

RÉPUBLIQUE ALGÉRIEN DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ ABDE RAHMANE MIRA-BÉJAÏA-ALGÉRIE
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

*Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master 2
en Mathématiques*

OPTION

Analyse Mathématiques

Thème

*La Théorie du point fixe et le processus Itératifs de
Mann avec erreurs aléatoires fortement
mélangeantes*

PAR

Bachioua Oualid

Devant le jury :

Président :	M. SOUFIT. Massinissa	MCB
Examinatrice :	Mme. ALLOUTI. Chahira	MCB
Encadreur :	Mme. BARACHE Bahia	MCB
Examineur :	M. AREZKI. Samir	Doctorant

27 - 06 - 2022

Remerciements

Je remercie allah le tout puissant qui m'accordé la santé et la patience durant toutes ces années pour que je viens aujourd'hui et présenter ce travail.

Je tiens à remercier mon encadreur Mme.Barach Bahia, pour son aide et ces conseils précieux.

Mes remerciements vont aussi aux membre de jury qui m'ont honoré en acceptant de jury ce travail.

Je remercie tous les enseignants de département mathématique.

Mes remerciements vont aussi à toute ma famille et a toutes mes amis pour leur aide et leur soutien.

Mes remerciements vont aussi à ma fiancer Silia et toute ça famille pour leur aide et leur soutien.

Dédicace

Je dédie le fruit de mon travail à mes parents qui m'ont soutenu, aidé que afin que je réussisse dans la vie, alors j'aimerais bien en profiter de cette occasion pour les remercier pour toutes ce qui m'offrent, que le bon dieu me les garde et les protège.

A mes frères et sœur et leurs enfants et ma fiancée Silia et sa famille.

A mes amis se sont qui est présent ou absents.

Table des figures

1.1	Fonction avec un seul point fixe	9
1.2	Fonction avec deux point fixe	10
1.3	Fonction avec une infinité du point fixe	11
1.4	Fonction sons aucun point fixe	11
1.5	Fonction avec trois point fixe	16
3.1	Suite de picard	37
3.2	Suite de Mann	40
3.3	Suite de Mann avec erreur	43
3.4	Suite de Mann avec erreurs α -mélangeants	48
3.5	Graphe des itérés de ces méthodes	49

Table des matières

Introduction	5
1 Théorie du points fixes et les méthodes itératives	8
1.1 Théorie des points fixes	8
1.1.1 Principe de contraction de Banach	12
1.1.2 Théorème du points fixes de Shauder	15
1.1.3 Théorème du points fixes de Brouwer	15
1.1.4 Théorème du points fixes de Krasnoselkii	15
1.2 Nature du Points fixes	16
1.3 Méthodes d'aproximation des points fixes	19
1.3.1 Méthode itérative de Picard	21
1.3.2 Méthode itérative de Mann	21
1.3.3 Méthode itérative de Mann avec erreurs	24
2 Variables aléatoires fortement mélangentes(α-mélange)	25
2.1 Variable aléatoire α -mélangeant	27
2.1.1 Types de mélange fort	27
2.1.2 Propriété de mélange fort	28
2.2 Types de convergence	29
2.2.1 Convergence en probabilité	29
2.2.2 Convergence presque complète	29
2.2.3 Convergence en loi	30
2.2.4 Convergence complète pour les suites α -mélangeantes	31
3 Application numérique	33
3.1 <u>Les méthodes numérique</u> :	35
3.1.1 Méthode de picard :	35
3.1.2 Méthode de Mann :	37
3.1.3 Méthode de Mann avec erreurs :	41
3.1.4 Méthode de Mann avec erreurs α -mélangeant :	43

Introduction Générale

Dans nombres problèmes Mathématique relevant de domaines varie,l'existence d'une solution est la même que l'existence d'un point fixe par une transformation appropriée de problème.La recherche d'un point fixe revient à résoudre l'équation dite équation de point fixe.

Dans ce mémoire,on étudie quelques théorèmes du point fixe de Banach,Brouwer,Schauder,et Krasnoselskii et quelques méthodes itératives de picard,Mann,Mann avec erreur.Étant donné un ensemble X et une application $F : X \longrightarrow X$ on s'intéresse à donner des conditions suffisantes sur F et X pour que F ait un point fixe.

Le théorème du point fixe de Banach, connu aussi sous le nom du principe de contraction de Banach ou théorème du point fixe du Picard, est apparu pour la première fois en 1922[3] dans le cadre de la résolution d'une équation intégrale. Notons que ce théorème est une abstraction de la méthode classique des approximations successives introduite par Liouville (en 1837)[12] et développée par la suite par Picard (en 1890)[1]. A cause de sa simplicité et de son utilité, ce théorème est largement utilisé dans plusieurs branches de l'analyse mathématique, en particulier, dans la branche des équations différentielles. Le théorème du point fixe de Banach a connu de diverses généralisations dans différents espaces.

Le théorème de point fixe de Schauder rétablie en 1930[1], est une généralisation de théorème de point fixe de Brouwer et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe qui n'est pas nécessairement unique.

Luitzen Egbertus Jan BROUWER (Overschie 1881 - Blaricum 1966), logicien et mathématicien hollandais, a fait toute sa carrière à l'Université d'Amsterdam. De 1909 à 1913 il fit des travaux de topologie algébrique, démontrant l'un des plus beaux théorèmes, le théorème du point fixe, dont les applications et généralisations, de la théorie des jeux aux équations différentielles, se sont révélées fondamentales. Après 1907, à partir d'une philosophie originale du raisonnement mathématique, il développe l'intuitionnisme, prolongeant certaines idées de Kronecker, et rejoint par Hermann Weyl. L'intuitionnisme est devenu aujourd'hui, sans doute contre sa volonté, une des grandes branches formalisées de la logique, mais Brouwer ne réussit pas à imposer les mathématiques intuitionnistes, qui demeurent un objet de curiosité. (E. U.)

Le théorème du point fixe de Brauer est un résultat de topologie algébrique, sous sa forme simple, ce théorème exige uniquement la continuité de l'application d'un intervalle fermé borné dans lui-même. [5]

Krasnoselski a combiné le théorème du point fixe de Banach et celui de Schauder et a établi un nouveau théorème de point fixe qui a porté son nom. Ce théorème a été l'objet de plusieurs articles de recherche et possède de nombreuses applications intéressantes en analyse non linéaire.

Ce travail est réparti en trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré d'une part, à quelque théorème plus utile dans le cadre du point fixe et d'autre part, à quelques méthodes itératives de l'intérêt de ce travail, ainsi la nature d'un point fixe.

Le deuxième chapitre consacré à variable aléatoire mélangeant en particulier à variables aléatoires fortement mélangeantes.

Dans le troisième chapitre on a donné un exemple numérique et on a achevé le travail par une petite conclusion.

Théorie du points fixes et les méthodes itératives

Dans ce chapitre nous allons présenter quelques théorèmes du points fixes et quelques méthodes itératives du points fixes, ainsi la nature des points fixes.

1.1 Théorie des points fixes

La plupart des phénomènes naturels de la vie réelle (en physique, en chimie, en mécanique....) s'expriment en mathématique sous forme d'équation aux dérivées partielle ou d'équation intégrable...., qu'on peut s'écrire sous la forme $f(x) = x$, qu'on appelle équation du point fixe. On peut conclure que la résolution de ces problèmes se ramené à la recherche des points fixes pour certaines applications.

Définition 1.1.1 [9]

Soit X un ensemble non vide et $f : X \rightarrow X$ une application.

On dit que $x \in X$ est un point fixe de f s'il vérifie :

$$f(x) = x.$$

Est on note l'ensemble des points fixes de f par $Fix(f)$ qui est défini par :

$$Fix(f) = \{x \in X / f(x) = x\}.$$

Remarque 1.1 - La fonction f admet un unique point fixe si seulement si l'ensemble $\text{Fix}(f)$ contient seulement ce point fixe .

- la fonction f n'admet aucun point fixe si seulement si - l'ensemble $\text{Fix}(f) = \emptyset$.

- La fonction f admet plusieurs points fixes si seulement si l'ensemble $\text{Fix}(f)$ contient plus d'un élément.

Exemple 1.1 Dans le cas réel :

1- La fonction f définie par :

$f(x) = 2\sin(x)$ admet un unique point fixe sur $[\frac{3}{2}, 2]$, qu'on peut avoir dans le graphe suivant :

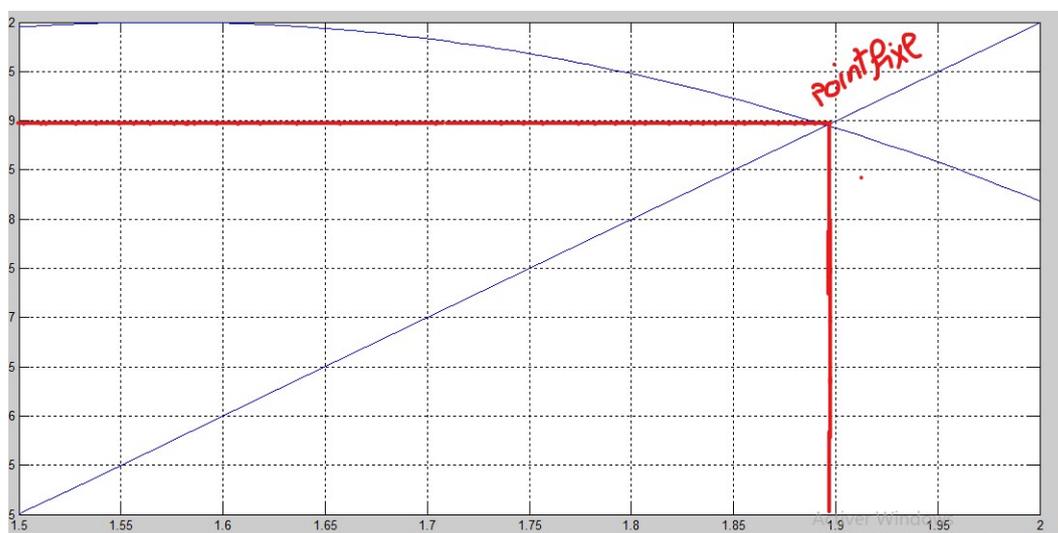


FIGURE 1.1 – Fonction avec un seul point fixe

2) La fonction f définie par :
 $f(x) = x^2$ admet deux points fixes sur $[-1, 2]$, qu'on peut avoir dans le graphe suivant :

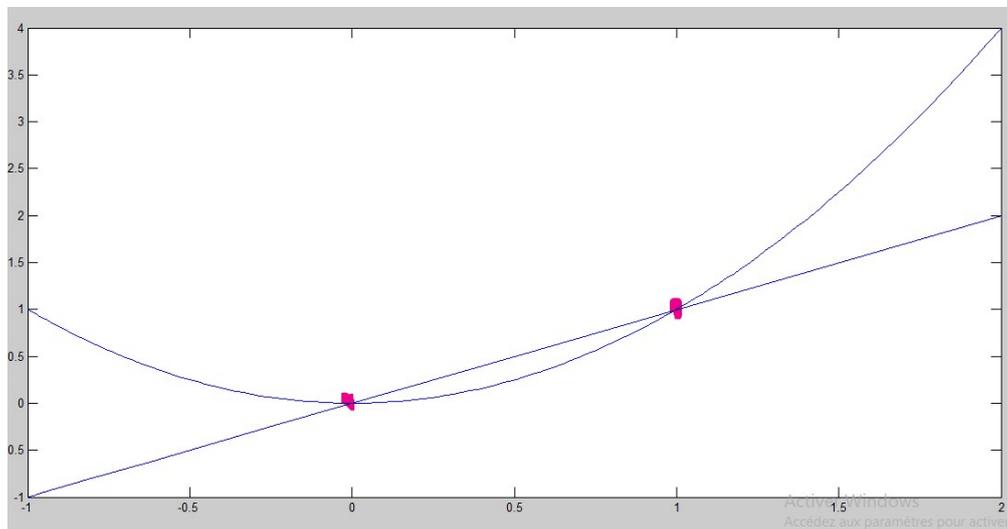


FIGURE 1.2 – Fonction avec deux points fixes

3) La fonction f définie par :
 $f(x) = x$ admet une infinité de points fixes sur \mathbb{R} , que on peut avoir dans le graphe suivant :

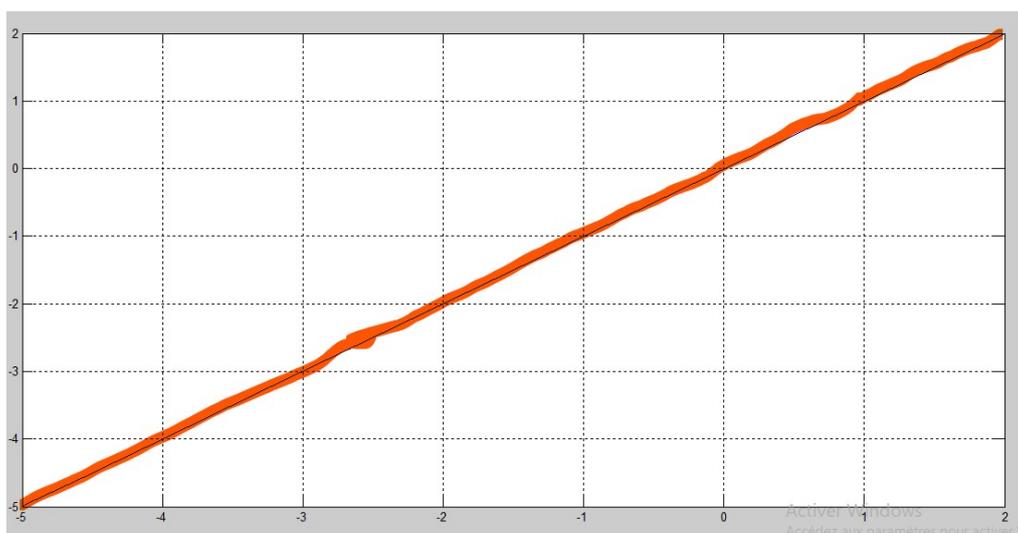


FIGURE 1.3 – Fonction avec une infinité du point fixe

4) La fonction f définie par :
 $f(x) = x + 1$ n'admet aucun point fixe, car il n'existe aucun nombre réel x égal à $x + 1$, comme on observe dans le graphe suivant

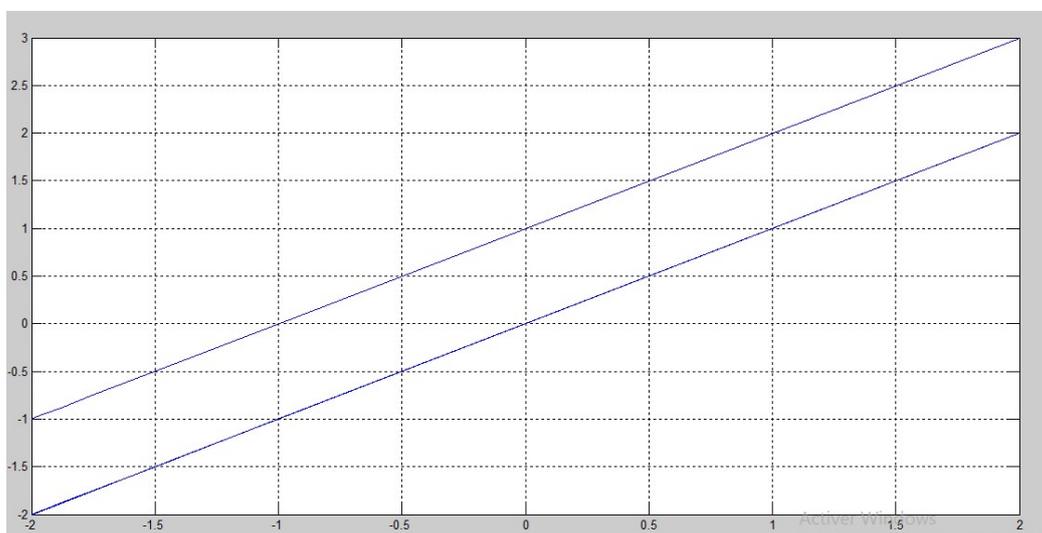


FIGURE 1.4 – Fonction sans aucun point fixe

Remarque 1.2 *On remarque que l'existence et l'unicité du point fixe il dépendent de (domaine d'étude, l'application qu'on a choisie, et la méthode de recherche)*

On va présenter dans cette partie quelques théorèmes très importants dans le cadre de la recherche des points fixes

1.1.1 Principe de contraction de Banach

Définition 1.1.2 (Application k-contractante)[9]

Soit (X, d) un espace métrique et $f : X \rightarrow X$ une application. On dit que f est k-contractante si

$$\exists k \in]0, 1[\text{ telle que } \forall x, y \in X : d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$$

Proposition 1.1.1 [9]

Une application contractante est continue

Théorème 1.1.1 [2]

Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \rightarrow X$ une application k-contractante . Alors f admet un point fixe unique $x^ \in X$ (ie $f(x^*) = x^*$) , de plus toute suite récurrente*

$$\begin{aligned} x_0 &\in X \\ x_{n+1} &= f(x_n) \end{aligned}$$

*converge vers x^**

Démonstration 1.1.1 [2]

(1)Existance :

Montrons que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leq n$:

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_n) \\ &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \dots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq k^m d(x_0, x_1) + k^{m+1} d(x_0, x_1) + \dots + k^{n-1} d(x_0, x_1) \\ &\leq (k^m + k^{m+1} + \dots + k^{n-1}) d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Mais

$$(k^m + k^{m+1} + \dots + k^{n-1}) = k^m \frac{1-k^{n-m}}{1-k} = \frac{k^m}{1-k}(1 - k^{n-m}).$$

D'où

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{k^m}{1-k}(1 - k^{n-m})d(x_0, x_1)$$

On a

$$(1 - k^{n-m}) < 1$$

Donc

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{k^m}{1-k}d(x_0, x_1)$$

Supposons que $d(x_0, x_1) \neq 0$, pour que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$, il suffit que :

$$\frac{k^m}{1-k}d(x_0, x_1) < \varepsilon$$

Alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans X et comme (X, d) est complet, donc la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente

dans X soit $x^* = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n, x^* \in X$. Montrons que x^* est un point fixe de f .

D'après la continuité de f , on a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} &= f(x_n) \\ \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \\ \implies x^* &= f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n\right) = f(x^*) \end{aligned}$$

Donc $x^* = f(x^*)$, d'où x^* est un point fixe de f .

(2) **L'unicité :**

Supposons qu'il existe $x_1^*, x_2^* \in X$ tel que $x_1^* \neq x_2^*$, avec $x_1^* = f(x_1^*)$ et $x_2^* = f(x_2^*)$, on a

$$\begin{aligned} d(f(x_1^*), f(x_2^*)) &\leq kd(x_1^*, x_2^*) \\ d(x_1^*, x_2^*) &\leq kd(x_1^*, x_2^*) \end{aligned}$$

Par conséquent, $d(x_1^*, x_2^*) = 0$ ce qui entraîne $x_1^* = x_2^*$

Exemple 1.2 Soit :

$$f : X = [-4, 4] \longrightarrow [-4, 4]$$

$$x \longrightarrow \frac{1}{2}x + 3$$

On a

1) $\forall x \in X, f(X) \subset X$, (stabilité de f)

2) Montrons que f est contractante :

Soit $x, y \in X$, On a :

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{2}x + 3 - \frac{1}{2}y - 3 \right| = \left| \frac{1}{2}(x - y) \right| \leq \frac{1}{2}|x - y|$$

Alors $\exists k = \frac{1}{2} < 1$ telle que $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$

D'où f est k -contractante.

3) Comme X est un intervalle fermé de \mathbb{R} Alors X est complet.

D'après ce qui précède, le principe de contraction de Banach nous assure l'existence et l'unicité du point fixe de f .

Exemple 1.3 Soient $X = [a, b]$ et l'application $f : X \longrightarrow X$ telle que f est dérivable sur $]a, b[$ elle

vérifie $|f'(x)| \leq k < 1$, pour tout $x \in [a, b]$, alors d'après le théorème des accroissements finis, si

$x, y \in X$, il existe une constante $x < c < y$ telle que $|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y|$

comme $|f'(x)| \leq k < 1 \implies |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ Alors f est contractante.
Donc d'après le principe de contraction de Banach f admet un unique point fixe

1.1.2 Théorème du points fixes de Shauder

Théorème 1.1.2 [1]

Soit X un sous-ensemble de Y compact, convexe, et Y : un espace de Banach, $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Alors : f admet un point fixe dans $x^* \in X$.

Démonstration 1.1.2 Voir [1]

1.1.3 Théorème du points fixes de Brouwer

Théorème 1.1.3 [1],[11]

Soit B_n la boule unité d'un espace euclidien de dimension n , $f : B_n \rightarrow B_n$ une application continue. Alors f admet au moins un point fixe.

Remarque 1.3 Le théorème de Brouwer se traduit alors en disant que les boules unités B_n possèdent la propriété de point fixe. Il en résulte aussitôt tout espace topologique homéomorphe à B_n vérifie la même propriété. La réciproque est aussi vraie, de sorte que, pour établir le théorème de Brouwer, il suffit d'établir que l'un des espaces homéomorphes à B_n possède la propriété de point fixe.

Démonstration 1.1.3 Voir [1],[11]

Théorème 1.1.4 [1]

Soit X un compact convexe non vide de \mathbb{R}^n . Toute application continue $f : X \rightarrow X$ possède au moins un point fixe.

Démonstration 1.1.4 Voir [1]

1.1.4 Théorème du points fixes de Krasnoselkii

Théorème 1.1.5 [9]

Soit X un espace de Banach et Y un sous-espace non vide, fermé, borné et convexe de X . Soient T, F deux applications de Y dans X telle que :

1. $\forall x, y \in Y, T(x) + F(y) \in Y$.

2. T est continue et compacte.

3. F est k -contractante.

Alors $\exists x^* \in Y$ telle que $(T + F)(x^*) = x^*$.

Démonstration 1.1.5 Voir [3]

1.2 Nature du Points fixes

Dans cette partie nous allons présenter quelques définitions et quelques théorèmes intéressent pour déduire la nature du point fixe .

Exemple 1.4 $f(x) = x^3$ admet 3 point fixe $\{-1, 0, 1\}$ en effet $f(x) = x \iff x^3 = x$ ce qui donne $x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = -1$.

Question : quel est la nature de ces points ?

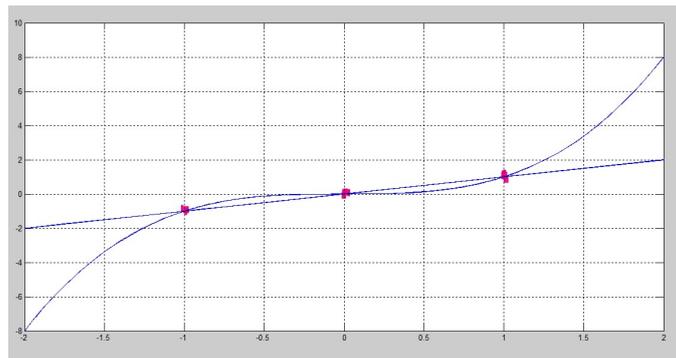


FIGURE 1.5 – Fonction avec trois point fixe

Définition 1.2.1 [7]

Soient $f : X \rightarrow X$ une application et x^* un point fixe de f , où X est un intervalle dans l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} . Alors

1. On dit que x^* est un point fixe stable si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, tel que $\forall x_0 \in X$, avec $|x_0 - x^*| < \delta$ Alors

on a : $|f^n(x_0) - x^*| < \varepsilon$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, (f^n : f of f of of (n fois)).

Si on dit que x^ est un point fixe instable.*

2. On dit que x^ est un point fixe attractif si $\exists \eta > 0$, tel que $|x_0 - x^*| < \eta \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0) = x^*$.*

3. si x^ est un point fixe stable et attractif on dit que x^* est asymptotiquement stable.*

4. si $\eta = \infty$ dans (2) on dit que x^ est globalement asymptotiquement stable .*

Exemple 1.5 *On prend l'exemple (1.4), pour le point $x^* = 0$, soit $x_0 \in [-2, 2]$*

on a :

$|f^n(x_0) - x^| = |(x_0)^{3^n} - 0| = |(x_0)^{3^n}| \leq |(x_0)^{3^n-1}| |x_0| < \varepsilon$, il suffit de prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{|(x_0)^{3^n-1}|}$, alors*

$x^ = 0$ est stable.*

De plus, on a $\forall x_0 \in [-2, 2], \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0) = 0$, ce qui veut dire que 0 est un point fixe attractif ,

D'où 0 est asymptotiquement stable.

mais par contre $\{-1, 1\}$ ils ne sont pas attractif en effet $\exists \varepsilon = \frac{1}{2}, \exists x_0 = \frac{3}{2} \in [-2, 2]$, on a

$|f^n(x_0) - x^| = |(x_0)^{3^n} + 1| > \varepsilon$ (pour 1), de même pour (-1) , donc on dit que $\{-1, 1\}$, sont répulsif*

On peut aussi étudier ça graphiquement, on trace la courbe $y = f(x)$ et la droite $y = x$

dans le même plan, et on part d'un point initial x_0 . Ensuite, nous nous déplaçons verticalement

jusqu'à ce que nous touchions le graphique de f au point $(x_0, f(x_0))$. Nous nous déplaçons

ensuite horizontalement pour rencontrer la ligne $y = x$ au point $(f(x_0), f(x_0))$. Ceci détermine

$f(x_0)$ sur l'axe des x . Pour trouver $f^2(x_0)$, nous nous déplaçons où nouveau verticalement

jusqu'à ce que nous trouvions le graphique de f au point $(f(x_0), f^2(x_0))$; puis nous nous déplaçons

horizontalement pour rencontrer la ligne $y = x$ au point $(f^2(x_0), f^2(x_0))$. En poursuivant ce processus, nous pouvons évaluer tous les points dans l'orbite de x_0 , à savoir l'ensemble $\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0), \dots\}$. qui s'appelle (Le diagramme de la toile d'araignée)

Si l'on utilise le langage des équations aux différences, alors dans les diagrammes Cobweb, l'axe des x est étiqueté $x_{(n)}$ et l'axe des y est étiqueté $x_{(n+1)}$.

Les points fixes (d'équilibre) peuvent être divisés en deux types : hyperbolique et non hyperbolique, on dit que x^* point fixe hyperbolique si $|f'(x)| \neq 1$, sinon il est non hyperbolique

Points fixes hyperboliques :

Théorème 1.2.1 [7]

On dit que x^* point fixe hyperbolique si $|f'(x)| \neq 1$, sinon il est non hyperbolique. Soit x^* un point fixe hyperbolique d'une application dérivable f en x^* . Les déclarations suivantes sont alors vraies :

1. Si $|f'(x^*)| < 1$, alors x^* est asymptotiquement stable.
2. Si $|f'(x^*)| > 1$, alors x^* est instable

Démonstration 1.2.1 Voir[[7]]

Points fixes non hyperboliques :

Les critères de stabilité des points fixes non hyperboliques sont plus complexes. Ils seront résumés dans les deux résultats suivants. premier traite le cas lorsque $f'(x^*) = 1$ et le second pour $f'(x^*) \neq 1$.

Théorème 1.2.2 [7]

Soit x^* un point fixe d'une application f telle que $f'(x^*) = 1$. Si $f'(x)$, $f''(x)$, et $f^{(3)}(x)$ sont continus en x^* , alors les affirmations suivantes sont vraies

1. Si $f''(x^*) \neq 0$, alors x^* est instable (semi stable)
2. Si $f''(x^*) = 0$ et $f^{(3)}(x^*) > 0$, alors x^* est instable.
3. Si $f''(x^*) = 0$ et $f^{(3)}(x^*) < 0$, alors x^* est asymptotiquement stable.

Démonstration 1.2.2 Voir[[7]]

Définition 1.2.2 [7]

La dérivée de Schwarzian, Sf , d'une fonction f est Défini par :

$$Sf(x) = \frac{f^{(3)}(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left[\frac{f''(x)}{f'(x)} \right]^2.$$

Et si $f'(x^*) = -1$ alors :

$$Sf(x^*) = -f^{(3)}(x^*) - \frac{3}{2} [f''(x)]^2 .$$

Théorème 1.2.3 [7]

Soit x^* un point fixe d'une application f telle que $f'(x^*) = -1$. Si $f'(x)$, $f''(x)$, et $f^{(3)}(x)$ sont continués en x^* , alors les affirmations suivantes sont vraies :

1. Si $Sf(x^*) < 0$, alors x^* est asymptotiquement stable.
2. Si $Sf(x^*) > 0$, alors x^* est instable.

Démonstration 1.2.3 Voir[[7]]

1.3 Méthodes d'approximation des points fixes

Le premier résultat sur la convergence d'une suite est une combinaison de deux terme succesifs de l'itération de Picard et a été obtenu par Krasnoselskii en 1955.

le schéma est le suivant :[3]

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + f(x_n)), n > 0.$$

Dans son article , il a démontré que si X est un convexe fermé borné d'un espace uniformément convexe et $f : X \rightarrow X$ est un opérateur non-expansive et compact c'est-à-dire (f est continue est $f(X)$ est relativement compact).

Alors la suite $(x_n)_n$ définie par le schéma précédant converge vers point fixe de f .[3]

Deux ans après Schaefer a fait une extension de résultat de Krasnoselskii avec un petit changement ,dans le Schéma ,il a remplacé la constante $\frac{1}{2}$ avec un paramètre $\lambda \in [0, 1]$, et le nouveau schéma est : [3]

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n + \lambda f(x_n), n > 0.$$

qu'est appelé itération de Krasnoselskii.

ce dernier est exactement l'itération de picard si $\lambda = 1$.

Le processus itératif de Mann à été introduit en 1953 , bien que le schéma itératif de Mann dans sa forme normale soit une généralisation de celui de Krasnoselskii .

En remplaçant le paramètre λ dans la formule par une suite $(\alpha_n)_n$ qui vérifie certaines conditions.

Le schéma est le suivant :[3]

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n f(x_n), n \in \mathbb{N}^*.$$

1.3.1 Méthode itérative de Picard

Théorème 1.3.1 [3]

soit (X, d) un espace métrique complet et $F : X \rightarrow X$ une application k -contractante c'est-à-dire :

$$d(F(x), F(y)) \leq kd(x, y) \text{ . avec } k \in [0, 1[$$

Alors :

— F admet unique point fixe x^* .

— La suite récurrente associée à itérée de Picard $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ définie par :

$$x_n = F(x_{n-1}) = F^n(x_0) \text{ , converge vers } x^* \text{ .}$$

— Les estimation d'erreur suivant sont équivalent :

$$(1) \dots d(x_n, x^*) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1) \text{ , } n = 1, 2, \dots \text{ .}$$

$$(2) \dots d(x_n, x^*) \leq \frac{k}{1-k} d(x_{n-1}, x_n) \text{ , } n = 1, 2, \dots \text{ .}$$

— Le taux de convergence donnée par :

$$d(x_n, x^*) \leq kd(x_{n-1}, x^*) \leq k^n d(x_0, x^*) \text{ , } n = 1, 2, \dots \text{ .}$$

Démonstration 1.3.1 Voir[[3]]

1.3.2 Méthode itérative de Mann

En 1953 , Mann a introduit un schéma itératif qui est une généralisation de celui de Krasnoselskii , bien qu'il fut introduit chronologiquement deux ans plus tôt que ce dernier.

Définition 1.3.1 [9]

Soit X un espace vectoriel, Y un sous espace convexe , $F : Y \rightarrow Y$ une application .
pour $x_0 \in Y$ et $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty} \subset [0, 1]$, la suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ définie par :

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n F(x_n), n = 0, 1, \dots$$

est appelée *itération de Mann* avec condition de α_n est :

- $\alpha_0 = 1$
- $0 \leq \alpha_n < 1, n \in \mathbb{N}^*$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n = +\infty$

Remarque 1.4 [3]

- (1) - A l'origine, l'itération de Mann était définie par une formulation matricielle .
 (2) - Si la suite $\alpha_n = \lambda$ (constante), alors le processus itératif de Mann est réduit à l'itération de Krasnoselskii.
 (3) - si on considère :

$$F_n = ((1 - \alpha_n)I + \alpha_n F).$$

Alors nous avons $Fix(F) = Fix(F_n)$, pour tout $\alpha_n \in]0, 1]$.

Opérateur de Zamfirescu

Définition 1.3.2 [2]

Soit (X, d) un espace métrique .l'opérateur $f : X \rightarrow X$ est appelée opérateur de Zamfirescu s'il

existe des nombres réels α, β, γ satisfaisant $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1, 0 < \gamma < \frac{1}{2}$ telle que pour tout

$x, y \in X$, l'une des condition suivantes est vérifiée :

- $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$.
- $d(f(x), f(y)) \leq \beta [d(x, f(x)) + d(y, f(y))]$.
- $d(f(x), f(y)) \leq \gamma [d(x, f(y)) + d(y, f(x))]$.

Théorème 1.3.2 [3]

Soit X un espace de Banach uniformément convexe, Y un sous ensemble fermé de X , et

$F : Y \rightarrow Y$ une application de Zamfirescu, puis l'itération de Mann $\{x_n\}$ est :

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n F(x_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

avec $\{\alpha_n\}$ satisfaisant les conditions suivantes :

- $\alpha_1 = 1$.
- $0 < \alpha_n < 1$, pour tout $n \geq 1$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(1 - \alpha_n) = +\infty$.

converge vers un unique point fixe de F .

Définition 1.3.3 (opérateur pseudo-contractive : [9])

Soit X un espace réel de Banach. L'application F de domaine $D(F)$ de X est dite pseudo-contractive :

Si pour tout $x, y \in D(F)$, il existe $j(x, y) \in J(x, y)$ telle que :

$$\langle (I - F)x - (I - F)y, j(x - y) \rangle \geq 0.$$

Où J est l'application de la dualité dans un espace normé.

1.3.3 Méthode itérative de Mann avec erreurs

L'idée de construire le schéma itérative de Mann avec erreur vient de pratiquement de calcul numérique .

Définition 1.3.4 [3]

Soit X un sous ensemble d'un espace normé linéaire Y , et soit $F : X \longrightarrow X$ une application , la suite $(x_n)_n$ dans Y définie par :

- $x_0 \in X$
- $x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n F(x_n) + u_n.$

Avec (α_n) vérifient 1.3.1, et (u_n) vérifie la condition suivant :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\| < \infty$$

avec $x_1 \in X$ point arbitraire ,et α_n vérifient :

- $0 \leq \alpha_n \leq 1, \forall n.$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0.$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty.$

Le schéma itératif de Mann à connue beaucoup de correction au modification :

- Schéma de Mann modifie.
- Schéma de Mann perturbé.

etc..

(d).soit \mathbb{K} un sous ensemble non vide convexe de \mathbb{E} et $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{E}$ est une application.

$\forall x_0 \in \mathbb{K}$,la suite itérative (x_n) est définie par :

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n f(x_n) + c_n u_n, n \in \mathbb{N}^*$$

avec $(a_n), (b_n), (c_n)$ des suite définies sur $[0, 1]$,et u_n vérifie 1.3.4 .

Ce schéma S'appelle itération de Mann avec erreur.

Variables aléatoires fortement mélangeantes (α -mélange)

Pour résoudre un problème mathématique on s'intéresse en premier lieu à l'existence et l'unicité de la solution (exacte).

Cette solution exacte est en général impossible à déterminer dans la pratique. Les méthodes numériques sont des outils principaux pour déterminer la solution approchée. Les méthodes itératives sont les plus utilisées que les méthodes directes. C'est quoi une méthode itérative ? c'est une suite itérative où d'abord il faut prendre un point de départ dans l'espace de solution puis calculer la première mesure en utilisant un algorithme bien précis puis revenir à la théorie suivie par la suite calculer la deuxième mesureetc. Mais le terme mesure est taché d'erreurs alors l'aspect aléatoire a son importance dans ce domaine.

C'est-à-dire les erreurs peuvent être des processus aléatoires ou des variables aléatoires la grande majorité des résultats de la théorie de probabilité sont valables uniquement pour les variables aléatoires indépendantes. Cette dernière ne trouve pas beaucoup d'application en pratique à vrai dire, si l'on regarde profondément les choses, la dépendance est un phénomène qu'on ne peut pas échapper.

C'est pour cette raison que, depuis quelques années la notion de dépendance a été un sujet d'intérêt et de préoccupation pour les probabilistes et les statisticiens, comme elle a été l'objet d'une intense activité de recherche. Plusieurs façons de contrôler la dépendance ont été introduites, parmi elles, on a l'association, la corrélation et le mélange.

Plusieurs façons de contrôle de dépendance ont été introduites, Dans notre travail nous nous intéressons particulièrement aux propriétés de mélange entre les processus aléatoire le mélange lui-même est présenté sous différents types.[8]

-le mélange fort (α -mélange),introduit par Rosemblat en (1956).

-le mélange faible (ϕ -mélange),introduit par Ibarginov en (1962).

-le mélange absolue (β -mélange),introduit par Kolmogonov et apparu dans livre de Volkoski et Rozanov .

-le mélange (ρ -mélange) introduit par Hirschfeld en (1935) et Gebelein en (1941).

-le mélange (ψ -mélange),introduit par Blum ,Hanson et koopmas .

qui sont définies comme suit :

Définition 2.0.1 [10][13]

soit \mathcal{A} et \mathcal{B} un sous- σ algèbre de $\mathcal{F}, L_p(\mathcal{A})$ un ensemble de toutes les variables aléatoires \mathcal{A} -mesurables avec p -ièmes moments,définissons les coefficients de mélange :

$$\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup_{A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}} |\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)|,$$

$$\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup_{X \in \mathcal{A}, Y \in \mathcal{B}} \frac{|\mathbb{E}XY - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)|}{\sqrt{\text{Var}X \text{Var}Y}},$$

$$\varphi(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup_{A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}, \mathbb{P}(A) > 0} |\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(B)|,$$

$$\psi(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup_{A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}, \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) > 0} \left| 1 - \frac{|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)|}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)} \right|,$$

$$\beta(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathbb{E}(t\text{Var}_{B \in \mathcal{B}} |\mathbb{P}(B|A) - \mathbb{P}(B)|), (t\text{Var} : \text{signifie variation total})$$

$$\lambda(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup_{X \in L_{\frac{1}{\alpha}}(\mathcal{A}), Y \in L_{\frac{1}{\beta}}(\mathcal{B})} \frac{|\mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y|}{\|X\|_{\frac{1}{\alpha}} \|Y\|_{\frac{1}{\beta}}}$$

dans cette partie Nous intéressons au mélange fort (α -mélange).

2.1 Variable aléatoire α -mélangeant

Définition 2.1.1 [14],[6]

Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) .

le coefficient de mélange fort ou l'alpha-mélange est donnée par :

$$\alpha(n) = \sup_k \sup\{ |P(A \cap B) - P(A)P(B)|, A \in \mathcal{F}_1^k(X), B \in \mathcal{F}_{k+n}^\infty(X), k \in \mathbb{N} \}$$

où $\mathcal{F}_i^k(X)$ désigne la tribu des événements engendrés par les $X_j, i \leq j \leq k$.

Définition 2.1.2 [10]

On dit que une famille $\{X_i, i \in \mathbb{N}^*\}$ est α -mélange si l'on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha(n) = 0$.

Proposition 2.1.1 (Billingsly)[14]

Soit $(X)_{n \geq 1}$ est une suite α -mélangeant, alors $(f(X_n))_{n \geq 1}$ est aussi α -mélangeante pour toute fonction mesurable f .

Démonstration 2.1.1 Voir[[14]]

2.1.1 Types de mélange fort

on peut définir deux types de mélange fort :

Définition 2.1.3 [13]

On dit que la famille $\{X_i, i \in \mathbb{N}^*\}$ est algébriquement α -mélangeante, s'il existe

deux constantes positives non nulles c et a telles que les coefficients de mélange vérifient :

$$\alpha(n) = cn^{-a}$$

Définition 2.1.4 [13]

S'ils existe deux constantes $c > 0$ et $t \in]0, 1[$ telles que les coefficients de mélange vérifient :

$$\alpha(n) = ct^n$$

on dit que la famille $\{X_i, i \in \mathbb{N}^*\}$ est géométriquement α -mélangeante.

Définition 2.1.5 (semi-norme)

Soit \mathbb{E} un \mathbb{K} -espace vectoriel, on appelle norme sur \mathbb{E} , toute application $\|\cdot\| : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui vérifie

les propriétés suivantes :

(i) $\forall x \in \mathbb{E} : \|x\| = 0 \iff x = 0_{\mathbb{E}}$.

(ii) $\forall x \in \mathbb{E}, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

(iii) $\forall x, y \in \mathbb{E} : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Si \mathbb{E} vérifie seulement (ii) et (iii) on dit que $\|\cdot\| : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une semi-norme.

Proposition 2.1.2 [14]

Supposons que Ω' est un espace muni d'une semi-norme 2.1.5, on a :

(i) $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est α -mélangeante $\implies (\|X_n\|)_{n \in \mathbb{Z}}$ est α -mélangeante .

(ii) si en plus $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est géométriquement α -mélangeante (respectivement algébriquement α -mélangeante) alors $(\|X_n\|)_{n \in \mathbb{Z}}$ est géométriquement α -mélangeante (respectivement arithmétiquement α -mélangeante) de même ordre.

2.1.2 Propriété de mélange fort

Proposition 2.1.3 [9],[15]

soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace probabilisé . $\forall \mathcal{A}$ et \mathcal{B} deux sous tribus de \mathcal{F} , on a alors :
le mélange fort vérifie :

- $0 \leq \alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq \frac{1}{4}$.
- $\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \frac{1}{4}$ si \mathcal{A} contient un événement d'une probabilité $\frac{1}{2}$.
- $\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = 0$ si \mathcal{A} no triviale.
- $\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq \alpha(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ telle que $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$, $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$.
- $\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$. si \mathcal{A}, \mathcal{B} sont indépendant.

Démonstration 2.1.2 Voir[[15]]

2.2 Types de convergence

Convergence

2.2.1 Convergence en probabilité

Définition 2.2.1 ,[13]

la suite (X_n) Converge en probabilité vers X si :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1$$

$$X_n \xrightarrow{P} X$$

Proposition 2.2.1 [13]

Si les variables aléatoire X_n sont deux à deux non covariées, de même loi, d'esperance μ de variance σ^2 alors :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} \mu(P)$$

Démonstration 2.2.1 [13]

2.2.2 Convergence presque complète

Pour étudier la convergence presque complète on peut utiliser les définitions suivantes :

Définition 2.2.2 [13],[2]

On dit que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque complète vers X si :

$$\forall \varepsilon > 0, \sum_{n=0}^{\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$$

En on note $X_n \xrightarrow{co, p} X$.

Définition 2.2.3 [13],[2]

On dit que la suite $X_n = O(Y_n)$ en co.p, s'il existe un $\varepsilon > 0$ vérifiant

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(|X_n| > \varepsilon Y_n) < \infty$$

2.2.3 Convergence en loi

Soit F_n la fonction de répartition de X_n et F celle de X

Définition 2.2.4 [13]

La suite (X_n) converge en loi vers X si pour tout X où f est continue,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(X) = F(X), X_n \rightarrow_L X$$

*propriété de la convergence en loi

-Si F est continue Alors : $X_n \rightarrow X$ en loi

-Si X_n et X sont des variables aléatoires à valeur dans \mathbb{N} . Alors $X_n \rightarrow X$ en loi seulement si $\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = k) = P(X = k)$.

-Soit a et b deux réels, Si $X_n \rightarrow X$ en loi Alors $aX_n + b$ converge en loi vers $aX + b$. On a cité [13]

Convergence presque sûre

Définition 2.2.5 [13],[2]

La suite (X_n) convergence presque sûrement vers X si :

$$P(w / \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(w) = X(w)) = 1$$

Théorème 2.2.1 (Limite centrale)[10],[13]

Si les variables aléatoires X_n sont mutuellement indépendante de même loi, d'esperence μ et d'écart-type σ différent de 0 alors

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right) \rightarrow X \text{ en loi}$$

où est une variable aléatoire de loi de laplace-Gauss centrée réduite.

Démonstration 2.2.2 [10],[13]

2.2.4 Convergence complète pour les suites α -mélangeantes

Pour la convergence complète des suites α -mélange, nous allons présenter quelques théorèmes importants :

Théorème 2.2.2 [10]

Soit $\frac{1}{2} < \alpha < 1, 2 < r < \infty, \frac{1}{\alpha} < p < r, \{X_n, n \geq 1\}$ une suite α -mélangeante strictement stationnaire de variable aléatoire avec $\mathbb{E}X_1 = 0, \mathbb{E}|X_1|^r < \infty$, supposons que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{\frac{1}{\theta}}(n) < \infty$ pour un certains

$$\theta > [2 + \frac{r}{r-p}] \cdot \frac{p\alpha}{p\alpha-1} \text{ Alors}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-2} \mathbb{P}\{\max_{1 \leq i \leq n} |S_i| \geq \varepsilon n^\alpha\} < \infty \dots\dots(2.2.2)$$

pour tout $\varepsilon > 0$,

Cependant, un contre exemple à la conclusion de (Hipp) a été donné par Berbe (1987) lorsque $r = \infty$, i.e dans le cas de X_1 délimité, Shao(1993) à prouvé le théorème suivant :

Démonstration 2.2.3 Voir[[10]]

Théorème 2.2.3 [10]

Soit $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1, \frac{1}{\alpha} \leq p < r < \infty, \{X_n, n \geq 1\}$ une suite α -mélange de variable aléatoire avec $\mathbb{E}X_n = 0, \sup_{n \geq 1} \|X_n\|_r < \infty$ supposons que :

$$\alpha(n) = O(n^{-r \frac{(p-1)}{r-p}} \log^{-\beta} n)$$

pour un certain $\beta > \frac{rp}{r-p}$, Alors (2.2.2) est vrai .

Démonstration 2.2.4 une conséquence immédiate du Théorème (2.2.3) avec $p = \alpha = 1$ est : Voir[[10]]

Corollaire 2.2.1 [10]

Soit $1 < r < \infty, \{X_n, n \geq 1\}$ une suite α -mélange de variable aléatoire avec $\mathbb{E}X_n = 0, \sup_{n \geq 1} \|X_n\|_r < \infty$, supposons que $\alpha(n) = O(\log^{-\beta} n)$ pour un certain $\beta > \frac{r}{r-1}$
Alors :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathbb{P}\{\max_{1 \leq i \leq n} |S_i| \geq \varepsilon n\} < \infty$$

pour tout $\varepsilon > 0$, En particulier ,on a $S_n/n \rightarrow 0$
la preuve du théorème (2.2.3) nécessitera les lemmes suivants.

Démonstration 2.2.5 Voir[[10]]

Lemme 2.2.1 [10]

Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite variable aléatoire avec $\mathbb{E}X_n = 0$, pour tout $n \geq 1$ Alors

$$P\{\max_{1 \leq i \leq n} |S_i| \geq x\} \leq 4x^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}|X_i|I(|X_i| > c) + 4x^a + 32^3 n c x^{-1} \alpha(k)$$

pour tout $a \geq 1, x \geq 1, c > 0$ et k un entier satisfaisant : $1 < k < \frac{x}{(64ac \log(x))}$
pour certains $s \geq 2$

$$(\sum_{i=1}^n \|X_i I(|X_i| \leq c)\|_s^2) \sum_{i=0}^k \alpha^{\frac{1-2}{s}}(i) \leq \frac{x^2}{(32^3 a \log x)}$$

Démonstration 2.2.6 Voir[[10]]

Lemme 2.2.2 [10]

Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite α -mélange avec $\mathbb{E}X_i = 0, \|X_i\|_r \leq D$, et $\alpha(i) \leq c_0 i^{-\tau} \log^{-\lambda} i$

pour i et pour un certain $1 < v < \infty, c_0 \geq 1, \tau \geq 0$, et un réel λ .

Alors il existe une constante positive finie k ne dépendant que de v, τ, λ et c_0 telle que :

$$P\{\max_{1 \leq i \leq n} |s_i| \geq x\} \leq k n \left(\frac{D}{x}\right)^{v(r+1)(v+\tau)} \log^{(v-1)(1-\lambda)(v+\tau)} \left(\frac{x}{D}\right)$$

$$x \geq k D n^{\frac{1}{2}} \log^{1+\frac{|\lambda|}{2}}(n)$$

Démonstration 2.2.7 Voir[[10]]

Application numérique

Le but de ce chapitre est de déterminer le point fixe approché et l'erreur relative par différents méthodes itératives, méthode itérative de Picard, méthode itérative de Mann, méthode itérative Mann avec erreur indépendante, méthode itérative Mann avec erreur α -mélangeante, et de comparer entre eux, pour ce la on a utilisé MATLAB.

Nous allons prendre un exemple dans $I \in \mathbb{R}$ qui vérifie :

- f est stable sur I .
- f est contractante sur I .
- f admet un unique point fixe dans I .

Exemple 3.1 *Considérons la fonction*

$$\begin{aligned} f : I = [0, 1] \subset \mathbb{R} &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longrightarrow f(x) = 1 - \frac{1}{4}x^2 \end{aligned}$$

-Stabilité de f :

$$\text{On a } 0 \leq x \leq 1 \implies 0 \leq x^2 \leq 1 \implies 0 \leq \frac{1}{4}x^2 \leq \frac{1}{4} \implies \frac{-1}{4} \leq \frac{-1}{4}x^2 \leq 0$$

$$\implies \frac{3}{4} \leq 1 - \frac{1}{4}x^2 \leq 1$$

D'où $\forall x \in [0, 1], f(x) \in [0, 1]$, alors f est stable .

- La contraction de f :

$$\text{On a } \forall x, y \in [0, 1], |f(x) - f(y)| = |1 - \frac{1}{4}x^2 - 1 + \frac{1}{4}y^2| = |\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}x^2| \leq \frac{1}{4}|x + y||x - y|$$

$$\text{comme } x, y \in [0, 1] \text{ On obtiens } |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$$

Alors f est $\frac{1}{2}$ -contractante .

- Point fixe de f :

pour trouver le point fixe de f il suffit de résoudre l'équation

$$1 - \frac{1}{4}x^2 = x \dots\dots (1)$$

Alors $1 - \frac{1}{4}x^2 = x$, **c'est-à-dire**, $\frac{1}{4}x^2 + x - 1 = 0$,est un polynôme de deuxième degré

$\Delta = 2 > 0$, alors (1) admet deux solutions x_1, x_2 tell que

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = -2 - 2\sqrt{2} = -4,8284427125 \notin [0, 1].$$

$$x_2 = \frac{-1+\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = -2 + 2\sqrt{2} = 0,828427124 \in [0, 1].$$

D'où f admet unique point fixe $x^* = x_2$ sur $[0, 1]$

3.1 Les méthodes numérique :

3.1.1 Méthode de picard :

Cette méthode consiste , à partir d'un point x_0 de $I = [0, 1]$,à calculer les itérées x_n par la formule de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$.

D'après les hypothèse qu'on a vérifie (stabilité,contraction) , et d'après le principe de contraction de Banach cette suite converger vers un unique point fixe qui vérifie $f(x) = x$.

1- Etant donné x_0 de $[0, 1]$, une valeur initial,et un ε le test d'arrêt .

2- Calculer $x_{n+1} = f(x_n)$.

3- Si $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$, est test d'arrêt :

- convergence atteinte.

- écrire la solution x_{n+1} .

- arrêt.

4- Sinon retour à l'étape 2.

Algorithme 3.1.1 (*Algorithme de picard*)

```
fonction[X, iter, Err - rela] =picard(x0, eps);
```

```
syms x;
```

```
f = 1 - 0.25 * x^2;
```

```
D = [0 : 0.01 : 1];
```

```
for i = 1 : length(D)
```

```
F(i) = double(subs(f, {x}, {D(i)}));
```

```
end

X(1) = x0;

XX = 0.828427124;

X(2) = double(subs(f, {x}, {X(1)}));

iter = 1;

Err = abs(X(2) - X(1));

Err - rela = abs(X(2) - XX)/abs(XX);

i = 3;

while Err > eps

X(i) = double(subs(f, {x}, {X(i - 1)}));

Err = abs(X(i) - X(i - 1));

Err - rela = abs(X(i) - XX)/abs(XX);

i = i + 1;

iter = iter + 1

end

for j = 1 : length(X)

FF(j) = double(subs(f, {x}, {X(j)}));

end

plot(D, F, D, D, FF, 'r*')
```

Résultat numérique et graphique :

pour une solution initiale $x_0 = 0$, et une précision $eps = 0,001$

On obtient les résultats du tableau suivant :

i	x(i)	Err-rela
0	0	0,2071
1	1	0
4	0,8154	0,0158
7	0,8293	0,0011
9	0,8286	0,0002

Tabl1 :résultat de l'algorithme de picard

Le schéma d'une suite de picard est présenté dans la figure suivant :

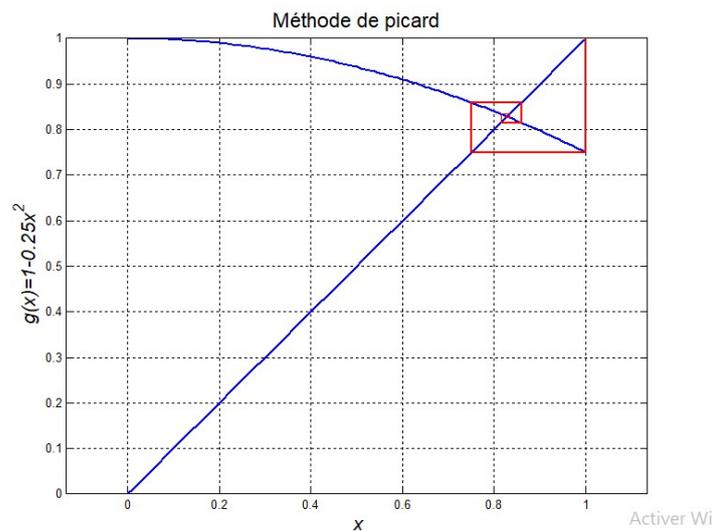


FIGURE 3.1 – Suite de picard

3.1.2 Méthode de Mann :

Cette méthode consiste, à partir d'un point x_1 (point initial), à calculer les itérées x_n par la

formule de récurrence

$$x_{n+1} = \left(1 - \frac{a}{n}\right)x_n + \frac{a}{n}f(x_n).$$

Telle que a vérifie la condition :

$$(0 < a(1 - k) < 1)$$

Et k est le coefficient de contraction de f

Cette suite d'après les hypothèse que on a vérifie (stabilité, contraction) et le théorème de Banach est assure l'existence et l'unicité du point fixe .

Etape 1- Etant donné $x_1 \in X$ point initial et a qui vérifie les conditions 3.1.2 et choi de (ε) .

Etape 2 - calculer $x_{n+1} = \left(1 - \frac{a}{n}\right)x_n + \frac{a}{n}f(x_n)$.

Etape 3- test d'arrêt $|x_{n+1} - x_n|$,si elle est $< eps$ alors :

- Convergence atteint

- écrire la solution

- arrêt

Etape 4- Sinon retour à l'étape.

Algorithme 3.1.2 (*Algorithme de Mann*)

fonction[$X, iter, Err - rela$] = *Mann*(x_1, eps, a) ;

syms x ;

$f = 1 - 0.25 * x^2$;

$D = [0 : 0.01 : 1]$;

for $i = 1 : length(D)$

```
 $F(i) = \text{double}(\text{subs}(f, \{x\}, \{D(i)\}));$   
  
end  
  
 $X(1) = x_1;$   
  
 $XX = 0.828427124;$   
  
 $X(2) = ((1 - a)X(1)) + a(\text{double}(\text{subs}(f, \{x\}, \{X(1)\})));$   
  
 $iter = 1;$   
  
 $Err = \text{abs}(X(2) - X(1));$   
  
 $Err - rela = \text{abs}(X(2) - XX)/\text{abs}(XX);$   
  
 $i = 3;$   
  
while  $Err > eps$   
  
 $X(i) = (1 - \frac{a}{i-1})X(i-1) + (\frac{a}{i-1})(\text{double}(\text{subs}(f, \{x\}, \{X(i-1)\})));$   
  
 $Err = \text{abs}(X(i) - X(i-1));$   
  
 $Err - rela = \text{abs}(X(i) - XX)/\text{abs}(XX);$   
  
 $i = i + 1;$   
  
 $iter = iter + 1$   
  
end  
  
for  $j = 1 : \text{length}(X)$   
  
 $FF(j) = \text{double}(\text{subs}(f, \{x\}, \{X(j)\}));$   
  
end  
  
 $\text{plot}(D, F, D, D, FF, 'r*')$ 
```

Résultat numérique et graphique de l'algorithme de Mann :

-Pour une solution initial x_0

-Et pour une précision $\varepsilon = 10^{-3}$

-Et le constante $a = 1.25$ on obtient le résultats du tableau suivant :

Résultats de ce programme :

i	x(i)	Err-rela
1	0	0,5089
2	1,25	0
3	0,8496	0,0256
4	0,8333	0,0058
5	0,8315	0,0038
6	0.8306	0,0027

Tabl2 :résultat de l'algorithme de Mann

Le schéma d'une suite de Mann est présenté dans la figure suivant :

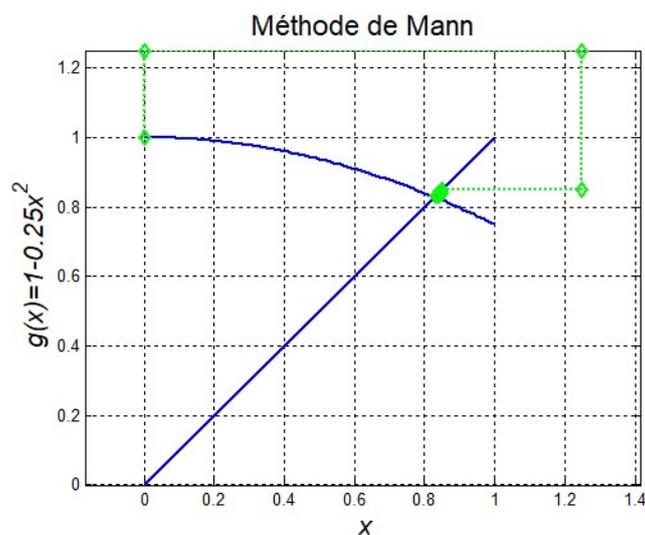


FIGURE 3.2 – Suite de Mann

3.1.3 Méthode de Mann avec erreurs :

La suite récurrence de cette méthode qui calcule les itérés x_n est :

$$x_{n+1} = \left(1 - \frac{a}{n}\right)x_n + \frac{a}{n}f(x_n) + \frac{a}{n^2}R(n)$$

avec $R(n)$ c'est l'erreur aléatoire centré réduit $\sim \mathcal{N}(0, 1)$ (la loi normale)

Et a c'est la même constante que on a choisi dans la méthode de Mann son erreur

Le point initial aussi x_0

Algorithme 3.1.3 *Algorithme de Mann avec erreurs*

```
function[iter, X, Err - rela] = Mannrrr11(x1, eps, a)
```

```
syms x
```

```
f = 1 - 0.25 * x^2;
```

```
D = [0 : 0.01 : 1];
```

```
for i = 1 : length(D)
```

```
F(i) = double(subs(f, {x}, D(i)));
```

```
end
```

```
R = randn(100000, 1);
```

```
X(1) = x1;
```

```
XX = 0.828427124;
```

```
X(2) = ((1 - a) * X(1)) + (a * double(subs(f, x, X(1)))) + (a * R(1));
```

```
iter = 1;
```

```
Err = abs(X(2) - X(1));
```

```

Err,rela = (abs(X(2) - XX))/(abs(XX));

i = 3;

while Err > eps

    X(i) = ((1 - (a/(i - 1))) * X(i - 1)) + (a/(i - 1)) * (double(subs(f, x, X(i - 1)))) + (a/((i - 1)^2)) * R(i);

    Err = abs(X(i) - X(i - 1));

    Err,rela(i) = (abs(X(i) - XX))/(abs(XX));

    i = i + 1;

    iter = iter + 1;

end

for j = 1 : length(X)

    FF(j) = double(subs(f, x, X(j)));

end

plot(D, F, D, D, X, FF, '+' )

```

dans le chois de $x1 = 0$, $eps = 0,001$, $a = 1,25$

Résultats de ce programme :

i	x(i)	Err-rela
1	1,1233	0,3559
2	1,1282	0,3618
4	1,0463	0,2629
6	0,8961	0,0816
10	0,8238	0,0055

Tabl3 :résultat de l'algorithme de Mann avec erreurs

Le schéma d'une suite de Mann avec erreur est présenté dans la figure suivant :

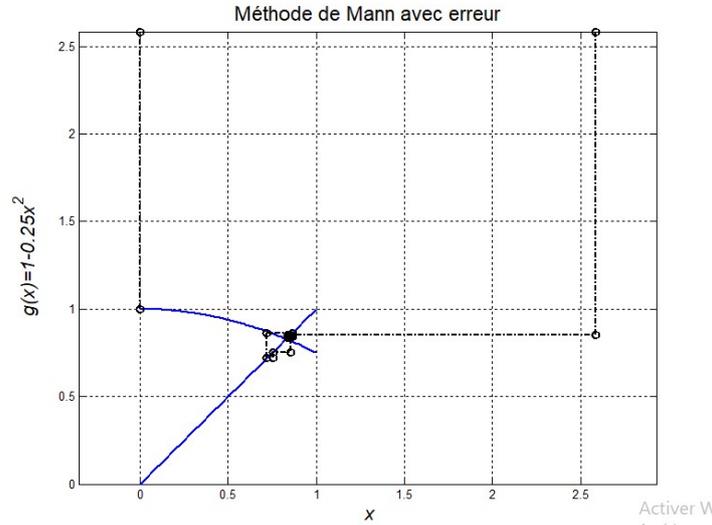


FIGURE 3.3 – Suite de Mann avec erreur

3.1.4 Méthode de Mann avec erreurs α -mélangeant :

Suite récurrence de cette méthode qui calcul les itéré x_n est :

$$x_{n+1} = \left(1 - \frac{a}{n}\right)x_n + \frac{a}{n}[f(x_n) + \frac{1}{n}\xi_n]$$

Remarque : n'est pas toujours aisé de calculer les coefficients du mélange dans la suite des erreurs aléatoires ξ_i une façon de caractériser une α -mélangeante est de considérer un modèle auto-régressif d'ordre 1 :

$$\xi_{i+1} = \varphi\xi_i + g_i, \xi_0 = 0$$

telle que :

- φ est une constante vérifiant $|\varphi| < 1$

$$-g_1 = \sqrt{-2\ln(u_1)}\cos(2\pi u_2)$$

$$-g_2 = \sqrt{-2\ln(u_1)}\sin(2\pi u_2)$$

Cette dernière s'appelle méthode de Box Muller,

Méthode Box-Muller [4]

La méthode de Box-Muller (1958) consiste à générer des paires de nombres aléatoires à distribution normale centrée réduite de nombres aléatoires de loi uniforme .

La transformation prend deux formes :

- la forme (simple) transforme des coordonnées polaires uniformément distribuées en des coordonnées cartésiennes normalement distribuées.

- la forme polaire transforme des coordonnées cartésiennes uniformément distribuées dans le cercle unité en des coordonnées normalement distribuées

Transformation de Box-Muller

Soient u_1 et u_2 deux variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées dans $]0, 1[$
Soient

$$g_1 = R \cos(\theta) = \sqrt{-2 \ln(u_1)} \cos(2\pi u_2)$$

et

$$g_2 = R \sin(\theta) = \sqrt{-2 \ln(u_1)} \sin(2\pi u_2)$$

g_1 , g_2 sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi normal centrée réduite.

Algorithme 3.1.4 Algorithme de Mann avec erreur α -mélange

clearall

phi = 0.2;

a = 1.25;

x(1) = 0;

xx = 0.828427124;

*ksi*0 = 0;

u = rand(2, 1);

*g*0 = (sqrt(-2 * log(u(1, 1)))) * cos(2 * pi * u(2, 1));

g(1) = (sqrt(-2 * log(u(1, 1)))) * sin(2 * pi * u(2, 1));

ksi(1) = *phi* * *ksi*0 + *g*0;

f(1) = 1 - (0.25 * *x*(1).^2);

x(2) = *x*(1) * (1 - *a*) + (*a*) * (*f*(1) + *ksi*(1));

ksi(2) = *phi* * *ksi*(1) + *g*(1);

Err,ela = abs(*x*(1) - *xx*)/abs(*xx*)

```
Errr,ela = abs(x(2) - xx)./abs(xx)

i = 2; j = 1

Ep = 10.(-3)

while abs(x(i) - x(i - 1)) > Ep

    f(i) = 1 - (0.25. * x(i).2);

    x(i + 1) = x(i). * (1 - a./i) + (a./i). * (f(i) + ksi(i)./i)

    Errr,ela = abs(x(i) - xx)./abs(xx)

    if mod(i, 2) == 0

        u = rand(2, 1);

        r = sqrt(-2. * log(u(1, 1)));

        teta = 2. * pi. * u(2, 1);

        n = r. * cos(teta);

        m = r. * sin(teta);

        g(i) = n;

        g(i + 1) = m;

    end

    ksi(i + 1) = phi. * ksi(i) + g(i);

    if mod(i, 1000) == 0

        X(j) = x(i)

        ER(j) = abs(x(i) - x(i - 1));
```

$j = j + 1$ *end* $i = i + 1$ *end* $i = i - 1;$

les résultat de cette algorithme est :

i	x(i)	Err-rela
1	0,3223	0,6109
2	0,8765	0,480
4	0,7641	0,0643
6	0,8545	0,0,0260
9	0,8294	0,0011

Tabl4 :résultat de l'algorithme de Mann avec erreurs α -mélangeants

le schéma de cette méthode dans le choix de $a = 1.25, x_1 = 0$ et $\varphi = 0.2$

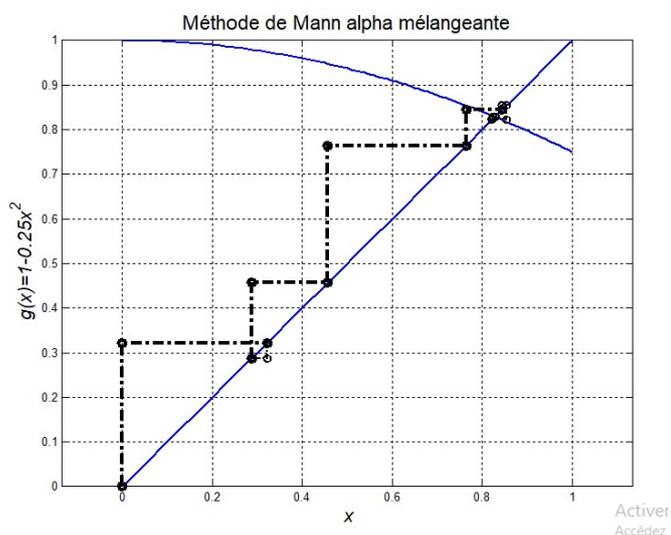


FIGURE 3.4 – Suite de Mann avec erreurs α -mélangeants

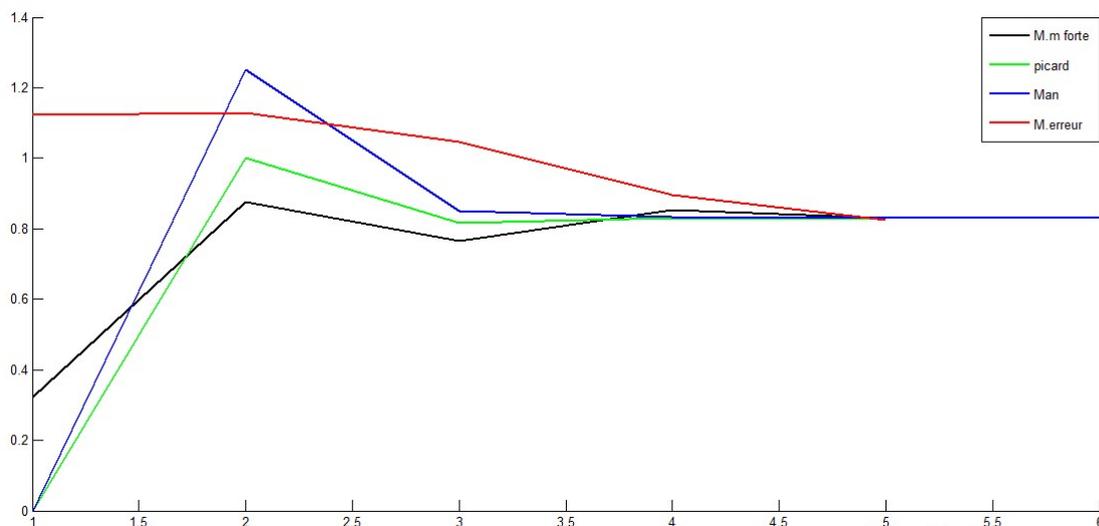


FIGURE 3.5 – Graphe des itérés de ces méthodes

Remarque 3.1 • *Le schéma de Picard converge vers x^* avec 9 itéré et une précision de 0,0002.*

• *Le schéma de Mann converge vers x^* avec 6 itéré et une précision de 0,0027.*

• *Le schéma de Mann avec erreur indépendant converge vers x^* avec 10 itéré et une précision de 0,0055.*

• *Le schéma de Mann avec erreur α -mélangeant converge vers x^* avec 9 itéré et une précision de 0,0011.*

conclusion :

D'après cette étude et cette remarque on peut conclure que :

Le schéma itératif de picard converge mieux que Mann avec une grand précision, mais Le schéma de Mann converge en moins d'itérations que picard donc si on comparais les deux par rapport ou itérations alors Mann converge avant Picard vers le point fixe, si par rapport à la précision c'est le contraire .

Pour les trois schéma itératifs de Mann on constate que le schéma itératif de Mann α -mélangeant est le meilleur coté précision que les deux autre(Mann, Mann avec erreur indépendant).

Conclusion générale

Ce mémoire a été consacrée à l'étude et à la recherche de point fixe par des méthode itérative, méthode itérative de Picard, Méthode itérative de Mann, méthode itérative de Mann avec erreur indépendant, méthode itérative de Mann avec erreur aléatoire fortement mélangeant. pour ce faire nous avons construit des algorithmes qu'il s'appelles schéma itératif qu'il converge vers le point fixe .nous avons terminer le travail par un exemple d'aplication dans \mathbb{R} , nous avons considéré une application contractante, stable, et admet un unique point fixe.

Nous avons d'abord jugé utile de faire un bref rappel sur les principaux outils et théorèmes de la théorie du point fixe .nous avons présenté quelques principaux méthodes itératives et leur schéma (Picard, Mann, Mann avec erreur indépendant, Mann avec erreur aléatoire fortement mélangeant) dédiés à l'approximation du point fixe d'une application contractante, stable sur domaine de f que on a choisi.

Nous avons introduit, dans le second chapitre la notion de variable aléatoire mélangeant en particulier variable aléatoire fortement mélangeant et leur type, ainsi quelque types de convergence.

Le dernier chapitre résume l'essentielle des résultats obtenus dans ce mémoire. nous avons établi un exemple d'une application contractante, stable, dans un intervalle de \mathbb{R} , nous avons posé les hypothèse qui assurent l'existance et l'unicité du point fixe recherché , d'une part, et la convergence des schémas itératif des méthodes présidentes vers ce point fixe, d'autre part.

Enfin, nous attirons l'attention sur le fait que les résultats obtenus dans ce mémoire ont été principalement établis dans le cas de la recherche des points fixe d'une application réelle, il serait alors intéressant d'étendre l'application de notre schémas à une plus large d'application .en peut faire cette étude par d'autre type de mélange ,le β -mélange, par exemple.

Bibliographie

- [1] Ravi P. Agarwal, Maria Meehan, and Donal O'Regan, *Fixed point theory and applications*, Cambridge tracts in mathematics, no. 141, Cambridge University Press, Cambridge, UK ; New York, N.Y., USA, 2001, OCLC : ocm46783051.
- [2] Bahia BARACHE, *Inégalités exponentielles pour le processus itératif de Mann avec des erreurs aléatoires*, Thèse, université A.MIRA-BEJAIA, December 2017.
- [3] Vasile Berinde, *Iterative approximation of fixed points*, 2nd rev. and enl. ed ed., Lecture notes in mathematics, no. 1912, Springer, Berlin ; New York, 2007, OCLC : ocn137248687.
- [4] G. E. P. Box and Mervin E. Muller, *A Note on the Generation of Random Normal Deviates*, The Annals of Mathematical Statistics **29** (1958), no. 2, 610–611 (en).
- [5] N. Chand and P. Eyre, *Classification and biological distribution of histamine receptor sub-types*, Agents and Actions **5** (1975), no. 4, 277–295 (eng).
- [6] Luc Devroye, *Non-Uniform Random Variate Generation.*, Springer, New York, NY, 2013 (English), OCLC : 1076256775.
- [7] Saber Elaydi, *Discrete Chaos, Second Edition : With Applications in Science and Engineering.*, CRC Press, Hoboken, 2007 (English), OCLC : 908079242.
- [8] H. F. Gilbert and M. H. O'Leary, *Modification of arginine and lysine in proteins with 2,4-pentanedione*, Biochemistry **14** (1975), no. 23, 5194–5199 (eng).
- [9] Hassina,ARROUDJ, *étude de points fixe dans un cadre aléatoire mélangeant*, Thèse, université A.MIRA-BEJAIA, December 2017.
- [10] Cheng-yen Lin and Chuanrong Lu, *Limit theory for mixing dependent random variables*, Mathematics and its application, no. v. 378, Science Press ; Kluwer Academic Publishers, New York : Dordrecht ; Boston, 1996.
- [11] Matthieu Cramers, *Théorèmes de Point Fixe et leurs Applications en Sciences Economiques*, thèse, Université catholique de Louvain, 2015.
- [12] P. McPhie, *The origin of the alkaline inactivation of pepsinogen*, Biochemistry **14** (1975), no. 24, 5253–5256 (eng).
- [13] Amina Mousli, *Sur les inégalités exponentielles dans l'estimation fonctionnelle*, Thesis, 2015, Accepted : 2016-01-14T08 :21 :00Z.

-
- [14] Emmanuel Rio, *Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants*, Mathématiques & applications, no. 31, Springer, Berlin New York Paris [etc.], 2000 (fre).
- [15] Samir RAHMANI, *Estimation de paramètres des processus autorégressifs*, Thèse, A.MIRA-BEJAIA, bejaia, March 2012.

Résumé

Cette étude est consacré à la recherche d'un point fixe d'une application dans \mathbb{R} qui vérifie les condition de contraction et la stabilité sur un intervalle de \mathbb{R} , pour ce faire, nous avons utilisé quatre méthodes itérative (Picard, Mann, Mann avec erreur indépendant, mann avec erreur aléatoire fortement mélangeant), et on fait la comparaison entre ces méthode, enfin on a présenté les résultat de ces méthodes dans des schéma graphique et des tableaux qui présent le point fixe cherché et l'erreur relative chacun de ces approximations.