

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique



Université A/Mira de Bejaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN DE CYCLE

En vue de l'obtention du diplôme de Master en
Mathématiques

Option
Analyse Mathématique

Thème

Existence de solution pseudo presque-périodique avec poids d'un
modèle de réseau de neurones de type BAM avec retards mixtes

Présenté par :

IDIR Lilia **ABDOUNE Lamia**

Soutenu le 03/07/2022 devant le jury composé de :

Présidente	Dr. BAICHE Leila	U. A/Mira Bejaia.
Encadreur	Dr. M'HAMDI Mohammed Salah	U. A/Mira Bejaia.
Examinatrice	Pr. BOULAHIA-TALBI Fatiha	U. A/Mira Bejaia.

Béjaia, Juillet 2022.

※ *Remerciements* ※

Nous remercions **Allah**, le tout puissant de nous avoir donné la foi et la force qui nous a guidé jusqu'à la réalisation et l'aboutissement de ce mémoire.

Nous avons l'honneur et le plaisir d'exprimer notre profonde gratitude et nos sincères remerciements à Monsieur **M'HAMDI Mohammed Salah** pour la qualité son encadrement, sa disponibilité et ses précieux conseils et son aide à la réalisation de ce présent travail.

Nous remercions Madame **BAICHE.L** pour l'honneur qu'elle nous fait en acceptant de présider le jury de soutenance et d'évaluer ce travail.

Nos remerciements vont également à Madame **BOULAHIA-TALBI.F** pour l'honneur qu'elle nous fait d'examiner le mémoire.

Nos remerciements vont aussi pour tous les enseignants qui ont contribué à notre formation de la première année à ce jour.

Enfin, nous remercions tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce travail de près ou de loin.

✧ *Dédicaces* ✧

Je dédie ce modeste travail :
À mes **chers parents**.
À mes **chers frère et soeurs** .
À mes **chers amis**.
À mes **chers enseignants** .

Lilia IDIR

✧ *Dédicaces* ✧

Je dédie ce modeste travail :

À ma **très chère mère** qu'Allah la garde à moi, à qui j'exprime ma reconnaissance et ma haute considération pour tous ses efforts et ses sacrifices, qui ont fait de moi la personne que je suis aujourd'hui. Et pour son soutien et ses prières tout au long parcours de mes études, mes simples mots sont faibles devant l'amour et la tendresse avec qu'elle a rempli ma vie..

Merci pour ton éducation et les principes que tu m'a appris,

À mes **chers grands-parents maternel**, pour leurs encouragements permanents, leurs soutiens et leurs amours,

A mon oncle maternel : **Chabane** qui m'a vraiment soutenu dans les moments difficiles et m'a encouragé tout au long de mes études. , il était comme un père pour moi

À mon très cher fiancé **Lounis**, pour ses encouragements, son soutien et sa présence à mes côtés.

Ainsi qu'à toute sa famille.

À mes oncles maternels, **Abd-Hamid, Zahir, Laid, Abd-Karim** et **Bilal**, à leurs **épouses** et leurs **enfants**, pour leurs soutiens et encouragements,

À ma tante maternelle, **Nadia** , son **époux** et ses **enfants**,

À tous ceux qui m'aiment.

Lamia ABDOUNE

Table des matières

Table des matières	1
Table des figures	3
Liste des tableaux	4
Notations, symboles et acronymes	5
Introduction générale	6
1 Préliminaires	8
1.1 Réseaux de neurones et modélisation mathématique	8
1.1.1 Réseau de neurones : neurone biologique et neurone artificiel	8
1.1.2 Modélisation mathématique des réseaux de neurones	11
1.2 Quelques réseaux de neurones récurrents célèbres	12
1.2.1 Réseau de neurones de Hopfield	12
1.2.2 Réseau de neurones de type Hopfield statique	13
1.2.3 Réseau de neurones de type Hopfield d'ordre élevé	13
1.2.4 Réseau de neurones BAM (Hopfield/Hopfield d'ordre élevé)	13
1.2.5 Réseau de neurones de type MAM	14
1.2.6 Réseau de neurones de type MAM statique	15
1.2.7 Réseau de neurones de type Shunting	15
1.3 Réseaux de neurones récurrents à retards	15
1.3.1 Équations différentielles à retards	15
1.3.2 Classification des équations différentielles à retard	16
1.3.3 RNNs retardés : différents types de retards	17
1.3.4 RNNs retardés : cas BAMNNs avec différents retards	19
1.4 Périodicité	21
1.4.1 Fonctions périodiques "P"	21
1.4.2 Fonctions presque-périodiques "AP"	21
1.4.3 Fonctions pseudo presque-périodiques "PAP"	26
1.4.4 Fonctions pseudo presque-périodiques avec poids "WPAP"	27
2 Existence de la solution pseudo presque-périodique avec poids d'un modèle de BAMNN avec retard mixte	31
2.1 Etude mathématique dans les réseaux de neurones récurrents	31
2.2 Quelques travaux sur la périodicité dans les modèles de réseaux de neurones de type BAM	31
2.3 Présentation du BAM avec retard mixte ainsi que les hypothèses	32
2.4 Existence de la solution WPAP	33
2.5 Conclusion	45

3 Application et simulation	46
3.1 Utile de simulation : Simulink de matlab	46
3.1.1 Présentation de Simulink de Matlab	46
3.1.2 Construction d'un diagramme Simulink / Exemples	46
3.2 Application numérique sous Simulink d'un BAM	49
Conclusion générale	52
Annexe	53
Références	55
Résumé	60
Abstract	60

Table des figures

1	Schéma simplifié d'un neurone biologique	9
2	Modele de base d'un neurone formel	10
3	Différents types de fonctions d'activation pour le neurone formel	10
4	Réseau non bouclé	11
5	Réseau bouclé	11
6	Comportement de la fonction périodique de f_1 sur $[3, 25]$	21
7	Comportement de la fonction périodique de f_1 sur $[0, 300]$	21
8	Comportement de la fonction presque-périodique f_2 sur $[3, 25]$	25
9	Comportement de la fonction presque-périodique f_2 sur $[0, 300]$	25
10	Comportement de la fonction pseudo presque-périodique f_3 sur $[3, 25]$	27
11	Comportement de la fonction pseudo presque-périodique f_3 sur $[0, 300]$	27
12	Comportement de la fonction pseudo presque-périodique avec poids f_4 sur $[3, 25]$	29
13	Comportement de la fonction pseudo presque-périodique avec poids f_4 sur $[0; 300]$	29
14	Libraires de Simulink	47
15	Source de Simulink	47
16	Exemple de diagramme Simulink	48
17	Exemple d'application de simulink dans un système du 1er ordre	48
18	Les trajectoires de x_1, x_2 sur l'exemple 1 de [2]	51
19	Les trajectoires de y_1, y_2 sur l'exemple 1 de [2]	51
20	Les trajectoires de x_1, x_2 après simulation sur l'exemple 1 de [2]	51
21	Les trajectoires de y_1, y_2 après simulation sur l'exemple 1 de [2]	51
22	Les trajectoires de x, y après simulation sur l'exemple 1 de [2]	51

Liste des tableaux

1	Périodicité dans les réseaux de neurones BAM (travaux récents)	32
---	--------------------------------------------------------------------------	----

Notations, symboles et acronymes

\mathbb{N} : indique l'ensemble des entiers naturels

\mathbb{Z} : indique l'ensemble des entiers relatifs

\mathbb{R} : indique l'ensemble des réels.

\mathbb{R}^+ : indique l'ensemble des réels positifs ou nuls.

\mathbb{R}^n : indique l'ensemble des nombres réels de dimension n

\mathbb{E} : un sous ensemble de \mathbb{R}

$BC(\mathbb{R}, \mathbb{E})$: espace des fonctions continues bornées définies sur \mathbb{R} dans \mathbb{E}

P : périodique

AP : presque périodique (almost-periodic)

PAP : pseudo presque-périodique (pseudo almost-periodic)

$WPAP$: pseudo-presque-périodique avec poids

ρ : poids

$PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$: L'espace des fonctions ergodiques

$PAP_0(\mathbb{E}, \rho)$: espace des fonctions ergodique avec poids

$\|\cdot\|_\infty$: La norme infinie

\bigoplus : somme directe

τ : le retard

$i = \overline{1, \dots, n}$: i allons de 1 jusqu'à n avec un pas=1

NN : (neural network) réseau de neurones

RNN : (recurrent neural network) réseau de neurones récurrents

HNN : (Hopfield neural network) réseau de neurones de type Hopfield

$HONN$: (high order Hopfield neural network) réseau de neurones de type Hopfield d'ordre élevé

BAM : (bidirectional associative memory) mémoire associative bidirectionnelle

MAM : (multidirectional associative memory) mémoire associative multidirectionnelle

\mathcal{M}, \mathcal{N} les tribu

L^P : espace de Lebegue

$L^1_{loc}(\mathbb{R})$: l'espace de toutes les fonctions localement intégrables sur \mathbb{R}

Introduction générale

De nombreux phénomènes biologiques, écologique et épidémiologiques sont modéliser par des équations différentielles. On cite à titre exemples, l'étude du mouvement de corps élastiques (tiges, ressorts, cordes vibrantes), transmission de maladies infectieuses, modèles de la dynamique population, la dynamique des systèmes de finance et on trouve aussi, les réseaux de neurones qui connaissent depuis quelques années un succès croissant dans divers domaines des sciences de l'ingénieur, la physique, la médecine, et celui des mathématiques, n'échappe pas à cette règle. L'origine des réseaux de neurones vient de l'essai de la **modélisation mathématique du cerveau humain**.

Un réseau de neurones artificiel en termes simples est un modèle de calcul d'inspiration biologique, qui consiste en des noeuds "appelés neurones" et des connexions entre eux avec des coefficients "poids". Mathématiquement, un réseau de neurones artificiels est généralement décrit par un système d'équations différentielles "en temps continu" ou d'équations de différence "en temps discret". Pour chaque neurone, la structure simple aboutit à une équation mathématique simple. Cependant, lorsque de nombreux neurones simples sont connectés pour former un réseau de neurones, ce qui aboutit à un système d'équations différentielles, l'ensemble du réseau pourrait avoir une dynamique très riche et admettre ainsi diverses applications pour les tâches de classifications, de mémoires associatives, de calculs parallèles et de leurs capacité à résoudre des problèmes d'optimisation difficiles. Parmi ces réseaux de neurones on trouve la famille des réseaux de neurones récurrents (RNN, recurrent neural network). Comme modèles de réseaux de neurones récurrents populaires on peut citer : le réseau de neurones de Hopfield (HNN), le réseau de neurones de Hopfield d'ordre élevé (HOHNN) et le réseau de neurones à mémoire associative bidirectionnelle à deux couches (BAMNNs)[21, 68]. Étant donné que les vitesses de transmission des signaux dans le réseau sont finies, des retards existent dans le réseau de neurones et doivent donc être intégrés. Plus de détails sur l'introduction du retard dans les équations des modèles de réseaux de neurones peuvent être trouvés dans la partie RNNs à retard du chapitre préliminaire.

De nombreux auteurs ont étudié les caractéristiques essentielles des différents types de réseaux de neurones retardés [16, 20, 29], telles que les propriétés qualitatives, la périodicité, la presque-périodicité, la pseudo presque-périodicité ou encore plus générale la pseudo presque-périodicité avec poids. De plus en plus, la solution périodique ou ces généralisations des réseaux de neurones est devenue un sujet de recherche très important. Les informations détaillées sur les différents types de réseaux de neurones retardés et les fonctions périodiques "P", presque périodiques "AP", pseudo presque-périodiques "PAP" et pseudo presque-périodiques avec poids "WPAP" seront données, dans le Chapitre préliminaire.

Ce mémoire est structuré en trois chapitres, le premier chapitre est consacré aux rappels de quelques notions préliminaires, où on a collecté certain définitions concernant le passage d'un neurone biologique vers un neurone formel, de plus la modélisation mathématiques des réseaux de neurones avec ou sans reatrd et une présentation de quelques modèles des réseaux de neurones récurrents cas BAMNNs et on termine avec la périodicité

et différentes généralisations tels que la presque-périodicité, la pseudo presque-périodicité et la pseudo presque-périodicité avec poids. On trouve aussi des résultats auxiliaires utilisés, dans ce mémoire.

Le deuxième chapitre, qui est consacré à présenter le modèle de réseau de neurones de type BAM avec retard mixte de l'article [2], ainsi que les hypothèses d'existence de la solution pseudo presque-périodique avec poids, tout en se basant sur trois lemmes : somme, produit et invariance par translation dans l'ensemble WPAP, et des théorèmes : le premier pour le noyau et le deuxième pour l'opérateur toujours dans l'ensemble WPAP, et on termine l'étude qualitative par un théorème d'existence de la solution pseudo presque périodique avec poids d'un modèle de réseau de neurones de type BAM avec retard mixte.

Dans le dernier chapitre, on applique les résultats obtenus précédemment : les hypothèses sur l'existence de la solution pseudo presque-périodiques avec poids pour traiter un exemple numérique d'un modèle à deux couches avec deux neurones dans chaque couche de plus deux types de retards : constant et noyau, en utilisant une simulation avec Simulink de MATLAB. On présente les résultats obtenus sous forme graphique (les trajectoires des solutions), et à la fin, après ce dernier chapitre on expose une conclusion générale.

1 Préliminaires

Nous présentons dans ce chapitre plusieurs notions nécessaires pour la compréhension des chapitres suivants. Dans un premier temps, nous exposons brièvement certaines définitions (réseaux de neurones, équations différentielles à retards). Ensuite nous dédions la dernière section du chapitre à quelques définitions et théorèmes sur la périodicité (fonction périodique "P", fonction presque-périodique "AP", fonction pseudo presque-périodique "PAP", fonction pseudo presque-périodique avec poids "WPAP").

1.1 Réseaux de neurones et modélisation mathématique

1.1.1 Réseau de neurones : neurone biologique et neurone artificiel

A. Définitions

Définition 1.1. [59] Un réseau de neurones peut être considéré comme un modèle mathématique de traitement réparti, composé de plusieurs éléments de calcul non linéaire (neurones), opérant en parallèle et connectés entre eux par des poids.

Définition 1.2. [14] Les réseaux de neurones artificiels sont des réseaux fortement connectés de processeurs élémentaires fonctionnant en parallèle. Chaque processeur élémentaire calcule une sortie unique sur la base des informations qu'il reçoit.

Remarque 1.1. [59, 14] Les neurones artificiels sont souvent utilisés sous forme de réseaux qui diffèrent selon le type de connections entre les neurones, une cinquantaine de types peut être dénombrée. En guise d'exemples nous citons : le perceptron de Rosenblatt, les réseaux de Hopfield

Ces derniers sont les plus utilisés dans le domaine de la modélisation et de la commande des procédés. Ils sont constitués d'un nombre fini de neurones qui sont arrangés sous forme de couches. Les neurones de deux couches adjacentes sont interconnectés par des poids. L'information dans le réseau se propage d'une couche à l'autre, on dit qu'ils sont de type feed-forward. Nous distinguons trois types de couches :

- ✠ **Couche d'entrée** : les neurones de cette couche reçoivent les valeurs d'entrée du réseau et les transmettent aux neurones cachés. Chaque neurone reçoit une valeur, il ne fait pas donc de sommation.
- ✠ **Couches cachées** : chaque neurone de cette couche reçoit l'information de plusieurs couches précédentes, effectue la sommation pondérée par les poids, puis la transforme selon sa fonction d'activation qui est en général une fonction sigmoïde. Par la suite, il envoie cette réponse aux neurones de la couche suivante.
- ✠ **Couche de sortie** : elle joue le même rôle que les couches cachées, la seule différence entre ces deux types de couches est que la sortie des neurones de la couche de sortie n'est liée à aucun autre neurone.

B. Domaines d'application des réseaux de neurones artificiels

Aujourd'hui, les réseaux de neurones artificiels ont de nombreuses applications dans des secteurs très variés [52] :

- ✘ Traitement d'images : reconnaissance de caractères et de signatures, compression d'images, reconnaissance de forme, cryptage, classification, etc.
- ✘ Traitement du signal : filtrage, classification, identification de source, traitement de la parole etc.
- ✘ Défense : guidage des missiles, suivi de cible, reconnaissance du visage, radar, sonar, compression de données, suppression du bruit etc.
- ✘ Optimisation : planification, allocation de ressource, gestion et finances, etc.
- ✘ Simulation : simulation du vol, simulation de boîte noire, prévision météorologique, re- copie de modèle etc.

C. Du Neurone biologique au neurone artificiel [14]

♣ **Le neurone biologique** Le cerveau humain possède deux hémisphères latérales reliées par le corps calleux et d'autres ponts axonaux ; il pèse moins de deux kilogrammes et contient mille milliards de cellules, dont 100 milliards sont des neurones constitués en réseaux. Les neurones sont des cellules nerveuses décomposables, en 4 parties principales (figure 1) :

- ♣♣ **Les dendrites**, sur lesquelles les autres cellules entrent en contact synaptique, c'est par les dendrites que se fait la reception des signaux.
- ♣♣ **Le corps de la cellule**, c'est l'unité de traitement.
- ♣♣ **L'axone**, ou passent les messages accumulés dans le corps de la cellule, l'envoi de l'information se fait par l'axone.
- ♣♣ **Les synapses**, par lesquelles la cellule communique avec d'autres cellules, ce sont des points de connexion par ou passent les signaux de la cellule.

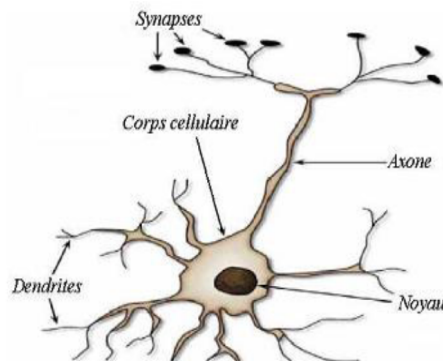


FIGURE 1 – Schéma simplifié d'un neurone biologique

♣ Neurone formel

Le neurone formel est un modèle mathématique simplifié du neurone biologique, il présente un certain nombre d'entrées, les dendrites, un corps traitant les entrées suivant la méthode du tout ou rien, et un axone véhiculant la réponse du neurone. La première modélisation d'un neurone découle des travaux significatifs de Mac Culloch et Pitts (1943). La figure représente un modèle de base d'un neurone formel. Le modele de la figure est compose de :

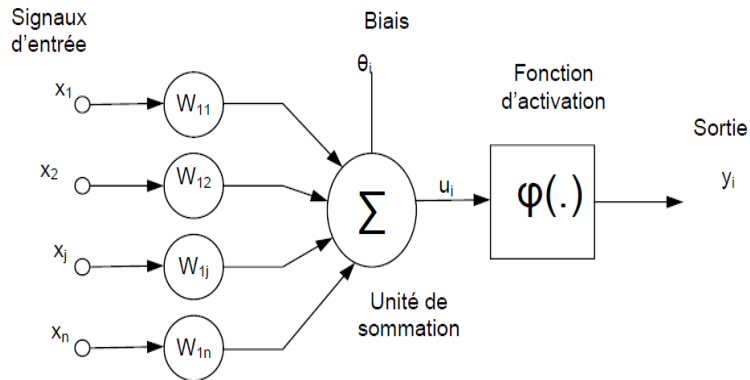


FIGURE 2 – Modele de base d'un neurone formel

- ♣♣ Des entrees du neurone formel $X_i, i = 1, 2, \dots, n$
- ♣♣ Des parametres de ponderation W_{ij} ,
- ♣♣ De la fonction d'activation ou de seuillage (non lineaire, forme en sigmoide, etc...),
- ♣♣ Une sortie du neurone formel.

La sortie U_k du neurone formel est donnée par la relation :

$$U_i = \sum_{j=0}^n W_{ji} x_j$$

A partir de cette valeur, une fonction d'activation calcule la valeur de sortie y_j du neurone. C'est cette valeur qui sera transmise aux neurones de sorties :

$$y_i = \varphi(U_j)$$

Il existe de nombreuses formes possibles pour la fonction d'activation. Les plus courantes sont présentées sur la figure 3. On remarque qu'à la différence des neurones biologiques dont l'état est binaire, la plupart des fonctions d'activations sont continues, offrant une infinité de valeurs possibles comprises dans l'intervalle $[0, 1]$ ou $[-1, 1]$.

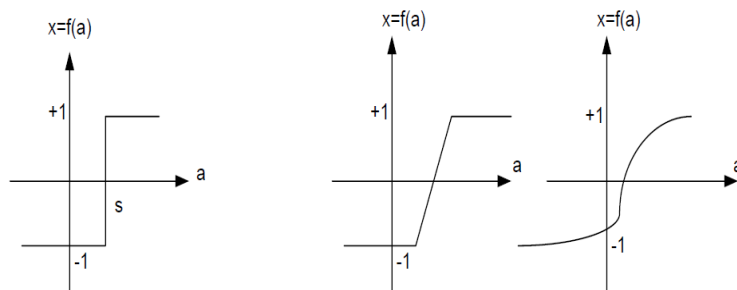


FIGURE 3 – Différents types de fonctions d'activation pour le neurone formel

♣ Architecture des réseaux de neurones

- ♣♣ **Les réseaux non bouclés** [14, 52, 62] Ce sont des réseaux unidirectionnels sans retour arrière (feedforward). Le signal de sortie est directement obtenu après l'application du signal d'entrée. Si tous les neurones ne sont pas des organes de sortie, on parle de neurones cachés (figure 4)

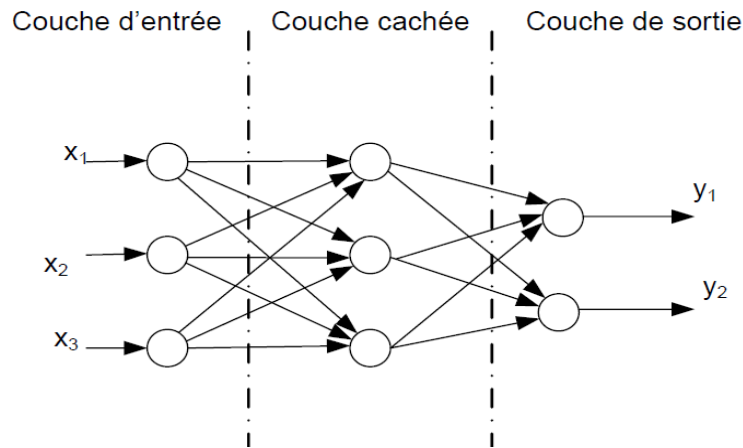


FIGURE 4 – Réseau non bouclé

- ♣♣ **Les réseaux bouclés** [14] Il s'agit de réseaux de neurones avec un retour en arrière (feedback network ou récurrent network) (figure 5) Dont le graphe des connexions est cyclique :

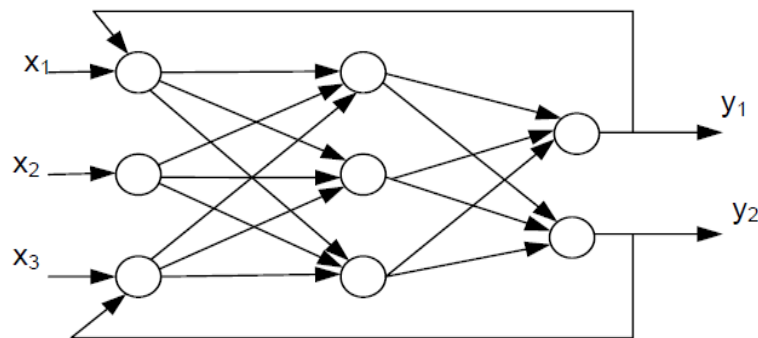


FIGURE 5 – Réseau bouclé

Lorsqu'on se déplace dans le réseau en suivant le sens de connexion, il est possible de trouver au moins un chemin qui revient à son point de départ (un tel chemin est désigné sous le terme de (cycle) . La sortie d'un neurone du réseau peut donc être fonction d'elle-même ; cela n'est évidemment concevable que si la notion de temps est explicitement prise en considération voir([59]).

1.1.2 Modélisation mathématique des réseaux de neurones

Depuis 1980, plusieurs chercheurs, dont le premier est Hopfield proposé un réseau de neurones plus simple. Ce dernier donne un modèle plus simple sous forme d'un système

différentiel.

La dynamique d'un réseau de neurones récurrent peut être décrite par un système différentiel à temps continu

$$x'(t) = f(x(t)), t \geq 0$$

ou un système à temps discret

$$x(n+1) = g(x(n)), n = 1, 2 \dots$$

avec

- $x(\cdot)$ représente l'état du réseau correspondant ;
- $f(\cdot)$ et $g(\cdot)$ sont des applications appropriées.

Si l'on considère les retards de transmission entre les neurones, alors un modèle de réseau de neurones récurrent peut être décrit par un système différentiel :

$$x'(t) = F(x(t+\theta)), \theta \in [-\tau, 0]$$

où $\tau > 0$ est une constante et $f(\cdot)$ est une fonction dont la forme sera présentée dans les parties qui suivent.

1.2 Quelques réseaux de neurones récurrents célèbres

Dans cette partie, on présente quelques types de réseaux de neurones récurrents, on trouve :

1.2.1 Réseau de neurones de Hopfield

Les réseaux de neurones de Hopfield sont modélisés par l'équation différentielle suivante (voir [37, 45, 68]) :

$$x'_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j(x_j(t)) + I_i, i = \overline{1..n},$$

dont les composantes sont :

- $n \geq 2$ est le nombre de neurones dans le réseau ;
- $x_i(t)$ est l'état du i^{me} neurone à l'instant t ;
- c_i sont des constantes strictement positives et c'est le taux de ré-initialisation du i -ème neurone ;
- a_{ij} poids de connexion entre le neurone j et le neurone i ;
- $g_j(\cdot)$ sont les fonctions d'activation du système ;
- I_i est l'entrée extérieure du neurone i .

1.2.2 Réseau de neurones de type Hopfield statique

Les réseaux de neurones de Hopfield statique sont modélisés par l'équation différentielle suivante [9] :

$$x'_i(t) = -c_i x_i(t) + g_i\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(t) + I_i\right), i = \overline{1..n},$$

où

- $n \geq 2$ est le nombre de neurones dans le réseau ;
- $x_i(t)$ est l'état du i^{me} neurone à l'instant t ;
- c_i sont des constantes strictement positives et c'est le taux de ré-initialisation du i -ème neurone ;
- a_{ij} poids de connexion entre le neurone j et le neurone i ;
- $g_j(\cdot)$ sont les fonctions d'activation du système ;
- I_i est l'entrée extérieure du neurone i .

1.2.3 Réseau de neurones de type Hopfield d'ordre élevé

La forme mathématique d'un réseau de neurones de Hopfield d'ordre élevé, est donnée par l'équation (voir [6, 65]) :

$$x'_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n b_{ijl} g_j(x_j(t)) g_l(x_l(t)) + I_i, i = \overline{1..n},$$

dans lequel

- $n \geq 2$ est le nombre de neurones dans le réseau ;
- $x_i(t)$ est l'état du i^{me} neurone à l'instant t ;
- c_i sont des constantes strictement positives et c'est le taux de ré-initialisation du i -ème neurone ;
- a_{ij} poids de connexion entre le neurone j et le neurone i ;
- b_{ijl} poids de connexion du second degré ;
- $g_j(\cdot)$ fonctions d'activation (bornnées) ;
- I_i est l'entrée extérieure du neurone i .

1.2.4 Réseau de neurones BAM (Hopfield/Hopfield d'ordre élevé)

Le principe d'un réseau de neurones BAM est de combiner deux reseaux simples (Hopfield / Hopfield d'ordre élevé) à la fois, par exemple on trouve :

A). Réseaux de neurones BAM de Hopfield Ce type combine deux réseaux de neurones Hopfield et il est donné par le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} x'_i(t) = -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^m p_{ji} f_j(y_j(t)) + I_i, i = \overline{1..n}, \\ y'_j(t) = -b_j y_j(t) + \sum_{i=1}^n q_{ij} g_i(x_i(t)) + J_j, j = \overline{1..m}, \end{cases}$$

où

- $n, m \geq 2$ et $n + m$ nombre de neurones dans le réseau ;
- $x_i(t)$ et $y_j(t)$ l'évolution du neurone i et j à l'instant t ;
- $a_i > 0$ et $b_j > 0$: sont les taux de ré-initialisation du i -ème neurone et du j -ème neurone resp ;
- p_{ji} et q_{ij} poids de connexions ;
- $f_j(\cdot)$ et $g_i(\cdot)$ sont les fonctions d'activation du système ;
- I_i et J_j sont les entrées externes.

B). Réseaux de neurones BAM de Hopfield d'ordre élevé (BAM-HOHNN)

Ce type combine deux réseaux de neurones Hopfield d'ordre élevé et il est donné par le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} x'_i(t) = -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^m p_{ji} f_j(y_j(t)) + \sum_{j=1}^m \hat{p}_{jil} \sum_{l=1}^n f_j(y_j(t)) f_l(y_l(t)) + I_i, i = \overline{1..n}, \\ y'_j(t) = -b_j y_j(t) + \sum_{i=1}^n q_{ij} g_i(x_i(t)) + \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n \hat{q}_{ijl} g_j(x_i(t)) g_l(x_l(t)) + J_j, j = \overline{1..m}, \end{cases}$$

où

- $n, m \geq 2$ et $n + m$ nombre de neurones dans le réseau ;
- $x_i(t)$ et $y_j(t)$ l'évolution du neurone i et j à l'instant t ;
- $a_i > 0$ et $b_j > 0$ sont les taux de ré-initialisation du i -ème neurone et du j -ème neurone resp ;
- p_{ji} et q_{ij} poids de connexions ;
- $\hat{q}_{ijl}, \hat{p}_{ijl}$ des poids de connexions du second degré ;
- $f_j(\cdot)$ et $g_i(\cdot)$ sont les fonctions d'activation du système ;
- I_i et J_j sont les entrées externes ;

1.2.5 Réseau de neurones de type MAM

Les réseaux de neurones de type MAM (multidirectional associative memory) sont modélisés par l'équation différentielle suivante (voir [21, 48]) :

$$x'_{ki}(t) = -a_{ki} x_{ki}(t) + \sum_{p=1, p \neq k}^m \sum_{j=1}^{n_p} b_{pj}^{ki} f_{pj}(x_{pj}(t)) + I_{ki}(t),$$

dont les composantes sont :

- $n \geq 2$ est le nombre de neurones dans le réseau ;
- $x_{ki}(t)$ représente la tension de cellule du i^{me} neurone dans le champ k au moment t ;
- $a_{ki} > 0$ représente le taux de décroissance du i^{me} neurone dans le champ k ;
- b_{pj}^{ki} le poids de la connexion entre le j^{me} neurone du champ p et le i^{me} neurone du champ k ;
- $f_{pj}(\cdot)$ sont les fonctions d'activation du système ;
- $I_{ki}(\cdot)$ est l'entrée externe du i^{me} neurone dans le champ k au temps t .

1.2.6 Réseau de neurones de type MAM statique

Les réseaux de neurones de type MAM statique sont modélisés par l'équation différentielle suivante (voir [48]) :

$$x'_i(t) = -a_{ki}x_{ki}(t) + f_{ki}\left(\sum_{p=1, p \neq k}^m \sum_{j=1}^{n_p} b_{pj}^{ki}x_{pj}(t) + I_{ki}(t)\right),$$

dont les composantes sont :

- $n \geq 2$ est le nombre de neurones dans le réseau ;
- $x_{ki}(t)$ représente la tension de cellule du i^{me} neurone dans le champ k au moment t ;
- $a_{ki} > 0$ représente le taux de décroissance du i^{me} neurone dans le champ k ;
- b_{pj}^{ki} le poids de la connexion entre le j^{me} neurone du champ p et le i^{me} neurone du champ k ;
- $f_{ki}(\cdot)$ sont les fonctions d'activation du système ;
- $I_{ki}(\cdot)$ est l'entrée externe du i^{me} neurone dans le champ k au temps t .

1.2.7 Réseau de neurones de type Shunting

Les réseaux de neurones de type Shunting sont modélisés par l'équation différentielle suivante (voir [45]) :

$$x'_{ij}(t) = -a_{ij}x_{ij}(t) + \sum_{C_{kl} \in N_p(i,j)} B_{ij}^{kl}(t)g(x_{kl}(t - \tau)x_{ij}(t)) + L_{ij}(t), i = \overline{1..m}, j = \overline{1..n}$$

dont les composantes sont :

- $n \geq 2, m \geq 2$ est les nombres de neurones dans le réseau ;
- $x_{ij}(t)$ est l'état du i^{me} et j^{me} neurone à l'instant t ;
- a_{ij} est une constante strictement positive et elle correspond au taux de décroissance passive de l'activité cellulaire ;
- $B_{ij}^{kl}(\cdot)$ correspondent à la force de connexion ;
- $g(\cdot)$ est la fonction d'activation du système ;
- L_{ij} est l'entrée extérieure du neurone i et j .

1.3 Réseaux de neurones récurrents à retards

1.3.1 Équations différentielles à retards

Définition 1.3. [12, 11] Soit $t \geq 0$. On note par $C([-\tau, 0], \mathbb{R}_+)$ l'espace de Banach des fonctions continues définies sur $[-\tau, 0]$ et à valeurs dans \mathbb{R}_+ muni de la topologie de la convergence uniforme

$$\|\phi\| = \sup \phi(\theta); \quad -\tau \leq \theta \leq 0.$$

pour $\phi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}_+)$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, soit le problème à valeur initiale suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y_{t-\tau}), t > 0 \\ y(t) = \phi(\theta), t \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (1)$$

Cette dernière équation (1) est un système différentiel à retards.

1.3.2 Classification des équations différentielles à retard

Les équations différentielles à retard peuvent être classées comme linéaires ou non linéaires, autonomes ou non autonomes, périodiques ou non ou encore selon les types des retards. Dans cette section, on s'intéresse à la classification des équations différentielles à retards selon les types du retards, on trouve les sous catégories suivantes [11, 12] :

✂ **Équations différentielles à retards constants** : Sous leurs forme la plus simple, les équations différentielles à retards constants, s'écrivent comme suit :

$$\dot{x} = f(t, x(t), x(t - r));$$

où f est une fonction donnée et le retard r est une constante positive.

✂ **Équations différentielles à retards variants dans le temps** : Sous leurs forme la plus simple, ces équations s'écrivent comme suit :

$$\dot{x} = f(t, x(t), x(t - r(t)));$$

où f est une fonction donnée.

✂ **Équations différentielles à retards variables dépendant de l'état** : Sous leurs forme la plus simple, ces équation s'écrivent comme suit :

$$\dot{x} = f(t, x(t), x(t - r(x(t))));$$

avec f étant donnée.

Des fois cette classification, n'est pas suffisante dans l'étude, ce qui conduit à ajouter des contraintes supplémentaires relatives au retard ou à sa dérivée et qui mène ensuite à définir de nouvelles sous catégories d'équations à retards variables comme :

✂ **Équations à retards variables arbitraires** : Le retard et sa dérivée ne sont pas limités.

✂ **Équations à retards majorés** : Cette sous-catégorie suppose la connaissance d'une valeur maximale sur le retard

$$0 \leq r(t) \leq r_{\max}$$

Si $r(t) = r$ est constant, il reste en pratique incertain et la contrainte ci-dessus assure un intervalle borné. Ce type de retard a été très largement abordé dans la littérature.

✂ **Équations à retard (bi-borné)** : Cette sous-catégorie est moins abordée que le cas précédent dont on suppose que le retard vérifie la contrainte :

$$r_{\min} \leq r(t) \leq r_{\max}$$

✂ **Équations à retard variant lentement dans le temps** : $r(t)$ est une fonction dérivable presque partout telle que :

$$\dot{r}(t) \leq \lambda < 1$$

qui indique alors une limitation sur la vitesse de variation du retard et que ce dernier varie lentement dans le temps autrement dit que les informations retardés arrivent dans l'ordre chronologique.

-
- ✂ **Équations à retard variant modérément dans le temps :** $r(t)$ est une fonction dérivable, presque partout telle que :

$$\dot{r}(t) \leq \lambda$$

avec $\lambda \geq 1$

- ✂ **Équations à retard variant rapidement dans le temps :** Dans cette sous-catégorie, il n'y a aucune contrainte sur le retard et sa dérivée.
- ✂ **Équations différentielles à retard distribué :** Ce type d'équations a été traité dans la littérature, pour la conception d'observateurs pour des systèmes non linéaire. Sous leur forme la plus simple, ces équations s'écrivent comme suit :

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t) - \beta \int x(t-a) d\eta(a)$$

On trouve ce type d'équations dans le modèle dynamique des populations présenté par Volterra où il a utilisé un terme de retard distribué pour examiner un effet cumulatif sur le taux de mortalité d'une espèce.

- ✂ **Équations différentielles à retard inconnu :** Dans ce cas, aucune hypothèse sur le retard n'est considérés qu'il soit constant, variable ou distribué.
- ✂ **Équations différentielles à retard de type neutre :** Ces équations notées en abrégé (E.D.N) des equations différentielles à retard par le fait que la dérivée de l'état au temps actuel dépend non seulement des valeurs de l'état passé mais de la dérivée d'ordre le plus élevé intervenant dans l'équation du temps passé. Sous leur forme la plus simple, ces équations s'écrivent comme suit :

$$\frac{d}{dt}[Dx(t-r(t))] = f(t, x(t), x(t-r(t)))$$

où f est donnée et D est un opérateur et pour plus d'informations et détails sur ce dernier modèle voir [11].

1.3.3 RNNs retardés : différents types de retards

Un réseau de neurones récurrents à retard est modélisé par une équation différentielle dependant d'un paramètre nommé retard, et on trouve plusieurs formes, par exemple :

- ♣ **Modèle de Hopfield avec retard constant :**

Ce type de réseau de neurones est décrit par une équation différentielle avec retard constant (voir [16, 17, 27, 50]), dans le modèle suivant le retard est noté $\tau > 0$

$$\begin{cases} x'_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j(x_j(t-\tau)) + I_i \end{cases}$$

- ♣ **Modèle de Hopfield avec retard variable dans le temps :**

Il est décrit par une équation différentielle avec retard variable dans le temps (voir [18, 19, 41]), dans le modèle suivant le retard est noté $\tau(t) > 0$

$$\begin{cases} x'_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j(x_j(t-\tau(t))) + I_i \end{cases}$$

♣ **Modèle de Hopfield avec retard proportionnel :**

Ce type de réseau de neurones est décrit par une équation différentielle avec retard proportionnel, donné comme suit

$$\begin{cases} x'_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j(x_j(qt)) + I_i \end{cases}$$

dans le dernier modèle le retard est noté "qt" avec $0 < q < 1$ terme de retard proportionnel (pour plus d'informations, voir [28, 39, 55, 67, 68, 73]).

♣ **Modèle de Hopfield avec retard distribué continu**

Un retard distribué continu est appelé aussi retard de type noyau (intégral). On distingue deux formes :

♣♣ **Modèle de Hopfield avec retard distribué continu (fini)[40]**

Le modèle de réseau de neurones est donné par l'équation différentielle avec retard distribué continu (fini) suivante :

$$x'_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_{t-\tau(t)}^t g_j(x_j(s)) ds + I_i \quad (2)$$

♣♣ **Modèle de Hopfield avec retard distribué continu (infini)[72]**

C'est un retard où l'une des bornes est infini (∞), de plus suivant la composition par la fonction d'activation (g_j), on a :

$$x'_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_{-\infty}^t K(t-s) g_j(x_j(s)) ds + I_i \quad (3)$$

$$x'_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j \left(\int_{-\infty}^t K(t-s) x_j(s) ds \right) + I_i \quad (4)$$

K est un noyau

♣ **Modèle de Hopfield avec retard (leakage) : [5, 61, 64, 70]**

A l'origine ce type de retard est un noyau (comme le retard dans le modèle précédent : modèle de Hopfield avec retard distribué continu fini (2)), autrement dit, après quelques transformations dans le modèle (5), on a (6) :

$$x'_i(t) = -c_i x_i(t - \tau(t)) + \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j(x_j(t)) + I_i \quad (5)$$

On a :

$$\begin{aligned} x'_i(t) &= -c_i x_i(t - \tau(t)) + c_i x_i(t) - c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j(x_j(t)) + I_i \quad (6) \\ &= -c_i x_i(t) + c_i \int_{t-\tau(t)}^t x'_i(s) ds + \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j(x_j(t)) + I_i \end{aligned}$$

♣ **Modèle de Hopfield avec retard mixte :**

Ce réseau de neurones est composé de deux types de retards : un retard constant ou variable dans le temps et un retard distribué continu (fini ou infini), et pour plus de détails voir ([1, 4, 7, 29, 46, 47, 63]). Comme exemple : un réseau de neurones de Hopfield avec retard mixte est donné par l'équation différentielle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j(x_j(t - \tau(t))) + \sum_{j=1}^n b_{ij} \int_{-\infty}^t K(t-s) g_j(x_j(s)) ds + I_i \end{array} \right.$$

1.3.4 RNNs retardés : cas BAMNNs avec différents retards

Dans cette sous partie, on présente quelques modèles de réseaux de neurones de type BAM (BAMNNs) avec différents types de retards.

✂ **Modèle de BAM avec retard constant**

Ce type de réseau de neurones est décrit par un système d'équations différentielles avec retard constant (voir [34]), dans le modèle suivant le retard est noté $\tau > 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i(t) = -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^m c_{ij} f_j(y_j(t - \tau)) + I_i \\ y_j(t) = -b_j y_j(t) + \sum_{i=1}^n w_{ji} g_i(x_i(t - \tau)) + J_j \end{array} \right.$$

✂ **Modèle de BAM avec retard variable dans le temps**

Il est décrit par un système d'équations différentielles avec retard variable dans le temps (voir [20, 42, 54, 56]), dans le modèle suivant le retard est noté $\tau(t) > 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i(t) = -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^m c_{ij} f_j(y_j(t - \tau(t))) + I_i \\ y_j(t) = -b_j y_j(t) + \sum_{i=1}^n w_{ji} g_i(x_i(t - \tau(t))) + J_j \end{array} \right.$$

✂ **Modèle de BAM avec retard proportionnel** Ce type de réseau de neurones est décrit par une système d'équations différentielles avec retard proportionnel, donné comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i(t) = -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^m c_{ij} f_j(y_j(qt)) + I_i \\ y_j(t) = -b_j y_j(t) + \sum_{i=1}^n w_{ji} g_i(x_i(qt)) + J_j \end{array} \right.$$

dans le dernier modèle le retard est noté qt avec $0 < q < 1$ terme de retard proportionnel.

✂ **Modèle de BAM avec retard distribué continu** Un retard distribué continu est appelé aussi retard de type noyau (intégral).

On distingue deux formes :

Modèle de BAM avec retard distribué continu (fini)[31, 71]

Le modèle de réseau de neurones est donné par une système d'équations différentielles avec retard distribué continu (fini) suivante :

$$\begin{cases} x_i(t) = -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^m c_{ij} \int_{t-\tau(t)}^t f_j(y_j(s)) ds + I_i \\ y_j(t) = -b_j y_j(t) + \sum_{i=1}^n w_{ji} \int_{t-\tau(t)}^t g_i(x_i(s)) ds + J_j \end{cases}$$

Modèle de BAM avec retard distribué continu (infini)[40]

C'est un retard où l'une des bornes est infini, de plus suivant la composition par les fonctions d'activation f_j et g_i , on a :

$$\begin{cases} x_i(t) = -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^m c_{ij} \int_{-\infty}^t K(t-s) f_j(y_j(s)) ds + I_i \\ y_j(t) = -b_j y_j(t) + \sum_{i=1}^n w_{ji} \int_{-\infty}^t K(t-s) g_i(x_i(s)) ds + J_j \end{cases}$$

✦ Modèle de BAM avec retard (leakage) [38]

A l'origine ce type de retard est un noyau (comme le retard dans le modèle précédent : modèle de BAM avec retard distribué continu), autrement dit, après quelques transformations on a :

$$\begin{cases} x_i(t) = -a_i x_i(t - \tau(t)) + \sum_{j=1}^m c_{ij} f_j(y_j(t)) + I_i \\ y_j(t) = -b_j y_j(t - \tau(t)) + \sum_{i=1}^n w_{ji} g_i(x_i(t)) + J_j \end{cases}$$

on a

$$\begin{cases} x'_i(t) = -a_i x_i(t - \tau(t)) + a_i x_i(t) - a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^m c_{ij} f_j(y_j(t)) + I_i \\ y'_j(t) = -b_j y_j(t - \tau(t)) + b_j y_j(t) - b_j y_j(t) + \sum_{i=1}^n w_{ji} g_i(x_i(t)) + J_j \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_i(t) = -a_i x_i(t) + a_i \int_{t-\tau(t)}^t x'_i(s) ds + \sum_{j=1}^m c_{ij} f_j(y_j(t)) + I_i \\ y_j(t) = -b_j y_j(t) + b_j \int_{t-\tau(t)}^t y'_j(s) ds + \sum_{i=1}^n w_{ji} g_i(x_i(t)) + J_j \end{cases}$$

♣ Modèle de BAM avec retard mixte

Ce réseau de neurones est composé de deux types de retards : un retard constant ou variable dans le temps et un retard distribué continu (fini ou infini), et pour plus de détails voir ([2]). Comme exemple : un réseau de neurones de BAM avec retard mixte est donné par l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^m c_{ij} f_j(y_j(t - \tau_{ji})) + \sum_{j=1}^m d_{ij} \int_{-\infty}^t K_{ij}(t-s) f_j(y_j(s)) ds + I_i \\ \dot{y}_j(t) = -b_j y_j(t) + \sum_{i=1}^n w_{ji} g_i(x_i(t - \sigma_{ij})) + \sum_{i=1}^n \alpha_{ji} \int_{-\infty}^t N_{ji}(t-s) g_i(x_i(s)) ds + J_j \end{cases}$$

1.4 Périodicité

1.4.1 Fonctions périodiques "P"

Définition 1.4. [15] Une fonction f définie sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} est dite périodique s'il existe un nombre $T > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x) \text{ ou } f(x - T) = f(x) \quad (7)$$

le plus petit T qui vérifie (7).

Exemple 1.1. [58]

1. Les fonctions définies par

$$t \rightarrow \cos t, \quad t \rightarrow \sin t, \quad t \rightarrow \cos nt, \quad t \rightarrow \sin nt, \quad t \rightarrow e^{(int)}, \quad t \rightarrow \sum_{|k| \leq N} e^{(ikt)}$$

sont périodique de période 2π et elle sont continues.

2. Les fonctions $f(x) = x - [x]$ ($[x]$ désigne la partie entière de x) est 1-périodique mais elle n'est pas continue.
3. la fonction $f_1(t) = \cos t$ est une fonction 2π -périodique voir les figures 6 et 7.

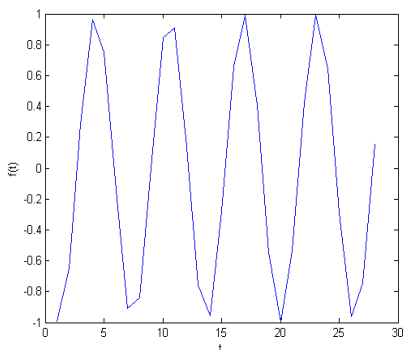


FIGURE 6 – Comportement de la fonction périodique de f_1 sur $[3, 25]$

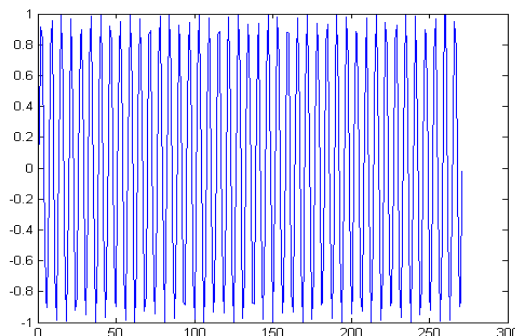


FIGURE 7 – Comportement de la fonction périodique de f_1 sur $[0, 300]$

Définition 1.5. [58] Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction donnée. On définit par

$$P_f = \{T \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}; f(x + T) = f(x)\}$$

P_f est appelé groupe des périodes de f .

1.4.2 Fonctions presque-périodiques "AP"

Dans cette sous section, on va rappeler quelques définitions et résultats sur les fonctions presque périodiques. Il existe trois différentes définitions des fonctions presque périodiques :

-
1. Critère de Bohr en utilisant les ensembles relativement denses.
 2. Critère d'approximation en utilisant la fermeture de l'ensemble des polynômes trigonométriques relativement à la convergence de la norme uniforme.
 3. Critère de Bochner en utilisant la compacité de l'ensemble des translatés.

Définition 1.6. [15] Un ensemble $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}$ est dit relativement dense dans \mathbb{R} s'il existe un nombre réel positive ℓ , tel que, tout intervalle de longueur ℓ contient au moins un élément de \mathbb{E} . Autrement dit,

$$\exists \ell > 0, [a, a + \ell] \cap \mathbb{E} \neq \emptyset, \text{ pour tout } a \in \mathbb{R}$$

ℓ est dit la longueur d'inclusion de la partie \mathbb{E} .

Proposition 1.7. *Tout ensemble qui contient un ensemble relativement dense est relativement dense.*

Définition 1.8. (Critère de Bohr)[58] On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est presque-périodique au sens de Bohr si pour tout $\epsilon > 0$ l'ensemble $E\{f, \epsilon\}$ est relativement dense dans \mathbb{R} , où

$$E\{f, \epsilon\} = \{T \in \mathbb{R}, \text{ tel que } \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + T) - f(x)| \leq \epsilon\}$$

Autrement dit,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \ell_\epsilon > 0, \text{ tel que pour } \forall a \in \mathbb{R}, \exists T \in [a, a + \ell],$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + T) - f(x)| < \epsilon$$

$T \in E\{f, \epsilon\}$ est ϵ -presque-périodique.

Le nombre ℓ_ϵ est appelé longueur d'inclusion de $E\{f, \epsilon\}$

$AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble de toutes les fonctions presque-périodiques au sens de Bohr.

Exemple 1.2. [58]

1. *Toute fonction continue et T -périodique est une fonction presque-périodique. En effet, soit $\ell = T$ et soit I un intervalle quelconque de longueur $T : I = [\gamma, \gamma + T]$ avec γ un réel. $\gamma = (n - 1)T + \delta$ où $n \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq \delta \leq T$, alors I contient un point de forme $nT = \tau$ et on a*

$$f(t + \tau) - f(t) = f(t + nT) - f(t) = 0.$$

2. *Toute somme finie de fonctions périodiques à périodes quelconque dont les rapports sont des nombres irrationnels, n'est pas périodique. En effet, considérons la fonction f définie par :*

$$f(x) = e^{ix} + e^{i\sqrt{2}x}.$$

Elle s'écrit comme somme de deux fonctions périodiques, l'une de période 2π , l'autre est de période $\sqrt{2}\pi$.

Raisonnons par l'absurde, supposons qu'il existe $\tau \neq 0$ tel que pour tout réel x , on ait :

$$f(x + \tau) = f(x)$$

c'est-à-dire

$$e^{ix} e^{i\tau} + e^{i\sqrt{2}x} e^{i\sqrt{2}\tau} = e^{ix} + e^{i\sqrt{2}x}$$

Ce qui implique que

$$e^{ix}(e^{i\tau} - 1) + e^{i\sqrt{2}x}(e^{i\sqrt{2}\tau} - 1) = 0.$$

En dérivant par rapport à x on obtien

$$ie^{ix}(e^{i\tau} - 1) + \sqrt{2}ie^{i\sqrt{2}x}(e^{i\sqrt{2}\tau} - 1) = 0$$

Pour $x = 0$ on a :

$$e^{i\tau} - 1 + \sqrt{2}(e^{i\sqrt{2}\tau} - 1) = 0.$$

C'est-à-dire que :

$$e^{i\tau} = (e^{i\sqrt{2}\tau}) = 1$$

donc, il existe $a, b \in \mathbb{Z}^*$ tel que $\tau = 2a\pi$ et $\tau = \sqrt{2}b\pi$, comme $\tau \neq 0$, on obtient

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

Ce qui est absurde. Donc f n'est pas une fonction périodique.

Exemple 1.3. [58].

Considérons la fonction f_2 définie par :

$$f_2(t) = \sin t + \sin \sqrt{2}t, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

est presque périodique car :

$$\begin{aligned} |f(t + T) - f(t)| &= |\sin(t + T) + \sin \sqrt{2}(t + T) - \sin t + \sin \sqrt{2}t| \\ &= \sin t \cos T + \sin T \cos t + \sin \sqrt{2}t \cos \sqrt{2}T \\ &\quad + \sin \sqrt{2}T \cos \sqrt{2}t - \sin t - \sin \sqrt{2}t \\ &= |\sin \sqrt{2}t(\cos \sqrt{2}T - 1) + \sin t(\cos T - 1) + \sin t \cos T + \sin \sqrt{2}T \cos \sqrt{2}t| \\ &\leq |\cos \sqrt{2}T - 1| + |\cos T - 1| + |\sin t| + |\sin \sqrt{2}T| \end{aligned}$$

car $|\sin t| \leq 1$ et $|\cos t| \leq 1$ et d'après le théorème de Gottschalk ([15]), $\forall \epsilon > 0$, pour $\delta > 0$, il existe deux entiers m, n tels que

$$|mx - an| < \delta, \forall x, a \in \mathbb{R}$$

pour $x = 1$, $a = \sqrt{2}$ et $\delta = \frac{\epsilon}{4\pi}$ on aura :

$$|m - \sqrt{2}n| < \frac{\epsilon}{4\pi}$$

pour $T = 2n\pi$, on obtient

$$\sin T = \sin(2n\pi) = 0 \text{ et } \cos(T) = \cos(2n\pi) = 1$$

et

$$\sqrt{2}T = \sqrt{2}(2n\pi) = (\sqrt{2}n)2\pi :$$

d'où

$$|f(t+T) - f(t)| \leq |\cos \sqrt{2}T - 1| + |\sin \sqrt{2}T|$$

Posons $\sqrt{2}n - m = a \Rightarrow \sqrt{2}n = m + a$ On obtient

$$|\sqrt{2}n - m| \leq \frac{\epsilon}{4\pi}$$

d'où

$$|a| \leq \frac{\epsilon}{4\pi}$$

donc

$$\sqrt{2}T = (m + a)2\pi$$

on a

$$\begin{aligned} \cos \sqrt{2}T &= \cos(2\pi m + 2\pi a) \\ &= \cos 2\pi m \cos 2\pi a - \sin 2\pi m \sin 2\pi a \\ &= \cos 2a\pi \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sin \sqrt{2}T &= \sin(2\pi m + 2\pi a) \\ &= \sin 2\pi m \cos 2\pi a + \cos 2\pi m \sin 2\pi a \\ &= \sin 2a\pi \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$|f(t+T) - f(t)| \leq |\cos 2a\pi - 1| + |\sin 2a\pi|$$

Comme

$$|\cos \theta - 1| \leq |\theta| \text{ et } |\sin \theta| \leq |\theta|, \forall \theta$$

Alors

$$|f(t+T) - f(t)| \leq 2|a|\pi + 2|a|\pi = 4\pi|a|$$

Et comme

$$|a| \leq \frac{\epsilon}{4\pi}$$

Alors

$$|f(t+T) - f(t)| \leq \epsilon$$

Puisque $2n\pi, n \in \mathbb{Z}$ est relativement dense alors $\mathbf{E}(\epsilon, f)$ est aussi relativement dense. Ainsi on conclut que f est presque périodique.

Remarque 1.2. (Graphiquement) Du point de vue géométrique, on conclut la presque périodicité de la fonction $f_2(t) = \sin t + \sin \sqrt{2}t$ à partir de l'allure de sa courbe représentative donnée par les figures 9 et 8.

Proposition 1.9. Si $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors f est bornée et uniformément continue.

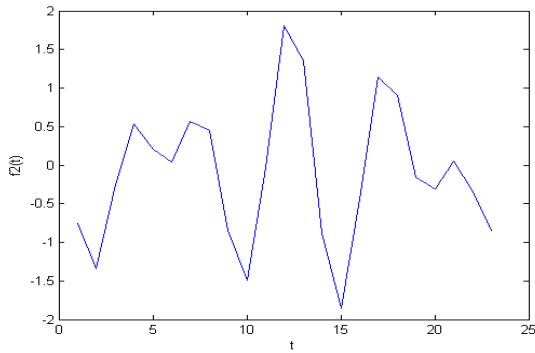


FIGURE 8 – Comportement de la fonction presque-périodique f_2 sur $[3, 25]$

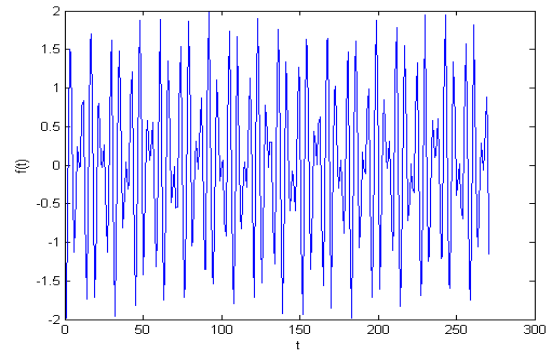


FIGURE 9 – Comportement de la fonction presque-périodique f_2 sur $[0, 300]$

Proposition 1.10. *Pour tout $\epsilon > 0$, $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors*

1. $E\{\epsilon', f\} \supset E\{\epsilon, f\}, \forall \epsilon' > \epsilon$
2. *pour tout $\epsilon' > 0$, $E\{\epsilon, f\}$ est fermé*
3. *pour tout $\epsilon > 0$, $E\{\epsilon, f_\alpha\} = E\{\epsilon, f\}$ où $f_\alpha(x) = f(x + \alpha), \forall \alpha > 0$, c'est-à-dire, l'espace des fonctions presque périodiques $AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est invariant par translation.*

Proposition 1.11. *Soient $f_1, f_2 \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors pour tout $\epsilon > 0$ l'ensemble*

$$E\{\epsilon, f_1\} * E\{\epsilon, f_2\}$$

est relativement dense.

Proposition 1.12. *Soit $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f \neq 0$, alors il existe $M > 0$ tel que*

$$E\left\{\frac{\epsilon}{M}, \frac{1}{f}\right\} \supset E\{\epsilon, f\}$$

Définition 1.13. (Critère d'approximation) [58]

On appelle polynôme trigonométrique généralisé, toute combinaison de la forme

$$\sum_{k=1}^n a_k e^{i\lambda_k x} \text{ avec, } a_k \in \mathbb{C}, \lambda_k \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N}.$$

On note par A l'ensemble de ces polynômes.

Proposition 1.14. *L'ensemble des polynômes trigonométriques généralisé $A \subset AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$:*

Définition 1.15. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, continue, possède la propriété d'approximation polynômiale, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique $P_\epsilon \in A$ tel que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \|f(x) - P_\epsilon(x)\|_X \leq \epsilon.$$

Théorème 1.16. *Une fonction $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ si et seulement si, elle possède la propriété d'approximation polynômiale.*

Proposition 1.17. *La série uniformément convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}$ est presque périodique.*

Définition 1.18. [24] (**Caractérisation de Bochner**) Soit \mathbb{E} un espace de Banach muni d'une norme notée $\|\cdot\|$ et une fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}$$

On dit que : f est presque-périodique si elle vérifie les deux conditions suivantes :

1. f est continue,
2. de toute suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels, on peut extraire une sous-suite $(h'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la suite $(f(t + h'_n))_{n \in \mathbb{N}}$ soit uniformément convergente.

Définition 1.19. [23] (**Deuxième Caractérisation de Bochner**) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}$ une fonction continue. Alors, f est presque-périodique si pour toute suite $((\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\tau_n)_{n \in \mathbb{N}})$, $\tau_n, \sigma_n \in \mathbb{R}$, il existe une sous-suite $((\sigma'_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\tau'_n)_{n \in \mathbb{N}})$ telles que $(f(\cdot + \sigma'_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur \mathbb{R} vers une fonction g et $(f(\cdot + \sigma'_n + \tau'_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f(\cdot + \tau'_n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent simplement vers la même fonction h .

1.4.3 Fonctions pseudo presque-périodiques "PAP"

La notion de pseudo-presque périodicité est une généralisation de la presque-périodicité. Considérons $BC(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ est l'espace de toutes les fonctions continues bornées à valeurs dans \mathbb{E} muni de la norme du sup définie par $\|\phi\|_{\infty} := \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\phi(t)\|$, $PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ l'espace des perturbations ergodiques défini par

$$PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{E}) := \{f \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{E}) : \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \|f(\sigma)\| d\sigma = 0\}$$

Définition 1.20. [23] Une fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}$ est dite pseudo presque périodique, si elle admet l'écriture suivante :

$$f = g + \varphi$$

où $g \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ et $\varphi \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, avec

g et φ sont appelées la composante presque-périodique et perturbation ergodique respectivement, de la fonction f .

La collection de toutes les fonctions pseudo presque-périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{E} est dénotée par $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{E})$.

Exemple 1.4. *Considérons la fonction f_3 définie par :*

$$f_3(t) = \sin t + \sin \sqrt{2t} + \frac{1}{1+t^2} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

Alors f_3 est pseudo presque périodique (voir les figures 10 et 11), En effet, la fonction $t \mapsto \sin t + \sin \sqrt{2t}$ appartient à $AP(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, (voir exemple 2.3) et on a aussi $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est dans $PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, car elle est continue et bornée, de plus

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \frac{1}{1+t^2} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} [\arctan(t)]_{-T}^T \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} [2 \arctan(t)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

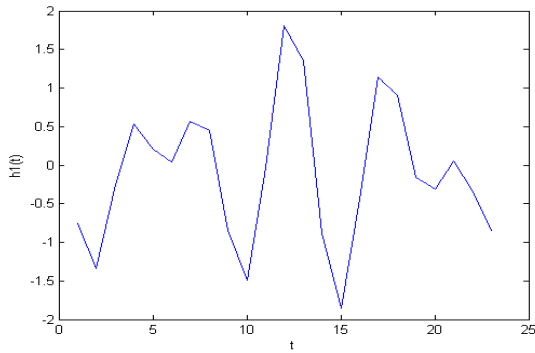


FIGURE 10 – Comportement de la fonction pseudo presque-périodique f_3 sur $[3, 25]$

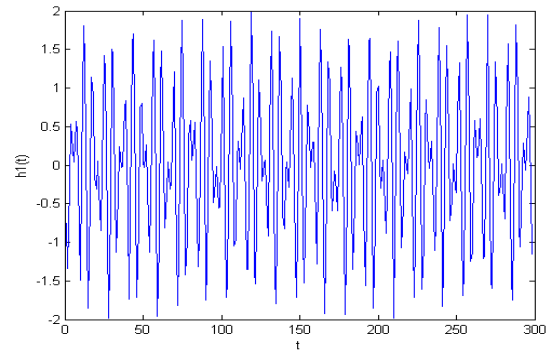


FIGURE 11 – Comportement de la fonction pseudo presque-périodique f_3 sur $[0, 300]$

1.4.4 Fonctions pseudo presque-périodiques avec poids "WPAP"

Soit $(\mathbb{E}, \|\cdot\|_\infty)$ un espace de Banach et $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ dénote l'espace de toutes les fonctions localement intégrables sur \mathbb{R} . Soit \mathbb{U} défini par :

$$\mathbb{U} := \{\rho \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) : \rho(x) > 0 \text{ presque pour tout } x \in \mathbb{R}\}$$

Dorénavant, si $\rho \in \mathbb{U}$ et pour $R > 0$, on pose alors

$$m(R, \rho) := \int_{-R}^{+R} \rho(x) dx$$

L'espace des fonctions poids est défini par :

$$\mathbb{U}_\infty := \{\rho \in \mathbb{U} : \lim_{R \rightarrow \infty} m(R, \rho) = +\infty\}$$

$$\mathbb{U}_B := \{\rho \in \mathbb{U}_\infty : \rho \text{ est bornée et } \inf_{x \in \mathbb{R}} \rho(x) > 0\}$$

Évidemment, $\mathbb{U}_B \subset \mathbb{U}_\infty \subset \mathbb{U}$, avec des inclusions strictes. Ces inclusions peuvent être illustrées par les exemples suivants.

Exemple 1.5. [24]

✂ Soit $\rho_0(x) = \frac{2+|x|}{1+|x|}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ il est facile de voir que $\rho_0 \in \mathbb{U}_\infty$, car

$$\lim_{T \rightarrow \infty} m(T, \rho_0) = \infty$$

de plus, on remarque que $1 \leq \rho_0(x) \leq 2$ et donc $\rho_0 \in \mathbb{U}_B$.

✂ Soit $\rho_1(x) = e^{(x)}$ pour chaque $x \in \mathbb{R}$. Il n'est pas difficile de voir que $\rho_1 \in \mathbb{U}_\infty - \mathbb{U}_B$.

Définition 1.21. [26, 24] Soit $\rho \in U_\infty$. On définit l'espace ergodique avec poids par

$$PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{E}, \rho) := \{f \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{E}) : \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{m(T, \rho)} \int_{-T}^T \|f(\sigma)\| \rho(\sigma) d\sigma = 0\}$$

Définition 1.22. [26] Soit $\rho \in U_\infty$ La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}$ est dite pseudo presque périodique avec poids (ou ρ -pseudo presque périodique) si elle s'écrit comme suit

$$f = g + \varphi$$

où $g \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ et $\varphi \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{E}, \rho)$.

L'ensemble de toutes les fonctions pseudo presque-périodiques avec le poids ρ de \mathbb{R} dans \mathbb{E} est noté $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{E}, \rho)$

Remarque 1.3. Les fonctions g et φ qui apparaissent dans la définition précédente sont appelées respectivement les composantes presque-périodiques et ergodiques avec le poids ρ de φ .

Exemple 1.6.

✦ Considérons la fonction f_4 définie par :

$$f_4(t) = \sin t + \sin \sqrt{2}t + e^{-t}, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

Alors f_4 est pseudo presque périodique avec poids de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . En effet, la fonction $t \mapsto \sin t + \sin \sqrt{2}t$ appartient à $AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on a aussi e^{-t} est dans $PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$, car elle est continue et bornée, avec :

si $\rho(t) = e^t$ pour chaque $t \in \mathbb{R}$, on a $m(R, \rho) = e^R - e^{-R}$ et d'ici $\rho \in U_\infty$, d'où

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{e^R - e^{-R}} \int_{-R}^{+R} e^t e^{-t} dt = 0.$$

Donc $f_4(t)$ est pseudo presque périodique avec poids (voir les figures 12 et 13).

✦ Soit $\rho_0 = 1 + x^2$ pour $\forall x \in \mathbb{R}$, il est facile de voir que $m(R, \rho) = 2R + \frac{2}{3}R^3$, et donc $\rho_0 \in U_\infty$.

Soit $f(x) = \sin(x) + \sin(\sqrt{2}x) + e^{(-|x|)}$. f appartient à $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho_0)$. En particulier, $\sin(x) + \sin(\sqrt{2}x)$ est sa composante presque periodique, tandis que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2(R + \frac{R^3}{3})} \int_{-R}^{+R} e^{(-|x|)} (1 + x^2) dx = 0$$

✦ Soit $\rho_1(x) = |x|^d$ pour $d \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $m(R, \rho_1) = \frac{2R^{d+1}}{d+1}$, et donc $\rho_1 \in U_\infty$.

Maintenant, soit $f(x) = \sin(x) + \sin(\sqrt{2}x) + \frac{1}{1+|x|^{d+1}}$. Donc f appartient à $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho_1)$, car $\sin(x) + \sin(\sqrt{2}x)$ et sa composante presque periodique, tandis que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{d+1}{2R^{d+1}} \int_{-R}^{+R} \frac{1}{1+|x|^{d+1}} \cdot |x|^d dx = 0$$

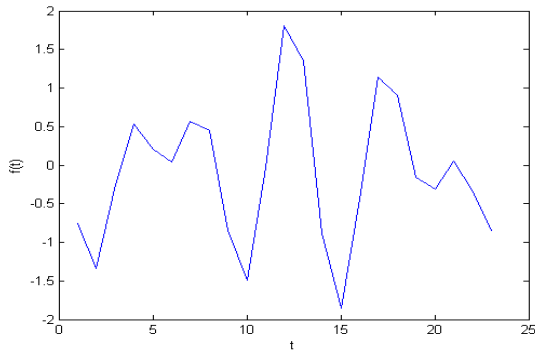


FIGURE 12 – Comportement de la fonction pseudo presque-périodique avec poids f_4 sur $[3, 25]$

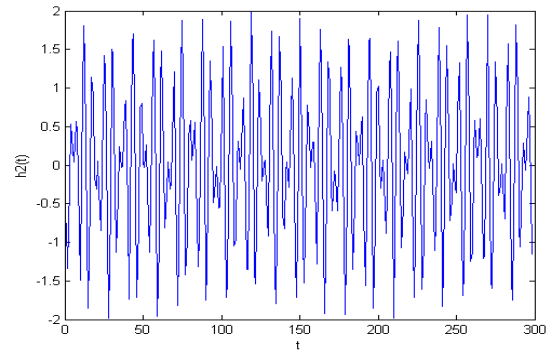


FIGURE 13 – Comportement de la fonction pseudo presque-périodique avec poids f_4 sur $[0; 300]$

✂ Soit $\rho_2(x) = \frac{2+x^2}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a $m(R, \rho_2) = 2(R + \arctan(R))$, alors $\rho_2 \in \mathcal{U}_\infty$. de plus $1 \leq \rho_2(x) \leq 2 \forall x \in \mathbb{R}$, et donc $\rho_2 \in \mathcal{U}_B$.
Maintenant, on définit $f(x) = \cos(x) + \cos(\sqrt{2}x) + \frac{1}{2+x^2}$. Il est clair que $f \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho_2)$.

Un autre moyen efficace de construire des fonctions pseudo-périodiques avec poids est l'opérateur de convolution.

Proposition 1.23. [24] Fixez $\rho \in \mathcal{U}_B$. Soit $f \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$, et soit $g \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $f * g$ la convolution de f et g sur \mathbb{R} appartient à $PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$.

Théorème 1.24. [24] La décomposition d'une fonction ρ -pseudo presque-périodique $f = g + \phi$, où $g \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ et $\phi \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{E}, \rho)$, est unique. Ceci est basé sur le fait que $g(\mathbb{R}) \in \overline{f(\mathbb{R})}$. Par conséquent, $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{E}, \rho) = AP(\mathbb{R}, \mathbb{E}) \oplus PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{E}, \rho)$.

Définition 1.25. [24, 7] Soit $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{U}_\infty$. On dit que ρ_1 est équivalent à ρ_2 et on note $\rho_1 \sim \rho_2$ chaque fois que $\frac{\rho_1}{\rho_2} \in \mathcal{U}_B$.

Théorème 1.26. [24] Soit $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{U}_\infty$. Si ρ_1 est équivalent à ρ_2 , alors $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{E}, \rho_1) = PAP(\mathbb{R}, \mathbb{E}, \rho_2)$.

Une conséquence immédiate du Théorème est le corollaire suivant, qui nous permet de coïncider l'espace de Zhang $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{E}) = AP(\mathbb{R}, \mathbb{E}) \oplus PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ avec la classe des fonctions pseudo presque-périodiques avec poids $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{E}, \rho)$.

Si le poids est borné alors l'espace des fonctions pseudo presque périodiques avec poids coïncide avec l'espace des fonctions pseudo presque-périodiques. Ceci est donné par le corollaire suivant :

Corollaire 1.27. Si $\rho \in \mathcal{U}_B$, alors $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{E}, \rho) = PAP(\mathbb{R}, \mathbb{E})$.

La proposition suivante est essentielle pour la suite.

Proposition 1.28. [26] Soit le poids $\rho : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ continue. Si,

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \left[\frac{\rho(s + \tau)}{\rho(s)} \right] \text{ et } \overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \left[\frac{m(R + \tau, \rho)}{m(R, \rho)} \right] \text{ sont finies}$$

pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, alors l'espace $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{E}, \rho)$ est invariant par translation.

Théorème 1.29. [26] Soit $\rho \in \mathbb{U}_B$, L'espace $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{E}, \rho)$ est un sous espace fermé de $(BC(\mathbb{R}, \mathbb{E}), \|\cdot\|_\infty)$ muni de la topologie de la norme uniforme. Par conséquent $(PAP(\mathbb{R}, \mathbb{E}, \rho), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Proposition 1.30. [24] Si $\rho \in \mathbb{U}_B$, soit $f \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{E}, \rho)$ et soit $g \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $f * g$, la convolution de f et g sur \mathbb{R} , appartient à $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{E}, \rho)$.

Voici un exemple d'une fonction qui est pseudo presque-périodique avec poids et qui n'est pas pseudo presque-périodique.

Exemple 1.7. [15] Considérons la fonction h_2 définie par :

$$h_2(t) = \sin t + \sin \sqrt{2t} + e^{-t}, \forall t \in \mathbb{R}$$

On a d'après l'exemple précédent $h_2(t) \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{e^R - e^{-R}} \int_{-R}^{-R} e^t e^{-t} dt = 0,$$

tandis que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{-R} e^{-t} dt = +\infty,$$

D'ici, h_2 n'appartient pas à $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2 Existence de la solution pseudo presque-périodique avec poids d'un modèle de BAMNN avec retard mixte

2.1 Etude mathématique dans les réseaux de neurones récurrents

Comme les réseaux de neurones récurrents sont modélisés par des équations différentielles, alors on étudie la solution de réseau de neurones récurrents où bien leurs points d'équilibre. Dans ce cas, par exemple on s'intéresse aux équations différentielles ordinaires suivante :

$$y_i'(t) = f(t, y_i(t)) \quad (8)$$

d'où

- Pour $y_i(t)$ solution de (8), on peut traité :
 - **L'existence** de la solution asymptotique.
 - **La stabilité** de la solution asymptotique.
 - **La convergence** de la solution.
 - **L'oscillations** de la solution asymptotique (périodicité).
- Pour $y_i(t) = a$ un point d'équilibre de (8) c'est-à-dire $y_i'(t) = 0$, on peut étudier :
 - **L'existence** du point d'équilibre.
 - **La stabilité** du point d'équilibre.
 - **La convergence** dans le système.

2.2 Quelques travaux sur la périodicité dans les modèles de réseaux de neurones de type BAM

L'existence et la stabilité des solutions deviennent des problèmes importants dans la théorie qualitative des équations différentielles en général et dans les réseaux de neurones récurrents en particulier, est due à leurs applications par exemple dans la biologie, l'économie et la physique.

Compte tenu des effets des facteurs environnementaux, nous pouvons supposer que les paramètres d'un tel système dynamique qui modélisent le réseau de neurones récurrent sont des fonctions presque-périodiques, ou des fonctions dans des classes plus générales. En effet, l'étude d'existence et la stabilité des solutions périodiques, ainsi que ses nombreuses généralisations a des solutions presque-périodiques, des solutions pseudo presque-périodiques et pseudo presque-périodiques avec poids dans RNN.

Dans ce qui suit nous allons présenté quelques travaux récents de nos recherches bibliographiques sur l'application des fonctions presque périodiques ou leurs généralisations sur les réseaux de neurones de types BAM, avec trois types de retards, c'est-à-dire :

- BAMNNs à retard Simple ([40, 56]) ;
- BAMNNs à retard noyau ([31, 41, 74]) ;
- BAMNNs retard mixte ([2]).

Dans le tableau 1 suivant, on cite :

Type de périodicité dans BAM	Références
Périodicité	[10, 30, 31, 66]
Presque-périodicité	[34, 54]
Pseudo presque-périodicité	[3, 74]
Pseudo presque-périodicité avec poids	[2]

TABLE 1 – Périodicité dans les réseaux de neurones BAM (travaux récents)

2.3 Présentation du BAM avec retard mixte ainsi que les hypothèses

Dans ce mémoire, nous présentons un modèle de réseau de neurones de type BAM avec retard mixte et des coefficients dépendants du temps [2], donné comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^m c_{ij}(t) f_j(y_j(t - \tau_{ji})) + \sum_{j=1}^m d_{ij}(t) \int_{-\infty}^t K_{ij}(t - s) f_j(y_j(s)) ds + I_i(t) \\ \dot{y}_j(t) = -b_j y_j(t) + \sum_{i=1}^n w_{ji}(t) g_i(x_i(t - \sigma_{ij})) + \sum_{i=1}^n \alpha_{ji}(t) \int_{-\infty}^t N_{ji}(t - s) g_i(x_i(s)) ds + J_j(t) \end{cases} \quad (9)$$

où

- n et m , correspondent au nombre de neurones de la couche X et de la couche Y, respectivement ;
- $x_i(\cdot)$ et $y_j(\cdot)$, sont l'activation des i^{me} et j^{me} neurones respectivement ;
- $c_{ij}(\cdot)$, $d_{ij}(\cdot)$, $\alpha_{ji}(\cdot)$ et $w_{ji}(t)$ sont les poids de connexion ;
- $f_j(y_j(t - \tau_{ji}))$ and $f_j(y_j(s))$ sont respectivement les fonctions d'activation du j^{me} neurone à l'instant t avec un retard discret τ_{ji} et sans retard ;
- $g_i(x_i(t - \sigma_{ij}))$ et $g_i(x_i(s))$ sont respectivement les fonctions d'activation du i^{me} neurone au temps t avec un retard discret et sans retard ;
- $I_i(t)$ et $J_j(t)$ désignent les entrées externes à l'instant t ;
- a_i , b_j représentent le taux avec lequel le i^{me} neurone et j^{me} neurone remettront leur potentiel à l'état de repos de manière isolée lorsqu'ils sont déconnectés du réseau et des entrées externes à l'instant t , respectivement ;
- $K_{ij}(\cdot)$ et $N_{ji}(\cdot)$ représente type noyau du i^{me} neurone et du j^{me} neurone après qu'ils ont tiré ou répondu.
- τ_{ji} et σ_{ij} des retards constans et on note :

$$\tau = \max_{1 \leq i \leq n} \max_{1 \leq j \leq m} \{\tau_{ji}, \sigma_{ij}\}.$$

Les conditions initiales associées à l'équation. (9) sont de la forme

$$\begin{cases} x_i(t) = \varphi_i(t), & t \in [-\infty, 0] \\ y_j(t) = \psi_j(t), & t \in [-\infty, 0] \end{cases}$$

où $\varphi_i(\cdot)$ et $\psi_j(\cdot)$ sont supposés être des fonctions pseudo presque-périodiques avec poids sur \mathbb{R} .

Pour un vecteur arbitraire :

$$(x(t), y(t)) := (x_1(t), \dots, x_n(t), y_1(t), \dots, y_m(t))^T \in \mathbb{R}^{n+m}$$

définir la norme : $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$ où,

$$\|x\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i(t)|\}$$

et

$$\|y\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \max_{1 \leq j \leq m} \{|y_j(t)|\}.$$

✱ Considérons les hypothèses suivantes :

- **(H₁)** $\forall i, j; a_i > 0, b_j > 0$.
- **(H₂)** $\forall i, j$; les fonctions suivantes : $I_i(\cdot), J_j(\cdot), c_{ij}(\cdot), d_{ij}(\cdot), w_{ji}(\cdot), \alpha_{ji}(\cdot)$ sont pseudo presque-périodiques avec poids.
- **(H₃)** $\forall i, j$; il existe des nombres constants positifs $L_j^f, L_i^g > 0$ tels que $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$|f_j(x) - f_j(y)| < L_j^f |x - y|, \quad |g_i(x) - g_i(y)| < L_i^g |x - y|.$$

De plus, on suppose que $f_j(0) = g_i(0) = 0 \forall i, j$.

- **(H₄)** $\forall i, j$; les noyaux de retard $K_{ij} : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ et $N_{ji} : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ sont continues, intégrables et il existe des constantes non négatives k_{ij}, n_{ji} telles que :

$$\int_0^{+\infty} K_{ij}(s) ds \leq k_{ij} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} N_{ji}(s) ds \leq n_{ji}$$

- **(H₅)** Soit $\varrho \in U_\infty$ et supposons que pour chaque $\tau \in \mathbb{R}$ les fonctions

$$s \mapsto \left\{ \frac{\varrho(s + \tau)}{\varrho(s)} \right\} < \infty \quad \text{et} \quad s \mapsto \left\{ \frac{m(s + \tau, \varrho)}{m(s, \varrho)} \right\} < \infty$$

sont bornées.

2.4 Existence de la solution WPAP

Lemme 2.1. [2] Sous **(H₅)**, l'espace $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \varrho)$ est invariant par translation c'est à dire : si $\varphi(\cdot) \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$ alors $\varphi(\cdot - h) \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$ pour tout $h \in \mathbb{R}$.

Démonstration. ([45]) Soit $\varphi(\cdot) \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \rho)$. Par définition, on peut écrire :

$$\varphi(\cdot) = \varphi_1(\cdot) + \varphi_2(\cdot)$$

avec $\varphi_1(\cdot) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\varphi_2(\cdot) \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$.

Ainsi

$$\varphi(\cdot - h) = \varphi_1(\cdot - h) + \varphi_2(\cdot - h).$$

On sait que si $\varphi_1(\cdot) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ alors $\varphi_1(\cdot - h) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ voir [48, 49] (AP est invariant par translation). Maintenant, sachant que $\varphi_2(\cdot) \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car $\varphi_2(\cdot) \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$, montrons que $\varphi_2(\cdot - h) \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \rho)$, c'est-à-dire

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\varphi_2(t - h)| \rho(t) dt = 0.$$

On distingue deux cas ($h \geq 0$ et $h \leq 0$). On pose : $s = t - h \Rightarrow ds = dt \quad t = s + h$,

A) Pour $h \in \mathbb{R}$, $h \geq 0$ on a :

$$\begin{aligned}
& \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\varphi_2(t-h)| \rho(t) dt \\
&= \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T-h}^{T-h} |\varphi_2(s)| \rho(s+h) ds \\
&= \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \left(\int_{-T-h}^{T-h} |\varphi_2(s)| \rho(s+h) ds + \int_{T-h}^{T+h} |\varphi_2(s)| \rho(s+h) ds \right. \\
&\quad \left. - \int_{T-h}^{T+h} |\varphi_2(s)| \rho(s+h) ds \right) \\
&= \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \left(\int_{-T-h}^{T+h} |\varphi_2(s)| \rho(s+h) ds - \int_{T-h}^{T+h} |\varphi_2(s)| \rho(s+h) ds \right) \\
&\leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T-h}^{T+h} |\varphi_2(s)| \rho(s+h) ds,
\end{aligned}$$

B) Pour $h \in \mathbb{R}$, $h \leq 0$ on a :

$$\begin{aligned}
& \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\varphi_2(t-h)| \rho(t) dt \\
&= \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T-h}^{T-h} |\varphi_2(s)| \rho(s+h) ds \\
&= \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \left(\int_{-T-h}^{T-h} |\varphi_2(s)| \rho(s+h) ds + \int_{-T+h}^{-T-h} |\varphi_2(s)| \rho(s+h) ds \right. \\
&\quad \left. - \int_{-T+h}^{-T-h} |\varphi_2(s)| \rho(s+h) ds \right) \\
&= \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \left(\int_{-T+h}^{T-h} |\varphi_2(s)| \rho(s+h) ds - \int_{-T+h}^{-T-h} |\varphi_2(s)| \rho(s+h) ds \right) \\
&\leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T+h}^{T-h} |\varphi_2(s)| \rho(s+h) ds.
\end{aligned}$$

Donc, de A) et B), on obtient

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\varphi_2(t-h)| \rho(t) dt \leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T-|h|}^{T+|h|} |\varphi_2(s)| \rho(s+|h|) ds.$$

En utilisant la condition (H_5) , on obtient :

$$\begin{aligned}
& \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T-|h|}^{T+|h|} |\varphi_2(s)| \rho(s+|h|) ds \\
&\leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\mu(T+|h|, \rho)}{\mu(T, \rho)} \frac{1}{\mu(T+|h|, \rho)} \int_{-T-|h|}^{T+|h|} |\varphi_2(s)| \rho(s+|h|) \times \frac{\rho(s)}{\rho(s)} ds \\
&\leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\mu(T+|h|, \rho)}{\mu(T, \rho)} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T+|h|, \rho)} \int_{-T-|h|}^{T+|h|} |\varphi_2(s)| \rho(s) ds \times \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\rho(t+|h|)}{\rho(t)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Comme $\varphi_2(\cdot - h) \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \rho)$, alors $\varphi(\cdot - h) \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$. Ainsi, l'espace $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$ est invariant par translation. \square

Lemme 2.2. [2] Si $\varphi, \psi \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$ alors $\varphi \times \psi \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$.

Démonstration. Par définition, on peut écrire

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \text{ et } \psi = \psi_1 + \psi_2$$

avec $\varphi_1, \psi_1 \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\varphi_2, \psi_2 \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$.
c'est à dire

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\varphi_2(t)| \rho(t) dt = 0$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\psi_2(t)| \rho(t) dt = 0$$

ainsi :

$$\varphi\psi = \varphi_1\psi_1 + \varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1 + \varphi_2\psi_2,$$

On sait que $\varphi_1\psi_1 \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (voir [15]), et pour $\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1 + \varphi_2\psi_2 \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\varphi_1(t)\psi_2(t) + \varphi_2(t)\psi_1(t) + \varphi_2(t)\psi_2(t)| \rho(t) dt$$

$$\leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\varphi_1(t)\psi_2(t) + \varphi_2(t)\psi_1(t) + \varphi_2(t)\psi_2(t)| \rho(t) dt$$

$$\leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T (|\varphi_1(t)\psi_2(t)|\rho(t) + |\varphi_2(t)\psi_1(t)|\rho(t) + |\varphi_2(t)\psi_2(t)|\rho(t)) dt$$

Comme $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car $AP(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset BC(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset BC(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors on pose :

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi_1(t)| = A < +\infty,$$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi_2(t)| = B < +\infty,$$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |\psi_1(t)| = C < +\infty,$$

d'où

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T (|\varphi_1(t)\psi_2(t)|\rho(t) + |\varphi_2(t)\psi_1(t)|\rho(t) + |\varphi_2(t)\psi_2(t)|\rho(t)) dt$$

$$= \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\varphi_1(t)\psi_2(t)|\rho(t) dt + \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\varphi_2(t)\psi_1(t)|\rho(t) dt$$

$$+ \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\varphi_2(t)\psi_2(t)|\rho(t) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\varphi_1(t)| |\psi_2(t)| \rho(t) dt + \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\varphi_2(t)| |\psi_1(t)| \rho(t) dt \\
&+ \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\varphi_2(t)| |\psi_2(t)| \rho(t) dt \\
&= \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T \sup_{t \in \mathbb{R}} (|\varphi_1(t)|) |\psi_2(t)| \rho(t) dt + \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\varphi_2(t)| \sup_{t \in \mathbb{R}} (|\psi_1(t)|) \rho(t) dt \\
&+ \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\sup_{t \in \mathbb{R}} (|\varphi_2(t)|)| \psi_2(t)| \rho(t) dt \\
&= \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T A |\psi_2(t)| \rho(t) dt + \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\varphi_2(t)| B \rho(t) dt \\
&+ \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T C |\psi_2(t)| \rho(t) dt \\
&= A \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\psi_2(t)| \rho(t) dt + B \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\varphi_2(t)| \rho(t) dt \\
&+ C \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\psi_2(t)| \rho(t) dt \\
&= A \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\psi_2(t)| \rho(t) dt + B \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\varphi_2(t)| \rho(t) dt \\
&+ C \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\psi_2(t)| \rho(t) dt \\
&= A \times 0 + B \times 0 + C \times 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

d'où $\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1 + \varphi_2\psi_2 \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$. Alors $\varphi\psi \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$. \square

Lemme 2.3. [45] Si $\varphi, \psi \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$, alors $(\varphi + \psi) \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$.

Démonstration. Par définition, on peut écrire

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \text{ et } \psi = \psi_1 + \psi_2$$

avec $\varphi_1, \psi_1 \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\varphi_2, \psi_2 \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$, c'est à dire

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\varphi_2(t)| \rho(t) dt = 0$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\psi_2(t)| \rho(t) dt = 0$$

ainsi,

$$\varphi + \psi = \varphi_1 + \varphi_2 + \psi_1 + \psi_2 = (\varphi_1 + \psi_1) + (\varphi_2 + \psi_2).$$

On sait que $\varphi_1 + \psi_1 \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (voir [45]), et pour $\varphi_2 + \psi_2 \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car $\varphi_2, \psi_2 \in$

$BC(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}
& \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\varphi_2(t) + \psi_2(t)| \rho(t) dt \\
&= \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\varphi_2(t) + \psi_2(t)| \rho(t) dt \\
&\leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T (|\varphi_2(t)| + |\psi_2(t)|) \rho(t) dt \\
&= \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\varphi_2(t)| \rho(t) dt + \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\psi_2(t)| \rho(t) dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

Comme $(\varphi_2 + \psi_2) \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$, alors $\varphi + \psi \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$. \square

Théorème 2.4. [2] *Supposons que les hypothèses (H_3) , (H_4) , (H_5) soient vérifiées et que $\forall i, j; x_i(\cdot), y_j(\cdot) \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$ alors :*

$$\phi_{ij} : t \mapsto \int_{-\infty}^t K_{ij}(t-s) f_j(y_j(s)) ds \text{ appartient à } PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$$

et

$$\psi_{ij} : t \mapsto \int_{-\infty}^t N_{ji}(t-s) g_i(x_i(s)) ds \text{ appartient à } PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho).$$

Démonstration. D'abord, on commence par la fonction ϕ_{ij} . La fonction ϕ_{ij} satisfait :

$$\begin{aligned}
|\phi_{ij}| &\leq \int_{-\infty}^t K_{ij}(t-s) f_j(y_j(s)) ds \\
&\leq \int_{-\infty}^t K_{ij}(t-s) M^f ds \\
&= k_{ij} M^f
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\int_{-\infty}^t K_{ij}(t-s) f_j(y_j(s)) ds$ est absolument convergente et que la fonction ϕ_{ij} est bornée. Prouvons maintenant la continuité de la fonction ϕ_{ij} .

Soit $(w_n)_n$ une suite des nombres réels tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$. La continuité de la fonction $y_j(\cdot)$ implique que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n > N$,

$$|y_j(s + w_n) - y_j(s)| \leq \frac{\epsilon}{k_{ij} L^f}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
|\phi_{ij}(t + w_n) - \phi_{ij}| &= \left| \int_{-\infty}^{t+w_n} K_{ij}(t+w_n-s) f(y_j(s)) ds - \int_{-\infty}^t K_{ij}(t-s) f(y_j(s)) ds \right| \\
&\leq \int_{-\infty}^t K_{ij}(t-s) |f(y_j(s+w_n)) - f(y_j(s))| ds \\
&\leq \int_{-\infty}^t K_{ij}(t-s) L^f |y_j(s+w_n) - y_j(s)| ds \\
&\leq \int_{-\infty}^t K_{ij}(t-s) L^f ds \frac{\epsilon}{k_{ij} L^f} = \epsilon
\end{aligned}$$

Il reste à prouver que la fonction ϕ_{ij} appartient à $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$. En utilisant le théorème de composition des fonctions pseudo presque-périodiques avec poids on aura : $f(y_j(\cdot)) \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$ pour tout $1 \leq j \leq m$. Par le théorème de décomposition des fonctions pseudo presque-périodiques avec poids on obtient aussi que :

$$f(y_j(s)) = u_j(\theta) + v_j(\theta)$$

avec $u_j \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $v_j \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$. Par conséquent

$$\begin{aligned} \phi_{ij}(t) &= \int_{-\infty}^t K_{ij}(t-s)[u_j(s) + v_j(s)]ds \\ &= \int_{-\infty}^t K_{ij}(t-s)u_j(s)ds + \int_{-\infty}^t K_{ij}(t-s)v_j(s)ds \\ &= \phi_{ij}^1(t) + \phi_{ij}^2(t) \end{aligned}$$

Pour $u_j \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, ce qui implique que $\sup_{t \in \mathbb{R}} |u_j(t + \delta) - u_j(t)| < \epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$.

$$\begin{aligned} |\phi_{ij}^1(t + \delta) - \phi_{ij}^1(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{t+\delta} K_{ij}(t + \delta - s)u_j(s)ds - \int_{-\infty}^t K_{ij}(t - s)u_j(s)ds \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^t K_{ij}(t - s)u_j(s + \delta)ds - \int_{-\infty}^t K_{ij}(t - s)u_j(s)ds \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^t K_{ij}(t - s)|u_j(s + \delta) - u_j(s)|ds \\ &\leq \epsilon \int_{-\infty}^t K_{ij}(t - s)ds \\ &= K_{ij}\epsilon \end{aligned}$$

ce qui implique que $\phi_{ij}^1 \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Soit

$$\phi_{ij}^2 = \int_{-\infty}^t K_{ij}(t-s)u_j(s)ds,$$

on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(r, \rho)} \int_{-r}^r |\phi_{ij}^2(t)|\rho(t)dt &= \frac{1}{\mu(r, \rho)} \int_{-r}^r \left| \int_{-\infty}^t K_{ij}(t-s)u_j(s)ds \right| \rho(t)dt \\ &= \frac{1}{\mu(r, \rho)} \int_{-r}^r \left| \int_0^{+\infty} K_{ij}(s)u_j(t-s)ds \right| \rho(t)dt \\ &\leq \frac{1}{\mu(r, \rho)} \int_{-r}^r \int_0^{+\infty} K_{ij}(s)|u_j(t-s)|ds \rho(t)dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} K_{ij}(s) \left(\frac{1}{\mu(r, \rho)} \int_{-r}^r |u_j(t-s)|\rho(t)dt \right) ds \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ceci implique que $\phi_{ij}^2(\cdot) \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$. Il en résulte que, $\phi_{ij}(\cdot) = \phi_{ij}^1(\cdot) + \phi_{ij}^2(\cdot)$ est pseudo presque-périodique avec poids, i.e.

$$\phi_{ij}(\cdot) \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho) \text{ pour } 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m.$$

De la même façon on démontre que la fonction

$$\psi_{ij} : t \mapsto \int_{-\infty}^t N_{ji}(t-s)g_i(x_i(s))ds$$

appartient à $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$ pour $1 \leq i \leq n$, et $1 \leq j \leq m$. \square

Théorème 2.5. [2] *Sous les hypothèses $(H_1) - (H_5)$, on suppose aussi que pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$*

$$(H_6) : \quad \sup_{T>0} \left\{ \int_{-T}^T e^{-a_i(T+t)} \rho(t) dt \right\} < \infty, \quad \text{et} \quad \sup_{T>0} \left\{ \int_{-T}^T e^{-b_j(T+t)} \rho(t) dt \right\} < \infty.$$

Définissons l'opérateur non linéaire Γ comme suit, pour tout $(\varphi, \psi) = (\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi_1, \dots, \psi_m) \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n+m}, \rho)$, $(\Gamma(\varphi, \psi))(t) := x_{(\varphi, \psi)}(t)$ avec

$$x_{(\varphi, \psi)}(t) = \begin{pmatrix} \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)a_1} F_1(s) ds \\ \vdots \\ \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)a_n} F_n(s) ds \\ \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)b_1} G_1(s) ds \\ \vdots \\ \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)b_m} G_m(s) ds \end{pmatrix}$$

avec

$$F_i(s) = \sum_{j=1}^m c_{ij}(s) f_j(\psi_j(s - \tau_{ij})) + \sum_{j=1}^m d_{ij}(s) \int_{-\infty}^s K_{ij}(s - \theta) f_j(\psi_j(\theta)) d\theta + I_i(s)$$

et

$$G_i(s) = \sum_{i=1}^n w_{ji}(s) g_i(\varphi_i(s - \sigma_{ji})) + \sum_{j=1}^n \alpha_{ji}(s) \int_{-\infty}^{\xi} N_{ji}(s - \theta) g_i(\varphi_i(\theta)) d\theta + J_j(s)$$

. alors Γ est un opérateur bien défini de $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n+m}, \rho)$ dans $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n+m}, \rho)$.

Démonstration. Notons que, en utilisant les lemmes précédents (Lemmes 2.1, 2.2 et 2.3) ainsi que le théorème 2.4, nous constatant que pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$, les fonctions

$$F_i : s \mapsto \sum_{j=1}^m c_{ij}(s) f_j(\psi_j(s - \tau_{ij})) + \sum_{j=1}^m d_{ij}(s) \int_{-\infty}^s K_{ij}(s - \theta) f_j(\psi_j(\theta)) d\theta + I_i(s)$$

et

$$G_i : s \mapsto \sum_{i=1}^n w_{ji}(s) g_i(\varphi_i(s - \sigma_{ji})) + \sum_{j=1}^n \alpha_{ji}(s) \int_{-\infty}^{\xi} N_{ji}(s - \theta) g_i(\varphi_i(\theta)) d\theta + J_j(s)$$

. sont pseudo presque-périodiques avec poids. Par conséquent, pour tout $1 \leq i \leq n$, F_i peut être représenté par :

$$F_i = F_i^1 + F_i^2$$

, et pour tout $1 \leq j \leq m$, G_j peut être représenté aussi par :

$$G_j = G_j^1 + G_j^2$$

, avec $F_i^1, G_j^1 \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $F_i^2, G_j^2 \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \rho)$.

On note aussi par

$$\Gamma = (\Gamma_i F_i, \Gamma_j G_j)$$

Dans ce qui suit, on décompose cette preuve en deux parties :

partie 1 pour montrer que

$$\Gamma_i F_i(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)a_i} F_i(s) ds \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$$

et partie 2 pour montrer que

$$\Gamma_j G_j(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)b_j} G_j(s) ds \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho).$$

Donc :

► Partie 1

$$\begin{aligned} (\Gamma_i \varphi)(t) &= \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)a_i} F_i(s) ds \\ &= \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)a_i} (F_i^1(s) + F_i^2(s)) ds \\ &= \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)a_i} F_i^1(s) ds + \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)a_i} F_i^2(s) ds \\ &= (\Gamma_i F_i^1)(t) + (\Gamma_i F_i^2)(t). \end{aligned}$$

Montrons la presque-périodicité des $(\Gamma_i F_i^1) : t \mapsto \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)a_i} F_i^1(s) ds$. Pour $\epsilon > 0$, on considère, en tenant compte de la presque-périodicité de F_i^1 , un nombre L_ϵ tel que sur tout intervalle $[\alpha, \alpha + L_\epsilon]$ il existe un nombre δ , tel que la propriété suivante a lieu :

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} | F_i^1(t + \delta) - F_i^1(t) | < \epsilon.$$

Ensuite, on peut écrire

$$\begin{aligned} | (\Gamma_i F_i^1)(t + \tau) - (\Gamma_i F_i^1)(t) | &= \left| \int_{-\infty}^{t+\tau} e^{-(t+\tau-s)a_i} F_i^1(s) ds - \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)a_i} F_i^1(s) ds \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)a_i} F_i^1(s + \tau) ds - \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)a_i} F_i^1(s) ds \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)a_i} | F_i^1(s + \tau) - F_i^1(s) | ds \\ &\leq \frac{\epsilon}{a_i}. \end{aligned}$$

On obtient donc $(\Gamma_i F_i^1) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Maintenant pour $(\Gamma_i F_i^2)$, on a

$$\begin{aligned} & \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\Gamma_i F_i^2(s)| \rho(t) dt \\ & \leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)a_i} |F_i^2(s)| \rho(t) dt \\ & \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T \left(\int_{-T}^t e^{-(t-s)a_i} |F_i^2(s)| ds + \int_{-\infty}^{-T} e^{-(t-s)a_i} |F_i^2(s)| ds \right) \rho(t) dt \\ & \leq I_1 + I_2, \end{aligned}$$

avec

$$I_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T \left(\int_{-T}^t e^{-(t-s)a_i} |F_i^2(s)| ds \right) \rho(t) dt$$

et

$$I_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T \left(\int_{-\infty}^{-T} e^{-(t-s)a_i} |F_i^2(s)| ds \right) \rho(t) dt.$$

Pour I_1 , posons $m = t - s$, on a

$$\begin{aligned} I_1 &= \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T \left(\int_0^{t+T} e^{-ma_i} |F_i^2(t-m)| dm \right) \rho(t) dt \\ &\leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T \left(\int_0^{+\infty} e^{-ma_i} |F_i^2(t-m)| dm \right) \rho(t) dt, \end{aligned}$$

la fonction

$$(m, t) \mapsto e^{-ma_i} |F_i^2(t-m)| \rho(t)$$

est mesurable, donc d'après le théorème de Fubini nous pouvons permuter les deux intégrales. On obtient alors :

$$I_1 \leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-ma_i} \left(\frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |F_i^2(t-m)| \rho(t) dt \right) dm.$$

Notons que

$$|e^{-ma_i} \left(\frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |F_i^2(t-m)| \rho(t) dt \right)| \leq \sup_{m \in \mathbb{R}^+} \{ |F_i^2(m)| \},$$

et par le théorème de la convergence dominée, on obtient

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \int_0^{+\infty} e^{-ma_i} \left(\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T-m}^{T-m} |F_i^2(t)| \rho(t+m) dt \right) dm \\ &\leq \int_0^{+\infty} e^{-ma_i} \left(\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\mu(T+m, \rho)}{\mu(T, \rho)} \frac{1}{\mu(T+m, \rho)} \int_{-T-m}^{T+m} |F_i^2(t)| \rho(t+m) dt \right) dm, \end{aligned}$$

comme la fonction $F_i^2 \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$, donc

$$I_1 = 0.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T \left(\int_{-\infty}^{-T} |e^{-(t-s)a_i} F_i^2(s)| ds \right) \rho(t) dt \\
&= \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T \left(\int_{-\infty}^{-T} e^{-(t-s)a_i} |F_i^2(s)| ds \right) \rho(t) dt \\
&\leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-\infty}^{-T} e^{sa_i} |F_i^2(s)| ds \int_{-T}^T e^{-ta_i} \rho(t) dt \\
&= \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\|F_i^2\|_\infty}{\mu(T, \rho) a_i} \int_{-T}^T e^{-(T+t)a_i} \rho(t) dt \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction $(\Gamma_i F_i^2)$ appartient à $PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$. et donc pour tout $1 \leq i \leq n$, on a

$$\Gamma_i F_i(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)a_i} F_i(s) ds \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$$

► **Partie 2** De la même façon on démontre que la fonction

$$\Gamma_j G_j(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)b_j} G_j(s) ds \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho),$$

car

$$(\Gamma_j G_j^1) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

et

$$(\Gamma_j G_j^2) \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho).$$

A la fin de la **partie 1** et **2**, on déduit que pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$, on a $\Gamma(\varphi, \psi)$ appartient à $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n+m}, \rho)$. \square

Théorème 2.6. [2] *Supposons que les hypothèses $(H_1) - (H_5)$ soient vérifiées et que*

$$r = \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{\sum_{j=1}^m (|c_{ij}| + |d_{ij}| k_{ij}) L_j^f}{a_i} \right\}, \max_{1 \leq j \leq m} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n (|w_{ij}| + |\alpha_{ji}| n_{ji}) L_i^g}{b_j} \right\} \right\} < 1.$$

Alors, le réseau de neurone de type BAM de l'équation (9) a une solution unique pseudo presque-périodique avec poids dans l'ensemble convexe.

$$\beta = B((x_0, y_0), R) = \{(x, y) \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n+m}, \rho), \|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leq R\},$$

où

$$(x_0, y_0)(t) = \begin{pmatrix} \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)a_1} I_1(s) ds \\ \vdots \\ \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)a_n} I_n(s) ds \\ \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)b_1} J_1(s) ds \\ \vdots \\ \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)b_m} J_m(s) ds \end{pmatrix}$$

et

$$R = \frac{(\max_{1 \leq i \leq n} \{\frac{|I_i|_\infty}{a_i}\} + \max_{1 \leq j \leq m} \{\frac{|J_j|_\infty}{b_j}\})r}{(1-r)}.$$

Démonstration. [2] Il est évident que,

$$|\int_{-\infty}^t e^{-(t-s)a_i} I_i(\theta) d\theta| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{|I_i|_\infty}{a_i} \right\}$$

et

$$|\int_{-\infty}^t e^{-(t-s)b_j} J_j(\theta) d\theta| \leq \max_{1 \leq j \leq m} \left\{ \frac{|J_j|_\infty}{b_j} \right\}$$

par conséquent,

$$\| (x_0, y_0) \| = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{|I_i|_\infty}{a_i} \right\} + \max_{1 \leq j \leq m} \left\{ \frac{|J_j|_\infty}{b_j} \right\}$$

et

$$\begin{aligned} \| (x, y) \| &\leq \| (x, y) - (x_0, y_0) \| + \| (x_0, y_0) \| \\ &\leq R + \left(\max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{|I_i|_\infty}{a_i} \right\} + \max_{1 \leq j \leq m} \left\{ \frac{|J_j|_\infty}{b_j} \right\} \right) \\ &= \left(\frac{(\max_{1 \leq i \leq n} \{\frac{|I_i|_\infty}{a_i}\} + \max_{1 \leq j \leq m} \{\frac{|J_j|_\infty}{b_j}\})r}{(1-r)} \right) + \left(\max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{|I_i|_\infty}{a_i} \right\} + \max_{1 \leq j \leq m} \left\{ \frac{|J_j|_\infty}{b_j} \right\} \right) \\ &= \frac{(\max_{1 \leq i \leq n} \{\frac{|I_i|_\infty}{a_i}\} + \max_{1 \leq j \leq m} \{\frac{|J_j|_\infty}{b_j}\})}{(1-r)} \end{aligned}$$

Maintenant, considérons l'opérateur $\Gamma : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ défini par

$$\Gamma(x, y)(t) = \begin{pmatrix} \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)a_1} F_1(s) ds \\ \vdots \\ \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)a_n} F_n(s) ds \\ \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)b_1} G_1(s) ds \\ \vdots \\ \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)b_m} G_m(s) ds \end{pmatrix}$$

avec

$$F_i(s) = \sum_{j=1}^m c_{ij}(s) f_j(y_j(s - \tau_{ij})) + \sum_{j=1}^m d_{ij}(s) \int_{-\infty}^s K_{ij}(s - \theta) f_j(y_j(\theta)) d\theta + I_i(s)$$

et

$$G_i(s) = \sum_{j=1}^n w_{ji}(s) g_i(x_i(s - \sigma_{ji})) + \sum_{j=1}^n \alpha_{ji}(s) \int_{-\infty}^s N_{ji}(s - \theta) g_i(x_i(\theta)) d\theta + J_j(s).$$

Tout d'abord, nous allons prouver que l'opérateur Γ est un auto-mapping de β vers β . En effet, pour tout $(x, y) \in \beta$, on a

$$\begin{aligned}
& \| \Gamma(x, y) - (x_0, y_0) \| \\
&= \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} \max_{1 \leq i \leq n} \left| \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)a_i} F_i(s) ds \right| - \sup_{t \in \mathbb{R}} \max_{1 \leq i \leq n} \left| \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)a_i} I_i(s) ds \right| \right) \\
&+ \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} \max_{1 \leq j \leq m} \left| \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)b_j} G_j(s) ds \right| - \sup_{t \in \mathbb{R}} \max_{1 \leq j \leq m} \left| \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)b_j} J_j(s) ds \right| \right) \\
&\leq \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} \max_{1 \leq i \leq n} \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)a_i} \left| \sum_{j=1}^m c_{ij}(s) f_j(y_j(s - \tau_{ij})) + \sum_{j=1}^m d_{ij}(s) \int_{-\infty}^s K_{ij}(s - \theta) f_j(y_j(\theta)) d\theta \right| ds \right) \\
&+ \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} \max_{1 \leq j \leq m} \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)b_j} \left| \sum_{i=1}^n w_{ji}(s) g_i(x_i(s - \sigma_{ji})) + \sum_{i=1}^n \alpha_{ji}(s) \int_{-\infty}^s N_{ji}(s - \theta) g_i(x_i(\theta)) d\theta \right| ds \right) \\
&\leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{\sum_{j=1}^m (|c_{ij}| + |d_{ij}| k_{ij}) L_j^f}{a_i} \right\} \| y \| + \max_{1 \leq j \leq m} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n (|w_{ji}| + |\alpha_{ji}| n_{ji}) L_i^g}{b_j} \right\} \| x \| \\
&\leq \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{\sum_{j=1}^m (|c_{ij}| + |d_{ij}| k_{ij}) L_j^f}{a_i} \right\}, \max_{1 \leq j \leq m} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n (|w_{ji}| + |\alpha_{ji}| n_{ji}) L_i^g}{b_j} \right\} \right\} (\| y \| + \| x \|) \\
&\leq r (\| (x, y) \|) \\
&\leq r \frac{(\max_{1 \leq i \leq n} \{ \frac{|L_i|}{a_i} \} + \max_{1 \leq j \leq m} \{ \frac{|J_j|}{b_j} \})}{(1 - r)} = R.
\end{aligned}$$

ceci implique que $\Gamma(x, y) \in \beta$. Donc, l'opérateur Γ est un opérateur de β dans lui même. Ensuite, prouvons que l'opérateur Γ est contractant sur β . En effet, compte tenu de (\mathbf{H}_3) , pour tout $X = (x, y) \in \beta$ et $U = (u, v) \in \beta$, on a

$$\begin{aligned}
& \| \Gamma(X) - \Gamma(U) \| \\
&\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \max_{1 \leq i \leq n} \int_{-\infty}^t |e^{-(t-s)a_i} (\sum_{j=1}^m c_{ij}(s) (g_j(y_j(s - \tau_j)) - f_j(v_j(s - \tau_j))) \\
&+ \sum_{j=1}^m d_{ij}(s) (\int_{-\infty}^s K_{ij}(s - \theta) (f_j(y_j(\theta)) - f_j(v_j(\theta))) d\theta))| ds \\
&+ \sup_{t \in \mathbb{R}} \max_{1 \leq j \leq m} \int_{-\infty}^t |e^{-(t-s)b_j} (\sum_{i=1}^n w_{ji}(s) (g_i(x_i(s - \tau_i)) - g_i(u_i(s - \tau_i))) \\
&+ \sum_{i=1}^n \alpha_{ji}(s) (\int_{-\infty}^s N_{ji}(s - \theta) (g_i(x_i(\theta)) - g_i(u_i(\theta))) d\theta))| ds \\
&\leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{\sum_{j=1}^m (|c_{ij}| + |d_{ij}| k_{ij} L_j^f)}{a_i} \right\} \times \| y - v \| + \max_{1 \leq j \leq m} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n (|w_{ij}| + |\alpha_{ji}| n_{ji}) L_i^g}{b_j} \right\} \times \| x - u \|
\end{aligned}$$

$$\leq \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{\sum_{j=1}^m (|c_{ij}| + |d_{ij}| k_{ij} L_j^f)}{a_i} \right\}, \max_{1 \leq j \leq m} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n (|w_{ji}| + |\alpha_{ji}| n_{ji} L_i^g)}{b_j} \right\} \right\} (\|y - v\| + \|x - u\|)$$

$$< r \|X - U\|$$

Notons que

$$r = \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{\sum_{j=1}^m (|c_{ij}| + |d_{ij}| k_{ij}) L_j^f}{a_i} \right\}, \max_{1 \leq j \leq m} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n (|w_{ji}| + |\alpha_{ji}| n_{ji}) L_i^g}{b_j} \right\} \right\} < 1.$$

ce qui prouve que Γ est un opérateur contractant. Ainsi, en vertu du théorème du point fixe de Banach, Γ admet un unique point fixe qui correspond à la solution pseudo presque-périodique avec poids du BAMNN (9) dans $e \beta \subset PAP(R, R^{n+m}, \rho)$. \square

2.5 Conclusion

Dans la nature, de nombreux phénomènes qui sont purement périodiques, cela donne l'idée de considérer des oscillation presque-périodiques ou d'autres de ces généralisations tels que des oscillations pseudo presque-périodiques et pseudo presque périodiques avec poids. Dans ce chapitre, des conditions suffisantes sont présentées pour assurer l'existence et l'unicité de la solution pseudo presque-periodique avec poids d'un réseau de neurones de type BAM avec deux types de retards : constant et noyau donné par l'équation (9) qui est plus grand que celui des fonctions presque-périodiques.

3 Application et simulation

3.1 Utile de simulation : Simulink de matlab

3.1.1 Présentation de Simulink de Matlab

SIMULINK est un programme pour la simulation des systèmes dynamiques linéaires et non linéaires ; une extension de MATLAB, dans laquelle la définition des modèles se fait par schémas blocs (diagramme structurel). Le diagramme structurel permet la représentation graphique d'un système d'équations linéaires et non linéaires. Il met en évidence la structure du système et permet de visualiser les interactions entre les différentes grandeurs internes et externes. On distingue alors particulièrement bien les contres-réactions, les couplages réciproques, les non-linéarités, etc. Les éléments qui composent le diagramme structurel représentent des opérations mathématiques, à savoir addition, soustraction, multiplication avec un coefficient, intégration et différentiation, ainsi que la multiplication et la division de deux variables et la fonction non linéaire d'une variable. SIMULINK possède une interface graphique pour visualiser les résultats sous forme de graphiques ou de valeurs numériques en cours de simulation. Les paramètres régissant le fonctionnement des systèmes peuvent être modifiés en ligne, c'est à dire en cours de simulation, et l'on peut observer leur effet immédiatement.

SIMULINK s'ouvre lorsqu'on clique sur le bouton Simulink. Les bibliothèques sont des ensembles de blocs répartis selon la catégorie de fonctions réalisées. Parmi ces bibliothèques, nous trouvons, entre autres, les plus utilisées :

- ✦ Sources : Générateurs de signaux, lecture dans fichiers de données.
- ✦ Sinks : Blocs d'affichage, enregistrement dans fichiers de données.
- ✦ Signal Routing : Routage des fils de liaison entre blocs.
- ✦ Math : Opérations mathématiques.
- ✦ Continuous : Blocs continus.
- ✦ Discrete : Blocs discrets.
- ✦ Ports et Subsystems : Blocs permettant de réaliser des sous-systèmes.
- ✦ Logic and Bit Operations : Blocs d'opérations logiques et binaires.
- ✦ Discontinuities : Blocs discontinus (hystérésis, seuil, etc.).
- ✦ Blocs additionnels d'opérations mathématiques et de systèmes discrets.

Nous avons, dans cette bibliothèque, des générateurs de signaux, des blocs de lecture de fichiers textes, binaires, des variables de l'espace de travail, un bloc constant, etc. Pour plus de détails [32].

Ci-dessous, comme exemples, nous présentons la Bibliothèque dans la figure 14 et les sources dans la figure 15 :

3.1.2 Construction d'un diagramme Simulink / Exemples

Dans cette sous-partie, nous donnerons les étapes de construction d'un diagramme sous simulink ainsi que des exemples d'applications.

- La construction d'un diagramme se fait en générale, suivant les étapes suivantes [35] :

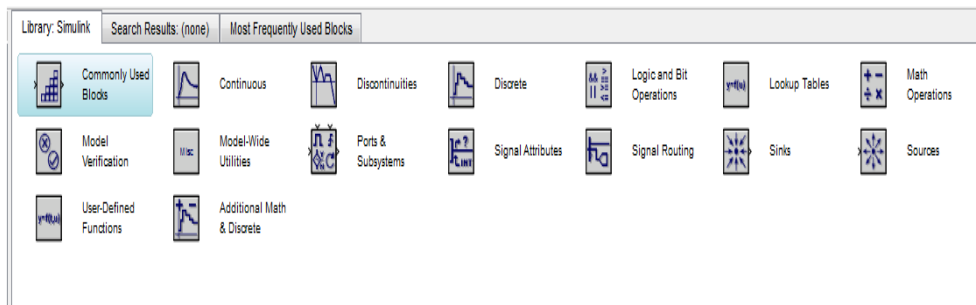


FIGURE 14 – Libraires de Simulink

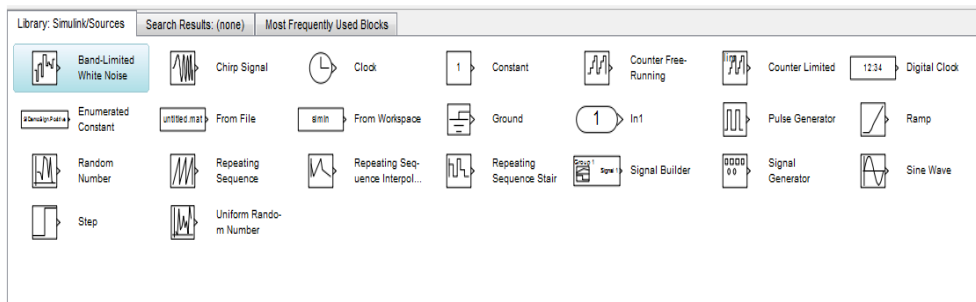


FIGURE 15 – Source de Simulink

1. Pour commencer, dans le menu File, on choisit New - Model. Une fenêtre de travail Untitled s'ouvrira.
2. Ouvrir les collections de blocs en cliquant dessus (double). Faire glisser dans la fenêtre de travail les blocs dont on a besoin pour construire le diagramme. Faire des liaisons entre les blocs à l'aide de la souris.
3. Lorsqu'on clique (double) sur un bloc, une fenêtre de dialogue s'ouvrira. On peut alors changer les paramètres de ce bloc. Une fois terminé, on ferme la fenêtre de dialogue. Une fois le diagramme terminé, on peut l'enregistrer dans un fichier : dans le menu File, choisir Save As et donner un nom (*.mdl) au fichier.

► Exemples de diagramme Simulink sur la figure 16 suivante :

► **Réponse indicielle d'un système du 1er ordre [44]**

Le modèle exo1.mdl permet de simuler la réponse indicielle d'un système numérique du premier ordre de pôle 0.5 et de gain statique unité.

$$H(z) = 0.5/(10.5z - 1)$$

Pour cela, nous utilisons le bloc générateur d'échelon de la librairie Sources que l'on relie à l'entrée du système (librairie Discrete).

La sortie du système ainsi que la commande échelon sont sauvegardées, grâce à un multiplexeur (librairie Signal Routing), dans la variable y que l'on peut utiliser dans l'espace de travail MATLAB.

Elle est de même affichée dans un oscilloscope (librairie Sinks). En double-cliquant

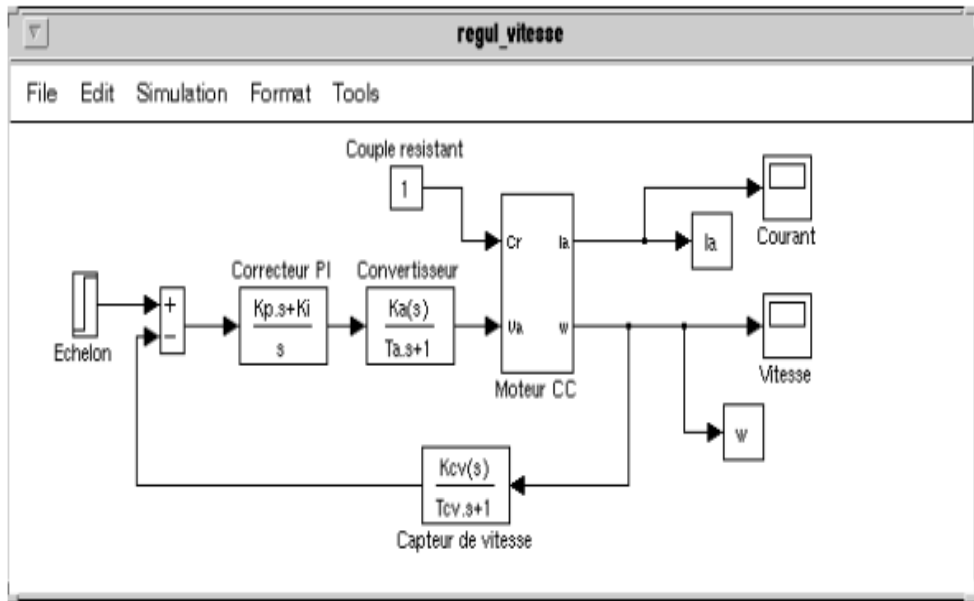


FIGURE 16 – Exemple de diagramme Simulink

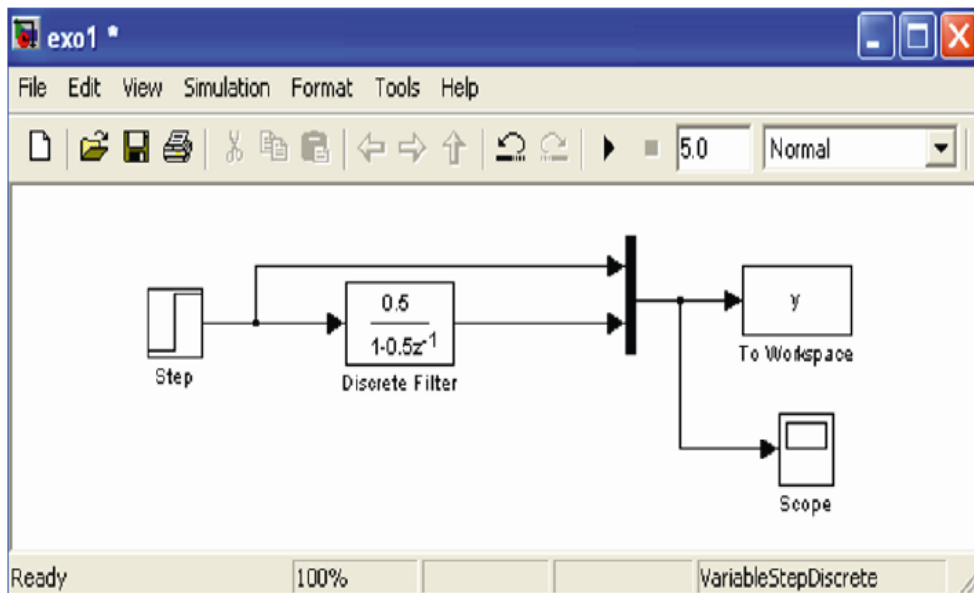


FIGURE 17 – Exemple d'application de simulink dans un système du 1er ordre

sur les blocs, on peut les paramétrer : édition du numérateur et dénominateur de la fonction de transfert, hauteur de l'échelon, ainsi que le type de variable y, structure ou tableau (Array).

Avec l'option Configuration Parameters du menu Simulation, nous pouvons spécifier les paramètres de la simulation : durée de la simulation, algorithme de résolution, etc.

Dans ce qui suit, nous allons étudier d'autres exemples qui nous permettront d'étudier d'autres fonctionnalités de SIMULINK.

3.2 Application numérique sous Simulink d'un BAM

Dans cette sous partie, nous allons reprendre le même modèle traité dans l'article de [2], autrement dit, on considère un modèle de réseau de type BAM (10) avec deux couches et deux neurones dans chaque couche i.e. ($n = m = 2$) donné comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) &= -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^2 c_{ij}(t) f_j(y_j(t - \tau_{ji})) + \sum_{j=1}^2 d_{ij}(t) \int_{-\infty}^t K_{ij}(t - s) f_j(y_j(s)) ds + I_i(t) \\ \dot{y}_j(t) &= -b_j y_j(t) + \sum_{i=1}^2 w_{ji}(t) g_i(x_i(t - \sigma_{ij})) + \sum_{i=1}^2 \alpha_{ji}(t) \int_{-\infty}^t N_{ji}(t - s) g_i(x_i(s)) ds + J_j(t) \end{cases} \quad (10)$$

sachant que :

$$(a_i)_{1 \leq i \leq 2} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, 01 \\ 0, 05 \end{pmatrix}, \quad (b_j)_{1 \leq j \leq 2} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, 05 \\ 0, 02 \end{pmatrix}.$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, les fonctions d'activations sont :

$$f_1(t) = f_2(t) = g_1(t) = g_2(t) = \frac{|x + 1| - |x - 1|}{2} \Rightarrow L_1^g = L_2^g = L_1^f = L_2^f = 1,$$

les retards constants :

$$\tau_{ji} = \sigma_{ij} = 2,$$

i.e.

$$\tau_{11} = \tau_{12} = \tau_{21} = \tau_{22} = \sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_{22} = 2,$$

et pour le retard noyau,

$$K_{ij}(t) = N_{ji}(t) = e^{-t} \Rightarrow k_{ij} = n_{ji}(t) = 1,$$

de plus, pour $\rho(t) = e^t$, soit

$$(c_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq 2} = \begin{pmatrix} 0.1(\cos(\pi t) + e^{-t}) & 0.1(\cos(t) + \cos(\sqrt{2}t)) \\ 0.05(\sin(t) + \sin(\sqrt{2}t)) & 0.1(\cos(t) + e^{-t}) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2} = \begin{pmatrix} 0, 1 & 0, 1 \\ 0, 05 & 0, 1 \end{pmatrix},$$

$$(d_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq 2} = \begin{pmatrix} 0.05(1 + e^{-t}) & 0.1 \cos(\sqrt{2}t) \\ 0.02(\sin(t) + \sin(\sqrt{2}t)) & 0.05(\cos(t) + e^{-t}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (d_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2} = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,1 \\ 0,02 & 0,05 \end{pmatrix}, \\ (w_{ji}(t))_{1 \leq i, j \leq 2} &= \begin{pmatrix} 0.1(1 + e^{-t}) & 0.1(\cos(t) + \cos(\sqrt{2}t)) \\ 0.1(\sin(t) + \sin(\sqrt{2}t)) & 0.1(\cos(t) + e^{-t}) \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow (w_{ji})_{1 \leq i, j \leq 2} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}, \\ (\alpha_{ji}(t))_{1 \leq i, j \leq 2} &= \begin{pmatrix} 0.05(\cos(\pi t) + e^{-t}) & 0.1 \cos(\sqrt{2}t) \\ 0.02(\sin(t) + \sin(\sqrt{2}t)) & 0.05(\cos(t) + e^{-t}) \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow (\alpha_{ji})_{1 \leq i, j \leq 2} = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,1 \\ 0,02 & 0,05 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Notons que y'a des données manquantes (I_i et J_j) dans l'exemple 1 de l'article [2]. Dans ce cas, nous considérons les valeurs suivantes pour ces fonctions comme suit :

$$(I_i)_{1 \leq i \leq 2} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \cos(t) + 0.04 \\ \cos(t) \end{pmatrix},$$

et

$$(J_j)_{1 \leq j \leq 2} = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 0.6 \cos(t) + 0.13 \end{pmatrix},$$

Donc

$$r = \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq 2} \left\{ \frac{\sum_{j=1}^2 (|c_{ij}| + |d_{ij}| k_{ij} L_j^f)}{a_i} \right\}, \max_{1 \leq j \leq 2} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^2 (|w_{ji}| + |\alpha_{ji}| n_{ji} L_i^g)}{b_j} \right\} \right\} < 1.$$

Puisque les conditions sont satisfaites, alors le modèle de BAMNNs avec retard mixte (10) admet une unique solution pseudo presque-périodique avec poids dans la région

$$\beta = B((x_0, y_0), R) = \{(x, y) \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n+m}, \varrho), \|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leq R\},$$

Les résultats théoriques sont confirmés par des simulations numériques dans :

- Figures 18 et 19 sur l'exemple 1 de [2],
- Figures 20, 21 et 22 avec des valeurs complémentaires de (I_i et J_j) après simulation sur l'exemple 1 de [2],

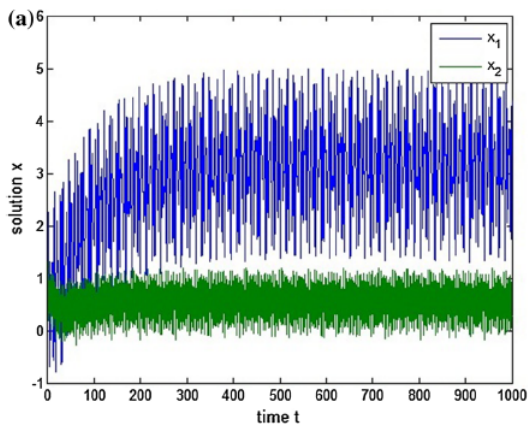


FIGURE 18 – Les trajectoires de x_1, x_2 sur l'exemple 1 de [2]

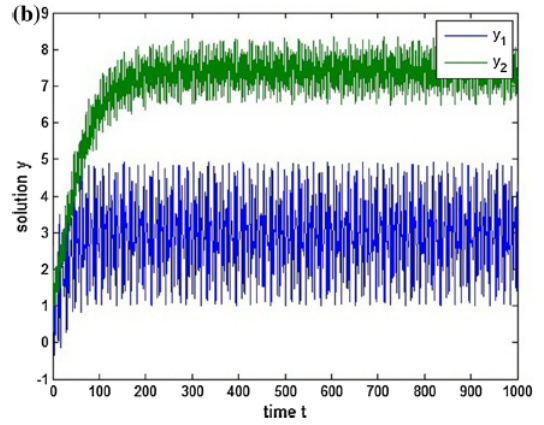


FIGURE 19 – Les trajectoires de y_1, y_2 sur l'exemple 1 de [2]

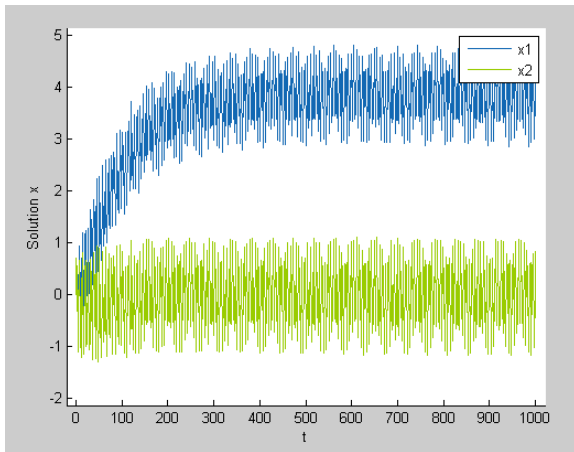


FIGURE 20 – Les trajectoires de x_1, x_2 après simulation sur l'exemple 1 de [2]

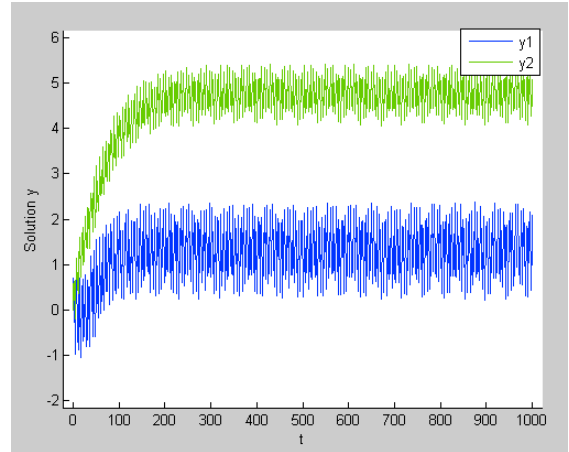


FIGURE 21 – Les trajectoires de y_1, y_2 après simulation sur l'exemple 1 de [2]

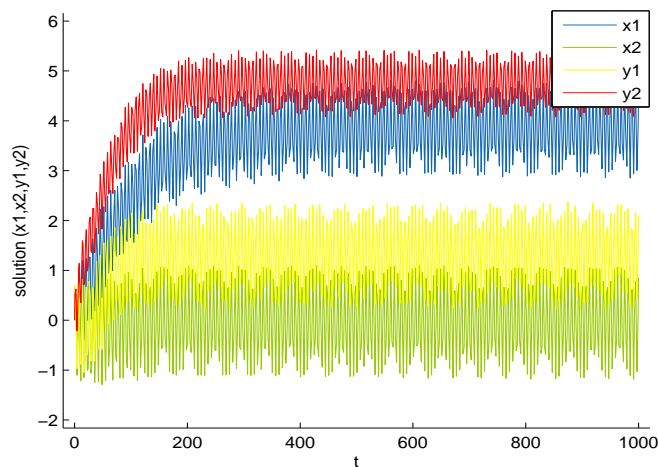


FIGURE 22 – Les trajectoires de x, y après simulation sur l'exemple 1 de [2]

Conclusion générale

Au cours de ce mémoire, nous avons présenté un travail sur l'études qualitative dans les réseaux de neurones. Une étude sur l'existence de la solution pseudo presque-périodique avec poids d'un modèle de réseau de neurones de type BAM avec retard mixte a été donné.

Nous avons introduit les définitions généraux sur les réseaux de neurones : entre forme biologique et forme artificiel ainsi que la modélisation mathématique de ce dernier par les équations différentielles avec retard. Nous avons citer quelques réseaux de neurones récurrents célèbre avec et sans retards, et quelques définitions et théorèmes utiles sur la périodicités.

Puis dans le deuxième chapitre, nous avons vu sous, certaines conditions (des conditions suffisantes), l'existence et l'unicité de la solution pseudo presque-périodique avec poids du modèle étudié qui est modélisé par des équations différentielles à retard mixte.

Ensuite, on a clôturé notre travail par un exemple numérique d'un modèle à deux couches avec deux neurones dans chaque couches avec aussi deux types de retards constant et noyau, en utilisant une simulation avec Simulink de MATLAB. On a présenté les résultats obtenus sous forme graphique (les trajectoires des solutions).

Annexe

A1. Fonction mesurable

Définition 3.1. [57] Soit (X, \mathcal{M}) et (Y, \mathcal{N}) deux espaces mesurables. On dit qu'une application $f : X \rightarrow Y$ est mesurable (pour les tribus \mathcal{M} et \mathcal{N}) si

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{M}, \forall B \in \mathcal{N}$$

A2. Théorème de convergence dominée de Lebesgue

Théorème 3.2. [36] Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$ telles que

- (i) f_n converge presque partout vers une fonction mesurable
 - (ii) il existe $g > 0$, $g \in L^p(\Omega)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ presque partout.
- Alors

$$f \in L^p(\Omega) \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{L^p} = 0, \text{ c.a.d. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int |f_n - f| d\mu = 0$$
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n d\mu = \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu = \int_{\Omega} f d\mu$$

A3. Théorème de Fubini

Définition 3.3. [51] Soient Ω_1, Ω_2 deux ouverts de \mathbb{R}^n et soit $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable, alors :

- pour presque tout $x \in \Omega_1$, la fonction $\int_{\Omega_2} f(x, y) dy \in L^1_x(\Omega_2)$ est mesurable.
 - pour presque tout $x \in \Omega_2$, la fonction $\int_{\Omega_1} f(x, y) dx \in L^1_y(\Omega_1)$ est mesurable.
- alors

$$\int_{\Omega_1 \Omega_2} f(x, y) dx dy = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x, y) dx \right) dy$$

A4. Point fixe de Banach

Définition 3.4. [53] (Application contractante)

Soient (X, d) un espace métrique et $f : X \rightarrow X$ une application. On dit que " f " est contractante s'il existe une constante $0 < k < 1$ telle que

$$\forall x, y \in X, d(f(x), f(y)) = kd(x, y).$$

On pourra alors dire que " f " est k -contractante.

Proposition 3.5. Une application contractante est continue.

Théorème 3.6. (point fixe de Banach) Soient (\mathbb{X}, d) un espace métrique complet et $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ une application k -contractante.

Alors f admet un unique point fixe dans \mathbb{X} , c'est-à-dire

$$\exists! x_0 \in \mathbb{X}, f(x_0) = x_0.$$

A5. Ensembles convexes

Définition 3.7. [60]

Un sous-ensemble \mathbf{C} de \mathbb{R}^n est dit convexe si

$$\forall x, y \in \mathbf{C}, \forall \lambda \in [0, 1], \lambda x + (1 - \lambda)y \in \mathbf{C}.$$

A6. Théorème de GOTTSCHALK

Théorème 3.8. [75] *Quels que soient les nombres réels t, a_1, \dots, a_k , non nuls et $k > 0$, il existe un ensemble relativement dense \mathbf{D} de nombres entiers tel que $n \in \mathbf{D}$ entraîne l'existence des entiers m_1, \dots, m_k pour lesquels on a :*

$$|nt - m_i a_{ij}| < \delta, \forall i = 1 \dots k$$

Références

- [1] A. M. Alimi, C. Aouiti, F. Chérif, F. Dridi and M. S. M'hamdi, (2018). Dynamics and oscillations of generalized high-order Hopfield neural networks with mixed delays. *Neurocomputing*, 321, 274-295. [19](#)
- [2] B. Ammar, H. Brahmi, and F. Chérif, (2018). On the weighted pseudo-almost periodic solution for BAM networks with delays. *Neural Processing Letters*, 48(2), 849-862. [3](#), [7](#), [20](#), [31](#), [32](#), [33](#), [35](#), [37](#), [39](#), [42](#), [43](#), [49](#), [50](#), [51](#)
- [3] C. Aouiti, I. B. Gharbia, J. Cao, M. S. M'hamdi and A. Alsaedi, (2018). Existence and global exponential stability of pseudo almost periodic solution for neutral delay BAM neural networks with time-varying delay in leakage terms. *Chaos, Solitons and Fractals*, 107, 111-127. [32](#)
- [4] C. Aouiti, M. S. M'hamdi and A. Touati, (2017). Pseudo almost automorphic solutions of recurrent neural networks with time-varying coefficients and mixed delays. *Neural Processing Letters*, 45(1), 121-140. [19](#)
- [5] C. Aouiti, M. S. M'hamdi, J. Cao and A. Alsaedi, (2017). Piecewise pseudo almost periodic solution for impulsive generalised high-order Hopfield neural networks with leakage delays. *Neural Processing Letters*, 45(2), 615-648. [18](#)
- [6] C. Aouiti, M. S. M'hamdi, and F. Chérif, (2016, September). The existence and the stability of weighted pseudo almost periodic solution of high-order Hopfield neural network. In *International Conference on Artificial Neural Networks* (pp. 478-485). Springer, Cham. [13](#)
- [7] C. Aouiti, M. S. M'hamdi, and F. Chérif, (2017). New results for impulsive recurrent neural networks with time-varying coefficients and mixed delays. *Neural Processing Letters*, 46(2), 487-506. [19](#), [29](#)
- [8] C. Aouiti, M. S. M'hamdi, F. Chérif and A. M. Alimi, (2018). Impulsive generalized high-order recurrent neural networks with mixed delays : stability and periodicity. *Neurocomputing*, 321, 296-307.
- [9] K. Arbateni, Réseaux de neurones statiques appliques a l'analyse. [13](#)
- [10] H. Bao, (2016). Existence and exponential stability of periodic solution for BAM fuzzy Cohen-Grossberg neural networks with mixed delays. *Neural Processing Letters*, 43(3), 871-885. [32](#)
- [11] M. Bisset, (2020). Introduction aux équations différentielles à retard (Doctoral dissertation, université de Bordj Bou-Arréridj Faculté des mathématiques et de l'informatique). [15](#), [16](#), [17](#)
- [12] A. Bouakkaz, (2018). Technique de points fixes et applications aux équations différentielles fonctionnelles non linéaires à retard (Doctoral dissertation, Thèse en Mathématique. Université de Badji Mokhtar Annaba). [15](#), [16](#)
- [13] S. Boudjema, (2013). Oscillations dans des équations de Liénard et des équations d'évolution semi-linéaires (Doctoral dissertation, Université Panthéon-Sorbonne-Paris I).
- [14] S. Bouhafna, (2013). Commande par DTC d'un moteur asynchrone apport des réseaux de neurones (Doctoral dissertation, Université de Batna 2). [8](#), [9](#), [11](#)

-
- [15] S. Boulanouar et C. Bourouis, Existence de solution pseudo presque-périodique avec poids d'un modèle de réseau de neurones de type Hopfield d'ordre élevé avec retard de type proportionnel, (2021) ,mémoire de fin de cycle. Université A/Mira de Bejaia. [21](#), [22](#), [23](#), [30](#), [35](#)
- [16] J. Cao, (1999, August). Global stability in delayed cellular neural networks. In Neural Networks for Signal Processing IX : Proceedings of the 1999 IEEE Signal Processing Society Workshop (Cat. No. 98TH8468) (pp. 95-102). IEEE. [6](#), [17](#)
- [17] J. Cao, and J. Wang,(2005). Global exponential stability and periodicity of recurrent neural networks with time delays. IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Regular Papers, 52(5), 920-931. [17](#)
- [18] A. Chen, L. Huang and J. Cao, (2003). Existence and stability of almost periodic solution for BAM neural networks with delays. Applied Mathematics and Computation, 137(1), 177-193. [17](#)
- [19] W. H. Chen, X. Lu, Z. H. Guan and W. X. Zheng,(2006). Delay-dependent exponential stability of neural networks with variable delay : An LMI approach. IEEE Transactions on Circuits and Systems II : Express Briefs, 53(9), 837-842. [17](#)
- [20] B. Chen, L. Yu and W. A. Zhang, (2012). Exponential stability analysis for neutral BAM neural networks with time-varying delays and stochastic disturbances. Journal of Control Theory and Applications, 10(1), 92-99. [6](#), [19](#)
- [21] H. R. Cui, C. F. Guo, Y. F. Wang, and L. S. Wang, (2008, December). A new criterion of global exponential robust stability of periodic solution for the static neural network with time-delays. In 2008 International conference on computer science and software engineering (Vol. 1, pp. 59-61). IEEE. [6](#), [14](#)
- [22] M. T. Digana, R. M. J. P. Fancoise, M. G. Haddad, M. P. Lefevre and M. A. Pankov, Mémoire présenté par Denis PENNEQUIN pour l'obtention de l'Habilitationa Diriger des Recherches Spécialité : Mathématiques.
- [23] T. Diagana, K. Ezzinbi and M. Miraoui, (2014). Pseudo-almost periodic and pseudo-almost automorphic solutions to some evolution equations involving theoretical measure theory. Cubo (Temuco), 16(2), 01-32. [26](#)
- [24] T. Diagana, (2008). Weighted pseudo-almost periodic solutions to some differential equations. Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications, 68(8), 2250-2260. [26](#), [27](#), [28](#), [29](#), [30](#)
- [25] W.H. Gottschalk, G.A. Hedlund, Topological Dynamics, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 36 (1955), American Mathematical Society, Providence, R. I. [54](#)
- [26] W. H. Gottschalk, (1946). Almost periodicity, equi-continuity and total boundedness. Bulletin of the American Mathematical Society, 52(8), 633-636. [28](#), [29](#), [30](#)
- [27] H. Huang, J. Cao and J. Wang, (2002). Global exponential stability and periodic solutions of recurrent neural networks with delays. Physics Letters A, 298(5-6), 393-404. [17](#)
- [28] Z. Huang, (2017). Almost periodic solutions for fuzzy cellular neural networks with multi-proportional delays. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 8(4), 1323-1331. [18](#)
-

-
- [29] X. Huang, J. Cao and D. W. Ho, (2006). Existence and attractivity of almost periodic solution for recurrent neural networks with unbounded delays and variable coefficients. *Nonlinear Dynamics*, 45(3), 337-351. 6, 19
- [30] T. Huang, Y. Huang and C. Li, (2008). Stability of periodic solution in fuzzy BAM neural networks with finite distributed delays. *Neurocomputing*, 71(16-18), 3064-3069. 32
- [31] Z. Huang and Y. Xia, (2009). Exponential periodic attractor of impulsive BAM networks with finite distributed delays. *Chaos, Solitons and Fractals*, 39(1), 373-384. 19, 31, 32
- [32] N. Hudon, (2004). *Initiation Matlab*. Ecole Polytechnique de Montréal. 46
- [33] A. Ibeghouchene, (2016). *La Stepanov-pseudo presque périodicité et applications* (Doctoral dissertation, UMMTO).
- [34] H. A. Jalab and R. W. Ibrahim, (2009). Almost-periodic solution for BAM neural networks. *Surveys in Mathematics and its Applications*, 4, 53-63. 19, 32
- [35] H. Le-Huy, (1998). *Introduction à Matlab et Simulink*. Université Laval, CANADA, Septembre. 46
- [36] É. Lenglar, (1982). Sur le théorème de la convergence dominée. *Séminaire de probabilités de Strasbourg*, 16, 314-318. 53
- [37] B. Liu, (2007). Almost periodic solutions for Hopfield neural networks with continuously distributed delays. *Mathematics and Computers in Simulation*, 73(5), 327-335. 12
- [38] B. Liu, (2013). Global exponential stability for BAM neural networks with time-varying delays in the leakage terms. *Nonlinear Analysis : Real World Applications*, 14(1), 559-566. 20
- [39] B. Liu, (2016). Global exponential convergence of non-autonomous cellular neural networks with multi-proportional delays. *Neurocomputing*, 191, 352-355. 18
- [40] Z. Liu, A. Chen, J. Cao and L. Huang, (2003). Existence and global exponential stability of almost periodic solutions of BAM neural networks with continuously distributed delays. *Physics Letters A*, 319(3-4), 305-316. 18, 20, 31
- [41] Z. Liu, A. Chen and L. Huang, (2004). Existence and global exponential stability of periodic solution to self-connection BAM neural networks with delays. *Physics Letters A*, 328(2-3), 127-143. 17, 31
- [42] J. Liu, G. D. Zong and Y. X. Zhang, (2009). Robust asymptotic stability for BAM neural networks with time-varying delays via LMI approach. *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, 24(3), 282-290. 19
- [43] L. A. Liusternik and L. G. Shnirel'man, (1934). *Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels..* (Vol. 188). Hermann and cie.
- [44] D. Martaj and D. Mokhtari, (2010). *Prise en main de MATLAB et SIMULINK*. In *MATLAB R2009, SIMULINK et STATEFLOW pour Ingénieurs, Chercheurs et Etudiants* (pp. 1-63). Springer, Berlin, Heidelberg. 47
- [45] M. S. M'hamdi, *Oscillations et stabilité des réseaux de neurones récurrents à retards*, 2016 Thèse de doctorat. Université de Carthage 12, 15, 33, 36
-

-
- [46] M. S. M'hamdi, (2019). Pseudo almost automorphic solutions for multidirectional associative memory neural network with mixed delays. *Neural Processing Letters*, 49(3), 1567-1592. [19](#)
- [47] M. S. M'hamdi, (2019). Oscillation and stability of multidirectional associative memory neural network with mixed delays. *Afrika Matematika*, 30(5), 837-855. [19](#)
- [48] M. S. M'hamdi, (2022). On the Weighted Pseudo Almost-Periodic Solutions of Static DMAM Neural Network. *Neural Processing Letters*, 1-22. [14](#), [15](#), [33](#)
- [49] M. S. M'hamdi, C. Aouiti, A. Touati, A. M. Alimi and V. Snasel, (2016). Weighted pseudo almost-periodic solutions of shunting inhibitory cellular neural networks with mixed delays. *Acta Mathematica Scientia*, 36(6), 1662-1682. [33](#)
- [50] S. Mohamad and K. Gopalsamy, (2003). Exponential stability of continuous-time and discrete-time cellular neural networks with delays. *Applied Mathematics and Computation*, 135(1), 17-38. [17](#)
- [51] S. Nakanishi, (1960). Sur le Théorème de Fubini et l'Intégrale (ER). I. *Proceedings of the Japan Academy*, 36(9), 584-589. [53](#)
- [52] P. J. Nour-eddine, P. E. K. E. I. Rachid, F. S. T. de Fès, P. E. Mohamed, P. E. F.I z-iddine et de E. N. S. A. M. Rabat, *Systèmes dynamiques de type réseaux de Hopfield et optimisation*. [8](#), [11](#)
- [53] C. Rousseau, Point fixe de Banach. *Accromath 5*, hiver-printemps (2010)(www. accromath. ca). [53](#)
- [54] T. Pan, B. Shi and J. Yuan, (2012, January). Global stability of almost periodic solution of a class of neutral-type BAM neural networks. In *Abstract and Applied Analysis (Vol. 2012)*. Hindawi. [19](#), [32](#)
- [55] Y. Tang, (2018). Pseudo almost periodic shunting inhibitory cellular neural networks with multi-proportional delays. *Neural Processing Letters*, 48(1), 167-177. [18](#)
- [56] Q. Song and J. Cao, (2007). Exponential stability for impulsive BAM neural networks with time-varying delays and reaction-diffusion terms. *Advances in Difference Equations*, 2007, 1-18. [19](#), [31](#)
- [57] F. Talbi-Boulahia, *Fonction mesurable*, 2019 cours. Université A/Mira de Bejaia. [53](#)
- [58] F. Talbi-Boulahia, *Fonctions périodiques et presque-périodiques*, 2020 cours. Université A/Mira de Bejaia. [21](#), [22](#), [23](#), [25](#)
- [59] C. Touzet, (1992). *Les réseaux de neurones artificiels : Introduction au connexionisme : Cours. Exercices et travaux pratiques*. [8](#), [11](#)
- [60] J. Van Tiel, (1984). *Convex analysis : an introductory text*. Wiley. [54](#)
- [61] [18](#)
W. Wang and B. Liu, (2014, January). Global exponential stability of pseudo almost periodic solutions for SICNNs with time-varying leakage delays. In *Abstract and applied analysis (Vol. 2014)*. Hindawi.
- [62] M. Wlas, Z. Krzeminski, J. Guzinski, H. Abu-Rub and H. A. Toliyat, (2005). Artificial-neural-network-based sensorless nonlinear control of induction motors. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 20(3), 520-528. [11](#)

-
- [63] H. Xiang and J. Cao, (2009). Almost periodic solutions of recurrent neural networks with continuously distributed delays. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications*, 71(12), 6097-6108. [19](#)
- [64] Y. Xu, (2014). New results on almost periodic solutions for CNNs with time-varying leakage delays. *Neural Computing and Applications*, 25(6), 1293-1302. [18](#)
- [65] B. Xu, X. Liu and X. Liao, (2006). Global exponential stability of high order Hopfield type neural networks. *Applied Mathematics and Computation*, 174(1), 98-116. [13](#)
- [66] W. Yang, (2014). Periodic solution for fuzzy Cohen-ÜGrossberg BAM neural networks with both time-varying and distributed delays and variable coefficients. *Neural processing letters*, 40(1), 51-73. [32](#)
- [67] G. Yang and W. Wan, (2019). Weighted pseudo almost periodic solutions for cellular neural networks with multi-proportional delays. *Neural Processing Letters*, 49(3), 1125-1138. [18](#)
- [68] Y. Yu, (2016). Global exponential convergence for a class of neutral functional differential equations with proportional delays. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39(15), 4520-4525 [6](#), [12](#), [18](#)
- [69] Q. Zhang, X. Wei and J. Xu, (2007). Stability of delayed cellular neural networks. *Chaos, Solitons and Fractals*, 31(2), 514-520.
- [70] H. Zhang and J. Shao, (2013). Existence and exponential stability of almost periodic solutions for CNNs with time-varying leakage delays. *Neurocomputing*, 121, 226-233. [18](#)
- [71] Q. Zhang, L. Yang and D. Liao, (2011). Existence and globally exponential stability of equilibrium for fuzzy BAM neural networks with distributed delays and impulse. *Advances in Difference Equations*, 2011(1), 1-12. [19](#)
- [72] H. Zhao, (2002). Global stability of bidirectional associative memory neural networks with distributed delays. *Physics Letters A*, 297(3-4), 182-190. [18](#)
- [73] L. Zhou and Z. Zhao, (2016). Exponential stability of a class of competitive neural networks with multi-proportional delays. *Neural Processing Letters*, 44(3), 651-663. [18](#)
- [74] H. Zhou, Z. Zhou and W. Jiang, (2015). Almost periodic solutions for neutral type BAM neural networks with distributed leakage delays on time scales. *Neurocomputing*, 157, 223-230. [31](#), [32](#)
- [75] W.H. Gottschalk, G.A. Hedlund, *Topological Dynamics*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 36 (1955), American Mathematical Society, Providence, R. I. [54](#)

Résumé

L'objectif de ce mémoire est de présenter l'étude qualitative d'un réseau de neurones récurrents de type BAM avec retard mixte (retards constant et noyau). Ce dernier est modélisé par des équations différentielles à retard. Dans la première partie, nous avons présenté, les concepts généraux sur les réseaux de neurones. Nous avons exposé les différents types de réseaux. On a collecté quelques définitions sur la périodicité et des théorèmes utiles.

Dans la deuxième partie, on a commencé par un rappel sur les solutions périodiques de quelques modèles de réseaux de neurones récurrents cas BAMNNs. Sous certaines conditions suffisantes, on a présenté une étude sur l'existence et l'unicité de la solution pseudo presque périodique avec poids d'un modèle de type BAM avec retard mixte.

Dans le dernier chapitre on a appliqué les résultats obtenus précédemment pour traiter un exemple numérique, en utilisant une simulation avec Simulink de MATLAB, et on présente les résultats sous forme graphique.

Abstract

The objective of this memoir is the qualitative study of a BAM neural network with mixed delays, which is presented by delay differential equations. In the first part, we presented the general concepts on neural networks. We have exposed the different types of neural networks. We have collected some useful definitions about periodicity and theorems.

In the second part, we started with an application of periodic functions in some models of delay recurrent neural networks. Under certain conditions (sufficient conditions) and by using Banach's fixed point theorem, we contributed to the studies of the existence and uniqueness of weighted pseudo almost periodic solution of a BAMNNs model with mixed delays.

In the last chapter we apply the results obtained previously to process a numerical example, using a simulation with Simulink from MATLAB, the results are presented in graphic form (the trajectories of the solutions).