x^2 + y^2) \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

*le cercle devient répulsif.*

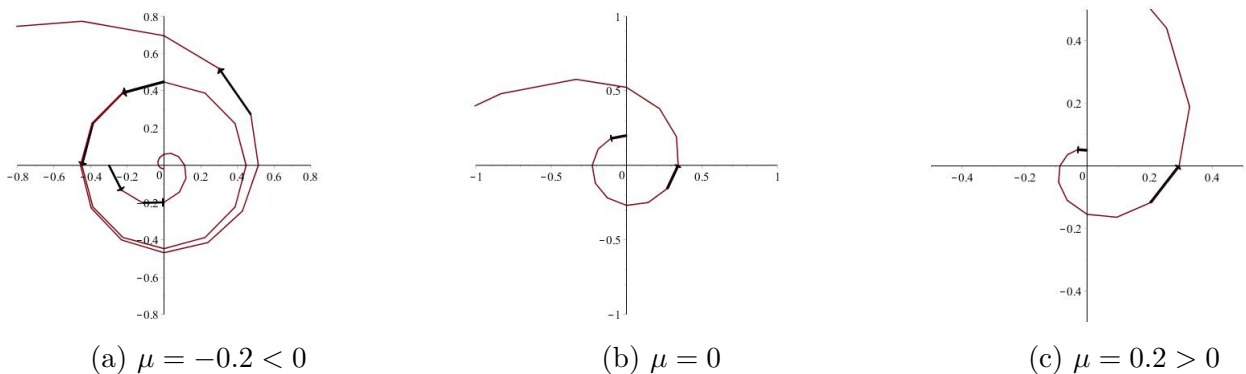


FIGURE 2.9 – Bifurcation de Neimark-Sacker de l'exemple 2.4

**Remarque 2.6.** *La bifurcation de Neimark-Sacker correspond à la transformation d'un foyer à une courbe invariante. Si la courbe est attractif la bifurcation est dite **super-critique**, et si la courbe est répulsif la bifurcation est dite **sous-critique**.*

### Génération de bifurcation de Neimark-Sacker

Soit  $F_\mu : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  une fonction de classe au moins  $C^4$  qui vérifie les conditions suivantes :

1. L'origine est un point fixe de  $F_\mu$  pour des valeur de  $\mu$  au voisinage de  $\mu = \mu_0$ .
2. La matrice jacobienne de  $F_\mu$  possède deux valeurs propres complexes  $\lambda_{1,2} = r(\mu)e^{i\theta(\mu)}$  avec  $r(\mu_0) = 1, r'(\mu_0) \neq 0$  et  $\theta(\mu_0) = \theta_0$ , et donc  $|\lambda_{1,2}| = 1$ .
3. Pour tout  $k = 1..4$  on a  $e^{k\theta_0} \neq 1$ .
4. Le nombre de Lyapunov  $a \neq 0$ , qui-est donné par

$$a = -\operatorname{Re} \left[ \frac{(1 - 2\bar{\lambda})\bar{\lambda}^2}{1 - \lambda} \xi_{11}\xi_{20} \right] - \frac{1}{2} \|\xi_{11}\|^2 - \|\xi_{02}\|^2 + \operatorname{Re}(\bar{\lambda}\xi_{21}),$$

où  $\xi_{ij} : i, j = 0, 1, 2$  sont les coefficients de  $Z^i \bar{Z}^j$  pour  $F_\mu$  sous une forme spécifique (voir [16] pour plus de détails).

Alors, on a le théorème suivant :

**Théorème 2.1** ([23, 15, 16]). *On suppose que la fonction  $F_\mu$  vérifie les conditions 1 – 4, alors pour des valeurs de  $\mu$  suffisamment petites,  $F_\mu$  possède une courbe invariante contient l'origine, de plus si  $a < 0$  cette courbe est attractive, et si  $a > 0$  cette courbe est répulsive.*

#### 2.1.5 Variété centrale

Dans le chapitre 1, le corollaire 1.1 ne nous donne pas des informations sur la stabilité de point fixe non hyperbolique. Il existe la théorie de **variété centrale (Center Manifolds)**, qui peut réduire l'étude de la stabilité d'un point fixe, dans une dynamique sur un ensemble  $M_c$  de dimension inférieure au voisinage de ce point fixe, ([8], [5]).

On considère une fonction  $F(U, \mu)$ ,  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction au moins de classe  $C^3$ , et  $(U^*, \mu^*)$  est un point fixe non hyperbolique de  $F$ . c'est à dire,  $F(U^*, \mu^*) = U^*$ . Par un changement de variable on se ramène à l'origine, on peut supposer sans perte de généralité, que la fonction  $F$  peut s'écrire sous la forme du système suivant :

$$\begin{aligned} x &\mapsto Ax + f(x, y, \mu) \\ y &\mapsto By + g(x, y, \mu) \end{aligned} \tag{2.1}$$

où, la matrice jacobienne de  $F$  s'écrire sous la forme  $J_F(U^*, \mu^*) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ , où  $A$  est une matrice d'ordre  $(t, t)$  et  $B$  d'ordre  $(s, s)$  avec  $t + s = n$ , tel que toutes les valeurs propres de  $A$  sont sur le cercle unité ( $|\lambda| = 1$ ), et toutes les valeurs propres de  $B$  ne sont pas sur le cercle unité ( $|\lambda| \neq 1$ ), et

$$\begin{aligned} f(0, 0, 0) &= 0, \quad g(0, 0, 0) = 0 \\ Df(0, 0, 0) &= 0, \quad Dg(0, 0, 0) = 0 \end{aligned}$$

Les résultats suivants (théorèmes 2.2 et 2.3) sont tirés de [5]

**Théorème 2.2 (Variété centrale).** *Pour  $\delta_1 > 0$  et  $\delta_2 > 0$  suffisamment petits, une variété centrale du système (2.1) est donnée localement par :*

$$Mc = \{(x, y, \mu) \in \mathbb{R}^t \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}, y = h(x, \mu), |x| < \delta_1, |\mu| < \delta_2, h(0, 0) = 0, Dh(0, 0) = 0\},$$

de plus, la dynamique restreinte à  $Mc$  est donnée localement par la fonction :

$$x \mapsto Ax + f(x, h(x, \mu), \mu), x \in \mathbb{R}^t, \tag{2.2}$$

et si l'origine est un point fixe (respectivement : stable, asymptotiquement stable, ou instable) de la fonction (2.2), alors l'origine est un point fixe (respectivement : stable, asymptotiquement stable, ou instable) du système (2.1).

**Remarque 2.7.** *Si  $\mu$  n'est pas un scalaire, alors on garde une composante comme variable, et on fixe les autres composantes, par exemple  $h(x, \mu) = c_1x + c_2x^2 + \mu x^3 + \dots$*

Maintenant la question qui se pose est comment déterminer la fonction  $h$ .  
D'abord, on remplace  $y$  dans le système (2.1) :

$$\begin{aligned} x &\mapsto Ax + f(x, y, \mu) \\ y &\mapsto h(Ax + f(x, h(x, \mu), \mu)) \\ &= Bh(x) + g(x, h(x, \mu), \mu), \end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\mathcal{F}(h(x, \mu)) = h(Ax + f(x, h(x, \mu), \mu)) - Bh(x, \mu) - g(x, h(x, \mu), \mu) = 0.$$

La solution (en  $h$ ) de cette équation n'est pas évidente car celle-ci est implicite, donc on va énoncer un résultat qui donne une approximation de cette solution.

**Théorème 2.3.** *Soit  $\psi : \mathbb{R}^t \rightarrow \mathbb{R}^s$  de classe  $C^1$  tel que  $\psi(0) = \psi'(0) = 0$ , et  $\mathcal{F}(\psi(x)) = O(\|x\|^r)$  (i.e.  $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{F}(\psi(x))\|}{\|x\|^r} = M$ ,  $M$  une constante positive) pour un certain  $r > 1$ , alors au voisinage de l'origine on a :*

$$h(x, \mu) = \psi(x, \mu) + O(\|x\|^r).$$

### 2.1.6 Bifurcation bidimensionnelle

Soit  $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  une fonction au moins de classe  $C^3$ , si  $(U^*, \mu^*)$  est un point fixe de  $F$ , avec un changement de variable on se ramène à l'origine. Avec le théorème de variété centrale, on définit un système équivalent par une fonction  $f : (x, \mu) \mapsto f(x, \mu)$  de dimension un définie sur l'ensemble  $Mc$ , et on déduit l'énoncé suivant :

**Théorème 2.4** ([8]).

1. Si la matrice jacobienne  $J_F(0,0)$  possède une valeur propre égale à 1, alors la bifurcation est dite
  - (a) **Nœud-col** (ou fold), si  $\frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) \neq 0$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \neq 0$ , de plus si  $\left(\frac{\partial f}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)(0,0) < 0$ , la bifurcation est super-critique.
  - (b) **Nœud-col** du type fourche, si  $\frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) = 0$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0$ , de plus si  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0,0) \neq 0$ ,  $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) \neq 0$ ,  $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu} \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)(0,0) < 0$ , la bifurcation est super-critique.
  - (c) **Nœud-col** du type transcritique, si  $\frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) = 0$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \neq 0$ , de plus si  $\left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2}\right)(0,0) > 0$ , la bifurcation est super-critique.
2. Si la matrice jacobienne  $J_F(0,0)$  possède une valeur propre égale à (-1), alors la bifurcation est dite **doublement de période** (flip), de plus si  $\alpha = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mu} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}\right)(0,0) \neq 0$ ,  $\beta = \left(2 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)(0,0) \neq 0$ ,  $\alpha\beta < 0$ , la bifurcation est super-critique.
3. Si la matrice jacobienne  $J_F(0,0)$  possède deux valeurs propres complexes  $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$  tel que  $|\mu_1| = |\mu_2| = 1$ , alors la bifurcation est dite de **Neimark-Sacker**.

## 2.2 Les courbes critiques

Dans le plan de phase, la non inversibilité des applications est caractérisée par la présence des singularités appelées lignes critiques (*LC*). Ce type de singularité, a été introduit pour la première fois par Christian Mira en 1964 [22]. Les lignes critiques interviennent dans la détermination des aires chaotiques, dans la caractérisation des propriétés de ces aires et aussi pour expliquer des bifurcations globales d'attracteurs et de leurs bassins d'attraction, ([3],[4],[12]).

Dans tout ce qui suit,  $F$  est une application non inversible de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 2.5.**

1. Une courbe critique notée *LC* est le lieu des points du plan de phase ayant au moins deux antécédents de rang 1 confondus. C'est la généralisation d'un point critique en dimension un.

$$LC = \{X \in \mathbb{R}^n : F(X') = X \text{ admet au moins deux antécédents confondus}\}$$

2. Une courbe critique  $LC_k$  de rang  $k$ , est la courbe conséquente de rang  $k$  de  $LC$

$$F^k(LC) = LC_k, k = 1, 2, \dots$$

3. La courbe critique  $LC_{-1}$  est l'antécédent de rang un de  $LC$ , avec par définition :

$$F(LC_{-1}) = LC \text{ et } LC_{-1} \subseteq F^{-1}(LC).$$

**Propriété 2.1.** Dans le cas où  $F$  est différentiable, une courbe  $LC_{-1}$  est le lieu des points pour lequel le déterminant de la matrice Jacobienne de  $F$  s'annule.

$$LC_{-1} = \{X \in \mathbb{R}^n : \det(J_F(X)) = 0\}.$$

Les courbes critiques partagent le plan de phase en zones  $Z_i$ , chaque zone  $Z_i$  possède  $i$  antécédents de rang un, et on a :

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{i \in I} Z_i, \text{ où } I \text{ est un ensemble fini.}$$

**Remarque 2.8.** Dans le cas où l'application  $F$  n'est pas différentiable, la courbe de non différentiabilité est considéré comme une courbe  $LC_{-1}$ .

L'étude des lignes critiques présente plusieurs intérêts :

1. Les arcs de certaines d'entre elles délimitent les zones invariantes ou absorbantes, donc peuvent délimiter les attracteurs chaotiques.(on définira le concept d'attracteur chaotique plus tard)
2. Les courbes critiques interviennent dans certaines bifurcations spécifiques(comme la bifurcation d'une Courbe Invariante Fermée) et permettent de comprendre l'évolution des bifurcations.

### 2.2.1 Classification des transformations non inversibles

La notion de feuilletage du plan des phases, est essentielle pour la compréhension des propriétés et bifurcation des attracteurs et leurs bassin d'attraction, et notamment les courbes invariantes, ([24, 26]). Elles sont classées dans un ordre de complexité croissante avec le symbolisme suivant :

1. **Plan de phase de type** ( $Z_0 - Z_2$ )

On distingue sur la courbe  $LC$  une seule branche séparant le plan  $\mathbb{R}^n$  en deux régions. Une région  $Z_0$  pour laquelle les points  $(x_{n+1}, y_{n+1})$  n'ont pas d'antécédents. Une région  $Z_2$  pour laquelle les points  $(x_{n+1}, y_{n+1})$  ont deux antécédents de rang un.

2. **Plan de phase de type** ( $Z_1 - Z_3 - Z_1$ ) La courbe  $LC$  est discontinue. Elle est formée de deux segments disjoints  $L$  et  $L'$  divisant le plan  $\mathbb{R}^2$  en trois régions. Deux régions  $Z_1^1$  et  $Z_1^2$  avec un seul antécédent de rang un, et une troisième régions  $Z_3$  pour laquelle tout point possède trois antécédents distincts de rang un.

### 3. Plan de phase de type $(Z_1 < Z_3)$

La courbe critique  $LC$  possède un point **cuspidal**  $C$  (ou de rebroussement) créant un **cap** dans  $Z_3$  pénétrant dans  $Z_1$ .

$$LC = L \cup L', \{C\} = L \cap L'.$$

### 4. Plan de phase de type $(Z_1 < Z_3 >)$ La courbe critique $LC$ possède deux points cuspidaux $C$ et $C'$ formant une courbe fermée en forme de "lèvre".

$$LC = L \cup L', \{C, C'\} = L \cap L'.$$

**Remarque 2.9.** *Il existe aussi d'autres types de plan de phase, voir ([6, 24, 26]) pour plus de détails.*

## 2.2.2 Bifurcation d'une Courbe Invariante Fermée

Dans cette section, on introduit la notion de bifurcation d'une courbe invariante fermée. Cette bifurcation est importante car elle est responsable de la transformation de cette courbe en un attracteur chaotique, ([1], [26], [24]).

Soit  $\Gamma$  une courbe invariante fermée née de la déstabilisation d'un point fixe  $Q$  de type foyer via une bifurcation de Neimark-Sacker, tel que  $\Gamma \cap LC_{-1} = \emptyset$ .

### Bifurcation intersection avec $LC_{-1}$ ( $\lambda = \tilde{\lambda}$ ) est la valeur de cette bifurcation

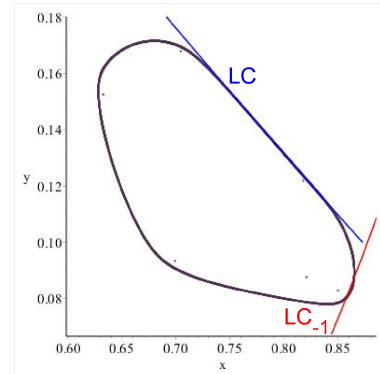
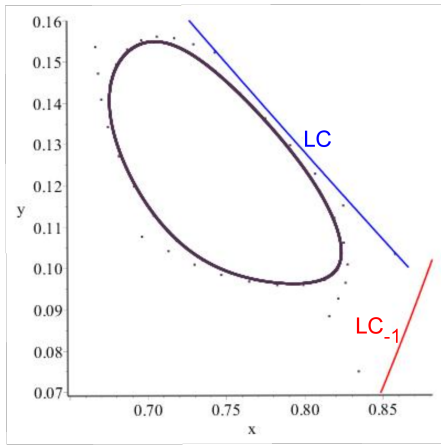
Cette bifurcation apparait lorsque  $\Gamma$  entre en contact avec  $LC_{-1}$  en un point  $u_0 = v_0$  telle que :

$$\Gamma \cap LC_{-1} = \{u_0\}.$$

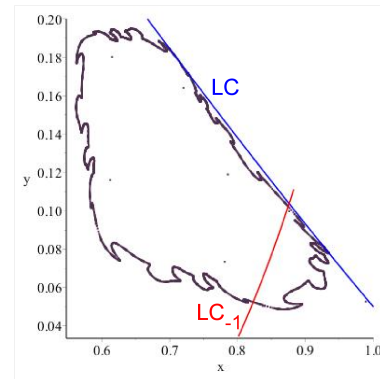
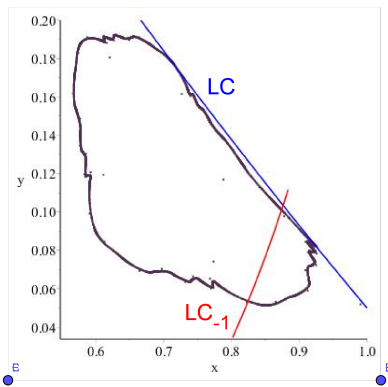
L'image  $u_1 = v_1$  de  $u_0 = v_0$  par  $F$  est un point de contact entre  $\Gamma$  et  $LC$ . Pour  $\epsilon > 0$  suffisamment petit tel que  $\lambda = \tilde{\lambda} + \epsilon$ , on a :

$$\Gamma \cap LC_{-1} = \{u_0, v_0\}.$$

Cette intersection est responsable du changement de la forme de  $\Gamma$  car les itérés de rang  $n$  du couple  $\{u_0, v_0\}$  notés  $\{u_n, v_n\}$  sont des points de contact tangentiels entre  $\Gamma$  et  $LC_n$ , ce qui signifierait dans le cas contraire qu'un point de  $Z_0$  possède un antécédent. Cette bifurcation crée des oscillations de  $\Gamma$  le long des  $LC_n$ . Ceci s'explique également par le fait que  $\Gamma$  passe d'un feuillet à un autre lorsqu'elle entre en contact avec  $LC$ , voir la figure 2.10



(a) La courbe avant le contact avec  $LC$  et  $LC_{-1}$       (b) La courbe rentre en contact avec  $LC$  et  $LC_{-1}$



(c) L'intersection de la courbe avec  $LC_{-1}$ , et des contacts tangentiels avec  $LC$  et  $LC_m$       (d) Plus de contacts tangentiels de la courbe avec  $LC$  et  $LC_m$

FIGURE 2.10 – Bifurcation d'une courbe invariante fermée, et la création des oscillations.

### 2.2.3 Rôle des courbes critiques dans les bifurcations fondamentales des bassins

Dans ce paragraphe, nous allons décrire les bifurcations de base intervenant dans le changement qualitatif de la structure d'un domaine  $D$ , situé dans le plan de phase qu'on appellera bassin d'un attracteur  $A$ . Ces bifurcations interviennent lors d'un contact ou d'une intersection de  $D$  avec une



ligne critique  $LC$  d'une transformation non inversible.

On notera  $\partial D$  la frontière de  $D$ ,  $D_0$  le bassin immédiat de l'attracteur  $A$  et  $\partial A$  sa frontière.

La proposition suivante est un rappel de certaines bifurcations de bassins d'attraction, ([4], [13], [21], [24]).

**Proposition 2.1.** *Si le nombre de composantes connexes de  $D \cap LC$  change quand  $\lambda$  traverse une valeur de bifurcation  $\lambda_0$ , alors le bassin d'attraction  $D$  peut subir une bifurcation de bassins parmi les types de bifurcation suivantes :*

1. *Bassin connexe  $\Leftrightarrow$  bassin non connexe (quand le nombre de composantes connexes de  $D_0 \cap LC$  change).*
2. *Bassin connexe  $\Leftrightarrow$  bassin multiplément connexe (quand le nombre de composantes connexes de  $D_0 \cap LC$  change).*

## 2.3 Chaos

### 2.3.1 Transitivité

**Définition 2.6.** *On considère deux ensembles  $A$  et  $B$  tels que :  $B \subset A$ . On dit que  $B$  est dense dans  $A$  si  $\overline{B} = A$ . Autrement dit, pour tout  $x \in A$  et pour tout ouvert  $O$  qui contient  $x$  :  $O \cap B \neq \emptyset$ .*

**Exemple 2.5.** *L'ensemble des rationnelles  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .*

**Définition 2.7.** *Soit  $(X, f)$  un système dynamique, on dit que la fonction  $f$  est transitive si pour tous deux ouverts non vides*

$$O_1, O_2 \in X, \exists k \in \mathbb{N} : f^k(O_1) \cap O_2 \neq \emptyset.$$

**Théorème 2.5.** *soit  $(X, f)$  un système dynamique, alors  $f$  est transitive si et seulement s'il existe un point  $x \in X$  d'orbite dense.*

**Démonstration.** *Soit  $x \in X$  d'orbite dense, et  $O_1, O_2 \in X$  deux ouverts, donc  $\exists n, m \in \mathbb{N} : f^n(x), f^m(x) \in \theta_x$  que vérifie  $f^n(x) \in O_1$  et  $f^m(x) \in O_2$ , sans perte de généralité on pose  $k = n - m \in \mathbb{N}$  et donc  $f^k(f^m(x)) = f^n(x)$  d'où  $f^k(O_2) \cap O_1 \neq \emptyset$ . Pour l'implication inverse voir [8].*

**Définition 2.8.** *Soit  $(X, f)$  un système dynamique, on dit que  $f$  est sensible aux conditions initiales si*

$$\exists \epsilon > 0, \forall x \in X, \exists \alpha > 0 : \exists y : d(x, y) < \alpha, \exists n_0 \in \mathbb{N} : d(f^{n_0}(x), f^{n_0}(y)) > \epsilon.$$

**Exemple 2.6.** *Soit la fonction affine  $f(x) = ax + b$ ,  $a > 1$  et  $b \in \mathbb{R}$ .*

*Par récurrence, on obtient  $f^n(x) = \left(x + \frac{b}{a-1}\right)a^n - \frac{b}{a-1}, \forall n \in \mathbb{N}$ .*

Par suite, on a pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\exists \alpha > 0, \exists y_0 : |x_0 - y_0| = \alpha, \forall n \in \mathbb{N} :$

$$\begin{aligned} |f^n(x_0) - f^n(y_0)| &= \left| \left( x_0 + \frac{b}{a-1} \right) a^n - \frac{b}{a-1} - \left[ \left( y_0 + \frac{b}{a-1} \right) a^n - \frac{b}{a-1} \right] \right| \\ &= |x_0 - y_0| a^n, \end{aligned}$$

et comme  $a > 1$  et  $|x_0 - y_0| = \alpha$  on a  $|f^n(x_0) - f^n(y_0)| > \alpha = \epsilon$ .

**Définition 2.9.** Soit  $(X, f)$  un système dynamique, On dit que la fonction  $f$  est **expansif** si

$$\exists \epsilon > 0, \forall x, y \in X, x \neq y, \exists n_0 \in \mathbb{N} : d(f^{n_0}(x), f^{n_0}(y)) > \epsilon.$$

**Définition 2.10** ([8]). Soit  $(X, f)$  un système dynamique, et  $Y \subset X$  un attracteur. On dit que  $Y$  est un **attracteur étrange** s'il est sensible aux conditions initiales.

### 2.3.2 Chaos selon Devaney

On peut à présent définir le chaos selon Devaney [7].

**Définition 2.11** ([7]). Soit  $(X, f)$  un système dynamique, on dit que la fonction  $f$  est **chaotique** (selon Devaney) si la fonction  $f$

1. Est transitive.
2. Admet un ensemble de points périodiques dense dans  $X$ .
3. Est sensible aux conditions initiales.

**Remarque 2.10.** Récemment Banks et al [2], ont montré que les conditions 1 et 2 de cette dernière implique la condition 3.

**Théorème 2.6** ([2]). Soit  $(f, X)$  un système dynamique, si  $f$  est transitif et admet un ensemble de points périodiques dense dans  $X$ , alors  $f$  est sensible aux conditions initiales.

Pour prouver ce théorème, on a besoin de ce lemme :

**Lemme 2.1.** Soit  $(f, X)$  un système dynamique, on suppose que  $f$  possède au moins deux points périodiques dont les itérés sont deux à deux distants (i.e.  $\forall i, j : f^i(p) \neq f^j(p)$ ), alors il existe  $\epsilon > 0$  pour tout  $x \in X$  il existe un point périodique  $p \in X$  tel que  $|f^n(p) - x| \geq \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Démonstration.** On suppose que  $f$  possède deux points périodiques  $p, q$  dont les itérés sont deux à deux distants.

On pose  $\epsilon_0 = \frac{1}{2} \min(d(f^i(p), f^j(p)) : i, j \in \mathbb{N})$  donc on a

$$\forall s, r \in \mathbb{N} : d(f^s(p), f^r(q)) \geq 2\epsilon_0.$$

Et d'autre part d'après l'inégalité triangulaire :

$$\forall x \in X, \forall s, r \in \mathbb{N} : d(f^s(p), f^r(q)) \leq d(f^s(p), x) + d(x, f^r(q)),$$

d'où

$$\forall x \in X, \forall s, r \in \mathbb{N} : d(f^s(p), x) + d(f^r(q), x) \geq 2\epsilon_0,$$

donc les deux quantités  $d(f^s(p), x), d(f^r(q), x)$  ne peuvent pas être tous les deux inférieure à  $\epsilon_0$ , alors il existe  $\epsilon_0 > 0$ , pour tout  $x \in X$ , il existe un point périodique  $p \in X$  tel que  $d(f^n(p) - x) \geq \epsilon_0, \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Démonstration.** du théorème 2.6

On prend  $\epsilon = \frac{1}{4}\epsilon_0$  tel que  $\epsilon_0$  du lemme précédent, et soit  $x \in X$ , donc d'après la densité des point périodiques il existe un point  $k$ -périodique  $y \in X$  :

$$d(x, y) < \delta < \epsilon,$$

et aussi d'après le lemme précédent il existe un point périodique

$$p \in X : d(x, f^n(p)) \geq \epsilon_0 = 4\epsilon, \forall n \in \mathbb{N}.$$

On pose  $U = \{z \in X : d(f^i(z), f^i(p)) < \epsilon, i = 0..k-1\}$ , qui est un ouvert non vide car  $p \in U$  et

$$U = \bigcap_{i=0}^{k-1} f^{-i}(B_\epsilon(f^i(p))),$$

de la transitivité de  $f \exists z \in B_\delta(x), \exists m > 0 : f^m(z) \in U$ , par suit on pose  $r \in \mathbb{N} : \frac{m}{k} < r < \frac{m}{k} + 1$ , donc  $kr - m < k$  et par conséquence :

$$d(f^{kr-m}(f^m(z)), f^{kr-m}(p)) < \epsilon$$

$$d(f^{kr}(z), f^{kr-m}(p)) < \epsilon.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire on a :

$$4\epsilon < d(x, f^{kr-m}) < d(x, y) + d(y, f^{kr}(z)) + d(f^{kr}(z), f^{kr-m}(p))$$

$$4\epsilon < 2\epsilon + d(y, f^{kr}(z))$$

$$2\epsilon < d(y, f^{kr}(z)),$$

en utilisant encore l'inégalité triangulaire

$$2\epsilon < d(y, f^{kr}(x)) + d(f^{kr}(x), f^{kr}(z)),$$

$y$  est un point  $k$ -périodique donc :

$$2\epsilon < d(f^{rk}(y), f^{kr}(x)) + d(f^{kr}(x), f^{kr}(z)),$$

alors soit  $d(f^{rk}(y), f^{kr}(x)) > \epsilon$ , soit  $d(f^{kr}(x), f^{kr}(z)) > \epsilon$ . D'où  $f$  est sensible au condition initiale.

**Remarque 2.11.** *Encore récemment Vellekoop and Berglund [25], ont montré dans le cas où la fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , que la transitivité implique la densité de l'ensemble de points périodiques, et par suit de théorème 2.6 la sensibilité au condition initiale de  $f$ , ce que veut dire que  $f$  est chaotique.*

**Théorème 2.7** ([25]). *Soit  $f : I \rightarrow I$  une fonction continue sur l'intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  ( $I$  pas nécessairement borné), si la fonction  $f$  est transitive alors elle possède un ensemble de points périodiques dense dans  $I$ , donc  $f$  est chaotique.*

### 2.3.3 Conjugaison topologique

**Définition 2.12.** *Soit une fonction  $h : A \rightarrow B$ ,  $h$  est dite **homéomorphisme** si elle est bijectif, et bicontinue (i.e.  $h$  et  $h^{-1}$  sont continues)*

**Définition 2.13** ([8]). *Soit deux fonction  $f : A \rightarrow A$  et  $g : B \rightarrow B$ ,  $f$  et  $g$  est dit **topologiquement conjugué**, et on note  $f \approx g$ , s'il existe un homéomorphisme  $h : A \rightarrow B$  tel que  $h \circ f = g \circ h$ . On dit aussi que  $f$  est  $h$ -conjugué de  $g$ .*

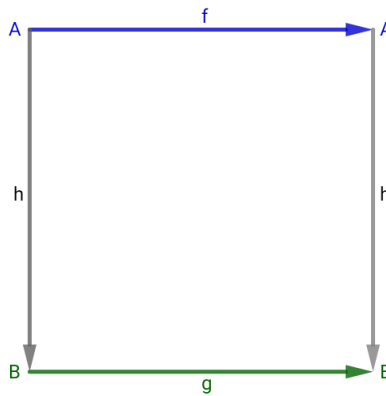


FIGURE 2.11 –  $f$  est  $h$ -conjugué de  $g$

**Remarque 2.12.** *Si  $f \approx g$  alors  $f^k \approx g^k, \forall k \in \mathbb{N}$ .*

**Exemple 2.7.** *Soit deux système dynamique,  $(A, F_\mu)$  tel que  $A = [0, 1]$  et  $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$  est la fonction logistique avec  $0 < \mu \leq 4$ ,  $(B, G)$  tel que  $B = \left[ \frac{-\mu - b}{2a}, \frac{\mu - b}{2a} \right]$  et le polynôme  $G(x) = ax^2 + bx + c : a > 0$ .*

*On a  $f$  et  $g$  sont topologiquement conjugué où*

$$h : A \rightarrow B$$

$$x \mapsto h(x) = -\frac{\mu}{a}x + \frac{\mu - b}{2a}$$

$$\text{et } c = \frac{b^2 - \mu^2 + 2\mu - 2b}{a}.$$

**Remarque 2.13.** *Le nombre de paramètre de  $G$  (ici 3) passe à un seul dans  $F$ .*

**Définition 2.14** ([8]). *Soit deux fonction  $f : A \rightarrow A$  et  $g : B \rightarrow B$ ,  $f$  et  $g$  est dit **topologiquement semi-conjugué**, s'il existe une application surjective  $h : A \rightarrow B$  tel que  $h \circ f = g \circ h$ .*

**Théorème 2.8** ([8]). *Soit  $f : A \rightarrow A$  et  $g : B \rightarrow B$  deux fonction continue, tel que  $f$  et  $g$  sont topologiquement semi-conjugué, alors  $f$  est chaotique ssi  $g$  est chaotique.*

**Démonstration.** *Soit les deux fonction  $f : A \rightarrow A$  et  $g : B \rightarrow B$ , tel que  $f$  et  $g$  sont topologiquement semi-conjugué et  $f$  est chaotique,*

1. *La transitivité :*

*On considère  $U, V$  deux ouverts de  $B$  donc  $h^{-1}(U), h^{-1}(V)$  sont deux ouverts de  $A$ , comme  $f$  est transitive*

*il existe  $k \in \mathbb{N} : f^k(h^{-1}(U)) \cap h^{-1}(V) \neq \emptyset$  alors*

$$h \circ f^k(h^{-1}(U)) \cap h(h^{-1}(V)) = g^k \circ h(h^{-1}(U)) \cap V = g^k(U) \cap V \neq \emptyset$$

*donc  $g$  est transitive.*

2. *La densité de l'ensemble de points périodiques :*

*Soit  $U$  un ouvert quelconque de  $B$ , et montrant qu'il contienne au moins un point périodique, on a  $h^{-1}(U)$  est un ouvert de  $A$ , et comme l'ensemble de points périodiques de  $f$  est dense dans  $A$  il existe un point  $k$ -périodique  $x \in h^{-1}(U)$  de  $f$  d'où  $h(x) \in h(h^{-1}(U)) = U$  et d'autre part  $g^k(h(x)) = h(f^k(x)) = h(x)$  donc  $h(x) \in U$  est un point périodique de  $g$ .*

## Théorème de Sarkovskii [7]

Soit  $f : I \rightarrow I$  une fonction continue sur un intervalle de  $\mathbb{R}$ , si  $f$  possède un point  $k$ -périodique, alors pour tout  $l \in \mathbb{N} : k \triangleright l$ ,  $f$  possède un point  $l$ -périodique.

Tel que  $\triangleright$  est une notation d'un ordre sur  $\mathbb{N}$  défini par

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \dots \triangleright 2.3 \triangleright 2.5 \triangleright 2.7 \triangleright \dots \triangleright 2^{n-1}.3 \triangleright 2^{n-1}.5 \triangleright 2^{n-1}.7 \triangleright \dots \\ \dots \triangleright 2^n.3 \triangleright 2^n.5 \triangleright 2^n.7 \dots 2^n \triangleright 2^{n-1} \triangleright 2^{n-2} \triangleright \dots \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1$$

### 2.3.4 Chaos selon Li-Yorke [18]

En 1975 Li et Yorke ont introduit le concept de chaos suivant :

**Définition 2.15.** *Pour une fonction continue  $f : I \rightarrow I$ , où  $I$  un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ , il existe un sous ensemble  $S \subset I$  :*

1.  $\forall p, q \in S$  avec  $p \neq q$  on a

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} |f^n(p) - f^n(q)| > 0$$

et

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} |f^n(p) - f^n(q)| = 0.$$

2.  $\forall p \in S$  et pour tout point périodique  $q \in I$  on a

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} |f^n(p) - f^n(q)| > 0.$$

**Théorème 2.9** ([14]). *Soit  $f : I \rightarrow I$  une fonction continue sur un intervalle borné  $I$  de  $\mathbb{R}$ , si  $f$  possède un point  $k$ -périodique tel que  $k \neq 2^i$ , alors  $f$  est chaotique selon Li-Yorke.*

---

## Étude de la dynamique d'un modèle discret proies-prédateurs

L'équilibre proies-prédateurs est un système naturel d'équilibre dynamique dans lequel les populations de proies et de prédateurs d'un écosystème se régulent d'elles-mêmes par les processus de sélection naturelle, des modélisations mathématiques tentent de prédire la dynamique des systèmes proies-prédateurs. Les équations de modèle proie-prédateur constituent le modèle le plus couramment utilisé par les chercheurs, avec les limites théoriques qu'on peut leur associer. Le modèle que nous présentons ci-dessous formalise l'équilibre proie-prédateur qui est le modèle le plus utilisé [19]

$$\begin{aligned}\dot{X} &= r_0 X \left(1 - \frac{X}{k}\right) - b_0 XY \\ \dot{Y} &= (-d_0 + cX)Y\end{aligned}$$

où  $X(s)$  est le nombre des proies en fonction du temps,  $Y(s)$  est le nombre des prédateurs en fonction du temps,  $\dot{X}$  et  $\dot{Y}$  représentent la variation des populations au cours du temps,  $k$  est le taux de reproduction des proies et  $r_0$  est le taux de reproduction intrinsèque des proies en absence du prédateur. Le nombre de proie consommé par un prédateur est donné par  $b_0 X$  et  $d_0$  est le taux de mortalité des prédateurs. Le taux de conversion de proie en prédateur est donné par  $cX$ , avec les paramètres  $r_0, k, b_0, d_0$  et  $c$  sont positifs. Avec les changements des variables  $x = \frac{X}{k}$ ,  $y = \frac{b_0 Y}{ck}$  et  $s = \frac{t}{k}$ , on obtient le système différentiel non linéaire suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= r_0 k x (1 - x) - k^2 c x y \\ \dot{y} &= (-d_0 k + k^2 c x) y\end{aligned}$$

Avec la discrétisation par la méthode d'Euler classique, on obtient le système dynamique discret non linéaire suivant :

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + rx_n(1 - x_n) - bx_ny_n \\y_{n+1} &= y_n + (-d + bx_n)y_n\end{aligned}\tag{3.1}$$

où,  $r = r_0k > 0$ ,  $b = k^2c > 0$  et  $d = d_0k > 0$ . Notre objectif est d'étudier le système dynamique discret (3.1) sur le premier quadrant  $\mathbb{R}_+^2$  ( $x \geq 0, y \geq 0$ ), puisque la population ne peut pas être négative. Afin de s'assurer que la taille de la population reste toujours positive, nous donnons la condition initiale suivante :

$$\begin{aligned}\max\left(0, \frac{d-1}{b}\right) < x_0 < 1 + \frac{1}{r} \\0 < y_0 < \frac{1 + r(1 - x_0)}{b}\end{aligned}\tag{3.2}$$

### 3.1 Existence des points fixes et leurs stabilités locales

Le résultat d'existence des points fixes est donné par la proposition suivante

**Proposition 3.1** ([19]).

1. Pour toutes les valeurs des paramètres, le système (3.1) possède deux points fixes  $O(0, 0)$ ,  $A(1, 0)$ .
2. Si  $0 < d < b$ , alors le système (3.1) possède trois points fixes  $O(0, 0)$ ,  $A(1, 0)$  et  $B(x^*, y^*)$ , avec  $x^* = \frac{d}{b}$  et  $y^* = \frac{r(b-d)}{b^2}$ .

**Démonstration.** Un point fixe  $X = (x, y)$  du système (3.1) satisfait :

$$\begin{aligned}x &= x + rx(1 - x) - bxy \\y &= y + (bx - d)y,\end{aligned}$$

par suite,

$$\begin{aligned}x[r(1 - x) - by] &= 0 \\y(bx - d) &= 0.\end{aligned}$$

Les résultats de la proposition s'en suivent.



### 3.1.1 Classification topologique et stabilités des points fixes

Maintenant, nous donneront la classification topologique et la stabilité des points fixes selon les paramètres  $r$ ,  $b$  et  $d$ . Le système (3.1) s'écrit sous la forme :  $(x_{n+1}, y_{n+1}) = F(x_n, y_n)$ , où :

$$F(x, y) = (x + rx(1 - x) - bxy, y + (bx - d)y).$$

La matrice jacobienne de  $F$  en tout point est donnée par :

$$J_F(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + r(1 - 2x) - by & -bx \\ by & 1 - d + bx \end{pmatrix}.$$

**Proposition 3.2** ([19]). *Le point fixe  $O(0, 0)$  est un col si  $0 < d < 2$  et est un nœud répulsif si  $d > 2$ .*

**Démonstration.** On a  $J_F O(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 + r & 0 \\ 0 & 1 - d \end{pmatrix}$  avec les valeurs propres  $\lambda_1 = 1 + r$  et

$$\lambda_2 = 1 - d.$$

Les résultats découlent de la comparaison à 1 des modules des deux valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de  $J_F O(0, 0)$ .

**Proposition 3.3** ([19]). *Le point fixe  $A(1, 0)$  est un :*

1. Nœud attractif si  $0 < r < 2$  et  $\max(0, d - 2) < b < d$ .
2. Nœud répulsif si  $r > 2$  et  $b > d$ , ou  $r > 2, d > 2$  et  $0 < b < d - 2$ .
3. Point non hyperbolique si  $r = 2$  et  $d = b$ , ou  $r = 2$  et  $d - b = 2$ .
4. Col sinon.

**Démonstration.** On a  $J_F A(1, 0) = \begin{pmatrix} 1 - r & -b \\ 0 & 1 - d + b \end{pmatrix}$  avec les valeurs propres  $\lambda_1 = 1 - r$  et  $\lambda_2 = 1 - d + b$ .

Les résultats découlent de la comparaison à 1 des modules des deux valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de  $J_F A(1, 0)$ .

**Proposition 3.4** ([19]).

1. Le point fixe  $B(x^*, y^*)$  est attractif si l'une des conditions suivantes est réalisée :
  - (a)  $0 < r \leq 2$  et  $d < b < d + 1$ .
  - (b)  $2 < r < 4 + \frac{4}{d}$  et  $\frac{rd(2+d)}{4+rd} < b < d + 1$ .
2. Le point fixe  $B(x^*, y^*)$  est instable si l'une des conditions suivantes est réalisée :
  - (a)  $0 < r < 4 + \frac{4}{d}$  et  $b > d + 1$ .
  - (b)  $r \geq 4 + \frac{4}{d}$  et  $b > \frac{rd(2+d)}{4+rd}$ .

3. Le point fixe  $B(x^*, y^*)$  est un col si  $r > 2$  et  $d < b < \frac{rd(2+d)}{4+rd}$ .
4. Le point fixe  $B(x^*, y^*)$  est non hyperbolique si l'une des conditions suivantes est réalisée :
  - (a)  $r > 2$  et  $b = \frac{rd(2+d)}{4+rd}$ .
  - (b)  $rd - 4b(b-d) < 0$  et  $b = d + 1$ .

**Démonstration.** La matrice jacobienne de  $F$  au point  $B(x^*, y^*)$  avec  $x^* = \frac{d}{b}$  et  $y^* = \frac{r(b-d)}{b^2}$ , est égale à :

$$J_F B(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} 1 + r(1 - 2x^*) - by^* & -bx^* \\ by^* & 1 - d + bx^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{rd}{b} & -d \\ r - \frac{rd}{b} & 1 \end{pmatrix},$$

et son polynôme caractéristique est alors égale à :

$$P(\lambda) = \lambda^2 + L(x^*, y^*)\lambda + M(x^*, y^*),$$

où :  $L(x^*, y^*) = rx^* - 2 = r\frac{d}{b} - 2$ ,  $M(x^*, y^*) = 1 - rx^* + b^2x^*y^* = \frac{1}{b}(b - rd + rdb - rd^2)$ .

1. D'après le théorème 1.6, le rayon spectral  $\rho(J_F B(x^*, y^*))$  est  $< 1$  si et seulement si :

$$|L(x^*, y^*)| - 1 < M(x^*, y^*) < 1,$$

ce qui nous donne la propriété 1.

2. Maintenant, nous distinguons les trois cas suivants selon le signe du discriminant  $\Delta$  de  $P$ , où

$$\Delta = L(x^*, y^*)^2 - 4M(x^*, y^*).$$

1<sup>er</sup> cas : Si  $(\Delta < 0)$ . Dans ce cas on a :

$$\begin{aligned} |\lambda_1| = |\lambda_2| > 1 &\iff M(x^*, y^*) > 1 \\ &\iff \frac{1}{b}(b - rd + rdb - rd^2) > 1 \\ &\iff b > d + 1. \end{aligned}$$

2<sup>ème</sup> cas : Si  $(\Delta \geq 0)$ . Dans ce cas, comme  $P(1) = b^2x^*y^* > 0$  alors :

$$|\lambda_1| > 1 \text{ et } |\lambda_2| > 1 \iff M(x^*, y^*) > 1 \text{ et } P(-1) > 0$$

ce que nous donne la conclusion 2.

3. Le point fixe  $B(x^*, y^*)$  est un col si  $|\lambda_1| > 1$  et  $|\lambda_2| < 1$  (ou  $|\lambda_1| < 1$  et  $|\lambda_2| > 1$ ), comme  $P(1) > 0$  alors le point fixe  $B(x^*, y^*)$  est un col si et seulement  $P(-1) < 0$ , ce que nous donne la conclusion 3.

4. Le point fixe  $B(x^*, y^*)$  est non hyperbolique si  $|\lambda_1| = 1$  ou  $|\lambda_2| = 1$ . Nous distinguons les trois cas suivants selon le signe du discriminant  $\Delta$ .

1<sup>er</sup> **cas** : Si  $(\Delta \geq 0)$ . Dans ce cas comme  $P(1) > 0$  alors forcément  $P(-1) = 0$ . Ce qui achève la propriété 4a.

2<sup>eme</sup> **cas** : Si  $(\Delta < 0)$ . Dans ce cas  $P$  a deux racines complexe conjuguée  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  ( $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ ). Par conséquent, le point fixe  $B(x^*, y^*)$  est non hyperbolique si et seulement si  $|\lambda_1| = 1$ . Mais puisque

$$|\lambda_1| = 1 \iff |\lambda_1|^2 = 1 \iff \lambda_1 \overline{\lambda_1} = 1 \iff \lambda_1 \lambda_2 = 1$$

et  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = M(x^*, y^*) = \frac{1}{b}(b - rd + rdb - rd^2)$ , il s'ensuit que  $B(x^*, y^*)$  est non hyperbolique si et seulement si :

$$\frac{1}{b}(b - rd + rdb - rd^2) = 1,$$

ce qui donne

$$b = d + 1.$$

D'autre part, la condition  $\Delta < 0$  est équivalente à :

$$-4b^2 + 4db + dr < 0,$$

ce qui équivaut à :

$$rd - 4b(b - d) < 0.$$

Ceci complète la démonstration de la propriété 4b.

## 3.2 Étude de bifurcations locales

### 3.2.1 Bifurcation nœud-col

Le point fixe  $A(1, 0)$  possède deux valeurs propres,  $\lambda_1 = 1 - r$  et  $\lambda_2 = 1$  si  $b = d$  et  $r \neq 2$ . Avec le changement de variable  $u_n = x_n - 1$ ,  $v_n = y_n$  et  $b^* = b - d$ , on transforme le point fixe  $A(1, 0)$  à l'origine. Et le système (3.1) devient

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - r & -d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -ru_n^2 - (d + b^*)u_nv_n - b^*v_n \\ (d + b^*)u_nv_n + b^*v_n \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

La matrice jacobienne  $\bar{J}$  du système (3.3) au point  $(0, 0)$  est donnée par

$$\bar{J} = \begin{pmatrix} 1 - r & -d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour diagonaliser la matrice  $\bar{J}$  on cherche les vecteurs propres associés à ses valeurs propres  $\lambda_1 = 1 - r$  et  $\lambda_2 = 1$  :

$$\begin{aligned} \bar{J}X = (1 - r)X &\iff \begin{cases} (1 - r)x - dy = (1 - r)x \\ y = (1 - r)y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

D'où,  $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de  $\lambda_1 = 1 - r$ .

$$\begin{aligned} \bar{J}X = X &\iff \begin{cases} (1 - r)x - dy = x \\ y = y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -rx = dy \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} . \end{aligned}$$

D'où,  $V_1 = \begin{pmatrix} -d \\ r \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de  $\lambda_2 = 1$ .

Pour  $r \neq 2$ , on construit la matrice inversible  $T_1 = (U_1, V_1) = \begin{pmatrix} 1 & -d \\ 0 & r \end{pmatrix}$  et on pose

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = T_1 \begin{pmatrix} \tilde{x}_n \\ \tilde{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_n - d\tilde{y}_n \\ r\tilde{y}_n \end{pmatrix}, \text{ alors le système (3.3) devient}$$

$$T_1 \begin{pmatrix} \tilde{x}_{n+1} \\ \tilde{y}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - r & -d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T_1 \begin{pmatrix} \tilde{x}_n \\ \tilde{y}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r(\tilde{x}_n - d\tilde{y}_n)^2 - (d + b^*)(\tilde{x}_n - d\tilde{y}_n)r\tilde{y}_n - b^*r\tilde{y}_n \\ (d + b^*)(\tilde{x}_n - d\tilde{y}_n)r\tilde{y}_n + b^*r\tilde{y}_n \end{pmatrix}.$$

En multipliant les deux cotés de cette dernière par  $T_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{r} \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix}$ , on obtient

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{x}_{n+1} \\ \tilde{y}_{n+1} \end{pmatrix} &= T_1^{-1} \begin{pmatrix} 1 - r & -d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T_1 \begin{pmatrix} \tilde{x}_n \\ \tilde{y}_n \end{pmatrix} \\ &\quad + T_1^{-1} \begin{pmatrix} -r(\tilde{x}_n - d\tilde{y}_n)^2 - (d + b^*)(\tilde{x}_n - d\tilde{y}_n)r\tilde{y}_n - b^*r\tilde{y}_n \\ (d + b^*)(\tilde{x}_n - d\tilde{y}_n)r\tilde{y}_n + b^*r\tilde{y}_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_{n+1} \\ \tilde{y}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_n \\ \tilde{y}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n, b^*) \\ g(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n, b^*) \end{pmatrix},$$

avec

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n, b^*) &= -r(\tilde{x}_n - d\tilde{y}_n)^2 + (d - r)(d + b^*)(\tilde{x}_n - d\tilde{y}_n)\tilde{y}_n + (d - r)b^*\tilde{y}_n, \\ g(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n, b^*) &= (d + b^*)(\tilde{x}_n - d\tilde{y}_n)\tilde{y}_n + b^*\tilde{y}_n. \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de la variété centrale, on détermine la stabilité de l'origine pour la valeur  $b^* = 0$  par l'étude d'un système dynamique de dimension un. Soit la variété centrale suivante :

$$Mc = \left\{ (\tilde{x}_n, \tilde{y}_n, b^*) \in \mathbb{R}^3, \tilde{x}_n = h(\tilde{y}_n, b^*), h(0, 0) = 0, Dh(0, 0) = 0 \right\}.$$

Pour  $\tilde{y}_n$  et  $b^*$  suffisamment petit. On suppose que la fonction  $h$  : qui vérifie les deux hypothèses  $h(0, 0) = 0$  et  $Dh(0, 0) = 0$ , s'écrit sous la forme

$$h(\tilde{y}_n, b^*) = a_1 b^* \tilde{y}_n + a_2 (b^*)^2 + a_3 (\tilde{y}_n)^2 + O\left((|\tilde{y}_n| + |b^*|)^3\right),$$

qui satisfait l'équation :

$$\mathcal{F}(h(\tilde{y}_n, b^*)) = h(\tilde{y}_n + g(h(\tilde{y}_n, b^*), \tilde{y}_n, b^*), \tilde{y}_n, b^*) - (1 - r)h(\tilde{y}_n, b^*) - f(h(\tilde{y}_n, b^*), \tilde{y}_n, b^*) = 0. \quad (3.4)$$

1. Calculant  $\tilde{y}_n + g(h(\tilde{y}_n, b^*), \tilde{y}_n, b^*)$  ;

$$\begin{aligned} \tilde{y}_n + g(h(\tilde{y}_n, b^*), \tilde{y}_n, b^*) &= \tilde{y}_n + (d + b^*) (a_1 b^* \tilde{y}_n + a_2 (b^*)^2 + a_3 (\tilde{y}_n)^2 - d\tilde{y}_n)\tilde{y}_n \\ &\quad + b^* \tilde{y}_n + O\left((|\tilde{y}_n| + |b^*|)^3\right) \\ &= \tilde{y}_n - d^2 \tilde{y}_n^2 + b^* \tilde{y}_n + O\left((|\tilde{y}_n| + |b^*|)^3\right). \end{aligned}$$

2. Calculant  $h(\tilde{y}_n + g(h(\tilde{y}_n, b^*), \tilde{y}_n, b^*), \tilde{y}_n, b^*)$  ;

$$\begin{aligned} h(\tilde{y}_n + g(h(\tilde{y}_n, b^*), \tilde{y}_n, b^*), \tilde{y}_n, b^*) &= a_1 b^* (\tilde{y}_n - d^2 \tilde{y}_n^2 + b^* \tilde{y}_n + O\left((|\tilde{y}_n| + |b^*|)^3\right)) + a_2 (b^*)^2 \\ &\quad + a_3 (\tilde{y}_n - d^2 \tilde{y}_n^2 + b^* \tilde{y}_n + O\left((|\tilde{y}_n| + |b^*|)^3\right))^2 + O\left((|\tilde{y}_n| + |b^*|)^3\right). \end{aligned}$$

D'où,

$$h(\tilde{y}_n + g(h(\tilde{y}_n, b^*), \tilde{y}_n, b^*), \tilde{y}_n, b^*) = a_1 b^* \tilde{y}_n + a_2 (b^*)^2 + a_3 \tilde{y}_n^2 + O\left((|\tilde{y}_n| + |b^*|)^2\right). \quad (3.5)$$

3. Calculant  $(1 - r)h(\tilde{y}_n, b^*)$  ;

$$(1 - r)h(\tilde{y}_n, b^*) = (1 - r)a_1 b^* \tilde{y}_n + (1 - r)a_2 (b^*)^2 + (1 - r)a_3 (\tilde{y}_n)^2 + O\left((|\tilde{y}_n| + |b^*|)^2\right). \quad (3.6)$$

4. Calculant  $f(h(\tilde{y}_n, b^*), \tilde{y}_n, b^*)$  ;

$$\begin{aligned} f(h(\tilde{y}_n, b^*), \tilde{y}_n, b^*) &= -r((h(\tilde{y}_n, b^*) - d\tilde{y}_n)^2 + (d - r)(d + b^*)((h(\tilde{y}_n, b^*) - d\tilde{y}_n)\tilde{y}_n \\ &\quad + (d - r)b^* \tilde{y}_n + O\left((|\tilde{y}_n| + |b^*|)^3\right)) \\ &= -r(a_1 b^* \tilde{y}_n + a_2 (b^*)^2 + a_3 (\tilde{y}_n)^2 + O\left((|\tilde{y}_n| + |b^*|)^3\right) - d\tilde{y}_n)^2 \\ &\quad + (d - r)(d + b^*)(a_1 b^* \tilde{y}_n + a_2 (b^*)^2 + a_3 (\tilde{y}_n)^2 + O\left((|\tilde{y}_n| + |b^*|)^3\right)) - d\tilde{y}_n)\tilde{y}_n \\ &\quad + (d - r)b^* \tilde{y}_n + O\left((|\tilde{y}_n| + |b^*|)^3\right) \\ &= -rd^2 \tilde{y}_n^2 - d^2(d - r)\tilde{y}_n^2 + (d - r)b^* \tilde{y}_n + O\left((|\tilde{y}_n| + |b^*|)^3\right), \end{aligned}$$

D'où,

$$f(h(\tilde{y}_n, b^*), \tilde{y}_n, b^*) = -d^3 \tilde{y}_n^2 + (d-r)b^* \tilde{y}_n + O((|\tilde{y}_n| + |b^*|)^2). \quad (3.7)$$

En remplaçant (3.5), (3.6) et (3.7) dans (3.4), on obtient :

$$h(\tilde{y}_n + g(h(\tilde{y}_n, b^*), \tilde{y}_n, b^*), b^*) - (1-r)h(\tilde{y}_n, b^*) - f(h(\tilde{y}_n, b^*), \tilde{y}_n, b^*) = (ra_1 - (d-r))b^* \tilde{y}_n + (ra_2)(b^*)^2 + (ra_3 + d^3)\tilde{y}_n^2 = 0$$

Il en résulte,

$$a_1 = \frac{d-r}{r}, \quad a_2 = 0 \text{ et } a_3 = -\frac{d^3}{r}.$$

L'étude restreinte à  $Mc$  est donnée localement par

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{n+1} &= \tilde{y}_n + g(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n, b^*) \\ &= \tilde{y}_n + g(h(\tilde{y}_n, b^*), \tilde{y}_n, b^*) \\ &= \tilde{y}_n + (d+b^*)(a_1 b^* \tilde{y}_n + a_2 (b^*)^2 + a_3 (\tilde{y}_n)^2) + O((|\tilde{y}_n| + |b^*|)^3) - d\tilde{y}_n \tilde{y}_n + b^* \tilde{y}_n. \end{aligned}$$

D'où,

$$\tilde{y}_{n+1} = (1+b^*) \tilde{y}_n + (d+b^*)(a_1 b^* - d) \tilde{y}_n^2 + O((|\tilde{y}_n| + |b^*|)^3). \quad (3.8)$$

On pose  $\phi(\tilde{y}_n, b^*) = \tilde{y}_{n+1}$ , on a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial y}(0,0) &= 1, \quad \frac{\partial \phi}{\partial b^*}(0,0) = 0, \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(0,0) &= -2d^2, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial b^*}(0,0) = 1, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial b^{*2}}(0,0) = 0. \end{aligned}$$

1. Quand  $b^* < 0$ , on a :

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial y}(0, b^*) \right| = |1+b^*| < 1,$$

alors le point fixe  $y = 0$  du système (3.8) est stable.

2. Quand  $b^* = 0$ , on a :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(0,0) = 1 \text{ et } \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(0,0) = -2d^2 < 0,$$

alors le point fixe  $y = 0$  du système (3.8) est stable.

3. Quand  $b^* > 0$ , on a :

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial y}(0, b^*) \right| = |1+b^*| > 1,$$

alors le point fixe  $y = 0$  du système (3.8) devient instable.

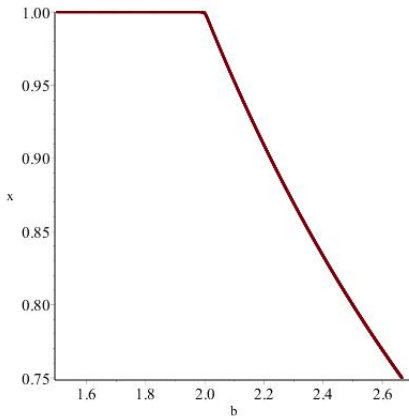
Et comme  $\frac{\partial \phi}{\partial b^*}(0, 0) = 0$  et  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(0, 0) \neq 0$ , en vertu du théorème 2.4 le système (3.1) admet une bifurcation nœud col de type transcritique.

De plus, on a :

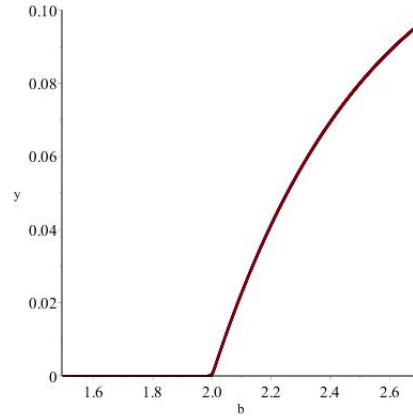
$$\left( \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial b^*} \right)^2 - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial (b^*)^2} \right) (0, 0) = 1 > 0.$$

IL en résulte la bifurcation est super-critique. Autrement dit, quand  $b^* \leq 0$ , le point fixe  $y = 0$  du système (3.8) est stable, et quand  $b^* > 0$  perd sa stabilité et apparaît un autre point fixe stable. On considère l'ensemble  $\Gamma = \{(r, d, b) : d = b > 0, r > 0 \text{ et } r \neq 2\}$ , et on a le résultat suivant :

**Corollaire 3.1** ([19]). *Le système (3.1) subit une bifurcation nœud-col de type transcritique au point  $A(1, 0)$  quand le paramètre  $b$  varié dans  $\Gamma$ .*



(a) Sur le plan  $(b, x)$  quand  $r = 1, d = 2$  et  $b$  varié dans  $[1.5, 2.7]$ .



(b) Sur le plan  $(b, y)$  avec les mêmes paramètres.

FIGURE 3.1 – Diagramme de bifurcation du système (3.1), en partant de point initial  $(1.1, 0.1)$ .

### 3.2.2 Bifurcation de doublement de période

Le point fixe  $A(1, 0)$  du système (3.1) est non hyperbolique quand  $r = 2$ , avec les valeurs propres  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = b - d + 1$ . On suppose que  $b \neq d$  et  $b \neq d - 2$ , et on considère la bifurcation du point fixe  $A(1, 0)$  avec le paramètre  $r$ . Avec le changement de variable  $u_n = x_n - 1, v_n = y_n$  et  $r^* = r - 2$ , on transforme le point fixe  $A(1, 0)$  à l'origine. Et le système (3.1) devient

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -b \\ 0 & 1 + b - d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r^* u_n (u_n + 1) - 2u_n^2 - b u_n v_n \\ b u_n v_n \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

La matrice jacobienne  $\bar{J}$  du système (3.9) au point  $(0, 0)$  est donner par

$$\bar{J} = \begin{pmatrix} -1 & -b \\ 0 & 1 + b - d \end{pmatrix}$$

Pour diagonalisé la matrice  $\bar{J}$  on cherche les vecteurs propres de ses valeurs propres  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = 1 + b - d$ . On suppose que  $b \neq d$  et  $b \neq d - 2$ , alors on a :

$$\begin{aligned} \bar{J}X = -X &\iff \begin{cases} -x - by = -x \\ (1 + b - d)y = -y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

d'où,  $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de  $\lambda_1 = -1$ .

$$\begin{aligned} \bar{J}X = (1 + b - d)X &\iff \begin{cases} -x - by = (1 + b - d)x \\ (1 + b - d)y = (1 + b - d)y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (2 + b - d)x = -by \\ y \in \mathbb{R}, \end{cases} \end{aligned}$$

d'où,  $V_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2+b-d} \\ -\frac{1}{b} \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de  $\lambda_2 = 1 + b - d$ .

On construit la matrice inversible  $T_2 = (U_2, V_2) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2+b-d} \\ 0 & -\frac{1}{b} \end{pmatrix}$ , et on pose :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = T_2 \begin{pmatrix} \tilde{x}_n \\ \tilde{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_n + \frac{1}{2+b-d}\tilde{y}_n \\ -\frac{1}{b}\tilde{y}_n \end{pmatrix},$$

alors le système (3.9) devient :

$$\begin{aligned} T_2 \begin{pmatrix} \tilde{x}_{n+1} \\ \tilde{y}_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & -b \\ 0 & 1 + b - d \end{pmatrix} T_2 \begin{pmatrix} \tilde{x}_n \\ \tilde{y}_n \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} -r^*(\tilde{x}_n + \frac{1}{2+b-d}\tilde{y}_n)(\tilde{x}_n + \frac{1}{2+b-d}\tilde{y}_n + 1) - 2(\tilde{x}_n + \frac{1}{2+b-d}\tilde{y}_n)^2 + \tilde{y}_n(\tilde{x}_n + \frac{1}{2+b-d}\tilde{y}_n) \\ -\tilde{y}_n(\tilde{x}_n + \frac{1}{2+b-d}\tilde{y}_n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En multipliant les deux cotés par  $T_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{2+b-d} \\ 0 & -b \end{pmatrix}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{x}_{n+1} \\ \tilde{y}_{n+1} \end{pmatrix} &= T_2^{-1} \begin{pmatrix} -1 & -b \\ 0 & 1 + b - d \end{pmatrix} T_2 \begin{pmatrix} \tilde{x}_n \\ \tilde{y}_n \end{pmatrix} \\ &+ T_2^{-1} \begin{pmatrix} -r^*(\tilde{x}_n + \frac{1}{2+b-d}\tilde{y}_n)(\tilde{x}_n + \frac{1}{2+b-d}\tilde{y}_n + 1) - 2(\tilde{x}_n + \frac{1}{2+b-d}\tilde{y}_n)^2 + \tilde{y}_n(\tilde{x}_n + \frac{1}{2+b-d}\tilde{y}_n) \\ -\tilde{y}_n(\tilde{x}_n + \frac{1}{2+b-d}\tilde{y}_n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



Après quelques simplification le système (3.9) devient

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_{n+1} \\ \tilde{y}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1+b-d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_n \\ \tilde{y}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n, r^*) \\ g(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n, r^*) \end{pmatrix}$$

où,

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n, r^*) &= \frac{2-d}{2+b-d} \left( \tilde{x}_n + \frac{\tilde{y}_n}{2+b-d} \right) \tilde{y}_n - 2 \left( \tilde{x}_n + \frac{\tilde{y}_n}{2+b-d} \right)^2 - r^* \left( \tilde{x}_n + \frac{\tilde{y}_n}{2+b-d} \right) \\ &\quad \left( 1 + \tilde{x}_n + \frac{\tilde{y}_n}{2+b-d} \right), \\ g(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n, r^*) &= b\tilde{y}_n \left( \tilde{x}_n + \frac{\tilde{y}_n}{2+b-d} \right). \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de la variété centrale, on détermine la stabilité de l'origine pour la valeur  $r^* = 0$ , par l'étude d'un système dynamique de dimension un. Soit la variété centrale suivante

$$Mc = \left\{ (\tilde{x}_n, \tilde{y}_n, r^*) \in \mathbb{R}^3 : \tilde{y}_n = h(\tilde{x}_n, r^*), h(0, 0) = 0, Dh(0, 0) = 0 \right\}.$$

Pour  $\tilde{x}_n$  et  $r^*$  suffisamment petit. On suppose que la fonction  $h$  : qui vérifie les deux hypothèses  $h(0, 0) = 0$  et  $Dh(0, 0) = 0$ , s'écrit sous la forme :

$$h(\tilde{x}_n, r^*) = a_1 r^* \tilde{x}_n + a_2 (r^*)^2 + a_3 (\tilde{x}_n)^2 + O\left((|\tilde{x}_n| + |r^*|)^3\right),$$

qui satisfait,

$$\mathcal{F}(h(\tilde{x}_n, r^*)) = h(-\tilde{x}_n + f(\tilde{x}_n, h(\tilde{x}_n, r^*), r^*)) - (1+b-d)h(\tilde{x}_n, r^*) - g(\tilde{x}_n, h(\tilde{x}_n, r^*), r^*) = 0. \quad (3.10)$$

1. Calculant  $-\tilde{x}_n + f(\tilde{x}_n, h(\tilde{x}_n, r^*), r^*)$ ;

$$\begin{aligned} -\tilde{x}_n + f(\tilde{x}_n, h(\tilde{x}_n, r^*), r^*) &= -\tilde{x}_n + \frac{2-d}{2+b-d} \left( \tilde{x}_n \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_1 r^* \tilde{x}_n + a_2 (r^*)^2 + a_3 (\tilde{x}_n)^2 + O\left((|\tilde{x}_n| + |r^*|)^3\right)}{2+b-d} \right) \left( a_1 r^* \tilde{x}_n + a_2 (r^*)^2 + a_3 (\tilde{x}_n)^2 \right. \\ &\quad \left. + O\left((|\tilde{x}_n| + |r^*|)^3\right) \right) - 2 \left( \tilde{x}_n + \frac{a_1 r^* \tilde{x}_n + a_2 (r^*)^2 + a_3 (\tilde{x}_n)^2 + O\left((|\tilde{x}_n| + |r^*|)^3\right)}{2+b-d} \right)^2 \\ &\quad - r^* \left( \tilde{x}_n + \frac{a_1 r^* \tilde{x}_n + a_2 (r^*)^2 + a_3 (\tilde{x}_n)^2 + O\left((|\tilde{x}_n| + |r^*|)^3\right)}{2+b-d} \right) \left( 1 + \tilde{x}_n \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_1 r^* \tilde{x}_n + a_2 (r^*)^2 + a_3 (\tilde{x}_n)^2 + O\left((|\tilde{x}_n| + |r^*|)^3\right)}{2+b-d} \right) \\ &= -\tilde{x}_n - 2\tilde{x}_n^2 - r^* \tilde{x}_n + O\left((|\tilde{x}_n| + |r^*|)^3\right) \end{aligned}$$

2. Calculant  $h(-\tilde{x}_n + f(\tilde{x}_n, h(\tilde{x}_n, r^*), r^*), r^*)$ ;

$$\begin{aligned} h(-\tilde{x}_n + f(\tilde{x}_n, h(\tilde{x}_n, r^*), r^*), r^*) &= a_1 r^* (-\tilde{x}_n - 2\tilde{x}_n^2 - r^* \tilde{x}_n + O((|\tilde{x}_n| + |r^*|)^3)) + a_2 (r^*)^2 \\ &+ a_3 (-\tilde{x}_n - 2\tilde{x}_n^2 - r^* \tilde{x}_n + O((|\tilde{x}_n| + |r^*|)^3))^2 + O((|\tilde{x}_n| + |r^*|)^3) \end{aligned}$$

d'où,

$$h(-\tilde{x}_n + f(\tilde{x}_n, h(\tilde{x}_n, r^*), r^*), r^*) = -a_1 r^* \tilde{x} + a_2 (r^*)^2 - a_3 \tilde{x}_n^2 + O((|\tilde{x}_n| + |r^*|)^3) \quad (3.11)$$

3. Calculant  $(1 + b - d)h(\tilde{x}_n, r^*)$ ;

$$\begin{aligned} (1 + b - d)h(\tilde{x}_n, r^*) &= a_1 (1 + b - d) r^* \tilde{x}_n + a_2 (1 + b - d) (r^*)^2 \\ &+ a_3 (1 + b - d) (\tilde{x}_n)^2 + O((|\tilde{x}_n| + |r^*|)^3) \end{aligned} \quad (3.12)$$

4. Calculant  $g(\tilde{x}_n, h(\tilde{x}_n, r^*), r^*)$ ;

$$\begin{aligned} g(\tilde{x}_n, h(\tilde{x}_n, r^*), r^*) &= b \left( a_1 r^* \tilde{x}_n + a_2 (r^*)^2 + a_3 (\tilde{x}_n)^2 + O((|\tilde{x}_n| + |r^*|)^3) \right) \\ &\left( \tilde{x}_n + \frac{a_1 r^* \tilde{x}_n + a_2 (r^*)^2 + a_3 (\tilde{x}_n)^2 + O((|\tilde{x}_n| + |r^*|)^3)}{2 + b - d} \right) \end{aligned}$$

d'où,

$$g(\tilde{x}_n, h(\tilde{x}_n, r^*), r^*) = O((|\tilde{x}_n| + |r^*|)^3) \quad (3.13)$$

En remplaçant (3.11), (3.12) et (3.13) dans (3.10), on obtient :

$$\begin{aligned} h(-\tilde{x}_n + f(\tilde{x}_n, h(\tilde{x}_n, r^*), r^*), r^*) - (1 + b - d)h(\tilde{x}_n, r^*) - g(\tilde{x}_n, h(\tilde{x}_n, r^*), r^*) &= -a_1 (b - d) r^* \tilde{x}_n \\ &- a_2 (b - d) (r^*)^2 - a_3 (b - d) \tilde{x}_n^2 = 0. \end{aligned}$$

Il en résulte,

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0 \implies h(\tilde{x}_n, r^*) = O((|\tilde{x}_n| + |r^*|)^3).$$

L'étude restreinte à  $Mc$  est donnée localement par,

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{n+1} &= -\tilde{x}_n + f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n, r^*) \\ &= -\tilde{x}_n + f(\tilde{x}_n, h(\tilde{x}_n, r^*), r^*) \\ &= -\tilde{y}_n + f(\tilde{x}_n, O((|\tilde{x}_n| + |r^*|)^3), r^*). \end{aligned}$$

D'où,

$$\tilde{x}_{n+1} = -\tilde{x}_n - r^* \tilde{x}_n (1 + \tilde{x}_n) - 2(\tilde{x}_n)^2 + O((|\tilde{x}_n| + |r^*|)^2). \quad (3.14)$$

On pose  $\varphi(\tilde{x}_n, r^*) = \tilde{x}_{n+1}$ , on a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{x}}(0, r^*) &= -1 - r^*, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tilde{x}^2}(0, r^*) = -2(r^* + 2), \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \tilde{x}^3}(0, r^*) = 0 \\ \alpha &= \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tilde{x}^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r^*} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tilde{x} \partial r^*} \right) (0, 0) = -2, \quad \beta = \left( 2 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \tilde{x}^3} + 3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tilde{x}^2} \right) (0, 0) = 48. \end{aligned}$$

1. Quand  $r^* < 0$ , on a :

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{x}}(0, r^*) \right| = |-1 - r^*| < 1,$$

alors le point fixe  $x = 0$  du système (3.14) est stable.

2. Quand  $r^* = 0$ , on a :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{x}}(0, 0) = -1 \text{ et } S\varphi(0, 0) = -\frac{\partial^3 \varphi}{\partial \tilde{x}^3}(0, 0) - \frac{3}{2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tilde{x}^2}(0, 0) \right)^2 = -6 < 0$$

alors le point fixe  $x = 0$  du système (3.14) est stable.

3. Quand  $r^* > 0$ , on a :

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{x}}(0, r^*) \right| = |-1 - r^*| > 1,$$

le point fixe  $x = 0$  du système (3.14) devient instable.

Comme  $\alpha \neq 0$  et  $\beta \neq 0$ , en vertu du théorème 2.4 le système (3.1) admet une bifurcation de doublement de période. De plus, on a :  $\alpha\beta < 0$ , alors la bifurcation est super-critique. Autrement dit, quand  $r \leq 2$ , le point fixe  $x = 0$  est stable, et quand  $r > 2$  il perd sa stabilité, et apparaît un cycle d'ordre 2 attractif.

D'où, le résultat suivant

**Théorème 3.1** ([19]). *Si  $d \neq b$  et  $b \neq d - 2$ , le système (3.1) subit une bifurcation de doublement de période au point  $A(1, 0)$ , quand le paramètre  $r$  varié au voisinage de  $r = 2$ . De plus, quand  $r > 2$  il apparait un cycle d'ordre 2 attractif.*

S'il existe un point initial du système (3.1) pour que  $bx_N - d = 0$  après une  $N$ -ème itéré, alors le système (3.1) devient

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + rx_n(1 - x_n) \\ y_{n+1} &= 0, \end{aligned}$$

quand  $n > N$ , sera l'extinction de la population de prédateur.

Le diagramme de bifurcation de ce système est similaire à celui de la fonction logistique, et son diagramme de bifurcation est illustrer précédemment, voir la figure 2.1.

### 3.2.3 Bifurcation de Neimark-Sacker

D'après le théorème 3.4, le système (3.1) possède un point fixe  $B(x^*, y^*)$  avec  $x^* = \frac{d}{b}$  et  $y^* = \frac{r(b-d)}{b^2}$ , qui a deux valeur complexes de module égale à 1, quand  $rd - 4b(b-d) < 0$  et  $b = d+1$ . On définit l'ensemble  $\Sigma = \{(r, b, d) : rd - 4b(b-d) < 0 \text{ et } b = d+1\}$ .

Si  $(r, b_0, d) \in \Sigma$ , alors le système (3.1) possède un point fixe  $B(x^*, y^*)$ . On pose le changement de variable  $u_n = x_n - x^*$  et  $v_n = y_n - y^*$ , qui transforme le point fixe  $B(x^*, y^*)$  à l'origine. Et le système (3.1) devient :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_n + x^* + r(u_n + x^*)(1 - (u_n + x^*)) - b_n(u_n + x^*)(v_n + y^*) \\ v_n + y^* + (b_0(u_n + x^*) - d)(v_n + y^*) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left(1 + r - 2r\frac{d}{b_0} - b_0\frac{r(b_0-d)}{b_0^2}\right)u_n - b_0\frac{d}{b_0}v_n - ru_n^2 - b_0u_nv_n \\ b_0\frac{r(b_0-d)}{b_0^2}u_n + v_n + b_0u_nv_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où,

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{rd}{b_0}\right)u_n - dv_n - ru_n^2 - b_0u_nv_n \\ \left(r - \frac{rd}{b_0}\right)u_n + v_n + b_0u_nv_n \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

La matrice jacobienne en l'origine du système (3.15) est donné par :

$$J_{b_0} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{rd}{b_0} & -d \\ r - \frac{rd}{b_0} & 1 \end{pmatrix},$$

et son polynôme caractéristique est égale à :

$$P_{b_0}(\lambda) = \lambda^2 + \left(\frac{rd}{b_0} - 2\right)\lambda + 1 + rd - \frac{rd}{b_0} - \frac{rd^2}{b_0}.$$

Soit  $R(b_0) := |\lambda_{1,2}|$ , tel que  $\lambda_{1,2}$  sont les racines du polynôme caractéristique  $P_{b_0}$ . On a,

$$R(b_0)^2 = \lambda_1\lambda_2 = 1 + rd - \frac{rd}{b_0} - \frac{rd^2}{b_0},$$

par suite,

$$R(b_0) = \sqrt{1 + rd - \frac{rd}{b_0} - \frac{rd^2}{b_0}},$$

en dérivant  $R$  par rapport à  $b_0$ , on obtient :

$$R'(b_0) = \frac{\frac{rd+rd^2}{b_0^2}}{2\sqrt{1 + rd - \frac{rd}{b_0} - \frac{rd^2}{b_0}}} > 0, \forall (r, b_0, d) \in \mathbb{R}_+^3.$$

Il en résulte,

$$R'(b_0) \neq 0, \forall (r, b_0, d) \in \mathbb{R}_+^*. \quad (3.16)$$

Ce qui vérifie la deuxième condition du théorème 2.1.

En remplaçant  $b_0 = d + 1$  dans la matrice  $J_{b_0}$  on obtient :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1-rd+d}{d+1} & -d \\ \frac{r}{d+1} & 1 \end{pmatrix},$$

et son polynôme caractéristique est égale à,

$$P(\lambda) = \lambda^2 + p(b_0)\lambda + q(b_0), \text{ où } p(b_0) = \frac{rd - 2d - 2}{d + 1}, \quad q(b_0) = 1.$$

Les valeurs propres du système (3.15) sont deux nombres complexes de module égale à un, donnés par :

$$\lambda_{1,2} = \frac{-p(b_0)}{2} \pm \frac{i\sqrt{4q(b_0) - p(b_0)^2}}{2}.$$

D'après le théorème 2.1, il faut vérifié que  $(\lambda_{1,2})^m \neq 1, m = 1 \dots 4$ .

Comme le discriminant du polynôme caractéristique  $P$  ( $\Delta = p(b_0)^2 - 4q(b_0)$ ) est négatif, donc  $\lambda_{1,2} \neq 1$  et  $\lambda_{1,2}^2 \neq 1$ . Il reste à monter  $\lambda_{1,2}^3 \neq 1$  et  $\lambda_{1,2}^4 \neq 1$ . Comme  $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}, \forall (r, b_0, d) \in \Sigma$ , alors on a :

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2}^3 = 1 = e^{2\pi ki}, k \in \mathbb{Z} &\iff \lambda_{1,2} = e^{\pm \frac{2\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\iff \frac{-p(b_0)}{2} \pm \frac{i\sqrt{4q(b_0) - p(b_0)^2}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\iff p(b_0) = 1 \\ &\iff rd = 3(d + 1). \end{aligned}$$

De même on a,

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2}^4 = 1 = e^{2\pi ki}, k \in \mathbb{Z} &\iff \lambda_{1,2} = e^{\pm \frac{\pi}{2}i} = \pm i \\ &\iff p(b_0) = 0 \\ &\iff rd = 2(d + 1). \end{aligned}$$

Il en résulte, on obtient les conditions (3.17), qui vérifie la troisième condition du théorème 2.1.

$$rd \neq 2(d + 1) \text{ et } rd \neq 3(d + 1). \quad (3.17)$$

Vérifions maintenant la quatrième condition du théorème 2.1.

Soit la matrice inversible  $T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix}$ , tel que  $\alpha_1 = \frac{-p(b_0)}{2}$  et  $\beta_1 = \frac{\sqrt{4q(b_0) - p(b_0)^2}}{2}$ , qui vérifie :

$$T_3^{-1} J_{b_0} T_3 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

On considère la transformation suivante :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = T_3 \begin{pmatrix} \tilde{x}_{n+1} \\ \tilde{y}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{y}_{n+1} \\ \beta_1 \tilde{x}_{n+1} + \alpha_1 \tilde{y}_{n+1} \end{pmatrix}$$

qui transforme le système (3.15)

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{rd}{b_0}\right) u_n - d v_n - r u_n^2 - b_0 u_n v_n \\ \left(r - \frac{rd}{b_0}\right) u_n + v_n + b_0 u_n v_n \end{pmatrix} = J_{b_0} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r u_n^2 - b_0 u_n v_n \\ b_0 u_n v_n \end{pmatrix}$$

à

$$T_3 \begin{pmatrix} \tilde{x}_{n+1} \\ \tilde{y}_{n+1} \end{pmatrix} = J_{b_0} T_3 \begin{pmatrix} \tilde{x}_n \\ \tilde{y}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r \tilde{y}_n^2 - b_0 \tilde{y}_n (\beta_1 \tilde{x}_n + \alpha_1 \tilde{y}_n) \\ b_0 \tilde{y}_n (\beta_1 \tilde{x}_n + \alpha_1 \tilde{y}_n) \end{pmatrix}.$$

En multipliant les deux cotés par  $T_3^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_1}{\beta_1} & \frac{1}{\beta_1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , on obtient :

$$T_3^{-1} T_3 \begin{pmatrix} \tilde{x}_{n+1} \\ \tilde{y}_{n+1} \end{pmatrix} = T_3^{-1} J_{b_0} T_3 \begin{pmatrix} \tilde{x}_n \\ \tilde{y}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_1}{\beta_1} & \frac{1}{\beta_1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r \tilde{y}_n^2 - b_0 \tilde{y}_n (\beta_1 \tilde{x}_n + \alpha_1 \tilde{y}_n) \\ b_0 \tilde{y}_n (\beta_1 \tilde{x}_n + \alpha_1 \tilde{y}_n) \end{pmatrix}.$$

Après quelques simplifications, on aura :

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_{n+1} \\ \tilde{y}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_n \\ \tilde{y}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) \\ g(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) \end{pmatrix},$$

où,

$$f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \frac{r\alpha_1}{\beta_1} \tilde{y}_n^2 + \frac{b_0(1+\alpha_1)}{\beta_1} \tilde{y}_n (\beta_1 \tilde{x}_n + \alpha_1 \tilde{y}_n) \text{ et } g(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = -r \tilde{y}_n^2 - b_0 \tilde{y}_n (\beta_1 \tilde{x}_n + \alpha_1 \tilde{y}_n).$$

D'autre part, on calcul le nombre de Lyapunov :

$$a = -\operatorname{Re} \left[ \frac{(1-2\bar{\lambda})\bar{\lambda}^2}{1-\lambda} \xi_{11} \xi_{20} \right] - \frac{1}{2} \|\xi_{11}\|^2 - \|\xi_{02}\|^2 + \operatorname{Re}(\bar{\lambda} \xi_{21}),$$

où,

$$\begin{aligned}\xi_{20} &= \frac{1}{8} \left[ \widetilde{f_{xx}} - \widetilde{f_{yy}} + 2\widetilde{g_{xy}} + i \left( \widetilde{g_{xx}} - \widetilde{g_{yy}} - 2\widetilde{f_{xy}} \right) \right], \\ \xi_{11} &= \frac{1}{4} \left[ \widetilde{f_{xx}} + \widetilde{f_{yy}} + i \left( \widetilde{g_{xx}} + \widetilde{g_{yy}} \right) \right], \\ \xi_{02} &= \frac{1}{8} \left[ \widetilde{f_{xx}} - \widetilde{f_{yy}} - 2\widetilde{g_{xy}} + i \left( \widetilde{g_{xx}} - \widetilde{g_{yy}} + 2\widetilde{f_{xy}} \right) \right], \\ \xi_{21} &= \frac{1}{16} \left[ \widetilde{f_{xxx}} + \widetilde{f_{xyy}} + \widetilde{g_{xxy}} + \widetilde{g_{yyy}} + i \left( \widetilde{g_{xxx}} + \widetilde{g_{xyy}} - \widetilde{f_{xxy}} - \widetilde{f_{yyy}} \right) \right],\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\widetilde{f_{xx}} &= 0, & \widetilde{f_{yy}} &= \frac{2\alpha_1}{\beta_1} (r + b_0\alpha_1 + b_0), \\ \widetilde{f_{xy}} &= b_0\alpha_1 + b_0, & \widetilde{f_{xxx}} &= \widetilde{f_{yyy}} = \widetilde{f_{xyy}} = \widetilde{f_{xxy}} = 0, \\ \widetilde{g_{xx}} &= 0, & \widetilde{g_{yy}} &= -2(r + b_0\alpha_1), \\ \widetilde{g_{xy}} &= -b_0\beta_1, & \widetilde{g_{xxx}} &= \widetilde{g_{yyy}} = \widetilde{g_{xyy}} = \widetilde{g_{xxy}} = 0.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\xi_{20} &= \frac{1}{8} \left[ -\frac{2\alpha_1}{\beta_1} (r + b_0\alpha_1 + b_0) - 2b_0\beta_1 + i2(r - b_0) \right], \\ \xi_{11} &= \frac{1}{4} \left[ \frac{2\alpha_1}{\beta_1} (r + b_0\alpha_1 + b_0) - i2(r + b_0\alpha_1) \right], \\ \xi_{02} &= \frac{1}{8} \left[ -\frac{2\alpha_1}{\beta_1} (r + b_0\alpha_1 + b_0) + 2b_0\beta_1 + i2(r + 2b_0\alpha_1 + b_0) \right], \\ \xi_{21} &= 0.\end{aligned}$$

Après les calculs, on obtient :

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{16(1 - \alpha_1)\beta_1^2} \left[ \alpha_1^2 (b_0 + b_0\alpha_1 + r)^2 - (b_0^2\alpha_1^2 - b_0r + 2b_0r\alpha_1 + r^2) \beta_1^2 \right] \\ &\quad \left[ (\alpha_1 - 1)(2\alpha_1 - 1)\alpha_1^2 - (1 - 9\alpha_1 + 12\alpha_1^2)\beta_1^2 + 2\beta_1^4 \right] \\ &\quad - \frac{1}{16(1 - a)} \left[ \alpha_1 (b_0 + b_0\alpha_1 + r) (b_0\alpha_1 - b_0 + 2r) - b_0 (b_0\alpha_1 + r) \beta_1^2 \right] \\ &\quad \left[ 3\beta_1^2 + (2 - 9\alpha_1 + 8\alpha_1^2 - 8\beta_1^2)\alpha_1 \right] - \frac{1}{16} \left[ (b_0 + 2b_0\alpha_1 + r)^2 + \left( \frac{(b_0 + b_0\alpha_1 + r)\alpha_1}{\beta_1} + b_0\beta_1 \right)^2 \right] \\ &\quad - \frac{1}{8} \left[ (b_0 + r)^2 + \frac{\alpha_1^2 (b_0 + b_0\alpha_1 + r)^2}{\beta_1^2} \right].\end{aligned}$$

Ce qui nous donne le résultat suivant

**Théorème 3.2** ([19]). *Si  $(r, b, d) \in \Sigma$ , et les conditions (3.17) sont satisfait et  $a \neq 0$ , alors le système (3.1) a une bifurcation de Neimark-Sacker en point  $B(x^*, y^*)$  quand  $b$  varier dans  $\Sigma$ . De plus, si  $a < 0$  (respectivement  $a > 0$ ) la bifurcation est super critique (respectivement sous critique).*

### 3.2.4 Courbes critiques

Le système (3.1) s'écrit sous la forme :  $(x_{n+1}, y_{n+1}) = F(x_n, y_n)$ , où :

$$F(x, y) = \left( x + rx(1 - x) - bxy, y + (bx - d)y \right).$$

La matrice jacobienne de  $F$  en tout point est donnée par

$$J_F(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + r(1 - 2x) - by & -bx \\ by & 1 - d + bx \end{pmatrix}$$

#### Proposition 3.5.

1. **Si  $d \neq 1$** , l'application non inversible  $F$  est de type  $Z_1 < Z_3$ , tel que :

$$LC_{-1} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\frac{2r}{1-d}x^2 + \left( \frac{1+r}{1-d} - \frac{2r}{b} \right)x + \frac{1+r}{b} \right\},$$

et

$$LC = \left\{ \left( \begin{array}{l} -b\frac{2r}{1-d}t^3 + \left( -b\frac{1+r}{1-d} + 2r + rb \right)t^2 \\ b\frac{2r}{1-d}t^3 + b\frac{1+r}{1-d}t^2 + \left( 2(r+1) - (1-d)\frac{2r}{b} \right)t + \frac{(1+r)(1-d)}{b} \end{array} \right)^T, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= L \cup L'.$$

Tel que  $LC$  possède un point cuspidal  $C$  créant un cap dans  $Z_3$  pénétrant dans  $Z_1$ .

$$\{C\} = L \cap L'.$$

Voir la figure 3.2a

2. **Si  $d = 1$** , l'application non inversible  $F$  est de type  $Z_0 - Z_2$ , tel que :

$$LC_{-1} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ ou } x = \frac{1+r}{2r} \right\},$$

et

$$LC = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x + \frac{r^2 + 2r + 1}{4r} \right\}.$$

Voir la figure 3.2b



**Démonstration.** La courbe  $LC_{-1}$  est donné par

$$LC_{-1} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \det(J_F(x, y)) = 0 \right\}.$$

On a,

$$\begin{aligned} \det(J_F(x, y)) = 0 &\iff (1 + r - 2rx - by)(1 - d + bx) + b^2xy = 0 \\ &\iff (1 + r)(1 - d) + (1 + r)bx - 2r(1 - d)x - 2rbx^2 - (1 - d)by = 0 \\ &\iff (1 - d)by = -2rbx^2 + ((1 + r)b - 2r(1 - d))x + (1 + r)(1 - d). \end{aligned}$$

On distingue deux cas possibles.

1. **Le cas**  $d \neq 1$

$$LC_{-1} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\frac{2r}{1-d}x^2 + \left(\frac{1+r}{1-d} - \frac{2r}{b}\right)x + \frac{1+r}{b} \right\}.$$

Par application de  $LC_{-1}$  par  $F$  ( $LC = F(LC_{-1})$ ), on obtient la représentation paramétrique de  $LC$  suivante :

$$\begin{aligned} LC &= \left\{ F \left( \left( t, \frac{2r}{1-d}x^2 + \left(\frac{1+r}{1-d} - \frac{2r}{b}\right)x + \frac{1+r}{b} \right), t \in \mathbb{R} \right) \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} t + rt(1-t) - bt \left( \frac{2r}{1-d}t^2 + \left(\frac{1+r}{1-d} - \frac{2r}{b}\right)t + \frac{1+r}{b} \right) \\ (bt + 1 - d) \left( \frac{2r}{1-d}t^2 + \left(\frac{1+r}{1-d} - \frac{2r}{b}\right)t + \frac{1+r}{b} \right) \end{pmatrix}^T, t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -b\frac{2r}{1-d}t^3 + \left(-b\frac{1+r}{1-d} + 2r + rb\right)t^2 \\ b\frac{2r}{1-d}t^3 + b\frac{1+r}{1-d}t^2 + \left(2(r+1) - (1-d)\frac{2r}{b}\right)t + \frac{(1+r)(1-d)}{b} \end{pmatrix}^T, t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= L \cup L'. \end{aligned}$$

La courbe  $LC$  est formée de deux courbes  $L$  et  $L'$  divisant le plan  $\mathbb{R}^2$  en deux régions. Une région  $Z_1$  avec un seul antécédent de rang un, et une deuxième régions  $Z_3$  pour laquelle, tout point possède trois antécédents distinctes de rang un.

2. **Le cas**  $d = 1$  :

$$\begin{aligned} LC_{-1} &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2rbx^2 + (1+r)bx = 0 \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ ou } x = \frac{1+r}{2r} \right\}. \end{aligned}$$

Donc la courbe  $LC_{-1}$  constitue de deux branches  $L_{-1}$  et  $L'_{-1}$ , où :

$$L_{-1} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \right\} \text{ et } L'_{-1} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{1+r}{2r} \right\}.$$

Mais comme  $F(L_{-1}) = F(0, t) = (0, 0)$ , la courbe  $LC = F(LC_{-1})$  constitue d'une seule branche  $LC = F(L'_{-1})$ .

$$LC = \left\{ F \left( \frac{1+r}{2r}, t \right), t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1+r}{2r} + r \frac{1+r}{2r} \left( 1 - \frac{1+r}{2r} \right) - b \frac{1+r}{2r} t \\ t + \left( b \frac{1+r}{2r} - 1 \right) t \end{pmatrix}^T, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{r^2 + 2r + 1}{4r} - \frac{1+r}{2r} bt \\ \frac{1+r}{2r} bt \end{pmatrix}^T, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

On pose  $x = \frac{r^2 + 2r + 1}{4r} - \frac{1+r}{2r} bt$ , on obtient :

$$LC = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x + \frac{r^2 + 2r + 1}{4r} \right\}.$$

La courbe  $LC$  divise le plan  $\mathbb{R}^2$  en deux régions. Une région  $Z_0$  avec aucun antécédent de rang un, et une deuxième régions  $Z_2$  pour laquelle, tout point possède deux antécédents distinctes de rang un.

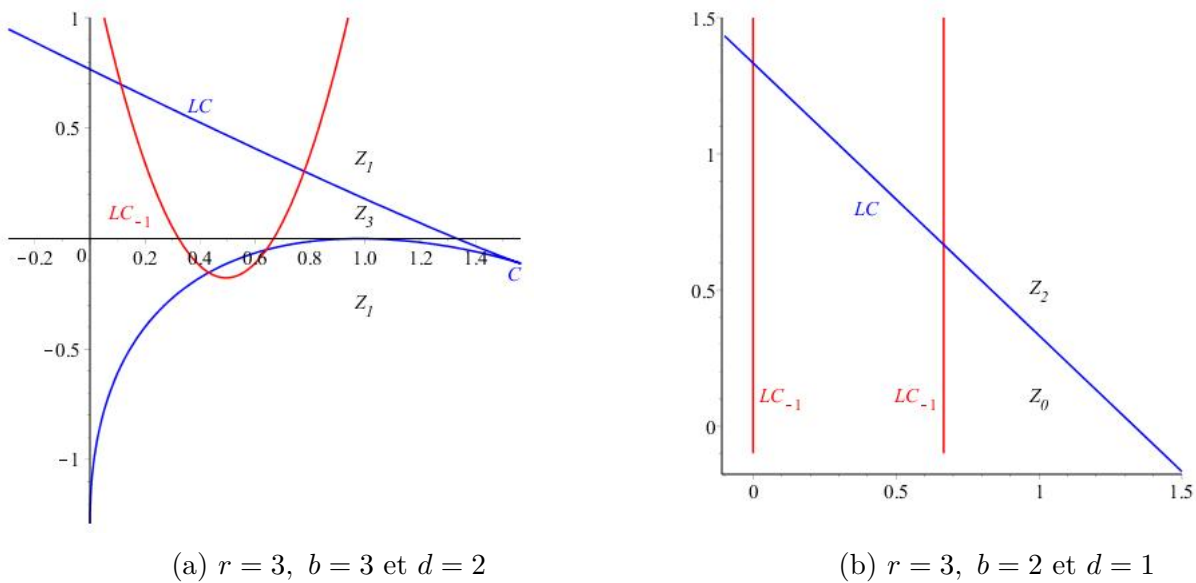
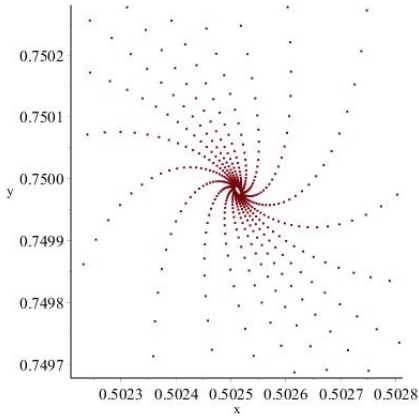


FIGURE 3.2 – Les courbes critiques de  $F$ .

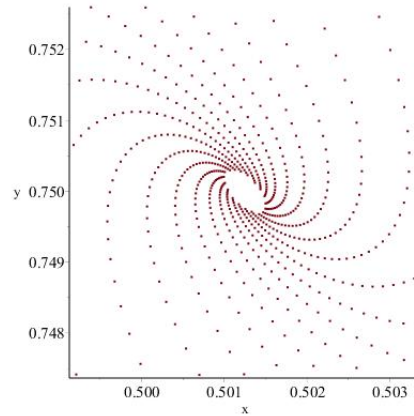
### 3.3 Simulations numériques

#### 3.3.1 Bifurcation de Neimark-Sacker

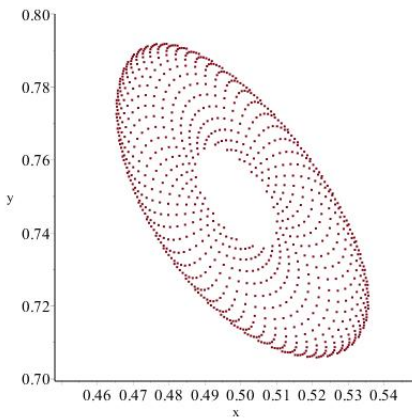
Le portrait de phase du système (3.1) présenté sur la figure 3.3 pour  $r = 3$  et  $d = 1$ . Le point fixe  $B(\frac{1}{b}, \frac{3(b-1)}{b^2})$  est stable pour  $\frac{9}{7} < b < 2$ , et perd sa stabilité pour  $b = 2$  et apparait une courbe invariante attractive pour  $b > 2$  puisque  $a < 0$  d'après le théorème 3.2.



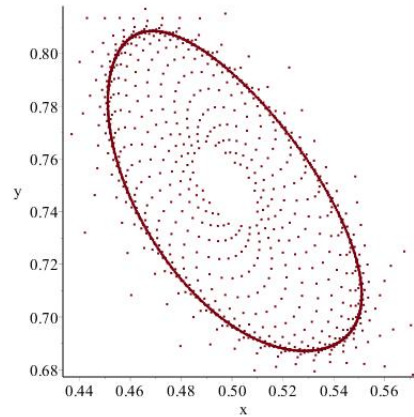
(a)  $b = 1.99$ , le point initial  $X_0 = (0.51, 0.74)$ .



(b)  $b = 1.995$ , le point initial  $X_0 = (0.51, 0.74)$ .



(c)  $b = 2.005$ , le point initial  $X_0 = (0.51, 0.74)$ .



(d)  $b = 2.01$ , les points initiales  $X_0 = (0.51, 0.74)$  et  $Y_0 = (0.51, 0.65)$ .

FIGURE 3.3 – Portrait de phase du système (3.1) pour le paramètre  $b$ ,  $r = 3, d = 1$ .

**Remarque 3.1.** D'après le théorème 3.2, si les conditions (3.17) ne sont pas satisfait, le système (3.1) n'aura pas de bifurcation de Neimark-Sacker en point  $B(x^*, y^*)$ , dans ce qui suit on va présenté une simulation numérique pour le système (3.1) quand  $b$  varié dans  $\Sigma$ , et  $rd \neq 2(d+1), rd \neq 3(d+1)$ .

**Simulation numérique pour  $r = 6$ ,  $d = 1$**

Sur la figure 3.4 on présente le portrait de phase du système (3.1) pour  $r = 6$  et  $d = 1$ . Le point fixe est stable pour  $b = 1.99$  jusqu'à  $b = 2$ , après il n'apparaît pas de courbe invariante.

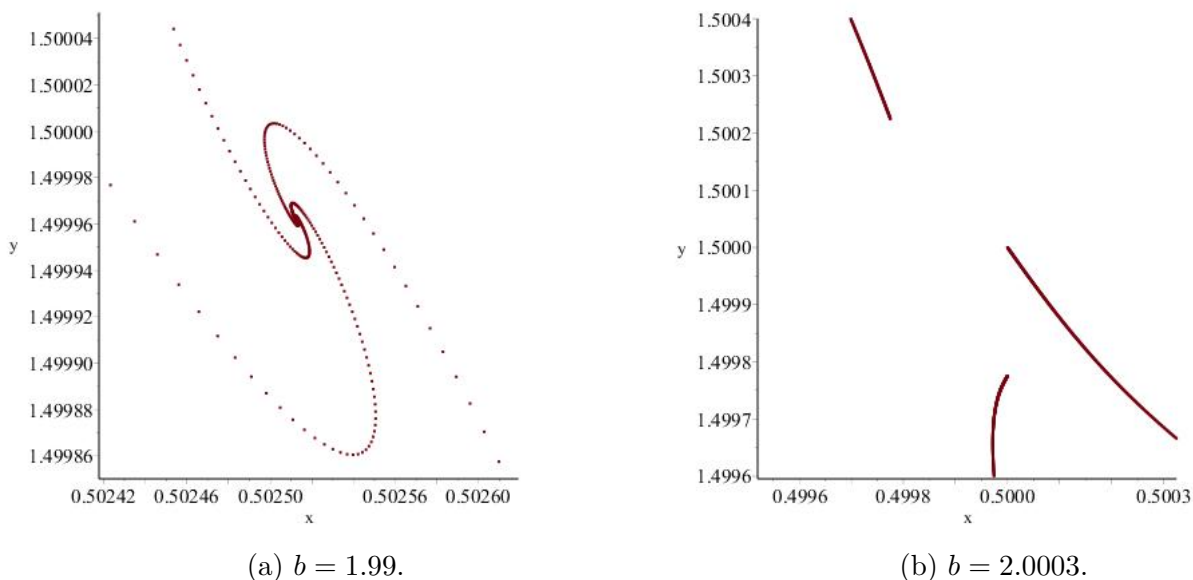


FIGURE 3.4 – Portrait de phase du système (3.1),  $r = 6$ ,  $d = 1$ , le point initial  $X_0 = (0.5, 1.5)$ .

**3.3.2 Bifurcation d'une courbe invariante fermée**

Maintenant, on donnera quelques simulations numériques pour le système (3.1) dans le but d'appuyer nos résultats théoriques. En fixant  $r = 2$ ,  $d = 3$  et en faisant varier le paramètre  $b$  de la valeur 3.99 à la valeur 4.52, nous avons observé les situations suivantes que nous avons illustré par les figures ci-dessous. La courbe  $LC_{-1}$  est en rouge et la courbe  $LC$  en bleu, en partant de point initial  $X_0 = (0.7, 0.012)$ .

1. Pour  $b = 3.99$ , on a le point fixe  $B(x^*, y^*)$  est un foyer stable, voir la figure 3.5a
2. Pour  $4 \leq b < 4.127$ , on a une courbe invariante fermée née à partir de la déstabilisation du point fixe  $B(x^*, y^*)$  sous la bifurcation de Neimark-Sacker, voir les figures 3.5b et 3.5c.
3. Pour  $b = 4.127$ , la courbe invariante fermée entre en contact avec la courbe critique  $LC_{-1}$ , voir la figure 3.5d
4. Pour  $4.127 < b < 4.32$ , la courbe invariante fermée coupe  $LC_{-1}$  en deux points, et cette bifurcation crée des oscillations de la courbe, voir les figures 3.5e, 3.5f et 3.5g.

5. Pour  $4.32 \leq b \leq 4.52$ , l'accroissement du nombre d'auto-intersections, l'apparition des boucles mènent vers la construction d'un attracteur chaotique, voir les figures 3.5h, 3.5i, 3.6a, 3.6b et 3.6c.

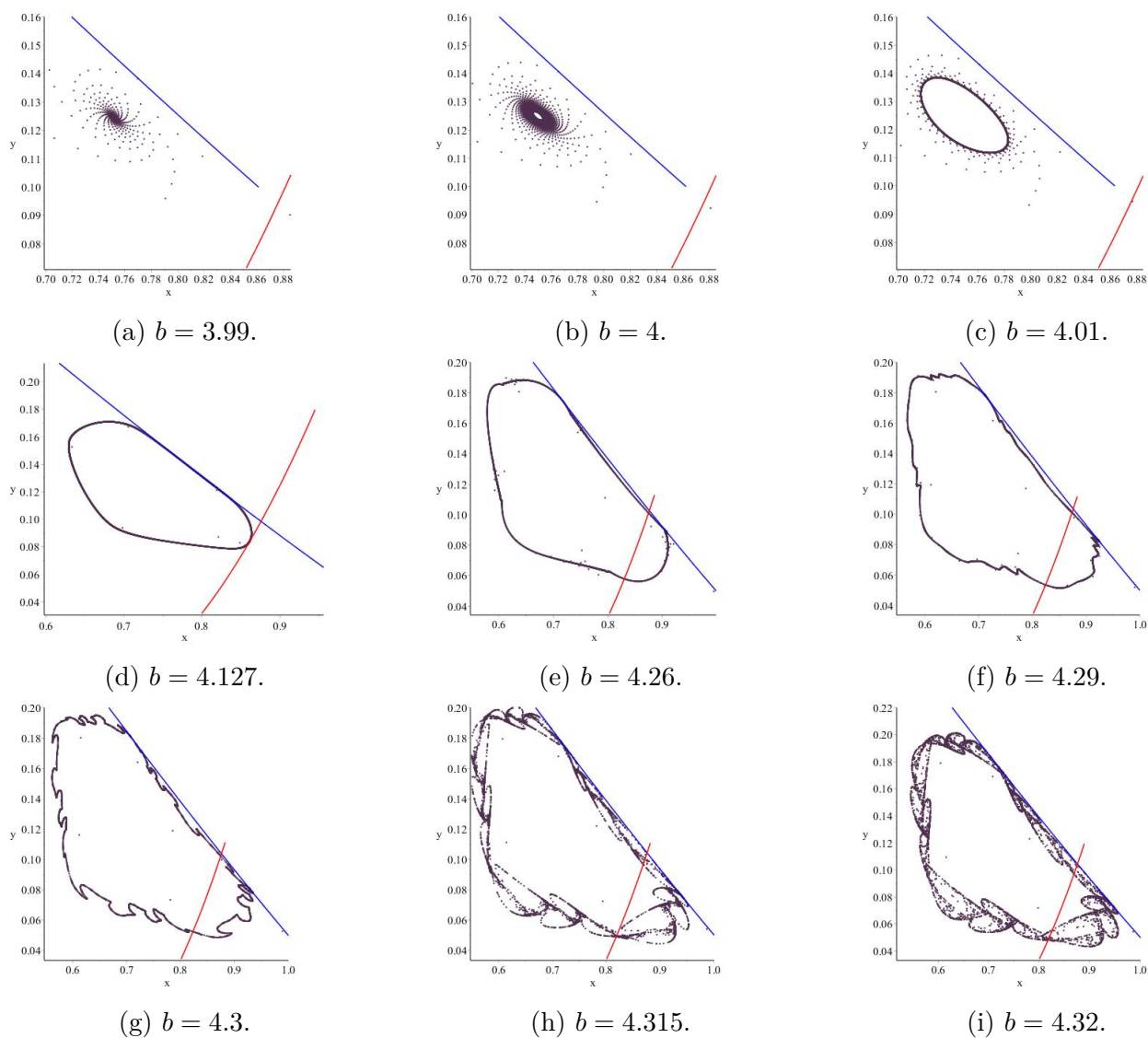


FIGURE 3.5 – Portrait de phase du système (3.1).

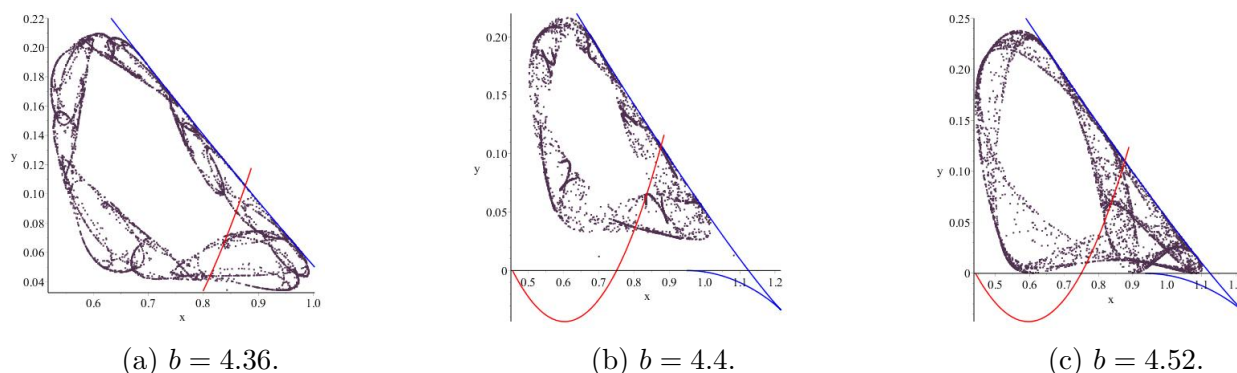


FIGURE 3.6 – Portrait de phase du système (3.1).

### 3.3.3 Bifurcation de contact de l'attracteur avec son bassin d'attraction

On va présenter une simulation numérique concernant les bifurcations de contact. En fixant  $r = 2$ ,  $d = 3$  et en faisant varier le paramètre  $b$  de la valeur 4.5 à la valeur 4.53, nous avons observé les situations suivantes que nous avons illustré par les figures ci-dessous.

1. Pour  $b = 4.5$ , on a un attracteur étrange avec son bassin d'attraction, voir la figure 3.7a.
2. Sur la figure 3.7b, un zoom sur l'attracteur et son bassin d'attraction immédiat.
3. Pour  $b = 4.52$ , on a une bifurcation de contact entre la frontière de l'attracteur et la frontière de son bassin d'attraction immédiat, voir la figure 3.7c.
4. Pour  $b = 4.53$ , la bifurcation de contact précédente conduit à la disparition de l'attracteur étrange, voir la figure 3.7d

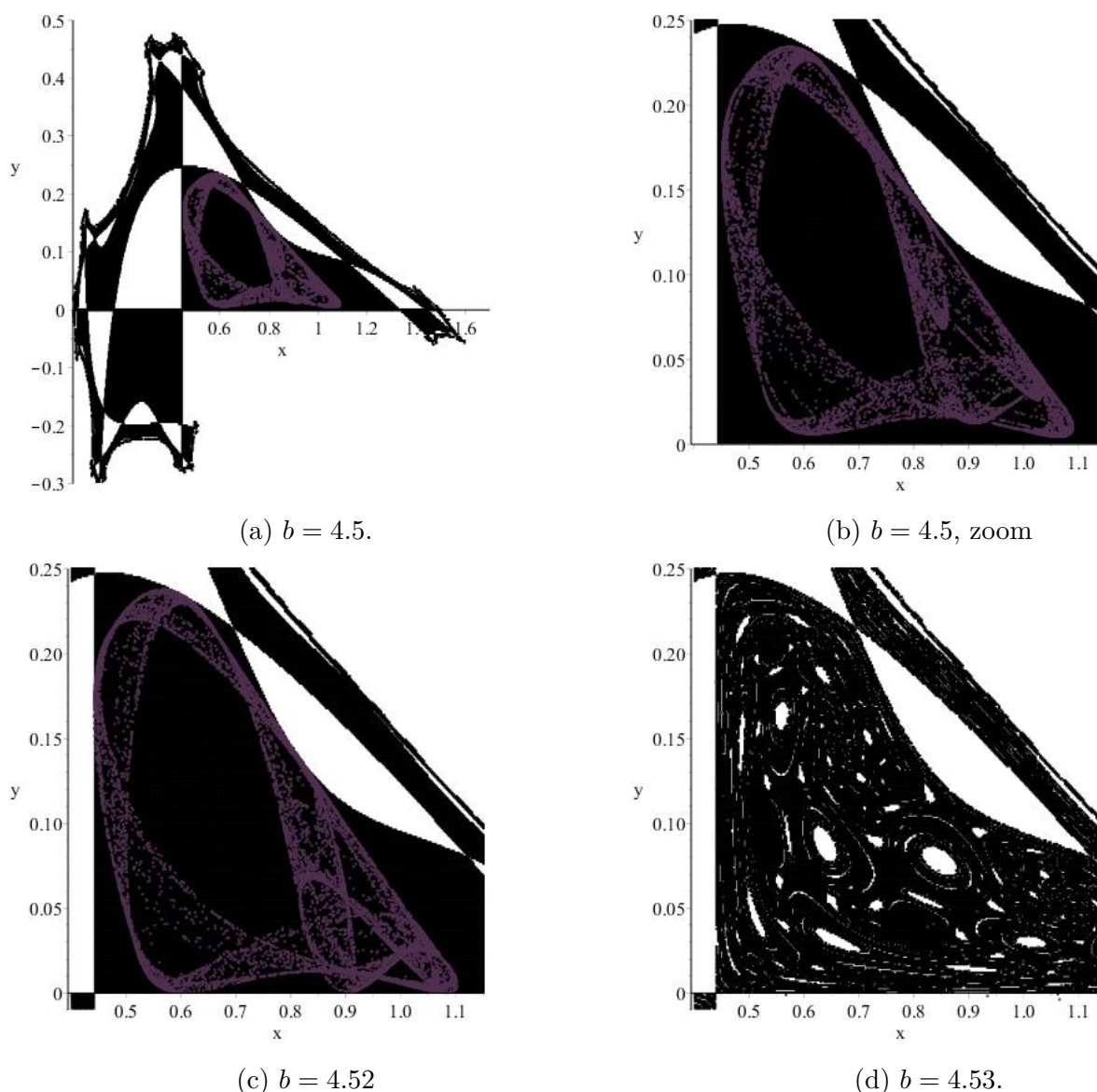


FIGURE 3.7 – Le bassin d’attraction et l’attracteur du système (3.1)

### 3.3.4 Simulation numérique pour $r = 3$ , $d = 2$

Sous ces valeurs particulières des paramètres  $r = 3$ ,  $d = 2$  et  $b = 3$ , les conditions (3.17) du théorème 3.2 ne sont pas satisfaites. Maintenant, on va présenter une simulation numérique illustre la bifurcation de Neimark-Sacker d’un cycle foyer d’ordre quatre, et la bifurcation de courbe invariante. En fixant  $r = 3$  et  $d = 2$ , en faisant varier le paramètre  $b$  de la valeur 2.99 à la valeur 3.334, nous avons observé les situations suivantes que nous avons illustré par les figures ci-dessous.



en partant de point initial  $X_0 = (0.66, 0.33)$ .

1. Pour  $b = 2.99$ , on a le point fixe  $B(x^*, y^*)$  est un foyer stable, voir la figure 3.8a.
2. Pour  $2.99 < b < 3.19$ , le foyer se déstabilise et apparait un attracteur cyclique stable d'ordre quatre, voir les 3.8b et 3.8c.
3. Pour  $b = 3.19$ , l'attracteur est un cycle d'ordre quatre de type foyer, voir la figure 3.9a et le zoom sur la figure 3.9b.
4. Pour  $3.19 < b < 3.2$ , on a un cycle stable de quatre courbes invariantes fermées née a partir de la déstabilisation du cycle précédent, sous la bifurcation de Neimark-Sacker, voir la figure 3.9c et le zoom sur la figure 3.9d.
5. Pour  $b = 3.2$ , le cycle entre en contact avec la courbe critique  $LC_{-1}$ , voir la figure 3.9e.
6. Pour  $2.2 < b \leq 3.33$ , l'accroissement du nombre d'auto-intersections, l'apparition des boucles mènent vers la construction d'un attracteur chaotique, voir les figures 3.9f, 3.9g, 3.9h et 3.9i.
7. Pour  $b = 3.3$ , l'attracteur étrange et son bassin d'attraction sont présenté sur la figure 3.10a. Un zoom sur l'attracteur et son bassin d'attraction immédiat est présenté sur la figure 3.10b.
8. Pour  $b = 3.33$ , on a une bifurcation de contact entre la frontière de l'attracteur et la frontière de son bassin d'attraction immédiat, voir la figure 3.10c.
9. Pour  $b = 3.334$ , la bifurcation de contact précédente conduit à la disparition de l'attracteur étrange, voir la figure 3.10d.

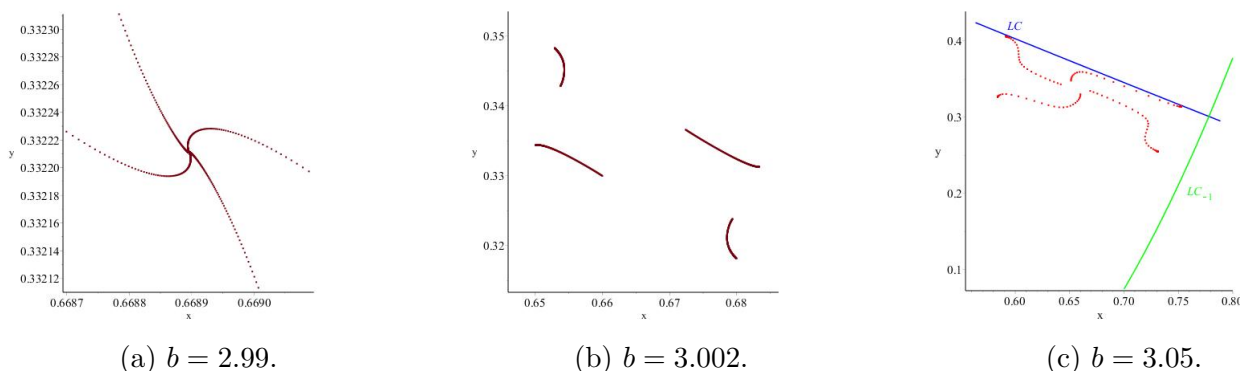


FIGURE 3.8 – Portrait de phase du système (3.1).



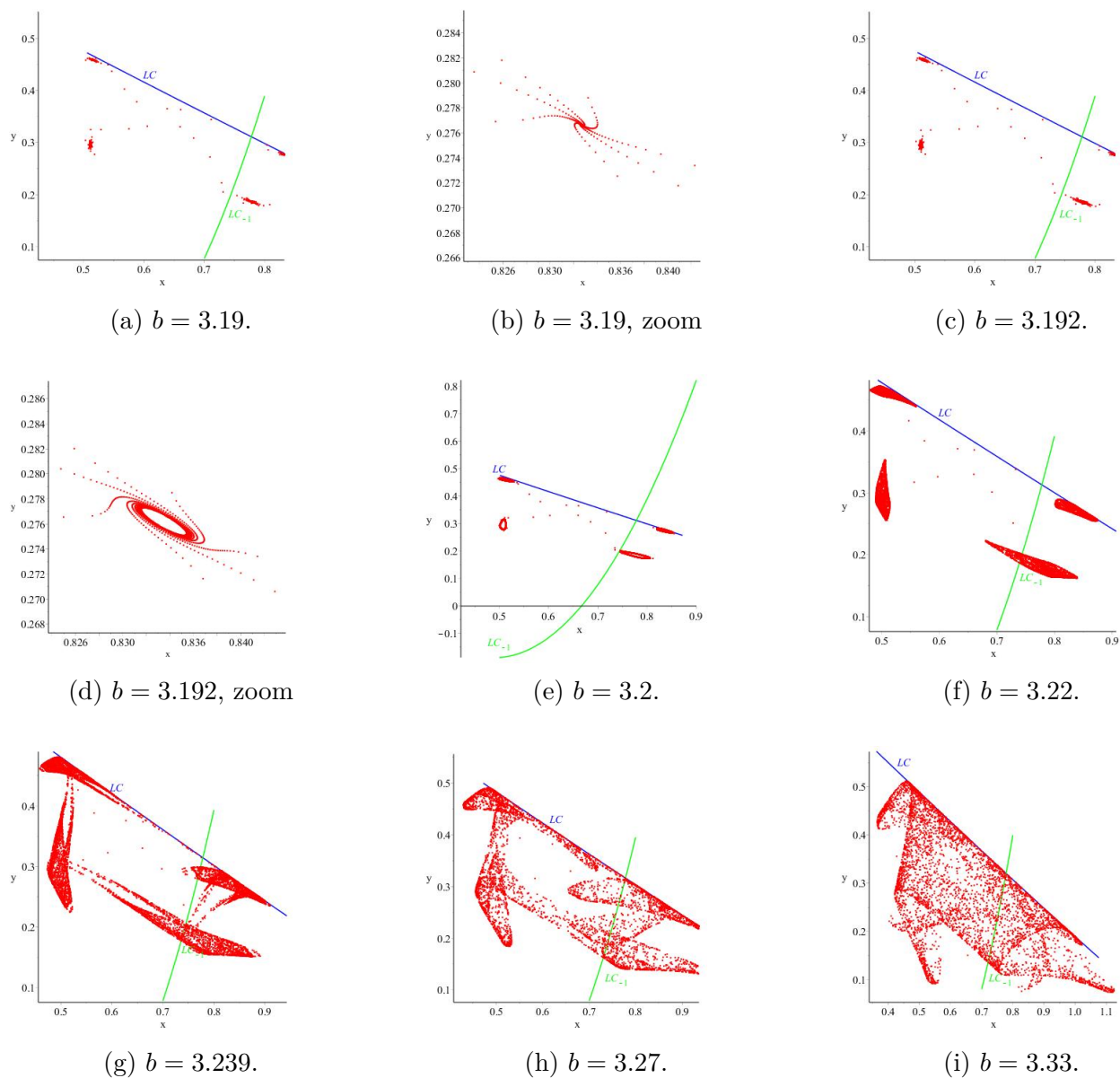


FIGURE 3.9 – Portrait de phase du système (3.1).

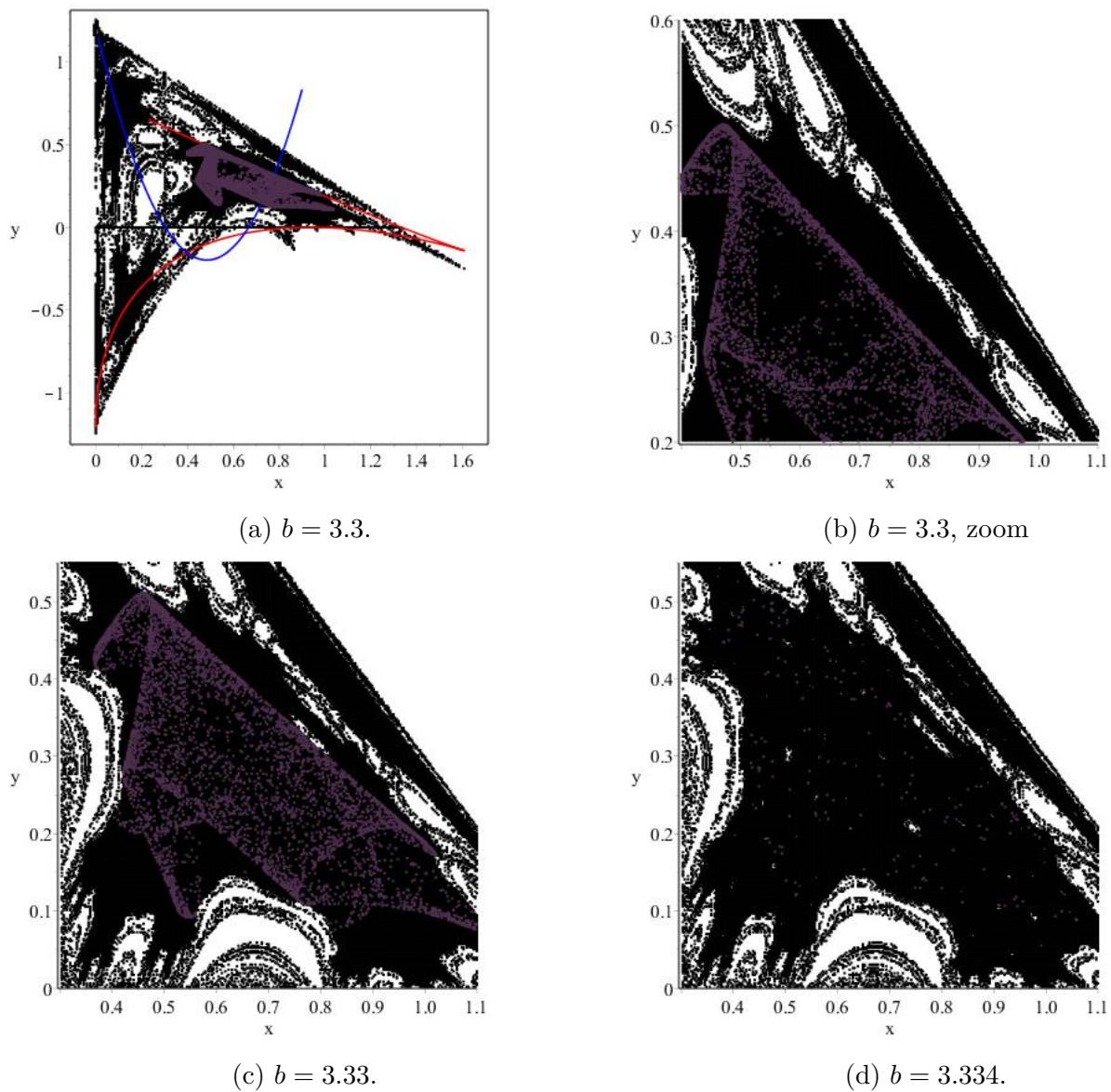


FIGURE 3.10 – Le bassin d'attraction et l'attracteur du système (3.1)

---

## Conclusion

Le but assigné à ce travail est d'exposer certains aspects de la théorie des systèmes dynamiques discrets. Plus précisément, l'axe de travail porte sur un modèle discret non linéaire proie-prédateur.

Les concepts introduits dans le premier chapitre constituent des notions de base indispensables à l'étude des systèmes dynamiques discrets.

Au deuxième chapitre, dans un premier temps on a rappelé les types de bifurcation avec le plus possible de détail, puisque pour certains paramètres se présentent des comportements chaotiques. Après on a abordé les différentes définitions et outils pour définir le chaos selon Devaney et Li-York.

Enfin au dernier chapitre, on a étudié un exemple concret qui modélise un phénomène dans la nature, qui est un modèle discret proies-prédateurs, qui décrit l'équilibre entre la population de proies et de prédateurs. Après l'étude de bifurcation de ce système, il apparaît pour certaines valeurs de paramètres un attracteur étrange qui montre que le chaos n'est pas si aléatoire qu'il paraît, en fait si on lance l'évolution de deux points initiales très proches, on remarque que les itérés se séparent après un certain rang, mais par contre les trajectoires s'accumulent sur la figure de l'attracteur étrange.

Des algorithmes, des programmes ainsi que des logiciels graphiques performants ont été éventuellement conçus pour mener à bien ce travail.

---

---

## Bibliographie

- [1] Anna Agliari, Gian-Italo Bischi, Roberto Dieci, and Laura Gardini, *Global bifurcations of closed invariant curves in two-dimensional maps : a computer assisted study.*, I. J. Bifurcation and Chaos **15** (2005), 1285–1328.
- [2] J. Banks, Jeff Brooks, G. Cairns, G. Davis, and P. Stacey, *On Devaney's definition of chaos*, (1992).
- [3] Alexandre Barugola, *Quelques propriétés des lignes critiques d'une récurrence du second ordre à inverse non unique. Détermination d'une zone absorbante*, RAIRO. Analyse numérique **18** (1984), no. 2, 137–151.
- [4] Gian-Italo Bischi, Laura Gardini, and Christian Mira, *Basin fractalization generated by a two-dimensional family of  $z_1$ - $z_3$ - $z_1$  maps*, International Journal of Bifurcations and Chaos **16** (2006), 647–669.
- [5] J. Carr, *Applications of Centre Manifold Theory*, Springer-Verlag, New York Heidelberg, June 1981 (Anglais).
- [6] J. C. Cathala, *On critical curves in two-dimensional endomorphisms*, International Journal of Bifurcation and Chaos **11** (2001), no. 03, 821–839, Publisher : World Scientific Publishing Co.
- [7] Robert L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, 2nd ed ed., Addison-Wesley studies in nonlinearity, Addison-Wesley, Redwood City, Calif, 1989.
- [8] Saber N. Elaydi, *Discrete Chaos, Second Edition : With Applications in Science and Engineering*, second edition ed., Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, November 2007 (Anglais).
- [9] Mitchell J. Feigenbaum, *Quantitative universality for a class of nonlinear transformations*, Journal of Statistical Physics **19** (1978), no. 1, 25–52 (en).
- [10] Oded Galor, *Discrete dynamical systems*, Springer, Berlin, 2007.
- [11] John Guckenheimer and Philip Holmes, *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, corr. 5th print ed., Applied mathematical sciences, no. v. 42, Springer, New York, 1997.
- [12] Igor Gumowski and C. Mira, *Recurrences and discrete dynamic systems*, Lecture notes in mathematics, no. 809, Springer-Verlag, Berlin ; New York, 1980.
- [13] Djellit Ilhem and Kara Amel, *One-dimensional and two-dimensional dynamics of cubic maps*, Discrete Dynamics in Nature and Society **2006** (2006), 1–13 (en).

- 
- [14] Werner Krabs and Stefan Pickl, *Dynamical systems : stability, controllability and chaotic behavior*, Springer, Heidelberg ; New York, 2010.
- [15] Yu Kuznetsov and Robert Sacker, *Neimark-Sacker bifurcation*, Scholarpedia **3** (2008), 1845.
- [16] Yu.A. Kuznetsov, *Elements of applied bifurcation theory*, 2nd ed ed., Applied mathematical sciences, no. 112, Springer, New York, 1998.
- [17] Joseph P. LaSalle, *The stability of dynamical systems*, third printing ed., Regional conference series in applied mathematics, no. 25, Soc. for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia/Pa, 2002 (eng).
- [18] Tien-Yien Li and James A. Yorke, *Period Three Implies Chaos*, The American Mathematical Monthly **82** (1975), no. 10, 985.
- [19] Xiaoli Liu and Dongmei Xiao, *Bifurcations in a discrete time lotka-volterra predator-prey system*, Discrete and Continuous Dynamical Systems - B **6** (2006), no. 3, 559–572.
- [20] M. Martelli, *Introduction to discrete dynamical systems and chaos*, Wiley-Interscience series in discrete mathematics and optimization, Wiley, New York, 1999.
- [21] C Mira, *Chaotic dynamics in two-dimensional noninvertible maps*, World Scientific, Singapore, 1996 (English).
- [22] Christian Mira, *Détermination pratique du domaine de stabilité d'un point d'équilibre d'une récurrence non linéaire du deuxième ordre à variable réelle*, Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences **Groupe 2** (1965), 5314–5317.
- [23] R. Sacker, *A New Approach to the Perturbation Theory of Invariant Surfaces*, (1965).
- [24] Wissame SELMANI, *Etude du comportement de la dynamique de la récurrence de Myrberg généralisée*, Thèse, BADJI MOKHTAR ANNABA, 2017.
- [25] Michel Vellekoop and Raoul Berglund, *On Intervals, Transitivity = Chaos*, The American Mathematical Monthly **101** (1994), no. 4, 353–355.
- [26] Yaniss Yahiaoui and Nourredine Akroune, *Neimark-Sacker and Closed Invariant Curve Bifurcations of A Two Dimensional Map Used For Cryptography*, EJTP **14** (2018), no. 37, 195–212.