

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane Mira de Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département Mathématiques



Mémoire de fin de cycle

En vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques
Option : Probabilités Statistique et Applications

Thème

Analyse Bayésienne des systèmes d'attente de Type Phase (PH)

Réalisé par :

M^{lle} BENDJENNAD Samia

Devant le Jury composé de :

M^r SOUFIT	Massinissa	M.C.B	Président	U.A.Mira de Béjaïa
M^{me} DJABALI	Yasmina	M.C.B	Rapporteur	U.A.Mira de Béjaïa
M^{me} BERDJOUJ	Louiza	Professeur	Examinatrice	U.A.Mira de Béjaïa

Année universitaire : 2020 / 2021

Remerciements

Je remercie Dieu, le tout puissant, de m'avoir donné santé, courage et patience sans lesquels je n'aurais jamais accompli ce travail.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à ma promotrice Mme.DJABALI Yasmina ,pour avoir accepté de diriger ce travail avec patience et disponibilité, et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion. Je remercie également le professeur N.ZOUGAB qui n'a jamais manqué de m'orienter tout au long de toute la période de réalisation de ce travail.

je tiens à remercier les membres du jury qui m'ont fait l'honneur de juger mon travail.

Un grand merci pour toute ma famille, surtout mes parents qui m'ont épaulé, soutenu et suivi tout au long de ce travail.

Je remercie mes amis(es) pour leurs aide et conseils qu'ils m'ont donné tout au long de mon projet.

Enfin, Je remercie toutes les personnes ayant contribuées de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

Ma très chère mère .

Mon très cher père .

Mes frères Youcef et Yanis

Mes amies (Hayet, Kami, Jojo, Sassa, Kahina, Thanina, Fatima, Dalia, Taous,

Soumia, Katia, la petite Nélia,...).

à tous les enseignants et le personnel de l'université de Bejaia.

Table des matières

Introduction	5
1 Files d'Attente de Type Phase (PH)	8
1.1 Description d'un modèle d'attente classique	8
1.2 Analyse mathématique d'un système de files d'attente	9
1.3 Notation de Kendall(1953)	9
1.4 Mesure de Performances d'une file d'attente	9
1.5 Systèmes de Files d'Attente Markoviens	10
1.5.1 Modèle d'attente M/M/1	10
1.6 Files d'Attente non Markoviennes	12
1.6.1 Modèle d'attente M/G/1	12
1.7 Files d'attente de type phase	13
1.7.1 Distributions de type phase	14
1.7.2 propriétés des distributions de type phase	15
1.8 Exemples de distributions de type phase	16
1.8.1 Distribution exponentielle	16
1.8.2 Distribution d'Erlang	16
1.8.3 Distribution hyper-exponentielle	17
1.8.4 Distribution hypo-exponentielle	18
1.9 Conclusion	19
2 Inférence Bayésienne	20
2.1 Estimation Bayésienne	20
2.1.1 Lois des observations	20
2.1.2 Loi a posteriori	20
2.1.3 Approche bayésienne	21
2.2 Calcul de la loi a posteriori	22
2.2.1 Une situation simple	22
2.2.2 Raisonnement Proportionnel	23
2.3 Estimateurs Bayésiens	24
2.3.1 L'estimateur moyenne a posteriori	24
2.3.2 Propriétés de l'estimateur de Bayes	24

2.3.3	Estimateur de maximum a posteriori (MAP)	24
2.4	Les Méthodes de Monte Carlo par chaîne de Markov (MCMC)	25
2.4.1	Algorithme de Metropolis-Hastings	25
2.4.2	Algorithme de Gibbs	26
2.5	Conclusion	26
3	Estimation bayésienne du modèle $M PH 1$	27
3.1	Analyse bayésienne du modèle $M HOE_2 1$	27
3.1.1	Description du modèle	27
3.1.2	Analyse bayésienne	28
3.2	Analyse bayésienne du modèle $M H_2 1$	30
3.2.1	Description du modèle	30
3.3	Méthode MCMC	33
3.4	Application sur des données simulées	34
3.4.1	Simulation des données	34
3.4.2	Modèle $M HOE_2 1$	34
3.4.3	Estimation des paramètres	34
3.4.4	Modèle $M H_2 1$	35
3.4.5	Estimation des paramètres	35
3.4.6	Résultats	35
	Conclusion	39
	Bibliographie	41

Introduction générale

L'origine des travaux sur les phénomènes d'attente remonte aux années 1909-1920 grâce aux travaux de A-K. Erlang concernat les réseaux téléphonique [3], où il a étudié les différentes caractéristique liées aux systemes d'attente. Mais par la suite c'est grâce aux apports, des mathématiciene, Khintchine , Palm, Kendall, que les files d'attente sont vraiment développées [7] .

Les files d'attent se forment lorsque des clients arrivent de façon aléatoire pour demander un service, elles se manifestent dans les domaines d'activités les plus divers, par exemple dans le domaine de transport, l'informatique, la santé, la production, etc. Il existe des situations concrètes ou l'on peut avoir à faire à plusieurs phase (PH) de service, dans un système de file d'attente, dans ce cas on parle des systèmes d'attente de type phase.

L'emploi de distributions de type phase dans les modèles de files d'attente a pris une grande importance dans la modilisation d'une large variété d'applicatios. En effet, la flexibilité de cette classe de distributions de probabilité et leurs propriétés de calculabilité ont rendu l'utilisation des lois de type phase très populaire dans les modèles stocastiques [17, 13].

Les distributions de type phase sont une généralisation de distribution exponentielle, elle sont constituées d'une succession d'étapes où la durée de service dans chaque étape suit une loi exponentielle. Comme cas particulier de ces distributions de probabilités, nous citons la distribution Hypo-exponentielle (**HOE₂**), Hyper-exponentielle (**H₂**), Cox, etc.

L'analyse statistique des systèmes d'attente joue un role très important dans la formulation d'un modèle mathématique réel, qui a fait son apparition en (1957), avec les deux travaux faits en parallèle par Clarck [4], qui a utilisé la méthode du maximum de vraisemblance pour estimer les taux de transitions (μ) d'un système de files d'attente simple. On trouve aussi Rao [18], et les synthèses de Bhat [21, 22], qui sont parmi les premiers auteurs travaillé sur l'analyse statistiques des systèmes d'attente. Ou' ils ont commencé par exposer les problèmes statistiques survenant lors de l'identification des modèles d'attente. Ensuite ils sont passés à étudier l'estimation paramétrique, en incluant la méthode de maximum de vraisemblance et la méthode des moments. Jain [19] qui à utilisé la mé-

thode de maximum de vraisemblance pour estimer la charge de système non-markoviens . Malgré les problèmes rencontrés lors de l'application des méthodes statistique dans les files d'attente, mais ces dernières sont très utilisées surtout à nos jours [2].

Récemment, une nouvelle approche plutôt subjective a été aussi à son tour adoptée par les statisticiens et appliquée à la théorie des files d'attente, il s'agit de la statistique bayésienne, qui offre un cadre de raisonnement bien adapté à l'intégration des opinions et des faits de toutes provenances qui interviennent dans la gestion des risque et la prise de décision en contexte d'incertitude [2].

Parmis les premières travaux qui ont été publiés sur l'analyse statistiques bayésienne des systèmes d'attentes on cite Muddapur[14] qui a utilisé la même fonction de vraisemblance. donnée dans l'article de Clark [4], pour estimer le taux des inter-arrivées et le taux de la durée de service , et l'intensité du trafic , dans une file $M/M/1$. Ce système est plus simple et utile, il a été largement considéré dans la littérature et il l'est à nos jours [5, 20]

Le but de notre travail est d'appliquer les techniques bayésiennes pour analyser les systèmes de files d'attente de type phase, en particulier les systèmes $M|HOE_2|1$ et $M|H_2|1$ et estimer leurs différents paramètres en utilisant la méthode de simulation de Monte Carlo par Chaîne de Markov.

Ce mémoire comprend trois chapitres. Le premier chapitre est consacré à un rappel détaillé sur les distributions de type phase et quelques exemples de la distribution. Dans le deuxième chapitre on présente la statistique bayésienne et ses différentes notions.

Dans le dernier chapitre . On présente les différentes procédures d'estimation des paramètres des modèles $M|H_2|1$ et $M|HOE_2|1$ et les résultats de simulation obtenus. Le mémoire se termine par une conclusion générale et une bibliographie .

Chapitre 1

Files d'Attente de Type Phase (PH)

Dans ce chapitre, nous allons présenter les éléments essentiels et quelques concepts et caractéristiques concernant les systèmes de files d'attente. Notre attention se focalisera sur les files d'attente de type phase (PH). Nous présentons les éléments essentiels et quelques exemples de la distribution PH .

1.1 Description d'un modèle d'attente classique

Une file d'attente ou queue est un système stochastique composé d'un certain nombre (fini ou non) de places d'attente d'un ou plusieurs serveurs et des clients qui arrivent, attendent, se font servir selon des règles de priorité données et quittent le système.

Le schéma suivant représente les éléments principaux dans une file d'attente.

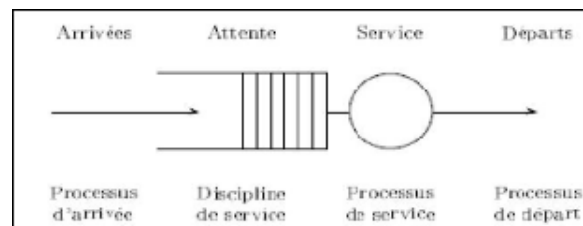


FIGURE 1.1 – Représentation d'un modèle d'attente classique.

1.2 Analyse mathématique d'un système de files d'attente

L'étude mathématique d'un système de files d'attente se fait généralement par l'introduction d'un processus stochastique, défini de façon appropriée. On s'intéresse principalement au nombre de clients $N(t)$ se trouvant dans le système à l'instant t , ($t \geq 0$).

En fonction des quantités qui définissent le système, on cherche à déterminer : Les probabilités d'état $P_n(t) = P(N(t) = n)$, qui définissent le régime transitoire du processus stochastique $[N(t), t \geq 0]$. Avec $P_n(t)$ dépend de l'état initial du processus. Le régime stationnaire du processus stochastique est défini par :

$$P_n = \lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = P(N(+\infty) = n) = P(N = n), n = 0, 1, 2, \dots$$

1.3 Notation de Kendall(1953)

La notation de Kendall [6] (1953) permet de décrire le système d'attente de manière succincte. Avec cette notation, un système d'attente est décrit par : A/B/s/K/N/D. avec :

A : est la distribution des temps des inter-arrivées.

B : est la distribution des temps de service.

s : est le nombre de serveurs.

K : la capacité de la file.

N : taille de la population .

D : est la discipline de service (FIFO , LIFO,...).

pour spécifier des distribution A et B , les symboles suivants sont utilisés :

M : Loi markovienne .

G : Loi générale .

GI : Loi générale indépendante

D : Loi déterministe .

PH_k : Loi de type phase à K étape .

H_k : Loi hyper-exponentielle-k.

HOE_k : Loi hypo-exponentielle -k.

1.4 Mesure de Performances d'une file d'attente

L'étude d'une file d'attente ou d'un réseau de files d'attente a pour but de calculer ou d'estimer les performances d'un système dans des conditions de fonctionnement données, et les mesures les plus fréquemment utilisées sont :

- $L = \mathbb{E}(X)$: nombre moyen de clients dans le système.
- L_q : nombre moyen de clients dans la file.

- W : le temps moyen de séjour d'un clients dans le système.
- W_q : le temps d'attente d'un client dans la file.

Ces valeurs ne sont pas indépendantes les unes des autres, mais elles sont liées par la loi de Little.

- $L = \lambda_e W$
- $L_q = \lambda_e W_q$
- $W = W_q + \frac{1}{\mu}$
- $L = L_q + \rho$

avec λ_e : taux d'entrée réel dans le système .

D'une manière générale, une file est stable si et seulement si le nombre moyen d'arrivées de clients par unité de temps, noté λ , est inférieur au nombre moyen de client pouvant être servis par unité de temps. Si chaque serveur peut traiter μ clients par unité de temps et si le nombre de serveurs est s , une file est stable si et seulement si :

$$\lambda < s\mu \iff \rho = \frac{\lambda}{s\mu} < 1$$

1.5 Systèmes de Files d'Attente Markoviens

Ce sont les systèmes dans lesquelles les deux quantités stochastiques principales qui sont le temps des inter-arrivées et la durée de service sont des variables aléatoires indépendantes exponentiellement distribuées. La propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle facilite l'étude de ces modèles. L'étude mathématique de tels systèmes se fait par l'introduction d'un processus stochastiques approprié. Ce processus est souvent le processus $\{\mathbf{N}(t), t \geq 0\}$ défini comme étant le nombre de clients dans le système à l'instant t .

1.5.1 Modèle d'attente M/M/1

Le système M/M/1 est le plus simple des systèmes de files d'attente. Le flot des arrivées est poissonien de paramètre λ et la durée de service est exponentielle de paramètre μ

La figure suivante représente le graphe de transition du système d'attente de type M/M/1 :

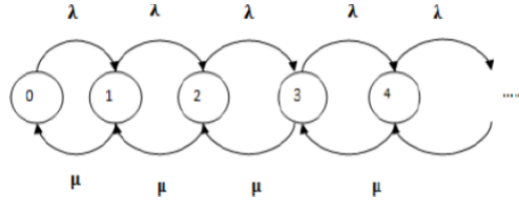


FIGURE 1.2 – Graphe de transition de la file d'attente M/M/1.

Etude de Régime transitoire

Soit $N(t)$ le nombre de clients présents dans le système à l'instant $t (t \geq 0)$. Et soit $P_{ij}(\Delta t)$ la probabilité conditionnelle que le processus $N(t)$ passe d'un état i à l'état j pendant la durée Δt . Cette probabilité est appelée probabilité de transition.

$$P_{ij}(\Delta t) = P[N(t + \Delta t) = j / N(t) = i]; i, j = 1, 2, \dots$$

Ces probabilités de transition ne dépendent pas de t . A l'aide des propriétés fondamentales du processus de Poisson et de la loi exponentielle, on a : $P_{n,n+1}(\Delta t) = \lambda \Delta t (1 - \mu \Delta t) + o(\Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t), n \geq 0$.

$$P_{n,n}(\Delta t) = 1 - (\lambda + \mu) \Delta t + o(\Delta t), n \geq 1 \quad P_{0,0}(\Delta t) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t) \quad P_{n,n-1}(\Delta t) = \mu \Delta t + o(\Delta t), n \geq 1$$

$P_{n,m}(\Delta t) = o(\Delta t)$, pour $|m - n| \geq 2$
Soit $P_n(t) = P[N(t) = n]$ la probabilité qu'à l'instant t , il y a n clients dans le système $n = 1, 2, \dots$. On a :

$$\begin{cases} P_0(t + \Delta t) = (1 - \lambda \Delta t) P_0(t) + \mu \Delta t P_1(t) + o(\Delta t) \\ P_n(t + \Delta t) = \lambda \Delta t P_{n-1}(t) + (1 - (\lambda + \mu) \Delta t) P_n(t) + \mu \Delta t P_{n+1}(t) + o(\Delta t), n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

et comme $o(\Delta t)$ est négligeable, on aura :

$$\begin{cases} \frac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\ \frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda + \mu) P_n(t) + \mu P_{n+1}(t), n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

donc, en faisant tendre $\Delta t \rightarrow 0$, on obtient les équations différentielles dites "équations Chapman-Kolmogorov" suivantes :

$$\begin{cases} P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\ P_n'(t) = \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda + \mu) P_n(t) + \mu P_{n+1}(t), n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Au régime stationnaire ($t \Rightarrow \infty$) on obtient les équations de balance :

$$\begin{cases} \lambda P_0 = \mu P_1 \\ (\lambda + \mu) P_n = \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1}, n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Avec la condition

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$

Sa résolution conduit aux relations suivantes :

$$\begin{cases} P_0 = 1 - \rho \\ P_n = P_0 \rho^n, n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

avec $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ $P = (P_n)_{n \geq 0}$ est appelée distribution stationnaire.

1.6 Files d'Attente non Markoviennes

En l'absence de l'exponentialité ou plutôt lorsque l'on s'écarte de l'hypothèse d'exponentialité de l'une des deux quantités stochastiques, le temps des inter-arrivées et la durée de service, ou en prenant en compte certains spécifités des problèmes par introduction de paramètres supplémentaires, on aboutit à un modèle non markovien. La combinaison de tous ces facteurs rend l'étude mathématique du modèle très délicate. On essaye alors de se ramener à un processus de Markov judicieusement choisi.

1.6.1 Modèle d'attente M/G/1

Le flux des arrivées dans le système M/G/1 est poissonnien de paramètre λ et la durée de service est distribuée selon une loi quelconque. La particularité de ce système est que, contrairement au cas M/M/1, le processus n'est pas markovien.

Chaîne de Markov induite et probabilités de transition

Soit X_n : le nombre de clients dans le système M/G/1 à la fin de service du $n^{ième}$ client.

Notons par $G(s)$ la distribution de la durée de service et par λ le paramètre de la distribution exponentielle régissant la durée entre les deux arrivées consécutives.

Le processus $X_n, n \geq 0$ est une chaîne de Markov, d'opérateur de transition $P = [P_{ij}]_{i,j \geq 0}$ où :

$$p_{ij} = \begin{cases} p_j & \text{si } i = 0; \\ p_{j-i+1}, & \text{si } 1 < i \leq j + 1; \end{cases}$$

avec :

$$P_k = \int_0^{\infty} \frac{\exp^{-\lambda s} (\lambda s)^k}{k!} dG(s), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

En effet, si A_n est le nombre de clients qui entrent dans le système pendant le $n^{ième}$ service, on a :

$$X_{n-1} = X_n - \delta_n + A_{n-1} \quad \text{avec} \quad \delta_n = \begin{cases} 1 & \text{si } X_n > 0 \\ 0, & \text{si } X_n = 0 \end{cases}$$

Ceci montre que X_{n+1} ne depend que de X_n et de A_{n+1} et non pas de X_{n-1}, X_{n-2}, \dots . Ce qui signifie que la suite $\{X(t), t \geq 0\}$ est markovienne, où $X(t)$ est le nombre de clients dans le système à l'instant t .

Par ailleurs, $P(A_n = \frac{k}{t}) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!}$, car le nombre de clients A_n qui entrent dans le système, est distribué suivant une loi de Poisson de parametre (λt) . Et d'après le theoreme des probabilités totale,

$$P(A_n = k) = P_k = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} dG(t), \quad \text{où } P_k > 0, (k = 1, 2, \dots)$$

Régime stationnaire

Le régime stationnaire du système existe et est identique à l'état stationnaire de la chaîne de Markov induite X_n , si $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. Il ne sere généralement pas possible de trouver la distribution stationnaire $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots)$. Cependant, nous pouvons calculer la fonction génératrice correspondante $\Pi(z)$ formule de Pollaczck Khintchin [11] .

$$\Pi(z) = G^*(\lambda - \lambda z) \frac{(1 - \rho)(1 - z)}{G^*(\lambda - \lambda z) - z},$$

où G^* représent la transformée de Laplace de la densité de probabilité du temps de service.

1.7 Files d'attente de type phase

L'emploi de distributions générales reste toujours souhaitable pour la modélisation de nombreux phénomènes réels. Il s'agit, notamment, de la famille de distributions de type phase (PH) qui peuvent etre décrites par un "graphe de services exponentiels". Elles sont constituées d'une succession d'étapes où la durée de service de l'étape numéro i suit une loi exponentielle de moyenne μ_i . Comme cas particulier de cette famille de distributions, nous citons la distribution d'Erlang, hyperexponentielle, hypoexponentielle, Cox,... Par exemple, la fabrication d'un produit peut se diviser en plusieurs étapes de construction et de vérification. Les durées de ces différentes étapes suivent des lois exponentielles.

1.7.1 Distributions de type phase

Soit un processus de Markov à espace d'état fini $\{0, 1, 2, \dots, m\}$ où $\{1, 2, \dots, m\}$ sont des états transitoires et 0 est un état absorbant.

Le générateur infinitésimal de ce processus peut être décrit par [18].

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \vec{0} \\ \vec{t} & T \end{pmatrix}$$

où T est une matrice $m \times m$, elle représente les transitions entre les états transitoires, avec $T_{ii} < 0$, pour $1 \leq i \leq m$ et $T_{ij} \geq 0$ pour $i \neq j$

\vec{t} : vecteur colonne de taille m , il représente les transitions entre les états transitoires et l'état absorbant.

$\vec{0}$: vecteur ligne nul de taille m .

Comme H est le générateur infinitésimal du processus de Markov alors, on a :

$$\vec{t} + T \vec{1} = 0 \implies \vec{t} = -T \vec{1},$$

où $\vec{1}$ est un vecteur colonne unitaire,

soit $(\tau_0, \vec{\tau})$ le vecteur de probabilité initiale vérifiant la relation suivante :

$$\tau_0 + \vec{\tau} \vec{1} = 1 \implies \tau_0 = 1 - \vec{\tau} \vec{1},$$

avec $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)$

La distribution du temps jusqu'à l'absorption dans l'état 0 est appelée distribution phase-type ou distribution PH avec les paramètres $(\vec{\tau}, T)$

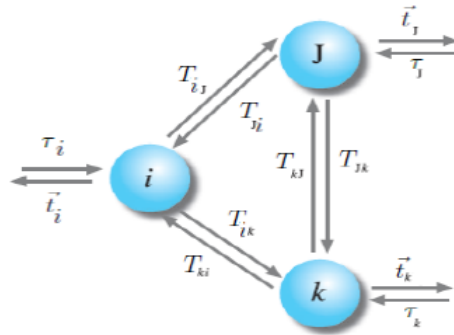


FIGURE 1.3 – Distribution PH à trois phases.

les états transitoire $\{1, 2, \dots, m\}$ sont appelés phases de la distribution.

Proposition 1.7.1 ([9]). *Soit X une variable aléatoire suivant une distribution de type phase de paramètres $(\vec{\tau}, T)$. On note $X \sim PH(\vec{\tau}, T)$:*

- Sa fonction de répartition est donnée par :

$$F(x) = 1 - \vec{\tau} e^{Tx} \vec{1}, x \geq 0.$$

- Sa fonction de densité est donnée par :

$$f(x) = \vec{\tau} e^{Tx} \vec{t}, \quad x \geq 0.$$

- la transformée de laplace de $PH(\vec{\tau}, T)$ est donnée par :

$$\tilde{X}(s) = \tau_0 + \vec{T}(sI - T)^{-1} \vec{t}$$

- Le moment de la distribution est donné par :

$$E[X^{-1}] = (-1)^i i! \vec{\tau} T^{-i} \vec{1}, \quad i \geq 1.$$

1.7.2 propriétés des distributions de type phase

1. Si $X \sim PH(\vec{\tau}, T)$ et $Y \sim PH(\beta, B)$ (indépendant de X), avec n et m phases respectivement, alors $X + Y \sim PH(\gamma, C)$ avec $m + n$ phases,

$$\gamma = (\vec{\tau}, \tau_0 \beta) \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} T & \vec{t} \cdot \beta \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où $(\vec{t} \cdot \beta)_{ij} = \vec{t}_i \beta_j$

2. Si $X \sim PH(\vec{\tau}, T)$ et $Y \sim PH(\beta, B)$ (indépendant de X), avec n et m phases, et de fonction de distribution $F(\cdot)$ et $G(\cdot)$ respectivement, alors pour $0 \leq \theta \leq 1$, $\theta F(\cdot) + (1 - \theta)G(\cdot)$, est une distribution PH représentée par $PH(\gamma, C)$ avec $m + n$ phases, où

$$\gamma = (\theta \vec{\tau}, (1 - \theta) \beta) \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

3. Si $X \sim PH(\vec{\tau}, T)$ et $Y \sim PH(\beta, B)$ (indépendant de X), avec n et m phases respectivement, alors $\min(X, Y) \sim PH(\gamma, C)$ avec mn phases, où

$$\gamma = \vec{\tau} \otimes \beta, \quad \text{et} \quad C = T \oplus B$$

4. Si $X \sim PH(\vec{\tau}, T)$ et $Y \sim PH(\beta, B)$ (indépendant de X), avec n et m phases respectivement, alors $\max(X, Y) \sim PH(\gamma, C)$ avec $mn + n + m$ phases, où

$$\gamma = (\vec{\tau} \otimes \beta, \beta_0 \vec{\tau}, \tau_0 \beta) \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} T \oplus B & I \otimes \vec{b} & \vec{t} \otimes I \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}$$

1.8 Exemples de distributions de type phase

1.8.1 Distribution exponentielle

L'exemple le plus simple des distributions de type phase, est la distribution exponentielle de taux μ .

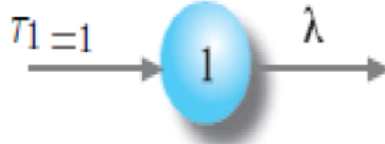


FIGURE 1.4 – Représentation de la distribution exponentielle.

La distribution exponentielle est la distribution du temps jusqu'à l'absorption par l'état 0 dans une chaîne de Markov à espace d'état $\{0, 1\}$, avec les paramètres suivants

$$\vec{\tau} = (1), \quad T = (-\lambda), \quad \vec{t} = (\lambda).$$

Sa densité de probabilité est donnée par :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0,$$

et sa fonction de répartition

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0,$$

1.8.2 Distribution d'Erlang

La distribution Erlang est la distribution d'une combinaison en série de k variables aléatoires, indépendantes suivant une loi exponentielle. Elle possède deux paramètres, $k > 0$ et $\lambda > 0$, d'où la notation $E(k, \lambda)$.

Le diagramme de la distribution d'Erlang est représenté par la figure suivante

La distribution $E(k, \lambda)$ est la distribution du temps jusqu'à l'absorption par l'état $k+1$ dans une chaîne de Markov à espace d'état $\{1, 2, \dots, k, k+1\}$. Les paramètres de cette loi



FIGURE 1.5 – Représentation de la distribution Erlang.

de type phase sont

$$\vec{\tau} = (1, 0, \dots, 0), \quad T = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda \end{pmatrix}, \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Sa densité de probabilité est

$$f_{k,\lambda}(x) = \lambda \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda x}, x \geq 0$$

et sa fonction de répartition est donnée par

$$F_{k,\lambda}(x) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!} e^{-\lambda x}, x \geq 0.$$

1.8.3 Distribution hyper-exponentielle

La distribution hyperexponentielle est la distribution d'une combinaison en parallèle de k variables aléatoires suivant des lois exponentielles, de paramètres $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$. Cette distribution est appelée hyper-distribution exponentielle car son coefficient de variabilité (> 1) est plus grand que celui de la distribution exponentielle ($= 1$).

Le diagramme de cette distribution est représenté par la figure suivante :

FIGURE 1.6 – Représentation de la distribution hyperexponentielle.

La distribution hyperexponentielle est la distribution de type phase, qui est la distribution du temps jusqu'à l'absorption par l'état $k + 1$ dans une chaîne de Markov à espace d'état $1, 2, \dots, k, k + 1$ et ayant les paramètres suivants :

$$\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k), \quad T = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & -\lambda_k \end{pmatrix}, \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$$

avec le vecteur de probabilité initiale $(0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$, (tel que $\sum \tau_i = 1$ et $\tau_i > 0, \forall i$), et le générateur infinitésimal H :

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_2 & 0 & -\lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_k & 0 & 0 & & -\lambda_k \end{pmatrix}$$

Sa densité de probabilité est

$$f(x) = \sum_{i=1}^k \tau_i \lambda_i e^{-\lambda_i x}, \quad x \geq 0$$

Et sa fonction de répartition est donnée par :

$$F(x) = 1 - \sum_{i=1}^k \tau_i e^{-\lambda_i x}.$$

1.8.4 Distribution hypo-exponentielle

La distribution hypo-exponentielle est une généralisation de la distribution Erlang, dans laquelle le taux de transition est différent dans chaque phase (voir Figure 1.7). Cette distribution est appelée hypo-distribution exponentielle car son coefficient de variabilité est inférieur à 1.

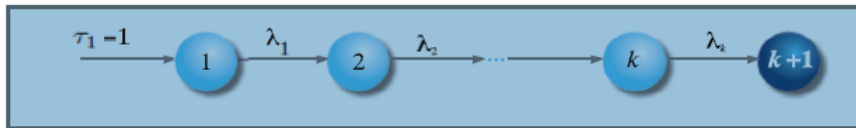


FIGURE 1.7 – Représentation de la distribution hypoexponentielle.

Une distribution hypo-exponentielle de paramètres $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ est la distribution du

temps jusqu'à l'absorption par l'état $k + 1$ dans une chaîne de Markov à espace d'état $\{1, 2, \dots, k, k + 1\}$, avec le vecteur de probabilité initiale $(0, 1, 0, \dots, 0)$ et le générateur infinitésimal.

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & \lambda_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda_{k-1} & \lambda_{k-1} \\ \lambda_k & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda_k \end{pmatrix}$$

où les paramètres de la loi phase sont donnés comme suit :

$$\vec{\tau} = (1, 0, \dots, 0), \quad T = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda_{k-1} & \lambda_{k-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda_k \end{pmatrix}, \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_k \end{pmatrix}$$

Sa densité de probabilité est donnée par :

$$f(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \lambda_i e^{-\lambda_i x}, \quad \text{avec} \quad \alpha_i = \prod_{j=1, j \neq i}^k \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i}$$

1.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons fait un rappel général sur les notions de base concernant les distributions de type phase, nous avons abordé deux modèles hyper-exponentielle et hypo-exponentielle.

Chapitre 2

Inférence Bayésienne

Le but de ce chapitre est de rappeler quelques notions de base de la statistique bayésienne et ses différentes techniques d'estimation à savoir l'estimation ponctuelle, par intervalle de confiance et l'approche bayésienne des tests. On va présenter par la suite, les méthodes de simulation de Monte Carlo par chaîne de Markov qui seront utilisées, dans l'étude des systèmes de files d'attente.

2.1 Estimation Bayésienne

Considérons un modèle paramétrique statistique pour lequel l'observation d'une variable aléatoire X est distribuée selon $f(x|\theta)$, où seulement le paramètre θ est inconnu et appartient à un espace de dimension finie.

2.1.1 Lois des observations

On appelle loi des observations la loi conditionnelle de X sachant θ . Sa densité est notée $f(\underline{x}|\theta)$. Elle est définie par :

$$L(\underline{x}|\theta) = \begin{cases} f_{\theta}(\underline{x}) = f(\underline{x}|\theta) = \prod_{i=1}^m f(x_i, \theta) & \text{cas continue} \\ P_{\theta}(\underline{x}) = P(\underline{X} = \underline{x}|\theta) = \prod P(X_i = x_i, \theta) & \text{cas discret} \end{cases}$$

où $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

2.1.2 Loi a posteriori

C'est la loi conditionnelle de θ sachant \underline{x} , sa densité est notée $\pi(\theta|\underline{x})$. En vertu de la formule de Bayes ;

on a :

$$\pi(\theta|x) = \frac{L(\underline{x}|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\theta} f(\underline{x}|\theta)\pi(\theta)d\theta}. \quad (2.1)$$

— **La loi de couple** (θ, X) : Sa densité est notée $h(\theta, x)$, on a donc :

$$h(\theta, x) = L(\underline{x}|\theta)\pi(\theta)$$

— **La loi marginale de X** : Sa densité est notée $m(x)$, on a donc :

$$m(x) = \int_{\theta} f(\underline{x}|\theta)\pi(\theta)d\theta$$

Donc $\pi(\theta|x)$ devient :

$$\pi(\theta|\underline{x}) = \frac{h(\theta, x)}{m(x)} \quad (2.2)$$

$\pi(\theta, \underline{x})$ est proportionnelle à la distribution de \underline{x} conditionnelle à θ .

2.1.3 Approche bayésienne

Alors que la statistique classique repose sur la loi des observation, la Statistique Bayésienne repose sur la loi a posteriori. La loi a posteriori peut s'interpréter comme un résumé (en un sens probabiliste) de l'information disponible sur θ , une fois x observé. L'approche bayésienne réalise en quelque sorte l'actualisation de l'information a priori par l'observation \mathbf{x} , au travers de $\pi(\theta|x)$.

Le schéma ci-dessous résume la démarche bayésienne dans le cadre de la statistique paramétrique inférentielle. Il fait également apparaître, la modélisation stochastique des x_i comme étant des réalisations de variables aléatoires X_i (cette modélisation est caractéristique de la statistique inférentielle), ainsi que la modélisation stochastique de l'information a priori disponible sur le paramètre θ , au travers de la loi a priori.

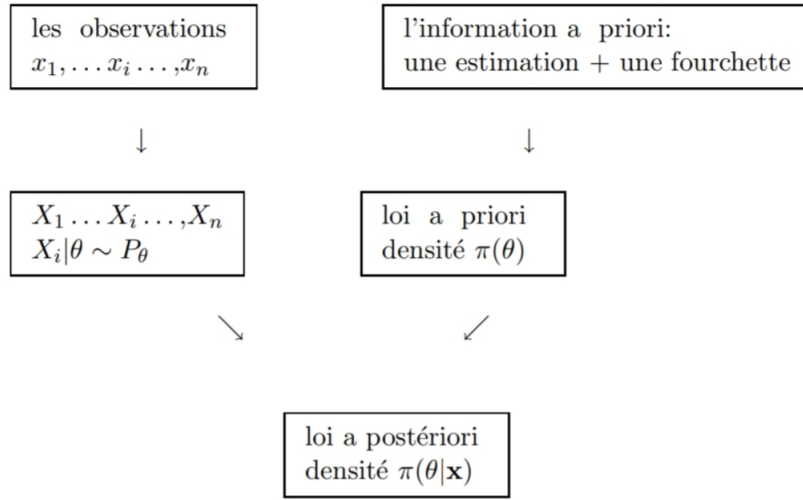


FIGURE 2.1 – Philosophie de l’approche bayésienne.

2.2 Calcul de la loi a posteriori

2.2.1 Une situation simple

On dispose d’un vecteur d’observations : $x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$, et on considère le modèle bayésien suivant : $X_i|\theta \sim \text{Bernoulli}(\theta)$ et $\theta \sim \text{Beta}(a, b)$. On a :

$$f(x|\theta) = \prod_{i=1}^n P(X = x_i|\theta) = \theta^s(1 - \theta)^{n-s} \quad (2.3)$$

Où $s = \sum_{i=1}^n x_i$. Comme $\theta \sim \text{Beta}(a, b)$, on a :

$$\pi(\theta) = \frac{1}{B(a, b)} \theta^{a-1} (1 - \theta)^{b-1} \mathbf{1}_{[0,1]}(\theta). \quad (2.4)$$

D’autre part on a :

$$\pi(\theta|x) = \frac{f(x|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} f(x|\theta)\pi(\theta)d\theta}. \quad (2.5)$$

Il est facile de vérifier que :

$$\int_{\Theta} f(x|\theta)\pi(\theta)d\theta = B(\alpha, \beta). \quad (2.6)$$

Où $\alpha = a + s$ et $\beta = b + n - s$. D’où :

$$\pi(\theta|x) = \frac{\theta^{\alpha-1}(1 - \theta)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} \mathbf{1}_{[0,1]}(\theta). \quad (2.7)$$

Par conséquent :

$$\theta|x \sim \text{Beta}\left(a + \sum_{i=1}^n x_i, b + n - \sum_{i=1}^n x_i\right). \quad (2.8)$$

2.2.2 Raisonnement Proportionnel

Il est parfois possible d'éviter le calcul de l'intégrale : $\int_{\Theta} f(x|\theta)\pi(\theta)d\theta$ en raisonnant proportionnellement.

Définition 2.1. Soient deux fonctions réelles f et g définies sur le même espace \mathcal{Y} . On dit que f et g sont proportionnelles, ce qu'on note $f \propto g$, si il existe une constante a tel que $f(y) = ag(y)$ pour tout $y \in \mathcal{Y}$.

Remarque 2.2.1.

1. La relation \propto est une relation de proportionnalité .

$$f \propto g \text{ et } g \propto h \text{ alors } f \propto h.$$

2. Soient X et Y deux v-a. et soient f et g les densités de X et Y respectivement.

On suppose que la loi de probabilité de X est inconnue et celle de Y est connue et est notée par P . Alors :

$$f \propto g \implies X \sim P$$

3. Dans un contexte bayésien on a :

$\pi(\theta|x) \propto f(x|\theta)\pi(\theta)$. En tant que fonctions de θ , les deux expressions $\pi(\theta|x)$ et $f(x|\theta)$ sont effectivement proportionnelles ; la constante qui apparaît dans la définition est égale ici à $1/m(x)$; à noter que cette quantité est bien une constante, au sens où elle ne dépend pas de θ .

L'écriture $\pi(\theta|x) \propto f(x|\theta)\pi(\theta)$ est souvent reformulée de la façon suivante :

$$\pi(\theta|x) \propto L(\theta; x)\pi(\theta). \quad (2.9)$$

Exemple 2.2.1. Reprenons le modèle statistique bayésien précédent où $X_i|\theta \sim \text{Bernoulli}(\theta)$ et $\theta \sim \text{Beta}(a, b)$. On a :

$$\pi(\theta|x) \propto L(\theta; x)\pi(\theta). \quad (2.10)$$

Soit :

$$\pi(\theta|x) \propto \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} (1 - \theta)^{n - \sum_{i=1}^n x_i} \theta^{a-1} (1 - \theta)^{b-1} \mathbf{1}_{[0,1]}(\theta). \quad (2.11)$$

Par conséquent :

$$\pi(\theta|x) \propto \theta^{a + \sum_{i=1}^n x_i - 1} (1 - \theta)^{b + n - \sum_{i=1}^n x_i - 1} \mathbf{1}_{[0,1]}(\theta). \quad (2.12)$$

A une constante multiplicative près, on reconnaît dans le membre de gauche la densité d'une loi Beta de paramètres $(a + \sum_{i=1}^n x_i)$ et $b + n - \sum_{i=1}^n x_i$. D'après la remarque précédente, on en déduit que :

$$\theta|x \sim \text{Beta}(a + \sum_{i=1}^n x_i, b + n - \sum_{i=1}^n x_i). \quad (2.13)$$

2.3 Estimateurs Bayésiens

2.3.1 L'estimateur moyenne a posteriori

Définition 2.2. On appelle estimation bayésienne du paramètre θ la moyenne de la loi a posteriori. Cette moyenne est notée $E[\theta|x]$. Formellement, on a :

$$\mathbb{E}[\theta|x] = \int_{\Theta} \theta \pi(\theta|x) d\theta = \frac{\int_{\Theta} \theta f(\theta|x) \pi(\theta) d\theta}{\int_{\Theta} f(\theta|x) \pi(\theta) d\theta}. \quad (2.14)$$

L'estimateur de Bayes de θ est noté $\hat{\theta}_B$. Il est donc défini par $\hat{\theta}_B(x) = E[\theta|x]$

Exemple 2.3.1. On considère le modèle Bayésien suivant : $X_i|\theta \sim \text{Bernoulli}(\theta)$ et $\theta \sim \text{Beta}(a, b)$.

Rappelons que : $\theta|x \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$, où $\alpha = a + s$ et $\beta = b + n - s$ et $s = \sum_{i=1}^n x_i$. D'où :

$$E[\theta|x] = \frac{a + \sum_{i=1}^n x_i}{a + b + n}. \quad (2.15)$$

2.3.2 Propriétés de l'estimateur de Bayes

1. L'estimateur de Bayes est admissible.
2. L'estimateur de Bayes est biaisé.
3. L'estimateur de Bayes est convergent en probabilité.
4. La loi a posteriori peut être asymptotiquement (c.a.d. pour de grandes valeurs de n) approximée par une loi normale $\mathcal{N}(E[\theta|x], \text{Var}[\theta|x])$.

2.3.3 Estimateur de maximum a posteriori (MAP)

L'estimateur de MAP de θ se fait par maximisation de la loi a posteriori, cet estimateur est associé au coût 0 - 1 qu'est donné par :

$$\hat{\theta}_{MAP}(\underline{x}) = \arg \max \pi(\theta|x) \quad (2.16)$$

$$= \arg \max \pi(\underline{x}|\theta)\pi(\theta). \quad (2.17)$$

2.4 Les Méthodes de Monte Carlo par chaîne de Markov (MCMC)

Dans plusieurs situations, le calcul analytique de la densité a posteriori est difficile, car l'inférence bayésienne se heurte à des problèmes d'intégration en vue du calcul de la constante de normalisation. Pour remédier à ce genre de problèmes, on fait appel aux méthodes dites de Monte Carlo par Chaînes de Markov. L'idée principale consiste à construire une chaîne de Markov (X_n) admettant la loi a posteriori comme distribution stationnaire quel que soit le point de départ $X_0=x_0$ de la chaîne. Donc à partir d'un certain rang \mathcal{N}_0 très grand, la loi de X_n , est proche de la distribution a posteriori. Autrement dit, la valeur X_n qui est facile à obtenir puisque les chaînes de Markov sont généralement aisément simulables, est une réalisation approchée de la loi a posteriori. En supposant que pour $\mathcal{N} > \mathcal{N}_0$ on échantillonne exactement selon la loi cible, l'inférence sur les paramètres est basée alors sur cet échantillon.

Nous présenterons ci-après les deux types de techniques les plus importantes conçues pour créer des chaînes de Markov de stationnaire donnée à savoir les algorithmes de Metropolis-Hastings et l'échantillonnage de Gibbs.

2.4.1 Algorithme de Metropolis-Hastings

La mise en oeuvre du principe d'utilisation d'une chaîne de Markov de la loi stationnaire f nécessite la construction d'un mécanisme de génération pour produire de telles chaînes. En effet, Metropolis et al [15] ont développé un algorithme quasi universel satisfaisant cette contrainte qui a été généralisé par Hastings [23] dans un cadre statistique.

L'algorithme de Metropolis-Hastings est considéré comme étant l'un des algorithmes les plus généraux, il est aussi l'un des plus simples à comprendre et à expliquer, dans le sens où il impose le moins de conditions sur la densité cible, c'est ce qui a fait de lui, l'algorithme de base d'une grande partie des méthodes MCMC. Il est connu par ces applications variées car sa principale restriction est que la loi cible soit connue à une constante près.

La loi cible f , étant donnée on choisit une densité conditionnelle instrumentale $q(y|x)$ qui en pratique est facile à simuler. En fait q peut être quasiment arbitraire dans la mesure où les seules conditions théoriques nécessaires à la bonne marche de l'algorithme sont (a) de connaître le rapport $f(y)/q(y|x)$ à une constante indépendante de x près et (b) que $q(\cdot|x)$ ait une dispersion assez forte pour permettre à la chaîne de Markov d'explorer tout le support de f . Nous insistons sur la propriété formidable de l'algorithme de Metropolis-Hastings qui est que, quelle que soit q , on peut construire un noyau de Metropolis-Hastings tel que f est sa loi stationnaire.

L'algorithme de Metropolis-Hastings associé à la densité cible f et la densité conditionnelle q fournit une chaîne de Markov (X_n) selon le noyau de transition suivant :

1. Initialisation : $x^{(0)}$,

2. Etant donné $x^{(t)}$
générer $\rightsquigarrow q(y|x^{(t)})$,
3. choisir :

$$x^{(t+1)} = \begin{cases} y_t & \text{avec une probabilité } p(x^{(t)}, y_t) \\ x^{(t)} & \text{avec une probabilité } 1 - p(x^{(t)}, y_t) \end{cases}$$

On appelle q la loi de proposition (ou la loi instrumentale ou loi candidate) et la probabilité $\rho(x,y)$ la probabilité d'acceptation de Metropolis-Hastings.

Algorithme de Gibbs

L'échantillonneur de Gibbs est un cas particulier de l'algorithme Metropolis-Hastings pour lequel la densité instrumentale est la densité conditionnelle du paramètre d'intérêt, sachant les autres paramètres et les données. Cette méthode tire son nom des champs aléatoires de Gibbs, où elle a été utilisée pour la première fois par Geman et Geman [16], cependant cet algorithme peut être utilisé seulement, lorsqu'on connaît la distribution conditionnelle du paramètre qu'on veut estimer. Les étapes de cet algorithme pour une loi jointe $f(\theta_1, \dots, \theta_n)$ de lois conditionnelles sont exposées f_1, \dots, f_n ci-dessous.

2.4.2 Algorithme de Gibbs

- pour $(\theta_1^{(t)}, \dots, \theta_p^{(t)})$ donnés, simuler
1. $\theta_1^{(t+1)} \rightsquigarrow f_1(\theta_1 | \theta_2^{(t)}, \dots, \theta_p^{(t)})$
 2. $\theta_2^{(t+1)} \rightsquigarrow f_2(\theta_2 | \theta_1^{(t+1)}, \theta_3^{(t)}, \dots, \theta_p^{(t)})$
 - p. $\theta_p^{(t+1)} \rightsquigarrow f_p(\theta_p | \theta_1^{(t+1)}, \dots, \theta_{p-1}^{(t+1)})$

le schéma de simulation est efficace lorsque les distributions conditionnelles sont simulables rapidement. Notons que le taux d'acceptation dans ce cas est égal à 1 car les valeurs simulées sont toujours acceptées.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons fait un rappel général sur les notions de base concernant l'inférence bayésienne, ainsi que les méthodes de simulation MCMC. Ces notions vont nous servir dans le dernier chapitre pour l'estimation des paramètres des modèles d'attente de type phase.

Chapitre 3

Estimation bayésienne du modèle $M|PH|1$

Notre travail dans ce chapitre consiste à faire une estimation bayésienne de tous les paramètres du modèle $M|PH|1$ modèle. On s'intéresse plus particulièrement aux deux modèles $M|HOE_2|1$ et $M|H_2|1$.

3.1 Analyse bayésienne du modèle $M|HOE_2|1$

3.1.1 Description du modèle

Considérons le système de les d'attente $M/HOE_2/1$ à un seul serveur, à capacité infinie, de discipline de service *FIFO* et ayant les propriétés suivantes :

- ✓ Processus d'entrée :Le processus d'entrée est un processus de Poisson d'intensité λ .
- ✓ Processus de servic :Les durées de service sont identiquement distribuées selon une loi hypoexponentielle $HOEO_2(t)$ de paramètres (μ_1, μ_2) .

La fonction de densité d'une loi hypoexponentielle de paramètres (μ_1, μ_2) .

$$f(t) = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} (e^{-\mu_2 t} - e^{-\mu_1 t})$$

avec : $t > 0$

3.1.2 Analyse bayésienne

La fonction de vraisemblance (HOE_2)

Nous supposons que les inter-arrivées et les durées de service sont indépendants, la fonction de vraisemblance noté $L(data|\lambda, \mu_1, \mu_2)$ est donnée par :

$$L(data|\lambda, \mu_1, \mu_2) = \prod_{i=1}^m \left(\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \right) (e^{-\mu_2 s_i} - e^{-\mu_1 s_i}) \prod_{i=1}^n (\lambda e^{-\lambda t_i}) \quad (3.1)$$

$$= \left(\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \right)^m \prod_{i=1}^m (e^{-\mu_2 s_i} - e^{-\mu_1 s_i}) (\lambda)^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n t_i} \quad (3.2)$$

avec :

$t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$, temps des inter-arrivées.

$s = (s_1, s_2, \dots, s_m)$, temps de service.

Choix des lois a priori

Le choix de la loi a priori la plus appropriées au problème posé, nécessite un minimum d'informations récoltées des expériences déjà réalisées et des avis des experts. dans notre cas, on attribue à chaque paramètre considéré une loi a priori de la manière suivante :

- Le paramètre des arrivées λ avec $\lambda > 0$.
 $\lambda \sim \Gamma(a_1, b_1)$
- Le paramètre du service μ_1, μ_2 avec $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0$.
 $\mu_1 \sim \Gamma(a_2, b_2)$, $\mu_2 \sim \Gamma(a_3, b_3)$.

avec $\Gamma(a_i, b_i)$ est la distribution gamma de moyenne $\frac{a_i}{b_i}$; de variance $\frac{a_i}{b_i^2}$ et de fonction de densité donnée par :

$$f(\nu, a_i, b_i) = \frac{b_i^{a_i}}{\Gamma(a_i)} \nu^{a_i-1} \exp(-\nu b_i); \quad (3.3)$$

tel que $\nu > 0, a_i > 0, b_i > 0$.

Calcul des lois a posteriori

En utilisant le théorème de Bayes, la distribution a posteriori pour les paramètres λ, μ_1, μ_2 est donnée par :

$$\pi(\lambda, \mu_1, \mu_2 / data) = \pi(\lambda, \mu_1, \mu_2) L(data|\lambda, \mu_1, \mu_2)$$

$$\pi(\mu_1, \mu_2, \lambda | data) = \left(\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \right)^m \prod_{i=1}^m (e^{-\mu_2 s_i} - e^{-\mu_1 s_i}) (\lambda)^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n t_i} \pi(\lambda, \mu_1, \mu_2) \quad (3.4)$$

La distribution a posteriori pour λ

$$\pi(\lambda | \mu_1, \mu_2) = \frac{1}{\Gamma(a_1)} b_1^{a_1} \lambda^{a_1-1} e^{-\lambda b_1} \left(\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \right)^m \prod_{i=1}^m (e^{-\mu_2 s_i} - e^{-\mu_1 s_i}) (\lambda)^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n t_i} \quad (3.5)$$

En utilisant le principe de la proportionnalité, on obtient à la distribution a posteriori qui est aussi une loi gamma.

$$\begin{aligned} \pi(\lambda | \mu_1, \mu_2) &\propto \lambda^{a_1-1} e^{-\lambda b_1} \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n t_i} \\ &\propto \lambda^{a_1-1+n} e^{-\lambda b_1 - \lambda \sum_{i=1}^n t_i} \\ &\propto \lambda^{(a_1+n)-1} e^{-\lambda (b_1 + \sum_{i=1}^n t_i)}. \end{aligned}$$

Finalement il résulte que :

$$\lambda \sim \Gamma(a_1 + n, b_1 + \sum_{i=1}^n t_i)$$

On remarque que la distribution a posteriori obtenue est une loi connue et facile à simuler qui est la loi gamma de paramètre $(a_1 + n, b_1 + \sum_{i=1}^n t_i)$.

Son estimateur est la moyenne de la loi gamma c.à.d : $\hat{\lambda} = \frac{a_1+n}{\sum_{i=1}^n t_i}$

distribution a posteriori pour μ_1

$$\begin{aligned} \pi(\mu_1 | t, \mu_2, \lambda) &= \pi(\mu_1) L(data | \lambda, \mu_1, \mu_2) \\ \pi(\mu_1 | \lambda, \mu_2) &= \frac{1}{\Gamma(a_2)} b_2^{a_2} \mu_1^{a_2-1} e^{-\mu_1 b_2} \left(\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \right)^m \prod_{i=1}^m (e^{-\mu_2 s_i} - e^{-\mu_1 s_i}) (\mu_1)^n e^{-\mu_1 \sum_{i=1}^n t_i} \end{aligned}$$

En utilisant le principe de la proportionnalité.

$$\pi(\mu_1 | \lambda, \mu_2) \propto \left(\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \right)^m \prod_{i=1}^m (e^{-\mu_2 t_i} - e^{-\mu_1 t_i}) \mu_1^{a_2-1+n} e^{-\mu_1 (b_2 + \sum_{i=1}^n t_i)} \quad (3.6)$$

Distribution a posteriori pour μ_2

$$\pi(\mu_2/t, \mu_1, \lambda) = \pi(\lambda)L(data|\lambda, \mu_1, \mu_2)$$

$$\pi(\mu_2|\lambda, \mu_1) = \frac{1}{\Gamma(a_2)} b_2^{a_2} \mu_2^{a_2-1} e^{-\mu_2 b_2} \left(\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \right)^m \prod_{i=1}^m (e^{-\mu_2 s_i} - e^{-\mu_1 s_i}) (\mu_2)^n e^{-\mu_2 \sum_{i=1}^n t_i} \quad (3.7)$$

En utilisant le principe de la proportionnalité, on obtient :

$$\pi(\mu_2|\lambda, \mu_1) \propto \left(\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \right)^m \prod_{i=1}^m (e^{-\mu_2 t_i} - e^{-\mu_1 t_i}) \mu_2^{a_2-1+n} e^{-\mu_2 (b_2 + \sum_{i=1}^n t_i)} \quad (3.8)$$

3.2 Analyse bayésienne du modèle $M|H_2|1$ **3.2.1 Description du modèle**

Considérons le système de files d'attente $M/H_2/1$ à un seul serveur à capacité infinie, de discipline (*FIFO*) et ayant les propriétés suivantes :

- ✓ Processus d'entrée :Le processus d'entrée est un processus de Poisson d'intensité λ .
- ✓ Processus de servic :Les durées de service sont identiquement distribuées selon une loi hyper-exponentielle $f(t)$ de paramètres (δ_1, δ_2) .

La fonction de densité d'une loi hyperexponentielle est donnée par :

$$f(t) = \tau_1 \delta_1 e^{-\delta_1 s} + \tau_2 \delta_2 e^{-\delta_2 s}$$

La fonction de vraisemblance (H_2)

Nous supposons que les inter-arrivées et les durées de service sont indépendants, la fonction de vraisemblance noté $L(data|\lambda, \delta_1, \delta_2)$ est donnée par :

$$L(data|\lambda, \mu_1, \mu_2) = \prod_{i=1}^m (\tau_1 \delta_1 e^{-\delta_1 s_i} + \tau_2 \delta_2 e^{-\delta_2 s_i}) \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda t_i} \quad (3.9)$$

$$L(data|\lambda, \delta_1, \delta_2) = \prod_{i=1}^m (\tau_1 \delta_1 e^{-\delta_1 s_i} + \tau_2 \delta_2 e^{-\delta_2 s_i}) \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n t_i} \quad (3.10)$$

$$(3.11)$$

avec :

$t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$, temps des inter-arrivées.

$s = (s_1, s_2, \dots, s_m)$, temps de service.

Choix des lois a priori

Le choix de la loi a priori la plus appropriées au problème posé, nécessite un minimum d'informations récoltées des expériences déjà réalisées et des avis des experts. dans notre cas, on attribue à chaque paramètre considéré une loi a priori de la manière suivante :

- Le paramètre des arrivées λ avec $\lambda > 0$.
 $\lambda \sim \Gamma(a_1, b_1)$
- Les paramètres du services δ_1, δ_2 avec $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$.
 $\delta_1 \sim \Gamma(a_2, b_2)$, $\delta_2 \sim \Gamma(a_3, b_3)$.

avec $\Gamma(a_i, b_i)$ est la distribution gamma de moyenne $\frac{a_i}{b_i}$; de variance $\frac{a_i}{b_i^2}$ et de fonction de densité donnée par :

$$f(\nu, a_i, b_i) = \frac{b_i^{a_i}}{\Gamma(a_i)} \nu^{a_i-1} \exp(-\nu b_i); \quad (3.12)$$

tel que $\nu > 0, a_i > 0, b_i > 0$.

Calcul des lois a posteriori

En utilisant le théorème de Bays, la distribution a postriori pour les paramètres λ, μ_1, μ_2 est donnée par :

$$\pi(\delta_1, \delta_2, \lambda | data) = \prod_{i=1}^m (\tau_1 \delta_1 e^{-\delta_1 s_i} + \tau_2 \delta_2 e^{-\delta_2 s_i}) \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda t_i} \pi(\lambda, \delta_1, \delta_2) \quad (3.13)$$

La distribution a postriori pour λ

$$\begin{aligned} \pi(\lambda | t, \delta_1, \delta_2) &= \pi(\lambda) L(data | \lambda, \delta_1, \delta_2) \\ \pi(\lambda | t, \delta_1, \delta_2) &= \frac{1}{\Gamma(a_1)} b_1^{a_1} \lambda^{a_1-1} e^{-\lambda b_1} \prod_{i=1}^m (\tau_1 \delta_1 e^{-\delta_1 s_i} + \tau_2 \delta_2 e^{-\delta_2 s_i}) (\lambda)^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n t_i} \end{aligned} \quad (3.14)$$

En utilisant le principe de la proportionnalité, on obtient à la distribution a posteriori qui est aussi une loi gamma.

$$\begin{aligned} \pi(\lambda | \delta_1, \delta_2) &\propto \lambda^{a_1-1} e^{-\lambda b_1} \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n t_i} \\ &\propto \lambda^{a_1-1+n} e^{-\lambda b_1 - \lambda \sum_{i=1}^n t_i} \\ &\propto \lambda^{(a_1+n)-1} e^{-\lambda (b_1 + \sum_{i=1}^n t_i)}. \end{aligned}$$

Finalement :

$$\lambda \sim \Gamma(a_1 + n, b_1 + \sum_{i=1}^n t_i)$$

On remarque que la distribution a posteriori obtenue est une loi connue qui est la loi gamma de paramètre $(a_1 + n, b_1 + \sum_{i=1}^n t_i)$.

son estimateur c'est la moyenne de la loi gamma c.à.d : $\hat{\lambda} = \frac{a_1+n}{\sum_{i=1}^n t_i}$

distribution a posteriori pour δ_1

$$\begin{aligned} \pi(\delta_1|t, \lambda, \delta_2) &= \pi(\lambda)L(data|\lambda, \delta_1, \delta_2) \\ \pi(\delta_1|\lambda, \delta_2) &= \frac{1}{\Gamma(a_2)} b_2^{a_2} \delta_1^{a_2-1} e^{-\delta_1 b_2} \prod_{i=1}^m (\tau_1 \delta_1 e^{-\delta_1 s_i} + \tau_2 \delta_2 e^{-\delta_2 s_i}) (\delta_1)^n e^{-\delta_1 \sum_{i=1}^n t_i} \end{aligned} \quad (3.15)$$

En utilisant le principe de la proportionnalité.

$$\pi(\delta_1|\lambda, \delta_2) \propto \delta_1^{a_2-1} e^{-\delta_1 b_2} \prod_{i=1}^m (\tau_1 \delta_1 e^{-\delta_1 s_i} + \tau_2 \delta_2 e^{-\delta_2 s_i}) \delta_1^n e^{-\delta_1 \sum_{i=1}^n t_i} \quad (3.16)$$

$$\pi(\delta_1|\lambda, \delta_1) \propto \delta_1^{a_2+n-1} e^{-\delta_1 (b_2 + \sum_{i=1}^n t_i)} \prod_{i=1}^m (\tau_1 \delta_1 e^{-\delta_1 s_i} + \tau_2 \delta_2 e^{-\delta_2 s_i}) \quad (3.17)$$

distribution a posteriori pour δ_2

$$\begin{aligned} \pi(\delta_2|t, \lambda, \delta_1) &= \pi(\lambda)L(data|\lambda, \delta_1, \delta_2) \\ \pi(\delta_2|\lambda, \delta_1) &= \frac{1}{\Gamma(a_3)} b_3^{a_3} \delta_2^{a_3-1} e^{-\delta_2 b_3} \prod_{i=1}^m (\tau_1 \delta_1 e^{-\delta_1 s_i} + \tau_2 \delta_2 e^{-\delta_2 s_i}) (\delta_2)^n e^{-\delta_2 \sum_{i=1}^n t_i} \end{aligned} \quad (3.18)$$

En utilisant le principe de la proportionnalité, on obtient :

$$\begin{aligned} \pi(\delta_2|\lambda, \delta_1) &\propto \delta_2^{a_3-1} e^{-\delta_2 b_3} \prod_{i=1}^m (\tau_1 \delta_1 e^{-\delta_1 s_i} + \tau_2 \delta_2 e^{-\delta_2 s_i}) \delta_2^n e^{-\delta_2 \sum_{i=1}^n t_i} \\ \pi(\delta_2|\lambda, \delta_1) &\propto \delta_2^{a_3+n-1} e^{-\delta_2 (b_3 + \sum_{i=1}^n t_i)} \prod_{i=1}^m (\tau_1 \delta_1 e^{-\delta_1 s_i} + \tau_2 \delta_2 e^{-\delta_2 s_i}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Remarque

Vu la complexité des lois a posteriori, obtenues dans (3,6),(3,8) et (3,17),(3,19) il est impossible d'obtenir directement les estimateurs bayésiens, les distributions a posteriori obtenus ne sont pas des lois connues et faciles à simuler. Pour cette raison, la stratégie de calcul consiste d'utiliser les méthodes de Monté Carlo par chaîne de Markov *MCMC* proposée par Metropolis et Al pour estimer les paramètres des deux modèles $M|HOE_2|1$ et $M|H_2|1$

3.3 Méthode MCMC

Notons que les lois a posteriori calculées pour les deux modèles $M|HOE_2|1$ et $M|H_2|1$, ne sont pas simulable. Pour cette raison nous proposons d'utiliser les méthodes MCMC pour construire une chaîne de Markov pour le vecteur des paramètres $\theta = (\mu_1, \mu_2)^T$, en utilisant des valeurs initiales pour ce vecteur. Pour simuler suivant les lois a posteriori, nous utilisons l'algorithme de Metropolis-Hasting. Cet algorithme est basé sur l'utilisation d'une loi génératrice de candidat pour chaque paramètre. Après une période de chauffage N_0 et un nombre total d'itérations N très large, les chaînes de Markov construite convergent vers les distributions d'intérêt.

(Loi a posteriori conditionnelles). Les itérations N ne sont pas utilisées dans le calcul de vecteurs d'estimation des paramètres $\theta = (\mu_1, \mu_2)^T$.

Les étapes de l'algorithme qui permet de simuler suivant les lois a posteriori sont résumées comme suit :

1. Initialiser le vecteur des paramètres $\theta^{(1)} = (\mu_1^{(1)}, \mu_2^{(1)})$.
2. Pour $m = 2, \dots, N$;
 - a)- Génération des lois candidates
 - Générer $\mu_1^c \sim N(\mu_1^m, \sigma^2 = 0.001)$; $\mu_1^c = |\mu_1^c|$.
 - Générer $\mu_2^c \sim N(\mu_2^m, \sigma^2 = 0.001)$; $\mu_2^c = |\mu_2^c|$.
 - b)- Calculer les probabilités d'acceptations suivantes :
 - $\rho_1 = \min \left\{ 1, \frac{\pi(\mu_1^c | \mu_2^m, \lambda)}{\pi(\mu_1^m | \mu_2^m, \lambda)} \right\}$; $\mu_1^m = \begin{cases} \mu_1^c & \text{si } \mu < \rho_1, \\ \mu_1^{m-1} & \text{sinon} \end{cases}$ $\mu \sim U[0, 1]$
 - $\rho_2 = \min \left\{ 1, \frac{\pi(\mu_2^c | \mu_1^m, \lambda)}{\pi(\mu_2^m | \mu_1^m, \lambda)} \right\}$; $\mu_2^m = \begin{cases} \mu_2^c & \text{si } \mu < \rho_2, \\ \mu_2^{m-1} & \text{sinon} \end{cases}$ $\mu \sim U[0, 1]$
3. $m = m + 1$ et aller à 2
4. Calculer le vecteur d'estimation de Bayes $\hat{\theta}_{Bayes} = (\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2)$.

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{N - N_0} \sum_{m=N_0+1}^N \mu_1^m. \quad (3.20)$$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{N - N_0} \sum_{m=N_0+1}^N \mu_2^m. \quad (3.21)$$

3.4 Application sur des données simulées

Dans cette section, nous présentons les principaux résultats obtenus par simulation. Cette partie permet de tester l'efficacité de l'approche bayésienne dans l'estimation des modèles $M|HOE_2|1, M|H_2|1$ sur les données simulées suivant ces modèles. Les programmes ont été réalisés à l'aide du logiciel *R*, pour les simulations, nous procédons en deux étapes :

- Dans la première étape, nous utilisons les deux modèles pour simuler les données n_s en utilisant le package **mapfit** en fixant le vecteur des paramètres, $\theta = (\mu_1, \mu_2)^T$ et $\beta = (\delta_1, \beta_2)^T$

- La deuxième étape est consacrée à l'estimation des paramètres. Nous utilisons les observations t simulées pour estimer les paramètres avec l'approche bayésienne.

3.4.1 Simulation des données

3.4.2 Modèle $M|HOE_2|1$

Nous simulons, selon le modèle $M|HOE_2|1$ des observations t de taille $n = (100, 250, 500)$ en fixant les paramètres de ce modèle. Selon Les paramètres fixés ont été choisis comme suit :

- 1^{er} cas : $\mu_1 = 3, \mu_2 = 2$.
- 2^{eme} cas : $\mu_1 = 1, \mu_2 = \frac{3}{2}$.
- 3^{eme} cas : $\mu_1 = 4, \mu_2 = 5$.

3.4.3 Estimation des paramètres

En utilisant nos programme implémentés sous logiciel **R**, nous avons estimé les paramètres du modèle en utilisant les observations simulées dans la première étape.

- Pour l'approche bayésienne, nous utilisons les lois a priori en fixant les hyperparamètres, $a_i = 0.01$, $b_i = 0.01$, tel que $i = 1, 2, 3$. Ensuite nous appliquons le programme *MCMC* implémenté sous logiciel **R** en fixant les valeurs initiales $\theta^{(1)} = (\mu_1^{(1)}, \mu_2^{(1)})^T$.

Le choix de ce dernier est très important dans le calcul des estimations bayésiennes. Notons que le nombre total d'itération est, $N = 10000$ et la période de chauffage est $N_0 = 7500$ Donc, nous utilisons que $N - N_0 = 2500$ pour estimer le vecteur des paramètres. Nous avons utilisé $N_{sim} = 25$ réplifications.

3.4.4 Modèle $M|H_2|1$

Nous simulons, selon le modèle $M|H_2|1$ des observations t de taille $n = (100, 250, 500)$ en fixant les paramètres de ce modèle. Selon Les paramètres fixés ont été choisis comme suit :

- 1^{er} cas : $\delta_1 = 1, \delta_2 = 2$.
- 2^{eme} cas : $\delta_1 = \frac{1}{2}, \delta_2 = \frac{1}{2}$.
- 3^{eme} cas : $\delta_1 = 2, \delta_2 = 3$.

3.4.5 Estimation des paramètres

En utilisant nos programme implémentés sous logiciel **R**, nous avons estimé les paramètres du modèle en utilisant les observations simulées dans la première étape.

- Pour l'approche bayésienne, nous utilisons les lois a priori en fixant les hyperparamètres, $a_i = 0.01$, $b_i = 0.01$, tel que $i = 1, 2, 3$ Ensuite, nous appliquons le programme *MCMC* implémenté sous logiciel **R** en fixant les valeurs initiales $\beta^{(1)} = (\delta_1^{(1)}, \delta_2^{(1)})^T$.

Le choix de ce dernier est très important dans le calcul des estimations bayésiennes . Notons que le nombre total d'itération est, $N = 10000$ et la période de chauffage est $N_0 = 7500$ Donc, nous utilisons que $N - N_0 = 2500$ pour estimer le vecteur des paramètres. Nous avons utilisé $N_{sim} = 25$ réplifications.

3.4.6 Résultats

les résultat obtenus sont résumées dans les deux tableaux (3.1) et (3.2) tels que le tableau (3.1) présente la taille de l'échantillon , la moyenne pour les paramètres μ_1, μ_2 , et les erreurs quadratiques moyennes (*EQM*) . Et le tableau (3.2) aussi , présente la taille de l'échantillon , la moyenne pour les paramètres δ_1, δ_2 , et les erreurs quadratique moyennes (*EQM*).

Où $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\delta}_1$ et $\hat{\delta}_2$ représentent les estimateurs bayésiens de μ_1, μ_2, δ_1 et δ_2 respectivement sous les erreurs quadratique moyennes. La moyenne est donnée comme suit :

$$\begin{aligned} \overline{\hat{\mu}_1} &= \frac{1}{N_{sim}} \sum_{i=1}^{N_{sim}} \hat{\mu}_{1i} & , & & \overline{\hat{\mu}_2} &= \frac{1}{N_{sim}} \sum_{i=1}^{N_{sim}} \hat{\mu}_{2i} \\ \overline{\hat{\delta}_1} &= \frac{1}{N_{sim}} \sum_{i=1}^{N_{sim}} \hat{\delta}_{1i} & , & & \overline{\hat{\delta}_2} &= \frac{1}{N_{sim}} \sum_{i=1}^{N_{sim}} \hat{\delta}_{2i} \end{aligned}$$

Les erreurs quadratiques moyennes sont données par :

$$\begin{aligned} \overline{\hat{\mu}_1} &= \frac{1}{N_{sim}} \sum_{i=1}^{N_{sim}} (\hat{\mu}_{1i} - \mu_1)^2 & , & & \overline{\hat{\mu}_2} &= \frac{1}{N_{sim}} \sum_{i=1}^{N_{sim}} (\hat{\mu}_{2i} - \mu_2)^2 \\ \overline{\hat{\delta}_1} &= \frac{1}{N_{sim}} \sum_{i=1}^{N_{sim}} (\hat{\delta}_{1i} - \delta_1)^2 & , & & \overline{\hat{\delta}_2} &= \frac{1}{N_{sim}} \sum_{i=1}^{N_{sim}} (\hat{\delta}_{2i} - \delta_2)^2 \end{aligned}$$

Les figures (3.1) (3.2) montrent les histogrammes des chaînes de Markov associées aux estimateurs des paramètres obtenues pour $n = 500$ avec une seule réplication.

- 1^{er} cas : $\mu_1 = 3, \mu_2 = 2$.
- 2^{eme} cas : $\mu_1 = 1, \mu_2 = \frac{3}{2}$.
- 3^{eme} cas : $\mu_1 = 4, \mu_2 = 5$.

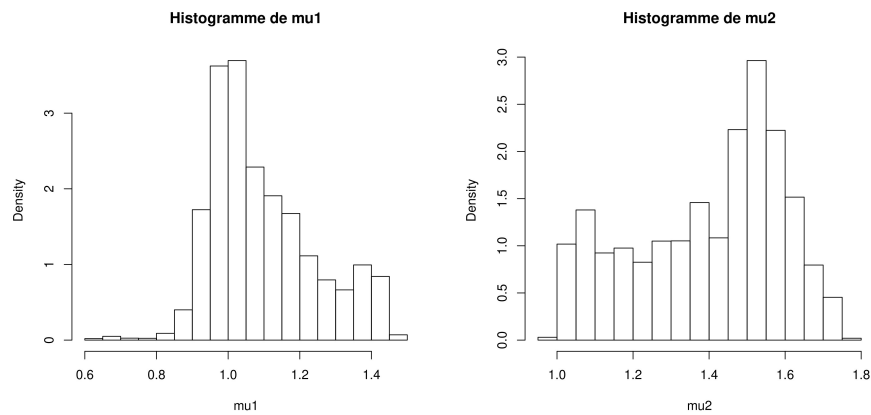
La taille de l'échantillon		1 ^{er} cas	2 ^{eme} cas	3 ^{eme} cas
$n = 100$	$\widehat{\mu}_1$	2.746445	1.261518	3.892193
	EQM(μ_1)	0.2426513	0.2382632	0.2392934
$n = 100$	$\widehat{\mu}_2$	2.216159	1.37846	4.845163
	EQM(μ_2)	0.1925738	0.09771327	0.2828827
$n = 250$	$\widehat{\mu}_1$	2.765898	1.246846	4.393474
	EQM(μ_1)	0.1087292	0.114213	0.2682704
$n = 250$	$\widehat{\mu}_2$	2.175275	1.249319	4.570689
	EQM(μ_2)	0.0838775	0.09974206	0.2182097
$n = 500$	$\widehat{\mu}_1$	3.163456	1.146836	4.193768
	EQM(μ_1)	0.2360061	0.1029751	0.2639787
$n = 500$	$\widehat{\mu}_2$	1.98389	1.483338	4.872883
	EQM(μ_2)	0.04061631	0.08250061	0.1844681

TABLE 3.1 – Estimation des paramètres du modèle hypo-exponentielle .

- 1^{er} cas : $\delta_1 = 1, \delta_2 = 2$.
- 2^{eme} cas : $\delta_1 = \frac{1}{2}, \delta_2 = \frac{1}{2}$.
- 3^{eme} cas : $\delta_1 = 2, \delta_2 = 3$.

La taille de l'échantillon		1 ^{er} cas	2 ^{eme} cas	3 ^{eme} cas
$n = 100$	$\widehat{\delta}_1$	1.16437	0.5312228	2.137493
	EQM(δ_1)	0.1186822	0.05648869	0.1152153
$n=250$	$\widehat{\delta}_2$	2.016984	0.7179304	3.262441
	EQM(δ_2)	0.2241025	0.07535223	0.3598493
$n=500$	$\widehat{\delta}_1$	1.13685	0.5246324	2.26356
	EQM(δ_1)	0.04984573	0.004659395	0.1128142
$n=500$	$\widehat{\delta}_2$	1.819116	0.4632359	2.727488
	EQM(δ_2)	0.1988103	0.004622066	0.1116785
$n=500$	$\widehat{\delta}_1$	1.027974	0.5171294	1.914486
	EQM(δ_1)	0.004595552	0.002424678	0.06961143
$n=500$	$\widehat{\delta}_2$	2.218475	0.503639	3.109253
	EQM(δ_2)	0.1593839	0.004317009	0.1091593

TABLE 3.2 – Estimation des paramètres du hyper modèle-exponentielle .

FIGURE 3.1 – Histogramme de μ_1 et μ_2 pour le modèle $M/HOE_2/1$.

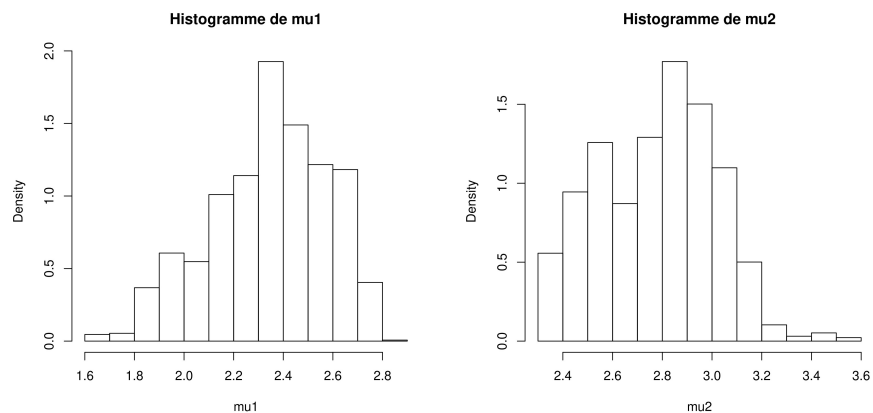


FIGURE 3.2 – Histogramme de δ_1 et δ_2 pour le modèle $M/H_2/1$.

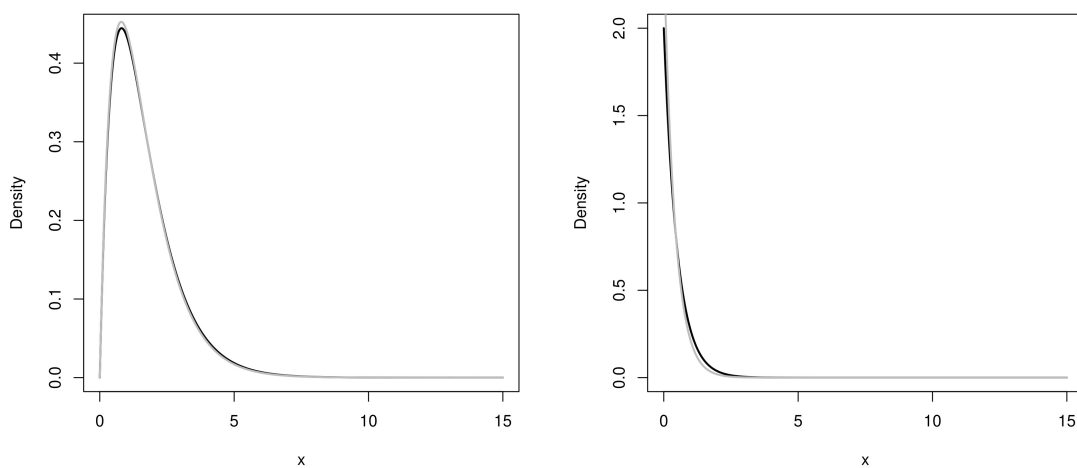


FIGURE 3.3 – comparaison entre la vrai densité et celle estimée par Bayes.

Interprétation des données

La partie simulation a pour objectif de tester la convergence et l'efficacité de l'approche bayésienne dans l'estimation des paramètres μ_1, μ_2, δ_1 et δ_2 . Nous avons choisi la moyenne a posteriori comme estimateur bayésien. Nous avons utilisé notre programme *MCMC* pour estimer les paramètres μ_1, μ_2, δ_1 et δ_2 . Les résultats obtenus par cette méthode nous permet de constater que les estimations sont proches des valeurs attendues (vraie valeurs des paramètres).

Les résultats montrent que l'erreur quadratique moyenne (*EQM*) diminue en augmentant la taille de l'échantillon n , voir les tableaux (3.1) et (3.2). Les graphes montrent aussi, que les résultats obtenus par Bayes sont satisfaisant, voir la figure (3.3).

Conclusion générale.

Ce travail a pour objet l'étude théorique et pratique des systèmes d'attente de type phase (PH). Nous nous sommes intéressés aux deux modèles $M/HOE_2/1$, $M/H_2/1$.

Dans un premier temps, nous avons appliqué l'approche bayésienne pour estimer les paramètres des deux modèles considérés. Ceci nous a permis d'obtenir l'estimateur du paramètre de la loi des inter-arrivées et les estimateurs des deux paramètres de la loi de la durée de service des modèles $M/HOE_2/1$, $M/H_2/1$.

Par la suite une étude de simulation a été réalisée. Nous avons aussi établi des applications sur des données simulées où l'estimation a été abordée dans les deux cas sous forme de l'erreur quadratique moyenne. Les résultats obtenus montrent l'efficacité de la démarche bayésienne.

Parmi les perspectives de recherches citons :

- * Appliquer l'approche bayésienne pour estimer les paramètres des modèles $PH|M|1$, $M|PH|1$
- * Application sur des données réelles.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons appliqué l'inférence bayésienne pour estimer les paramètres des modèles d'attente de type phase.

Dans un premier temps, nous avons présenté les notions principales de la théorie des files d'attente et nous avons rappelé en détail les modèles d'attente de type phase (PH) avec quelques exemples de la distribution. Par la suite, une présentation détaillée de la statistique bayésienne a été considérée.

Dans un deuxième temps, nous avons obtenu les estimateurs de la loi des inter-arrivées et de la loi de la durée de service des deux modèles $M|H_2|1$ et $M|HOE_2|1$ en présentant les différentes procédures d'estimation effectuées. Sur la base des résultats théoriques obtenus, une étude de simulation a été réalisée en utilisant la méthode *MCMC*.

Mots Clés :

Systèmes d'attente, File d'attente de type phase (PH), Inférence bayésienne, Méthode MCMC, Simulation .

Bibliographie

- [1] A.Bareche. *Analyse statistique des systèmes d'attente*. Thèse Magistère en Mathématique appliquées. Université de Bejaia. 2003.
- [2] A.Birnbaum. *Statistical methods for poisson processes and exponential population*. Soc, 1954
- [3] A.K.Erlang. *Solution of some problems in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges*, Elektroteknikeren, (13),5,1957.
- [4] A.B.Clarke. *Maximum likelihood estimates in a simple queue*. Ann Math Statist.(28), 1036-1040,1957
- [5] A.Choudhury and A.C.Borthakur. American Journal of Mathematical and Management Sciences 27(2013), 25-41.
- [6] D.G.Kendall. *Some problems in the theory of queues*. J.Roy.Sta.Soc,13 :151 :-185,1951
- [7] D.Aissani et A.Aissani. *La théorie des files d'attente, Fondament historique et application à l'évaluation des performances*. Publication du Laboratoire LaMOS, Bejaia, 2004.
- [8] .Brockmeyer, H.Halstrom, and A.jensen. *The life and works of A.k.Erlang*. Trans Dan Acad.Techn.Sci2, Copenhagen 138, 1948.
- [9] G. Latouche and V. Ramaswami. *Introduction to matrix analytic methods in stochastic modelling* .SIAM, philadelphia PA,1999.
- [10] K.Lagha. *Statistiques bayésiennes*. cours - site Elearning. Université de Béjaia

- [11] L.Kleinrok. *Queueing Systems Theory*, volume1, John Wiley and Sons, New York,1975
- [12] L.Berdjoudj *statistique inférentielle* cours - site Elearning. Université de Bejaia. 2014.
- [13] M.Faddy. *Examples of fitting structured phase type distribution*. Applied stochastic Models and Data Analysis 10,247-255,1994.
- [14] M.V.Muddapur. *Bayesian estimates of parameters in some queueing models*. Ann Inst Stat Math(24), 327-331,1972.
- [15] N. Metropolis, A W.Rosenbluth, M N. Rosenbluth, A H. Teller, and E.Telle, *Equation of state calculations by fast computing machine*. The journal of Chemical Physics 21(1953), 1087-1093.
- [16] S.Geman and D.Geman, *Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images*. IEEE Transactionson Pattern Analysis and Machine Intelligene 6 (1984), 721-741.
- [17] S.Asmusm. *phase-type representations in random walk and queueing poblems*. Annals of probability 20,772-789, 1992.
- [18] S.S.Rao, U.N.Bhat and K.Harishchandra. *Control of traffic intensity in a queue : method based on SPRT*. Opsearch, (21),63-80, 1984.
- [19] S.Jain, *Estimation in $M/Er/1$ queueing systems*. Communication in statistics-Theory and Methods 20(1991), 1871-1879.
- [20] S.P.Mukherjee and S.Chowdhury. *Maximum likelihood and Bayes estimation in $M/M/1$ queue* Stochastic Modelling and Applications 8(2)(2006) 47-55
- [21] U.N.Bhat and S.S.Rao. *Statistical analysis of queueing systems*. Queueing systems (1) 217-247,1987
- [22] U.N.Bhat, G.K.Miller, and S.S.Rao. *Statistical analysis of queueing systems*, in J.H.Dshalalow, ed., Frontiers in Queueing, CRC Press, New York, Chapter 13, 351-393, 1997
- [23] W.Hastings, *Mnte Carlo sampling methods using Markov and their applications*. Biometrica 57 (1970), 97-109.

- [24] Y.Djabali. *Stabilité forte dans les système d'Attente de type phase :Cas des systèmes $PH/M/1$ et $M/PH/1$* . Thèse de doctorat (LMD) en Mathématiques appliquées. U.Béjaia. 2017.