Ministère De L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abderrahmane Mira De Bejaia

Faculté Des Sciences Exactes

Département De Mathématiques

Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de MASTER en Mathématiques

Spécialité : Analyse Mathématique

THÈME

Sur l'étude des équations aux différences non linéaires

via la théorie du point fixe

Présenté par : Melle Hafir Hanane

Devant le jury :

Mr	R. BOUKOUCHA	M.C.A	U.A.M. BEJAIA	Président
Mme	K. KHELOUFI-MEBARKI	Prof.	U.A.M. BEJAIA	Encadreur
Mme	S. ALLILI-ZAHAR	M.C.B	U.A.M. BEJAIA	Examinatrice
Melle	L. BOUCHAL	Doctorante	U.A.M. BEJAIA	Invitée

Année Universitaire : 2021/2022

Remerciements

Je tient d'abord à exprimer mes plus vifs remerciements et ma profonde gratitude à ma promotrice ***Mme K. KHELOUFI*** *pour l'honneur qu'elle m' a fait de me encadrer, pour la qualité de son encadrement, sa compétence, sa rigueur scientifique et sa clairvoyance ma beaucoup appris. je la remercier aussi pour son aide à la réalisation de ce présent travail.*

Je remercie également les membres du jury, ***Mr R.BOUKOUCHA, Mme S. ALLILI-ZAHAR et Melle L. BOUCHAL*** *pour l'honneur qu'ils me font d'évaluer ce travail.*

Je remercie tous les enseignants du département de mathématiques qui ont contribué à ma formation.

Dédicaces

C'est avec un grand plaisir que je dédie ce modeste travail :

À mes très chers parents, que Dieu vous préserve et vous accorde santé et longue vie.

À mes frères et soeurs.

À toutes mes amies et à tous ceux qui m'aiment.

À tous mes enseignants et toute la promotion mathématique 2021-2022.

À Mme K. KHELOUFI pour son aide et ses précieux conseiles.

À tous les étudiants qui j'espère pourront bénéficier ne serait-ce qu'un peu de ce travail.

Table des matières

Notations

Δ	Opérateur de différence.
$\sum$	Oppérateur de sommation (Anti-difference).
$\Gamma(t)$	$\Gamma(t) = \int\limits_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt$
$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
$\mathbb{N}_{n_0}$	$\{n > n_0, \quad n_0 \in \mathbb{N}\}$.
E	Un Espace de Banach.
$\mathcal{P}$	Un cône.
$\partial\Omega$	La frontière de Ω.
$\mathring{\Omega}$	L'intérieur de Ω.
$\overline{\Omega}$	L'adhérence de Ω.
$\mathcal{C}(X,Y)$	L'espace de toutes les fonctions continues de X dans Y.
$\lvert\,.\,\rvert$	La valeur absolue.
$\lVert\,.\,\rVert$	Une norme.
$[\,x\,]$	La partie entière de x.

Introduction

Les équations aux différences sont l'analogue discret des équations différentielles, récemment elles sont devenues un outil de valeur par leurs importance dans plusieurs domaines scientifiques tels que l'économie, la biologie, la théorie des probabilité,... etc. On peut rencontrer les équations aux différences dans la discrétisation des équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles, elles sont aussi utilisées dans la modélisation discrète des phénomènes de la vie réelle, notamment en dynamique des populations. On retrouve les équations aux différences également en analyse numérique dans la résolution des équations différentielle à l'aide des suites, par exemple le schéma numérique d'Euler ou de Runge-Kutta.

Ce mémoire a pour objectif de présenter un ensemble de résultats concernant les problèmes aux limites associés à des équations aux différences du second ordre. Nous nous intéressons particulièrement aux équations auto-adjointes posées sur des intervalles discrets bornés de la forme :

$$\Delta(p(k-1)\Delta y((t-1)) + q(t)y(t) = f(t, y(t)),\ t \in [a, b+1] \cap \mathbb{N}.$$

Nous rassemblons dans ce mémoire des résultats classiques ainsi que des résultats récents moins connus dans la littérature, sur le sujet. Des résultats permettant de bien maitriser quelques outils de base nécessaires à une étude plus approfondie de ce type de problèmes, notamment le Casoratian, les équations homogènes disconjuguées, la fonction de Gauchy, la fonction de Green et la méthode du point fixe.

Les théorèmes du point fixe sont des outils très importants pour montrer l'existence, la multiplicité ou l'unicité et la positivité de solutions à divers problèmes mathématiques, tels que les équations intégrales, les équations différentielles ordinaires, les équations aux dérivées partielles, les équations dynamiques aux échelles de temps et les équations aux différences. Certains de ces théorèmes peuvent être trouvés dans les travaux de Guo [7], Krasnosel'skii [10], Leggett et Willians [11] et Avery [2, 3, 4].

Dans ce mémoire, nous allons utiliser des théorèmes du point fixe sur les cônes d'un espace de Banach pour étudier l'existence de solutions positives pour des problèmes aux limites associés à des équations aux différences du second ordre.

Ce mémoire se compose de trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré à la présentation de quelques notions indispensables à la compréhension de la suite du mémoire. Nous commençons par les principes fondamentaux du calcul des différences : l'opérateur de différence, l'opérateur de décalage et le calcul des sommes. Ensuite nous regroupons quelques notions de base et des résultats fondamentaux concernant les équations aux différences linéaires. Nous discutons aussi l'existence et la détermination de la fonction de Green associée à une équation aux différences auto-adjointe du second ordre. Nous terminerons ce chapitre par présenter quelques outils mathématiques dont nous aurons besoin dans les chapitres 2 et 3 à savoir : les cônes, les fonctionnelles concaves et convexes, les opérateurs complètement continus, le critère de compacité d'Ascoli-Arzelà.

Dans le deuxième chapitre, nous utilisons le théorème du point fixe d'expansion et de compression d'un cône de type norme de Guo-Krasnosel'skii pour discuter l'existence de solutions positives de l'équation aux différences non autonome du second ordre associée à des conditions aux bords linéaires séparées :

$$-\Delta^2 y(t-1) = f(t, y(t)),\ t \in I = [1, b+1] \cap \mathbb{N},$$

$$\begin{cases} \alpha y(0) - \beta \Delta y(0) = 0 \\ \gamma y(b+1) + \delta \Delta y(b+1) = 0, \end{cases}$$

où $b \geq 2$ est un entier, $\alpha,\ \beta,\ \gamma \geq 0,\ \delta > 0$ avec $\rho = \alpha\gamma(b+1) + \alpha\delta + \beta\gamma > 0$ et Δ^2 est l'opérateur de différence du second ordre défini par : $\Delta^2 u(k) = u(k+2) - 2u(k+1) + u(k)$.

$f : I \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ est une fonction continue. Deux résultats d'existence d'au moins deux solutions positives pour ce problème aux limites sont présentés. Ces résultats sont développés dans [12].

Dans le troisième chapitre, en utilisant deux extensions du théorème du point fixe de Leggett-Williams, développées dans [2] et [3], nous discutons l'existence de solutions positives pour l'équations aux différences autonome du second ordre avec les conditions aux bords de Dirichlet

$$-\Delta^2 u(k) = f(u(k)), k \in \{0, 1, \dots, N\},$$

$$u(0) = u(N+2) = 0,$$

où $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ est une fonction continue. Deux résultats d'existence sont présentés, dans lesquels des conditions suffisantes pour satisfaire l'un des deux théorèmes du point fixe sont données. Chaque résultat d'existence est suivi d'un exemple illustratif. Ces résultats sont développés dans [13].

1 Préliminaires

Dans ce chapitre nous présentons les résultats préliminaires indispensables à la compréhension de la suite de ce mémoire.

1.1 Equations aux différences linéaires

1.1.1 Opérateur de différence

Définition 1.1. *Soit y une fonction d'une variable entière n. L'opérateur de différence Δ est défini par :* $\Delta y(n) = y(n+1) - y(n)$.

Un opérateur élémentaire qui est souvent utilisé en conjonction avec l'opérateur de différence est l'opérateur de décalage.

Définition 1.2. *L'opérateur de déclage E est défini par :* $Ey(n) = y(n+1)$.

Remarque 1.1.
- *Δ et E sont des opérateur linéaires.*

- Δ *et* E *commuttent, i.e.* $\Delta E = E\Delta$. *En effet,*

$$\begin{aligned}
\Delta(Ey(n)) &= \Delta y(n+1) \\
&= y(n+2) - y(n+1) \\
&= Ey(n+1) - Ey(n) \\
&= E(y(n+1) - y(n)) \\
&= E(\Delta y(n)).
\end{aligned}$$

- $\Delta = E - I$ *où* I *est l'opérateur identité,* $Iy(n) = y(n)$*,* $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Définition 1.3. *Soit* r *un entier positif. On définit* Δ^r *et* E^r *respectivement par :*

- $\Delta^r y(n) = \Delta(\Delta^{r-1} y(n)),\ n \in \mathbb{N}_{n_0}$.
- $E^r y(n) = y(r+n),\ n \in \mathbb{N}_{n_0}$.

Exemple 1.1.

$$\begin{aligned}
\Delta^2 y(n) &= \Delta(\Delta y(n)) \\
&= \Delta(y(n+1) + y(n)) \\
&= \Delta y(n+1) - \Delta y(n) \\
&= y(n+2) - 2y(n+1) + y(n).
\end{aligned}$$

Lemme 1.1. *En utilisant le théorème binomiale*

- $\Delta^r y(n) = (E-I)^r y(n) = \sum\limits_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-1)^k E^{r-k} y(n),\ n \in \mathbb{N}.$
- $E^r y(n) = (\Delta + I)^r y(n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{r}{k} \Delta^{r-k} y(n),\ n \in \mathbb{N}.$

Proposition 1.1. *Pour* r*,* m *et* n *des entiers positifs, les propriétés suivantes sont satisfaites :*

(a) $\Delta^m(\Delta^r y(n)) = \Delta^{m+r} y(n)$.

(b) $\Delta(y(n) + z(n)) = \Delta y(n) + \Delta z(n)$.

(c) $\Delta(Cy(n)) = C\Delta y(n)$*, si* C *est une constante.*

(d) $\Delta(y(n)z(n)) = y(n)\Delta z(n) + Ez(n)\Delta y(n)$.

(e) $\Delta(\frac{y(n)}{z(n)}) = \frac{z(n)\Delta y(n) - y(n)\Delta z(n)}{z(n)Ez(n)}$.

Démonstration 1. *(a) Par définition, on a $\Delta^r y(n) = (E-I)^r y(n)$, donc*

$$\begin{aligned}\Delta^m(\Delta^r(y(n))) &= \Delta^m[(E-I)^r y(n)] \\ &= (E-I)^r \Delta^m y(n) \\ &= (E-I)^{r+m} y(n) \\ &= \Delta^{n+m} y(n).\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\Delta(y(n)+z(n)) &= y(n+1)+z(n+1)-y(n)-z(n) \\ &= y(n+1)-y(n)+z(n+1)-z(n) \\ &= \Delta y(n)+\Delta z(n).\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\Delta(Cy(n)) &= Cy(n+1)-Cy(n) \\ &= C[y(n+1)-y(n)] \\ &= C\Delta y(n).\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\Delta(y(n)z(n)) &= y(n+1)z(n+1)-y(n)z(n)-y(n)z(n+1)+y(n)z(n+1) \\ &= z(n+1)[y(n+1)-y(n)]+y(n)[z(n+1)-z(n)] \\ &= Ez(n)\Delta y(n)+y(n)\Delta z(n).\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}\Delta\left(\frac{y(n)}{z(n)}\right) &= \frac{y(n+1)}{z(n+1)}-\frac{y(n)}{z(n)} \\ &= \frac{z(n)y(n+1)-y(n)z(n+1)}{Ez(n)z(n)} \\ &= \frac{z(n)[y(n+1)-y(n)]-y(n)[z(n+1)-z(n)]}{Ez(n)z(n)} \\ &= \frac{z(n)\Delta y(n)-y(n)\Delta z(n)}{Ez(n)z(n)}.\end{aligned}$$

Proposition 1.2. *L'opérateur Δ vérifie les propriétés suivantes :*

(a) $\sum\limits_{i=n_0}^{n-1} \Delta x(i) = x(n) - x(n_0), \;\; n \in \mathbb{N}_{n_0}$.

(b) $\Delta\left(\sum\limits_{i=n_0}^{n-1} x(i)\right) = x(n), \;\; n \in \mathbb{N}_{n_0}$.

(c) *Soit $P(n) = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i n^{k-i}$ un polynôme de degré k où $a_i, i \in \{0, 1, \cdots, k\}$ sont des reéls. Alors*

$$\Delta^k P(n) = a_0 k! \tag{1.1}$$

$$\Delta^{k+j} P(n) = 0, \; \forall j \geq 1. \tag{1.2}$$

Démonstration 2. *En utulisant la définition de Δ, on trouve*

(a)

$$\begin{aligned} \sum_{i=n_0}^{n-1} \Delta x(i) &= \sum_{i=n_0}^{n-1} (x(i+1) - x(i)) \\ &= \sum_{i=n_0+1}^{n} x(i) - \sum_{i=n_0}^{n-1} x(i) \\ &= x(n) - x(n_0). \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \Delta\left(\sum_{i=n_0}^{n-1} x(i)\right) &= \sum_{i=n_0}^{n} x(i) - \sum_{n_0}^{n-1} x(i) \\ &= x(n). \end{aligned}$$

(c) D'une part, on a

$$\Delta p(n) = \sum_{i=0}^{k} a_i (n+1)^{k-1} - \sum_{i=0}^{k} a_i n^{k-i}.$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} (n+1)^k &= \sum_{i=0}^{k} \binom{i}{k} n^i = 1 + kn + \frac{k(k-1)}{2} n^2 + \cdots + kn^{k-1} + n^k \\ (n+1)^{k-1} &= 1 + (k+1)n + \frac{(k-1)(k-2)}{2} n^2 + ... + (k-1)n^k + n^{k-1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ce qui entraine que $\Delta p(n) = a_0 k n^{k-1} + P_1(n)$, *où* P_1 *est un polynôme de degré inférieur strictement à* $k-1$. *De même, on peut montrer que*

$$\begin{aligned}
\Delta^2 p(n) &= a_0 k(k-1)n^{k-2} + P_2(n), \text{ où } deg(P_2) < k-2, \\
\Delta^3 p(n) &= a_0 k(k-1)(k-3)n^{k-3} + P_3(n), \text{ où } deg(P_3) < k-3, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

d'où, l'égalité (1.1).

Pour montrer (1.2) il suffit d'utiliser la définition de $\triangle$ *et (1.1).*

Proposition 1.3. *[9, Theorem 2.2]*

(a) $\Delta a^n = (a-1)a^n$.

(b) $\Delta \sin(an) = 2\sin\frac{a}{2}\cos a(n+\frac{1}{2})$.

(c) $\Delta \cos(an) = -2\sin\frac{a}{2}\sin a(n+\frac{1}{2})$.

(d) $\Delta \ln(an) = \log(1+\frac{1}{n})$.

(e) $\Delta \ln\Gamma(n) = \ln n$.

Remarque 1.2.

- *L'une des formules spéciales les plus élémentaires au calcul diffèrentiel est la règle de puissance* $\frac{d}{dt}n^t = tn^{t-1}$. *Malheuresement, la diférence d'une puissance est compliquée et par conséquent, elle n'est pas très utile :*

$$\begin{aligned}
\Delta_n n^t &= (n+1)^t - n^t \\
&= \sum_{k=0}^{t}\binom{t}{k}n^k - n^t \\
&= \sum_{k=0}^{t-1}\binom{t}{k}n^k.
\end{aligned}$$

- *Toutes les formules de la proposition 1.3 restent valables si un "dèclage" constant est introduit dans la variable* t. *Par exemple,* $\Delta a^{t+k} = (a-1)a^{t+k}$.
- *Les formules des propositions 1.1 et 1.3 peuvent être utilisées en combinaison pour trouver les différences d'expressions plus compliquées. Cependant, il peut être plus facile d'utiliser la définition directement.*

1.1.2 Somme indéfinie

Dans ce qui suit, nous introduisons l'opérateur inverse à droite de l'opérateur de diffréence, qui est appelé "somme indéfinie."

Définition 1.4. *Somme indéfinie (ou antidifférence) de* $y(n)$*, noté* $\sum y(n)$*, est une fonction vérifiant* $\Delta(\sum y(n)) = y(n)$ *pour* n *dans le domaine du* y*.*

Remarque 1.3.
- *Rappelons que l'intégrale indéfinie joue un rôle similaire dans le calcul différentiel.*
- *Comme l'intégrale indéfinie, la somme indéfinie n'est pas nunique.*

Théorème 1.1. *[9, Theorem 2.4] Si* $z(n)$ *est une somme indéfinie de* $y(n)$*, alors toute somme indéfinie de* $y(n)$ *est donnée par* $\sum y(n) = z(n) + C(n)$*, où* $C(n)$ *a le même domaine que* y *et* $\Delta C(n) = 0$*.*

Exemple 1.2. *Calculons* $\sum 6^t$*.*
D'après la proposition 1.3, $\Delta 6^n = 5.6^n$*, nous avons donc* $\Delta \frac{6^n}{5} = 6^n$*.*
Ensuit, $\frac{6^n}{5}$ *est une somme indéfinie de* 6^n *et nous écrivons :*

$$\sum 6^n = \frac{6^n}{5} + C(n)$$

où $C(n)$ *est une fonction qui a le même domaine que* 6^n *et* $\Delta C(n) = 0$*.*

Remarque 1.4. i) *Si le domaine de* y *est l'ensemble des entiers positifs, alors de l'équation* $\Delta C(n) = C(n+1) - C(n) = 0$*, on aura* $C(1) = C(2) = C(3) = ...$*,*
ce que signifie que $C(n)$ *est une fonction constante.*
Dans ce cas on écrit $\sum 6^n = \frac{6^n}{5} + C$*, où* C *est une constante.*

ii) *Si le domaine de* y *est l'ensemble de tous les nombres réels, alors l'équation :* $\Delta C(n) = C(n+1) - C(n) = 0$ *entraine que* $C(n+1) = C(n)$ *pour tout réel* n*, ce qui signifie que* $C(n)$ *peut être n'importe quelle fonction périodique. Par exemple, on pourrait choisir*

$C(n) = 2\sin(2\pi n)$, ou $C(n) = -5\cos(4\pi(n-\pi))$, dans le théorème 1.1 et obtenir une somme indéfinie.

Proposition 1.4. *[9, Theorem 2.6]. Tout somme indéfinie vérifie les proporiétés suivantes :*

(a) $\sum(y(n)+z(n)) = \sum y(n) + \sum z(n)$.

(b) $\sum(\lambda y(n)) = \lambda \sum y(n)$ *si λ est une constante.*

(c) $\sum(y(n)\Delta z(n)) = y(n)z(n) - \sum Ez(n)\Delta y(n)$.

(d) $\sum(Ey(n)\Delta z(n)) = y(n)z(n) - \sum z(n)\Delta y(n)$.

Remarque 1.5.
- *Les formules (c) et (d) de la proposition ci-dessus sont appelées sommation par parties.*
- *Les formules de sommation par parties peuvent être utilisées pour calculer certaines sommes indéfinies.*

Proposition 1.5. *[9, Theorem 2.5]. Soient n et a des réels, on a*

(a) $\sum a^n = \frac{a^n}{a-1} + C(n)$, $(a \neq 1)$.

(b) $\sum \sin(an) = -\frac{\cos a(n-\frac{1}{2})}{2\sin\frac{a}{2}} + C(n)$, $(a \neq 2n\pi)$.

(c) $\sum \sin(an) = \frac{\sin a(n-\frac{1}{2})}{2\sin\frac{a}{2}} + C(n)$, $(a \neq 2n\pi)$.

(d) $\sum \ln n = \ln\Gamma(n) + C(n)$, $(n > 0)$.

(e) $\sum \binom{n}{a} = \binom{n}{a+1} + C(n)$.

(f) $\sum \binom{a+n}{n} = \binom{a+n}{n-1} + C(n)$.

Remarque 1.6. *[5, Chapitre 8, page 337]. Les opérateurs Δ et $\sum$ ne commutent pas, comme dans le calcul différentiel les opérateurs de dérivation et d'intégration ne commutent pas.*

Proposition 1.6. *Soient $n, m, p \in \mathbb{N}^*$. Pour m fixé et $n \geq m$, on a*

$$\Delta\left(\sum_{k=m}^{n-1} y_k\right) = y_n,$$

d'où

$$\sum y_n = \sum_{k=m}^{n-1} y_k + C.$$

Pour p fixé et $p \geq n$, on a

$$\Delta\left(\sum_{k=n}^{p} y_k\right) = -y_n,$$

d'où

$$\sum y_n = -\sum_{k=n}^{p} y_k + D,$$

où C et D sont des constantes.

Proposition 1.7. *[9, Theorem 2.7]. Si z_n est une somme indéfinie de y_n et $m, n\,(n \geq m)$ sont des entiers, alors*

$$\sum_{k=m}^{n-1} y_n = [z_n]_m^n = z_n - z_m.$$

1.1.3 Résultats généraux sur les équations aux différences linéaires

Ce paragraphe rassemble les outils essentiels utilisés dans le traitement des équations aux différences linéaires.

Equations aux différences linéaires du premier ordre

Définition 1.5. *Une équation aux différences linéaire d'ordre 1 est une équation de la forme*

$$y(n+1) - p(n)y(n) = r(n), \tag{1.3}$$

où p et r sont des fonctions avec $p(n) \neq 0$ pour tout n.

Si $p(n) = 1$ pour tout n, alors l'équation (1.3) s'écrit

$$\Delta y(n) = r(n),$$

et sa solution est

$$y(n) = \sum r(n) + C(n),$$

où $\Delta C(n) = 0$.

Considérons l'équation homogène d'ordre 1

$$u(n+1) = p(n)u(n), \; n \in \{a, a+1, ...\}, a \in \mathbb{N} \tag{1.4}$$

qui se résout facilement par itération comme suit :

$$\begin{aligned} u(a+1) &= p(a)u(a), \\ u(a+2) &= p(a+1)p(a)u(a), \\ &\vdots \\ u(a+n) &= u(a)\prod_{k=0}^{n-1} p(a+k). \end{aligned}$$

Alors

$$u(n) = u(a)\prod_{s=a}^{n-1} p(s),$$

par convention $\prod\limits_{s=a}^{a-1} p(s) = 1$.

L'équation (1.3) *peut être résolue en substituant* $y(n) = u(n)v(n)$ *dans l'èquation* (1.3) *où* v *est à déterminer comme suit*

$$u(n+1)v(n+1) - p(n)u(n)v(n) = r(n),$$

$$u(n+1)v(n+1) + v(n)[u(n+1) - p(n)u(n)] - v(n)u(n+1) = r(n)$$

$$u(n+1)[v(n+1) - v(n)] = r(n)$$

$$Eu(n)\Delta v(n) = r(n)$$

$$\Delta v(n) = \frac{r(n)}{Eu(n)}.$$

Alors

$$v(n) = \sum \frac{r(n)}{Eu(n)} + C,$$

où C *est une constante. Donc,*

$$y(n) = u(n)\left[\sum \frac{r(n)}{Eu(n)} + C\right], \; C \in \mathbb{R}.$$

Equations aux différences linéaire d'ordre $k \geq 1$

Définition 1.6. *Une équation de la forme :*

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \ldots + p_k(n)y(n) = f(n), \tag{1.5}$$

où $p_1, \ldots p_k$ et f sont des fonctions rèelles définies sur $\mathbb{N}_{n_0}$, s'appelle équation aux différences linéaire non homogène d'ordre k.

Définition 1.7. *On appelle équation homogène associée à l'équation (1.5) l'équation*

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \ldots + p_k(n)y(n) = 0, \ n \in \mathbb{N}_{n_0}. \tag{1.6}$$

Définition 1.8. *Une suite $\{y(n)\}_{n=n_0}^{\infty}$ est dite solution de l'équation (1.5) si elle statisfait cette équation.*

Remarque 1.7. *(a) L'équation (1.5) peut également être écrite en utilisant l'opérateur de décalage comme suit :*

$$\left(E^k + p_1(n)E^{k-1} + \ldots + p_k(n)E^0\right) y(n) = f(n), \ \text{où} \ E^0 = I.$$

(b) Puisque $E = \Delta + I$, il est aussi possible d'écrire l'équation (1.5) en terme d'opérateur de différence.

Définition 1.9. *Si l'on précise k conditions initiales de l'équation (1.5)*

$$y(n_0) = C_0, \ y(n_0+1) = C_1, \ \ldots, \ y(n_0+k-1) = C_{k-1}, \tag{1.7}$$

où les C_i, $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ sont des constantes rèelles, alors on obtient le problème initial suivant :

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \ldots + p_k(n)y(n) = f(n), \tag{1.8}$$

$$y(n_0) = C_0, \, y(n_0+1) = C_1, \, \ldots, y(n_0+k-1) = C_{k-1}. \tag{1.9}$$

Théorème 1.2. *[6, Theorem 2.7, page 66]. Le problème initial (1.8)-(1.9) possède une unique solution.*

Démonstration 3. *(i) L'existence. De l'équation (1.8), on a*

$$y(n+k) = -p_1(n)y(n+k-1) - \ldots - p_k(n)y(n) + f(n). \tag{1.10}$$

Donc si on pose $n = n_0$ dans l'équation (1.10) on obtient

$y(n_0+k) = -p_1(n_0)y(n_0+k-1) - \ldots - p_k(n_0)y(n_0) + f(n_0)$

$y(n_0+k) = -p_1(n_0)C_{k-1} - \ldots - p_k(n_0)C_0 + f(n_0)$*, alors $y(n_0+k)$ existe et on le note C_k.*

Pour déterminer $y(n_0+1+k)$, on pose $n = n_0+1$ dans (1.10), on trouve

$y(n_0+1+k) = -p_1(n_0+1)y(n_0+k) - \ldots - p_k(n_0+1)y(n_0+1) + f(n_0+1)$

$y(n_0+1+k) = -p_1(n_0+1)C_k - \ldots - p_k(n_0+1)C_1 + f(n_0+1)$

et donc $y(n_0+1+k)$ existe.

De la mème manière on peut montrer l'existence de $y(n)$ pour tout $n \geq n_0+1$,

ce qui assure l'existence d'une solution de l'èquation (1.8).

(ii) L'unicité. Supposons qu'il existe deux solutions y_1 et y_2 du problème (1.8)-(1.9). Posons

$$z(n) = (y_1 - y_2)(n),\ n \in \mathbb{N}_{n_0}.$$

Alors z est une solution de l'équation (1.10) avec $f \equiv 0$. Comme on a vu dans la peruve de l'existence d'une solution, il est facile de montrer que $z \equiv 0$ sur $\mathbb{N}_{n_0}$, ce qui implique l'unicité de la solution.

Exemple 1.3. *On considère l'équation aux différences linéaire du second d'ordre*

$$y(n+2) + \frac{n}{n+1}\,y(n+1) - 3\,y(n) = n,\ n \in \mathbb{N},$$

avec $y(0)$=1 et $y(1) = -1$ et on va calculer $y(3)$ et $y(4)$.

D'abord, nous réécrivons cette équation sous la forme :

$$y(n+2) = -\frac{n}{n+1}\,y(n+1) + 3y(n) + n,\ n \in \mathbb{N}. \tag{1.11}$$

Posons $n = 0$ dans l'équation (1.11), on aura

$$y(2) = 3y(0) = 3.$$

Pour $n = 1$, on aura

$$y(3) = -\frac{1}{2}\,y(2) + 3y(1) + 1 = -\frac{7}{2}.$$

Puis,

$$y(4) = -\frac{2}{3}\,y(3) + 3y(2) + 1 = \frac{37}{3}.$$

Théorème 1.3. *[9, Theorem 3.3 page 51] .*

(a) *Si y_1 et y_2 sont des solutions de l'équation homogène (1.6), alors $C_1y_1 + C_2y_2$, avec C_1, C_2 sont des constantes, est aussi une solution de cette équation.*

(b) *Si y_1 est une solution de l'équation (1.6) et y_2 est une solution de l'équation (1.5), alors $y_1 + y_2$ est aussi une solution de l'équation non homogène (1.5).*

(c) *Si y_1 et y_2 sont des solutions de l'équation (1.5), alors $y_1 - y_2$ est une solution de l'équation homogène (1.6).*

Lemme 1.2. *Soit l'opérateur L défini par*

$$L(y) = \sum_{i=0}^{k} p_i(n)y(n+k-i),\ n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.12}$$

Alors, L est linéaire.

Démonstration 4. *Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}_0$, alors*

$$\begin{aligned} L(\alpha x(n) + \beta y(n)) &= \sum_{i=0}^{k} p_i(n)(\alpha x(n+k-i) + \beta y(n+k-i)) \\ &= \alpha \sum_{i=0}^{k} p_i(n)x(n+k-i) + \beta \sum_{i=0}^{k} p_i(n)y(n+k-i) \\ &= \alpha Lx(n) + \beta Ly(n). \end{aligned}$$

Remarque 1.8. *Soit L défini par (1.12), alors l'équation (1.5) prend la forme*

$$Ly(n) = f(n),\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{1.13}$$

et l'équation (1.6) sera

$$Ly(n) = 0,\ n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.14}$$

avec $p_0(n) = 1$.

Proposition 1.8. *Soit S l'ensemble des solutions de l'équation (1.14). Alors S est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration 5. *Conséquence directe du lemme 1.2. En effet, S est le noyau de l'opérateur linéaire L.*

Théorème 1.4. *Soient $\{y_i(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$, $i \in \{1, \ldots, k\}$ des solutions linéairement indépendantes de l'équation (1.14) et soit $\{y_p(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ une solution particulière de l'équation (1.13), alors toute autre solution $\{y(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ de l'équation non homogène (1.13) s'écrit sous la forme*

$$y(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i y_i(n) + y_p(n), \; c_i \in \mathbb{R}, \; i \in \{1, \ldots, k\} \text{ et } n \in \mathbb{N}_{n_0}. \tag{1.15}$$

Démonstration 6. *Soit $\{y(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ une solution de l'équation (1.13) et $\{y_p(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ une solution particulière de la même équation. D'après le théorème 1.3, la suite $\{(y - y_p)(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ est une solution de l'équation (1.14). Donc*

$$y(n) - y_p(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i y_i(n), \; n \in \mathbb{N}_{n_0}. \tag{1.16}$$

D'où

$$y(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i y_i(n) + y_p(n), \; n \in \mathbb{N}_{n_0}. \tag{1.17}$$

Définition 1.10. *Les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_k$ sont linéairemet indépendentes sur $\mathbb{N}_{n_0}$, s'il existe des costantes $c_1, \ldots, c_k$, pas toutes nulles, de sorte que*

$$c_1 y_1(n) + c_2 y_2(n) + \ldots + c_k y_k(n) = 0,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}_{n_0}$. Sinon elles sont linéairement indépendantes.

Définition 1.11. *Un ensemble de k solutions linéairement indépendantes de l'équation (1.14) est appelé un ensemble fondamental de solutions de cette équation.*

Il n'est pas pratique de vérifier l'indépendance linéaire d'un ensemble de solutions à l'aide de la définition. Il existe une méthode simple pour vérifier l'indépendance linéaire des solutions de l'équation (1.14) en utilisant le Casoratian, que nous définissons dans ce qui suit.

Définition 1.12. *Soient* $\{y_i(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$, $i \in \{1,\dots,k\}$ *des solutions de l'équation* (1.14). *On définit le Casoratien*[1] $W(n)$ *de ces solutions par :*

$$W(n) = \begin{vmatrix} y_1(n) & y_2(n) & \dots & y_k(n) \\ y_1(n+1) & y_2(n+1) & \dots & y_k(n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(n+k-1) & y_2(n+k-1) & \dots & y_k(n+k-1) \end{vmatrix}$$

Remarque 1.9. *Le Casoratien est l'analogue direct du Wronskien pour les équations différentielles.*

Exemple 1.4. $\{n, 2^n\}$ *est un ensemble fondamental de solutions de l'équation :*

$$y(n+2) - \frac{3n-2}{n-1}y(n+1) + \frac{2n}{n-1}y(n) = 0, \tag{1.18}$$

$$W(n) = \begin{vmatrix} n & 2^n \\ n+1 & 2^n+1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Les solutions $n, 2^n$ *sont linéairement indépendantes et donc elles forment un ensemble fondamental de solutions de l'équation* (1.18).

Remarque 1.10. *Il n'est pas difficile de vérifier que le Casoratien satisfait*

$$W(n) = \begin{vmatrix} y_1(n) & y_2(n) & \dots & y_k(n) \\ Ey_1(n) & Ey_2(n) & \dots & Ey_k(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E^{k-1}y_1(n) & E^{k-1}y_2(n) & \dots & E^{k-1}y_k(n) \end{vmatrix}.$$

Lemme 1.3. ***Lemme d'Abel*** *[6, Theorem 2.13 page 68].*

Soient $y_1, y_2, \dots, y_k$ *des solutions de* (1.14) *et soit* $W(n)$ *leur Casoratien. Alors, pour* $n \geq n_0$,

$$W(n) = (-1)^{k(n-n_0)} \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} p_k(i) \right) W(n_0). \tag{1.19}$$

En conséquence, nous avons le corollaire suivant :

1. Utilisé pour la première fois par le mathématicien italien Felice Casorati (1835-1890)

Corollaire 1.1. *Supposons que* $p_k(n) \neq 0$ *pour tout* $n \geq n_0$*. Alors le Casoratien* $W(n) \neq 0$ *pour tout* $n \geq n_0$ *si seulement si* $W(n_0) \neq 0$.

Théorème 1.5. *(Théorème fondamental).*

Si $p_k(n) \neq 0$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}_{n_0}$, *alors l'équation homogène* (1.14) *admet un ensemble fondamental de* k *solutions.*

Démonstration 7. *D'après le théorème 1.2, le système*

$$\begin{cases} y_i(n+k) + p_1(n)y_i(n+k-1) + \ldots + p_k(n)y_i(n) = 0, \ n \in \mathbb{N}_{n_0} \\ y_i(n_0+i-1) = 1, y_i(n_0+j) = 0, \ \ j \neq i-1, \ 1 \leq i \leq k, \end{cases}$$

admet des solutions $\{y_1(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$, $\{y_2(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}, \ldots,$ $\{y_k(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$, *soit* $W(n)$ *leur Casoratien. Alors*

$$W(n) = \begin{vmatrix} y_1(n_0) & y_2(n_0) & \ldots & y_k(n_0) \\ y_1(n_0+1) & y_2(n_0+1) & \ldots & y_k(n_0+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(n_0+k-1) & y_2(n_0+k-1) & \ldots & y_k(n_0+k-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

Donc

$$W(n_0) = det(I_k) = 1 \neq 0.$$

D'où, $\left\{\{y_1(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}, \{y_2(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}, \ldots, \{y_k(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}\right\}$ *est un ensemble fondamental de solutions de l'équation* (1.14).

1.1.4 Equations linéaires auto-adjointes du second ordre

Dans cette section, nous allons introduire l'équation aux différences auto-adjointe du second ordre et nous montrerons quelles équations aux différences linéaires du second ordre peuvent être mises sous la forme auto-adjointe et nous établirons un certain nombre d'identités utiles.

L'équation aux différences auto-adjointe linéaire du second ordre est définie comme suit :

$$\Delta\left(p(t-1)\Delta y(t-1)\right) + q(t)y(t) = 0, \ t \in [a, b+1] = \{a, a+1, \ldots, b+1\}, \tag{1.20}$$

où $p(t) > 0$ est définie sur l'ensemble des entiers $[a, b+1]$ et q est définie sur l'ensemble des entiers $[a+1, b+1]$.

L'équation (1.20) peut être écrite sous la forme

$$p(t)y(t+1) + c(t)y(t) + p(t-1)y(t-1) = 0, \tag{1.21}$$

où

$$c(t) = q(t) - p(t) - p(t-1) \text{ pour } t \in [a+1, b+1].$$

Remarque 1.11. *Toute équation écrite sous la forme (1.21), où $p(t) > 0$ sur $[a+1, b+1]$ peut se mettre sous la forme auto-adjointe en prenant*

$$q(t) = c(t) + p(t) + p(t-1). \tag{1.22}$$

En fait, toute équation de la forme

$$\alpha(t)y(t+1) + \beta(t)y(t) + \gamma(t)y(t-1) = 0, \tag{1.23}$$

où $\alpha(t) > 0$ sur $[a, b+1]$, $\gamma(t) > 0$ sur $[a+1, b+1]$, peut se mettre sous la forme auto-adjointe (1.20). Pour trouver $p(t)$ et $q(t)$ à partir de $\alpha(t)$, $\beta(t)$ et $\gamma(t)$, on multiplie l'équation (1.23) par une fonction positive $h(t)$, on obtient

$$\alpha(t)h(t)y(t+1) + \beta(t)h(t)y(t) + \gamma(t)h(t)y(t-1) = 0. \tag{1.24}$$

En comparant (1.24) avec (1.21), on obtient

$$\alpha(t)h(t) = p(t),$$

$$\gamma(t)h(t) = p(t-1).$$

Ainsi

$$\alpha(t)h(t) = \gamma(t+1)h(t+1)$$

ou

$$h(t+1) = \frac{\alpha(t)}{\gamma(t+1)} h(t), \quad t \in [a, b]. \tag{1.25}$$

D'où

$$h(t) = A \prod_{s=a}^{t-1} \frac{\alpha(s)}{\gamma(s+1)},$$

où A est une constante positive quelconque, est une solution de (1.25). Cela nous donne

$$p(t) = A\alpha(t) \prod_{s=a}^{t-1} \frac{\alpha(s)}{\gamma(s+1)}.$$

De plus, à partir de (1.22) nous obtenons $q(t) = \beta(t)h(t) + p(t) + p(t-1)$.

Exemple 1.5. *Ecrivons l'équation suivante sous la forme d'une équation auto-adjointe*

$$2^t y(t+1) + (\sin t - 3.2^{t-1})y(t) + 2^{t-1}y(t-1) = 0$$

On a

$p(t) = 2^t$ *et* $c(t) = \sin t - 3.2^{t-1}$ *Alors,*

$q(t) = c(t) + p(t) + p(t-1)$

$q(t) = \sin t - 3.2^{t-1} + 2^t + 2^{t-1} = \sin t.$

D'où la forme auto-adjointe est

$$\Delta(2^{t-1}\Delta y(t-1)) + \sin t y(t) = 0.$$

Sur l'ensemble $E = \{y : [a, b+2] \to \mathbb{R}\}$, définissons un opérateur linéaire L par :

$$Ly(t) = \Delta\left(p(t-1)\Delta y(t-1)\right) + q(t)y(t), \quad \text{pour } t \in [a+1, b+1].$$

Définition 1.13. *La fonction de Cauchy $z = z(t,s)$, définie pour $a \leq t \leq b+2$, $a+1 \leq s \leq b+1$, est la solution du problème initial*

$$\begin{aligned} Lz(t,s) &= 0, \\ z(s,s) &= 0, \\ z(s+1,s) &= \tfrac{1}{p(s)}, \end{aligned}$$

pour chaque s fixé dans $[a+1, b+1]$.

Exemple 1.6. *Considérons l'équation :*

$$\Delta(p(t-1)\Delta y(t-1)) = 0, \quad t \geq s.$$

Pour chaque s fixé, la fonction de Cauchy pour cette équation est une solution de l'équation

$$\Delta(p(t-1)\Delta z(t-1,s)) = 0, \quad t \in [a+1, b+1].$$

Alors, il existe une constante $\alpha(s)$ telle que

$$p(t-1)\Delta z(t-1,s) = \alpha(s), \quad t \in [a+1, b+2].$$

D'après les conditions initiales, pour $t = s+1$, on trouve $\alpha(s) = 1$.

Ensuite, si on remplace t par $t+1$, on aura

$$\Delta z(t,s) = \frac{1}{p(t)}.$$

En supposant que $t \geq s$ et en sommant de s à $t-1$, on obtient

$$z(t,s) - z(s,s) = \sum_{\tau=s}^{t-1} \frac{1}{p(\tau)}.$$

Alors la fonction de Cauchy est

$$z(t,s) = \sum_{\tau=s}^{t-1} \frac{1}{p(\tau)}, \quad t \geq s.$$

Exemple 1.7. *L'équation aux différences $\Delta^2 y(t-1) = 0$ possède la fonction de Cauchy*

$$z(t,s) = t - s, \ t \geq s.$$

Théorème 1.6. *[9, Theorem 6.3, page 236]. Si $u_1(t), u_2(t)$ sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (1.20), alors la fonction de Cauchy pour (1.20) est donnée par :*

$$z(t,s) = \frac{\begin{vmatrix} u_1(s) & u_2(s) \\ u_1(t) & u_2(t) \end{vmatrix}}{p(s)\begin{vmatrix} u_1(s) & u_2(s) \\ u_1(s+1) & u_2(s+1) \end{vmatrix}},$$

pour $a \leq t \leq b+2$ et $a+1 \leq s \leq b+1$.

Exemple 1.8. *Déterminons la fonction du Gauchy de l'équation aux différences suivante en utilisant le théorème 1.6.*

$$\Delta(p(t-1)\Delta y(t-1)) = 0, \quad t \geq s.$$

On a $u_1(t) = 1$ *et* $u_2(t) = \sum_{\tau=a}^{t-1} \frac{1}{p(\tau)}$ *sont deux solutions linéairement indépendantes de cette équation. D'après le théorème 1.6, on aura*

$$z(t,s) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \sum_{\tau=a}^{s-1} \frac{1}{p(\tau)} \\ 1 & \sum_{\tau=a}^{t-1} \frac{1}{p(\tau)} \end{vmatrix}}{p(s)\begin{vmatrix} 1 & \sum_{\tau=a}^{s-1} \frac{1}{p(\tau)} \\ 1 & \sum_{\tau=a}^{s} \frac{1}{p(\tau)} \end{vmatrix}}$$

$$= \sum_{\tau=s}^{t-1} \frac{1}{p(\tau)}.$$

Equations linéaires auto-adjointes associées à des conditions initiales

Les deux résultats suivants montrent comment la fonction de Cauchy est utilisée pour résoudre un problème initial non homogène. Notons que dans la formule de variation des constantes, nous n'avons besoin de connaître la fonction de Cauchy que pour $t \geq s$.

Théorème 1.7. *(Résolution d'une équation non homogène avec des conditions initiales homogènes). La solution du problème initial*

$$\begin{aligned} Ly(t) &= h(t),\ t \in [a+1, b+1] \\ y(a) &= 0, \\ y(a+1) &= 0, \end{aligned}$$

est donnée par

$$y(t) = \sum_{s=a+1}^{t} z(t,s)h(s), \tag{1.26}$$

pour $t \in [a, b+2]$ *avec* $y(a) = 0$ *par convention, où* z *est la fonction de Cauchy pour* $Ly(t) = 0$. *(Ici, si* $t = b+2$, *alors le terme* $z(b+2, b+2)h(b+2)$ *est nul).*

Notons que la formule (1.26) est appelée formule de la variation des constantes.

Démonstration 8. *Soit la fonction y donnée par l'équation (1.26). Ainsi que*

$$\begin{aligned}
y(a+1) &= z(a+1,a+1)h(a+1) = 0,\\
y(a+2) &= z(a+2,a+1)h(a+1) + z(a+2,a+2)h(a+2)\\
&= \tfrac{h(a+1)}{p(a+1)}.
\end{aligned}$$

On remplace dans l'équation (1.21) on trouve que y satisfait $Ly(t) = h(t)$ pour $t = a+1$. Supposons que $a+2 \le t \le b+1$. Alors

$$\begin{aligned}
Ly(t) &= p(t-1)y(t-1) + c(t)y(t) + p(t)y(t+1)\\
&= \sum_{s=a+1}^{t-1} p(t-1)z(t-1,s)h(s) + \sum_{s=a+1}^{t} c(t)z(t,s)h(s) + \sum_{s=a+1}^{t+1} p(t)z(t+1,s)h(s)\\
&= \sum_{s=a+1}^{t-1} Lz(t,s)h(s) + c(t)z(t,t)h(t) + p(t)z(t+1,t)h(t) + p(t)z(t+1,t+1)h(t+1)\\
&= h(t).
\end{aligned}$$

Corollaire 1.2. *La solution du problème initial*

$$\begin{aligned}
Ly(t) &= h(t),\ t \in [a+1, b+1]\\
y(a) &= A,\\
y(a+1) &= B,
\end{aligned}$$

est donnée par

$$y(t) = u(t) + \sum_{s=a+1}^{t} z(t,s)h(s), \tag{1.27}$$

où z est la fonction de Gauchy pour $Ly(t) = 0$ et u est la solution du problème $Lu(t) = 0$, $u(a) = A$, $u(a+1) = B$.

Démonstration 9. *On a u est la solution de $Lu(t) = 0$ et $\sum_{s=a+1}^{t} y(t,s)h(s)$ est une solution de $Ly(t) = h(t)$. Alors*

$$y(t) = u(t) + \sum_{s=a+1}^{t} z(t,s)h(s)$$

est une solution de $Ly(t) = h(t)$. De plus, $y(a) = u(a) = A$ and $y(a+1) = u(a+1) = B$.

Dans [8], Hartman a introduit la notion de zéros généralisés afin d'obtenir un analogue du théorème de séparation de Sturm pour les équations différentielles. Ce concept fournit un mécanisme pour obtenir des résultats fondamentaux pour les équations aux différences auto-adjointes du second ordre. Le concept de disconjugaison d'une équation aux différences sera aussi présenté dans cette section.

Le lemme suivant montre qu'il n'y a pas de solution non triviale de l'équation (1.20) avec $y(t_0) = 0$ et $y(t_0 - 1)y(t_0 + 1) \geq 0,\ t_0 > a$. Dans un certain sens, ce lemme dit que une solution non triviale de l'équation (1.20) ne peut avoir que des zéros simples.

Lemme 1.4. *Si y est une solution non triviale de l'équation (1.20) telle que $y(t_0) = 0,\ a < t_0 < b + 2$, alors $y(t_0 - 1)y(t_0 + 1) < 0$.*

Démonstration 10. *Soit y une solution non triviale de l'équation (1.20) avec $y(t_0) = 0, a < t_0 < b + 2$. Alors, à partir de l'équation (1.21), on obtient*

$$p(t_0)y(t_0 + 1) = -p(t_0 - 1)y(t_0 - 1).$$

Comme $y(t_0 + 1),\ y(t_0 - 1) \neq 0$ et $p(t) > 0$, il s'ensuit que

$$y(t_0 - 1)y(t_0 + 1) < 0.$$

Définition 1.14. *Une solution y de l'équation (1.20) admet un zéro généralisé à t_0 si $y(t_0) = 0$ pour $t_0 = a$ et pour $t_0 > a$ soit $y(t_0) = 0$ soit $y(t_0 - 1)y(t_0) < 0$.*

Théorème 1.8. *(théorème de séparation de sturm)[6, Theorem 7.9, page 321]. Soient y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (1.20). Alors*

(i) y_1 et y_2 ne peuvent pas avoir de zéro commun, c'est-à-dire si $y_1(t_0) = 0$, alors $y_2(t_0) \neq 0$.

(ii) Si y_1 a un zéro à t_1 et un zéro généralisé à $t_2 > t_1$, alors y_2 doit avoir un zéro généralisé dans $(t_1, t_2]$.

(iii) Si y_1 a un zéro généralisé à t_1 et à t_2 avec $t_2 > t_1$, alors y_2 doit avoir un zéro généralisé dans $[t_1, t_2]$.

Définition 1.15. *On dit que l'équation aux différences (1.20) est "disconjuguée" sur $[a, b+2]$ si toute solution non triviale de (1.20) a au plus un zéros généralisé sur $[a, b+2]$.*

Exemple 1.9. *L'équation aux différences*

$$y(t+1) - \sqrt{3}y(t) + y(t-1) = 0,$$

est disconjuguée sur tout intervalle de longueur inférieure à 6. Ceci découle du fait que toute solution de cette équation est de la forme : $y(t) = A\sin(\frac{\pi t}{6} + B)$, $A, B \in \mathbb{R}$.
Par contre, si on considère l'équation

$$y(t+2) - 7y(t+1) + 12y(t) = 0,$$

on trouve qu'elle est toujours disconjuguée car sa solution est : $y(t) = c_1 4^t + c_2 3^t$.

Considérons le problème aux limites :

$$\Delta^2 y(t-1) + 2y(t) = 0,$$

$$y(0) = A,\ y(2) = B.$$

Si $A = B = 0$, ce problème admet une infinité de solutions et si $A = 0$ et $B \neq 0$, il n'admet pas de solution.

Dans le théorème suivant, on va montrer qu'avec l'hypothèse de disconjugaison ce type de problème aux limites possède une solution unique.

Théorème 1.9. *[9, Theorem 6.7, page 243]. Si l'équation $Ly(t) = 0$ est disconjuguée sur $[a, b+2]$, alors le problème aux limites*

$$\begin{aligned} Ly(t) &= h(t), \\ y(t_1) &= A, \\ y(t_2) &= B, \end{aligned}$$

où $a \leq t_1 < t_2 \leq b+2$ et $A, B \in \mathbb{R}$, admet une solution unique.

Démonstration 11. *Soient y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes de l'équation $Ly(t) = 0$ et soit y_p une solution particulière de $Ly(t) = h(t)$, alors la solution générale de $Ly(t) = h(t)$ est donnée par*

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + y_p(t).$$

Les conditions aux limites conduisent au système d'équations suivant

$$\begin{cases} C_1 y_1(t_1) + C_2 y_2(t_1) &= A - y_p(t_1) \\ C_1 y_1(t_2) + C_2 y_2(t_2) &= B - y_p(t_2). \end{cases}$$

Ce système a une solution unique si et seulement si

$$\begin{vmatrix} y_1(t_1) & y_2(t_1) \\ y_1(t_2) & y_2(t_2) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Supposons que

$$\begin{vmatrix} y_1(t_1) & y_2(t_1) \\ y_1(t_2) & y_2(t_2) \end{vmatrix} = 0.$$

Alors, il existe des constantes d_1, d_2 (($d_1 = y_2(t_2)$ et $d_2 = -y_1(t_2)$) ou ($d_1 = -y_2(t_1)$ et $d_2 = y_1(t_1)$)), non nulles toutes les deux, telles que la solution non triviale de $Ly(t) = 0$

$$y(t) = d_1 y_1(t) + d_2 y_2(t)$$

satisfait

$$y(t_1) = y(t_2) = 0.$$

Ceci contredit la disconjugaison de $Ly(t) = 0$ sur $[a, b+2]$.

1.1.5 Fonction de Green

Dans ce qui suit, nous introduiserons la fonction de Green pour un problème aux limite conjugué à deux points. Il s'ensuit que sous certaines conditions, la solution d'un problème aux limites non homogène peut être exprimé à l'aide du la fonctions de Green. D'après le théorème 1.9, si l'équation $Ly(t) = 0$ est disconjuguée sur $[a, b+2]$, alors le problème

$$Ly(t) = h(t), \quad t \in [a+1, b+1] \tag{1.28}$$

$$y(a) = 0, \tag{1.29}$$

$$y(b+2) = 0, \tag{1.30}$$

admet une unique solution y. On aimerait avoir une formule pour $y(t)$ comme la variation des constantes. Supposons d'abord qu'il existe une fonction $G = G(t, s)$ qui satisfait les conditions suivantes :

(a) $G(t, s)$ est définie pour $a \leq t \leq b+2$, $a+1 \leq s \leq b+1$.

(b) $LG(t, s) = \delta_{ts}$, pour $a+1 \leq t \leq b+1$, $a+1 \leq s \leq b+1$, où $\delta_{ts} = 0$ si $t \neq s$ et $\delta_{ts} = 1$ si $t = s$.

(c) $G(a, s) = G(b+2, s) = 0$, pour $a+1 \leq s \leq b+1$.

Posons

$$y(t) = \sum_{s=a+1}^{b+1} G(t, s)h(s).$$

Montrons que y satisfait (1.28)-(1.30). D'abord par (c), on a

$$y(a) = \sum_{s=a+1}^{b+1} G(a, s)h(s) = 0$$

et

$$y(b) = \sum_{s=a+1}^{b+1} G(b, s)h(s) = 0.$$

Alors, les conditions aux bords (1.29) et (1.30) sont vérifiées pa y.

D'autre part, pour $a+1 \leq t \leq b+1$, on a

$$\begin{aligned} Ly(t) &= \sum_{s=a+1}^{b+1} LG(t, s)h(s) \\ &= \sum_{s=a+1}^{b+1} \delta_{ts}h(s) \\ &= h(t). \end{aligned}$$

Ainsi nous avons montré que s'il existe une fonction $G = G(t,s)$ vérifiant $(a)-(c)$, alors $t \mapsto y(t) = \sum\limits_{s=a+1}^{b+1} G(t,s)h(s)$ est une solution du problème (1.28)-(1.30).

Maintenant, montrons que si l'équation $Ly(t) = 0$ est disconjuguée sur $[a, b+2]$, alors il existe une fonction G vérifiant les conditions $(a)-(c)$.

Soit y_1 la solution du problème initial $Ly(t) = 0,\ t \in [a, b+2],\ y(a) = 0,\ y(a+1) = 1$ et soit $z = z(t,s)$ la fonction de Cauchy pour $Ly(t) = 0$.

Pour $a \leq t \leq b+2,\ a+1 \leq s \leq b+1$, nous définissons $G(t,s)$ par :

$$G(t,s) = \begin{cases} -\frac{z(b+2,s)}{y_1(b+2)}\, y_1(t), & t \leq s \\ z(t,s) - \frac{z(b+2,s)}{y_1(b+2)}\, y_1(t), & s \leq t. \end{cases} \tag{1.31}$$

Notons que

- $Ly(t) = 0$ est disconjuguée sur $[a, b+2]$ entraîne que $y_1(b+2) > 0$.
- $z(s,s) = 0$ nous permettra d'écrire $t \leq s$ et $s \leq t$ dans la définition de $G(t,s)$.

On a

$$G(a,s) = -\frac{z(b+2,s)}{y_1(b+2)}\, y_1(a) = 0$$

et

$$G(b+2,s) = z(b+2,s) - \frac{z(b+2,s)}{y_1(b+2)}\, y_1(b+2) = 0,$$

alors G satisfait la condition (c).

Montrons que G satisfait la condition (b). On distingue trois cas :

- Si $t \geq s+1$, alors

$$LG(t,s) = Ly(t,s) - \frac{z(b+2,s)}{y_1(b+2)}\, Ly_1(t) = 0.$$

- Si $t \leq s-1$, alors

$$LG(t,s) = -\frac{z(b+2,s)}{y_1(b+2)}\, Ly_1(t) = 0.$$

– Si $t = s$, alors

$$\begin{aligned} LG(s,s) &= p(s)G(s+1,s) + c(s)G(s,s) + p(s-1)G(s-1,s) \\ &= p(s)\, z(s+1,s) - \frac{z(b+2,s)}{y_1(b+2)}\, Ly_1(s) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donc $G(t,s)$ satisfait les conditions $(a)-(c)$.

Ensuite, nous montrons que si l'équation $Ly(t) = 0$ est discojuguée sur $[a, b+2]$, alors il existe une unique fonction vérifiant les conditions $(a)-(c)$.

On sait que la fonction G définie par l'équation (1.31) satisfait les conditions $(a)-(c)$. Supposons que $H = H(t,s)$ satisfait aussi les conditions $(a)-(c)$. Fixons $s \in [a+1, b+1]$ et posons

$$y(t) = G(t,s) - H(t,s).$$

Il découle de (b) que y est une solution de $Ly(t) = 0,\ t \in [a, b+2]$.
De la condition (c), on aura $y(a) = 0$, $y(b+2) = 0$. Ensuite, comme $Ly(t) = 0$ est disconjuguée sur $[a, b+2]$, on doit avoir $y \equiv 0$ sur $[a, b+2]$. Comme $s \in [a+1, b+1]$ est arbitraire, il s'ensuit que

$$G(t,s) = H(t,s), \qquad \text{pour } a \leq t \leq b+2,\ a+1 \leq s \leq b+1.$$

Théorème 1.10. *[9, Theorem 6.8, page 246]. Supposons que l'équation $Ly(t) = 0$ est disconjuguée sur $[a, b+2]$. Alors le problème aux limites*

$$Ly(t) = h(t),\ t \in [a+1, b+1]$$

$$y(a) = y(b+2) = 0$$

admet une unique solution y donnée par

$$y(t) = \sum_{s=a+1}^{b+1} G(t,s)h(s),\ t \in [a, b+2],$$

où G est la fonction de Green du problème $Ly(t) = 0, y(a) = y(b+2) = 0$, définie par :

$$G(t,s) = \begin{cases} -\frac{z(b+2,s)}{y_1(b+2)}\, y_1(t), & t \leq s \\ z(t,s) - \frac{z(b+2,s)}{y_1(b+2)}\, y_1(t), & t \geq s \end{cases}$$

De plus, G vérifie $G(t,s) < 0$ sur le carré $a+1 \leq t, s \leq b+1$.

Démonstration 12. *Il reste à montrer que $G(t,s) < 0$ sur le carré $a+1 \leq t, s \leq b+1$.*

Pour cela, fixons $s \in [a+1, b+1]$. La disconjugaison de $Ly(t) = 0$ sur $[a, b+2]$ entraîne que $y_1(t) > 0$ pour $a \leq t \leq b+2$ et $z(t,s) > 0$ pour $s < t \leq b+2$.

D'où, pour $a+1 \leq t \leq s$,

$$G(t,s) = -\frac{z(b+2,s)}{y_1(b+2)}\, y_1(t) < 0.$$

Pour $s \leq t \leq b+2$,

$$G(t,s) = z(t,s) - \frac{z(b+2,s)}{y_1(b+2)}\, y_1(t),$$

qui, en fonction de t, est une solution de $Ly(t) = 0$ sur $[a, b+2]$.

On a $G(b+2,s) = 0$ et $G(s,s) < 0$, alors

$$G(t,s) < 0, \quad s \leq t \leq b+1.$$

Comme s est arbitraire dans $[a+1, b+1]$, nous obtenons le résultat souhaité.

Exemple 1.10. *Trouver la fonction de Green du problème*

$$\Delta\left(p(t-1)\Delta y(t-1)\right) = 0, \tag{1.32}$$

$$y(a) = y(b+2) = 0.$$

D'aprés l'exemple (1.6), la fonction de Cauchy de l'équation (1.32) est

$$z(t,s) = \sum_{\tau=s}^{t-1} \frac{1}{p(\tau)}, \quad t \geq s.$$

La solution de l'équation (1.32) qui satisfait les conditions initiales $y(a) = 0$, $y(a+1) = 1$ est

$$y_1(t) = z(t,a) = \sum_{\tau=a}^{t-1} \frac{1}{p(\tau)}.$$

Ensuite, pour $t \leq s$

$$\begin{aligned} G(t,s) &= -\frac{z(b+2,s)}{y_1(b+2)}\, y_1(t) \\ &= -\frac{\sum_{\tau=s}^{b+1} \frac{1}{p(\tau)}}{\sum_{\tau=a}^{b+1} \frac{1}{p(\tau)}} \sum_{\tau=a}^{t-1} \frac{1}{p(\tau)} \end{aligned}$$

pour $t \geq s$

$$\begin{aligned}
G(t,s) &= z(t,s) - \frac{z(b+2,s)}{y_1(b+2)}\, y_1(t) \\
&= \sum_{\tau=s}^{t-1} \frac{1}{p(\tau)} - \frac{\sum_{\tau=s}^{b+1} \frac{1}{p(\tau)}}{\sum_{\tau=a}^{b+1} \frac{1}{p(\tau)}} \sum_{\tau=a}^{t-1} \frac{1}{p(\tau)} \\
&= -\frac{\sum_{\tau=a}^{s-1} \frac{1}{p(\tau)}}{\sum_{\tau=a}^{b+1} \frac{1}{p(\tau)}} \sum_{\tau=t}^{b+1} \frac{1}{p(\tau)}.
\end{aligned}$$

En résumé, la fonction de Green est donnée par :

$$G(t,s) = \begin{cases} -\dfrac{\sum_{\tau=s}^{b+1} \frac{1}{p(\tau)}}{\sum_{\tau=a}^{b+1} \frac{1}{p(\tau)}} \sum_{\tau=a}^{t-1} \frac{1}{p(\tau)}, & \textit{si } \ t \leq s \\[2ex] -\dfrac{\sum_{\tau=a}^{s-1} \frac{1}{p(\tau)}}{\sum_{\tau=a}^{b+1} \frac{1}{p(\tau)}} \sum_{\tau=t}^{b+1} \frac{1}{p(\tau)}, & \textit{si } \ s \leq t. \end{cases}$$

En particulier, la fonction de Green du problème :

$$\Delta^2 y(t-1) = 0,$$

$$y(a) = y(b+2) = 0$$

est définie par :

$$G(t,s) = \begin{cases} -\frac{(t-a)(b+2-s)}{b+2-a}, & \text{si } \ t \leq s \\ -\frac{(s-a)(b+2-t)}{b+2-a}, & \text{si } \ s \leq t. \end{cases} \tag{1.33}$$

Corollaire 1.3. *[9, Corollary 6.4, page 249]. Si* $Ly(t) = 0$ *est disconjuguée sur* $[a, b+2]$*, la solution unique du problème aux limites*

$$Ly(t) = h(t),\ t \in [a+1, b+1]$$

$$y(a) = A,\ y(b+2) = B,$$

est donnée par

$$y(t) = u(t) + \sum_{s=a+1}^{b+1} G(t,s)h(s),\ t \in [a, b+2].$$

où G est la fonction de Green du problème $Ly(t) = 0$, $y(a) = y(b+2) = 0$ et u est la solution du problème $Lu(t) = 0$, $u(a) = A$, $u(b+2) = B$.

Exemple 1.11. *Résolvons le problème aux limites linéaire :*

$$\Delta^2(t-1) = 12, \ t \in [1,5]$$

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y(6) = 7. \end{cases}$$

D'après le théorème 1.7, la solution de problème homogène associé a ce problème est donnée par

$$y(t) = 12 \sum_{s=1}^{s=5} G(t,s), \ t \in [0,6],$$

et d'après l'exemple 1.10

$$G(t,s) = \begin{cases} -\frac{(6-s)(t)}{6}, t \leq s \\ -\frac{(6-t)(s)}{6}, s \leq t. \end{cases}$$

Donc la solution de problème homogène est donnée par

$$y(t) = 6t^2 - 36, \ t \in [0,6].$$

Du corollaire 1.2, la solution générale s'écrit ce cette forme

$$y(t) = u(t) + 6t^2 - 36t, \ t \in [0,6],$$

où u est la solution du problème :

$$\Delta^2 u(t-1) = 0,$$

$$\begin{cases} u(0) = 1 \\ u(6) = 7. \end{cases}$$

On trouve que $u(t) = 1 + t$. D'où, $y(t) = 6t^2 - 35t + 1, \ t \in [0,6]$.

1.2 Outils mathématiques essentiels

1.2.1 Cônes et relation d'ordre partiel

Dans ce qui suit $(E, \|.\|)$ désigne un espace de Banach.

Définition 1.16. *Un sous ensemble $\mathcal{P} \subset E$ non vide, convexe et fermé est dit cône s'il vérifie les deux conditions suivantes :*

(i) $(x \in \mathcal{P}$ *et* $\lambda \geq 0) \Rightarrow \lambda x \in \mathcal{P}$ *;*

(ii) $(x \in \mathcal{P}$ *et* $-x \in \mathcal{P}) \Rightarrow x = 0$, *i.e.,* $(\mathcal{P} \cap (-\mathcal{P}) = \{0\})$.

Définition 1.17. *Pour tout cône $\mathcal{P}$ de E, on peut définir sur E une relation d'ordre partiel comme suit :*

$$\forall x, y \in E : \; x \leq y \Leftrightarrow y - x \in \mathcal{P}.$$

Nous pouvons aussi définir les relations d'ordre partiel suivantes :

- ► $x < y \Leftrightarrow x \leq y$ et $x \neq y$.
- ► $x \ll y \Leftrightarrow y - x \in \mathring{\mathcal{P}}$ si $\mathring{\mathcal{P}} \neq \emptyset$.
- ► $x \nleq y \Leftrightarrow y - x \notin \mathcal{P}$.

On définit aussi, le segment d'un cône $\mathcal{P}$ (intervalle ordonné) par :

$$[x, y] = \{z \in \mathcal{P} : \; x \leq z \leq y\}.$$

Définition 1.18. *Soit $\mathcal{P}$ un cône de E. Alors, on dit que*

- ► *$\mathcal{P}$ est normal s'il existe une constante $\delta > 0$ tel que*

$$\|x + y\| \geq \delta, \; \forall x, y \in \mathcal{P} \; avec \; \|x\| = \|y\| = 1.$$

- ► *$\mathcal{P}$ est solide si $\mathring{\mathcal{P}} \neq \emptyset$ où $\mathring{\mathcal{P}}$ est l'intérieur de $\mathcal{P}$.*
- ► *$\mathcal{P}$ est générateur si $E = \mathcal{P} - \mathcal{P}$, i.e, $\forall x \in E, \exists\, u, v \in \mathcal{P}$ tels que : $x = u - v$.*

  (en d'autres termes tout élément $x \in E$ peut s'écrire sous la forme : $x = u - v$ où $u, v \in \mathcal{P}$).

Remarque 1.12. *Géométriquement, la normalité d'un cône signifie que l'angle entre chaque deux vecteurs unitaires positifs ne peut pas dépasser π. Autrement dit, un cône normal ne peut pas être trop large.*

Exemple 1.12.

1. *Soient* $E = \mathbb{R}^n$ *et* $\mathcal{P}_1 = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : \ x_i \geq 0, \ i = 1, ..., n\} = (\mathbb{R}_+)^n$.
   (a) $\mathcal{P}_1$ *est un cône solide et générateur dans* $\mathbb{R}^n$, *car* $\mathring{\mathcal{P}}_1 = (\mathbb{R}_+^*)^n$ *et comme* $\mathbb{R}_+$ *est un cône générateur sur* $\mathbb{R}$, *alors pour* $i = 1, ..., n : \forall x_i \in \mathbb{R}, \exists u_i, v_i \in \mathbb{R}_+ : x_i = u_i - v_i$.
   (b) *De plus, comme toutes les normes sur* $\mathbb{R}^n$ *sont monotones on a*
   $$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \, 0_{\mathbb{R}^n} \leq x \leq y \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|.$$
   Donc $\mathcal{P}_1$ *est normal avec la constante de normalité* $N = 1$.
2. *Soit* $E = \mathcal{C}(G)$, *l'espace des fonctions continues sur un fermé borné* $G \subset \mathbb{R}^n$, *muni de la norme* $\|x\|_{\mathcal{C}(G)} = \sup\limits_{t \in G} |x(t)|$ *et* $\mathcal{P}_2 = \{x \in \mathcal{C}(G) : x(t) \geq 0, \ \forall t \in G\}$.
   (a) $\mathcal{P}_2$ *est un cône solide et générateur sur* $\mathcal{C}(G)$.
   (b) $\mathcal{P}_2$ *est normal car la norme* $\|.\|_{\mathcal{C}(G)}$ *est monotone sur* $\mathcal{C}(G)$.
   (c) *On peut définir d'autres cônes sur* E *tels que :*
   $$\mathcal{P}_3 = \{x \in \mathcal{C}(G) : x(t) \geq 0, \ \text{et} \ \int_{G_0} x(t)dt \geq \varepsilon_0 \|x(t)\|_{\mathcal{C}(G)}\},$$
   $$\mathcal{P}_4 = \{x \in \mathcal{C}(G) : x(t) \geq 0, \ \text{et} \ \min_{t \in G_1}(x(t)) \geq \varepsilon_1 \|x(t)\|_{\mathcal{C}(G)}\}.$$
   avec G_0, G_1 *sont des sous ensembles fermé de* G, *et* ε_0 *et* ε_1 *sont deux constantes tel que :* $0 < \varepsilon_0 < mes(G_0)$ *et* $0 < \varepsilon_1 < 1$. *On a* $\mathcal{P}_3 \subset \mathcal{P}_2$ *et* $\mathcal{P}_4 \subset \mathcal{P}_2$ *et tous les deux sont des cônes solides et normaux sur* $\mathcal{C}(G)$.
3. *Soit* $E = L^p(\Omega)$, *l'espace des fonctions Lebesgue-intégrable sur* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *avec* $p \geq 1$ *et* $0 < mes(\Omega) < \infty$ *muni de la norme* $\|x\| = \left(\int_\Omega |x(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}$ *et*
   $$\mathcal{P}_5 = L_p^+(\Omega) = \{x \in L^p(\Omega) : \ x(t) \geq 0 \ \ p.p \ dans \ \Omega\}.$$

Il est clair que $\mathcal{P}_5$ est un cône générateur, et puisque la norme de $L^p(\Omega)$ est croissante, alors il est normal, mais il n'est pas solide, car $\mathring{\mathcal{P}}_5 = \emptyset$ sauf le cône $L^+_\infty(\Omega)$ qui est d'intérieur non vide.

1.2.2 Définition de quelques classes d'applications

Définition 1.19. *Soit $T\colon\ \Omega \subset E \to E$ une application continue. On dit que :*

(i) T est bornée si elle transforme les bornés de Ω en des ensembles bornés.

(ii) T est compacte si l'ensemble $T(\Omega)$ est relativement compact.

(iii) T est complètement continue si elle transforme les bornés de Ω en des ensembles relativement compacts.

Remarque 1.13. *(a) Toute application compacte est complètement continue.*

(b) Si Ω est borné, la réciproque est vraie.

Définition 1.20. *Soit $\mathcal{P}$ un cône d'un espace de Banach réel E.*

- *Une application α est dite fonctionnelle continue positive concave sur $\mathcal{P}$ si :*

  $\alpha : \mathcal{P} \longrightarrow [0, \infty)$ *est continue et*

$$\alpha(tx + (1-t)y) \geq t\alpha(x) + (1-t)\alpha(y),\ \forall\, x, y \in \mathcal{P} \text{ et } t \in [0, 1].$$

- *Une application β est dite fonctionnelle continue positive convexe sur $\mathcal{P}$ si :*

  $\beta : \mathcal{P} \longrightarrow [0, \infty)$ *est continue et*

$$\beta(tx + (1-t)y) \leq t\beta(x) + (1-t)\beta(y),\ \forall\, x, y \in \mathcal{P} \text{ et } t \in [0, 1].$$

1.2.3 Continuité d'une fonction sur un espace discret

Définition 1.21. *1. Soit X un ensemble. L'ensemble des parties de X définit une topologie sur X appelée topologie discrète. X muni de cette topologie est alors appelé espace discret. On dit qu'une partie A d'un espace topologique X est un ensemble discret lorsque la topologie induite sur A est la topologie discrète.*

2. *Soient* (E, τ_1) *et* (F, τ_2) *deux espaces topologiques et* $f : (E, \tau_1) \to (F, \tau_2)$ *une fonction. Alors,* f *est continu sur* E *si et seulement si* $\forall U \in \tau_2, f^{-1}(U) \in \tau_1$.

3. *Soit* (E, d) *un espace métrique possèdant une topologie associée* τ*. Pour tout point* a *de* E*, les boules ouvertes de centre* a *et de rayons strictement positifs forment une base de voisinages de* a *pour cette topologie. Si* τ' *désigne la topologie associée à un espace métrique* (E', d')*, alors : Une fonction* f *de* (E, d) *dans* (E', d') *est continue en un point de* E *si et seulement si elle est continue en ce point, considérée comme une fonction de* (E, τ) *dans* (E', τ').

Caractérisations équivalentes des applications continues

Soient E et F deux espaces topologiques et f une application de E dans F. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est continue en tout point de E ;
2. Pour tout ouvert U de F, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de E ;
3. Pour tout fermé G de F, $f^{-1}(G)$ est un fermé de E ;
4. Pour toute partie A de E, $f(\overline{A})$ est inclus dans $\overline{f(A)}$;
5. Pour toute partie B de F, $\overline{f^{-1}(B)}$ est inclus dans $f^{-1}(\overline{B})$;
6. Pour toute partie C de F, $\partial f^{-1}(C)$ est inclus dans $f^{-1}(\partial C)$.

Tout au long de ce mémoire :

1. L'intervalle $[a, b]$ designe l'intervalle discret $[a, b] \cap \mathbb{N}$.
2. La topologie sur $[a, b] \cap \mathbb{N}$ sera la topologie discréte.
3. Une fonction $f : [a, b] \cap \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue signifie que f est continue de l'espace topologique $[a, b] \cap \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ muni de la topologie discrète dans l'espace topologique $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle.

1.2.4 Critère de compacité d'Ascoli-Arzelà (version discrète)

Théorème 1.11. *[1, Theorem 17.1]. Soit E est un espace de Banach (pas nécessairement de dimension finie) et soit A un sous-ensemble fermé de $\mathcal{C}([a,b]\cap\mathbb{N},E)$. Si A est uniformément borné et l'ensemble $\{u(x) : u\in A\}$ est relativement compact pour tout $x\in[a,b]\cap\mathbb{N}$, alors A est compact.*

Cas particulier : $E=\mathbb{R}$. Pour montrer que l'ensemble A est relativement compact, il suffit de montrer qu'il est uniformément borné.

Exemple 1.13. *Soient l'espace de Banach $X=\{y:[0,b+1]\to\mathbb{R}\}$, muni de la norme de la convergence uniforme et $f:[0,b+2]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application continue.*
L'opérateur A défini par :

$$\begin{array}{rccl} A: & \mathcal{C}([0,b+2]\,,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}([0,b+2]\,,\mathbb{R}) \\ & y & \longmapsto & Ay(t)=\sum\limits_{s=1}^{b+1}G(t,s)f(s,y(s)),\ t\in[0,b+1] \end{array}$$

est complètement continu.

2 Etude d'une équation aux différences non linéaire du second ordre avec des conditions aux bords linéaires séparées

Introduction

Dans ce chapitre, nous utiliserons le théorème du point fixe d'expansion et de compression d'un cône de type norme de Guo-Krasnosel'skii pour démontrer l'existence de solutions positives du problème aux limites associé à une équation aux différences du second ordre suivant :

$$-\Delta^2 y(t-1) = f(t, y(t)),\ t \in I = [1, b+1] \cap \mathbb{N} \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} \alpha y(0) - \beta \Delta y(0) = 0 \\ \gamma y(b+1) + \delta \Delta y(b+1) = 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

où $b \geq 2$ est un entier, $\alpha, \beta, \gamma \geq 0, \delta > 0$ avec $\rho = \alpha\gamma(b+1) + \alpha\delta + \beta\gamma > 0$ et $f : I \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ est une fonction continue. Les résultats présentés dans ce chapitre ont développés dans [12].

2.1 Fonction de Green : définition et propriétés

Soit $G(n, s)$ la fonction de Green pour le BVP :

$$\begin{cases} Ly = -\Delta^2 y(t-1) = 0, t \in \mathbb{I} \\ \alpha y(0) - \beta \delta y(0) = 0 \\ \gamma y(b+1) + \delta \Delta y(b+1) = 0. \end{cases}$$

La fonction de Green G est l'unique fonction vérifiant les propeiétés suivantes :

(a) $G(t,s)$ est défini pour $0 \leq t \leq b+1$, $1 \leq s \leq b+1$

(b) $LG(n,s) = \delta_{ns} = \begin{cases} 1, & \text{si } \ t = s \\ 0, & \text{si } \ t \neq s. \end{cases}$

(c) Pour chaque $1 \leq s \leq b+1$, $t \mapsto G(.,s)$ vérifie les conditions aux limites :

$$\alpha G(0,s) - \beta\delta G(0,s) = 0$$

$$\gamma G(b+1,s) + \delta\Delta G(b+1,s) = 0.$$

De la propriété (b), la fonction G peut s'écrire sous la forme :

$$G(t,s) = \begin{cases} K(s)n + L(s), & \text{si } \ n \leq s \\ M(s)n + N(s), & \text{si } \ s \leq n \end{cases}$$

Notons que pour $t = s$, $K(s)s + L(s) = M(s)s + N(s)$, ce qui nous donne

$$K(s)s - M(s)s = N(s) - L(s).$$

Il résulte de (b) que

$$M(s)t + N(s) - (K(s)t + L(s)) = -(t-s).$$

En effet,

$$\begin{aligned} t(M(s) - k(s)) + N(s) - L(s)) &= t(M(s) - K(s)) + s(K(s) - M(s)) \\ -t(K(s) - M(s)) + s(K(s) - M(s)) &= (s-t)(K(s) - M(s)) \end{aligned}$$

D'après (b), on a $LG(s,s) = 1$. Donc

$$M(s) - K(s) = -1,$$

$$N(s) - L(s) = s.$$

De la propriété (c), on aura

$$\alpha L(s) - \beta K(s) = 0,$$

$$\gamma(M(s)(b+1)+N(s))+\delta M(s)=0.$$

En résolvant le systéme d'équations :

$$\begin{cases} K(s)s - M(s)s = N(s) - L(s) \\ M(s) - K(s) = -1 \\ N(s) - L(s) = s \\ \alpha L(s) - \beta K(s) = 0 \\ \gamma(M(s)(b+1)+N(s))+\delta M(s)=0, \end{cases}$$

on obtient

$$K(s) = \frac{\alpha(\gamma(b+1)+\delta-\gamma s)}{\rho},\ \ L(s) = \frac{\beta(\gamma(b+1)+\delta-\gamma s)}{\rho}$$
$$M(s) = \frac{\gamma(\alpha s+\beta)}{\rho},\ \ N(s) = \frac{(\beta+\alpha s)(\gamma(b+1)+\delta)}{\rho}.$$

D'où,

$$G(t,s) = \frac{1}{\rho}\begin{cases} (\alpha t+\beta)(\gamma(b+1)+\delta-\gamma s), & t \leq s \\ (\alpha s+\beta)(\gamma(b+1)+\delta-\gamma t), & s \leq t. \end{cases} \tag{2.3}$$

Les propriétés de la fonction de Green

Le lemme suivant nous donne quelques propriétés de la fonction de Green.

Lemme 2.1. *La fonction G vérifie les propriétés suivantes :*

1. $G(t,s) \geq 0,\ \forall t,s \in I$
2. $\sum_{s=1}^{b+1} G(s,s) = \frac{1}{\eta}$.
3. $G(t,s) \leq G(s,s)\ \forall t,s \in I$
4. $G(t,s) \geq \sigma G(s,s),\ \frac{b+1}{4} \leq t \leq \frac{3(b+1)}{4}$ *et* $1 \leq s \leq b+1$, *où*

$$\sigma = \min\left\{\frac{\alpha(b+1)+4\beta}{4(\alpha(b+1)+\beta)}, \frac{\gamma(b+1)+4\delta}{4\gamma b+4\delta}\right\}. \tag{2.4}$$

Démonstration 13. (1) *Si* $t \leq s$, $G(t,s) = \frac{1}{\rho}(\alpha t + \beta)(\gamma(b+1) + \delta - \gamma s)$.

On a $1 \leq s \leq b+1$, *alors*

$$\begin{aligned} \gamma s &\leq \gamma(b+1) + \delta \\ \gamma s(\alpha t + \beta) &\leq (\gamma(b+1) + \delta)(\alpha t + \beta) \end{aligned}$$

donc $(\gamma(b+1) + \delta)(\alpha t + \beta) - \gamma s(\alpha t + \beta) \geq 0$, *ce qui démontre que* $G(t,s) \geq 0$ *si* $t \leq s$.

De même, on montre que $G(t,s) \geq 0$ *si* $s \leq t$.

(2)

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{b+1} G(s,s) &= \sum_{s=1}^{b+1} \left(\frac{1}{\rho}(\alpha s + \beta)(\gamma(b+1) + \delta - \gamma s) \right) \\ &= \frac{1}{\rho} \left((\alpha\gamma(b+1) - \beta\gamma + \alpha\delta) \sum_{s=1}^{b+1} s - \alpha\gamma \sum_{s=1}^{b+1} s^2 + \sum_{s=1}^{b+1} \beta\gamma(b+1) + \sum_{s=1}^{b+1} \beta\delta \right). \end{aligned}$$

On a

$$\sum_{s=1}^{b+1} s = \frac{(b+1)(b+2)}{2}, \quad et \quad \sum_{s=1}^{b+1} s^2 = \frac{(b+1)(b+2)(2b+3)}{6}.$$

D'où,

$$\sum_{s=1}^{b+1} G(s,s) = \frac{(b+1)(b(b+2)\alpha\gamma + 3(b+2)\alpha\delta + 3b\beta\gamma + 6(b+1)\beta\delta)}{6\rho}.$$

(3) *Si* $t \leq s$, $G(t,s) = \frac{1}{\rho}(\alpha t + \beta)(\gamma(b+1) + \delta - \gamma s)$

$$\begin{aligned} \alpha t &\leq \alpha s \\ \alpha t + \beta &\leq \alpha s + \beta \\ \frac{1}{\rho}(\alpha t + \beta)(\gamma(b+1) + \delta - \gamma s) &\leq \frac{1}{\rho}(\alpha s + \beta)(\gamma(b+1) + \delta - \gamma s), \end{aligned}$$

ce qui nous donne $G(t,s) \leq G(s,s)$.

Si $s \leq t$, $G(t,s) = \frac{1}{\rho}(\alpha s + \beta)(\gamma(b+1) + \delta - \gamma t)$.

$$\begin{aligned} s &\leq t \\ \gamma(b+1) + \delta - \gamma s &\geq \gamma(b+1) + \delta - \gamma t \\ \frac{1}{\rho}(\alpha s + \beta)(\gamma(b+1) + \delta - \gamma s) &\geq \frac{1}{\rho}(\alpha s + \beta)(\gamma(b+1) + \delta - \gamma t), \end{aligned}$$

ce qui nous donne $G(t,s) \le G(s,s)$.

(3) *Soit* $t \le s$. *Pour* $t \ge \frac{b+1}{4}$, *on a*

$$\begin{aligned}(\alpha t+\beta) &\ge \frac{\alpha(b+1)+4\beta}{4}\\ G(t,s) &\ge \frac{(\alpha(b+1)+4\beta)(\gamma(b+1)+\delta-\gamma s)}{4\rho}.\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}\alpha s+\beta &\le \alpha(b+1)+\beta\\ \frac{1}{G(s,s)} &\ge \frac{\rho}{(\alpha(b+1)+\beta)(\gamma(b+1)+\delta-\gamma s)}.\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{G(t,s)}{G(s,s)} \ge \frac{\alpha(b+1)+4\beta}{4(\alpha(b+1)+\beta)}.$$

Soit $s \le t$, *Pour* $t \le \frac{3(b+1)}{4}$, *on a*

$$G(t,s) \ge \frac{((b+1)\gamma+4\delta)(\alpha s+\beta)}{4\rho},$$

et

$$\frac{1}{G(s,s)} \ge \frac{\rho}{(\alpha s+\beta)(\delta+\gamma b)}.$$

Donc

$$\frac{G(t,s)}{G(s,s)} \ge \frac{((b+1)\gamma+4\delta)}{4(\delta+\gamma b)}.$$

2.2 Théorème du point fixe d'expansion et de compression d'un cône de type norme de Krasnosel'skii

Théorème 2.1. *[10, Theorem 2.3.4]. Soient* Ω_1 *et* Ω_2 *deux ouverts bornés d'un espace de Banach* E *tels que* $0 \in \Omega_1$ *et* $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$. *Soit* $F : \mathcal{P} \cap (\overline{\Omega}_2 \setminus \Omega_1) \to \mathcal{P}$ *un opérateur complètement continu vérifiant l'une des conditions suivantes :*

(*i*) $\|Fx\| \le \|x\|,\ \forall x \in \mathcal{P} \cap \partial\Omega_1$ *et* $\|Fx\| \ge \|x\|,\ \forall x \in \mathcal{P} \cap \partial\Omega_2$;

(ii) $\|Fx\| \geq \|x\|, \ \forall x \in \mathcal{P} \cap \partial\Omega_1$ *et* $\|Fx\| \leq \|x\|, \ \forall x \in \mathcal{P} \cap \partial\Omega_2$.

Alors F a au moins un point fixe dans $\mathcal{P} \cap (\overline{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$.

2.3 Résultats d'existence

Nous établissons, dans cette section, des critères pour l'existence d'au moins deux solutions positives par l'application du théorème 2.1.

2.3.1 Résultats auxiliaires

On considère l'espace de Banach $X = \{y : I = [0, b+1] \cap \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$ muni de la norme

$$\|y\| = \max_{t \in I} |y(t)|.$$

Soit

$$\mathbf{T} = \{n \in \mathbb{N} \ : \ \frac{b+1}{4} \leq n \leq \frac{3(b+1)}{4}\} \subset I.$$

Comme $b \geq 2$, $T \neq \emptyset$. On considère le cône $\mathcal{P}$ de X défini par :

$$\mathcal{P} = \{y \in X \ : \ y(t) \geq 0, \forall\, t \in I \ \text{ et } \ \min_{t \in \mathbf{T}} y(t) \geq \sigma \|y\|\},$$

où σ est donné par (2.4).

Du chapitre 1, toute solution du problème (2.1)-(2.2) peut s'écrire sous la forme :

$$y(t) = \sum_{s=1}^{b+1} G(t,s) f(s, y(s)), \ \ t \in I.$$

On considère, maintenant, l'opérateur $A : X \to X$ défini par :

$$Ay(t) = \sum_{s=1}^{b+1} G(t,s) f(s, y(s)), \ t \in I.$$

Notons que, tout point fixe de A est une solution du problème (2.1)-(2.2).

Le lemme suivant donne quelques propriétés de l'opérateur A.

Lemme 2.2. *L'opérateur A envoie $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ et il est complètement continu.*

Démonstration 14. *(i) Montrons que $A(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}$.*

Soit $y \in \mathcal{P}$. Du fait que f est positive sur $I \times [0, \infty)$ et d'après les propriétés de la fonction de Green G, on aura

$$Ay(t) \geq 0, \ \forall\, t \in I$$

et

$$\begin{aligned} \min_{t\in\mathbf{T}} Ay(t) &= \min_{t\in\mathbf{T}} \sum_{s=1}^{b+1} G(t,s) f(s, y(s)) \\ &\geq \sigma \sum_{s=1}^{b+1} G(s,s)\, f(s, y(s)) \\ &\geq \sigma \max_{\tau\in I} \sum_{s=1}^{b+1} G(\tau, s)\, f(s, y(s)) \\ &\geq \sigma \|Ay\|. \end{aligned}$$

(ii) Montrons que l'opérateur A est complètement continu.

(a) Montrons que A est continu sur X. Soit (y_n) une suite de X telle que $y_n \to y$, $n \to \infty$. Montrons que $Ay_n \to Ay$, $n \to \infty$ dans X, il suffit de monter que $\|Ay_n - Ay\| \to 0$, $n \to \infty$ pour cela, il suffit de montrer que $|Ay_n(t) - Ay(t)| \to 0, n \to \infty, \forall t \in I$.

D'après la continuité de f, on a

$f(s, y_n(s)) \to f(s, y(s))$, $\forall\, s \in I$ quand $n \to \infty$, ce qui donne

$$Ay_n(t) = \sum_{s=1}^{b+1} G(t,s) f(s, y_n(s)) \to Ay_(t) \sum_{s=1}^{b+1} G(t,s) f(s, y(s)), \ n \to \infty, \forall t \in I.$$

Donc A est continu sur X.

(b) Montrons que l'image de tout borné par A est un ensemble relativement compact.

Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans X.

$$\exists m > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \|y_n\| \leq m.$$

Comme la fonction f continue, $\exists M > 0$ tel que $M = \sup\limits_{1\leq s\leq b+1, -m\leq z\leq m} |f(s,z)|$. De plus, $\exists K > 0$, tel que $|G(t,s)| \leq K$, $\forall t, s \in I$.

Montrons que la suite $(Ay_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée dans X. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et our tout

$t \in I$, on a

$$\begin{aligned} |Ay_n(t)| &\leq \sum_{s=1}^{b+1} |G(t,s)f(s,y_n(s))| \\ &\leq \sum_{s=1}^{b+1} KM \\ &\leq (b+1)KM. \end{aligned}$$

D'après la version discrète du critère de compacité d'Ascoli-Arzelà (Théorème **??***), l'opérateur A envoi les borné de X dans des ensemble relativement compact. D'où, A est complètement continue.*

2.3.2 Premier résultat d'existence

Supposons que la fonction f vérifie les conditions suivantes :

(H1) : $\lim_{y\to 0} \frac{f(t,y)}{y} = \infty, \quad \lim_{y\to\infty} \frac{f(t,y)}{y} = \infty,$ pour tout $t \in I$.

(H2) : Il existe un $L \geq 0$ tel que $f(t,y) < \eta L$, $\forall t \in I$ et $y \in [0,L]$, avec

$$\eta = \frac{6\rho}{(b+1)(b(b+2)\alpha\gamma + 3(b+2)\alpha\delta + 3b\beta\gamma + 6(b+1)\beta\delta)}. \tag{2.5}$$

Théorème 2.2. *Supposons que les hypothèses $(H1)$ et $(H2)$ sont satisfaites. Alors, le problème (2.1)-(2.2) a au moins deux solutions positives x_1 et x_2 vérifiant*

$$0 < \|x_1\| < L < \|x_2\|.$$

Démonstration 15. *Fixons $t_0 \in \mathbf{T}$ et choisissons $M > 0$ tel que*

$$\sigma M \sum_{s=\min \mathbf{T}}^{\max \mathbf{T}} G(t_0,s) > 1.$$

De la condition $\lim_{y\to 0} \frac{f(t,y)}{y} = \infty$ pour tout $t \in [1,b+1]$, il existe un réel $r > 0$ tel que $r < L$ et

$$f(t,y) \geq M\,y, \quad \textit{pour tout } \ 0 \leq y \leq r \ \textit{ et } \ t \in I.$$

De la condition $\lim_{y\to\infty} \frac{f(t,y)}{y} = \infty$ pour tout $t \in [1,b+1]$, il existe $R_1 > 0$ tel que

$$f(t,y) \geq My, \quad \textit{pour tout } \ y \geq R_1 \ \textit{ et } t \in I.$$

Choisissons R de sorte que $R > \max\{L, \frac{R_1}{\sigma}\}$. Posons

$$\Omega_1 = B(0,r), \ \ \partial\mathcal{P}_r = \{x \in \mathcal{P} \, : \, \|x\| = r\} = \mathcal{P} \cap \partial B(0,r)$$

$$\Omega_2 = B(0,L), \ \ \partial\mathcal{P}_L = \{x \in \mathcal{P} \, : \, \|x\| = L\}.$$

$$\Omega_3 = B(0,R), \ \ \partial\mathcal{P}_R = \{x \in \mathcal{P} \, : \, \|x\| = R\}.$$

(1) Montrons que $\|Ay\| > \|y\|, \forall\, y \in \partial\mathcal{P}_r$. Pour tout $y \in \partial\mathcal{P}_r$, on a

$$\begin{aligned}
\|Ay\| \geq |Ay(t_0)| &= \sum_{s=1}^{b+1} G(t_0,s) f(s,y(s)) \\
&\geq \sum_{s=1}^{b+1} G(t_0,s)\, My(s) \\
&\geq \sum_{s=\min \mathbf{T}}^{\max \mathbf{T}} G(t_0,s)\, My(s) \\
&\geq M\sigma \sum_{s=\min \mathbf{T}}^{\max \mathbf{T}} G(t_0,s)\|y\| \\
&> \|y\|.
\end{aligned}$$

(2) Montrons que $\|Ay\| < \|y\|, \forall\, y \in \partial\mathcal{P}_L$. De la condition $(H2)$ et la propriété (3) de la fonction G, pour tout $y \in \partial\mathcal{P}_L$, on a

$$\begin{aligned}
\|Ay\| &= \max_{t\in I} \sum_{s=1}^{b+1} G(t,s) f(s,y(s)) \\
&\leq \sum_{s=1}^{b+1} G(s,s) f(s,y(s)) \\
&< \eta L \sum_{s=1}^{b+1} G(s,s) \\
&= L \\
&= \|y\|.
\end{aligned}$$

(3) Montrons que $\|Ay\| > \|y\|, \forall\, y \in \partial\mathcal{P}_R$. Soit $y \in \partial\mathcal{P}_R$, alors

$$\min_{t\in\mathbf{T}} y(t) \geq \sigma\|y\| = \sigma R > \sigma\frac{R_1}{\sigma} = R_1.$$

Pour tout $y \in \partial\mathcal{P}_R$, on a

$$\begin{aligned}
\|Ay\| \geq |Ay(t_0)| &= \sum_{s=1}^{b+1} G(t_0,s) f(s,y(s)) \\
&\geq \sum_{s=1}^{b+1} G(t_0,s)\, My(s) \\
&\geq \sum_{s=\min \mathbf{T}}^{\max \mathbf{T}} G(t_0,s)\, My(s) \\
&\geq M\sigma \sum_{s=\min \mathbf{T}}^{\max \mathbf{T}} G(t_0,s)\|y\| \\
&> \|y\|.
\end{aligned}$$

Par suite, le théorème 2.1 assure que l'opérateur A a au moins deux points fixes x_1, $x_2 \in \mathcal{P}$, qui sont des solutions positives du problème (2.1)-(2.2)*, vérifiant*

$$r < \|x_1\| < L < \|x_2\| < R.$$

2.3.3 Deuxième résultat d'existence

Dans cette section, nous remplacerons les hypothèses $(H1)$ et $(H2)$ du théorem 2.2 par les suivantes :

(H3) : $\lim\limits_{y\to 0} \frac{f(t,y)}{y} = 0, \quad \lim\limits_{y\to\infty} \frac{f(t,y)}{y} = 0,$ *pour tout $t \in I$.*

(H4) : *Il existe un $p \geq 0$ tel que $f(t,y) > \xi\, p$, $\forall t \in I$ et $y \in [\sigma p, p]$*
avec $\xi^{-1} = \sum\limits_{s=\min \mathbf{T}}^{\max \mathbf{T}} G(t_1,s)$ pour $t_1 \in \mathbf{T}$ fixé et σ donné par (2.4)*.*

Théorème 2.3. *Supposons que les hypothèses $(H3)$ et $(H4)$ sont satisfaites. Alors, le problème* (2.1)-(2.2) *a au moins deux solutions positives y_1 et y_2 vérifiant*

$$0 < \|y_1\| < p < \|y_2\|.$$

Démonstration 16. *De la deuxieme limite de la condition (H3), pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $M > 0$ telle que*

$$f(t,y) < M + \epsilon\, y,\ t \in [1, b+1].$$

Alors, pour tout $t \in I$ *on a*

$$\begin{aligned} |Ay(t)| &= \sum_{s=1}^{b+1} G(t,s) f(s,y(s)) \\ &< \sum_{s=1}^{b+1} G(s,s)(M+\epsilon y(s)). \end{aligned}$$

Puisque $\epsilon > 0$ *est arbitraire, on aura*

$$|Ay(t)| \leq M \sum_{s=1}^{b+1} G(s,s) = \frac{M}{\eta},\ t \in I.$$

D'où $\|Ay\| \leq \frac{M}{\eta}$.

Choisissons $R > p$ *suffisament garand de sort que* $\frac{M}{\eta} < R$*, alors pour* $y \in \partial\mathcal{P}_R$.

$$\|Ay\| < R = \|y\|.$$

D'autre part, de la peremier limite de la condition $(H3)$*, il existe* r *tel que* $r < p$ *et* $f(t,y) < \eta\, y$*, pour* $t \in I$ *et* $0 \leq y \leq r$.

Pour $y \in \partial\mathcal{P}_r$*, on aura*

$$\begin{aligned} \|Ay\| &= \max_{t \in I} \sum_{s=1}^{b+1} G(t,s) f(s,y(s)) \\ &\leq \sum_{s=1}^{b+1} G(s,s) f(s,y(s)) \\ &\leq \sum_{s=1}^{b+1} G(s,s)\eta\, y(s) \\ &\leq \sum_{s=1}^{b+1} G(s,s)\eta\, \|y\| \\ &= \|y\|. \end{aligned}$$

Soit $y \in \partial\mathcal{P}_p$*, alors* $\min_{t \in \mathbf{T}} y(t) \geq \sigma\|y\| = \sigma p$*. Soit* $t_1 \in I$*, d'après la condition* $(H4)$*, pour tout* $y \in \partial\mathcal{P}_p$ *on a*

$$\begin{aligned} |(Ay)(t_1)| &= \sum_{s=1}^{b+1} G(t_1,s) f(s,y(s)) \\ &\geq \sum_{s=\min_{\mathbf{T}}}^{\max_{\mathbf{T}}} G(t_1,s) f(s,y(s)) \\ &> \sum_{s=\min_{\mathbf{T}}}^{\max_{\mathbf{T}}} G(t_1,s)\lambda p = p = \|y\|. \end{aligned}$$

Cela implique $\|Ay\| > \|y\|$ *pour* $y \in \partial\mathcal{P}_p$.

D'après le théorème 2.1, l'opérateur A *a au moins deux points fixes positifs* y_1, y_2 *et donc le problème aux limites* (2.1)-(2.2) *a deux solutions positives vérifiant* $r < \|y_1\| < p < \|y_2\| < R$.

3 Etude d'une équation aux différences non linéaire du second ordre avec des conditions aux limites de Drichlet

Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude de l'existence de solutions positives pour l'équation aux différences du second ordre

$$-\Delta^2 u(k) = f(u(k)), k \in \{0, 1, \dots, N\}, \tag{3.1}$$

avec les conditions aux limites de Dirichlet

$$u(0) = u(N+2) = 0, \tag{3.2}$$

où $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ est une fonction continue et Δ^2 est l'opérateur de différence du second ordre défini par : $\Delta^2 u(k) = u(k+2) - 2u(k+1) + u(k)$. Pour démontrer les résultats d'existence nous utiliserons des théorèmes de point fixe sur les cônes d'un espace de Banach de type fonctionnel.

3.1 Fonction de Green : définition et propriétés

D'après l'étude présentée dans le chapitre 1, la fonction de Green pour l'équation $-\Delta^2 u = 0$ satisfaisant les conditions de Dirichlet (3.2) est donnée par :

$$G(k, l) = \frac{1}{N+2} \begin{cases} k(N+2-l), k \in \mathbb{N} \ \text{ si } \ k \in \{0, \dots, l\} \\ l(N+2-k), k \in \mathbb{N} \ \text{ si } \ k \in \{l+1, \dots, N+2\}, \end{cases} \tag{3.3}$$

et toute solution u du problème (3.1)-(3.2) peut s'écrire sous la forme

$$u(k) = \sum_{l=1}^{N+1} G(k,l) f((u(k)),\ k \in \{0,\dots,N+2\}.$$

La fonction de Green G vérifie les propriétés suivantes :

Lemme 3.1. *1.* $G(k,l) \geq 0,\ \forall\,(k,l) \in \{0,\dots,N+2\} \times \{0,\dots,N+2\}.$

2. $G(N+2-k, N+2-l) = G(k,l),\ \forall\,(k,l) \in \{0,\dots,N+2\} \times \{0,\dots,N+2\}.$

3. $\frac{G(y,l)}{G(w,l)} \geq \frac{y}{w}$ *pour tout* $w, y \in \{0,\dots,N+2\}$ *avec* $w \geq y$.

Démonstration 17. *(2) Pour tout* $(k,l) \in \{0,\dots,N+2\} \times \{0,\dots,N+2\}$*, on a*

$$\begin{aligned}
& G(N+2-k, N+2-l) \\
= \ & \frac{1}{N+2}\begin{cases} (N+2-k)(N+2-(N+2-l)), 0 \leq N+2-k \leq N+2-l \leq N+2 \\ (N+2-s)(N+2-(N+2-k)), 1 \leq N+2-l \leq N+2-k \leq N+2 \end{cases} \\
= \ & \frac{1}{N+2}\begin{cases} (N+2-k)(l), 1 \leq l \leq k \leq N+2 \\ (N+2-s)(k), 0 \leq K \leq L \leq N+2 \end{cases} \\
= \ & G(k,l).
\end{aligned}$$

(3) On distingue les trois cas suivants :

Si $y \leq w \leq s$*, alors*

$$\frac{G(y,l)}{G(w,l)} = \frac{\frac{1}{N+2}(y(N+2-l))}{\frac{1}{N+2}(w(N+2-l))} = \frac{y}{w}.$$

Si $y \leq s \leq w$*, alors*

$$\frac{G(y,l)}{G(w,l)} = \frac{\frac{1}{N+2}(y(N+2-l))}{\frac{1}{N+2}(l(N+2-w))} \geq \frac{y(N+2-w)}{w(N+2-w)} = \frac{y}{w}.$$

Si $s \leq y \leq w$*, alors*

$$\frac{G(y,l)}{G(w,l)} = \frac{\frac{1}{N+2}(l(N+2-y))}{\frac{1}{N+2}(l(N+2-w))} \geq 1 \geq \frac{y}{w}.$$

3.2 Théorèmes du point fixe sur les cônes de type fonctionnel

Dans ce qui suit, on considère E un espace de Banach réel et $\mathcal{P}$ un cône de E.

Soient α, β deux fonctionnelles continues positives sur le cône $\mathcal{P}$ et a,b, d des nombres réels positifs. Nous définissons les ensembles $\mathcal{P}(\alpha, d)$ et $\mathcal{P}(\alpha, \beta, a, d)$ par :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\alpha, d) &= \{x \in \mathcal{P} \;:\; \alpha(x) \leq d\}, \\ \mathcal{P}(\alpha, \beta, a, d) &= \{x \in \mathcal{P} \;:\; a \leq \alpha(x) \; et \; \beta(x) \leq d\}. \end{aligned}$$

3.2.1 Une extensiton du Théorèmes du point fixe de Leggett-Williams

Théorème 3.1. *[3]. Soient α et ψ deux fonctionnelles continues concaves positives et β, δ deux fonctionnelles continues convexes positives sur $\mathcal{P}$ et soient a, b, c et d des nombres réels positifs. Supposons que $T : \mathcal{P}(\alpha, \beta, a, d) \to \mathcal{P}$ est un opérateur complétement continu vérifiant les conditions suivantes :*

(A1) $\{x \in \mathcal{P}(\alpha, \beta, a, d) \;:\; c < \psi(x) \;\; et \;\; \delta(x) < b\} \neq \emptyset$ *et*

$\{x \in \mathcal{P} \;:\; \alpha(x) < a \;\; et \;\; d < \beta(x)\} = \emptyset$ *;*

(A2) $\alpha(Tx) \geq a$ *pour tout* $x \in \mathcal{P}(\alpha, \beta, a, d)$, *avec* $\delta(x) \leq b\}$ *;*

(A3) $\alpha(Tx) \geq a$ *pour tout* $x \in \mathcal{P}(\alpha, \beta, a, d)$ *avec* $\delta(Tx) > b$ *;*

(A4) $\beta(Tx) \leq d$ *pour tout* $x \in \{x \in \mathcal{P}(\alpha, \beta, a, d) \;:\; c \leq \psi(x)\}$ *;*

(A5) $\beta(Tx) \leq d$ *pour tout* $x \in \mathcal{P}(\alpha, \beta, a, d)$ *avec* $\psi(Tx) < c$.

Alors, T admet au moins un point fixe $x^* \in \mathcal{P}(\alpha, \beta, a, d)$.

3.2.2 Théorème du point fixe d'expansion et de compression d'un cône de type fonctionnel de Leggett-Williams

Théorème 3.2. *[2]. Soient α une fonctionnelle continue concave positive et β une fonctionnelle continue convexe positive sur le cône $\mathcal{P}$. Soit $T : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ un opérateur complètement continu. Supposons qu'il existe des nombres réels positifs a,b,c et d tels que :*

(C1) $\{x \in \mathcal{P}, a < \alpha(x) \;\; et \;\; \beta(x) < b\} \neq \emptyset$ *;*

(C2) *si $x \in \mathcal{P}$ avec $\beta(x) = b$ et $\alpha(x) \geq a$, alors $\beta(Tx) < b$;*

(C3) *si $x \in \mathcal{P}$ avec $\beta(x) = b$ et $\alpha(Tx) < a$, alors $\beta(Tx) < b$;*

(C4) $\{x \in \mathcal{P}, \alpha(x) > c \;\; et \;\; \beta(x) < d\} \neq \emptyset$ *;*

(C5) *si $x \in \mathcal{P}$ avec $\alpha(x) = c$ et $\beta(x) \leq d$, alors $\alpha(Tx) > c$;*

(C6) *si $x \in \mathcal{P}$ avec $\alpha(x) = c$ et $\beta(Tx) > d$, alors $\alpha(Tx) > c$.*

Si

(H1) *$a < c$, $b < d$, $\{x \in \mathcal{P} : b < \beta(x)$ et $\alpha(x) < c\} \neq \emptyset$, $\mathcal{P}(\beta, b) \subset \mathcal{P}(\alpha, c)$ et $\mathcal{P}(\alpha, c)$ est borné,*

alors, T a un point fixe x^* dans $\mathcal{P}(\beta, \alpha, b, c)$.

Si

(H2) *$c < a$, $d < b$, $\{x \in \mathcal{P} : a < \alpha(x)$ et $\beta(x) < d\} \neq \emptyset$, $\mathcal{P}(\alpha, a) \subset \mathcal{P}(\beta, d)$ et $\mathcal{P}(\beta, d)$ est borné,*

alors, T a un point fixe x^* dans $\mathcal{P}(\beta, \alpha, a, d)$.

3.3 Résultats d'existence

Dans cette section, nous allons utiliser les deux théorèmes du point fixe présentés ci-dessus pour montrer deux résultats d'existence pour le problème aux limites non linéaire (3.1)-(3.2). Ces résultats sont développés dans [13].

3.3.1 Résultats auxiliaires

Considérons l'espace de Banach

$$E = \{u : \{0, \dots, N+2\} \to \mathbb{R}\}$$

muni de la norme

$$\|u\| = \max_{k\in\{0,1,\dots,N+2\}} |u(k)|.$$

Définissons le cône $\mathcal{P} \subset E$ par :

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{array}{l} u \in E \ : \ u(k) \geq 0 \ \text{ et } u(N+2-k) = u(k) \ \text{ pour } k \in \{0,1,\dots,N+2\}, \\ u \text{ est croissante sur } \{0,1,\dots,[\frac{N+2}{2}]\} \text{ et} \\ wu(y) \geq yu(w) \text{ pour } w \geq y \text{ avec } \ y,w \in \{0,1,\dots,[\frac{N+2}{2}]\} \end{array} \right\}.$$

Considérons l'opérateur $T : E \to E$ défini par :

$$Tu(k) = \sum_{k=1}^{N+1} G(k,l) f(u(k)), \ k \in \{0,\dots,N+2\},$$

où la fonction de Green G est donnée par (3.3).

Si u est un point fixe de T, alors u est une solution de problème (3.1)-(3.2).

Lemme 3.2. *L'opérateur $T : E \to E$ est complètement continu.*

Démonstration 18. *Notons tout d'abord que la fonction G est bornée, donc il existe un $K > 0$ tel que $|G(k,l)| \leq K$ pour tout $k,l \in \{0,\dots,N+2\} \times \{0,\dots,N+2\}$.*

(i) T est continu sur E. En effet, soit $\epsilon > 0$ et $u \in E$ alors, $\exists\, \rho > 0 \ : \ \|u\| \leq \rho$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle est uniformément continue sur $[-\rho,\rho]$, d'où, il existe $\delta > 0$ avec $\delta < 1$ tel que pour tout $x,y \in [-\rho,\rho]$,

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{(N+1)K}.$$

Donc pour tout $v \in E$ avec $\|u-v\| < \delta$ et pour tout $k \in \{0,\dots,N+2\}$, on a

$$\begin{aligned} |Tu(k) - Tv(k)| &\leq \sum_{l=1}^{N+1} |G(k,l)| f(u(l)) - f(v(l))| \\ &\leq \sum_{l=1}^{N+1} K \frac{\epsilon}{(N+1)K} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

D'où, $\|Tu - Tv\| < \epsilon$.

(ii) Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite bornée dans* E *telle que* $\|u_n\| \leq K_0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

(a) La suite $\{Tu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *est uniformément bornée. En effet, de la continuité de* f, *il existe un réel* $K_1 > 0$, *pour tout* $k \in \{0, \ldots, N+2\}$ *tel que* $|f(u_n(k))| \leq K_1$. *Donc, pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $k \in \{0, \ldots, N+2\}$, *on obtient*

$$\begin{aligned} |Tu_n(k)| &\leq \sum_{s=1}^{N+1} |G(k,l)|f(u_n(l))| \\ &\leq \sum_{s=1}^{N+1} K\, K_1 \\ &= (N+1)K\, K_1. \end{aligned}$$

(b) La suite $\{Tu_n\}_n$ *est équicontinue. En effet, choisissons* $\delta < 1$, *si* $k_1, k_2 \in \{0, \ldots, N+2\}$ *avec* $|k_1 - k_2| < \delta$, *alors* $k_1 = k_2$. *Ainsi pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$|Tu_n(k_1) - Tu_n(k_2)| = 0 < \epsilon.$$

Donc $\forall\, k_1, k_2 \in \{0, \ldots, N+2\}$, $|k_1 - k_2| < \delta \Rightarrow |Tu_n(k_1) - Tu_n(k_2)| = 0 < \epsilon$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Du théorème d'Arzelà-Ascoli, T *est complètement continu.*

Lemme 3.3. *L'opérateur* T *envoie* $\mathcal{P}$ *dans* $\mathcal{P}$.

Démonstration 19. *Soit* $u \in \mathcal{P}$. *On a*

$$Tu(k) = \sum_{l=1}^{N+1} G(k,l) f(u(l)),\ k \in \{0, 1, \ldots, N+2\}.$$

(i) On a $G(k,l) \geq 0$ *pour* $k, l \in \{0, \ldots, N+2\}$ *et* $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, *donc*

$$Tu(k) \geq 0,\ \text{pour tout}\ k \in \{0, \ldots, N+2\}.$$

(ii) $Tu(N+2-k) = Tu(k), \forall k \in \{0, 1, \ldots, N+2\}$. *En effet, pour* $k \in \{0, 1, \ldots, N+2\}$,

$$Tu(N+2-k) = \sum_{l=1}^{N+1} G(N+2-k, l) f(u(l)).$$

Posons $r = N+2-l$, du lemme 3.1, propriété (2), on aura

$$\begin{aligned} Tu(N+2-k) &= \sum_{r=1}^{N+1} G(N+2-k, N+2-r) f(u(N+2-r)) \\ &= \sum_{r=1}^{N+1} G(k,r) f(u(r)) \\ &= Tu(k). \end{aligned}$$

(iii) Pour montrer que Tu est croissante sur $\{0,1,\dots,[\frac{N+2}{2}]\}$, on montre que

$$\Delta Tu(k) \geq 0 \ \ sur \ \{0,1,\dots,[\frac{N+2}{2}]\}.$$

On a

$$\begin{aligned} \Delta_k G(k,l) &= G(k+1,l) - G(k,l) \\ &= \tfrac{1}{N+2} \begin{cases} N+2-l, & k \in \{0,\dots,l\} \\ -l, & k \in \{l,\dots,N+1\}. \end{cases} \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \Delta Tu(k) &= \sum_{l=1}^{N+1} \Delta_k G(k,l) f(u(l)) \\ &= \sum_{l=1}^{k-1} \frac{-l}{N+2} f(u(l)) + \sum_{l=k}^{N+1} \frac{N+2-l}{N+2} f(u(l)) \\ &= \sum_{l=1}^{k-1} \frac{-l}{N+2} f(u(l)) + \sum_{l=k}^{N+1} \frac{N+2-l}{N+2} f(u(N+2-l)) \\ &= \sum_{l=1}^{k-1} \frac{-l}{N+2} f(u(l)) + \sum_{r=1}^{N+2-k} \frac{r}{N+2} f(u(r)) \\ &= \sum_{l=1}^{k-1} \frac{-l}{N+2} f(u(l)) + \sum_{l=1}^{N+2-k} \frac{l}{N+2} f(u(l)). \end{aligned}$$

Si $k \in \{0,1,\dots,[\frac{N+2}{2}]\}$, on aura

$$\begin{aligned} \Delta Tu(k) &= \sum_{l=1}^{k-1} \frac{-l}{N+2} f(u(l)) + \sum_{l=1}^{N+2-k} \frac{l}{N+2} f(u(l)) \\ &= \sum_{l=k}^{N+2-k} \frac{l}{N+2} f(u(l)) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

(vi) D'après le lemme 3.1, la fonction de Green G a la propriété

$$\frac{G(y,l)}{G(w,l)} \geq \frac{y}{w} \ \ pour \ tout \ \ l,y,w \in \{0,1,\dots,N+2\} \ \ et \ pour \ \ w \geq y,$$

ce qui entraine que $wTu(y) \geq yTu(w)$ *pour* $w \geq y$ *avec* $y, w \in \{0, 1, \ldots, [\frac{N+2}{2}]\}$.

3.3.2 Premier résultat d'existence

Théorème 3.3. *Soient* τ, μ, $\nu \in \{0, \ldots, [\frac{N+2}{2}]\}$ *avec* $\tau \leq \mu < \nu$ *et soit* d, m *des nombres réels poitifs avec* $0 < m < \frac{d\mu}{[\frac{N+2}{2}]}$. *Supposons que* $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *est une fonction continue vérifiant les conditions suivantes :*

(i) $f(w) \geq \frac{2(N+2)d}{(\nu-\tau)(3+2N-\tau-\nu)([\frac{N+2}{2}])}$ *pour* $w \in [\frac{\tau d}{[\frac{N+2}{2}]}, \frac{\nu d}{[\frac{N+2}{2}]}]$;

(ii) f *est décroissante sur* $[0, m]$ *et* $f(m) \geq f(w)$ *pour* $w \in [m, d]$;

(iii) $2 \sum_{l=1}^{\mu} \frac{l[\frac{N+2}{2}]}{N+2} f(\frac{ml}{\mu}) \leq d - f(m) \frac{1}{N+1}([\frac{N+2}{2}])([\frac{N+2}{2}] - \mu)(\mu + 1 + [\frac{N+2}{2}])$.

Alors, le problème (3.1)-(3.2) *a au moins une solution positive symétrique* $u^* \in \mathcal{P}(\alpha, \beta, \frac{\tau d}{[\frac{N+2}{2}]}, d)$.

Démonstration 20. *La démonstration de ce résultat d'existence se base sur le théorème 3.1.*

Pour $u \in \mathcal{P}$, *définissons les fonctionnelles concaves* α *et* ψ *sur* $\mathcal{P}$ *par :*

$$\alpha(u) = \min_{k \in \{\tau, \ldots, [\frac{N+2}{2}]\}} u(k) = u(\tau)$$

$$\psi(u) = \min_{k \in \{\mu, \ldots, [\frac{N+2}{2}]\}} u(k) = u(\mu)$$

et les fonctionnelles convexes δ *et* β *sur* $\mathcal{P}$ *par :*

$$\delta(u) = \max_{k \in \{0, \ldots, \nu\}} u(k) = u(\nu)$$

$$\beta(u) = \max_{k \in \{0, \ldots, [\frac{N+2}{2}]\}} u(k) = u([\frac{N+2}{2}]).$$

Soient

$$a = \frac{\tau d}{[\frac{N+2}{2}]}, \; b = \frac{\nu d}{[\frac{N+2}{2}]}, \; c = \frac{\mu d}{[\frac{N+2}{2}]}.$$

(a) D'après les lemmes 3.2 *et* 3.3, *l'opérateur* $T : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ *est compèletement continu.*

(b) Soit $u \in \mathcal{P}(\alpha, \beta, a, d)$. *Comme* u *est symétrique, alors* $\|u\| = \beta(u) = u([\frac{N+2}{2}]) \leq d$. *D'où, l'ensemble* $\mathcal{P}(\alpha, \beta, a, d)$ *est borné.*

(c) Montrons que la condition $(A1)$ est vérifiée. Soit $u \in \mathcal{P}$ avec $\beta(u) > d$. Alors

$$\begin{aligned}
\alpha(u) = u(\tau) &\geq \frac{\tau}{[\frac{N+2}{2}]} u([\frac{N+2}{2}]) \\
&= \frac{\tau}{[\frac{N+2}{2}]} \beta(u) \\
&> \frac{\tau d}{[\frac{N+2}{2}]} \\
&= a.
\end{aligned}$$

Donc $\{u \in \mathcal{P} : \alpha(u) < a \text{ et } d < \beta(u)\} = \emptyset$.

Soit maintenant, L une constante réelle telle que $L \in \left(\frac{2d(N+2)}{[\frac{N+2}{2}](3N+2-\mu)}, \frac{2d(N+2)}{[\frac{N+2}{2}](3N+2-\nu)} \right)$.

Posons

$$u_L(k) = \frac{Lk}{2(N+2)}(3N+2-k). \tag{3.4}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\alpha(u_L) = u_L(\tau) &= \frac{L\tau}{2(N+2)}(3N+2-\tau) \\
&\geq \frac{2d\tau(3N+2-\tau)}{2[\frac{N+2}{2}](3N+2-\mu)} \\
&\geq \frac{\tau d}{[\frac{N+2}{2}]} = a,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\beta(u_L) = u_L([\frac{N+2}{2}]) &= \frac{L[\frac{N+2}{2}]}{2(N+2)}(3N+2-[\frac{N+2}{2}]) \\
&< \frac{2[\frac{N+2}{2}]d(3N+2-[\frac{N+2}{2}]}{2[\frac{N+2}{2}](3N+2-v)} \\
&\leq \frac{[\frac{N+2}{2}]d}{[\frac{N+2}{2}]} = d.
\end{aligned}$$

Donc $u_L \in \mathcal{P}(\alpha, \beta, a, d)$. De plus,

$$\begin{aligned}
\psi(u_L) = u_L(\mu) &= \frac{L\mu}{2(N+2)}(3N+2-\mu) \\
&> \frac{2d\mu(3N+2-\mu)}{2[\frac{N+2}{2}](3N+2-\mu)} \\
&= \frac{\mu d}{[\frac{N+2}{2}]} \\
&= c.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\delta(u_L) = u_L(\nu) &= \frac{L\nu}{2(N+2)}(3N+2-\nu) \\ &< \frac{2d\nu(3N+2-\nu)}{2[\frac{N+2}{2}](3N+2-\nu)} \\ &= \frac{\nu d}{[\frac{N+2}{2}]} = b.\end{aligned}$$

Donc, $\{x \in \mathcal{P}(\alpha,\beta,a,d) : c < \psi(x) \text{ et } \delta(x) < b\} \neq \emptyset$. *D'où,* $(A1)$ *est vérifiée.*

(d) *Montrons que la condition* $(A2)$ *est vérifiée. Soit* $u \in \mathcal{P}(\alpha,\beta,a,d)$ *avec* $\delta(u) < b$*, alors* $u(\nu) < b$ *et* $u(\tau) \geq a$ *et donc pour* $\tau + 1 \leq l \leq \nu$*, on obtient* $a \leq u(l) \leq b$.

Par suite, de la condition (i)*, on aura*

$$\begin{aligned}\alpha(Tu) &= \sum_{l=1}^{N+1} G(\tau,l)f(u(l)). \\ &\geq \sum_{l=\tau+1}^{v} G(\tau,l)f(u(l)). \\ &\geq \frac{2(N+2)d}{(\nu-\tau)(3+2N-\tau-\nu)[\frac{N+2}{2}]}\frac{\tau(\nu-\tau)(3+2N-\tau-\nu)}{2(N+2)}. \\ &\geq \frac{\tau d}{[\frac{N+2}{2}]} = a.\end{aligned}$$

(e) Montrons que la condition $(A3)$ *est vérifiée. Soit* $u \in \mathcal{P}(\alpha,\beta,a,d)$ *avec* $\delta(Tu) > b$*, alors*

$$\begin{aligned}\alpha(Tu) &= Tu(\tau) \\ &= \sum_{l=1}^{N+1} G(\tau,l)f(u(l)) \\ &\geq \frac{\tau}{\nu}\sum_{l=1}^{N+1} G(v,l)f(u(l)) \\ &= \frac{\tau}{\nu}\delta(Tu) \\ &> \frac{\tau}{\nu}b = \frac{d\tau}{[\frac{N+2}{2}]} = a.\end{aligned}$$

(f) Montrons que la condition $(A4)$ *est vérifiée. Soit* $u \in \mathcal{P}(\alpha,\beta,a,d)$ *avec* $\psi(u) \geq c$*. Alors, pour tout* $k \in \{0,1,\ldots,\mu\}$*, on a*

$$u(k) \geq \frac{k}{\mu}u(\mu) \geq \frac{ck}{\mu} \geq \frac{mk}{\mu}.$$

Ensuite, par les conditions (ii) et (iii), nous avons

$$\begin{aligned}
\beta(Tu) &= \sum_{l=1}^{N+1} G([\frac{N+2}{2}],l)f(u(l)) \\
&\leq 2\sum_{l=1}^{[\frac{N+2}{2}]} \frac{l(N+2-[\frac{N+2}{2}])}{N+2} f(u(l)) \\
&= 2\sum_{l=1}^{\mu} \frac{l([\frac{N+2}{2}])}{N+2} f(u(l)) + 2\sum_{l=\mu+1}^{[\frac{N+2}{2}]} \frac{l([\frac{N+2}{2}])}{N+2} f(u(l)) \\
&\leq 2\sum_{l=1}^{\mu} \frac{l([\frac{N+2}{2}])}{N+2} f(u(\frac{ml}{\mu})) + 2\sum_{l=\mu+1}^{[\frac{N+2}{2}]} \frac{l([\frac{N+2}{2}])}{N+2} f(m) \\
&\leq d - f(m)\frac{1}{N+2}([\frac{N+2}{2}])([\frac{N+2}{2}]-\mu)(\mu+1+[\frac{N+2}{2}]) \\
&\quad +f(m)\frac{1}{N+2}([\frac{N+2}{2}])([\frac{N+2}{2}]-\mu)(\mu+1+[\frac{N+2}{2}]) \\
&= d.
\end{aligned}$$

(g) Montrons que la condition (A5) est satisfaite. Soit $u \in \mathcal{P}(\alpha,\beta,a,d)$ *avec* $\psi(Tu) < c$. *Donc*

$$\begin{aligned}
\beta(Tu) &= \sum_{l=1}^{N+1} G([\frac{N+2}{2}],l)f(u(l)) \\
&\leq \frac{[\frac{N+2}{2}]}{\mu} \sum_{l=1}^{N+1} G(\mu,l)f(u(l)) \\
&\leq \frac{[\frac{N+2}{2}]}{\mu} \psi(Tu) \\
&< \frac{c[\frac{N+2}{2}]}{\mu} = d.
\end{aligned}$$

Toutes les conditions du théorème 3.1 sont donc satisfaites. D'où, l'opérateur T admet un point fixe $u^* \in \mathcal{P}(\alpha,\beta,a,d)$ *qui est solution du problème aux limites* (3.1) (3.2).

Exemple 3.1. *Soit* $N = 18$, $\tau = 1$, $\mu = 9$, $d = 5$ *et* $m = 4,4$.

Notons que $0 \leq \tau \leq \mu \leq \nu \leq 10 = [\frac{N+2}{2}]$, *et* $0 \leq m = 4,4 \leq 4,5 = \frac{d\mu}{[\frac{N+2}{2}]}$.

Soit $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *la fonction continue définie par :*

$$f(w) = \begin{cases} \frac{45-w}{500}, & si \quad 0 \leq w < 40 \\ \frac{1}{100}, & si \quad 40 \leq w. \end{cases}$$

Alors,

(i) *pour* $w \in [\frac{1}{2},5]$, $f(w) \geq f(5) = \frac{2}{25} > \frac{5}{63} = \frac{2\times20\times5}{(10-1)\times(3+2\times18-1-10)(10)}$;

(ii) *f est une fonction décroissante pour $w \in [0,\, 4,4]$ et $f(m) \geq f(w)$ pour $w \in [4,4,\, 5]$;*

(iii) $2\sum_{l=1}^{9} \frac{10l}{20} f(\frac{4,4\,l}{9}) = \frac{5657}{1500} < \frac{1047}{250} = 5 - f(4,4)(\frac{1}{20})(10)(10-9)(9+1+10).$

Les conditions du théoreme 3.3 sont toutes satisfaites. Par conséquent, le problème au limites

$$\begin{cases} \Delta^2 u(k) + f(u(k)) = 0,\ k \in \{0, 1, \dots, 18\}, \\ u(0) = u(20) = 0, \end{cases}$$

admet au moins une solution positive symétrique u^* telle que $u(1) \geq \frac{1}{2}$ et $u(10) \leq 5$.

3.3.3 Deuxième résultat d'existence

Théorème 3.4. *Soient $\tau \in \{0, \dots, [\frac{N+2}{2}]\}$ et b, c des nombres réels positifs avec $3b < c$. Supposons que $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ est une fonction continue telle que :*

(i) $f(w) > \frac{c(N+2)}{(\tau)(N+1-\tau)([\frac{N+2}{2}]-\tau)}$ *pour* $w \in [c, \frac{[\frac{N+2}{2}]c}{\tau}]$;

(ii) $f(w)$ *est décroissante pour* $w \in [\frac{b}{[\frac{N+2}{2}]}, \frac{\tau b}{[\frac{N+2}{2}]}]$ *est* $f(\frac{\tau b}{[\frac{N+2}{2}]}) \geq f(w)$ *pour* $w \in [\frac{\tau b}{[\frac{N+2}{2}]}, b]$;

(iii) $2\sum_{l=1}^{\tau} \frac{l[\frac{N+2}{2}]}{N+2} f(\frac{bl}{2}) \leq b - f(\frac{\tau b}{[\frac{N+2}{2}]})\frac{1}{N+2}([\frac{N+2}{2}])([\frac{N+2}{2}]-\tau)(\tau+1+[\frac{N+2}{2}])$.

Alors, le problème (3.1)-(3.2) a au moins une solution positive symétrique $u^{**} \in \mathcal{P}(\beta, \alpha, b, c)$.

Démonstration 21. *Pour démontrer ce résultat on va utiliser le théorème 3.2.*

Pour $u \in \mathcal{P}$, définissons la fonctionnelle concave α par :

$$\alpha(u) = \min_{k \in \{\tau, \dots, [\frac{N+2}{2}]\}} u(k) = u(\tau),$$

et la fonctionnelle convexe β par :

$$\beta(u) = \max_{k \in \{0, \dots, [\frac{N+2}{2}]\}} u(k) = u\left([\frac{N+2}{2}]\right).$$

D'après les lemmes (3.2) et 3.3, l'opérateur $T : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ et complètement continu.

Soient $a = \frac{\tau b}{[\frac{N+2}{2}]}$ et $d = \frac{[\frac{N+2}{2}]c}{\tau}$. Alors, $a = \frac{\tau b}{[\frac{N+2}{2}]} < \frac{\tau c}{3[\frac{N+2}{2}]} < c$ et $b < \frac{c}{3} = \frac{\tau d}{3[\frac{N+2}{2}]} < d$.

(1) Montrons que les conditions $(C1)$ et $(C4)$ sont vérifiées. Soient

$$L \in \left(\frac{2b(N+2)}{(3N+2-\tau)[\frac{N+2}{2}]}, \frac{2b(N+2)}{(3N+2-[\frac{N+2}{2}])([\frac{N+2}{2}])}\right)$$

et

$$u_L(k) = \frac{Lk}{2(N+2)}(3N+2-k).$$

Donc

$$\alpha(u_L) = u_L(\tau) = \frac{L\tau}{2(N+2)}(3N+2-\tau) > a,$$

et

$$\beta(u_L) = u_L([\frac{N+2}{2}]) = \frac{L[\frac{N+2}{2}]}{2(N+2)}\left(3N+2-[\frac{N+2}{2}]\right) < b.$$

D'où, $u_L \in \{u \in \mathcal{P} : \ a < \alpha(u) \ \ et \ \ \beta(u) < b\}$.

Soit maintenant J *une constante réelle telle que* $J \in \left(\frac{2c(N+2)}{\tau(3N+2-\tau)}, \frac{2c(N+2)}{\tau(3N+2-[\frac{N+2}{2}])}\right)$ *et posons*

$$u_J(k) = \sum_{l=1}^{N+1} JG(k,l) = \frac{Jk}{2(N+2)}(3N+2-k).$$

Donc

$$\alpha(u_J) = u_J(\tau) = \frac{J\tau}{2(N+2)}(3N+2-\tau) > c.$$

et

$$\beta(u_J) = u_J([\frac{N+2}{2}]) = \frac{J[\frac{N+2}{2}]}{2(N+2)}(3N+2-[\frac{N+2}{2}]) < \frac{c[\frac{N+2}{2}]}{\tau} = d.$$

D'où, $u_J \in \{u \in \mathcal{P} : c < \alpha(u) \ \ et \ \ \beta(u) < d\}$.

On a donc $\{u \in \mathcal{P}; a < \alpha(u) \ \ et \ \ \beta(u) < b\} \neq \emptyset$ *et* $\{u \in \mathcal{P}, \alpha(u) > c \ \ et \ \ \beta(u) < d\} \neq \emptyset$, *d'où les conditions* $(C1)$ *et* $(C4)$ *sont vérifiées.*

(2) Montrons que la condition $(C2)$ *est vérifiée. Soit* $u \in \mathcal{P}$ *avec* $\beta(u) = b$ *et* $\alpha(u) \geq a$.

Pour tout $l \in \{0, \ldots, \tau\}$,

$$u(l) \geq \left(\frac{u(\tau)}{\tau}\right) l \geq \frac{bl}{[\frac{N+2}{2}]},$$

et pour tout $l \in \{\tau, \ldots, [\frac{N+2}{2}]\}$, *on a*

$$\frac{b\tau}{[\frac{N+2}{2}]} \leq u(l) \leq b.$$

Ensuite, par (ii) et (iii), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\beta(Tu) &= \sum_{l=1}^{N+1} G([\frac{N+2}{2}], l)\, f(u(l)) \\
&\leq 2\sum_{l=1}^{[\frac{N+2}{2}]} \frac{l([\frac{N+2}{2}])}{N+2}\, f(u(l)) \\
&= 2\sum_{l=1}^{\tau} \frac{l([\frac{N+2}{2}])}{N+2}\, f(u(l)) + 2\sum_{l=1+\tau}^{[\frac{N+2}{2}]} \frac{l([\frac{N+2}{2}])}{N+2}\, f(u(l)). \\
&\leq 2\sum_{l=1}^{\tau} \frac{l([\frac{N+2}{2}])}{N+2}\, f(\frac{bl}{2}) + 2\sum_{l=1+\tau}^{[\frac{N+2}{2}]} \frac{l([\frac{N+2}{2}])}{N+2}\, f\left(\frac{b\tau}{[\frac{N+2}{2}]}\right) \\
&\leq b - f(\frac{b\tau}{[\frac{N+2}{2}]})\frac{1}{N+2}([\frac{N+2}{2}])([\frac{N+2}{2}] - \tau)(\tau + 1 + [\frac{N+2}{2}]) \\
&+ f(\frac{b\tau}{[\frac{N+2}{2}]})\frac{1}{N+2}([\frac{N+2}{2}])([\frac{N+2}{2}] - \tau)(\tau + 1 + [\frac{N+2}{2}]) \\
&= b.
\end{aligned}$$

(3) Montrons que la condition $(C3)$ est satisfaite. Soit $u \in \mathcal{P}$ avec $\beta(u) = b$, et $\alpha(Tu) < a$.

Par les propriétés de la fonction de Green G, on a

$$\begin{aligned}
\beta(Tu) &= \sum_{l=1}^{N+1} G([\frac{N+2}{2}], l)\, f(u(l)) \\
&\leq \frac{[\frac{N+2}{2}]}{\tau} \sum_{l=1}^{N+1} G(\tau, l)\, f(u(l)) \\
&= \frac{[\frac{N+2}{2}]}{\tau}\, \alpha(Tu) \\
&< \frac{\alpha[\frac{N+2}{2}]}{\tau} = b.
\end{aligned}$$

(4) Montrons que $(C5)$ est vérifiée. Soit $u \in \mathcal{P}$ avec $\alpha(u) = c$ et $\beta(u) \leq d$.

Puis pour $l \in \{\tau, \ldots, N+2\}$, on a

$$c \leq u(L) \leq d = \frac{c[\frac{N+2}{2}]}{\tau}.$$

D'après la propriété (i), on trouve

$$\begin{aligned}
\alpha(Tu) &= \sum_{s=1}^{N+1} G(\tau,s)\, f(u(s)) \\
&\geq \sum_{s=1+\tau}^{N+1} G(\tau,s)\, f(u(s)) \\
&= \sum_{s=1+\tau}^{N+1} \frac{\tau([\frac{N+2}{2}]-\tau)}{N+2} f(u(s)) \\
&> \sum_{s=\tau+1}^{N+1} \frac{c}{N+1-\tau} = c.
\end{aligned}$$

(5) Nous abordons maintenant (C6). Soit $u \in \mathcal{P}$ avec $\alpha(u) = c$ et $\beta(Tu) > d$, alors

$$\begin{aligned}
\alpha(Tu) &= \sum_{l=1}^{N+1} G(\tau,l) f(u(l)) \geq \\
&\geq \frac{\tau}{[\frac{N+2}{2}]} \sum_{l=1}^{N+1} G([\frac{N+2}{2}],l) f(u(l)) \\
&= \frac{\tau}{[\frac{N+2}{2}]} \beta(Tu) \\
&> \frac{d\tau}{[\frac{N+2}{2}]} = c.
\end{aligned}$$

D'où, la condition $(C6)$ est vérifiée.

Enfin, nous montrons que la condition $(H1)$ est satisfaite. Soit $\rho \in (\frac{2b}{[\frac{N+2}{2}]}, \frac{2c}{3[\frac{N+2}{2}]})$.

Définissons ensuite,

$$u_\rho(k) = \rho \sum_{l=1}^{N+1} G(k,l) = \frac{\rho k}{2(N+2)}(3N+2-k).$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\beta(u_\rho) &= \frac{\rho[\frac{N+2}{2}]}{2(N+2)}(3N+2-[\frac{N+2}{2}]) \\
&> \frac{b}{(N+2)}(3N+2-[\frac{N+2}{2}]) \geq b
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\alpha(u_\rho) &= \frac{\rho\tau}{2}(3N+2-\tau) \\
&< \frac{c\tau}{3(N+2)[\frac{N+2}{2}]}(3N+2-\tau) \leq c.
\end{aligned}$$

Ainsi $\{u \in \mathcal{P} : b < \beta(u) \ \text{ et } \ \alpha(u) < c\} \neq \emptyset$.

Si $u \in \mathcal{P}(\beta, b)$, *alors*

$$\alpha(u) \leq \beta(u) \leq b < c,$$

et donc

$$\mathcal{P}(\beta, b) \subset \mathcal{P}(\alpha, c).$$

Enfin, si $u \in \mathcal{P}(\alpha, c)$, *alors*

$$\frac{\tau}{[\frac{N+2}{2}]}\beta(u) \leq \alpha(u) \leq c,$$

et donc

$$\|u\| = \beta(u) \leq \frac{c[\frac{N+2}{2}]}{\tau}.$$

Donc $\mathcal{P}(\alpha, c)$ *est bornée,* $(H1)$ *est vérifié.*

Donc toutes les conditions du théorème 3.2 sont satisfaites. D'où, l'opérateur T *admet un point fixe* $u^{**} \in \mathcal{P}(\beta, \alpha, b, c)$ *qui est solution du problème aux limites* (3.1)-(3.2).

Exemple 3.2. *Soit* $N = 10$, $\tau = 2$, $b = 2$,*et* $c = 7$. *Notons que* $3b < c$.

On définit la fonction continue $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *par :*

$$f(w) = \begin{cases} \frac{1-w}{6}, & si \ \ 0 \leq w < 1 \\ 0, & si \ \ 1 \leq w \leq 2 \\ w - 2, & si \ \ 2 \leq w. \end{cases}$$

Alors,

(i) $f(w) > \frac{7\times 12}{2\times 9\times 4} = \frac{7}{6}$ *pour* $w \in [7, 21]$

(ii) f *est décroissante pour* $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ *et* $f(\frac{2}{3}) \geq f(w)$ *pour* $w \in [\frac{2}{3}, 1]$

(iii) $\sum\limits_{l=1}^{2} lf(l) = 0 \leq 1 = 2 - f(\frac{2}{3}) \times \frac{1}{2} \times 4 \times 9.$

Les conditions du théoreme 3.4 sont toutes satisfaites. Par conséquent, le problème aux limites

$$\begin{cases} \Delta^2 u(k) + f(u(k)) = 0, \ k \in \{0, 1, \ldots, 18\}, \\ u(0) = u(20) = 0, \end{cases}$$

admet une solution positive symétrique u^{**} *telle que* $u^{**}(6) \geq 2$ *et* $u^{**}(2) \leq 7$.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons présenté un ensemble de concepts et de résultats fondamentaux concernant les équations aux différences linéaires du second ordre. Ces résultats sont des analogues de résultats connus sur les équations différentielles linéaires du second ordre. Nous nous sommes intéressés également aux questions liées à l'existence, la positivité et à la multiplicité de solutions pour des problèmes aux limites associés à des équations aux différences non linéaires auto-adjointes du second ordre. L'approche utilisée est la théorie du point fixe sur les cônes des espaces de Banach. Plus précisément, nous avons utilisé le théorème du point fixe de Krasnosel'skii ainsi que deux extensions du théorème Leggett-Williams.

Bibliographie

[1] R.P. Agarwal, D. O'Regan and P.J.Y. Wong, *Positive solutions of differential, difference and integral equations. Springer Science and Business Media, 1998.*

[2] D.R. Anderson, R.I. Avery et J. Henderson, Functional expansion-compression fixed point theorem of Leggett-Williams type, Electronic Journal of Differential Equations (EJDE), 2010(2010), 1-9.

[3] D. R. Anderson, R. I. Avery and J. Henderson, A topological proof and ex- tension of the Leggett-Williams fixed point theorem, Comm. Appl. Nonlinea Anal. 16 (2009), 39-44.

[4] R.I. Avery, J. Henderson, Two positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces, Comm. Appl. Nonlinear Anal. 8 (2001), 27-36.

[5] L. Brand, Differential and difference equations, new york, john wiley and sons, inc, 1966.

[6] S. Elaydi, An Introduction to Difference Equations, Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 3rd ed edition, 2005.

[7] D.Guo, A new fixed point theorem, Acta Mathematica Sinicia, Vol.24, No.3 (1981), 444-450.

[8] P. Hartman, Difference equations : Disconjugacy, principal solutions, Green's functions, complete monotonicity, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 246, (1978) 1-30.

[9] W.G. Kelly, A.C. Peterson, Difference equations : An introduction with applications, Harcourt/Academic Press, San Diego, 2nd ed edition,2001.

[10] M.A. Krasnosel'skii, Positive solutions of operator equations, Fizmatgiz, Moskow. 1963.

[11] R.W. Leggett, L.R. Williams, Multiple positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces, Indiana Univ. Math. J, 28 (1979), 673-688.

[12] F. Merdivenci, two positive solutions of a boundary value problem for difference equations and applications, Vol.1, (1995), 263-270.

[13] C.L. Seelbach, Applications of leggett wiliams type fixed point theorems to a second order difference equation, Diss. Eastern kentucky university, 2013.

Résumé

Nous nous sommes intéressées dans ce travail à l'étude des équations aux différences auto-adjointes non linéaires posées sur des intervalles discrets bornés de la forme :

$$\Delta(p(k-1)\Delta y((t-1)) + q(t)y(t) = f(t, y(t)),\ t \in I = [a, b+1] \cap \mathbb{N}, \tag{1}$$

où Δ est l'opérateur de différence et $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.
Nous avons présenté un ensemble de résultats fondamentaux concernant les équations aux différences linéaires du second ordre. Ces résultats permettent de bien maitriser quelque outils de base nécessaires à une étude plus approfondie des équations aux différences non linéaires.
Des résultats d'existence d'au moins une ou deux solutions positives de l'équation (1), associée à des conditions aux bords linéaires séparées, sont présentés. L'approche utilisée est la théorie du point fixe sur les cônes des espaces de Banach. Plus précisément, nous avons utilisé le théorème du point fixe d'expansion et de compression d'un cône de Krasnosel'skii ainsi que deux extensions du theorème de Leggett-Williams.

Abstract

We are interested in this work by the study of nonlinear self-adjoint difference equations posed on bounded discrete intervals of the form :

$$\Delta(p(k-1)\Delta y((t-1)) + q(t)y(t) = f(t, y(t)),\ t \in I = [a, b+1] \cap \mathbb{N}, \tag{2}$$

where Δ is the difference operator and $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a continuous function.
We have presented fundamental results concerning second-order linear difference equations. These results allow us to master some basic tools necessary for a more in-depth study of non-linear difference equations. Existence results of at least one or two positive solutions of the equation (2), associated with separate linear boundary conditions, are presented. The approach used is the fixed point theory on cones of Banach spaces. More precisely, we used the fixed point theorem of expansion and compression of a Krasnosel'skii cone as well as two extensions of the Leggett-Williams theorem.