République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abderrahmane MIRA-Bejaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

Option : Analyse Mathématique

Mémoire de fin d'études

Thème :

L'approximation des points fixes des opérateurs monotones par les méthodes itératives

Réalisé par :

BEDDAR IMANE et BENZEMMA LAMIA

Setenu devant le jury composé de :

- ***Présidente :*** *M^{me} TAKHEDMIT.B* ***M.C.A. U.A.Mira-BEJAIA***
- ***Encadreur :*** *M^{me} BARACHE.B* ***M.C.A U.A.Mira-BEJAIA***
- ***Examinatrice :*** *M^{me} BOULKROUNE.A* ***M.A.A U.A.Mira-BEJAIA***

Promotion : 2019/2020

REMERCIEMENTS

On tient à remercier ALLAH qui nous a donné la force et le courage pour réaliser ce modeste travail, et qui a mis sur nos chemins les bonnes personnes et nous a confié aux bonnes mains.

Nous tenons à remercier solennellement notre promotrice, Madame BARACHE pour son soutien et la confiance qu'elle nous a accordée en nous proposant ce sujet et nous a aidé plus qu'elle ne le pense.

Nos vifs remerciements vont aussi à M^{me} TAKHEDMIT pour l'honneur qu'elle a bien voulu nous faire en acceptant de présider le jury et à M^{me} BOULKROUNE pour avoir accepté d'examiner ce mémoire.

Comme nous rendons un vibrant hommage à nos parents et à nos soeurs et frères pour nous avoir inculqué le goût d'apprendre, et nous avoir encouragé sans cesse pour aller plus loin.

Nos sincères remerciements à tous les membres de la faculté des sciences exactes et aux membres du département de mathématiques en particulier.

Nous tenons également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

Beddar Imane

Je dédie ce modeste travail à :
Mes trés chers parents pour leurs amour,leurs soutiens , leurs sacrifices et tous les efforts qu'ils ont fourni pour mon éducation ainsi que ma formation.
Mes chers frères, ma chère soeur sara.
Mon cher fiancé Rafik et sa famille .
Mes cousins et cousines.
Mes tantes et oncles .
Tous les membres de ma famille
Mes collègues et mes amies .

Lamia

Je dédie ce modeste travail à...

Mes trés chers parents

A ceux qui m'ont tout donné sans rien de retour, ceux m'ont encouragé et soutenu dans les moments les plus difficiles, autant de phrases soient elles ne sauraient montrer le degré d'amour et de respect que j'éprouve pour vous. Que Dieu vous garde en bonne santé pour moi et que ce travail soit un témoignage de ma reconnaissance et de mon amour sincére.

A ma famille

A Mes frères :Farid et A-Rahmane
A mes soeurs :Linda,Nassima et Djidjika
A tout mes proches

Je vous dédie ce travail avec tout mes veux de bonheur,d'amour , de bonne santé et de réusite. C'est grâce à vos bénédiction encouragements et sur tout vos soutiens qu'aujourd'hui j'ai arrivé ici.

A ma deuxième famille, Nissas : beaux parents, beau frère et belle soeur, surtout mon fiancé A-Elkader .

Je dédie ce travail avec tout mes voeux de bonheur, de santé et de réussite.

Tous les membres de la famille Benzemma et Nissas

Ma grand-mère Yema Nwara qui m'a accompagné par ses priéres, sa douceur, puisse dieu lui prêtera long vie et beaucoup de santé.

Mon binôme et sa famille

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le cadre générale de notre travail est d'utiliser des méthodes itératives pour déterminer les points fixes uniques des opérateurs monotones et comparer les vitesses de convergence de chaque algorithme .

La théorie des points fixes est une théorie moderne consacré à la résolution des problèmes mathématiques. Plusieurs problèmes mathématiques se ramènent souvent à la recherche de points fixes pour certaines applications non linéaires .

La recherche d'un point fixe revient à déterminer un élément x^* d'un ensemble X qui vérifie l'équation dite équation du point fixe suivante :

$$f(x) = x$$

où l'application f est définie de X dans lui même. Cette étude est appliquée à de nombreux domaines d'intérêt actuel dans l'analyse, peut-être le résultat le plus connu dans la théorie du point fixe est le principe de contraction de Banach. Le théorème n'assure pas uniquement l'existence et l'unicité du point fixe mais il donne une procédure itérative pour le déterminer. Le schéma itératif de Picard qui a été reformulé par Banach en 1922 est le premier schéma itératif dans ce domaine de recherche .Cette suite itérative a crée une partie très importante dans la théorie des points fixes qui "est méthodes itératives d'approximation des points fixes".
En générale, l'utilité de ces méthodes configure lorsque les données collectées

sont soumis à un bruit. Il est, en quelque sorte, plus facile de déterminer la solution approchée qu'une solution exacte d'où l'intérêt principal de tels algorithmes.

Nous présentons quelques théorèmes du point fixe en introduisant la théorie des cônes, nous discutons l'existence et l'unicité du point fixe pour les opérateurs croissants et les opérateurs décroissants. La théorie des cônes joue un rôle trés important dans notre travail, l'utilisation de ces cônes offre les meilleurs résultats lors de la résolution de plusieurs problèmes mathématiques issus de monde réel .

Le chapitre 1 présente les propriétés de base de cônes dans les espaces de Banach ainsi que quelques relation d'ordre induite. Dans ce chapitre nous définisson les notions de la régularité ainsi que les notions de la minihedralité des cônes. Ensuite nous discutons sur les liens entre ces notions. Enfin nous donnons quelques exemples des cônes qui possèdent certaines de ces propriétés .

Dans le deuxième chapitre nous discutons sur l'existence et l'unicité des points fixes pour les opérateurs croissants et les opérateurs décroissants en utilisant quelques théorèmes et corollaires .

Le troisième chapitre concerne les différents algorithmes liés aux théorèmes du point fixe (Mann , Picard , Krasnoselskii , Ishikawa).

Nous achevons ce travail par des applications des algorithmes de Mann, Picard et Krasnoselskii sur des exemples et une conclusion.

CHAPITRE 1

RAPPELS SUR LES CÔNES

1.1 les cônes

Définition 1.1.1

Soit E un espace de Banach et soit P une partie non vide de E. On dit que P est un cône s'il satisfait les deux conditions suivantes :

i. $\forall x \in P$, $\forall \alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha x \in P$;
ii. $\forall x \in P$, $-x \in P \Rightarrow x = \theta$;

(avec θ est le zéro de E)

Remarque 1.1.1

1. Un cône est dit solide s'il contient des élèments intérieurs.
2. Les espaces vectoriels sont des cônes .
3. Un cône P est dit saillant si $P \cap (-P) = \theta$. (avec θ est le zéro de E).
4. Intervalle ordonné (segment conique) : on définit un intervalle ordonné $[x, y]$ d'un cône par :

$$[x, y] = \{z \in P : x \leq z \leq y\}.$$

5. Un cône P est dit générateur si $E = P - P$.

c'est-à-dire tout élément $x \in E$ peut se présenter sous la forme $x = u - v$, où $u \in P$ et $v \in P$.

1.2 Cône normal

Définition 1.2.1

Un cône $P \subset E$ est dit normal s'il existe une constante positive δ tel que

$$\| x + y \| \geq \delta \ , \forall x, y \in P, \text{ avec } \| x \| = 1 \text{ et } \| y \| = 1.$$

Géométriquement, la normalité signifie que l'angle entre deux vecteurs unitaires positifs ne doit pas dépasser π.
Autrement dit, un cône normal ne peut pas être trop large .

Définition 1.2.2([1], page 2)

Soient E un espace normal, $P \subset E$ un cône et " $\leq$ " est une relation d'ordre partiel de P. Alors

1. La norme $\| \, . \, \|$ est dite monotone si et seulement si

$$\forall x, y \in P : \theta \leq x \leq y \Rightarrow \| x \| \leq \| y \| ;$$

2. La norme $\| \, . \, \|$ est dite semi-monotone si et seulement si

$$\exists \alpha > 0, \forall x, y \in P : \theta \leq x \leq y \Rightarrow \| x \| \leq \alpha \| y \| \ .$$

Remarque
Le théorème suivant nous donne d'autres définitions d'un cône normal.

Théorème 1.2.1([1], page 2)

Soit P un cône dans E, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) P est normal ;

(ii) Il existe une constante $\gamma > 0$ telle que

$$\| x + y \| \geq \gamma \max\{\|x\|, \|y\|\}, \forall x, y \in P;$$

(iii) Il existe une constante $N > 0$, telle que

$$\theta \leq x \leq y \Rightarrow \|x\| \leq N\|y\|, \forall x, y \in P$$

c'est à dire, la norme $\| \, . \, \|$ est semi-monotone ;

(iv) Il existe une norme équivalente $\| \, . \, \|_1$ sur E telle que

$$\theta \leq x \leq y \Rightarrow \|x\|_1 \leq \|y\|_1$$

c'est á dire, la norme $\| \, . \, \|_1$ est monotone ;

(v) soient (x_n), (y_n), (z_n) des suites de P
Si

$$x_n \leq z_n \leq y_n, \forall n \geq 1 \text{ et } \| x_n - x \| \to 0, \| y_n - y \| \to 0, quandn \to +\infty$$

alors

$$\| z_n - z \| \to 0 \text{ quand } n \to +\infty$$

(vi) L'ensemble $(B + P) \cap (B - P)$ est borné, où $B = \{x \in E | \|x\| \leq 1\}$;

(vii) Tout intervalle ordonné $[x, y] = \{z \in E \mid x \leq z \leq y\}$ est borné.

Démonstration

$(i) \Rightarrow (ii)$,
On suppose que P est normal et on montre qu'il existe γ telque :

$$\|x + y\| \geq \gamma \max\{\|x\|, \|y\|\} \text{ , } \forall x, y \in P$$

On prend $\| x \| = 1$ et $\| y \| \leq 1$
On a $\| x \| = \| x + y - y \| \leq \| x + y \| + \| y \|$
D'autre part, on a

$$
\begin{aligned}
\| x+y \| &= \left\| x + \frac{y}{\| y \|} - \frac{1- \| y \|}{\| y \|} y \right\| \\
&= \left\| x + \frac{y}{\| y \|} + \frac{-(1- \| y \|)}{\| y \|} y \right\| \\
&\geq \left\| x + \frac{y}{\| y \|} \right\| - \left\| \frac{y}{\| y \|} - y \right\| \\
&\geq \left\| x + \frac{y}{\| y \|} \right\| - 1 + \| y \|
\end{aligned}
$$

donc

$$2 \| x+y \| \geq \left\| x + \frac{y}{\| y \|} \right\| - 1 + \| y \| + 1 - \| y \|,$$

d'ou

$$\| x+y \| \geq \frac{1}{2} \left\| x + \frac{y}{\| y \|} \right\| \geq \frac{1}{2}\delta$$

par consequent ,

$$\| x+y \| \geq \gamma \max\{\| x \|, \| y \|\}$$

où $\gamma = \frac{\delta}{2}$

$(ii) \Rightarrow (iii)$,
On suppose que (iii) n'est pas vrai , alors $\exists x_n, y_n \in P$ telles que :

$$\theta \leq x_n \leq y_n \text{ et } \| x_n \| > n \| y_n \| \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

posons que $u_n = v_n$

(comme $x_n, y_n \in P$ alors $u_n, v_n \in P$) et

$$\|u_n\| \geq 1 - \frac{1}{n} \| v_n \| \geq 1 - \frac{1}{n} \| u_n + v_n \| = \frac{2}{n}$$

En vertu de (ii), alors

$$\frac{2}{n} = \| u_n + v_n \| \geq \gamma(1 - \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}^*$$

(contradiction)

$(iii) \Rightarrow (iv)$,
En effet on pose que : $\|x\|_1 = \inf \|u\| + \inf \|v\|$, On montre que $\|\|_1$ est une norme sur E.

on a : $\|\theta\|_1 = 0$ évident
supposons que $\|x\|_1 = 0$ et montrons que $x\theta$,

on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists u, v \in E \text{ telles que } u \leq x \leq v \text{ et } \| u \| \leq \varepsilon, \|v\| \leq \varepsilon$$

de (iii) on a

$$\|x\| \leq \|x-u\| + \|u\| \leq N \| v-u \| + \| u \| < (2N+1)\varepsilon$$

comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on obtient $x = \theta$

l'egalité $\| \lambda x \|_1 = | \lambda | \| x \|_1$ est evidente $\forall x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

supposons que $x, y \in E$ et montrons que $\| x+y \|_1 \leq \| x \|_1 + \| y \|_1$ on a :
$\forall \varepsilon > 0, \exists u_1, u_2, v_1, v_2 \in E$ telles que $u_1 \leq x \leq v_1$, $u_2 \leq y \leq v_2$
et

$$\| u_1 \| + \| v_1 \| < \| x \|_1 + \varepsilon \ \| u_2 \| + \| v_2 \| < \| y \|_1 + \varepsilon$$

De $u_1 + u_2 \leq x + y \leq v_1 + v_2$ nous avons

$$\| u_1 + u_2 \| + \| v_1 + v_2 \| \geq \| x + y \|_1$$

Donc

$$\| x+y \|_1 \leq \| u_1 \| + \| v_1 \| + \| u_2 \| + \| v_2 \| \leq \| x \|_1 + \| y \|_1 + 2\varepsilon$$

comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, ceci implique que $\| x+y \|_1 \leq \| x \|_1 + \| y \|_1$.
Donc $\| \, . \, \|_1$ est une norme sur E, Montrons que $\| \, . \, \|_1$ est monotone.

Soient $x, y \in P$ tels que $0 \leq x \leq y$ alors $\inf_{u \leq x} \parallel u \parallel = \inf_{u \leq y} \parallel u \parallel = 0$ et donc

$$\parallel x \parallel_1 = \inf_{v \geq x} \parallel v \parallel \leq \inf_{v \leq y} \parallel v \parallel = \parallel y \parallel_1$$

Enfin, montrons que $\parallel . \parallel$ et $\parallel . \parallel_1$ sont équivalentes.

Évidemment $\parallel x \parallel_1 \leq 2 \parallel x \parallel$.

Dautre part, pour tout $u \leq x \leq v$, on a :

$$\parallel x \parallel \leq \parallel x - u \parallel + \parallel u \parallel \leq N \parallel v - u \parallel + \parallel u \parallel \leq (N+1)(\parallel u \parallel + \parallel v \parallel)$$

Par conséquent, $\parallel x \parallel \leq (N+1) \parallel x \parallel_1$.

$(iv) \Rightarrow (v)$, de $0 \leq z_n - x_n \leq y_n - x_n$, on trouve $\parallel z_n - x_n \parallel_1 \leq \parallel y_n - x_n \parallel_1$. Comme $m \parallel x \parallel \leq \parallel x \parallel_1 \leq M \parallel x \parallel$ pour tout $x \in E$ où $M > m > 0$ sont deux constantes, on obtient

$\parallel z_n - x_n \parallel \leq \frac{1}{m} \parallel z_n - x_n \parallel_1 \leq \frac{1}{m} \parallel y_n - x_n \parallel_1 \leq \frac{M}{m} \parallel y_n - x_n \parallel \longrightarrow 0$, quand $n \longrightarrow +\infty$

Ce qui implique que

$$\parallel z_n - x \parallel \leq \parallel z_n - x_n \parallel + \parallel x_n - x \parallel \longrightarrow 0 \text{ , quand } n \longrightarrow +\infty.$$

$(v) \Rightarrow (vi)$ En utilisant le raisonnement par l'absurde :

On suppose que $(B+P) \cap (B-P)$ n'est pas borné , c à d

$$\exists (z_n) \subset (B+P) \cap (B-P) \text{ telles que } \parallel z_n \parallel \longrightarrow +\infty$$

D'autre part, $z_n \in (B+P) \cap (B-P)$ entraine l'existence de 2 suites (x_n) et (y_n) de B telles que $x_n \leq z_n \leq y_n$, $\forall n$

posons

$$u_n = \frac{x_n}{\| z_n \|}, v_n = \frac{y_n}{\| z_n \|}, w_n = \frac{z_n}{\| z_n \|}$$

On aura $u_n \leq w_n \leq v_n$ et $u_n \longrightarrow 0$, $v_n \longrightarrow 0$ alors $w_n = 0$ (contradiction car $\| w_n \| = 1$)

$(vi) \Rightarrow (vii)$
On pose $(B+P) \cap (B-P) \subset B(0,\rho), \rho > 0$ et $r = max\{\| x \|, \| y \|\}$
On montre que

$$\tfrac{z}{r} \in (B+P) \cap (B-P) \text{ pour tout } z \in [x;y] \ ,$$

par suite $\frac{z}{r} \in B(0,\rho)$,
donc

$$[x,y] \subset B(0, r\rho)$$

$(vii) \Rightarrow (i)$
En effet, on raisonne par l'absurde, On pose (i) n'est pas vraie, alors il existe $(x_n) \subset P$ et $(y_n) \subset P$ tel que $\| x_n \| = \| y_n \| = 1$ et $\| x_n + y_n \| < 1$ et $\| x_n + y_n \| < \frac{1}{4^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$:

On pose :

$$u_n = \frac{x_n}{\sqrt{\| x_n + y_n \|}}, v_n = \frac{x_n + y_n}{\sqrt{\| x_n + y_n \|}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

On a : $0 \leq u_n \leq v_n$, de plus

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \| v_n \| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < +\infty$$

La série (S_n) est convergente et elle converge vers un certain élèment $v \in E$.

$0 \leq u_n \leq v_n < v$ et $\| u_n \| = \frac{1}{\sqrt{\|x_n+y_n\|}} > 2^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$
Par conséquent, l'intervalle [0,v] est non borné, ce qui contredit (vi)

Remarque
Plusieurs auteurs utilisent l'assertion (iii) comme définition de la normalité d'un cône P, et appellent le plus petit nombre N "la constante de normalité de P".

Exemple

Soient $E = \mathbb{R}^n$ et $P_1 = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, x_i \geq 0, i = \overline{1, .., n}\}$

— P_1 est un cône solide car P_1 contient des élèments intérieurs tel que

$$\dot{P}_1 = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, x_i > 0, i = \overline{1, .., n}\}$$

.

— P_1 est un cône générateur car

$\forall X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \exists U = (u_1, u_2, ..., u_n), V = (v_1, v_2, ..., v_n) \in P_1$

tels que $X = U - V$

— P_1 est normal et sa constante de normalité N$= 1$ car toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont monotones. Alors $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \theta \leq x \leq y \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|$.

Exemple

Soient G un ensemble borné fermé dans $\mathbb{R}^n$ et $E = C(G)$ l'espace des fonctions continues définies sur G à valeurs réelles muni de la norme

$$\| x \| = \sup_{t \in G} | x(t) |, \forall x \in E.$$

Soit

$$P_2 = \{x \in C(G) : x(t) \geq 0, \text{ pour tout } t \in G\}.$$

• Le cône P_2 est un cône solide dans C(G) car P_2 contient des élèments intérieurs tel que $\dot{P}_2 = \{x \in C(G) : x(t) > 0, \text{ pour tout } t \in G\}$.

• On a $x \leq y \iff x(t) \leq y(t)$ pour tout $t \in G$, donc la norme est monotone. Alors P_2 est normal et sa constante de normalité est N = 1.

1.3 Les cônes réguliers et les cônes complètement réguliers

Définition(les cônes réguliers)([1], page 7)

On dit qu'un cône $P \subset E$ est régulier si et seulement si toute suite croissante et majorée dans E a une limite,
c'est-à-dire si $(x_n) \subset E$ et $y \in E$ vérifiant :

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq ... \leq x_n \leq ... \leq y \tag{1.1}$$

alors, il existe $x \in$ E tel que

$$\| x_n - x \| \longrightarrow 0, quand \longrightarrow +\infty.$$

Il est clair que le cône P est régulier si et seulement si toute suite décroissante et minoré dans E a une limite.

Définition(les cônes complètement réguliers)

On dit qu'un cône $P \subset E$ est complètement régulier si toute suite croissante et bornée en norme dans E a une limite, c'est-à-dire si $(x_n) \subset E$ vérifiant :

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq ... \leq x_n \leq ... ; \text{ avec } M = \sup_n \| x_n \| < +\infty,$$

alors il existe $x^* \in E$ tel que $\|x_n - x^*\| \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$.
Il est clair que le cône P est complètement régulier si et seulement si toute suite décroissante et bornée en norme dans E a une limite .

Théorème 1.3.1 ([2], page 32)

Soit P un cône d'un espace de Banach E.

P est complétement régulier $\Longrightarrow$ P est régulier $\Longrightarrow$ P est normal.

Démonstration

On montre d'abord que si P n'est pas normal, alors P n'est pas régulier et n'est pas complétement régulier.
Supposons que P n'est pas normal, daprés le théoéme 1.2.1, (iii), $\exists (x_n) \subset P$ et $(y_n) \subset P$ telles que

$$\theta \leq x_n \leq y_n, \| x_n \| > 2^n \| y_n \|, \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.2}$$

Posons $z_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$ et $v_n = \frac{y_n}{2^n \|y_n\|}, n \in \mathbb{N}^*$ puis, par (1.2),

$$\theta < z_n \leq \frac{x_n}{2^n \| y_n \|} \leq \frac{y_n}{2^n \| y_n \|} = v_n, \forall n \in \mathbb{N}^*, \tag{1.3}$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \| v_n \| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < +\infty. \tag{1.4}$$

Donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ converge vers certain élèment $v \in E$, donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = v \tag{1.5}$$

maintenant on definit

$\omega = v_1 + v_2 + ... + v_{2m}$, quand $n = 2m, \forall m \in \mathbb{N}^*$
$\omega = v_1 + v_2 + ... + v_{2m} + z_{2m+1}$, quand $n = 2m+1, \forall m \in \mathbb{N}^*$.

Il est facile de montrer partir de (1,3), (1,4) et (1,5) que

$$\theta < \omega_2 \leq \omega_3 \leq \omega_4 \leq v \tag{1.6}$$

et

$$\sup_n \| \omega_n \| \leq 2 < +\infty. \tag{1.7}$$

Mais la suite (ω_n) n'est pas convergente, puisque :

$$\| \omega_{2m+1} - \omega_{2m} \| = \| z_{2m+1} \| = 1$$

Donc P n'est pas régulier et n'est pas complétement régulier.
maintenant on montre que la régularité compléte de P implique la régularité de P.
Supposons que P soit complétement régulier et (1.1) soit satisfaite. Alors, par la conclusion mentionnée ci-dessus, P est normal.
Il résulte donc du théorème (1.3.3) et du fait que $\theta \leq y - x_n \leq y - x_1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ que :

$$\| y - x_n \| \leq N \| y - x_1 \|, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\| x_n \| < 1$, et ceci entraine que la suite (x_n) n'est pas convergente.

Exemple

Soient $E = L^P(\Omega)$, où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $0 < mes\Omega < \infty$ et $1 < p < \infty$, et

$$P_3 = \{x \in L^P(\Omega) : x(t) \geq 0,\text{p.p dans } \Omega\}$$

On cherche à montrer que le cône P_3 est complètement régulier, on a d'après le théorème 1.3.1, P_3 est régulier.
On suppose que (1.2) est satisfaite , c'est-à-dire :

$$x_1(t) \leq x_2(t) \leq ... \leq x_n(t) \leq ..., \text{ et } \int_\Omega |x_n(t)|^P \mathrm{d}t \leq M^p, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Par suite, d'après le lemme de Fatou ,

$$\int_\Omega |x^*(t)|^P \mathrm{d}t \leq M^p$$

c'est-à-dire : $x^* \in L^P(\Omega)$, où $x^*(t) = \lim_{n \to \infty} x_n(t)$. de

$$\theta \leq x^*(t) - x_n(t) \leq x^*(t) - x_1(t),\ \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

et du théorème de la convergence dominée de Lebesgue on obtient que

$$\|x^* - x_n\|_{L^P}^p = \int_\Omega |x^*(t) - x_n(t)|^P \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

La régularité complète de P_3 est donc prouvée.

Exemple

Pour $E = C_0 = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_k, ...) | \underset{k\to+\infty}{lim} x_k = 0 \right\}$ muni de la norme $\|x\| = \underset{k}{sup}|x_k|$ et

$$P_4 = \{x = (x_1, x_2, ..., x_k, ...) \in C_0 | x_k \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}^*\}.$$

si $x^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, ..., x_k^{(n)}, ...\right) \in C_0$, $y = (y_1, y_2, y_k, ...) \in C_0$ tels que

$$x^{(1)} \leq x^{(2)} \leq ... \leq x^{(n)} \leq y,$$

il est facile de remarquer que $\|x^{(n)} - x^*\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ tels que

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*, ...) \text{ et } x_k^* = \underset{n\to\infty}{lim} x_k^{(n)}.$$

D'où P_4 est régulier.
Par ailleurs,
soit $z^{(n)} = \left(z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, ..., z_k^{(n)}, ...\right)$,où

$$z_k^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{si } k \leq n, \\ 0 & \text{si } k > n. \end{cases}$$

On remarque que

$$z^{(n)} \in C_0, z^{(1)} \leq z^{(2)} \leq ... \leq z^{(n)} \leq ... \text{ et } \|z^n\| = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

par contre $(z^{(n)})$ ne converge pas dans C_0 d'où P_4 n'est pas complètement régulier.

De la même manière, on peut montrer que le cône

$$P_5 = \{x \in C_0([a, +\infty[) | x(t) \geq 0\}$$

de l'espace de Banach $C_0([a, +\infty[) = \left\{ x \in C([a, +\infty[) | \underset{t \to +\infty}{lim} x(t) = 0 \right\}$ muni de la norme

$$\|x\| = \sup_{a \leq t \leq +\infty} |x(t)|$$

est régulier, mais n'est pas copmlètement régulier.

Théorème 1.3.8([1] page 10)

Si E est réflexif et P est un cône dans E, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) P est normal ;

(ii) P est régulier ;

(iii) P est complètement régulier.

1.4 les cônes minihedrals et les cônes fortement minihedrals

Définition

Un élément $z \in E$ est dit la borne supérieure (cést-à-dire supremum) de l'ensemble $D \subset E$, s'il vérifie les deux conditions suivantes :

i. $x \leq z, \forall x \in D$;

ii. $x \leq y, \forall x \in D \Rightarrow z \leq y, \forall y \in E$.

Nous indiquons la borne supérieur de D par sup D, donc $z = supD$.

Définition

Un élément $z \in E$ est dit la borne inférieure (cést-à-dire infremum) de l'ensemble $D \subset E$, s'il vérifie les deux conditions suivantes :

i. $x \geq z, \forall x \in D$;

ii. $x \geq y, \forall x \in D \Rightarrow z \geq y, \forall y \in E$.

Nous indiquons la borne inférieur de D par inf D, donc $z = infD$.

Lemme 1.4.1([2], page 39)

Supposons que P est un cônes régulier dans un espace de banach E. Alors

1- Tout ensemble majoré et totalement ordonné dans E admet une borne supérieure.

1- Tout ensemble minoré et totalement ordonné dans E admet une borne inférieure.

Lemme de Zorn 1.4.2([2], page 24)

Soit X un ensemble partiellement ordonné. Alors

1- Si tout sous-ensemble totalement ordonné de X a un majorant, alors X admet un élément maximal.

2- Si tout sous-ensemble totalement ordonné de X a un minorant, alors X admet un élément minimal.

Définition(Cônes minihedral)

On dit que le cône $P \subset E$ est minihedral si et seulement si sup $\{x, y\}$ existe pour tout couple (x, y) de p^2.

Il est claire, que inf{x,y} existe pour tout couple (x,y) si et seulement si P est minihedral.

On peut facilement montrer que si P est minihedrel alors, pour tout ensemble fini sup D existe. avec

$D = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset E$, qui est un ensemble majoré.

De plus l'egalité suivante est verifié :

$$sup\{x_1, x_2, ..., x_n\} = sup\{x_1, sup\{x_2, ..., x_n\}\}.$$

Définition(Cône fortement minihedral)

On dit que le cône P est fortement minihedral si et seulement si sup de D existe pour tout ensemble majoré $D \subset E$.

Il est claire que P est fortement minihedral si et seulement si inf D existe pour tout ensemble minoré $D \subset E$.

Il est évident que la forte minihedralité d'un cône P implique la minihedralité de P.

Exemple

Considérons l'ensemble G fermé borné dans $\mathbb{R}^n$. Pour$E = \mathcal{C}(G)$ le cône

$$P_6 = \{x \in \mathcal{C}(G) : x(t) \geq 0, t \in G$$

est minihedral, car $\forall x, y \in \mathcal{C}(G)$, on a

$$sup\{x, y\} = z, \text{ où } z(t) = max\{x(t), y(t)\} \in \mathbb{R}, \forall t \in G.$$

Exemple

Pour $E = C^1([0, 2\pi])$, le cône $P_7 = \{x \in C^1([0, 2\pi]) : x(t) \geq 0, t \in [0, 2\pi]\}$ n'est pas minihedral ; car sup{x,y} n'existe pas pour

$$x(t) = t, 0 \leq t \leq 2\pi \text{ et } y(t) = 2\pi - t, 0 \leq t \leq 2\pi$$

Car si on suppose que $sup\{x, y\} = z$, alors

$$z(t) = \begin{cases} 2\pi - t & \text{si } 0 \leq t \leq \pi, \\ t & \text{si } \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

alors que $z \notin C^1([0, 2\pi])$.

Il est claire que $x \leq z$, $y \leq z$, où $z(t) = 2\pi$, $t \in [0, 2\pi]$.

Théorème 1.4.1 ([1], page 15)

Si E est séparable et le cône $P \subset E$ est régulier et minihedral, alors P est fortement minihedral.

Démonstration

On suppose que $D \subset E$ et il existe $z \in E$ tel que $x \leq z, \forall x \in D$
Par hypothése E est séparable, il existe un ensemble dénombrable
$L = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} \subset D$, qui est dense dans D.

On pose $y_n = sup\{x_1, x_2, ..., x_n\}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ puisque P est minihedral y_n existe.

Evidement,

$$y_1 \leq y_2 \leq ... \leq y_n ... \leq z$$

Puisque P est régulier, $y_n \to x^* \in E$.

On montre que $x^* = supD$.

D'abord, on remarque que

$$x^n \leq x^*, n \in \mathbb{N}^* \tag{1}$$

Pour tout $x \in D$, il existe une suite dans L, qui converge vers x.

D'aprés (1), on obtient $x \leq x^*$, donc x^*est un majorant de D. Si $v \in E$ est un majorant de D, alors

$$y^n \leq v, \, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

et donc $x^* \leq v$.

Corollaire 1.4.1

Si E est réflexif et séparable et le cône $P \subset E$ est normal et minihedral alors P est fortement minihedral.

Démonstration

Le resultat de ce corollaire découle des théorèmes (2.3.5) et (2.4.8).

Exemple

Pour $E = L^p(\Omega)$ où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, le cône $P_2 = \{x \in\ L^p(\Omega) : x(t) \geq 0$ p.p dans $\Omega\}$ est minihedral, car $sup\{x, y\} = z$ existe $\forall x, y \in L^p(\Omega)(p \geq 1)$, où

$$z(t) = max\{x(t), y(t)\}\text{p.p, } t \in \Omega.$$

Remarquons que $L^p(\Omega)$ est séparable et P_2 est regulier, donc Dápres le théorème (1.1.6) P_2 est fortement minihedral.

Exemple

Pour $E = C^1[0, 2\pi]$, le cône $P_2 = \{x \in C^1([0, 2\pi]) : x(t) \geq 0, t \in [0, 2\pi]\}$ n'est ni normal ni minihedral.

CHAPITRE 2

EXISTENCE ET UNICITÉ DU POINT FIXE POUR LES OPÉRATEURS MONOTONES

2.1 Existence et unicité du point fixe pour les opérateurs croissants

Soit P un cône dans l'espace de Banach réel E et "$\leq$" l'ordre partiel dans E induit par P.

Définition

Soit D un sous ensemble de E. Un opérateur $A : D \to E$ est dit croissant si et seulement si

$$\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \leq x_2 \Rightarrow Ax_1 \leq Ax_2.$$

On dit que A est strictement croissant si et seulement si $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \Rightarrow Ax_1 < Ax_2$.
On dit que A est fortement croissant si et seulement si $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \Rightarrow Ax_1 \ll Ax_2$(si $\overset{0}{P} \neq \emptyset$).

Définition(Opérateur complètement continu)

Un opérateur $A : D \subset E \to E$ est dit complètement continu si et seulement si il est continu et compact. La compacité signifie que l'ensemble A(S) est relativement compact pour tout ensemble borné $S \subset D$.

Définition(Opérateur convexe et concave)

Soit D un ensemble convexe dans E et $A : D \to E$ un opérateur .

1. A est dit opérateur concave sur D si et seulement si $\forall x, y \in D, x \leq y$ et $t \in [0, 1]$

$$A(tx + (1-t)y) \geq tAx + (1-t)Ay.$$

2. A est dit opérateur convexe sur D si et seulement si $\forall x, y \in D, x \leq y$ et $t \in [0, 1]$

$$A(tx + (1-t)y) \leq tAx + (1-t)Ay.$$

Clairement, A est un opérateur convexe de D si et seulement si (-A) est un opérateur concave de D.

Définition

1. On appelle point fixe minimal d'un opérateur A le plus petit des point fixe de A.
2. On appelle point fixe maximal d'un opérateur A le plus grand des point fixe de A.

Théorème 2.1.1([1], page 41)

Soient $u_0, v_0 \in E$, $u_0 < v_0$ et $A : [u_0, v_0] \to E$ un opérateur croissant tels que

$$u_0 \leq Au_0, Av_0 \leq v_0. \tag{2.1}$$

Supposons que l'une des deux conditions suivantes soit satisfaite :

(H_1) P est normal et A est complètement continu ;

(H_2) P est régulier et A est continu.

Alors, A a un point fixe maximal x^* et un point fixe minimal x_* dans $[u_0, v_0]$. De plus

$$x_* = \lim_{n\to\infty} u_n, \quad x^* = \lim_{n\to\infty} v_n, \tag{2.2}$$

où $v_n = Av_{n-1}$ et $u_n = Au_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, et

$$u_0 \leq u_1 \leq ... \leq u_n \leq ... \leq x_* \leq x^* \leq ... \leq v_n \leq ... \leq v_1 \leq v_0. \tag{2.3}$$

Démonstration

Etant donné que A est un opérateur croissant, et de (2.1) on a

$$u_0 \leq u_1 \leq ... \leq u_n \leq ... \leq v_n \leq ... \leq v_1 \leq v_0... \tag{2.4}$$

En effet, nous montrons que la suite (u_n) converge vers un certain $x_* \in E$ et $Ax_* = x_*$.

Quand la condition (H_1) est satisfaite, l'ensemble $S = \{u_0, u_1, u_2, ...\}$ est borné et $S = A(S) \cup \{u_0\}$.
Soit A un opérateur complètement continu, c'est-à-dire A(S) est un ensemble relativement compat alors S est relativement compact.
Donc il existe une sous suite $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ telle que
$u_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} x_* \in E$.
Clairement,$u_n \leq x_* \leq v_n$ $n \in \mathbb{N}^*$.

Lorsque $m > n_k$, on a $\theta \leq x_* - u_m \leq x_* - u_{n_k}$, donc,en vertu de la normalité de P et du théorème 1.2.1,

$$\|x_* - u_m\| \leq N\|x_* - u_{n_k}\|,$$

où N désigne la constante de la normalité du cône P.
Donc,

$$u_m \xrightarrow[m\to\infty]{} x_*.$$

En prenant $n \to \infty$ dans les deux côtés de l'égalité $u_n = Au_{n-1}$, la continuité de A entraîne que $Ax_* = x_*$.

Quand la condition (H_2) est satisfaite, la suite (u_n) converge vers un certain $x_* \in E$ en vue de (1.4) et de la régularité de P.
Comme A est continu, $u_n = Au_{n-1}$ converge vers Ax_* et donc $Ax_* = x_*$.

De même, on peut montrer que la suite (v_n) converge verd un certain $x^* \in E$ tel que $Ax^* = x^*$ avec

$$u_n \leq x_* \leq x^* \leq v_n; \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.5}$$

Ensuite par (2.4) et (2.5), on obtient(2.3).

Enfin,nous montrons que x^*et x_* sont les points fixe maximal et minimal de A dans $[u_0, v_0]$, respectivement . Soit $\overline{x} \in [u_0, v_0]$ tel que $A\overline{x} = \overline{x}$.
Comme A est croissant, il résulte de $u_0 \leq \overline{x} \leq v_0$ que $Au_0 \leq A\overline{x} \leq Av_0$, c'est-à-dire $u_1 \leq \overline{x} \leq v_1$.
De même, on obtient $u_2 \leq \overline{x} \leq v_2$,et en général,$u_n \leq \overline{x} \leq v_n$ $n \in \mathbb{N}^*$.Lorsque $n \to \infty$, on aura $x_* \leq \overline{x} \leq x^*$ et notre théorème est démontré.

Corollaire

Supposons que A n'a qu'un point fixe $\overline{x} \in [u_0, v_0]$. De plus supposons que les conditions du théorème (2.1.1) sont satisfaites.
Alors $\forall x_0 \in [u_0, v_0]$ la suite (x_n) définie par :

$$x_n = Ax_{n-1}; \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{2.6}$$

converge vers $\overline{x}$.

Démonstration

Étant donné que A est croissant et $u_0 \leq x_0 \leq v_0$, on aura donc

$$u_n \leq x_n \leq v_n \quad n \in \mathbb{N}^*. \tag{2.7}$$

Par hypothèses, on obtient que $x_* = x^* = \overline{x}$ et ensuite $u_n \to \overline{x}$ et $v_n \to \overline{x}$.
Donc d'aprés (1.7) et le théorème (2.1.1), nous obtenons $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \overline{x}$.

Théorème 2.1.2([1], page 42)

Soient $u_0, v_0 \in E$,$u_0 \leq v_0$ et $A : [u_0, v_0] \to E$ un opérateur coissant tel que $u_0 \leq Au_0$ et $Av_0 \leq v_0$.
Supposons que P soit fortement minihedral.

Alors, A admet un point fixe maximal x^* et un point fixe minimal x_* dans $[u_0, v_0]$ vérifiant

$$u_0 \leq u_1 \leq ... \leq u_n \leq ... \leq x_* \leq x^* \leq ... \leq v_n \leq ... \leq v_1 \leq v_0 \tag{2.8}$$

où $u_n = Au_{n-1}$ et $v_n = Av_{n-1}$ $n \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration

Soit $D = \{x \in E : u_0 \leq x \leq v_0, Ax \geq x\}$. Clairement, $u_0 \in D$ et v_0 est un majorant de D.
Donc, puisque P est fortement minihedral, $x^* = supD$ existe.
Maintenant, on montre que x^* est le point fixe maximal de A dans $[u_0, v_0]$.
En effet, $u_0 \leq x \leq x^* \leq v\,;\forall x \in D$
et donc

$$u_0 \leq Au_0 \leq Ax \leq Ax^* \leq Av_0 \leq v_0.$$

On a $Ax \geq x$,
alors
$x \leq Ax^*\,;\forall x \in D$.
De la définition de la borne supérieure on obtient que
$x^* \leq Ax^*$.

De plus, à partir de $x^* \leq Ax^*$,nous savons que $Ax^* \leq A(Ax^*)$ ce qui donne que $Ax^* \in D$, et donc $Ax^* \leq x^*$.
Par suite $Ax^* = x^*$.Si $\overline{x}$ est un point fixe de A dans $[u_0, v_0]$,alors $\overline{x} \in D$,d'où $\overline{x} \leq x^*$.
Cela montre que x^* est maximal.

De même, on peut montrer que $x_* = infD_1$ est le point fixe minimal de A dans $[u_0, v_0]$, tel que
$D_1 = \{x \in E : u_0 \leq x \leq v_0, Ax \leq x\}$.

Finalement,
puisque A est croissant et $u_0 \leq x_* \leq x^* \leq v_0$,(1.8) est satisfaite.

Théorème 2.1.3([1], page 43)

Soient $u_0, v_0 \in E$ avec $u_0 < v_0$ et $A : [u_0, v_0] \to E$ un opérateur croissant tel que
$u_0 \leq Au_0$ et $Av_0 \leq v_0$.
Supposons que $A([u_0, v_0])$ soit un ensemble relativement compact de E.
Alors A a au moins un point fixe dans $[u_0, v_0]$.

Démonstration

Soit $F = \{x \in A([u_0, v_0]) : Ax \geq x\}$. On a $A(Au_0) \geq Au_0$ qui implique $Au_0 \in F$,
d'où F n'est pas vide.

Comme E est partiellement ordonné par P,F est un ensemble de partiellement ordonné.
Maintenant, supposons que G est un sous-ensemble totalement ordonné de F. Comme A est relativement compact et $G \subset F \subset A([u_0, v_0])$ alors, G est relativement compact et donc séparable,
c'est-à-dire qu'il existe un ensemble dénombrable $V = \{y_1, y_2, ...\} \subset G$, qui est dense dans G.
Puisque G est totalement ordonné, $z_n = sup\{y_1, y_2, ..., y_n, ...\}$ $n \in \mathbb{N}^*$ existe et $z_n \in G$ (en fait,z_n égale à l'un de $y_i, i \in \mathbb{N}^*$).
Comme G est relativement compact alors, il existe une sous-suite $(z_{n_i}) \subset (z_n)$ telle que $z_{n_i} \to v^* \in E$. Puisque

$$z_1 \leq z_2 \leq ... \leq z_n \leq ...,$$

nous avons

$$y_n \leq z_n \leq v^* \quad n \in \mathbb{N}^* \tag{2.9}$$

et $v^* \in \overline{G} \subset \overline{F} \subset \overline{A([u_0, v_0])} \subset [u_0, v_0]$. De (1.9) on obtent $z \leq v^*$ pour tout $z \in G$,
donc $z \leq Az \leq Av^* \forall z \in G$.
Ainsi Av^* est un majorant de G.
D'autre part, de $z_n \leq Av^*$ $n \in \mathbb{N}^*$ on obtient $v^* \leq Av^*$ donc $Av^* \leq A(Az^*)$, ce qui montre que $Az^* \in F$.
Ainsi, Az^* est un majorant de G dans F.
Donc d'après le lemme de Zorn on obtint que F contient un élément maximal x^*. Puisque $Ax^* \geq x^*$ et $A(Ax^*) \geq Ax^*$, alors $Ax^* \in F$.
Par la maximalité de x^*, on doit avoir $Ax^* = x^*$.

Corollaire 2.1.2

Soient $u_0, v_0 \in E$, $u_0 < v_0$ et $A : [u_0, v_0] \to E$ un opérateur croissant tels que $u_0 \leq Au_0$ et $v_0 \leq Av_0$.
Supposons que A soit compact et le cône P soit normal.
Alors A a au moins un point fixe dans $[u_0, v_0]$.

Démonstration

Comme P est normal, le segment $[u_0, v_0]$ est borné.
Alors la compacité de l'opérateur A donne la compacité de l'ensemble $A([u_0, v_0])$.

Théorème 2.1.4([1], page 44)

Soient $u_0, v_0 \in E$,$u_0 < v_0$ et $A : [u_0, v_0] \to E$ un opérateur croissant tel que $u_0 \leq Au_0$ et $Av_0 \leq v_0$.
Supposons que P soit minihedral et $A([u_0, v_0])$ est un ensemble relativement compact de E.
Alors, A a un point fixe maximal x^* et un point fixe minimal x_* dans $[u_0, v_0]$.

Démonstration

Soit $F = \{x \in A([u_0, v_0]) : Ax \geq x\}$. D'aprés le lemme de Zorn, on a déjà démontré dans le théorème (2.1.3) que F contient un élément maximal x^* tel que $Ax^* = x^*$.
Maintenant, on montre que x^* est le point fixe maximal de A dans $[u_0, v_0]$.
En effet, supposons que $\overline{x}$ soit un pont fixe quelconque de A dans $[u_0, v_0]$,alors puisque P est minihedral, $v = sup\{\overline{x}, x^*\}$ existe. De $v \geq \overline{x}$ et $v \geq x^*$,on aura $Av \geq A\overline{x} = \overline{x}$ et $Av \geq Ax^* = x^*$.

D'où $v \leq Av$,et donc $Av \leq A(Av)$.Il suit donc $Av \in F$. puisque x^* est maximal nous avons $Av = x^*$, d'ou $x^* \geq \overline{x}$.Par suite. x^* est le point fixe maximal de A dans $[u_0, v_0]$.

De même, on peut montrer que $F_1 = \{x \in A([u_0, v_0]) : Ax \leq x\}$ adment un élément minimal x_*, qui vérifie $Ax_* = x_*$ et est le point fixe minimal de A dans $[u_0, v_0]$.

Corollaire2.1.3

Soient $u_0, v_0 \in E$,$u_0 < v_0$ et $A : [u_0, v_0] \to E$ un opérateur croissant tel que $u_0 \leq Au_0$ et $Av_0 \leq v_0$.
Supposons que A est compact et P soit normal et minihedral.
Alors, A admet un point fixe maximal x^* et un point fixe minimal x_* dans $[u_0, v_0]$.

Théorème 2.1.5([2], page 81)

Soient $u_0, v_0 \in E$ avec $u_0 < v_0$ et $A : [u_0, v_0] \to E$ un opérateur croissant tel que $u_0 \leq Au_0$ et $Av_0 \leq v_0$.
Si P est régulier, alors A a au moins un point fixe dans $[u_0, v_0]$.

Démonstration

Posons $D = [u_0, v_0]$, on a $A(D) \subset D$. Soit $F = \{x \in D : Ax \geq x\}$. On a $u_0 \in F$ d'où $F \neq \emptyset$. Soit H un sous-ensemble totalement ordonné de F. Comme P est régulier, par le lemme (1.4.2), $z^* = supH$ existe et évidement $z^* \in D$. Puisque $x \leq z^*$, $\forall x \in H$, alors $x \leq Ax \leq Az^*$, $\forall x \in H$.
Par suite $z^* \leq Az^*$ et $z^* \in F$ et donc H a un majorant $z^* \in F$.
D'aprés le lemme de Zorn, F a un élément maximal v^*.
De $A(A(v^*)) \geq Av^*$, il s'ensuit que $Av^* \in F$.
Puisque v^* est maximal, on a $Av^* = v^*$

Lemme 2.1.1([2], page 87)

Supposons que P est normal, $v > \theta$ et $A : [\theta, v] \to E$ est un opérateur croissant concave. S'il existe $0 < \varepsilon < 1$ tel que $A\theta \geq \varepsilon v$ et $Av \leq v$, alors A a un point fixe minimal u^* avec $u^* > \theta$.
De plus, si $u_0 = \theta$ et $u_n = Au_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\begin{cases} \|u_n - u^*\| \to 0(n \to +\infty), \\ \\ \|u_n - u^*\| \leq N\|A\theta\|\varepsilon^{-2}(1-\varepsilon)^n \quad (n \in \mathbb{N}^*) \end{cases} \tag{2.10}$$

où N est la constante normale de P.

(Théorème)([2], page 89)

Soit P un cône normal, $u_0, v_0 \in E$ avec $u_0 < v_0$
Supposons que $A : [u_0, v_0] \to E$ est un opérateur croissant, soit $h_0 = v_0 - u_0$.
Supposons que l'une des conditions suivantes soit satisfaite :

(i) A est concave, $Au_0 \geq u_0 + \varepsilon h_0$ et $Av_0 \leq v_0$, où ε est un nombre positif avec $0 \leq \varepsilon \leq 1$,

(ii) A est convexe, $Au_0 \geq u_0$ et $Av_0 \leq v_0 - \varepsilon h_0$, où ε est un nombre positif avec $0 \leq \varepsilon \leq 1$.

Alors A a un point fixe unique x^* dans $A : [u_0, v_0]$.
De plus, si $x_n = Ax_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x_0 \in [u_0, v_0]$, on a

$$\|x_n - x^*\| \to 0 \; n \to +\infty$$

$$\|x_n - x^*\| \leq M(1-\varepsilon)^n \quad n \in \mathbb{N}^*, \tag{2.11}$$

où M est une constante positive qui ne dépend pas de x_0.

Démonstration

Premiérement, on suppose que la condition (i) est satisfaite.

Soit $Bx = A(x+u_0) - u_0$. On a $B : [\theta, h_0] \to E$ est un opérateur croissant concave, $B\theta \geq \varepsilon h_0$ et $Bh_0 \leq h_0$.
Alors, par le lemme précédent, B a un point fixe u^* dans $[\theta, h_0]$ et

$$\|u_n - u^*\| \leq M_0(1-\varepsilon)^n \quad n \in \mathbb{N}^*, \tag{2.12}$$

où $u_0 = \theta$, $u_n = Bu_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $M_0 > 0$ est une constante.
Si on a $h_n = Bh_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,on aura

$$h_0 \geq h_1 \geq ... \geq h_n \geq ... \geq u^*.$$

Soit $t_n = sup\{t > 0 : u^* \geq th_n\}$. Puisque $u^* = Bu^* \geq B\theta \geq \varepsilon h_0 \geq \varepsilon h_n$, on a

$$0 \leq \varepsilon \leq t_1 \leq ... \leq t_n \leq ... \leq 1, u^* \geq t_n h_n,$$

$$u^* = Bu^* \geq B(t_n h_n) \geq (1-t_n)B\theta + t_n B h_n,$$

$$\geq (1-t_n)\varepsilon h_0 + t_n h_{n+1} \geq [(1-t_n)\varepsilon + t_n]h_{n+1}.$$

Ainsi, à partire de la définition de t_{n+1}, on obtient $t_{n+1} \geq (1-t_n)\varepsilon + t_n$ et donc

$$1 - t_{n+1} \leq (1-t_n)(1-\varepsilon) \; n \in \mathbb{N}^*,$$

ce qui implique que

$$1 - t_n \leq (1-t_1)(1-\varepsilon)^{n-1} \leq (1-\varepsilon)^n \; n \in \mathbb{N}^*.$$

Puisque on a

$$\theta \leq h_n - u^* \leq h_n - t_n h_n \leq (1-t_n)h_0 \leq (1-\varepsilon)^n h_0,$$

il s'ensuit que

$$\|h_n - u^*\| \leq N\|h_0\|(1-\varepsilon)^n \quad n \in \mathbb{N}^*. \tag{2.13}$$

Maintenant, pour $y_0 \in [\theta, h_0]$, soit la suite (y_n) définie par $y_n = By_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Alors par récurrence on obtient que $u_n \leq y_n \leq h_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. De (1.12)et(1.13), il vient que

$$\begin{aligned} \|y_n - u^*\| &\leq \|y_n - u_n\| + \|u_n - u^*\| & (2.14)\\ &\leq N\|h_n - u_n\| + \|u_n - u^*\| & (2.15)\\ &\leq N\|h_n - u^*\| + (N+1)\|u_n - u^*\| \\ &\leq M(1-\varepsilon)^n n \in \mathbb{N}^*, \end{aligned}$$

où $M = N^2\|h_0\| + (N+1)M_0$ est une constante, ce qui implique que B a un point fixe unique dans $[\theta, h_0]$.
En fait, supposons que $\overline{x} \in [\theta, h_0]$ tel que $\overline{x} = B\overline{x}$. En choisissant $y_0 = \overline{x}$, puis $By_{n-1} = \overline{x}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
Ensuite, de (2.14), on obtient

$$\|\overline{x} - u^*\| \leq M(1-\varepsilon)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

d'où $\overline{x} = u^*$.

Enfin, pour terminer la preuve, il suffit de poser

$$x^* = u^* + u_0 et x_n = y_n + u_0 pour n \in \mathbb{N}^*$$

.

On suppose que la condition (ii) est satisfaite et soit $B = v_0 - A(v_0 - x)$.

Alors $B : [\theta, h_0] \to E$ est un opérateur croissant concave et satisfaisant $B\theta \geq \varepsilon h_0$,$Bh_0 \leq h_0$.
Par une preuve similaire de (i) et par le lemme (2.1.1), on peut prouver que les résultats du théorème sont vérifiées. Ceci complète la preuve.

Corollaire 2.1.3

Soient $u_0, v_0 \in E$ où $u_0 < v_0$, P un cône solide normal et $A : [u_0, v_0] \to E$ un opérateur croissant.

Supposons que l'une des conditions suivantes est satisfaite :

(i) A est un opérateur concave, $Au_0 \gg u_0$ et $Av_0 \leq v_0$,

(ii) A est un opérateur convexe, $Au_0 \geq u_0$ et $Av_0 \ll v_0$,

Alors A a un point fixe unique x^* dans $[u_0, v_0]$.

De plus, si $x_n = Ax_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\forall x_0 \in [u_0, v_0]$, on a

$$\|x_n - x^*\| \longrightarrow 0_{n \longrightarrow +\infty} et \quad \|x_n - x^*\| \leq Mr^n \quad n \in \mathbb{N}^*, \tag{2.16}$$

où $0 < r < 1$ et $M > 0$ sont des constantes.

Démonstration

Soit $h_0 = v_0 - u_0$. De $Au_0 \gg u_0$ (ou $Av_0 \ll v_0$), nous savons qu'il existe $0 < \varepsilon < 1$ suffisamment petit tel que $Au_0 \geq u_0 + \varepsilon h_0$ (ou $Av_0 \leq v_0 - \varepsilon h_0$), puis du théorème (2.1.6), on peut obtenire la conclusion(où $r = 1 - \varepsilon$).

Corollaire 2.1.4

Soient $u_0, v_0 \in E$ où $u_0 < v_0$, P un cône solide normal et $A : [u_0, v_0] \to E$ un opérateur fortement croissant c'est-à-dire

$$\forall x, y \in [u_0, v_0], x < y \Rightarrow Ax \ll Ay.$$

Supposons que l'une des conditions suivantes est satisfaite :

(i) A est un opérateur concave, $Au_0 > u_0$ et $Av_0 \leq v_0$,

(ii) A est un opérateur convexe, $Au_0 \geq u_0$ et $Av_0 < v_0$,

Alors A a un point fixe unique x^* dans $[u_0, v_0]$.

De plus, si $x_n = Ax_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, alors, $\forall x_0 \in [u_0, v_0]$, on a

$$\|x_n - x^*\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \text{ et } \|x_n - x^*\| \leq Mr^n \ n \in \mathbb{N}^*,$$

où $0 < r < 1$ et $M > 0$ sont des constantes.

Démonstration

Supposons que la condition (i) est satisfaite, (si la condition (ii) est satisfaite, la preuve est similaire). Soit $u_1 = Au_0$, puis $u_1 > u_0$.

Comme A est fortement croissant, nous obtenons $Au_1 \gg Au_0 = u_1$.

Alors, en appliquant le corollaire (2.1.3), pour l'intevalle $[u_1, v_0]$ on obtient que A a un pont fixe unique x^*, et $\forall x_0 \in [u_1, v_0]$, la suite définie par $x_n = Ax_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ vérifie (2.6).

Soit $\overline{x}$ un point fixe de A dans $[u_0, v_0]$. Alors $\overline{x} = A\overline{x} \gg Au_0 = u_1$.

Donc A n'a pas de point fixe dans $[u_0, u_1]$. De plus, $\forall x_0 \in [u_0, v_0]$ on aura $x_1 \in [u_1, v_0]$.

Par conséquent, (2.16) est vérifiée, $\forall x_0 \in [u_0, v_0]$. Ceci complète la preuve.

2.2 Existence et unicité du point fixe pour les opérateurs décroissants

Soit P un cône dans l'éspace de Banach réel E et " $\leq$ " l'ordre partiel dans E introduit par P.

Remarque

l'opérateur décroissant $A : D \longrightarrow E$ est définit par :

$$\forall x_1; x_2 \in D; x_1 \leq x_2 \Longrightarrow Ax_1 \geq Ax_2$$

— On dit que A est strictement décroissant si

$$\forall x_1, x_2 \in D; x_1 \leq x_2 \Longrightarrow Ax_1 > Ax_2$$

— On dit que A est fortement décroissant si

$$\forall x_1, x_2 \in D; x_1 \leq x_2 \Longrightarrow Ax_1 \gg Ax_2$$

(si $P \neq \emptyset$)

Théorème 2.2.1([1], page 47)

On suppose que :

(i) P est normal et l'opérateur $A : P \longrightarrow P$ est complétement continu décroissant ;

(ii) $A\theta > \theta$ et $A^2\theta > \varepsilon_0 A\theta$, où $\varepsilon_0 > 0$ et θ désigne le zéro de l'espace E ;

(iii) pour tout $x \geq \alpha A(\alpha = \alpha(x) > 0)$ et $0 < t < 1$, $\exists \eta = \eta(x;t) > 0$ tel que

$$A(tx) \leq [t(1+\eta)]^{-1} Ax. \tag{2.17}$$

Alors, A admet un unique point fixe positif $\forall x^* > \theta$. De plus, on peut construire successivement la suite $x_n = Ax_{n-1}, n \in \mathbb{N}^*$, telle que pour tout point initial $x_0 \in P$, On a :

$$\| x_n - x^* \| \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty$$

démonstration

On definit la suite récurrente $u_0 = \theta; u_n = Au_{n-1} n \in N$. Puisque A est un opérateur décroissant, on peut montrer par récurrence :

$$\theta = u_0 \leq u_2 \leq ... \leq u_{2n} \leq ... \leq u_{2n-1} \leq u_3 \leq u_1 = A\theta : \tag{2.18}$$

$$u_{2n} = A^2 u_{2n-2}; u_{2n+1} = A^2 u_{2n-1}, n \in \mathbb{N}^* \tag{2.19}$$

et

$$u_{2n} = Au_{2n-1}; u_{2n+1} = Au_{2n}, n \in \mathbb{N}^* \tag{2.20}$$

comme P est un cône normal, l'intervalle ordonné $[\theta; A\theta]$ est borné. De (2.18), on obtient que $u_{2n-2} \in [\theta; A\theta]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et comme A^2 est un opérateur complétement continu, la suite (u_{2n}) contient donc une sous-suite convergente (u_{2n_k}). Il existe donc

$$u^* \in [\theta; A\theta] ; u_{2n_k} \longrightarrow u^* \text{ quand } k \longrightarrow +\infty.$$

Daprès (2.18) , on obtient $\theta \leq u_{2n_k} \leq u_{2n} \leq u^*; \forall n > n_k$.

Comme P est un cône normal , alors il existe une constante N $>$ 0 telle que :

$$\|u_{2n} - u_{2n_k}\| \leq N\|u^* - u_{2n_k}\|k; \forall n > n_k :$$

donc

$$\|u - u_{2n}\| \leq N'\|u^* - u_{2n_k}\| \,; \forall n > n_k \text{ avec } N' = N + 1\,;$$

ce qui montre que $u_{2n} \longrightarrow u^*$ quand $n \longrightarrow +\infty$. De la même manière, on montre que la suite (u_{2n+1}) est une suite convergente , il existe donc $\upsilon \in [\theta, A\theta]$: $\upsilon_{2n+1} \longrightarrow \upsilon$ quand $n \longrightarrow +\infty$: L'hypothèse (ii) et lassertion entraînent que

$$\theta < \varepsilon_0 A\theta A^2\theta = u_2 \leq u_{2n} \leq u^* \leq \varepsilon^* \leq u_{2n-1} n \in \mathbb{N}^* \tag{2.21}$$

par passage a la limite dans (2.19)et (2.20),on aura :

$$u* = A^2u^*; \upsilon^* = A^2\upsilon^*; \upsilon^* = Au^*; u^* = A\upsilon^* \tag{2.22}$$

Daprès (2.21), on vois que $u^* \geq \varepsilon_0 A\theta = \varepsilon_0 u_1 \geq \varepsilon_0 \upsilon^*$. Donc, si on pose $t_0 = sup\{t > 0 : u^* \geq t\varepsilon^*\}$, on trouve $0 < \varepsilon_0 \leq t_0 < \infty$ et $u^* \geq t_0\upsilon^*$ avec $t_0 \leq 1$ car $u^* \leq \upsilon^*$.

On montre , maintenant que $t_0 = 1$; par labsurde, on suppose $0 < t_0 < 1$; dans ce cas l'hypothèse (iii) entraîne qu'il existe $\eta_0 > 0$ tel que :

$$\upsilon^* = Au^* \leq A(t_0\upsilon^*) \leq [t_0(1 + \eta_0)]^{-1}A\upsilon^* = [t_0(1 + \eta_0)]^{-1}u^* :$$

Daprès (2.21) et la décroissance de A. On obtient donc $u^* \geq t_0(1+\eta_0)v^*$, ce qui contredit la dénition de t_0 ; d'où $t_0 = 1$ c'est à dire $u^* \geq v^*$. Ensuite, de (2.21), on obtient :

$$u^* = v^* \tag{2.23}$$

Par conséquent , de (2.22), on en déduit que u est un point fixe positif de A.

Finalement, on montre que A admet un unique point fixe. En fait, si on suppose qu'il existe deux points fixes de A,$x_1^* et x_2^*$; (2.17) entraîne que :

$$\|x_1^* - x_2^*\| \leq \| x_1^* - x_n^* \| + \| x_n^* - x_2^* \| \longrightarrow 0; n \longrightarrow +\infty$$

Donc $x_1^* = x_2^*$, d'où l'unicité du point fixe de A. Maintenant on note l'unique point fixe de A par x

On montre qu'on peut construire successivement une suite (x_n) dénie par : $x_n = Ax_{n-1} n \in \mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall x_0 \in P; \|x_n - x^*\| \longrightarrow 0_{n \longrightarrow +\infty} :$$

Comme A est décroissant, $x_0 \geq \theta$ implique que $\theta A x_0 \leq A\theta$.donc $u_0 \leq x_1 \leq u_1$. Appliquons l'inégalité précédente A, On trouve que :

$$u_2 \leq x_2 \leq u_1$$

En continuant ce processus, nous obtenons plus généralement :

$$u_{2n} \leq x_{2n} \leq u_{2n-1} et u_{2n} \leq x_{2n+1} \leq u_{2n+1} \leq u_{2n-1}, n \in \mathbb{N}^* : \tag{2.24}$$

De la même façon, nous obtenons que :

$$u_{2n} \leq x^* \leq u_{2n-1} \tag{2.25}$$

Par suite, comme P est un cône normal, (2.24) et (2.25) entraînent que :

$$\begin{aligned}
\|x_n - x^*\| &\leq \|x_{2n} - u^{2n}\| + \|u_{2n} - x^*\| \\
&\leq N\|u_{2n-1} - u^{2n}\| + N\|u_{2n-1} - u^{2n}\| \\
&= 2N\|u_{2n-1} - u^{2n}\| \\
&\leq 2N(\|u_{2n} - u^*\| + \|u_{2n-1} - u^*\|) \longrightarrow 0 quandn \longrightarrow +\infty
\end{aligned}$$

(car $u_{2n} \longrightarrow u^*; u_{2n+1} \longrightarrow \upsilon^* = u^*; n \longrightarrow +\infty$)

Et de la même faÃ§on, on déduit que $\|x_n - x^*\| \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$. La relation (2.16) est donc vraie pour toute la suite $(x_n)_n$ et la preuve est donc complète.

corollaire 2.2.1

Lorsque P est solide, le théorème précédent est encore vrai si l'on remplace lhypothèse (iii) par la condition suivante :

(*) Pour tout $x \geq \alpha A\theta(\alpha = \alpha(x) > 0)$ et $0 < t < 1$, on a :

$$A(tx) \ll t^{-1}Ax \tag{2.26}$$

Démonstration

alors il existe un ε suffisamment petit $(0 < \varepsilon < 1)$ tel que

$$t^{-1}Ax - A(tx) - \varepsilon t^{-1}Ax \geq \theta \ ,$$

ce qui implique

$$A(tx) \leq t^{-1}(1-\varepsilon)Ax = [t(1+\eta)]^{-1}Ax,$$

où $\eta = \varepsilon \setminus (1-\varepsilon) > 0$, Ainsi (*) implique (iii). Il est facile de voir que l'hypothèse (iii) du théorème précédent est équivalente à la condition :

(vi) Pour tout $x \geq \alpha A\theta(\alpha = \alpha(x) > 0)$ et $t > 1$, il existe un $\eta = \eta(x;t), 0 < \eta < 1$, tel que :

$$A(tx) \geq [t(1-\eta)]^{-1}Ax, \tag{2.27}$$

De même, la condition (*) est équivalente à la condition :

(**) Pour tout $x \geq \alpha A\theta(\alpha = \alpha(x) > 0)$ et $t > 1$, on a,

$$A(tx) \gg t^{-1}Ax \tag{2.28}$$

Théorème 2.2.2([1], page 50)

Supposons que

(i) P est un cône normal, solide et l'opérateur A :$P \longrightarrow P$ complétement continu et fortement décroissant
(ii) $A\theta > \theta et A^2\theta \geq \varepsilon_0 A\theta$, où $\varepsilon_0 > 0$

(ii) Pour tout $x \geq \alpha A\theta(\alpha = \alpha(x) > 0)$ et $0 < t < 1$, on a

$$A(tx) < t^{-1}Ax \tag{2.29}$$

Alors , A admet exactement un point fixe positif $x > \theta$ et (2.16) est vérifiée

Démonstration.

on pose $t_0 = sup\{t > 0 | u^* \geq tv^*\}$, et on doit prouver que $t_0 = 1$. Supposons par l'absurde que $0 < t_0 < 1$, par l'hypothèse (iii) on a,

$$v^* = Au^* \leq A(t_0 v^*) < t_0^{-1}Av^* = t_0^{-1}u^*.$$

Puisque A est fortement décroissant, il résulte de $u^* > t_0 v^*$ que

$$v^* = Au^* \ll A(t_0 v^*) < t_0^{-1}u^*,$$

et donc il existe un $\delta_0 > 0$, suffisamment petit tel que :

$$t_0^{-1}u^* - v^* - \delta_0 v \geq \Theta,$$

c'est-à-dire :

$$u^* \geq t_0(1 + \delta_0)v^*$$

ce qui contredit la dénition de t_0.

CHAPITRE 3

LES MÉTHODES ITÉRATIVES

3.1 Les méthodes itératives du point fixe

Itération de Picard

Définition

Soit (X ; d) un espace métrique, $K \subset X$ un sous ensemble fermé de X et $T : K \longrightarrow K$ une application possédant au moins un point fixe $p \in F_T$ avec F_T est l'ensemble des points fixes .

Pour tout$x_0 \in X$ donné, la suite d'itérations $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ donné par :

$$x_n = T(x_{n-1}) = T_n(x_0),\ n = 1, 2, ...$$

est dite suite itérative de Picard.

Nous sommes intéréssés par l'obtention des conditions (supplémentaires) sur T, K et X aussi général que possible, et qui devrait garantir la convergence (forte) des itérations $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ au point fixe de T en K .

Itération de Krasnoselskii

On la définit dans un espace normé réel $(X, \|.\|)$

Définition
Soit $T : X \longrightarrow X$ une application, $x_0 \in X$ et $\lambda \in [0,1]$ La suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ donnée par :

$$x_{n+1} = (1-\lambda)x_n + \lambda T x_n; n = 0, 1, 2, ... \ (*)$$

est appelée l'itération de Krasnoselskii. Elle est notée par $K_n(x_0, \lambda, T)$

à partir de l'égalité (*) lorsque $\lambda = 1$, l'itération de Krasnoselskii se réduit à l'itération de Picard.

Itération de Mann

Pour obtenir des points fixes pour certaines cas pour les quelles l'itération de Picard échoue, un nombre de procédures d'itération de point fixe ont été développé, comme la méthode itérative de Mann .

définition :
Pour $x_0 \in K$,$(a_n)_n$ la suite qui vérifie les conditions suivantes :

— $a_0 = 1$

— $0 \leq a_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

— $\sum_n a_n = +\infty$

la suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ telle que :

$$x_{n+1} = (1-a_n)x_n + a_n T(x_n) n = 0, 1, 2, ... \qquad (3.1)$$

est appelée itération de Mann.

Remarque :
Si la suite $a_n = \lambda(const)$, alors la procédure itérative de Mann se réduit évidemment à l'itération de Krasnoselskii

Itération d'Ishikawa

Ishikawa a développé une autre méthode d'itération en 1974.
Définition Pour $x_0 \in K$, la suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ définie par

$$x_{n+1} = (1-a_n)x_n + a_nT[(1-b_n)x_n + b_n.Tx_n] \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.2}$$

où $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ et $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ sont des suites réels satisfaisants $0 \leq a_n,\ b_n \leq 1$, est appelée itération d'Ishikawa. Elle est notée par $I(x_0, a_n, b_n, T)$.

L'équation (1) peut être réécrite sous forme d'un systéme

$$\begin{cases} y_n = (1-b_n)x_n + b_n.Tx_n & n \in \mathbb{N} \\ \\ x_{n+1} = (1-a_n)x_n + a_n.Ty_n & n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{3.3}$$

3.2 Itération de Mann modifiée et Itération d'Ishikawa modifiée

certains auteurs ont considéré d'autres types de schémas itératifs soidisant itération de Mann modifié, en remplaçant l'opérateur T par T^n avec ce changement dans le schéma d'ishikawa, on obtient :

$$x_{n+1} = (1-a_n)x_n + a_nT^n(y_n), n \in \mathbb{N}^* \tag{3.4}$$
$$y_n = (1-b_n)x_n + b_nT^n(x_n), n \in \mathbb{N}^* \tag{3.5}$$

où $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ est une suite réelle positives satisfait les conditions suivantes

— $0 \leq a_n, b_n < 1 \forall n$
— $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$
— $\sum_n a_nb_n = +\infty$

et $x_0 \in X$ est arbitraire. elle est appelé la procédure d'Ishikawa modifié. Pour obtenir l'itérattion de Mann modifié il suffit de prendre $b_n = 0$.

3.3 Itération de Mann avec erreur et Itération d'Ishikawa avec erreur

Les deux schémas de Mann et d'Ishikawa ont connu aussi un autre changement et autres appelations , procédure itérative de Mann avec erreur et procedure itérative d'Ishikawa avec erreur. Elle étaient introduites comme suit :

(i) Man avec erreur

Soit K un sous ensemble non vide d'un espace de Banach E et $T : K \longrightarrow E$ un opérateur. La suite $(x_n)n$ définie par :

$$x_{n+1} = (1 - a_n)x_n + a_n T(y_n) + u_n, n \in \mathbb{N}^* \tag{3.6}$$
$$y_n = (1 - b_n)x_n + b_n T(x_n) + v_n, n \in \mathbb{N}^* \tag{3.7}$$

où $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites réelles positives satisfaient les conditions suivantes :

— $0 \leq a_n, b_n < 1 \forall n$

— $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$

— $\sum_n a_n b_n = +\infty$

et $x_0 \in X$ est arbitraire, $(u_n)_n, (v_n)_n$ des suite définie sur K avec :

$$\sum \parallel u_n \parallel < \infty, \sum \parallel v_n \parallel < \infty,$$

(ii) Ishikawa avec erreur

Soit K un sous ensemble non vide convexe de E et $T : K \longrightarrow E$ est une application. $\forall x_0 \in K$, la suite itérative $(x_n)_n$ est définie par :

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n T(y_n) + c_n u_n, n \in \mathbb{N}^* \tag{3.8}$$
$$y_n = a'_n x_n + b'_n T(y_n) + c'_n u_n, n \in \mathbb{N}^* \tag{3.9}$$

où $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont des suites bornées sur K et $(a_n), (b_n), (c_n), (a'_n), (b'_n), (c'_n)$ des suites définies sur $[0, 1]$.

Algorithme de Mann

Définition ([3]page 89)

Soit E un espace vectoriel normé, C un ensemble convexe de E et $T : C \longrightarrow C$ une application et $x_1 \in C$ une valeur arbitraire. Soit $A = [a_{nj}]$ une matrice réelle qui satisfait les conditions suivantes :

— (A1) $a_{nj} \geq 0, \forall n, jeta_{nj} = 0, j > n$

— (A2) $\sum_{j=1}^{n} a_{nj} = 1, \forall n \geq 1$

— (A3) $\lim\limits_{n \to +\infty} a_{nj} = 0, \forall j \geq 1$

la suite définit par :

$$x_{n+1} = T(v_n)$$

où

$$v_n = \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j$$

est dite le processus itératif de Mann notée $M(x_1, A, T)$.
Remarque Il existe une littérature trés riche sur la convergence de l'itération de Mann pour différentes classes d'opérateurs considérées dans différents espaces. On commence par le premier théorème donné par Mann puis généralisé par Dotson.

3.4 Itération normale de Mann

Définition

Soit $(X; d)$ un espace métrique. L'opérateur $f : X \to X$ est appelé opérateur de Zamfirescu s'il existe des nombres réels α, β, γ satisfaisant $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ tels que pour tout $x, y \in X$, l'une des conditions suivantes est vérifiée

$$(Z1) d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha d(x, y),$$

$$(Z2)d(f(x), f(y)) \leqslant \beta[d(x, f(x)) + d(y, f(y))],$$
$$(Z3)d(f(x), f(y) \leqslant \gamma[[d(x, f(y)) + d(y + f(x))]).$$

Théorème([3]page 100)

Soit K un sous ensemble fermée convexe d'un espace de Banach uniformément convexe E et $f : K \to K$ un opérateur de Zamfirescu. Alors le schéma itératif de Mann $(x_n)_n$ défini par

$$x_{n+1} = (1 - a_n)x_n + a_n f(x_n), n \in \mathbb{N}$$

Où $(a_n)_n$ satisfait les conditions suivantes :

(1) $a_1 = 1$,

(2) $0 \leq a_n < 1, \forall n > 1$,

(3) $\sum a_n(1 - a_n) = \infty$

converge vers l'unique point fixe de T.

Remarque

On note par $M(x_1, a_n, T)$ le schéma itératif défini dans ce théorème, il est dit schéma itératif normal de Mann associé à une application T avec une valeur initiale x_1 et une suite de paramètre a_n.

3.5 Itération de Mann avec erreur

La construction du schéma itératif de Mann avec erreur ou d'Ishikawa avec erreur vient de calcul numérique.

Théorème

Soit H un espace de Hilbert réel, K un sous ensemble compact convexe de H et $T : K \to K$ une application continue hemicontractive. Soit $(a_n)_n, (b_n)_n, (c_n)_n$ des suites réelles dans [0,1] qui satisfaient les conditions suivantes :

(1) $a_n + b_n + c_n = 1,$

(2) $\underset{n \to +\infty}{lim} b_n = 0,$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = 0,$

(4) $0 \leq b_n + c_n < 1.$

Alors le schéma itératif de Mann avec erreur converge fortement vers le point fixe de T.

APPLICATION

Exemple 1 :

On considère la fonction :

$$f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

donnée par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ complètement continue et fortement décroissante et

$$P = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$$

un cône normal , solide .
(1) $f(0) = 1 > 0$;
(2) $f(f(0)) = \frac{1}{\sqrt{2}}$;
(3) Pour $x \geq \alpha(\alpha > 0)$ et $0 < t < 1$:

$$f(tx) < t^{-1} f(x)$$

car :
On a : $f(xt) = \frac{1}{\sqrt{(tx)^2+1}}$
et

$$(tx)^2 + t^2 < (tx)^2 + 1 \Longrightarrow \sqrt{t^2((tx)^2+1)} < \sqrt{(tx)^2+1}$$

d'où

$$\frac{1}{t\sqrt{x^2+1}} > \frac{1}{\sqrt{(tx)^2+1}}$$

alors d'après le le corollaire (2.2.1) f admet un unique point fixe positif $x^* > 0$, de plus on peut construire successivement la suite $x_n = f(x_{n-1})$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, telle que pour tout point initial $x_0 \in P$, on a :

$$\| x_n - x^* \| \to 0 \text{ quand } n \to +\infty$$

nous avons $f(x) = x \Rightarrow x^* = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$

Programmes d'applications sous logiciel Matlab

1.Itération de Picard

```
function [X] = picard(n,x0)

X(1)=1/sqrt(1+x0^2) ;
for i=1 :n+1

    X(i+1)=1/sqrt(1+X(i)^2) ;
end
end
```

2.Itération de Mann

```
    function [X] = mannnn(n,x0)

for i=1 :n+1
a=1/(i+1) ;
X(1)=1/sqrt(1+x0^2) ;
X(i+1)=(1-a)*X(i)+a*(1/sqrt(1+X(i)^2)) ;
end
end
```

1.Iteration de Picard

n	x_n	$\lvert x_n - x^* \rvert$	$\dfrac{\lvert x_n - x^* \rvert}{x_n}$
1	0.4472	0.3389	0.4311
3	0.7385	0.0476	0.0605
6	0.7888	0.0027	0.0034
9	0.7860	0.001	0.0012

2.Iteration de Mann

n	x_n	$\lvert x_n - x^* \rvert$	$\dfrac{\lvert x_n - x^* \rvert}{x_n}$
10	0.7761	0.01	0.0127
50	0.7850	0.0011	0.0013
100	0.7857	0.0004	0.0005
167	0.7860	0.0001	0.00012

Commentaire

La procédure itérative de Picard se rapproche du point fixe et donne $x_9 = 0.7860$, alors que les procédures itératives de Mann donne $x_{167} = 0.7860$; la convergence de la procédure d'itération de Mann est trés lente dans ce cas .

Exemple 2 :

On considère la fonction croissante f définie par : $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ sur $[0, +\infty[$, qui admet un point fixe unique x^* tel que $x^* = 2$

Programmes d'applications sous logiciel Matlab

1.Itération de Picard

```
function [X] = Picard(n,x0)

X(1)=(1/2)*x0+1 ;
for i=1 :n+1
X(i+1)=(1/2)*X(i)+1 ;
end
title(Itération de Picard)
end
```

2.Itération de Mann

```
function [X] = Mann(n,x0)
for i=1 :n+1
a=1/(i+1) ;
X(1)=(1/2)*x0+1 ;
X(i+1)=(1-a)*X(i)+a*((1/2)*X(i)+1) ;
end
title(Itération de Mann)
end
```

1.Iteration de Picard

n	x_n	$\lvert x_n - x^* \rvert$	$\frac{\lvert x_n - x^* \rvert}{x_n}$
1	1,5000	0,5	0,25
4	1,9375	0,0625	0,0312
8	1,9961	0,0039	0,00195
12	1,9998	0,0002	0,0001

1.Iteration de Mann

n	x_n	$\lvert x_n - x^* \rvert$	$\frac{\lvert x_n - x^* \rvert}{x_n}$
1	1,5000	0,5	0,25
6	1,7744	0,2256	0,1128
12	1,8388	0,1612	0,0806
17	1,8642	0,1358	0,0679
83711	1.9981	0,0019	0,00095

Commentaire

La procédure itérative de Picard se rapproche du point fixe et donne $x_{12} = 1.9998$, alors que les procédures itératives de Mann donne $x_{83711} = 1.9981$; la convergence de la procédure d'itération de Mann est trés lente dans ce cas .

Exemple 3 :

Soit $X = [0; 1]$ et $f : X \longrightarrow X$ donné par $f(x) = (1 - x)^6$ alors f admet deux points fixes p_1 et p_2 où $p_1 = 0, 2219$ et $p_2 =$

$2,1347$

Programmes d'applications sous logiciel Matlab

1.Itération de Krasnoselskii

```
function [X] = Krasnoselskii(n,λ, x0)

for i =1 :n
X(1) = (1-λ) * x0 + λ * (1-x0)^6 ;
X(i + 1) = (1-λ)* X(i) + λ *(1-X(i))^6 ;
end
end
```

2.Itération de Mann

```
function [X]= Mann(n,x0)

for i=1 :1+n
a = 1/(i+1) ;
X(1)=(1-x0)^6 ;
X(i+1)=(1-a)*X(i)+a*(1-X(i))^6 ;
end
end
```

1.Iteration de Krasnoselskii

n	x_n	$\lvert x_n - x^* \rvert$	$\dfrac{\lvert x_n - x^* \rvert}{x_n}$
1	1.5	1.2781	5.7598
3	0.379	0.1571	0.7079
5	0.2322	0.0103	0.0464
6	0.2214	0.0005	0.0022

2.Iteration de Mann

n	x_n	$\lvert x_n - x^* \rvert$	$\dfrac{\lvert x_n - x^* \rvert}{x_n}$
1	1	0.7781	3.5065
20	0.2224	0.0005	0.0022
30	0.2221	0.0002	0.0009
48	0.2219	0	0

Commentaire

La procédure itérative de Krasneselskii se rapproche du point fixe p_1 et donne $x_6 = 0.2214$, alors que les procédures itératives de Mann donne $x_6 = 0.2378$; la convergence de la procédure d'itération de Mann est trés lente dans ce cas après 48 itérations on obtient $x_{48} = 0.2219$.

CONCLUSION

Le développement de la théorie du point fixe a permis à l'analyse non linéaire de faire un grand bond , Dans notre travail, on a présenté quelques théorèmes du point fixe pour les opérateurs monotones (les opérateurs croissants et les opérateurs décroissants). nous avons aussi appliqué les méthodes itératives (Mann , Picard et Krasnoselskii) , ce qui nous donne l'avantage immédiate de chaque méthode .

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. Guo et V. Lakshmikantham, Nonlinear problems in abstract cones, Academic press, Inc. London LTD, 1988.

[2] D. Guo et Y.J. Cho et J. Zhu, Partial ordering methods in nonlinear problems, Tatiana Shohov, Susan Boriotti and Donna Dennis, 2004.

[3] V. Berinde.(2007). Iterative Approximation of Fixed Points, Lecture Notes in Mathematics 1912, Springer.

[4] SOLTUZ,M.S.Mann-Ishikawa iterations and Mann-Ishikawa iterations with errors are equivalent models. Mathematical communications 8(2003), 139-149.

[5] SOLTUZ,M.S.The equivalence of Picard, Mann and Ischikawa iterations dealing with quasi-conctactive operators. Mathematical communications 10(2005), 81-88.

[6] Y. Xu.(1998). Ishikawa and Mann Iterative Processes with Errors for Nonlinear Stron gly Accretive Operator Equations. Journal of Mathematical Analysis an Applications.vl 224, pp 91-101

Résumé

Dans ce mémoire on a présenté quelques théorème du point fixe pour les opérateurs monotones puis on a appliqué les méthodes itératives (Man , Picard et Krasnoselskii) pour l'approximation des points fixes .

Abstract

In this work we Presented some fixed point theorems for monotonic operators and then we applied the iterative methods (Man , Picard,krasnoselskii) to approximate the fixed point

ملخص

الهدف من هذه المذكرة هو تقريب نقطة ثابتة للعوامل الرتيبة باستعمال خوارزميات التقريب لمان "Mann"، بيكار"picard" ، و كراسنوزلسكي" Krasneselskii " وذلك بإثبات التقارب بواسطة نظريات تقريب نقطة ثابتة.