RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ ABDERRAHMANE MIRA-BÉJAIA-ALGÉRIE
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master 2 en Mathématiques

OPTION
Analyse Mathématiques

THÈME

Les théorèmes du point fixe déterministe et aléatoire

PAR

Slimani Ouidad
Medjoudj Leila

Devant le jury :

Président : Mr. Kessoum
Encadreur : Mme. C.Allouti
Examiner : Mme. Barach

Soutenu publiquement le :jj - mm - 2022

Remerciements

Nous remercions dieu tout puissant de nous avoir donné la foie, le courage pour réaliser ce modeste travail et qui a mis dans notre chemin de bonnes personnes et nous a confié à des bonnes mains.

Nous tenons d'abord à exprimer nos plus vifs remerciements à Madame Allouti Chahira pour son aide et ses conseils.
Nous remercions tout les membres du département de Mathématiques.

Je ne saurais oublier dans mes remerciements tous ceux qui m'ont apporté leur contribution et leurs aide de prés ou de loin et de ce fait m'ont permis d'achever ce travail.

Je ne peux oublier de remercier toute ma famille pour leur soutien durant tout mon parcour.

Dédicace

Je dédié ce modeste travail à :

Mes chers parents qui étaient toujours attentifs, affectueux et comprèhensifs qui m'ont soutenu durant les laborieuses années de mes études, à qui je témangne toute ma gratitude.

Mes chers fréres : Walid et Toufik.

Mes chers soeurs.

Tous mes enseignants.

Et en fin à tous ceux qui m'aiment.

- Leila-

Je dédie ce modeste travail à :

A la mémoire de mon père pour son sacrifice, et à la mémoire de ma grande mère, que dieu les protèges.

A ma chère mère pour son affection et son dévouement, que dieu la protège.

A mes frères Oualid et Lhoucine.

A mes chères soeurs : Manal et Cylia.

A mon fiancé Salim.

Je remercie Abdelbasset pour son aide concernant LaTex.

Et à tous mes enseignants et tous mes amis(es).

-Ouidad-

Table des matières

Introduction générale

Étant données un ensemble M et une application $T : M \to M$, on s'intéresse à donner des conditions suffisantes sur T et M pour que T ait un point fixe, méthode itératif d'approximation.

Dans ce travail, nous avons étudié la théorie du point fixe dans le cas déterministe et le cas aléatoire, qui s'est révélée être un outil très efficace pour la résolution de plusieurs équations intervenant en analyse non linéaire. Nous avons subdivisé ce travail en trois chapitre :

Le premier chapitre, nous avons introduit le cas déterministe où nous avons exposé le théorème de l'application contractante, le théorème du point fixe de Banach, Brouwer, Schauder et Krasnoselkij et quelques unes de leurs applications.

Le deuxième chapitre, nous exposerons la théorie du point aléatoire, qui étudie la version aléatoire du point fixe de Banach, Brouwer, Schauder et Krasnoselkij.

Dans le troisième chapitre, nous donnons quelques applications sur le schéma de Picard et de Mann.

CHAPITRE 1

Théorème des points fixe déterministe

1.1 Théorème du point fixe du type Banach

Ce théorème est appelé principe de l'application contractante, il est à la base de la théorie des points fixes. Ce principe garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même.

1.1.1 La signification du théorème de point fixe de Banach

L'application de ce théorème nous donne des résultats qui sont d'une importance fondamentale dans l'analyse non linèaire . Citons quelques uns :

– Existance de la solution.

– Unicité de la solution de point fixe.

– Stabilité de la solution sous une petite perturbation de l'équation.

– La convergence des méthodes d'approximation.

Et pour achever ce paragraphe, nous allos montrer que les hypothèses du théorème de point fixe de Banach sont essentielles : si nous en négligons seulement une, alors le point fixe n'existe pas.

1) M n'est pas stable par T :

$$Tx = \sqrt{x^2+1} \text{ sur } M = [0,1]$$

Or M est fermé dans $\mathbb{R}$, et complet car $\mathbb{R}$ est complet, de plus :

$$T'x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1 \Rightarrow sup_{x\in M} \mid T'x \mid < 1 \Rightarrow T \text{ est contractante.}$$

mais T n'est pas de point fixe car T([0,1])=[1,2], ie M n'est pas stable par T.

2) T n'est pas contractante :
$Tx = \sqrt{x^2+1}$ sur $M = [0, \infty[$ Or $T : M \to M$ et M est un fermé de $\Re$ (complet) donc M est complet, mais $sup_{x\in M} \mid T'x \mid = 1 \Rightarrow T$ donc T n'est pas contractante.

3)M n'est pas complet :
$Tx = \frac{sinx}{2}$ sur $M =]0, \frac{\pi}{4}]$
Or

$$T(]0, \frac{\pi}{4}]) =]0, \frac{\sqrt{2}}{4}] \subset]0, \frac{\pi}{4}]$$

et

$$sup \mid T'x \mid = \frac{1}{2} < 1$$

Donc T est contractante mais M n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$ donc il n'est pas complet.

1.1.2 Théorème de l'application contractante

Définition 1.1

Soit (M, d) un espace métrique complet et une application $T : M \longrightarrow M$.
On dit que T est une application lipschitizienne s'il existe une constante positive $k \geq 0$ telle que l'on ait, pour tout couple d'éléments x, y de M, l'inégalité

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y) \tag{1.1}$$

si $k \leq 1$, T est dite non expansive
si $k < 1$, T est appelé une contraction

Théorème 1.2 (Théorème du point fixe de Banach(1922)) ([1])

Soit (M,d) un espace métrique complet et soit $T : M \longrightarrow M$ une application contractante avec la constante de contraction k, alors T possède un unique point fixe $x \in M$. De plus, nous avons les propriétés suivantes qui sont importantes :

- si $x_0 \in M$ et $x_n = Tx_{n-1}$, $\lim_{n \to +\infty} x_n = x$ et

$d(x_n, x) \leq k^n (1-k)^{-1} d(x_1, x_0)$, $n \geq 1$

Preuve

L'existence
soit $y \in M$ un point arbitraire dans M, considerons la suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ définie par :

$$\begin{cases} x_0 = y \\ x_n = T(x_{n-1}), n \geq 1 \end{cases}$$

On va prouver que (x_n) est une suite de Cauchy dans M.
Soient $m < n$, on utilise l'inégalité triangulaire :

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + ... + d(x_{n-1}, x_n)$$

Puisque T est une contraction, on aura

$$d(x_p, x_{p+1}) = d(Tx_{p-1}, Tx_p) \leq kd(x_{p-1}, x_p), \text{ pour } p \geq 1$$

En répétant cette inégalité, on obtient :

$$d(x_m, x_n) \leq (k^m + k^{m+1} + ... + k^{n-1}) d(x_0, x_1)$$
$$d(x_m, x_n) \leq k^m (1 + k + ... + k^{n-m-1}) d(x_0, x_1)$$
$$d(x_m, x_n) \leq k^m (1-k)^{-1} d(x_0, x_1)$$

on déduit que $(x_n)_n$ est de Cauchy dans M qui est complet, donc $(x_n)_n$ converge vers un point x dans M.

Par ailleurs, puisque T est continue, alors :

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} T(x_{n-1}) = T(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = Tx$$

Donc x est un point fixe de T (ie. $Tx = x$)

L'unicité : supposons que $x = Tx$ et $y = Ty$ alors :

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

Ce qui implique que $d(x, y) = 0$ ie. $x = y$ (puisque $k < 1$)

Remarques

- Si T est une application lipschitzienne (pas nécessairement une contraction) mais l'une des ces itérées T^p est une contraction, alors T possède aussi un point fixe et un seul, ceci résulte de l'unicité.

En effet, soit x l'unique point fixe de T^p, on a :

$$T^p(T(x)) = T(T^p(x)) = T(x)$$

Ce qui convient à dire que T(x) est aussi un point fixe de T^p et grâce à l'unicité $T(x) = x$

-Il se peut que Tx ne soit pas une contraction sur tout l'espace M mais seulement sur un voisinage d'un point donné. Dans ce cas on a le résultat suivant :

Théorème

Soit (M, d) un espace métrique complet et $T : B \longrightarrow M$

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y) \forall x, y \in B \text{ et } k < 1$$

$$\text{avec } B = \{x \in M, d(x, z) < \varepsilon\} z \in M \text{ et } \varepsilon > 0$$

En plus on suppose que $d(z, T(z)) < \varepsilon(1 - k)$, alors T possède un unique point fixe $x \in B$

Le principe du point fixe a connu diverse extensions dans ce qui suit nous aborderons quelques unes tout en précisant le lien entres elles.

1.1.3 Extension du principe de l'application contractante

En premier temps, on va voir une extension qui consiste à prendre un autre type de contraction et donne le même résultat de Banach.

a. Extension Boyd et Wong : Elle consiste à remplacer la contraction par la φ-contraction dont nous donnons la définition.

Définition 1.3

Soit M un espace métrique et T une application de M dans M.

On dit que T est une φ-contraction s'il existe une application φ semi-continue supérieurement de $[0, \infty)$ dans $[0, \infty)$ avec $\varphi(r) < r$ pour $r > 0$, telle que :

$$\forall x, y \in M.d(T(x), T(y)) \leq \varphi(d(x, y)) \tag{1.2}$$

Le résultat suivant assure l'existence d'un unique point fixe pour de telles applications.

Théorème 1.4 : ([2])

Toute φ-contraction d'un espace métrique complet dans lui même admet un point fixe unique.

Remarque

- La contraction est un cas particulier de la φ-contraction (il suffit de prendre $\varphi(r) = kr$ pout tout $r \geq 0$, $(0 \leq k < 1)$ on va voir que si on remplace l'hypothèse que T soit une contraction par l'hypothèse plus faible qu'est : $d(T(x), T(y)) < d(x, y)$, T ne possède pas nécessairement de point fixe. En effet nous avons l'exemple suivant :

Exemple

Considérons l'espace suivant : $M = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$ muni de la métrique $d(x, y) =| x - y |$ $, \forall x, y \in M$

soit

$$T : M \longrightarrow M \text{ tel que } T(x) = x + \tfrac{1}{x}$$

alors :

$$d(T(x),T(y)) = \mid T(x) - T(y) \mid = \mid x - y \mid . \frac{xy-1}{xy} < \mid x - y \mid = d(x,y)$$

Donc

$$d(T(x),T(y)) < d(x,y) \forall x,y \in M$$

C'est à dire : $k < 1$ tel que : $d(T(x),T(y)) < kd(x,y), \forall x,y \in M$

On vérifie que T ne possède aucun point fixe dans M.

En effet : $T(x) = x \Rightarrow \frac{1}{x} = 0$ impossible.

En compensant par d'autre hypothèse supplémentaires, Edelstein a obtenu le résultat suivant :

b. Extension d'Edelstein :

Théorème 1.5 : ([3])

Soit (M,d) un espace métrique complet et $T : M \to M$ une application telle que :

$$d(T(x),T(y)) < d(x,y) \forall x,y \in M, x \neq y \tag{1.3}$$

supposons qu'il existe $y \in M$ telle que les itérations de $\{x_n\}$ données par :

$$\begin{cases} x_0 = y \\ x_n = T(x_{n-1}), n \geq 1 \end{cases}$$

Possèdent une sous-suite $\{x_{n_j}\}$ avec $\lim_{j\to\infty} x_{n_j} = x \in M$
Alors x est l'unique point fixe de T.

Remarque
-L'application $T : M \to M$ avec la propriété (1.3) ne donne pas le même résultat que le théorème (1.4) mais si M est compact alors T avec la propriété (1.3) est une φ contraction.
-Le résultat précédent (d'Edelstein) possède une importante conséquence qu'est :

Théorème 1.6 :

Soit (M, d) un espace métrique complet et $T : M \to M$ telle que

$$d(T(x), T(y)) < d(x, y), \forall x, y \in M, x \neq y$$

De plus $T(M)$ est compact de M, alors T possède un unique point fixe dans M.

Définition 1.7 :

Soit T une application d'un espace métrique M dans lui même. On dit que T est une contraction uniformément faiblent stricte si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \varepsilon < d(x, y) < \varepsilon + \delta \Rightarrow d(T(x), T(y)) < \varepsilon \tag{1.4}$$

Remarque

-Si T est une φ-contraction alors T est une contraction uniformément faiblement stricte, la réciproque n'est pas vraie.
De la définition (1.7) et de la remarque on a un autre type d'extension qu'est le suivant :

c. Extension de Meir Keeler : Ce théorème étends le résultat à des contractions dites uniformêment faiblement stricte on a le résultat suivant :

Définition 1.8 :([3])

Soit M un espace métrique complet, et T une application de M dans M possédant la propriété (1.4) alors T admet un point fixe unique x. De plus $x = \lim_{n\to\infty} T^n(y)$, $\forall y \in M$

Remarque

Si T est une contraction stricte et M un espace compact alors T vérifie (1.4).

1.2 Théorème du point fixe de type Brouwer-Schauder et Krasnoselkij :

1.2.1 Théorie du point fixe de type Brouwer :

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique, il fait partie de la grande famille des théorèmes de point fixe.([5])

Il existe plusieurs formes du théorème selon le contexte d'utilisation, la plus simple est parfois données sous la forme suivante :

Théorème (Brouwer) :

Toutes fonction continue $f : B^n \to B^n$ possède un point fixe.

Dans un espace euclidien [6], toutes application continue d'une boule fermé d'un espace euclidien dans elle-même admet un point fixe.
Il peut encore être un peu plus général.

1.2.2 Théorie du point fixe de type Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction définie sur un espace de Banach.

Théorème

Toute application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

Théorème 1.9 :([5])

Soit K un sous-ensemble non vide, compact convexe d'un espace de Banach X et soit $T : K \to K$ une application continue. Alors T admet un point fixe.

Preuve 1.9 :

Comme K est compact, T est uniformément continue, alors si on fixe $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ telle que pour tout $x, y \in K$ on a :

$$\| x - y \| \leq \delta \Rightarrow \| T(x) - T(y) \| \leq \varepsilon$$

De plus, on peut recouvrir K par un nombre fini de boules ouvertes de rayon δ et de centre x_j, i.e

$$K \underset{1 \leq j \leq p}{\subset} \cup B(x_j, \delta)$$

Soit $L = vec(T(x_j))_{1 \leq j \leq p}$ alors L est de dimension finie, et $K^* = K \cap L$ est compact convexe de dimension finie.
Pour $1 \leq j \leq p$, on définit les fonctions continues $\psi_j : x \to \mathbb{R}$ par :

$$\psi = \begin{cases} 0 \text{ si } \| x - x_j \| \geq \delta \\ \quad 1 \text{ si non } \frac{\|x - x_j\|}{\delta} \end{cases}$$

Il est clair que φ_j est strictement positive sur $B(x_j, \delta)$ et nulle ailleurs, on a donc, pour tout $x \in K$:

$$\sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) > 0$$

Ainsi, on peut définir sur K les fonctions continue positive φ_j par :

$$\varphi_j(x) = \frac{\varphi_j(x)}{\sum\limits_{k=1}^{p} \varphi_k}$$

Pour les quelles, on a $\sum\limits_{j=1}^{p} \varphi_j(x) = 1$, pour tout $x \in K$
Posant, pour $x \in K$,

$$g(x) = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) T(x_j)$$

La fonction g est continue (car elle est la somme des fonctions continues) et prend ces valeur dans K^* (car $g(x)$ est un barycentre des $T(x_j)$).
D'aprés le théorème de Brouwer, la restriction $g/K^* : K^* \to K^*$ possède un point fixe $y \in K^*$
De plus,

$$\begin{aligned} T(y) - y &= T(y) - g(y) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) T(y) - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) T(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) [T(y) - T(x_j)] \end{aligned}$$

Or, si $\varphi_j(y) \neq 0$ alors $\| y - x_j \| < \delta$ et par suite $\| T(y) - T(x_j) \| < \varepsilon$.
Par conséquence, pour tout y on a :

$$\begin{aligned} \| T(y) - y \| &\leq \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) \| T(y) - T(x_j) \| \\ &\leq \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y)\varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

Donc, pour tout entier m, on peut trouver un point $y_m \in K$ telle que :

$$\| T(y_m) - y_m \| < 2^{-m}$$

Et puisque K est compact, on peut extraire une sous-suite $\{ym_k\}$ de la suite $\{y_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ et qui converge vers un point $y^* \in K$.

Comme T étant continue, la suite $\{T(ym_k)\}$ converge vers $T(y^*)$ et on conclut par la suite que $T(y^*) = y^*$. ie y^* est un point fixe de T sur K.

Théorème 1.10 (Arzela-Ascoli) :

Un sous-ensemble K de l'espace C[0,1] muni de la norme infinie est totalement borné si et seulement si il est uniformément borné et équicontinue .

Remarque :

De nombreux théorème d'existence sont obtenus à partir des théorèmes précités, en réduisant le problème d'existence à un problème de point fixe citons à titre d'exemple la théorie de Peano (voir [1] [5]).

Théorème 1.11 (Théorème de Piano) :([5])

Soit $f : J = [t_0 - a, t_0 + a] * [x_0 - b, x_0 + b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue avec $x_0, t_0 \in \mathbb{R}$ et $a, b > 0$, alors le problème initiale :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t_1 x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet au moins une solution.

Preuve 1.11 :

Ici le problème initial est équivalent à la résolution de l'équation intégrale définit par :

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x, x(s))ds$$

x est continue sur le rectangle J, elle est donc borné sur J. Posons

$$K = \max_{(t,x)\in J} \mid f(t,x) \mid$$

$h = min[a, \frac{b}{K}]$ clairement $h > 0$, considérons l'espace $C[t_0 - h, t_0 + h]$ et définissons l'opérateur A sur cet espace par :

$$A_x = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

A est continue.
Soit S la boule fermé

$$\{f \in C[t_0 - h, t_0 + h] :\mid f(t) - x_0 \mid\leq b\}$$

Alors usant de la définition de h on montre facilement que A envoie S dans lui-même. De plus $A(S)$ est uniformément borné et équicontinue, il vient que S^* l'enveloppe convexe contenant $A(S)$ est uniformément borné et aquicontinue. Donc S^* est convexe et compact par le théorème (1.10), dans $C[t_0 - h, t_0 + h]$, clairement, comme $A(S) \subseteq S$, $A(S^* \subseteq A(S) \subseteq S^* \subseteq S$, et donc par le théorème de Schauder, A possède un point fixe qui est la solution du problème initiale.

Théorème 1.12 (Théorème de Rothe) :([1])

Soit X un espace normé, et K une partie convexe fermée de x. Alors toute application compacte et continue de K dans X telle que $T(\vartheta K) \subset K$ admet un point fixe.

1.3 Théorème du point fixe de Krasnoselskij :

Le théorème de Krasnoselskij est une combinaison des théorèmes de Banach et de Schouder.

Nous donnons, il a été motivé par l'observation que l'invertion d'un opérateur differentielle purturbé peut être écrit comme la somme d'un opérateur compact et une contraction.

Théorème 1.13 (Krasnoselskij) :

Soit X un espace de Banach et D un sous-ensemble fermé, borné et convexe de X, T et S deux opérateurs définis sur D à valeurs dans X telles que :

i) T est une contraction de constante de contraction k.

ii) S est continue et compact

iii) $Tx + Sy \in D$, $\forall x, y \in D$

Alors, il existe $x^* \in D$ tel que $Tx^* + Sx^* = x^*$

Preuve 1.13 :

Pour $y \in D$ fixé, l'application $x \mapsto Tx + Sy$ est une contraction, elle admet donc un point fixe x_y dans D, notons par ϕ l'application qui à chaque y associe x_y. clairement on a $\phi(D) \subset D$ et

$$\phi(y) = x = Tx + Sy = T\phi(y) + Sy \tag{1.5}$$

Montrons que T est continue et compact.
Soient $y, y' \in D$, par (4) on a $\phi(y') = T\phi(y') + Sy'$, par suite,

$$\begin{aligned} || \phi(y) - \phi(y') || &= || T\phi(y) - T\phi(y') + Sy - Sy' || \\ &\leq || T\phi(y) - T\phi(y') || + || Sy - Sy' || \end{aligned}$$

Comme T est une contraction, on a alors :

$$|| \phi(y) - \phi(y') || \leq k \, || \phi(y) - \phi(y') || + || Sy - Sy' ||$$

On tire alors l'inégalité suivante :

$$|| \phi(y) - \phi(y') || \leq \frac{1}{1-k} \, || Sy - Sy' || \tag{1.6}$$

d'ou la continuité de T.
$S(D)$ est relativement compact, donc pour $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir $S(D)$ par un nombre fini de boules ouvertes $\{B(Sy_k, (1-k)\varepsilon)\}_{1\leq k\leq n}$ et donc par l'inégalité (6), $\{B(\phi(y_k), \varepsilon)\}_{1\leq k\leq n}$ est un recouvrement de $\phi(D)$, ce qui montre que T est compact.
Il suffit à présent d'appliquer le théorème de Schauder pour conclure, en effet, il existe $x^* \in D$, tel que $\phi(x^*) = x^*$ à fortiori on a $Tx^* + Sx^* = x^*$

La condition (iii) peu être un peu rigide dans certaines applications. T.A.Burton ([7]) a remplacé cette condition par une autre plus faible et a obtenu le même résultat d'existence.

Théorème 1.14 ([7]) :

Nous reprenons les mêmes hypothèses du théorème de Krasnoselkij, en remplaçant (3) par la suivante :

$$[x = Tx + Sy, y \in D] \Rightarrow x \in D$$

Alors il existe $x^* \in D$ tel que $x^* = Tx^* + Sx^*$

1.4 Méthodes itératives d'approximation :

Dans cette dection nous allons considérer quelques méthodes d'approximations itératives de point fixe appelés schémas itératifs.

1.4.1 Schéma de Picard :

Définition 1.15 :

Soit $T : X \to X$ une application continue définie sur un espace topologique X, on appelle schéma itératif de Picard associée à T, la suite des itérés de T, $\{T^n(x_0)\}_{n\in\aleph}$ ou x_0 est un élément de X.

Définition 1.16 :

Soit (X, d) un espace métrique complet une application $T : X \to X$ est dite de Picard si elle possède un unique point fixe $x^* \in X$ et si $T^n(x_0)$ converge vers $x^*, \forall x_0 \in X$

Exemple 1 : Si (X, d) est un espace métrique complet alors toute contraction $T : X \to X$ est une fonction de Picard (principe de contraction).

Exemple 2 : Pour une fonction contractive $T : X \to X$ ou X est un espace métrique compact, on a déja vu dans le théorème (2.3) que T est une fonction de Picard.

Nous allons présenter une classe généralisée de fonction contractante, dont le schéma de Picard converge.

Définition 1.17 :

Une fonction $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est dite de comparaison, si elle est croissante et la suite $\{\varphi^n(x)\}$ converge vers 0, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

Définition 1.18 :

(φ-contraction), soit (x, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application, on dit que T est φ-contractante si il existe une fonction de comparaison φ telle que : $d(Tx, Ty) \leq \varphi(d(x, d))$, pour tout $x, y \in X$

Définition 1.19 :

Soit (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une φ-contraction. Alors T est une fonction de Picard.
Remarque : Pour le cas des fonctions non-expansives, le schéma de Picard ne converge pas en général vers un point fixe.
Nous considérons dans la suite d'autre schémas itératifs qui possèdes de meilleur résultat de convergence.

Théorème 1.20 : (Moreau [9])

Soit C un sous ensemble fermé d'un espace de Hilbert et $T : C \to C$ une fonction non-expansive. Supposons que l'ensemble des points fixes de T est d'intérieur non vide, Alors pour tout $x \in C$, le schéma de Picard $\{T^n(x)\}$, converge vers un point fixe de T.

Comme il a été signalé précédemment, le schéma de Picard ne converge pas en général pour les fonctions non-expansive et de même si la fonction possède un unique point fixe comme le montre les exemples suivants :

Exemple 1 : Notons par B la boule unité de l'espace de Hilbert des suites de carré semblable l^2.
$\{a_n\}$ une suite de nombres réels de $[0, 1]$ telle que $\Pi_{n=0}^{\infty} a_n > 0$. Considérons l'opérateur liniaire $T : B \to B$ définit par : $T(x_1, x_2, ...) = (0, a_1x_1, a_2x_2, ...)$
L'origine (la suite nulle) est le seul point fixe de T, La suite de Picard $\{T^n e\}$ avec $e = (1, 0, 0, ...)$ converge faiblement vers 0, mais ne converge pas fortement.

Exemple 2 : On pose $B = \{z \in C :\mid z \mid \leq 1\}$ et considérons la fonction $T : C \to C$ définie par :

$$Tz = iz \text{ pour tout } z \in C$$

Soit z_0 un élément arbitraire de C, alors le schéma de Picord pour T prend la forme

$$z_{n+1} = Tz_n = i^{n+1} z_0$$

on a alors :

$$\begin{aligned} | T^n z_0 - T^{n+1} z_0 | &= | i^n z_0 - i^{n+1} z_0 | \\ &= | i^n || 1 - i || z_0 | \\ &= \sqrt{2} | z_0 | \to 0 \end{aligned} \tag{1.7}$$

1.4.2 Schéma de Mann :

Définition 1.21 :

Soit E un espace vectoriel, C un sous-ensemble convexe de E et soit $T : C \to C$ une application et x_1 un point arbitraire de C. Soit $A = [a_{ij}]$ une matrice infinie satisfaisant les conditions suivantes :

1. $a_{nj} \geq 0$ pour tout n, j et $a_{nj} = 0$ pour $j > n$
2. $\sum_{j=1}^{n} a_{nj} = 1$ pour tout $n \geq 1$
3. $\lim_{n \to +\infty} a_{nj} = 0$ pour tout $j \geq 1$

La suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ définie par $x_{n+1} = T(v_n)$, où

$$v_n = \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j$$

est appelée le schéma de Mann.

On notera parfois le schéma de Mann $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ par $M(x_1, A, T)$ où x_1 désigne le point initial, A la matrice de Mann.

Théorème 1.22 : (Mann [38])

Soit E un espace vectoriel normé, C un sous-ensemble fermé, convexe de E,
$T : C \to C$ un opérateur continu, $x_1 \in C$ et $A = [a_{nj}]$ une matrice satisfaisant aux conditions (1), (2) et (3). Si l'une des suites $\{x_n\}$ ou $\{v_n\}$ converge vers un point p alors l'autre suite converge aussi vers p et ce dernier est un point fixe de T.

Définition 1.23 :

Le schéma de Mann $M(x_1, A, T)$ est dit normal si la matrice $A = [a_{nj}]$ satisfait les conditions (1), (2) et (3) plus les conditions suivantes :

(4) $a_{n+1,j} = (1 - a_{n+1,n+1})a_{nj}, j = 1, 2, 3, ..., n = 1, 2, 3, ...$
(5) $a_{nn} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ou $a_{nn} < 1$, pour tout $n > 1$.

L'hypothèse (3) dans la forme normale de Mann peut être remplacée par l'hypothèse suivante :
(3') $\sum_{n=1}^{\infty} a_{nn}$ diverge.
La matrice $A = [a_{nj}]$ dans tout le schéma itératif normal de Mann $M(x_1, A, T)$ est construite comme suit :
On choisi une suite de nombre réels $\{c_n\}$ telle que $0 \leq c_n \leq 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ diverge, on définit ensuite $A = [a_{nj}]$ par :

$$\begin{cases} a_{11} = 1, a_{1j} = 0, \forall j > 1 \\ a_{n+1,n+1} = c_{n,n} = 1, 2, 3, ... \\ a_{n+1,j} = a_{jj}\Pi_{i=j}^{n}(1 - c_i), \text{ pour } j = 1, 2, 3, ... \\ a_{n+1,j} = 0 \text{ pour } j > n + 1, n = 1, 2, 3, ... \end{cases} \tag{1.8}$$

La suite $\{v_n\}$ dans un schéma itératif normal de Mann $M(x_1, A, T)$ satisfait

$$v_{n+1} = (1 - c_n)v_n + c_n T v_n, \text{pour tout}, n > 1 \tag{1.9}$$

où

$$c_n = a_{n+1,n+1}(2.8)$$

Remarque 1.24 :

Une matrice $A = [a_{ij}]$ qui vérifie (1.8) est dit régulière.
Exemple :
(1) En choisissant $c_n = 1$ pour tout $n \geq 1$, on obtient le schéma itératif de Picard.
(2) Si $\lambda \in [0, 1]$ et $A_\lambda = [a_{nj}]$ est définie par :

$$a_{n1} = \lambda^{n-1}, a_{nj} = \lambda^{n-j}(1 - \lambda), j = 2, 3, ..., n$$

Et

$$a_{nj} = 0 \text{ pour } j > n, n = 1, 2, 3, ...$$

Alors $M(x_1, A, T)$ est le schéma normal de Mann, comme on a :

$c_n = a_{n+1,n+1} = 1 - \lambda$ pour $n = 1, 2, 3, ...$

Pour une application $T : C \to C$ définie sur un sous-ensemble convexe d'un espace vectoriel, on définira le schéma de Mann par la suite $\{x_n\}$ dans C définie par :

$$\begin{cases} x_1 \in C \\ x_{n+1} = M(x_n, \alpha_n, T), n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{1.10}$$

Où

$$M(x_n, \alpha_n, T) = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n$$

et $\{\alpha_n\}$ est une suite de nombres réels telle que $0 \leq \alpha_n < 1$ pout tout $n \in \mathbb{N}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$

Lemme 1.25 :

Soit C un sous-ensemble convexe d'un espace vectoriel normé X et $T : C \to C$ une fonction avec un point fixe p tel que :

$$|| \, Tx - p \, || \leq || \, x - p \, ||, \forall x \in C$$

Alors, pour le schéma de Mann définie dans (1.10) avec α_n dans $[0, 1]$, $\lim_{n\to\infty} \| \, x_n - p \, \|$ existe.

Lemme 1.26 :

Soit C un sous-ensemble convexe d'un espace de Banach uniformément convexe et $T : C \to C$ une fonction qui possède au moins un point fixe et qui satisfait la condition :
$|| \, Tx - p \, || \leq || \, x - p \, ||$ pour tout $x \in C$ et tout point fixe p de T.

Alors pour le schéma de Mann définie dans (1.10) avec

$$\sum_{n=1}^{\infty} min\{\alpha_n, 1 - \alpha_n\} = \infty, \lim_{n\to\infty} \inf \, || \, x_n - Tx_n \, || = 0$$

CHAPITRE 2

Théorèmes de point fixe aléatoires

Les théorèmes de points fixe aléatoires sont des versions stochastiques des théorèmes de point fixe déterministe et sont utiles dans l'étude de diverses classes d'équations aléatoires telles que les matrices aléatoires, équations aux dérivées partielles stochastiques, équations intégrales stochastiques ...

L'études des théorèmes de point fixe aléatoires a été initiée par l'école de probabilité de Prague, il y a eu plusieurs résultats intéressants. En 1976, Bharucha Reid [11] a démontré une version stochastique du théorème de points fixes de Schauder pour les opérateurs aléatoires.

2.1 Probabilités dans les espaces de Banach

Nous définirons dans cette section les variables aléatoires à valeurs dans des espaces de Banach. Soit (Ω, U, μ) un espace probabilité complet et $(X, \mathbb{B})$ un espace mesurable où l'ensemble X est un espace de Banach et $\mathbb{B}$ est la tribu des sous-ensembles boréliens de X.

Définition 2.1.1 une fonction $F : \Omega \to X$ est dite variable aléatoire à valeur dans X si l'image réciproque par F de tout borélien de B appartient a U.

Remarque 2.1.1

1. Dans la théorie de la mesure, une telle fonction est dite borélienne

2. Dans le cas où X est la droite réel, cette définition coïncide avec celle des variables aléatoires à valeurs réelles.

2.2 Opérateurs aléatoires

On donne quelques définitions et concepts des opérateurs aléatoires et les variables aléatoires dues à Bharucha Reid ([14],([13]). Soit (Ω, Σ) un espace mesurable, soit (X, τ) et (Y, σ) deux espaces topologiques.

Définition 2.1.2 une application $x : \Omega \to X$ est dite une variable aléatoire à valeurs dans X (éléments aléatoires ou variable aléatoire généralisé)
Si $x(\cdot)$ est mesurable, i.e, $(x^{-1}(A) \in \sum, \forall A \in B(X)$ où $B(X)$ est la tribu borélienne).

Définition 2.1.3 une application $T : \Omega \times X \to Y$ est dite un opérateur aléatoire si pour tout $x \in X, T(., X)$ est mesurable Si $(X, || \cdot ||_X)$ et $(Y, || \cdot ||_Y)$ sont deux espaces vectoriels normés définie sur le même corp Q, on a la définition suivante :

Définition 2.1.4 un opérateur aléatoire $T(w, \cdot)$ est dit :

(a) linéaire si : $T(w, \alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T(w, x_1) + \beta T(w, x_2)$pp pour tout $x_1, x_2 \in X$, $\alpha, \beta \in Q$

(b) si T est linéaire, alors T est bornée s'il existe une variable aléatoire à valeur réelle non-négative $M(w)$ telle que pour tout $x \in X$

$$|| \, T(w, x) \, ||_y \leq M(w) \, || \, x \, ||_X \text{ pour tout } w \in \Omega$$

(c) continue en x_0 si pour tout $(x_n) \subset X$, telle que $\lim\limits_{n \to \infty} || \, x_n - x_0 \, || = 0$ implique que

$$\lim_{n \to +\infty} || \, T(w, x_n) - T(w, x_0) \, || = 0$$

Exemple d'opérateurs aléatoires

1. **matrices aléatoires :** Soit $X = \mathbb{R}^n$, n fini, une $n \times n$ matrice aléatoire $M(w)$ est une matrice dont les éléments $m_{i,j}, i, j = 1, 2, ..., n$ sont des variables aléatoires qui est de la forme :
$$M(w) = (m_{i,j}(w))_{1 \leq i,j \leq n}$$
2. **Opérateur de différence aléatoire :** un opérateur $N : \Omega \times l_2 \to l_2$ défini comme suit :
$$T(w, (x_k)) = \sum_{i=1}^{n} a_i(w) \tau_i(x_k)$$

Où τ_i désigne l'opérateur de translation $\tau_i(x_k) = x_{k+1}, i = 1, 2, ..., n$ et $a_i(w)$ sont des variables aléatoire à valeurs réelles. Les opérateurs de différence aléatoires apparaissent dans l'étude des systèmes dynamiques aléatoire à paramétre discret, et beaucoup d'équations de différence aléatoires ont été étudié en biologie, ...

3. **Opérateurs différentiels ordinaires aléatoires :** Soit $X = C[a, b]$, et $C^n[a, b] \subset C[a, b]$ composé de toutes les fonctions $x(t)$ dont les n-première dérivées sont continues, On peut définir un opérateur differentiel aléatoire $N : \Omega \to C[a, b] \to C^n[a, b]$ comme suit :

$$N(w, x(t)) = \sum a_k(w)\frac{d^k x}{dt^k}, t \in [a, b]$$

Où les coefficients $a_k(w)$ sont des variables aléatoires à valeurs réelles.

4. **Opérateurs intégrales aléatoires :** (voir Bharucha Reid [13] et Tsokos et Padgett [10]).
En particulier, les opérateurs linéaires aléatoires de Fredholn et Volterra de la forme :

$$F(w, f(x)) = \int_a^b K(x, y, w)f(y)dy$$

et

$$V(w, f(x)) = \int_a^x K(x, y, w)f(y)dy$$

Ainsi que les opérateurs non-linéaire aléatoires d'Uryson de la forme :

$$U(w, f(x)) = \int_a^b G(x, y, f(y), w)dy$$

2.3 Equations aléatoires

Soit X et Y deux espaces de Banach et (Ω, Σ) un espace mesurable, soit T un opérateur de X vers Y. Nous considérons d'abord les analogies probabilistes des équations déterministes.

$$T(x) = y(x) \tag{2.1}$$

$$(T - \lambda I)(x) = y(x) \tag{2.2}$$

Où λ est un scalaire qui peut être réel ou complexe.
Il est clair que le mot aléatoire peut être introduit dans les équations via la fonction y, l'opérateur T ou les deux.
De l'équation (2.1) on peut obtenir les équations aléatoires suivantes :

$$T(x) = y(w, x) \tag{2.3}$$

$$T(w, x) = y(x) \tag{2.4}$$

$$T(w,x) = y(w,x) \tag{2.5}$$

Pour les équations (2.3) et (2.4), pour être cohérent, il faut supposer que dans l'équation (2.3), l'opérateur deterministe T est un opérateur aléatoire. De même, dans l'équation (2.4) on suppose que y est variable aléatoire.

Comme dans le cas de l'équation (2.1), on peut obtenir les équations aléatoires suivantes de l'équation (2.2)

$$(T - \lambda I)(x) = y(w,x) \tag{2.6}$$

$$(T(w,.) - \lambda I)(x) = y(x) \tag{2.7}$$

$$(T(w,.) - \lambda I)(x) = y(w,x) \tag{2.8}$$

2.4 Les solutions des équations aléatoires

Les méthodes pour résoudre les équations aléatoires ne doivent pas seulement établir l'existence et l'unicité, elles doivent établir la mesurabilité des solutions. C'est la différence essentielle entre les méthodes des résolutions des équations déterministes et équations aléatoires.

Les théories classiques (déterministes) d'existence et d'unicité servent de «modèles» pour des théorèmes similaires pour les équations d'opérateurs aléatoires. Et la version probabiliste d'un théorème classique est souvent obtenue en utilisant le résultat classique lui-même avec une hypotèse thèorique de mesure appropriée.

Définition 2.1.5 :([13]) Soient Ω, Σ un espace mesurable et (X, τ) un espace topologique.

$$N : \Omega \times X \to X \text{ un opérateur aléatoire}$$
$$x : \Omega \to X \text{ une variable aléatoire.}$$

On dit que $x(\cdot)$ est un point fixe de N si :

$$x(w) = N(w, x(w)), \text{ pour tout } w \in \Omega$$

Si (Ω, Σ, μ) est un espace probabilisé, on considère les deux définitions suivantes :

Définition 2.1.6 Toutes variable aléatoire $x_0(\cdot)$ qui satisfait la condition :

$$\mu(\{w : N(w, x_0(w)) = y(w)\}) = 1$$

est une solution aléatoire de l'équation aléatoire :

$$N(w, x(w)) = y(w), w \in \Omega$$

Définition 2.1.7 Une variable aléatoire $u(.)$ est considérée comme un point fixe de l'opérateur aléatoire $N(., x(.))$ si $u(.)$ est une solution aléatoire de l'équation :

$$N(w, u(w)) = u(w), w \in \Omega$$

2.5 Théorème du point fixe de type de Banach aléatoire

Dans ce qui suit, (Ω, Σ) un espace mésurable.

Définition 2.1.8 Un opérateur aléatoire $N : \Omega \times X \to X$ sur un espace métrique X est dit un opérateur de contraction aléatoire s'il existe une variable aléatoire à valeurs réelles non-négatives $k : \Omega \to \mathbb{R}$ tel que $0 \leq k(w) < 1$ et :

$$d(N(w,x), N(w,y)) \leq k(w)d(x,y) \text{ pour tous } w \in \Omega \text{ et } x, y \in X$$

Si $k(w) = k$ (une constante) pour tout $w \in \Omega$, alors N s'appelle un opérateur uniforme de contraction aléatoire.

Théorème 2.1.9 : Soit (X, d) un espace métrique complet séparable, soit $N : \Omega \times X \to X$ un opérateur de contraction aléatoire. Alors il existe une variable aléatoire $x : \Omega \to X$ qui est le point fixe unique N.
* Pour démontrer ce théorème on a besoin de théorème de point fixe de Banach.

Démonstration du théorème 2.1.9 :
Soit $w \in \Omega$, on définit :

$$N_w : X \to X$$
$$x \longmapsto N_w(x) = N(w, x)$$

$N_w(.)$ est un opérateur contractant. Alors d'aprés le théorème (2.1.10) pour chaque $w \in \Omega$ fixé, il existe un unique $x(w) \in X$ tel que $x(w) = N(w, x(x))$, soit $y : \Omega \to X$ une fonction arbitraire mesurable.
Posons $(x_n(w))_{n\in\aleph}$ définie comme suit :

$$\begin{cases} x_0(w) = y(w), w \in \Omega \\ x_n(w) = N(w, x_{n-1}(w)) \end{cases}$$

Puisque n_0 et N sont des applications mésurable, alors $(x_n(w))_{n\in w}$ est une suite de fonctions mésurables donc une suite de variables aléatoires, on montre maintenant que $(x_n(w))_{n\in\aleph}$ est une suite de Cauchy, on a pour $w \in \Omega$:

$$\begin{array}{rcl} d(n_{n+1}(w), x_n(w)) & = & d(N(w, x_n(w)), N(w, x_{n-1}(w))) \\ & \leq & k(w)d(x_n(w), x_{n-1}(w)) \\ & = & k(w)d(N(w, x_{n-1}(w)), N(w, x_{n-2}(w))) \\ & \leq & k^2(w)d(x_{n-1}(w)), x_{n-2}(w)) \\ . & & \\ . & & \\ . & & \\ & \leq & k^n(w)d(x_1(w), x_0(w)) \\ & = & k^n(w)d(y(w), N(w, y(w))) \end{array}$$

Pour $m > 0$, on utilise l'inégalité triangulaire,

$$\begin{array}{rcl} d(x_n(w), x_{n+m}(w)) & \leq & d(x_n(w), x_{n+1}(w)) + d(x_{n+1}(w), x_{n+2}(w)) + ... + d(x_{n+m-1}(w), x_{n+m}(w)) \\ & \leq & (k^n(w) + k^{n+1}(w) + ... + k^{n+m-1}(w))d(y(w), N(w, y(w))) \\ & \leq & \dfrac{k^n(w)}{1 - k(w)} d(y(w), N(w, y(w))) \end{array}$$

Donc $(x_n)_{n \in \aleph}$ est une suite de Cauchy, Alors, il existe une variable aléatoire $y^* : \Omega \to X$ telque : $d(x_n(w), y^*(w)) \to 0$ quand $n \to +\infty$
Alors

$$\begin{array}{rcl} d(y^*(w), N(w, y^*(w))) & \leq & d(y^*(w), x_n(w)) + d(x_n(w), N(w, y^*(w))) \\ & \leq & d(y^*(w), x_n(w)) + k(w)d(x_{n-1}(w), y^*(w)) \end{array}$$

Donc

$$d(y^*(w), N(w, y^*(w))) \to 0 \text{ quand } n \to \infty$$

Ainsi

$$y^*(w) = N(w, y^*(w)) \text{ pour tout } w \in \Omega$$

Et alors

$$y^* = x(w)$$

Donc $x(w)$ est un point fixe aléatoire de N pour tout $w \in \Omega$

Pour l'unicité, supposons qu'il existe une autre variable aléatoire $x' : \Omega \to X$ telle que $x'(w) = N(w, x(w))$ et $x'(w) \neq x(w)$ p.p, on a :

$$\begin{array}{rcl} d(x'(w), x(w)) & = & d(N(w, x'(w)), N(w, x(w))) \\ & \leq & k(w)d(x'(w), x(w)) \\ & < & d(x'(w), x(w)) \end{array}$$

contradiction, donc $x(w)$ est le point fixe aléatoire unique.

Théorème 2.1.10 ([14]) : Soient Ω un espace probabilisé, E un espace de Banach séparable et $N : \Omega \times E \to E$ un opérateur aléatoire continue, pour chaque $w \in \Omega$ et $x \in E$, posons :

$$N^{-1}(w, x) = N(w, x)$$
$$N^{n+1}(w, x) = N(w, N^n(w, x)), n = 1, 2, ...$$

Si $N(w)$ satisfait la condition suivante :

$$\mu(\cup_{m=1}^{\infty} \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{y(w)\in E} \{w :\| N^n(w, x(w)) - N^n(w, y(w)) \| \leq (1 - \frac{1}{m}) \| x(w) - y(w) \|\}) = 1 \quad (2.9)$$

Alors, il existe une variable aléatoire $u : \Omega \to X$ qui est le point fixe unique de N c'est

$$N(w, u(w)) = u(w)p.s \quad (2.10)$$

et si v est une autre variable aléatoire qui satisfait (2.10) alors :

$$u(w) = v(w)p.s$$

Démonstration 2.1.10 : Soit F qui désigne les éléments de Ω appatenant à l'ensemble

$$\cup_{m=1}^{\infty} \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{x(w)\in E} \cap_{y(w)\in E} \{w :\| N^n(w, x(w)) - N^n(w, y(w)) \| \leq (1 - \frac{1}{m}) \| x(w) - y(w) \|\}$$

Pour lequel N est continu. De toute evidence, $F \subset \Omega$ et par hypothèse $\mu(F) = 1$.
Soit la fonction $x : \Omega \to X$ définie comme suit :

$$x(w) = \begin{cases} N(w, x(w)) & \text{si } w \in F \\ 0 & \text{si } w \in \Omega \setminus F \end{cases}$$

on a alors $\mu(\Omega \setminus F) = 0$, donc :

$$x(w) = N(w, x(w)).p.s$$

Maintenant, on montre que x est mesurable. Soit $x_0 : \Omega \to X$ une variable aléatoire arbitraire. Posons $(x_n(w))_{n\in\mathbb{N}}$ définie comme suit :

$$\begin{cases} x_0(w) = y(w), w \in \Omega \\ x_n(w) = N(w, x_{n-1}(w)) \end{cases}$$

Puisque x_0 et N sont des applications mesurable, alors $(x_n(w))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonction mesurable, donc une suite de variable aléatoire. Il s'ensuit que $(x_n(w))_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque certainement vers $x(w)$ et $x(w)$ est une variable aléatoire.
L'unicité du point fixe découle de l'unicité de $x(w)$ pour chaque $w \in \Omega$

Théorème 2.1.11 : Soient Ω un espace probabilisé, E un espace de Banach séparable et $N : \Omega \times E \to E$ un opérateur aléatoire. Soit $K(w)$ une variable aléatoire à valeur réelles non-négatives telle que

$$0 \leq K(w) < 1 \text{ et } \| N(w, x_1) - N(w, x_2) \| \leq K(w) \| x_1 - x_2 \| \text{ pour tous } x_1, x_2 \in X.$$

Alors il existe une variable aléatoire x qui est le point fixe unique de N.

2.6 Théorème du point fixe de type Schauder aléatoire

Théorème 2.1.12 : Soient Ω un espace mesurable, X un espace de Banach séparable, $m \subseteq X$ un convexe compact, $N : \Omega \times X \to X$ un opérateur telle que les conditions suivantes soient satisfaites :

(1) $w \to N(w, x), x \in X$ mesurable

(2) $x \to N(w, x), w \in \Omega$ est continue

(3) $N(w, M) \subseteq M$ pour tout $w \in \Omega$

Alors N admet au moins un point fixe aléatoire.

Théorème 2.1.13 : Soient X un espace de Banach séparable et $F : \Omega \times X \to X$ un opérateur aléatoire complètement continue. Alors, l'une des conditions suivantes est valable :

(i) l'équation aléatoire $F(w, x) = x$ a une solution aléatoire, c'est à dire qu'il existe une fonction mesurable $x : \Omega \to X$ telle que $F(w, x(w)) = x(w)$ pour tout $w \in \Omega$.

(ii) L'ensemble $M = \{x : \Omega \to X \text{est mesurable} \mid \lambda(w)F(w, x) = x\}$ est non bornée pour un certain $\lambda : \Omega \to X$ mesurable avec $0 < \lambda(w) < 1$ sur Ω

La version probabiliste suivante du théorème de point fixe de Schauder est due à Mukherjea ([12]).

Théorème 2.1.14 : Soit (Ω, Σ, μ) un espace de mesure de probabilité et soit M un sous-ensemble convexe compact (ou fermé et borné) d'un espace de Banach séparable X.
Soit $T : \Omega x M \to M$ un opérateur aléatoire compact, Alors il existe une variable aléatoire $x : \Omega\} M$ telle que $T(w, x(w)) = x(w)$

Nous avons besoin du lemme suivant :
Lemme : si $x : \Omega \to X$ est une variable aléatoire définie sur un espace de mesure de probabilité,

alors x est constant sur tout atome.

Preuve théorie 2.1.14 :

Soit B_n les atomes de Σ, si $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ est dense dans M donc il découle du lemme ci dessus que $T(w, x_i)$ est constant presque sûrement sur chaque B_n pour tout $i = 1, 2, ...$ de sorte que pour chaque n, on peut trouver $C_n \subseteq B_n$ avec $\mu(B_n \setminus C_n) = 0$ et tel que :

$$T(w, x_i) = \sum X_{Cn}(w)T(w_n, x_i)$$

Pour tout $i = 1, 2, ...$ où $w \in \cup_{n=1}^{\infty} C_n$ et $w_n \in C_n$. Soit w_1 et w_2 deux points en C_n et soit x un élément quelconque dans M.
On montre que : $T(w_1, x) = T(w_2, x)$

On suppose le contraire. Alors il existe $k > 0$ telque :

$$|| T(w_1, x) - T(w_2, x) ||> k$$

Puisque $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ est dense dans M, on peut trouver une sous-suite désignée par $\{x_i\}_{i\in\aleph}$ telle que $x_i \to x$ et comme $T(w_l.)$ est continue, donc pour $\varepsilon = \frac{k}{2}$ il existe $i_0 \in \mathbb{N}$ telque pour tout $i > i_0$ on a :

$$|| T(w_j, x_i) - T(w_j, x) ||\leq \frac{k}{2}, j = 1, 2, ...$$

ainsi

$$|| T(w_1, x_i) - T(w_1, x) ||\leq \frac{k}{2}$$

et

$$|| T(w_2, x_i) - T(w_2, x) ||\leq \frac{k}{2}$$

donc

$$|| T(w_1, x_i) - T(w_1, x) || + || T(w_2, x_i) - T(w_2, x) ||\leq k$$

En utilisant le fait que :

$$T(w_1, x_i) = T(w_2, x_i)$$

on obtient

$$k <\| T(w_1, x) - T(w_2, x) \| \leq k$$

ce qui donne une contradiction, par conséquant :

$$T(w, x) = \sum_{n=1}^{\infty} X_{Cn}(w) T(w_n, x) p.s$$

Pour chaque $x \in M$, Nous pouvons appliquer le théorème de Schauder à chacun des opérateurs $T(w_n, .)$ par conséquent, il existe au moins un point U_n pour chaque n tel que :

$$T(w_n, U_n) = U_n$$

Posons

$$x(w) = \begin{cases} U_n \text{ si } & w \in C_n \\ 0 \text{ si } & w \notin C_n \end{cases}$$

Alors $T(w, x(w)) = x(w)$ presque sûrement.

2.7 Théorème du point fixe de type Krasnoselkii aléatoire

Théorème 2.1.15 : Soient Ω un espace mesurable, X un espace de Banach séparable, $M \subseteq X$ un convexe fermé, $N.B : \Omega \times M \to X$ deux opérateurs aléatoires, $k(w)$ une variable aléatoire à valeurs réelles non-négatives telle que $0 \leq k(w) < 1$

Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :

(1) $N(w, \cdot)$ est $k(w)$-contraction pour tout $w \in \Omega$

(2) $B(w, \cdot)$ est compact

(3) Pour tout $w \in \Omega$, $N(w, x) + B(w, y) \in M$ pour tout $x, y \in M$

Alors $N + B$ a un point fixe aléatoire.

Preuve : Pour chaque $y \in M$ fixé, définissons un opérateur $Ty : \Omega \times M \to M$ par :

$$Ty(w, x) = N(w, x) + B(w, y)$$

Comme Ty est une somme de deux opérateurs aléatoires et X est séparable, alors Ty est un opérateur aléatoire ([13] p18). On a pour $w \in \Omega$, $w_1, x_2 \in M$:

$$\begin{aligned} \| Ty(w, x_1) - Ty(w, x_2) \| &= \| N(w, x_1) + B(w, y) - (N(w, x_2) + B(w, y)) \| \\ &= \| N(w, x_1) - N(w, x_2) \| \\ &\leq k(w) \| x_1 - x_2 \| \end{aligned}$$

Donc $Ty(w, \cdot)$ est une $k(w)$-contraction. Ainsi, par le théorème 2.1.12, il existe un point fixe aléatoire unique $U_y : \Omega M$ de T_y
Définissons un opérateur aléatoire $f : \Omega \times M \to M$ par :

$$\begin{aligned} f(w, y) &= U_y(w) \\ &= T_y(w, U_y(w)) \\ &= N(w, U_y(w)) + B(w, y) \end{aligned}$$

Alors $f(w, .)$ est continue pour tout $w \in \Omega$. En fait si $y_1, y_2 \in M$, donc :

$$\begin{aligned} \| B(w, y_1) - B(w, y_2) \| &= \| U_{y1}(w) - N(w, U_{y1}(w)) - U_{y2}(w) + N(w, U_{y2}(w)) \| \\ &\geq \| U_{y1}(w) - U_{y2}(w) \| - \| N(w, U_{y1}(w)) - N(w, U_{y2}(w)) \| \\ &\geq \| U_{y1}(w) - U_{y2}(w) \| - k(w) \| U_{y1}(w) - U_{y2}(w) \| \\ &= (1 - k(w)) \| U_{y1}(w) - U_{y2}(w) \| \\ &= (1 - k(w)) \| f(w, y_1) - f(w, y_2) \| \end{aligned}$$

Comme B est compact, f est compact par l'inégalité ci-dessus. Par conséquent, par le théorème (8.1.11) il existe un point fixe aléatoire $\upsilon : \Omega \to M$ de f. donc :

$$\begin{aligned} \upsilon(w) &= f(w, \upsilon(w)) \\ &= U_{\upsilon(w)}(w) \\ &= T_{\upsilon(w)}(w, U_{\upsilon(w)}(w)) \\ &= N(w, U_{\upsilon(w)}(w)) + B(w, \upsilon(w)) \\ &= N(w, \upsilon(w)) + B(w, \upsilon(w)) \end{aligned}$$

Alors υ est un point fixe aléatoire de $N + B$.

CHAPITRE 3

Application Numérique

dans ce chapitre on prend un Exemple d'une application contractant f donc elle possède un unique point fixe, puis en utilisant feux méthodes itératives (Picard et Mann) on obtient le point fixe approché et on va faire la comparaison entre le point fixe approché et le point fixe exact et les résultat obtenus dans les deux programmes.

Exemple

Pour le cas réels considérons la fonction f telle que :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x :\to 1 - \frac{1}{5}x$$

- Continuité De f :

On a $\exists \varepsilon > 0$, tell que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mid x - x_0 \mid \leq \eta \Rightarrow \mid f(x) - f(x_0) \mid \leq \varepsilon$, et donc dans le choix de $\varepsilon = \frac{\eta}{2}$ la continuité de f est satisfait, alors f est continue.

- La Contraction De f :

On a $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $d(f(x), f(y)) \leq \frac{1}{2}d(x, y)$, en effet :
$\mid f(x) - f(y) \mid = \mid (1 - \frac{1}{2}x) - (1 - \frac{1}{2}y) \mid \leq \frac{1}{2} \mid x - y \mid$, ie : $d(f(x), f(y)) \leq \frac{1}{2}d(x, y)$, $\forall x, y$ dans $\mathbb{R}$.

- Le point fixe exact de f est : 0,833333 on considérons la suite :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

On cherche a trouver les itérations successive de cette suite et l'erreur (absolue,relative) respectivement,et leurs convergence,et pour ça on va utiliser logiciel MATLAB pour l'algorithme de Picard et le programme Python pour l'algorithme de Mann.

3.1 Algorithme De Picard

Définition : (Itération De Picard)

Soit (X, d) un espace métrique , $C \subset X$ un sous ensemble fermée de X et $T : C \to C$ une application possé au moins un point fixe $p \in F(T)$, la suite $\{x_n\}$ donné par :

$$\begin{cases} x_0 \in C \\ x_{n+1} = Tx_n, n = 1, 2, 3... \end{cases}$$

est appelée l'itération de Picard ou la suite d'approximations successive.

- Le Programme Sous MATLAB est :

```
function [iter,X] = picard11(x0,eps)
syms x
f=1-1/5*x;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
D=[0:0.01:1];
for i=1:length(D)
    F(i)=double(subs(f,{x},{D(i)}));
end


%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
X(1)=x0;
```

```
XX=0.8333333333333;
X(2)=double(subs(f,{x},{X(1)}));
iter=1;
Err=abs(X(2)-X(1));
%Err(2)=Err;
%Err_abs=abs(X(2)-XX);
%Err_abs(2)=Err_abs;
%Err_rela=(abs(X(2)-XX))/(abs(XX));
%Err_rela(2)=Err_rela;
i=3;
while Err>eps
    X(i)=double(subs(f,{x},{X(i-1)}));
    Err=abs(X(i)-X(i-1));
%     Err(i)=abs(X(i)-X(i-1));
%     Err_abs(i)=abs(X(i)-XX);
%     Err_rela(i)=(abs(X(i)-XX))/(abs(XX));
    i=i+1;
    iter=iter+1;
end
for j=1:length(X)
    FF(j)=double(subs(f,{x},{X(j)}));
end
plot(D,F,D,D,X,FF,'+')
```

pour exécution de ce programme on a choisi : $x_0 = 0$, $eps = 10^{-6}$ et $f = 1 - \frac{1}{5}x$

i	X_i	$\mid X_i - XX \mid$
1	$1,000$	$0,16667$
2	$0,8000$	$0,0333$
3	0,8400	0,00666
4	0,8320	0,0013

TABLE 3.1 – Itération de picard

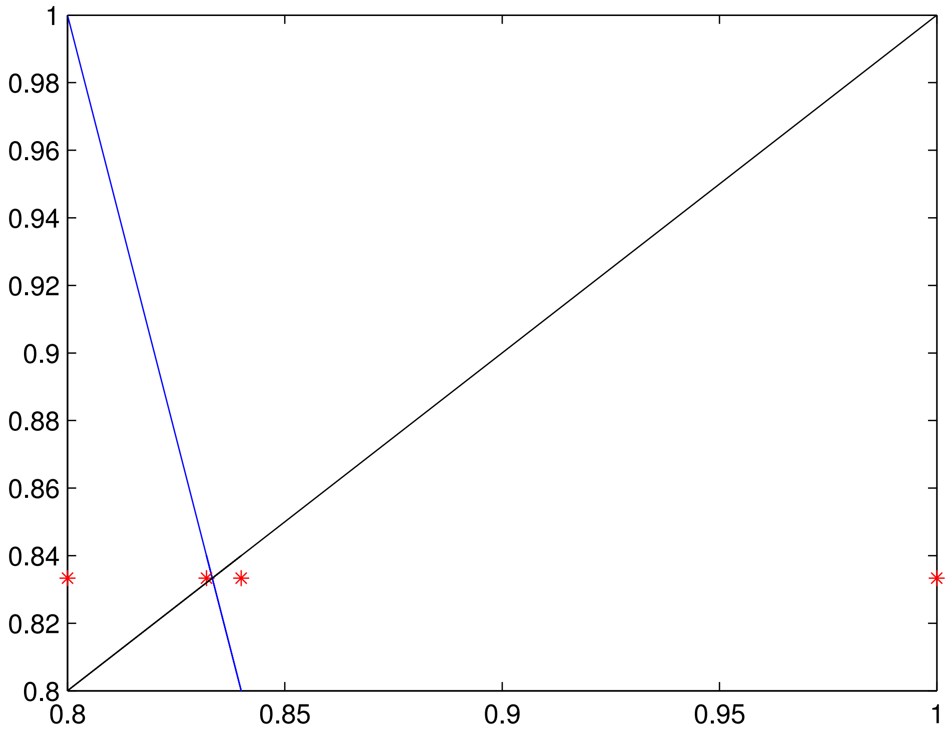


FIGURE 3.1 – Itération de picard

où :
-i : est le nombre d'itérations.
-X_i : est la solution approchée.
-$\mid X_i - XX \mid$: est l'erreur absolue .

3.2 Algorithme De Mann

Définition : (Itération de Mann)
Soit X un espace linéaire et C un ensemble convexe de X et $T : C \to C$ une application, soit a_n une suite dans $[0, 1]$ satisfait des conditions appropriées. On définit une suite $\{x_n\}$ dans C par :

$$\begin{cases} x_1 \in C \\ x_{n+1} = M(x_n, a_n, T); n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

où $M(x_n, a_n, T) = (1 - a_n)x_n + a_nTx_n$, alors la suite x_n est appelée l'intération de Mann.

- le programme Python est :

```
import numpy as np
import matplotlib.pylab as plt
import math
# @param f la fonction
# @param n nombre d'itÃ©ration
# @param x_0 le point initial
# @param x le point fixe
# @param a coefficient
def mann(f, n, x_0, x, a):
    arr = np.zeros(n+1)
    arr[0] = x_0
    for i in range(1, n+1):
        arr[i] = (1 - (a/i)) * arr[i-1] + (a/i) * f(arr[i-1])
    return arr

XX = 0.8333333333333
arr = mann(lambda x : 1 - (1/5)*x, 30, 0.5, 0.83, 1.5)
errors = [math.fabs(x - XX) for x in arr]
print(arr)
print(errors)
```

pour l'exécution de ce programme on a choisi $x_1 = \frac{1}{2}$, $eps = 10^{-3}$ et $a = \frac{3}{2}$

i	X_i	$\mid X_i - XX \mid$
1	0.5	0.3333333
2	1.1	0.2666666
3	0.86	0.0266666
4	0.844	0.0106666
5	0.8392	0.0058666
6	0.837088	0.0037546
7	0.8359616	0.0026282
8	0.83528576	0.0019524
9	0.83484646	0.0015131
10	0.83454384	0.0012105
11	0.83432595	0.0009926
12	0.83416352	0.0008301
13	0.83403899	0.0007056
14	0.83394128	0.0006079
15	0.83386312	0.0005297
16	0.83379955	0.0004662
17	0.8337471	0.0004137
18	0.83370329	0.0003699
19	0.83366629	0.0003329
20	0.83363475	0.0003014
21	0.83360762	0.0002742
22	0.83358411	0.0002507
23	0.83356359	0.0002302
24	0.83354557	0.0002122
25	0.83352965	0.0001963
26	0.83351552	0.0001821
27	0.83350291	0.0001695
28	0.8334916	0.0001582
29	0.83348143	0.0001480
30	0.83347223	0.0001389
31	0.8334639	0.0001305

TABLE 3.2 – Itération de Mann

où :
-i : est le nombre d'itérations.
-X_i : est la solution approchée.
-$\mid X_i - XX \mid$: est l'erreur absolue .

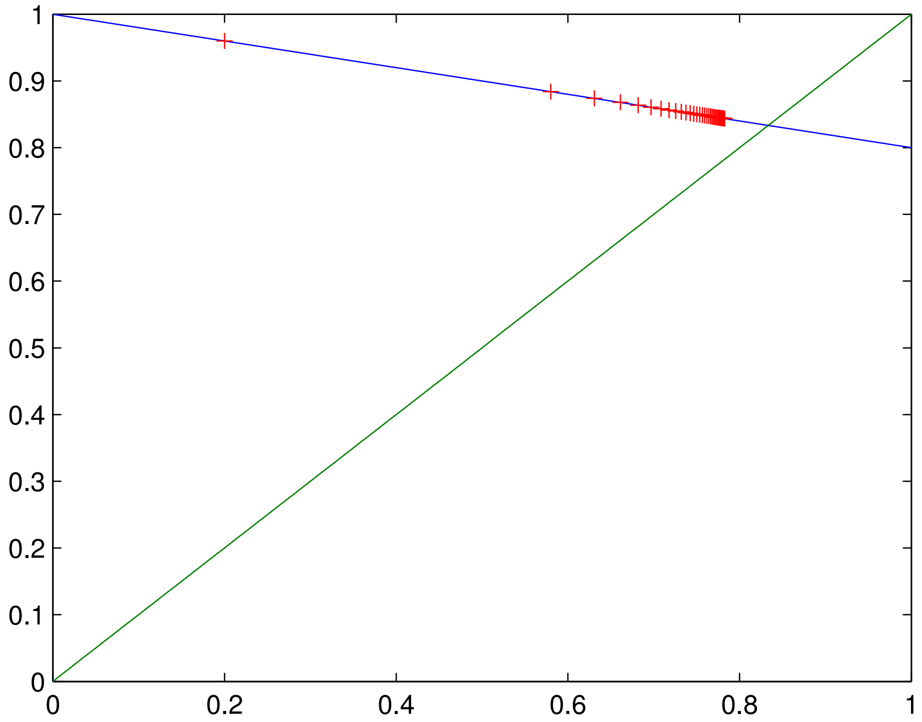


FIGURE 3.2 – Itération de Mann

Conclusion

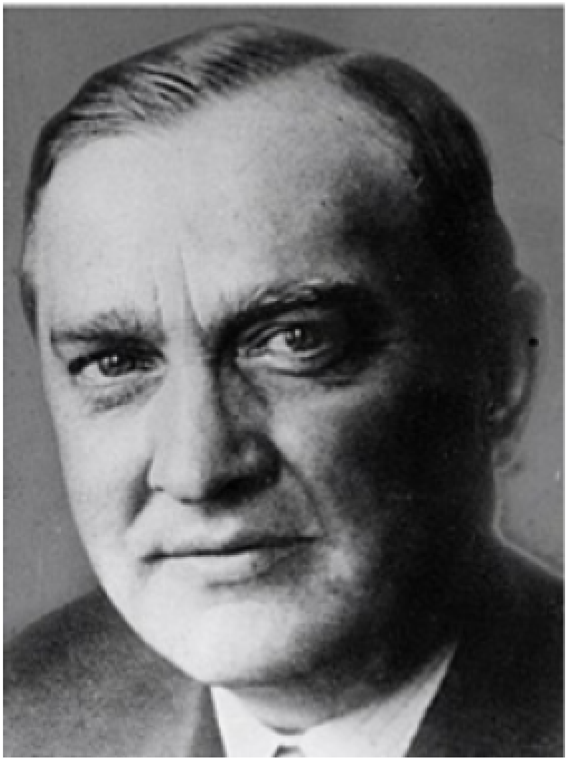
Dans ce travail non avons donné une étude simple pour le théorème du point fixe de Banach pour les applications contractantes et les théorèmes du point fixe de Brouwer, Schauder, puis nous avons appliqué le théorème du point fixe.

Puis nous avons appliqué le théorème de point fixe pour résoudre une fonction contractante avec la méthode Picard et la méthode Mann.

Annexe

Luitzen Egbertns Jan Brouwer (1881 - 1966) : Est un grand mathématicien hollandais qui de 1909-1913 découvre la majeure partie des théorèmes aux quels son nom est rattaché où on peut citer le théorème de point fixe. Brouwer est le père de la topologie moderne. Après la guerre, il consacrera le reste de sa carrière aux mathématiques intuitionnistes et défendant le rôle de l'intuition pour éviter les antinomies que peuvent faire naître le développement de la science.

Juliusz Schauder : Est un mathématicien polonais, connu pour ses travaux dans les domaines de l'analyse fonctionnelle, les équations aux dérivées partielles et la physique mathématique. Il est né en 1899 à Lemberg, il est entré à l'université de Lwów en 1919 et a passé son doctorat en 1923. Il a continué ses recherches tout en travaillant comme enseignant dans une école secondaire, mais grâce à ses résultats remarqués, il a obtenu une bourse d'étude en 1932 qui lui permis de passer plusieurs années d'abord à Leipzig et ensuite à Paris. Vers 1953 Schauder a obtenu un poste de maître assistant à l'université de Lwów. Schauder est surtout connu pour le théorème de Banach-Schauder, le théorème du point fixe de Schauder qui est un outil majeur pour prouver l'existence de solutions dans différents problèmes. Schauder était juif. Il a été exécuté par gestapo, probablement en octobre 1943.



Stefane Banach : est un mathématicien Polonais, ses travaux ont surtout prote sur l'analyse fonctionnelle dont il est l'un des fondateurs. Il est né le 30 mars 1892 à Cracovie, Galicie (Autriche-Hongrie). Autodidacte, il est découvert fortuitement par Hugo Steinhaus et obtient son doctorat en 1920. Il e¤ectue l'essentiel de sa carrière à Lwòw, où il enseigne à l'université et à l'école polytechnique. Ses publications, au nombre d'une soiscantaine, font de lui l'un des mathématiciens les plus influents du XXe siècle. Il est l'un des membres fondateurs de la société mathématique de pologne dont il devient vice président en 1932 et président en 1939. Son nom reste associé un certain nombre de théorèmes et a été donné entre autres aux espaces de Banach et aux algèbres de Banach et aux point fixe de Banach. Il meurt d'un cancer de 31 août 1945 (à 53 ans) :

Bibliographie

[1] D.R. Smart, *Fixed Point Theory*, Combridge Uni, Press, Combridge, 1974

[2] D.W. Boyd, and J.S.W. Wong *On non linear contractions*, Prac Amor. Math. Soc 20 (1969) 458-464

[3] M. Edelstein *An extension of Banatch's contraction principal*, Prac Amor. Math. Soc 12 (1961) 7-10.

[4] A. Mier and K. Keeler *A theorem on contractive mappings*, J. Math. Anal Appl 28 (1969) 326-329

[5] E. Zedler *Non linear functional analysis and its application fixed point theorem*, Springer Verlag. New-York Berlin Heiderberg. Tokyo 1985

[6] A. Monier *Théorème de point fixe de Brouwer*, J. Des élèves, ENS Lyon, vol 1, 1998, no 4, p 206-209)

[7] Burton, T.A. (1998) *A fixed point theorem of Krasnoselskii*, Applied Mathematics Letters. 11(1), 85-88.

[8] Mann, W.R. (1953), Mean value Methodes in iteration, Proceedings of American Mathematical Society 4 : 506 - 510.

[9] Moreau, J. (1978) *Un cas de convergence des itérées d'une contraction d'un espace hilbertien*, C.R. Acad. Sci. Parissér. 286, 143-144.

[10] C.P. Tsokos and W. Padgett. *Random integral equations with applications to life sciences and engineering.* Mathematics in Science and Engineering 108. Elsevier Science, 1974.

[11] Bharucha Reid, A.T (1976). *Fixed point theorems in probabilistic Analysis.* Bulletin of American Mathematical society 82 : 641-657.

[12] A. Mukherjea. *Tranformations aléatoires separables. théorème du point fixe aléatoire.* C. R Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 263 :393-395, 1996.

[13] A. Bharucha-Reid. *Random Integral Equations.* Mathematics in Science and Engineering 96. Academie Press New York, first edition, 1972.

[14] O. Hans. Random operator equations. *Proc. 4th Berkeley Sympos. on Math, Statist and Probability. Vol II.* Univ. California Press, Berkeley, Calif. : 185-202, 1960.