

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique  
Université Abderrahmane Mira  
Faculté de la Technologie



Département Automatique, Télécommunication et Electronique

## Projet de Fin d'Etudes

Pour l'obtention du diplôme de Master  
Filière : Automatique  
Spécialité : Automatique et informatique industrielle

### Thème

# Commande d'un double pendule inversé monté sur un chariot

Préparé par :

- DERRADJI Melissa
- MEKIDECHE Abdellah

Dirigé par :

Mr KACIMI Mohand. A

Examiné par :

Mr H. LEHOUCHE  
Mr O. GUENOUNOU

Année universitaire : 2021/2022

## **Remercîments**

*En premier lieu, nous rendons grâce à Dieu le tout puissant et miséricordieux de nous avoir donné le courage, la force ainsi que la santé. Qui nous a permis de finaliser ce travail dans les meilleures conditions.*

*Avec grande gratitude, nous tenons à remercier vivement notre promoteur Mr Kacimi, pour sa présence, sa disponibilité, son encouragement son écoute et surtout ses précieux conseils tout au long de l'élaboration de notre travail.*

*Nous tenons également à remercier les membres du jury et les examinateurs pour avoir accepté d'examiner ce travail, mais aussi pour tout ce que vous apportez à vos étudiants, soyez assurés de notre profond respect.*

*Nous voudrions exprimer notre reconnaissance envers les personnes qui nous ont apporté leur support moral et intellectuel tout au long de notre démarche et qui n'ont ménagé aucun effort pour nous aider et que nous remercions sincèrement.*

## ***Dédicaces***

*Nous avons le plaisir de dédier ce modeste travail en signe de respect et de reconnaissance :*

*A nos chers parents. Autant de phrases et d'expressions aussi éloquentes sont-elles ne sauraient exprimer notre gratitude et notre reconnaissance. Exemples de bonneté et de bienveillance ; merci pour votre amour, votre attention et vos encouragements, et merci pour tout ce que vous avez pu nous apporter dans nos vies.*

*A nos familles respectives, proches, et amis qui nous ont soutenues tout au long de la préparation de ce mémoire.*

## **Résumé**

Dans ce travail, nous présentons un processus de conception d'une technique de contrôle linéaire (placement de pôles) appliquées au système dynamique du double pendule inversé monté sur un chariot modélisé par le formalisme de Lagrange. La linéarisation du modèle obtenu via ce formalisme a été présentée sur la base d'une approximation en série de Taylor.

L'environnement de simulation utilisé pour valider les résultats présentés dans ce mémoire est Matlab, c'est un environnement de simulation qui permet de simuler la dynamique des systèmes. Les résultats obtenus indiquent que le contrôleur synthétisé est capable de stabiliser le double pendule inversé à sa position d'équilibre instable, ce qui prouve l'efficacité de la méthode proposée.

## **Abstract**

In this work, we present a design process of a linear control technique (pole placement) applied to the dynamic system of the double inverted pendulum mounted on a carriage modeled by the Lagrange formalism. The linearization of the model obtained via this formalism has been presented on the basis of a Taylor series approximation.

The simulation environment used to validate the results presented in this thesis is Matlab, it is a simulation environment that allows to simulate the dynamics of systems. The results obtained indicate that the synthesized controller is able to stabilize the inverted double pendulum at its unstable equilibrium position, which proves the effectiveness of the proposed method.

**Table des matières**

Introduction générale .....	8
<b>Chapitre 1: ÉTAT DE L'ART</b>	
1.1 Introduction .....	10
1.2 Définition .....	10
1.3 Types de pendules.....	10
1.3.1 Le pendule inversé classique .....	10
1.3.2 Le double pendule inversé.....	11
1.3.2.1 En cascade.....	11
1.3.2.2 En parallèle .....	12
1.3.3 Le pendule inversé de Furuta .....	12
1.3.4 Le pendule inversé stabilisé par volant d'inertie .....	13
1.3.5 Le pendule inversé sur deux roues.....	13
1.4 Intérêt de l'étude d'un double pendule inversé : .....	14
1.5 Conclusion.....	15
<b>Chapitre 2: MODÉLISATION DU DOUBLE PENDULE INVERSÉ</b>	
2.1 Introduction .....	16
2.2 Méthodes de détermination de l'équation de mouvement .....	16
2.2.1 Principe de la conservation d'énergie: .....	16
2.2.2 La loi de la dynamique de Newton .....	16
2.2.3 Méthode de Lagrange-Euler .....	17
2.3 Détermination des équations du système .....	17
2.3.1 Les coordonnées généralisées.....	17
2.3.2 Notion du degré de liberté.....	17
2.3.3 Description du système : .....	18
2.3.4 Calcul des équations .....	19
2.3.4.1 Positions.....	19
2.3.4.2 Vitesse .....	19
2.3.4.3 Energie cinétique.....	19
2.3.4.4 Energie potentielle: .....	20
2.3.4.5 Le Lagrangien: .....	20
2.3.4.6 Equations de Lagrange : .....	20
2.4 Simulation du modèle en boucle ouverte :.....	22
2.5 Conclusion.....	23
<b>Chapitre 3: COMMANDE PAR PLACEMENT DE POLES</b>	
3.1 Introduction .....	24

## Table des matières

3.2	Historique .....	24
3.3	Linéarisation du système .....	24
3.4	Modélisation de l'espace d'état .....	25
3.5	Commandabilité et Observabilité .....	26
3.6	Principe de la commande par placement de pôles .....	27
3.7	Calcul du gain de retour d'état .....	29
3.8	Placement de pôles avec MATLAB .....	29
3.9	Application au système pendule double- chariot.....	30
3.10	Conclusion.....	32
	Conclusion générale .....	33
	Bibliographie.....	34

**Liste des figures :**

Figure I.1: Schéma de principe du pendule inversé classique

Figure I.2: Schéma de principe du double pendule inversé en cascade

Figure I.3: Schéma de principe du double pendule inversé en en parallèle

Figure I.4: Schéma de principe du pendule inversé de Furuta

Figure I.5: Schéma de principe du pendule inversé stabilisé par volant d'inertie

Figure I.6 : Schéma de principe du pendule inversé sur deux roues

Figure II.1: Schéma de principe du double pendule inversé monté sur un chariot

Figure II.2: Réponse du système en boucle ouverte, conditions initiales

Figure III.1: Forme générale de l'espace d'état d'un système

Figure III.2: Principe du placement de pôles

Figure III.3: Commande par retour d'état linéaire

Figure a: III.4 Stabilisation du double pendule inversé avec la commande du retour d'état

Figure III.5: Réponse du système en boucle fermée

**Liste des tableaux :**

Table II.1 : Paramètre du double pendule inversé

### Introduction générale

Dans le domaine de l'automatique réputé d'être celui de l'analyse et de la commande des systèmes dynamiques, l'étude des systèmes non linéaires constitue un champ de recherche et d'investigations très riches. Ceci peut se comprendre par le fait que le monde réel n'est peuplé que d'objets non linéaires dont la maîtrise ne se satisfait pas toujours avec de simplifications ou des approximations qui sont souvent consistant à imposer l'hypothèse de linéarité.

Dans notre étude, nous avons un système très intéressant et fortement non linéaire à étudier, il s'agit du double pendule inversé monté sur un chariot se déplaçant le long d'une piste horizontale, qui est l'un des repères les plus populaires pour démontrer l'efficacité des techniques de contrôle.

L'instabilité du double pendule inversé fait qu'il est très compliqué de le maintenir dans sa position verticale vu que ce dernier tombe systématiquement à moins qu'une force de contrôle appropriée ne soit mise en œuvre.

Les systèmes de pendule inversé sont hautement non linéaires, mais peuvent être facilement contrôlés en utilisant des techniques de contrôle linéaire dans une position verticale. Si le système est contrôlable et observable, cette méthode donne d'excellentes marges de stabilité.

Dans ce travail, nous utiliserons donc la méthode de placement de pôles par retour d'état pour contrôler ce dernier. Ce présent manuscrit est organisé de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, nous aurons un aperçu sur les différents types de pendules, avec leurs définitions, et leurs intérêts dans divers domaines.

Dans le second chapitre, nous présenterons une description physique du système double pendule inversé sur chariot qui est le sujet de cette étude. Nous utiliserons le formalisme de Lagrange Euler pour établir les équations dynamiques du système. Nous allons par la suite étudier les propriétés du système libre, c'est-à-dire sans commande appliquée pour avoir une idée sur le comportement du système.



## **Introduction générale**

Dans le chapitre trois, nous commencerons par la linéarisation du modèle non linéaire autour du point d'équilibre instable. Ce dernier sera par la suite notre outil pour l'analyse de la stabilité en boucle fermée et la conception de la technique de commande.

Nous allons donner un aperçu sur la commande dans l'espace d'état par la technique de placement de pôle. Nous établirons les conditions de son application. Par la suite, la commande par placement de pôles est appliquée au système double pendule inversé monté sur le chariot pour assurer sa stabilité.

# Chapitre 1 : ÉTAT DE L'ART

---

## 1.1 Introduction

Ce premier chapitre s'intéresse aux pendules inversés où nous allons définir ce système et décrire quelques types en rentrant plus dans les détails pour le type du double pendule inversé sur chariot vue qu'il désigne un système assez complexe sur lequel plusieurs technologies se basent.

## 1.2 Définition

Le pendule inversé n'est qu'une tige posée en position d'équilibre instable (verticale à  $0^\circ$ ) sur une base qui peut être fixe ou mobile. La dynamique non linéaire et instable de ce système physique a fait de lui un système très intéressant et largement étudié dans la communauté des automaticiens, ce qui explique l'existence de plusieurs aspects et formes de pendules inversés [1].

## 1.3 Types de pendules

### 1.3.1 Le pendule inversé classique

Ce système mécanique consiste en un chariot de masse  $M$  qui peut se déplacer horizontalement et librement sur un rail de guidage en supportant une tige de masse  $m$  libre en rotation autour d'un pivot.

L'application d'une force  $f(t)$  va provoquer le déplacement du chariot et la déviation du pendule d'un angle  $\theta(t)$  par rapport à la verticale. Ceci constitue un système mécanique sous-actionné à deux degrés de liberté et un seul actionneur. Dans le cas de stabilisation d'un tel système, le but de la commande serait de ramener le pendule à partir d'une position initiale à sa position d'équilibre instable et le maintenir autour de cette position. [2]

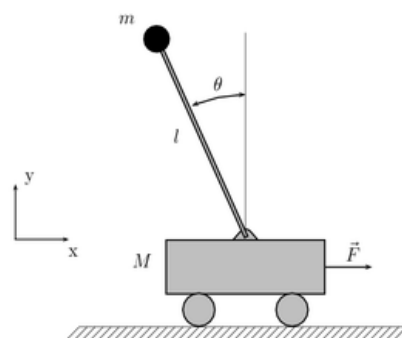


Figure I.1: Schéma de principe du pendule inversé classique

### 1.3.2 Le double pendule inversé

Pour ce type, on peut distinguer deux architectures différentes :

#### 1.3.2.1 En cascade

Ce dernier est le sujet de notre travail, il a le même principe que le pendule simple, la seule différence réside dans le fait qu'il dispose de deux tiges en rotation libre. L'une tourne autour du pivot à la base, d'un angle  $\theta_1(t)$  et l'autre avec l'angle  $\theta_2(t)$  autour de la deuxième articulation entre les deux tiges.

Le but de la commande pour ce système consiste à stabiliser les deux tiges autour de la position verticale et les maintenir autour de ce point d'équilibre instable. [3]

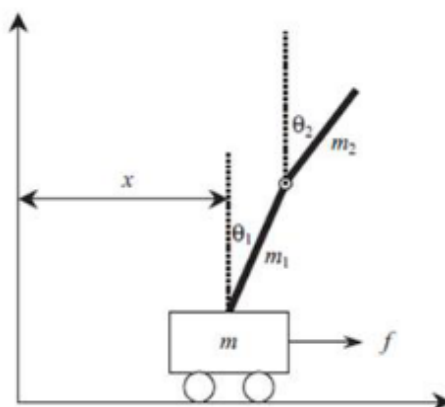


Figure I.2: Schéma de principe du double pendule inversé en cascade

### 1.3.2.2 En parallèle

Dans ce cas, le chariot supporte deux tiges indépendantes : une tige L de longueur  $l_L$  et une autre B de longueur  $l_B$ , les deux en rotation libre. Le déplacement  $x(t)$  de la base va engendrer une déviation d'un angle  $\theta_L(t)$  par rapport à la verticale sur la première tige et d'un angle  $\theta_B(t)$  par rapport à la verticale sur la deuxième tige.

Le but de la commande consiste à stabiliser les deux tiges autour de la verticale au point d'équilibre instable et les maintenir même dans le cas de présence de perturbations externes.

[4]

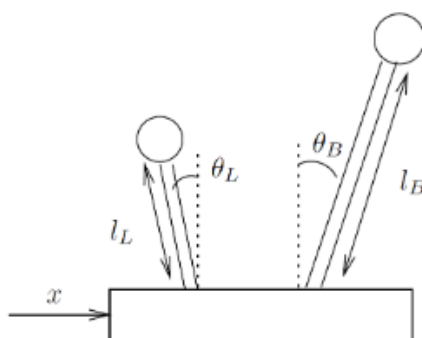


Figure I.3: Schéma de principe du double pendule inversé en en parallèle

### 1.3.3 Le pendule inversé de Furuta

Ce pendule a été conçu par K. Furuta. Il est composé d'un bras actionné en rotation dans le plan horizontale, à son extrémité vient s'ajouter un pendule inversé monté en équilibre instable. La rotation infinie du bras assure la stabilisation et le maintien du pendule autour de la verticale au point d'équilibre instable[5].

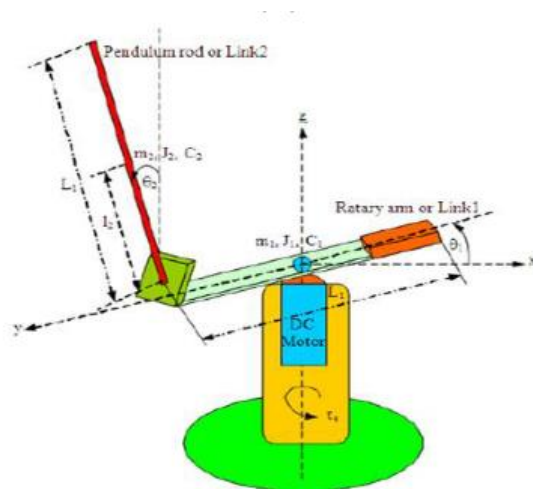


Figure I.4: Schéma de principe du pendule inversé de Furuta

### 1.3.4 Le pendule inversé stabilisé par volant d'inertie

C'est un système composé de deux corps mécaniques : un pendule inversé en rotation libre autour d'un pivot lié au bâti et un volant actionné (roue d'inertie) dont le centre de masse coïncide avec l'extrémité du pendule.

Le principe de fonctionnement de ce système est basé sur le mouvement de rotation du volant d'inertie qui provoque, par les effets dynamiques qu'il induit, la rotation de pendule. Le but de la commande consiste à stabiliser le pendule autour de la verticale au point d'équilibre instable et le maintenir dans cet état[6].

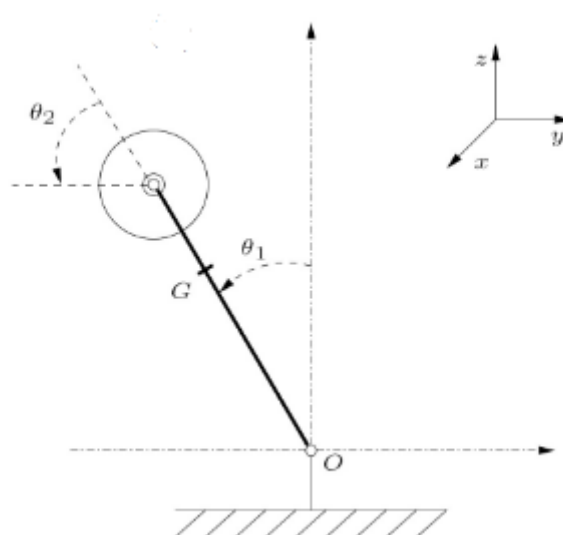


Figure I.5: Schéma de principe du pendule inversé stabilisé par volant d'inertie

### 1.3.5 Le pendule inversé sur deux roues

Le pendule inversé sur deux roues est considéré comme un prototype académique largement étudié dans le domaine de l'automatique. Comme son nom l'indique, il est constitué d'une base mobile (l'essieu et les deux roues) surmontée d'un pendule inversé en rotation libre autour d'un pivot (articulation passive) entre l'essieu et la tige du pendule. L'angle d'inclinaison du pendule par rapport à la verticale est noté  $\psi$ .

Le principe de fonctionnement du système est très simple en théorie : quand le pendule penche vers l'avant, la partie mobile doit le rattraper en effectuant un mouvement vers l'avant et vice versa. La difficulté réside dans le réglage de l'intensité de réaction des roues afin d'agir face à l'angle que fait le pendule avec la verticale. [7 – 8]

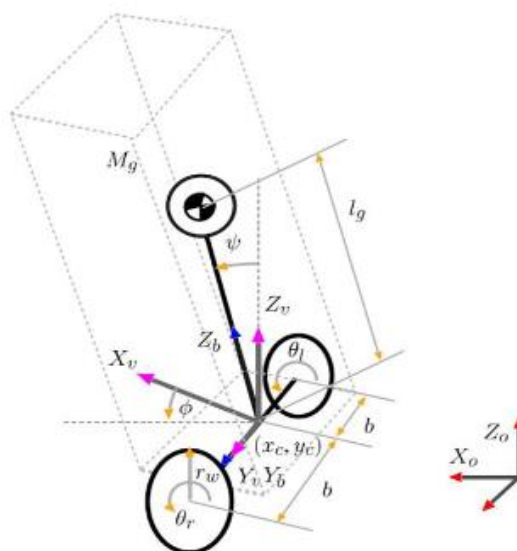


Figure I.6 : Schéma de principe du pendule inversé sur deux roues

#### 1.4 Intérêt de l'étude d'un double pendule inversé :

L'étude du pendule inversé a plusieurs intérêts :

- L'homme est en fait un pendule inversé double dont les deux axes de rotations sont les chevilles et les hanches. Afin de tenir debout, les articulations travaillent sans cesse, et l'étude de ce modèle est importante pour la construction de prothèses.
- La robotique utilise le principe du pendule inversé, en particulier dans de nouveaux moyens de transports à 2 roues comme le segway qui permet d'avancer en se penchant en avant.
- On voit apparaître des moyens de locomotion dotés de deux roues montées sur un même axe sur lequel on est en position debout. On accélère en se penchant en avant et on ralentit en se penchant en arrière. Le système est le même que le pendule inversé. La stabilité est aussi assurée par des gyroscopes mais nous n'entrerons pas dans ce genre de détails. [9]

## 1.5 Conclusion

Durant ce chapitre, nous avons présenté une vue global sur les systèmes du pendule inversés. On a aussi énuméré les principaux types les plus populaires dans la littérature. D'autre part, nous avons également souligné l'intérêt d'étudier ce genre de système et l'apport que la maîtrise de ce dernier peut apporter aux autres domaines

# Chapitre 2: MODÉLISATION DU DOUBLE PENDULE INVERSÉ

---

## 2.1 Introduction

Dans ce premier chapitre nous allons voir quelques méthodes de modélisation, pour en appliquer l'une d'entre elle afin de résoudre les équations caractérisant le système du pendule double inversé monté sur chariot.

## 2.2 Méthodes de détermination de l'équation de mouvement

Il existe en général trois façons de détermination des équations du mouvement d'un double pendule inversé :

### 2.2.1 Principe de la conservation d'énergie

L'énergie d'un système isolé ne peut être ni créée, ni détruite : elle se conserve. Elle peut changer de forme au sein du système, mais sa valeur totale reste constante[10].

$$E_m = E_c + E_p = \text{constante} \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0 \quad (1)$$

Où :

$E_m$  désigne l'énergie mécanique du système.

$E_c$  est l'énergie cinétique  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$

$E_p$  est l'énergie potentielle  $E_p = mgh$

### 2.2.2 La loi de la dynamique de Newton

La deuxième loi de Newton (ou principe fondamental de la dynamique en translation (PFDT), appelée aussi relation fondamentale de la dynamique ou (RFD) est récapitulée dans l'équation [11]:

$$\sum \vec{F}_i = m\vec{a} \quad (2)$$

Où :

$\vec{F}_i$  désigne les forces extérieures exercées sur l'objet.

$m$  est sa masse.

$\vec{a}$  correspond à l'accélération de son centre d'inertie  $G$ .



### 2.2.3 Méthode de Lagrange-Euler

La mécanique lagrangienne fut une reformulation de la mécanique classique à l'aide du concept de lagrangien, le lagrangien est donc généralement défini par la différence entre l'énergie cinétique  $E_c = T$  et l'énergie potentielle  $E_p = U$  [12-13]:

$$L = E_c - E_p = T - U \quad (3)$$

Avec ce formalisme, l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (4)$$

### 2.3 Détermination des équations du système

Dans notre travail, nous utiliserons la méthode de Lagrange en raison de sa facilité et pour sa précision et l'avantage d'élimination des efforts d'interaction.

#### 2.3.1 Les coordonnées généralisées

On donne le nom de coordonnées généralisées à un jeu de  $n_l$  variables quelconques utilisées pour décrire les mouvements du système envisagé. Elles sont désignées par la lettre indicée :  
 $q_i = 1, 2, \dots, n$

#### 2.3.2 Notion du degré de liberté

Le nombre  $n_l$  de degrés de liberté d'un système est défini comme le nombre minimum de variables indépendantes nécessaires à la description complète de ce système, le nombre de degrés de liberté est donc égale au nombre de coordonnées dépendantes  $N$  moins le nombre de relations reliant ces coordonnées entre elles  $r$  [14].

$$ddl = N - r \quad (5)$$

2.3.3 Description du système :

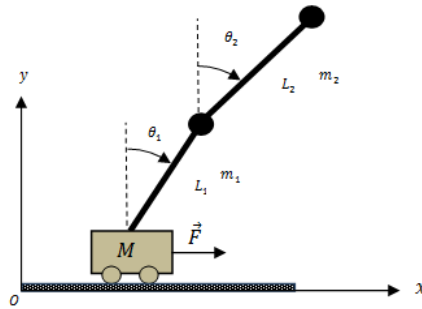


Figure II.1: Schéma de principe du double pendule inversé monté sur un chariot

Le pendule double inversé monté sur chariot est un système instable, non linéaire et rapide il est donc composé d'un chariot placé sur un rail et de deux bras en aluminium reliés l'un à l'autre, une force exercée permet de déplacer le chariot le long du plan horizontal.

Le système possède trois degrés de liberté, à savoir le plan horizontal  $x$ , l'angle  $\theta_1$  du premier pendule et l'angle du second pendule  $\theta_2$ ,  $g$  représente la gravité. Les masses du premier et du second pendule sont respectivement  $m_1$  et  $m_2$  et la masse du chariot est notée  $M$ .

La longueur du pendule inversé est désignée par  $L_1$  tandis que le pendule double est désigné par  $L_2$ , le moment d'inertie du pendule inversé est  $J_1$  et celui du pendule double est  $J_2$ .

Afin de faciliter la description du système, on considérera que les barres ne peuvent ni se plier, ni se déformer d'une quelconque manière.

Pour modéliser le système dynamique représenté sur la figure 1, on considère l'effet du frottement solide entre le chariot et le plan horizontal. De plus, la force de frottement visqueux aux points de pivot reliant le chariot de masse  $M$ , et le pendule inversé  $m_1$  et celle entre le pendule double  $m_2$  et le pendule inversé sont pris en considération.

Les équations décrivant le mouvement du pendule double inversé sur chariot seront obtenues à l'aide de l'équation de Lagrange.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{dL}{dq_i} = Q_i \quad (6)$$

## MODÉLISATION DU DOUBLE PENDULE INVERSÉ

Où le nombre de degrés de liberté et les coordonnées généralisées du système sont calculés respectivement :

$$ddl = 7 - 4 = 3 \quad (7)$$

$$q(t) = [x(t)\theta_1(t)\theta_2(t)] \quad (8)$$

Ce qui implique trois équations du mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= Q_1 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= Q_2 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= Q_3 \end{aligned} \quad (9)$$

### 2.3.4 Calcul des équations

#### 2.3.4.1 Positions

En supposant que les centres de masse des pendules se trouvent aux centres géométriques des tiges, on obtient :

$$l_i = \frac{1}{2} L_i, \text{ où } i = 1 \text{ ou } 2 \quad (10)$$

Les coordonnées du centre de gravité de la masse du chariot, des pendules inversé et double sont définies donc comme suit :

- $P_0 = x\vec{i} + 0\vec{j}$
- $P_1 = (x + l_1 \sin\vartheta_1)\vec{i} + (l_1 \cos\vartheta_1)\vec{j}$
- $P_2 = (x + L_1 \sin\vartheta_1 + l_2 \sin\vartheta_2)\vec{i} + (L_1 \cos\vartheta_1 + l_2 \cos\vartheta_2)\vec{j}$

$$(11)$$

#### 2.3.4.2 Vitesse

Les équations de vitesse sont obtenues en prenant les dérivées de l'équation (11) pour obtenir

- $V_0 = \dot{x}\vec{i} + 0\vec{j}$
- $V_1 = (\dot{x} + l_1 \dot{\vartheta}_1 \cos\vartheta_1)\vec{i} + (l_1 \dot{\vartheta}_1 \sin\vartheta_1)\vec{j}$
- $V_2 = (\dot{x} + L_1 \dot{\vartheta}_1 \cos\vartheta_1 + l_2 \dot{\vartheta}_2 \cos\vartheta_2)\vec{i} + (L_1 \dot{\vartheta}_1 \sin\vartheta_1 + l_2 \dot{\vartheta}_2 \sin\vartheta_2)\vec{j}$

$$(12)$$

#### 2.3.4.3 Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2} M v_1^2 + \frac{1}{2} m_1 v_2^2 + \frac{1}{2} m_2 v_3^2 \quad (13)$$

- $T_1 = M\dot{x}^2$
- $T_2 = \frac{1}{2} m_1 [(\dot{x} + l_1 \dot{\vartheta}_1 \cos\vartheta_1)^2 + (l_1 \dot{\vartheta}_1 \sin\vartheta_1)^2] + \frac{1}{2} J_1 \dot{\vartheta}_1^2$
- $T_3 = \frac{1}{2} m_2 [(\dot{x} + L_1 \dot{\vartheta}_1 \cos\vartheta_1 + l_2 \dot{\vartheta}_2 \cos\vartheta_2)^2 + (L_1 \dot{\vartheta}_1 \sin\vartheta_1 + l_2 \dot{\vartheta}_2 \sin\vartheta_2)^2] + \frac{1}{2} J_2 \dot{\vartheta}_2^2$

$$(14)$$

D'où l'énergie cinétique total  $T = T_1 + T_2 + T_3$

## MODÉLISATION DU DOUBLE PENDULE INVERSÉ

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + [(\dot{x} + l_1\dot{\vartheta}_1\cos\vartheta_1)^2 + (l_1\dot{\vartheta}_1\sin\vartheta_1)^2] + \frac{1}{2}J_1\dot{\vartheta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2[(\dot{x} + L_1\dot{\vartheta}_1\cos\vartheta_1 + l_2\dot{\vartheta}_2\cos\vartheta_2)^2 + (L_1\dot{\vartheta}_1\sin\vartheta_1 + l_2\dot{\vartheta}_2\sin\vartheta_2)^2] + \frac{1}{2}J_2\dot{\vartheta}_2^2 \quad (15)$$

### 2.3.4.4 Energie potentielle :

$$U = Mgh + m_1gh_1 + m_2gh_2 \quad (16)$$

- $U_1 = 0$
- $U_2 = m_1gl_1\cos\vartheta_1$  (17)
- $U_3 = m_2g(L_1\cos\vartheta_1 + l_2\cos\vartheta_2)$

D'où l'énergie potentielle total  $U=U_1+U_2+ U_3$

$$U = (m_1l_1 + m_2L_1)g\cos\vartheta_1 + m_2gl_2\cos\vartheta_2 \quad (18)$$

### 2.3.4.5 Le Lagrangien

Le Lagrangien est donné par :

$$L = T - U$$

$$L = \frac{1}{2}(M + m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(m_1l_1^2 + m_2L_1^2 + J_1)\dot{\vartheta}_1^2 + \frac{1}{2}(m_2l_2^2 + J_2)\dot{\vartheta}_2^2 + (m_1l_1 + m_2L_1)\dot{x}\dot{\vartheta}_1\cos\vartheta_1 + m_2l_2\dot{x}\dot{\vartheta}_2\cos\vartheta_2 + m_2L_1l_2\dot{\vartheta}_1\dot{\vartheta}_2\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) - (m_1l_1 + m_2L_1)g\cos\vartheta_1 - m_2gl_2\cos\vartheta_2 \quad (19)$$

### 2.3.4.6 Equations de Lagrange

L'équation du mouvement du système peut être obtenue à partir de :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= U - f_x \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vartheta_1} &= -f_{v1} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vartheta_2} &= -f_{v2} \end{aligned} \quad (20)$$

Où  $f_x$  est le coefficient de la force de frottement entre le chariot et le plan horizontal,  $f_{v1}$  est la constante d'amortissement du premier pendule, et  $f_{v2}$  est la constante d'amortissement du second pendule. Les forces de frottement sont modélisées comme des fonctions linéaires des vitesses de chaque coordonnée comme suit :

$$\begin{aligned} f_x &= v_1\dot{x} \\ f_{v1} &= v_2\dot{\vartheta}_1 \\ f_{v2} &= v_3\dot{\vartheta}_2 \end{aligned} \quad (21)$$

**L'équation de Lagrange pour le degré de liberté  $q(t) = x(t)$**

## MODÉLISATION DU DOUBLE PENDULE INVERSÉ

$$(M + m_1 + m_2)\ddot{x} + (m_1l_1 + m_2L_1) \cos \theta_1 \ddot{\theta}_1 - (m_1l_1 + m_2L_1)\dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 + m_2l_2\ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - \dot{\theta}_2^2 l_2 \sin \theta_2 m_2 + v_1\dot{x} = U \quad (22)$$

**L'équation de Lagrange pour le degré de liberté  $q(t) = \theta_1(t)$**

$$(m_1l_1 + m_2L_1) \cos \theta_1 \ddot{x} + (m_1l_1^2 + m_2L_1^2 + J_1)\ddot{\theta}_1 - (m_1l_1 + m_2L_1)g \sin \theta_1 + m_2L_1l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_2 + m_2L_1l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + v_2\dot{\theta}_1 = 0 \quad (23)$$

**L'équation de Lagrange pour le degré de liberté  $q(t) = \theta_2(t)$**

$$m_2\ddot{x}l_2 \cos \theta_2 + (m_2l_2^2 + J_2)\ddot{\theta}_2 + m_2\dot{\theta}_1L_1l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2L_1l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1^2 - m_2gl_2 \sin \theta_2 + v_3\dot{\theta}_2 = 0 \quad (24)$$

Les équations du mouvement du pendule double inversé monté sur chariot représentées ci-dessus peuvent être écrites sous la forme d'une matrice afin de pouvoir le résoudre[15] :

$$D1(q)\ddot{q} + D2(q, \dot{q})\dot{q} + D3(q) = HU$$

$$D1 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \cos \theta_1 & a_3 \cos \theta_2 \\ a_2 \cos \theta_1 & a_4 & a_5 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ a_3 \cos \theta_2 & a_5 \cos(\theta_1 - \theta_2) & a_6 \end{bmatrix}$$

$$D2 = \begin{bmatrix} v_1 & -a_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 & -a_3 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ 0 & v_2 & a_5 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2 \\ 0 & -a_5 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 & v_3 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$D3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -a_7 \sin \theta_1 \\ -a_8 \sin \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Où :

$$\begin{aligned} a_1 &= M + m_1 + m_2 \\ a_2 &= m_1l_1 + m_2L_1 \\ a_3 &= m_2l_2 \\ a_4 &= m_1l_1^2 + m_2L_1^2 + J_1 \\ a_5 &= m_2L_1l_2 \\ a_6 &= m_2l_1^2 + J_2 \\ a_7 &= g(m_1l_1 + m_2L_1) \\ a_8 &= m_2l_2g \end{aligned} \quad (26)$$

**2.4 Simulation du modèle en boucle ouverte :**

Dans cette partie, nous allons étudier les propriétés du système libre, c'est-à-dire sans commande appliquée. Notons d'abord que les équations d'Euler-Lagrange produisent le modèle dynamique non linéaire du système, qui lui, s'écrit sous la forme :

$$\ddot{q} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = D_1^{-1}(HU - D2 \dot{q} - D3) \quad (27)$$

Pour implémenter l'équation (27) sous MATLAB et simuler la dynamique du système nous avons également utilisé les valeurs des paramètres donnés dans le tableau Table II.1.

Table II.1 : Paramètre du double pendule inversé

Paramètre	Notation	Valeur
Masse du chariot (kg)	M	0.71
Masse du pendule1 (kg)	m <sub>1</sub>	0.35
Masse du pendule2 (kg)	m <sub>2</sub>	0.2
Longueur de la tige1 (m)	L <sub>1</sub>	0.4
Longueur de la tige2 (m)	L <sub>2</sub>	0.35
Coefficient de frottement solide	v <sub>1</sub>	0.001
Constante d'amortissement du pendule1	v <sub>2</sub>	0.001
Constante d'amortissement du pendule2	v <sub>3</sub>	0.001
Moment d'inertie du pendule1	J <sub>1</sub>	0.0145
Moment d'inertie du pendule2	J <sub>2</sub>	0.007
accélération gravitationnelle	g	9.81

## MODÉLISATION DU DOUBLE PENDULE INVERSÉ

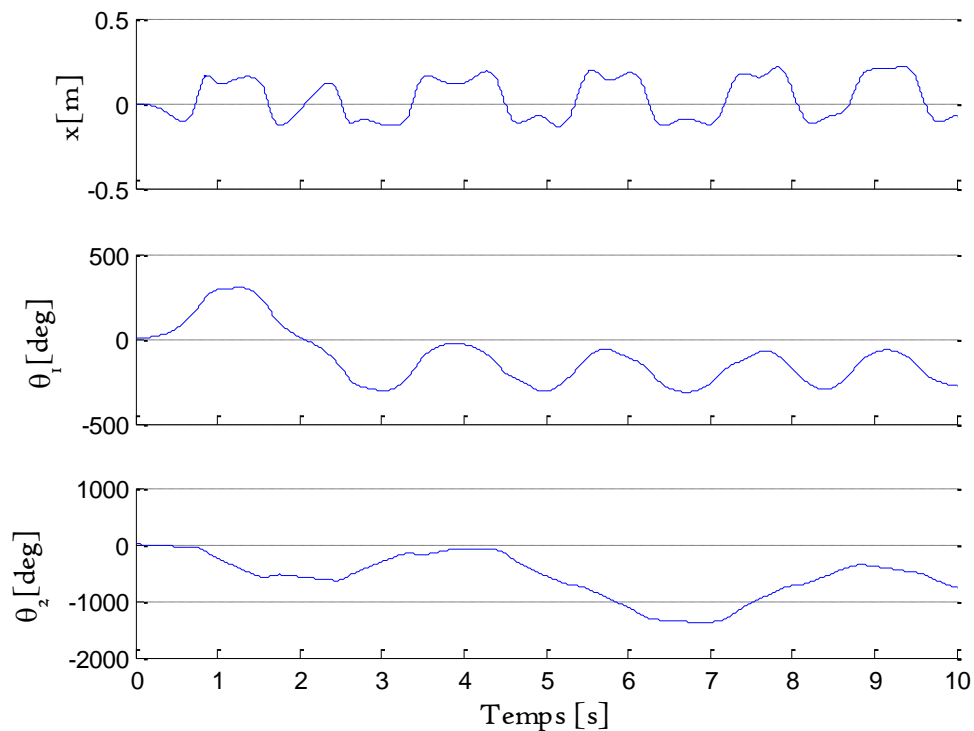


Figure II.2: Réponse du système en boucle ouverte avec les conditions initiales

$$q_0 = (0, 5.72^\circ, 0.57^\circ, 0, 0, 0)$$

La figure ci-dessus illustre la dynamique du système double pendule inversé en boucle ouverte sans commande, placé initialement autour du point d'équilibre instable. A partir de cette figure nous pouvons noter la forte non linéarité et la complexité de ce système et la difficulté à assimiler sa dynamique.

### 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité la modélisation du double pendule inversé. Dans la première partie, nous avons utilisé le formalisme de Lagrange pour trouver un modèle non linéaire. Dans la partie deux nous avons simulé le système en boucle ouverte afin de voir la réponse du modèle.

Dans le chapitre suivant nous allons établir une loi de commande linéaire à ce système.

# Chapitre 3: COMMANDE PAR PLACEMENT DE POLES

---

## 3.1 Introduction

Dans ce second chapitre , nous exposerons quelques généralités sur les systèmes comme la représentation d'état qui est une approche moderne d'étude des systèmes pour ensuite présenter une méthode de commande appelée la technique de placement de pôles.

## 3.2 Historique

La notion de la commande par retour d'état remonte aux travaux de PONTRAYGIN en Russie et de BELLMAN aux Etats-Unis sur la commande optimale et les commandes linéaires à retour d'état et qui sont apparues avec les travaux de KALMAN. Entre temps se développaient des approches algébriques ayant pour finalités le placement de pôles [16].

## 3.3 Linéarisation du système

L'équation du mouvement du pendule inversé double monté sur chariot obtenu dans le chapitre précédent est non linéaire. Toutefois il peut être linéarisé autour d'un point d'équilibre par l'utilisation du développement en série de Taylor. Pour se faire, notant les hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned} & \theta_1 = \theta_2 = 0 \text{ d'où :} \\ & \cdot \sin \theta_1 = \theta_1 \text{ et } \sin \theta_2 = \theta_2 \\ & \cdot \cos \theta_1 = \cos \theta_2 = 1 \\ & \cdot \text{ et aussi } \cos(\theta_1 - \theta_2) = 1 \end{aligned}$$

Chaque terme de  $D_1$ ,  $D_2$  et  $D_3$  peut être linéarisé pour obtenir :

$$D_1 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_4 & a_5 \\ a_3 & a_5 & a_6 \end{bmatrix} \quad D_2 = \begin{bmatrix} v_1 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & v_3 \end{bmatrix} \quad D_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -a_7 \theta_1 \\ -a_8 \theta_2 \end{bmatrix} \quad (28)$$



### 3.4 Modélisation de l'espace d'état

Pour une analyse plus approfondie, le modèle mathématique du système doit être traduit en modèle d'espace d'état [17]. La forme générale de l'espace d'état d'un système est représentée ci-dessus :

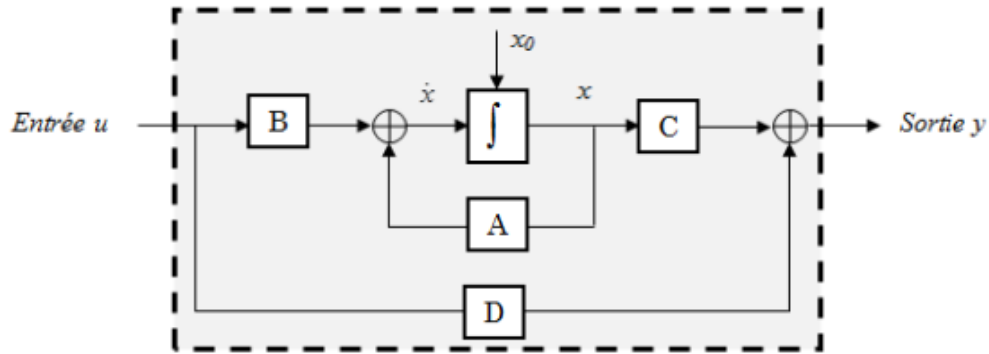


Figure III.1: Forme générale de l'espace d'état d'un système

L'équation de représentation de l'espace d'état peut être exprimée comme suit [18] :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (29)$$

Où  $n$  est le nombre total de la variable d'état et  $x \in R^n$  est le vecteur d'état,  $\dot{x}$  est la dérivée temporelle du vecteur d'état.  $u \in R^m$  est le vecteur de commande ou l'entrée de commande qui a  $m$  éléments de variables de commande, la condition initiale est  $x(0)$ .  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{n \times m}$ ,  $C \in R^{p \times n}$  sont appelées les matrices du système, la matrice de sortie et la matrice d'entrée successivement, où  $p$  est le nombre de sorties. Le vecteur de sortie est déclaré comme  $y \in R^p$ .

Alors les racines de l'équation caractéristique illustrent les pôles du système.

$$|sI - A| = 0 \quad (30)$$

Pour le cas du système du pendule inversé sur chariot, le vecteur d'état, la dérivée du vecteur d'état et l'entrée de commande du vecteur d'état sont déclarés sous la forme :

$$\begin{aligned} x &= [x \ \theta_1 \ \theta_2 \ \dot{x} \ \dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2] \\ \dot{x} &= [\dot{x} \ \dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \ \ddot{x} \ \ddot{\theta}_1 \ \ddot{\theta}_2] \\ y &= [x \ \theta_1 \ \theta_2] \\ u &= U \end{aligned} \quad (31)$$

## COMMANDE PAR PLACEMENT DE POLES

Puisque toutes les composantes de (27) ont été linéarisées comme démontré ci-dessus, nous pouvons l'écrire sous la forme d'un espace d'état continu[19].

Où :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -D_1^{-1} \frac{\partial D_3}{\partial \theta} & -D_1^{-1} D_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -D_1^{-1} H \end{bmatrix} \quad (32)$$

Avec :  $I$  matrice identité (3x3)

Et la dérivée partielle de  $D_3$  est donnée par :

$$\frac{\partial D_3}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial D_3(1)}{\partial x} & \frac{\partial D_3(1)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial D_3(1)}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial D_3(2)}{\partial x} & \frac{\partial D_3(2)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial D_3(2)}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial D_3(3)}{\partial x} & \frac{\partial D_3(3)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial D_3(3)}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_7 & 0 \\ 0 & 0 & -a_8 \end{bmatrix} \quad (33)$$

En utilisant les valeurs de chaque paramètre du système indiquées dans le tableau 1, les matrices du modèle d'espace d'état continu linéarisé sont données par :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4.097 & -0.01131 & -0.001126 & 0.002784 & 3.295e - 005 \\ 0 & 42.42 & -8.009 & 0.002784 & -0.02883 & 0.02333 \\ 0 & -34.33 & 34.73 & 3.295e - 005 & 0.02333 & -0.1012 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1.126 \\ 2.784 \\ 0.03295 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

### 3.5 Commandabilité et Observabilité

Le système doit vérifier une condition nécessaire et suffisante pour pouvoir effectuer le placement de pôle via un retour d'état, la commandabilité et l'observabilité.

KALMAN propose un critère simple construit à partir des deux matrices  $A \in R^{n \times n}$  et  $B \in R^{n \times k}$ , afin décider de la commandabilité d'un système :

$$\text{rang}([B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]) = n$$

## COMMANDE PAR PLACEMENT DE POLES

Il propose également un critère similaire construit à partir des deux matrices  $C \in R^{p \times n}$  et  $A \in R^{n \times n}$ , afin de décider de l'observabilité du système :

$$\text{rang}([C \quad CA \quad CA^2 \quad \dots \quad CA^{n-1}]^T) = n$$

Le système est donc dit commandable si et seulement si la matrice de commandabilité  $[B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$  est de rang  $n$ , et observable si seulement si la matrice d'observabilité  $[C \quad CA \quad CA^2 \quad \dots \quad CA^{n-1}]^T = n$  [20].

### 3.6 Principe de la commande par placement de pôles

Le principe est de déterminer une commande telle que les pôles du système bouclé soient convenablement placés dans le plan complexe est satisfaire des spécifications d'amortissement, de rapidité et de stabilité.

La conception du contrôleur a un impact significatif sur la stabilité du système, Un système instable dont le pôle est situé sur le côté droit du plan complexe nécessite une stratégie de contrôle qui amène tous les pôles dans la région stable du plan complexe. Ceci peut être stabilisé par une matrice de gain appropriée pour le retour d'état.

- . La stabilité étant la première qualité à assurer pour la boucle fermé, les valeurs propres doivent être à partie réelle strictement négative.
- . La paire de valeurs propres imaginaires produit des sinus et cosinus ce qui implique l'apparition des oscillations.
- . La combinaison des deux choix assurera donc une dissipation d'énergie autrement dit la stabilité du système ainsi que une commande dynamique[21].

## COMMANDE PAR PLACEMENT DE POLES

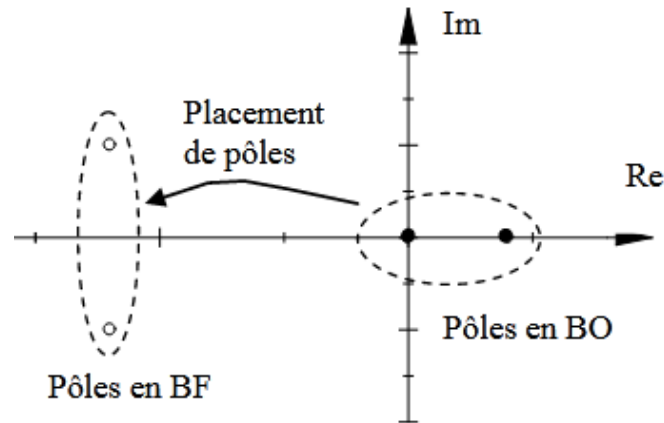


Figure III.2 : Principe du placement de pôles

La première étape du travail est donc le placement ou l'affectation des pôles à la position correcte et la deuxième étape est l'identification de la matrice de gain de retour d'état  $K$  qui puisse satisfaire les critères voulus [22]. La dynamique désirée en Boucle Fermée est caractérisée par les pôles désirés en BF :

$$p = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \quad (35)$$

D'où le Polynôme caractéristique en BF :

$$f_{BF}(p) = \prod_{i=1}^n (p - \lambda_i) = p^n + \beta_{n-1}p^{n-1} + \dots + \beta_1p + \beta_0 \quad (36)$$

Le retour d'état est utilisé par une commande au vecteur d'entrée  $u$  :

$$u = -Kx \quad (37)$$

Avec  $K$  de dimension  $(1 \times n)$  appelée matrice de gain.

En substituant l'équation ci-dessus dans les équations de l'espace d'état, elle peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - BK)x \\ y &= (C - DK)x \end{aligned} \quad (38)$$

La solution de cette équation devient alors :

$$x = e^{A-BK}x(0) \quad (39)$$

## COMMANDE PAR PLACEMENT DE POLES

Par conséquent, la matrice d'état du système en boucle fermée vaut :

$$(A - BK) \quad (40)$$

La dynamique du système bouclé est donc fixée par les valeurs propres de la matrice d'état du système en boucle fermée  $(A - BK)$ , ces valeurs propres aussi appelées les pôles de régulation sont les racines de l'équation caractéristique :

$$\det(pI - (A - BK)) \quad (41)$$

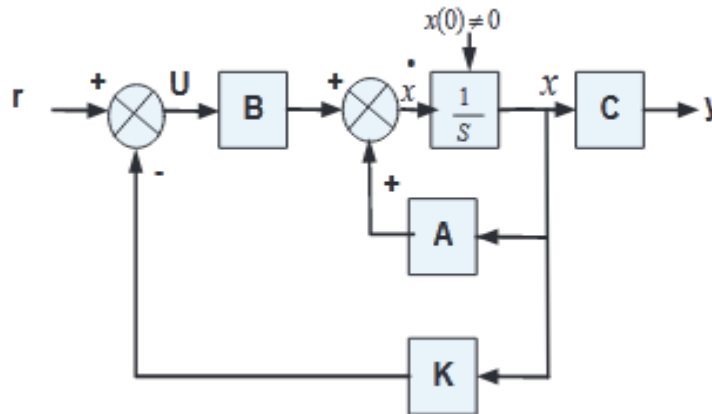


Figure III.3: Commande par retour d'état linéaire

### 3.7 Calcul du gain de retour d'état

Pour calculer la matrice de gain  $K = [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n]$  nécessaire pour le placement de pôles, cette tâche peut être accomplie en utilisant directement le polynôme caractéristique de telle sorte que [23] :

$$f_{A-BK}(p) = f_{BF}(p) = |pI - (A - BK)| \quad (42)$$

Avec  $f_{A-BK}(p)$  Le polynôme caractéristique de la matrice d'état en boucle fermée

Ce qui donne comme solution les éléments du vecteur gain  $K$ .

### 3.8 Placement de pôles avec MATLAB

Sous MATLAB, nous allons utiliser la commande suivante :

$$K = place(A, B, p) \quad (43)$$

### 3.9 Application au système pendule double- chariot

L'objectif est de calculer la commande par retour d'état qui place les pôles à

La matrice de commandabilité à :  $\{-2 + 3i, -2 - 3i, -4, -6, -5, -2\}$

. La matrice de commandabilité :

$$[B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] = \begin{bmatrix} 0 & -0.0011 & 0 & -0.0114 & 0.0007 & -0.4818 \\ 0 & 0.0028 & -0.0001 & 0.1179 & -0.0096 & 5.7567 \\ 0 & 0.0000 & 0.0001 & -0.0944 & 0.0173 & -7.3274 \\ -0.0011 & 0.0000 & -0.0114 & 0.0007 & -0.4818 & 0.0556 \\ 0.0028 & -0.0001 & 0.1179 & -0.0096 & 5.7567 & -0.8852 \\ 0.0000 & 0.0001 & -0.0944 & 0.0173 & -7.3274 & 1.8062 \end{bmatrix} \quad (44)$$

D'après les résultats obtenus sur Matlab :  $\text{rang}([B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]) = \text{rang}([C \ CA \ CA^2 \ \dots \ CA^{n-1}]^T) = 6$  donc le système est complètement commandable, il peut être stabilisé par le retour d'état.

. Matrice d'état en BF :

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4.097 & -0.01131 & -0.001126 & 0.002784 & 3.295e - 005 \\ 0 & 42.42 & -8.009 & 0.002784 & -0.02883 & 0.02333 \\ 0 & -34.33 & 34.73 & 3.295e - 005 & 0.02333 & -0.1012 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1.126 \\ 2.784 \\ 0.03295 \end{bmatrix} [k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4 \ k_5 \ k_6] \quad (45)$$

. Le gain du retour d'état est :

$$K = [-3.2799 \quad 93.7716 \quad -111.6021 \quad -4.6825 \quad 5.8225 \quad -18.6432] \quad (46)$$

Dans un premier temps, nous allons tester le placement de pôles calculé sur le modèle linéaire obtenu précédemment dans l'équation (34). Ce teste consiste en l'utilisation du gain  $K$  comme un retour d'état dont l'objectif est la stabilisation du double pendule inversé dans sa positions d'équilibre instable  $x = \theta_2 = \theta_1 = 0$

## COMMANDE PAR PLACEMENT DE POLES

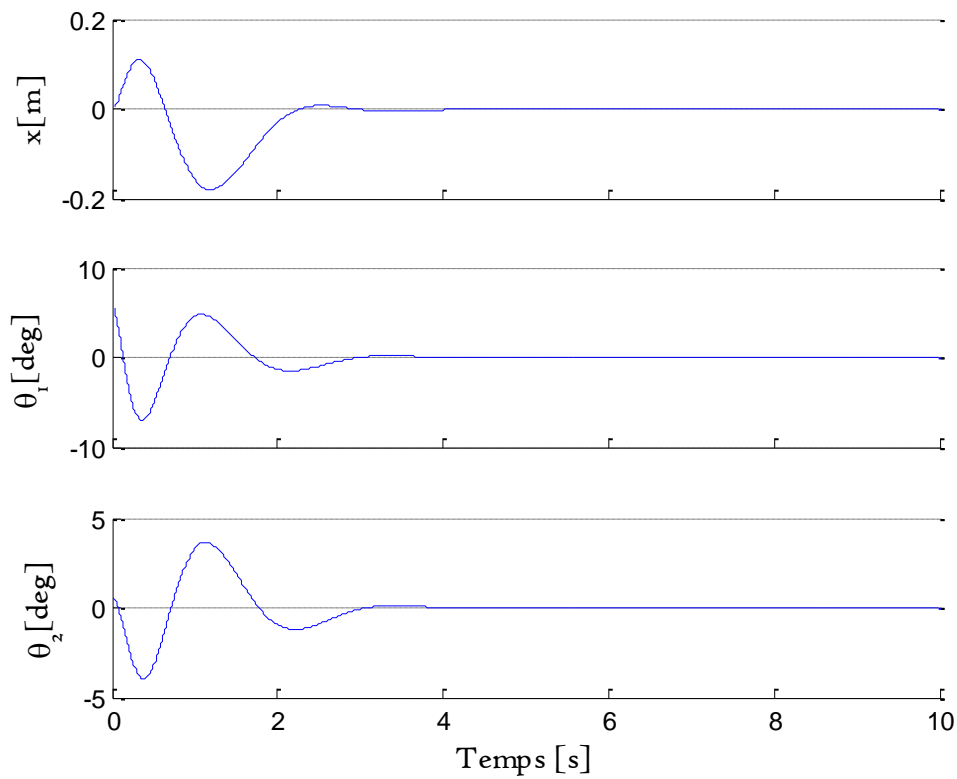


Figure III.4 : Stabilisation du double pendule inversé avec la commande du retour d'état  $q_0 = (0, 5.72^\circ, 0.57^\circ, 0, 0, 0)$

La figure ci-avant montre les résultats de simulation de la commande par retour d'état appliqué sur le modèle linéaire du double pendule inverse, ici on constate bien que la commande arrive à ramener le double pendule de cette position de déséquilibre vers la position d'équilibre verticale avec une rapidité et précision assez satisfaisante.

Afin de vérifier la validité de la commande synthétisée, nous avons repris le même teste mais cette fois-ci sur le modèle non linéaire avec les mêmes conditions initiales.

## COMMANDE PAR PLACEMENT DE POLES

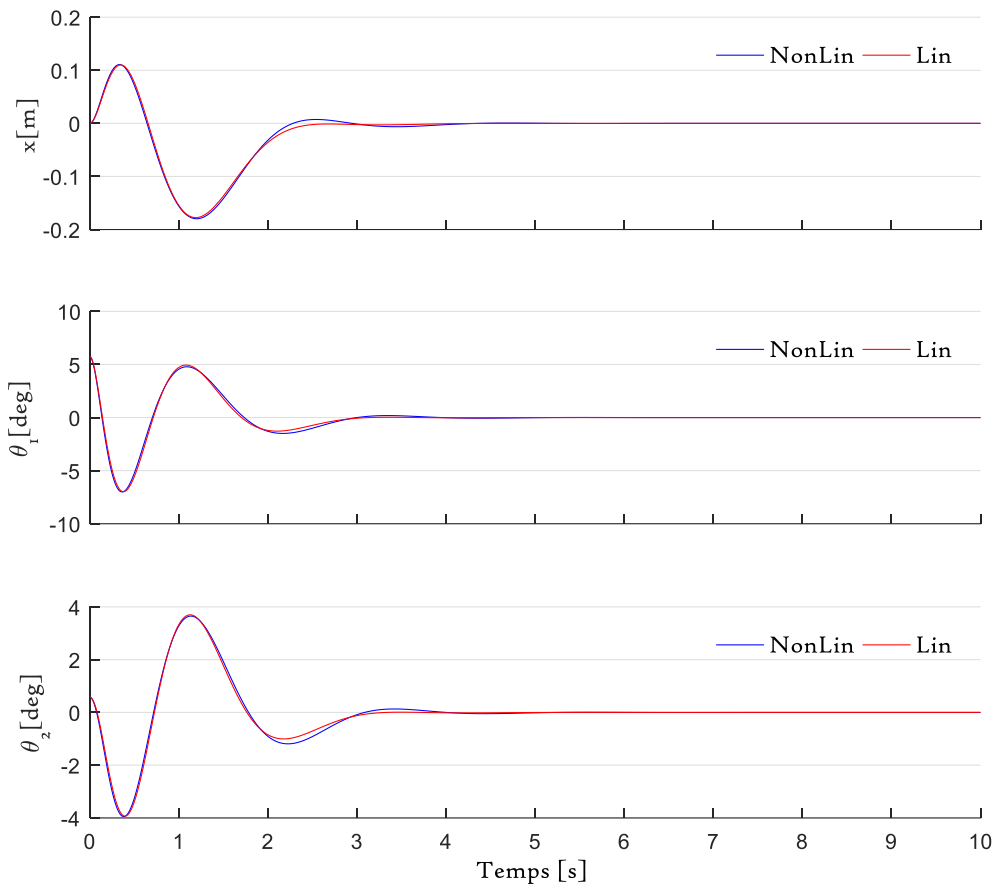


Figure III.5: Réponse du système en boucle fermée

Lors de cette simulation sur le modèle non linéaire, nous constatons également l'efficacité de la commande synthétisée du moment qu'elle a pu stabiliser les deux modèles linéaire et non linéaire avec la même dynamique choisie à travers les pôles imposés à la boucle fermée.

### 3.10 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons pu démontrer qu'il est possible de stabiliser le système du double pendule inversé sur chariot qui est non linéaire et instable, à l'aide d'une commande linéaire qui est le placement des pôles. Nous avons également abordé les notions de commandabilité introduite par KALMAN.



### Conclusion générale

Ce mémoire a été consacré à l'étude et à la commande d'un double pendule inversé monté sur chariot. En effet, deux problématiques ont été abordées.

La première, concerne la modélisation du double pendule inversé monté sur un chariot. La solution proposée à cette problématique réside dans l'application du principe de Lagrange afin de calculer le modèle dynamique du système en question. Toutefois, et vu que la commande étudiée dans ce travail est linéaire, il été indispensable de linéariser le modèle ainsi généré et l'exprimé dans l'espace d'état.

La deuxième problématique, quant à elle, concerne la synthèse de la loi de commande pour la stabilisation du système. Pour ce faire, on a commencé par la commande du système linéarisé autour de son point d'équilibre instable en position verticale. Pour stabiliser ce dernier avec la commande choisie, le choix des pôles est crucial. Une simple modification dans ces derniers entraine une large variation dans les performances du système. Il est aussi à noter que certaines configurations de ces valeurs rendent le système complètement instable. Une fois les performances exigées sont satisfaites, Nous avons implémenté la commande par retour d'état sur le système non linéaire.

Les résultats obtenus via simulation sous l'environnement de Matlab ont démontré l'efficacité de la commande synthétisée à stabiliser le double pendule inversé dans sa position d'équilibre instable. D'autre part, les performances notées sur la dynamique de la chaine de commande montrent aussi que les pôles choisis ont été judicieusement placés.

En perspective, il serait très intéressant d'implémenter cette commande en temps réel sur le double pendule inversé. Aussi, et en raison de sa complexité, il sera intéressant d'étudier l'application des commandes intelligentes et adaptatives pour de meilleurs performances.

## Bibliographie

- [1] Analyse et modélisation du pendule inversé sur deux roues au fauteuil roulant automatisé FreeMove, par Khaoula BRAHIM. Encadré par Ahmed CHEMORI LIRMM UMR CNRS-UM2 5506 161 rue Ada 34392 Montpellier
- [2] H. Ludvigsen A. Shiriaev, A. Pogromsky and O. Egeland. On global properties of passivity-based control of an inverted pendulum. *International Journal Of Robust And Nonlinear Control*.
- [3] W. Zhong and H. Röck. Energy and passivity based control of the double inverted pendulum on a cart. In *Proceedings of the 2001 IEEE international conference on control applications*, Mexico City, Mexico, 2001.
- [4] K.H. Lundberg and J.K. Roberge. Classical dual-inverted-pendulum control. In *The 2003 IEEE Conference On Decision And Control*, 2003.
- [5] V. Sukontanakarn and M. Parnichkun. Real-time optimal control for rotary inverted pendulum. *American Journal of Applied Sciences*, (6):1106–1115, 2009.
- [6] R.Olfati-Saber. Global stabilization of a flat underactuated system: the inertia wheel pendulum. In *40th Conference on Decision and Control*, Orlando, FL, 2001.
- [7] D. Choi and J.H. Oh. Human-friendly motion control of a wheeled inverted pendulum by reduced-order disturbance observer. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Pasadena, CA, USA, 2008.
- [8] S.H. Jeong and T. Takahashi. Wheeled inverted pendulum type assistant robot: Inverted mobile, standing, and sitting motions. In *Proceedings of the 2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, San Diego, CA, USA, 2007.
- [9] Mémoire de fin d'étude : Modélisation et commande non linéaire d'un pendule inversé rotatif, Présenté par : RABEHI Mohammed Rida /BERKOUNE Ali Abdessetar
- [10] [https://ressources.unisciel.fr/DAEU/physique/mecanique/co/energie\\_3.html?fbclid=IwAR3aUAr3VjOlQWnil256WjvLgXWMjGDRj8EwecHrArxKjXqhjPnORJFkVIw](https://ressources.unisciel.fr/DAEU/physique/mecanique/co/energie_3.html?fbclid=IwAR3aUAr3VjOlQWnil256WjvLgXWMjGDRj8EwecHrArxKjXqhjPnORJFkVIw)
- [11] [https://www.prepa-agro-veto.fr/laprepa/uploads/2016/10/chap3\\_Meca\\_Newton\\_cours.pdf](https://www.prepa-agro-veto.fr/laprepa/uploads/2016/10/chap3_Meca_Newton_cours.pdf)
- [12] ÉLÉMENTS DE DYNAMIQUE LAGRANGIENNE ET HAMILTONIENNE, T. Gourieux 2016 Université de Lorraine/Nancy
- [13] ÉLÉMENTS DE DYNAMIQUE LAGRANGIENNE ET HAMILTONIENNE, T. Gourieux 2016 Université de Lorraine/Nancy
- [14] <https://www.youtube.com/watch?v=c-mbMtrAcbY>
- [15] Optimal Control of the Double Inverted Pendulum on a Cart: A Comparative Study of Explicit MPC and LQR, Tunde Mufutau Tijani and Isah Abdulrasheed Jimoh, *Applied Instrumentation and Control*, School of Computing, Engineering and Built Environment, Glasgow Caledonian University, G4 0BA, Glasgow, Scotland, UK, Accepted 21 December 2020.
- [16] Mémoire de fin d'étude : Commande par placement de pôles pour des systèmes multi variables, Présenté par Azeddine MOUSSAOUI et Achour MANSEUR, dirigé par Safia YOUSFI. Le 09/2015.
- [17] [http://asi.insarouen.fr/enseignement/siteUV/auto/cours/cours8.pdf?fbclid=IwAR1Qsl8jtQrygL8ggaHbmJg7Gbss5-gQS\\_10HE2UDJk-BD7pWMkyrRc\\_juo](http://asi.insarouen.fr/enseignement/siteUV/auto/cours/cours8.pdf?fbclid=IwAR1Qsl8jtQrygL8ggaHbmJg7Gbss5-gQS_10HE2UDJk-BD7pWMkyrRc_juo)
- [18] S. Djenoune note de cours de master en automatique, 2014.
- [19] Optimal Control of the Double Inverted Pendulum on a Cart: A Comparative Study of Explicit MPC and LQR, Tunde Mufutau Tijani and Isah Abdulrasheed Jimoh, *Applied*

Instrumentation and Control, School of Computing, Engineering and Built Environment, Glasgow Caledonian University, G4 0BA, Glasgow, Scotland, UK, Accepted 21 December 2020.

[20] TECHNIQUES DE COMMANDE AVANCÉE. Centre universitaire de Rélizane Ahmed Zabana Faculté Des sciences et de la Technologie ST Département d'Electrotechnique.Dr. H. Merabet Boulouiha 2014/2015

[21] <https://www.youtube.com/watch?v=FXSpHy8LvmY>

[22] J. Pierre «commande des procédés» Edition DOC &TEC, 2012.

[23] J. Pierre «commande des procédés» Edition DOC &TEC, 2012.