



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université A.MIRA-BEJAIA  
Faculté des Sciences Exactes  
Département de Recherche Opérationnelle  
Unité de recherche LaMOS

# THÈSE

Présenté par

**ZAITRI Mohamed Abdelaziz**

Pour l'obtention du grade de

**DOCTEUR EN SCIENCES**

Filière : **Mathématiques Appliquées**

Option : **Modélisation Mathématique et Techniques de Décision**

Thème

**Minimisation d'un problème linéaire-quadratique de contrôle optimal  
avec des contraintes de phase terminales et une application à un modèle  
épidémiologique de type Covid-19**

Soutenue le : 22/03/2023

Devant le Jury composé de :

**Nom et Prénom**

**Grade**

<b>Mr RADJEF Mohammed Said</b>	Professeur	Univ. de Béjaïa	Président
<b>Mr BIBI Mohand Ouamer</b>	Professeur	Univ. de Béjaïa	Rapporteur
<b>Mr AIDENE Mohamed</b>	Professeur	Univ. de Tizi ousou	Examineur
<b>Mr MENDIL Boubekour</b>	Professeur	Univ. de Béjaïa	Examineur
<b>Mr BENTOBACHE Mohand</b>	Professeur	Univ. de Laghouat	Examineur
<b>Mr MERAKEB Abdelkader</b>	Professeur	Univ. de Tizi ousou	Examineur

Année Universitaire : 2022/2023

# Remerciements

Tout d'abord, je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes remerciements les plus sincères à Mr. Mohand Ouamer BIBI, professeur à l'université de Béjaïa sous la direction duquel j'ai eu le plaisir de travailler. Je suis très reconnaissant pour le temps conséquent qu'il m'a accordé, pour ses qualités pédagogiques et scientifiques.

Je souhaite remercier le professeur Delfim F. M. TORRES, le directeur du Centre de Recherche et Développement en Mathématiques et Applications (CIDMA) de l'université d'Aveiro, Portugal, pour m'avoir accueilli au sein de son groupe (SCG). Je tiens à exprimer ma gratitude pour tous les efforts consacrés à mon sujet de recherche.

Je souhaite remercier aussi le professeur Mohammed Said RADJEF (LaMOS, Université de Béjaïa) d'avoir accepté de présider ce jury de soutenance. Je remercie également le professeur Mohamed AIDENE (L2CSP, UMMTO), le professeur Boubakeur MENDIL (LTII, Université de Béjaïa), le professeur Mohand BENTOBACHE (LMPA, Université de Laghouat) et le professeur Abdekader MERAKEB (L2CSP, UMMTO) d'avoir accepté de juger ce travail en tant qu'examineurs.

Je tiens à remercier l'ensemble des membres de l'unité de recherche LaMOS de l'université de Béjaïa. Je remercie également l'ensemble des membres du centre CIDMA pour leur accueil chaleureux et plus particulièrement Mme Cristiana J. S. SILVA, professeur à l'université de Lisbonne, Portugal.

Enfin, j'exprime ma profonde gratitude à mon cher père, ma mère et ma petite famille, à tous mes amis, ce modeste travail leur est dédié.

# Travaux réalisés

Les travaux de cette thèse ont donné lieu aux publications suivantes :

- \* M. A. Zaitri and M. O. Bibi, Algorithme à direction hybride pour la résolution des problèmes de contrôle optimal, Séminaire Mathématique de Béjaïa, 2018.
- \* M. A. Zaitri, M. O. Bibi and M. Bentobache, A hybrid direction algorithm for solving optimal control problems, Cogent Mathematics and Statistics, 6 (1), pp 1–12, 2019.
- \* M. A. Zaitri, M. O. Bibi and Delfim F. M. Torres, Optimal Control to Limit the Spread of COVID-19 in Italy, Kuwait Journal of Science, Special Issue, pp 1–14, 2021.
- \* M. A. Zaitri and M. O. Bibi and Delfim F. M. Torres, Contrôle optimal pour limiter la propagation de COVID-19, Séminaire Mathématique de Béjaïa, 2022.

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>9</b>
<b>1 Généralités sur les systèmes dynamiques commandés et le contrôle optimal</b>	<b>12</b>
1.1 Introduction . . . . .	12
1.2 Théorie de la commande . . . . .	13
1.2.1 La commande en boucle ouverte . . . . .	14
1.2.2 La commande en boucle fermée . . . . .	14
1.3 Les systèmes dynamiques commandés . . . . .	15
1.3.1 Représentation d'état d'un système dynamique . . . . .	15
1.3.2 La matrice de transfert d'un système dynamique . . . . .	15
1.4 Théorie de la stabilité . . . . .	17
1.4.1 Critère algébrique de Routh . . . . .	19
1.5 Contrôle optimal . . . . .	20
1.5.1 Position du problème . . . . .	20
1.5.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires . . . . .	21
1.5.3 Principe du Minimum de Pontryaguine . . . . .	22
<b>2 Les systèmes épidémiologiques</b>	<b>24</b>
2.1 Introduction . . . . .	24
2.2 Modèles SI (Susceptible-Infecté) . . . . .	24
2.3 Modèles SIR (Susceptible-Infecté-Rétabli) et SIRD (Susceptible -Infecté-Rétabli-Décédé) . . . . .	25
2.4 Modèle épidémique général . . . . .	25
2.5 Nombre de reproduction de base $R_0$ . . . . .	27

2.6	Stabilité des systèmes épidémiologiques . . . . .	28
2.7	Exemple d'un modèle de traitement . . . . .	28
2.8	Modèle mathématique retardé de type SEIR pour Covid-19 . . . . .	30
2.8.1	Modèle retardé normalisé du type SEIR (Susceptible-Exposé-Infecté-Rétabli) . . . . .	31
2.8.2	Équilibre sans maladie et équilibre endémique . . . . .	32
2.8.3	Nombre de reproduction de base . . . . .	32
2.8.4	Stabilité du modèle retardé normalisé de type SEIR . . . . .	33
2.9	Modèle mathématique retardé de type SEIR pour COVID-19 avec vaccination .	39
2.9.1	Modèle retardé normalisé de type SEIR avec vaccination . . . . .	40
2.9.2	Équilibre sans maladie . . . . .	41
2.9.3	Nombre de reproduction de base . . . . .	41
2.9.4	Stabilité du modèle retardé normalisé de type SEIR avec vaccination . .	42
<b>3</b>	<b>Algorithme à direction hybride pour la résolution des problèmes linéaires de contrôle optimal</b>	<b>45</b>
3.1	Introduction . . . . .	45
3.2	Problème de contrôle optimal . . . . .	45
3.2.1	Présentation du problème . . . . .	45
3.2.2	Discrétisation du problème initial . . . . .	47
3.2.3	Commande de support . . . . .	47
3.2.4	Formule d'accroissement de la fonctionnelle . . . . .	47
3.3	Une itération de l'algorithme à direction hybride pour les problèmes de contrôle optimal (ADHC) . . . . .	48
3.3.1	Changement de la commande . . . . .	50
3.3.2	Changement de support . . . . .	52
3.3.3	Schéma de l'algorithme à direction hybride . . . . .	53
3.4	Exemple numérique . . . . .	54
3.5	Conclusion . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Contrôle optimal pour limiter la propagation du Covid-19</b>	<b>59</b>

4.1	Introduction . . . . .	59
4.2	Modèle généralisé de type SEIR . . . . .	59
4.3	Formulation du problème . . . . .	61
4.4	Contrôle optimal . . . . .	61
4.5	Résultats numériques pour limiter la propagation de l'épidémie de Covid-19 sur des données italiennes . . . . .	64
	<b>Conclusion et Perspectives</b>	<b>70</b>
	<b>Annexe A</b>	<b>71</b>
	<b>Annexe B</b>	<b>74</b>
	<b>Annexe C</b>	<b>77</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>80</b>

# Table des figures

1.1	Schéma fonctionnel d'un système. . . . .	12
1.2	Schéma fonctionnel d'un système avec perturbations. . . . .	13
1.3	Commande en boucle ouverte. . . . .	14
1.4	Commande en boucle fermée. . . . .	14
2.1	Schéma de principe du modèle SEIT (2.10). . . . .	29
3.1	Contrôle optimal en fonction de $t$ pour $N = 5000$ . . . . .	57
3.2	Valeur de la fonction objectif $J^0$ en fonction de $N$ . . . . .	57
4.1	Schéma du système de contrôle généralisé de type SEIR (4.6). . . . .	62
4.2	Les taux de récupération et de mortalité pour le cas de l'Italie. . . . .	65
4.3	Prédictions pour l'Italie à partir du modèle SEIR généralisé (4.1), en rouge, le système de contrôle généralisé SEIR (4.6) sous des contrôles optimaux, en vert, entre le 1 <sup>er</sup> septembre et le 30 novembre 2020, contre données réelles disponibles des mises en quarantaine et rétablies à partir du 1 <sup>er</sup> septembre au 31 octobre 2020, en orange. . . . .	66
4.4	Prédictions pour l'Italie à partir du modèle SEIR généralisé (4.1), en rouge, le système de contrôle généralisé SEIR (4.6) sous des contrôles optimaux, en vert, entre le 1 <sup>er</sup> septembre et le 30 novembre 2020, par rapport aux données réelles disponibles des décès du 1 <sup>er</sup> septembre au 31 octobre 2020, en orange. . . . .	67
4.5	Les contrôles extrémaux de Pontryaguine du problème de contrôle optimal de la section 4.4 pour le cas de l'Italie entre le 1 <sup>er</sup> septembre et le 30 novembre 2020. . . . .	68

# Liste des tableaux

2.1	Les paramètres du modèle mathématique retardé. . . . .	30
3.1	Résultats de simulation numérique pour le problème (3.18). . . . .	58
4.1	Les paramètres initiaux du système (4.6). . . . .	65
4.2	Données réelles des individus rétablis ( $R(t)$ ) de Covid-19, Italie, septembre 2020 par rapport au nombre de $R(t)$ prédit par le modèle de type SEIR (4.1) et le modèle contrôlé (4.6). . . . .	72
4.3	Données réelles des individus rétablis ( $R(t)$ ) de Covid-19, Italie, octobre 2020 par rapport au nombre de $R(t)$ prédit par le modèle de type SEIR (4.1) et le modèle contrôlé (4.6). . . . .	73
4.4	Données réelles des individus décédés ( $D(t)$ ) de Covid-19, Italie, septembre 2020 par rapport au nombre de $D(t)$ prédit par le modèle de type SEIR (4.1) et le modèle contrôlé (4.6). . . . .	75
4.5	Données réelles des individus décédés ( $D(t)$ ) de Covid-19, Italie, octobre 2020 par rapport au nombre de $D(t)$ prédit par le modèle de type SEIR (4.1) et le modèle contrôlé (4.6). . . . .	76
4.6	Données réelles des individus en quarantaine ( $Q(t)$ ) de Covid-19, Italie, septembre 2020 par rapport au nombre de $Q(t)$ prédit par le modèle de type SEIR (4.1) et le modèle contrôlé (4.6). . . . .	78
4.7	Données réelles des individus en quarantaine ( $Q(t)$ ) de Covid-19, Italie, octobre 2020 par rapport au nombre de $Q(t)$ prédit par le modèle de type SEIR (4.1) et le modèle contrôlé (4.6). . . . .	79



# Notations

$\mathbb{R}$  : ensemble des nombres réels ;

$\mathbb{C}$  : ensemble des nombres complexes ;

$[a, b]$  : intervalle fermé de  $\mathbb{R}$  d'extrémités  $a$  et  $b$  ;

$x^T$  : transposée du vecteur  $x$  ;

$\{1, \dots, N\}$  : ensemble des  $N$  premiers nombres entiers positifs ;

$\text{Ker}(f)$  : noyau d'une application  $f$  ;

$e^A$  : exponentielle d'une matrice  $A$  ;

$\mathcal{M}_{m \times n}$  : ensemble des matrices à  $m$  lignes et  $n$  colonnes ;

$\text{rang}(A)$  : rang d'une matrice  $A$  ;

$\det(A)$  : déterminant d'une matrice  $A$  ;

$P_A(\lambda)$  : polynôme caractéristique de  $A$  ;

$f \in \mathcal{C}^1(I)$  :  $f$  est dérivable sur  $I$  et  $f'$  est continue sur  $I$  ;

$\frac{\partial f}{\partial x}$  : dérivée partielle de  $f$  par rapport à  $x$  ;

$\psi \in AC$  :  $\psi$  est une application absolument continue ;

$\langle x, y \rangle$  : produit scalaire des vecteurs  $x$  et  $y$  ;

$\|x\|$  : norme euclidienne du vecteur  $x$ .

# Introduction générale

La théorie du contrôle optimal consiste à trouver une commande qui optimise une fonctionnelle sur un domaine défini par un système dynamique commandé d'équations différentielles et des contraintes sur la commande et l'état. Cette théorie est appliquée dans divers domaines des sciences biologiques (épidémiologiques) et des sciences de l'ingénieur (aéronautique, physique, finances, etc). Vu l'importance de cette théorie en pratique, plusieurs chercheurs se sont intéressés à la mise au point de méthodes numériques efficaces pour la résolution de ce type de problèmes [21, 22, 27]. Deux familles de méthodes numériques se distinguent actuellement pour résoudre les problèmes de contrôle optimal : les méthodes indirectes et les méthodes directes [51].

Les méthodes indirectes sont basées sur l'utilisation du principe du minimum de Pontryaguine qui fournit une formulation hamiltonienne du problème de contrôle optimal considéré, ainsi que des conditions nécessaires d'optimalité. Le principe de ces méthodes est d'exprimer le contrôle sous la forme d'une fonction régulière de l'état et de l'état adjoint et de se ramener ainsi à la résolution d'un problème aux valeurs limites que l'on peut résoudre par exemple par une méthode de Newton [48].

Les méthodes directes s'appuient sur la discrétisation en temps du problème de contrôle, formulé en termes d'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman. Il en résulte un problème de programmation non linéaire en dimension finie [26].

L'épidémiologie est une discipline scientifique qui étudie les problèmes de santé dans les populations humaines, leur fréquence, leur distribution dans le temps et dans l'espace, ainsi que les facteurs exerçant une influence sur la santé et les maladies des populations. La relation entre les mathématiques et l'épidémiologie s'est accrue. Pour le mathématicien, l'épidémiologie offre des branches nouvelles et passionnantes, tandis que pour l'épidémiologiste, la modélisation mathématique offre un outil de recherche important dans l'étude de l'évolution des maladies.

La modélisation peut aider à déterminer quelles interventions à éviter et lesquelles à essayer, ou bien prédire les futurs modèles de croissance, etc. Les modèles mathématiques peuvent décrire la progression des maladies infectieuses pour montrer l'issue probable d'une pandémie et aider à orienter les interventions de santé publique. Ces modèles utilisent des hypothèses de base ou des statistiques agrégées afin de trouver des critères mathématiques pour diverses

maladies infectieuses et pour calculer les effets des différentes interventions.

En décembre 2019, une grave épidémie de maladie respiratoire s'est déclarée à Wuhan, une ville de onze millions d'habitants au centre de la Chine. L'agent causal était le nouveau coronavirus 2 du syndrome respiratoire aigu sévère (SARS-CoV-2), qui a été identifié et isolé d'un patient au début de janvier 2020 et vérifié par la suite chez seize patients supplémentaires. Le virus aurait une origine zoonotique. En particulier, le marché de Huanan, un marché de gros animaux vivants et de fruits de mer à Wuhan, était considéré comme la principale source de cette épidémie, dont 55% des quatre cent vingt-cinq premiers cas confirmés étaient liés à ce marché. Pendant ce temps, des comparaisons récentes des séquences génétiques de ce virus et des coronavirus de chauve-souris montrent une similitude de 96% [36].

De multiples modèles mathématiques ont déjà été présentés pour prédire la dynamique de cette pandémie au niveau régional et mondial [43], certains de ces modèles ont été mis en œuvre selon différentes méthodes pour évaluer une stratégie de mesures préventives : dans [4], l'approche de modélisation susceptible-infecté-rétabli (SIR) a été utilisée pour étudier les paramètres de ce modèle pour l'Inde tout en considérant différentes mesures de verrouillage gouvernementales ; dans [32], la durée de la période d'incubation de Covid-19 est estimée à l'aide de cas confirmés de Covid-19 signalés entre le 4 janvier et le 24 février 2020, dans cinquante provinces, régions et villages de Chine ; dans [35], un modèle de l'épidémie à Wuhan, avec réaction individuelle et action gouvernementale (prolongation des vacances, fermeture de la ville, hospitalisation et quarantaine) est analysé sur la base de la pandémie de grippe ; dans [37], une modélisation susceptible-exposé-infecté-rétabli (SEIR) est considérée pour prévoir l'épidémie de Covid-19 en Algérie en utilisant des données réelles du 1er mars au 10 avril 2020 ; dans [58], un modèle SEIR modifié est considéré sous trois scénarios d'intervention (suppression, atténuation, douceur) et simulé pour prédire et étudier les réalités dans plusieurs pays africains : Afrique du Sud, Égypte, Algérie, Nigeria, Sénégal et Kenya.

La liste de ces études est longue, voir : [33] pour un nouveau modèle épidémiologique compartimental adapté au Covid-19 avec une étude de cas du Portugal ; [38] pour un modèle fractionnaire (ordre non entier) appliqué au Covid-19 en Galice, Espagne et Portugal ; [59] pour un modèle stochastique avec retard de Covid-19, appliqué à la stratégie marocaine de déconfinement.

Dans [41], un système mathématique généralisant le modèle SEIR est présenté pour analyser l'épidémie de Covid-19 sur la base d'un mécanisme dynamique qui intègre l'impact intrinsèque des cas latents et infectieux cachés sur l'ensemble du processus de transmission du virus. Les auteurs de [41] valident leur modèle en analysant la corrélation des données publiques de la Commission nationale de la santé de Chine du 20 janvier au 9 février 2020, et produisent des estimations et des prévisions fiables, révélant des paramètres clés de l'épidémie de Covid-19.

Cette thèse porte sur le travail de maximisation et de minimisation de problèmes de contrôle

optimal et une application à un modèle épidémiologique du type Covid-19. Elle est organisée de la manière suivante :

Le premier chapitre est une présentation générale des systèmes dynamiques et de contrôle optimal. Nous présentons les systèmes dynamiques commandés et le critère algébrique de Routh pour la stabilité. Après cela, nous étudions la notion de contrôlabilité des systèmes, développée par Kalman [28]. Enfin, nous terminons ce chapitre par la présentation du principe du minimum de Pontryaguine.

Le second chapitre décrit les systèmes épidémiologiques, où les différentes populations sont étiquetées par les appellations suivantes : susceptible-infecté (SI), susceptible-infecté-rétabli (SIR), susceptible-infecté-rétabli-décédé (SIRD). Par la suite, on présente un modèle épidémique général à compartiments pour une population hétérogène. On finit le chapitre par l'étude de stabilité des systèmes épidémiologiques.

Le troisième chapitre porte sur un algorithme pour trouver une solution numérique approximative pour les problèmes linéaires de contrôle optimal. Cet algorithme est basé sur l'algorithme de direction hybride, développé par Bibi et Bentobache [13] pour la programmation linéaire. Nous définissons une estimation d'optimalité et donnons une condition nécessaire et suffisante pour caractériser l'optimalité d'un certain contrôle admissible du problème discrétisé, puis nous donnons un exemple numérique pour illustrer l'approche proposée. Enfin, nous présentons quelques résultats numériques qui confirment la convergence de l'algorithme proposé vers la solution optimale du problème de contrôle optimal continu présenté.

Dans le quatrième chapitre, nous appliquons la théorie du contrôle optimal à un modèle généralisé de type SEIR. Le système proposé comporte trois contrôles, représentant la distanciation sociale, les moyens de prévention et les mesures de traitement pour lutter contre la propagation de la pandémie de Covid-19. Nous analysons ce problème de contrôle optimal sur la base de données réelles. Nos résultats montrent la pertinence du modèle, notamment le nombre d'individus mis en quarantaine et rétablis. En appliquant le principe du minimum de Pontryaguine, nous montrons comment on aurait pu diminuer drastiquement le nombre d'individus susceptibles, exposés, infectés, mis en quarantaine et décédés, et ce en augmentant la population protégée.

Finalement, cette thèse s'achève par une conclusion générale et une bibliographie.

# Chapitre 1

## Généralités sur les systèmes dynamiques commandés et le contrôle optimal

### 1.1. Introduction

Un système est constitué naturellement ou artificiellement afin d'accomplir une tâche pré-définie. Son état est affecté par une ou plusieurs variables, les entrées du système. Le résultat de l'action des entrées est la réponse du système, qui peut être caractérisée par le comportement d'une ou plusieurs variables de sortie.

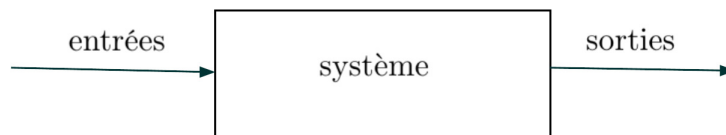
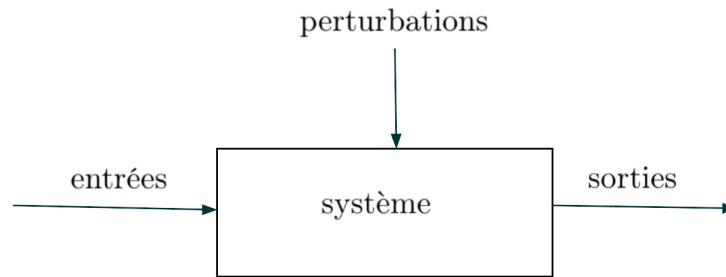


FIGURE 1.1. Schéma fonctionnel d'un système.

Le système complet ou un des éléments le composant est généralement représenté schématiquement par un schéma fonctionnel consistant en un rectangle auquel les signaux d'entrée représentés par des flèches entrantes sont appliqués. L'action des entrées produit de manière causale des effets mesurés par les signaux de sortie représentés par des flèches sortantes. Notons ainsi que la notion de système est indissociable de celle de signal.

Les entrées affectant un système peuvent être de nature différente. Les unes ont pour but d'exercer des actions entraînant le fonctionnement souhaité du système, ce sont les commandes. Les autres entrées troublent le fonctionnement désiré et sont définies comme des perturbations. Chaque élément constitutif de l'ensemble du système peut être caractérisé par un nombre fini de variables, et l'interdépendance des variables caractérisant chaque élément peut être exprimée sous la forme d'une loi mathématique. Ainsi, la relation entre les entrées et les sorties du système est l'expression des lois de la physique, associées au système. L'ensemble des lois mathématiques régissant la causalité entre les entrées et les sorties du système constitue le modèle



**FIGURE 1.2.** Schéma fonctionnel d'un système avec perturbations.

mathématique du système.

La modélisation, étape préliminaire de l'analyse d'un système dynamique quelconque, indépendamment de sa nature physique, de sa composition et de son degré de complexité comporte donc les étapes suivantes :

1. Identification des variables pertinentes pour la caractérisation de chaque élément constituant le système ;
2. Caractérisation des relations entre ces variables ;
3. Représentation mathématique des interactions entre les éléments à travers la représentation mathématique des interactions entre les variables ;
4. Formation d'un système de relations entre les variables caractérisant le système comme un tout ;
5. Formation d'un système de relations entre les variables d'entrée et les variables de sortie.

Il est important de remarquer que tous ces aspects de l'analyse des systèmes ainsi que ceux développés par la suite sont abordés en théorie des systèmes d'un point de vue abstrait plutôt que d'un point de vue physique. Cela signifie qu'en théorie des systèmes, l'identité physique des variables associées à un système importe moins que les relations mathématiques entre ces mêmes variables.

## 1.2. Théorie de la commande

La théorie de la commande, branche de la théorie des systèmes, est par nature un domaine interdisciplinaire développé à partir de solides fondements mathématiques avec un objectif très concret : développer des correcteurs/régulateurs pouvant être mis en oeuvre sur des sciences biologiques (épidémiologiques) et des systèmes technologiques réels. Empruntant ses outils et ses bases théoriques aux mathématiques, la théorie de la commande permet la conception de systèmes de commande pour des domaines aussi variés que l'aéronautique, l'industrie chimique, l'automobile, le génie électrique, etc.

Quelle que soit la nature du système à commander, il est toujours possible de classer les différentes structures de commande en deux grandes familles : les structures de commande en

boucle ouverte et les structures de commande à contre-réaction, appelées également structures de commande en boucle fermée.

### 1.2.1 La commande en boucle ouverte

La commande en boucle ouverte d'un système consiste à introduire, à l'entrée de ce système, le signal  $e(t)$  permettant d'obtenir à sa sortie, le signal  $y(t)$  correspondant à la réponse voulue. Cette commande est envisageable dans le cas où le système est parfaitement connu et modélisé, et dans le cas où l'obtention d'une mesure de la sortie n'est pas économiquement possible.

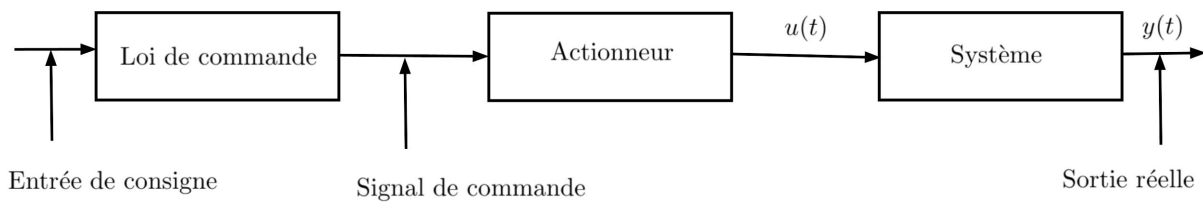


FIGURE 1.3. Commande en boucle ouverte.

### 1.2.2 La commande en boucle fermée

Toutefois, si le système à commander n'est pas parfaitement connu ou si des perturbations l'affectent, les signaux de sortie ne seront pas ceux souhaités. L'introduction d'un retour d'information sur les sorties mesurées s'avère alors nécessaire. Le principe de commande en boucle fermée est illustré sur la figure suivante et définit la structure de commande à contre-réaction.

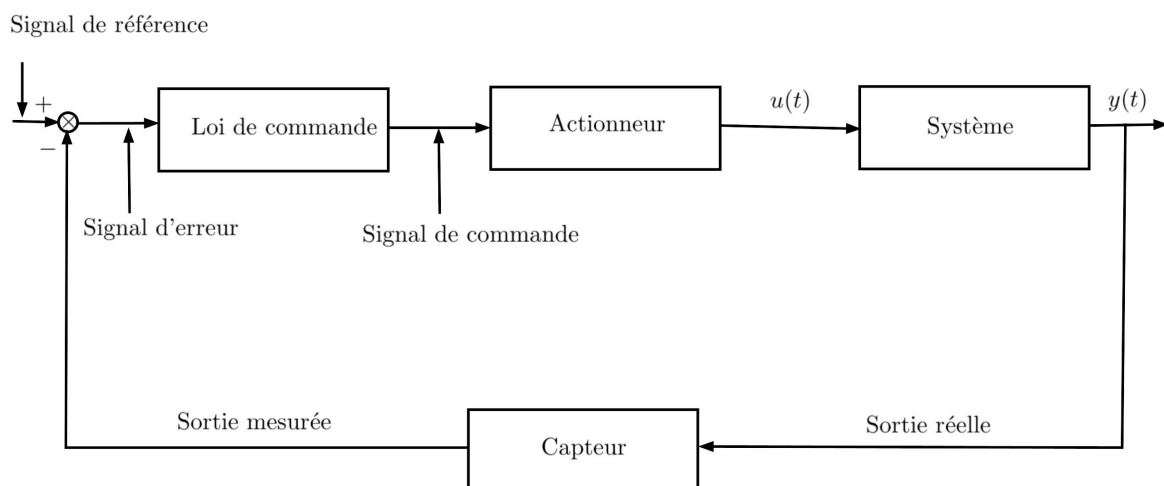


FIGURE 1.4. Commande en boucle fermée.

Cette structure de commande permet ainsi d'améliorer les performances dynamiques du système commandé (rapidité, rejet de perturbation, meilleur suivi de consignes, moindre sensibilité aux variations paramétriques du modèle, stabilisation de systèmes instables en boucle ouverte).

## 1.3. Les systèmes dynamiques commandés

La théorie moderne de la commande des systèmes repose en grande partie sur le concept d'état d'un système, le modèle associé et la représentation d'état. Le concept d'état a été introduit de manière systématique par R.E. Kalman [28] et par les ingénieurs travaillant sur les premières applications spatiales (Apollo, Polaris) aux débuts des années 60. Il était déjà largement utilisé dans d'autres disciplines scientifiques telles que la Mécanique (formulation Hamiltonienne) ou la Thermodynamique (travaux de H. Poincaré).

### 1.3.1 Représentation d'état d'un système dynamique

L'état d'un système est caractérisé par un ensemble de variables dynamiques appelées variables d'état et qui résument complètement la configuration courante du système.

Tout système dynamique peut être représenté par ses équations d'état définies par un ensemble d'équations différentielles du premier ordre appelées équations dynamiques, et un ensemble d'équations algébriques appelées équations de sortie ou de mesure :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \\ y(t) = h(x(t), u(t), t), \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est un vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est un vecteur de commande,  $y(t) \in \mathbb{R}^r$  est un vecteur de sortie. Les fonctions  $f, (h) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, (\mathbb{R}^r)$  sont des fonctions Lipschitziennes par rapport à  $x$ , continues par rapport à  $u$  et continues par morceaux par rapport à  $t$ .

Les équations d'état caractérisent complètement le comportement dynamique du système. Dans le cas où le système est linéaire, on peut représenter ce dernier sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t), \end{cases} \quad (1.2)$$

où  $A(t) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  est une matrice dynamique,  $B(t) \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$  est une matrice de commande ou d'entrée,  $C(t) \in \mathcal{M}_{r \times n}(\mathbb{R})$  est une matrice de sortie et  $D(t) \in \mathcal{M}_{r \times m}(\mathbb{R})$  est une matrice de transmission directe.

**Définition 1.1.** *Le système (1.2) est dit linéaire stationnaire, si les matrices  $A, B, C$  et  $D$  sont constantes.*

### 1.3.2 La matrice de transfert d'un système dynamique

La notion de fonction de transfert a été essentiellement définie par A.C. Hall en 1943 [26], où il utilise la transformée de Laplace et le calcul opérationnel inventé par O. Heaviside en 1892 pour caractériser le comportement entrée-sortie des servomécanismes.



On considère le problème linéaire stationnaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(0) = x^0, \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \quad (1.3)$$

où  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  est l'état initial du système.

**Définition 1.2.** La transformée de Laplace d'une fonction  $s(t)$  est une fonction  $S(p)$  de la variable complexe  $p$ , définie par :

$$S(p) = \int_0^{+\infty} s(t)e^{-pt} dt.$$

**Propriété 1.1.** [26]

a) *Linéarité* : La linéarité de la transformation de Laplace résulte naturellement de la linéarité de l'intégration.

Soient  $H(p)$ ,  $G(p)$  et  $F(p)$  les transformées de Laplace des fonctions  $h(t)$ ,  $g(t)$  et  $f(t)$  respectivement. Pour tout  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\mathbb{R}$ , on a :

$$f(t) = \alpha h(t) + \beta g(t) \Rightarrow F(p) = \alpha H(p) + \beta G(p).$$

b) *Transformée de Laplace d'une dérivée* : Soient  $s(t)$  une fonction du temps  $t$  et  $S(p)$  sa transformée de Laplace. Alors on a

$$s'(t) = \frac{ds}{dt} \longrightarrow S'(p) = pS(p) - s(0).$$

De même, la transformée de Laplace de sa dérivée  $n$ -ième est :

$$s^{(n)}(t) = \frac{d^n s}{dt^n} \longrightarrow S^{(n)}(p) = p^n S(p) - \sum_{k=n+1}^{2n} \left( p^{2n-k} \frac{d^{k-n-1} s}{dt^{k-n-1}}(0) \right).$$

Par exemple :

$$s''(t) = \frac{d^2 s}{dt^2} \longrightarrow S''(p) = p^2 S(p) - p s(0) - s'(0).$$

Du fait de la linéarité de l'opérateur de Laplace, il est possible de l'appliquer au système (1.3) :

$$\begin{cases} X(p) = (pI - A)^{-1}(BU(p) + x^0), \\ Y(p) = C(pI - A)^{-1}(BU(p) + x^0) + DU(p), \end{cases} \quad (1.4)$$

où  $X(p)$ ,  $Y(p)$  et  $U(p)$  sont les transformées de Laplace de  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $u(t)$  respectivement.

Pour des conditions initiales nulles,  $x^0 = 0$ , on obtient la relation entrées-sorties :

$$Y(p) = (C(pI - A)^{-1}B + D)U(p) = G(p)U(p).$$

**Définition 1.3.** La matrice

$$G(p) \in \mathcal{M}_{r \times m}(\mathbb{R})$$

est appelée matrice de transfert liant l'entrée  $U(p)$  à la sortie  $Y(p)$ .

**Définition 1.4.** Les racines qui annulent  $U(p)$  sont appelées les pôles de la fonction de transfert.

## 1.4. Théorie de la stabilité

On va présenter dans cette partie la théorie de la stabilité des systèmes linéaires et non linéaires. Les premiers résultats sont apparus avec Lyapounov [25] à la fin du 19ème siècle et au début du 20ème siècle. Lyapounov donne alors une condition suffisante pour la stabilité des systèmes non linéaires. On considère l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), t), \\ x(t_0) = x^0, \end{cases} \quad (1.5)$$

où  $f : D \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une application continue sur un ouvert  $D \times I$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , avec  $f = (f_1, \dots, f_n)^T$ ,  $x^0 \in D$  et  $t_0 \in I$ .

**Définition 1.5.** Un point  $x^e \in D$  est un point d'équilibre, ou un point singulier du système (1.5) si :  $f(x^e, t) = 0, \forall t \in I$ .

**Définition 1.6.**

1. Le point d'équilibre  $x^e$  du système (1.5) est dit stable si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \|x^0 - x^e\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x^e\| < \varepsilon, \forall t \geq 0.$$

2. Le point d'équilibre  $x^e$  du système (1.5) est dit attractif si :

$$\exists \delta > 0, \|x^0 - x^e\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x^e.$$

3. Le point d'équilibre  $x^e$  est dit asymptotiquement stable si  $x^e$  est stable et attractif.

4. Le point d'équilibre  $x^e$  du système (1.5) est dit exponentiellement stable si :

$$\exists \delta > 0, \exists K > 0, \exists \sigma > 0, \|x^0 - x^e\| \leq \delta \Rightarrow \|x(t) - x^e\| \leq K \|x^0 - x^e\| e^{-\sigma t}, \forall t \geq 0.$$

**Définition 1.7.** On considère le système (1.5) et  $V : D \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , une application ayant des dérivées partielles sur  $D \times I$ . On définit la dérivée totale  $\dot{V}$  pour le système (1.5) par :

$$\dot{V}(x, t) = \frac{dV(x, t)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t}(x, t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(x, t) f_i(x, t).$$

**Définition 1.8.** Une fonction  $W : D \rightarrow \mathbb{R}$ , est dite définie positive (respectivement définie négative) s'il existe un voisinage  $\mathcal{V}_W$  de 0, tel que :

1.  $W(0) = 0$ ,

2. pour tout  $x \in \mathcal{V}_W \setminus \{0\}$  :  $W(x) > 0$  (respectivement  $W(x) < 0$ ).

**Définition 1.9.** Une fonction  $K : D \times I \rightarrow \mathbb{R}$ , est dite définie positive (respectivement définie négative) s'il existe un voisinage  $\mathcal{V}_K$  de 0, tel que :

1.  $K(0, t) = 0, \forall t \in I,$
2. il existe une fonction  $K_0 : \mathcal{V}_K \rightarrow \mathbb{R},$  définie positive (respectivement définie négative) telle que :  
 $\forall x \in \mathcal{K}_K, \forall t \in I : K(x, t) \geq K_0(x)$  (respectivement  $K(x, t) \leq K_0(x)$ ).

**Théorème 1.1.** (Théorème de Lyapounov non stationnaire)[25] Soit  $x^e$  un point d'équilibre du système différentiel (1.5). Supposons qu'il existe un voisinage  $\mathcal{V}_{t_0}$  de  $t_0$  et une fonction quadratique de Lyapounov

$$V : D \times \mathcal{V}_{t_0} \rightarrow \mathbb{R}^+,$$

continue, ayant des dérivées partielles continues, telle que :

1.  $V$  est définie positive,
2. la dérivée totale  $\dot{V}$  pour (1.5) est définie négative .

Alors  $x^e$  est asymptotiquement stable.

**Théorème 1.2.** (Stabilité de Barbashin)[25] Soient  $x^e$  un point d'équilibre de (1.5), et  $V : \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^+,$  est une fonction de classe  $C^n,$  vérifiant

1.  $V$  est définie positive,
2. la dérivée totale  $\dot{V}$  pour (1.5) est définie négative,
3.  $\|x\| \rightarrow +\infty \Rightarrow \|V(x)\| \rightarrow +\infty.$

Alors  $x^e$  est asymptotiquement stable.

**Exemple 1.1.** On considère le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - e^{-2t}x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2. \end{cases}$$

Pour déterminer la stabilité du point d'équilibre 0, on pose

$$V(x, t) = x_1^2 + (1 + e^{-2t})x_2^2.$$

Cette fonction est définie positive, car elle domine la fonction définie positive

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2,$$

indépendante de  $t.$  De plus, la dérivée totale de  $V$  pour ce système est

$$\dot{V}(x, t) = -2(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2(1 + 2e^{-2t})),$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, t) &\leq -2(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2), \\ &\leq -(x_1 - x_2)^2 - x_1^2 - x_2^2 \leq 0. \end{aligned}$$

On en déduit alors que  $\dot{V}$  est définie négative, et que 0 est asymptotiquement stable.

### 1.4.1 Critère algébrique de Routh

Le critère algébrique de Routh autorise le diagnostic de stabilité pour des systèmes d'ordre élevé et possédant de surcroît un ou plusieurs paramètres. Ce critère est issu d'une méthode qui permet de décompter le nombre de racines à partie réelle positive ou nulle du polynôme  $U(p)$ . Cette méthode est elle-même déduite de l'étude des polynômes d'Hurwitz, et consiste à former le tableau suivant :

#### Construction du tableau des coefficients

Soient  $G(p)$  la fonction de transfert en boucle fermée et  $U(p)$  le dénominateur de  $G(p)$ , un polynôme de degré  $n$  :

$$U(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \dots + a_1 p + a_0, \text{ avec } a_n > 0.$$

$p^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$\dots$	$a_3$	$a_1$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$\dots$	$a_2$	$a_0$
$p^{n-1}$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$\dots$	$a_2$	$a_0$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$\dots$	$a_1$	$a_0$
$p^{n-2}$	$b_{n-2}$	$b_{n-4}$	$b_{n-6}$	$\dots$	si $n$ impair		$b_{n-2}$	$b_{n-4}$	$b_{n-6}$	$\dots$	si $n$ pair	
$p^{n-3}$	$c_{n-3}$	$\dots$	$\dots$				$c_{n-3}$	$\dots$	$\dots$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$										
$p^1$	$\dots$	$\dots$										
$p^0$	$\dots$											
	$\uparrow$	Première colonne dite des pivots										$\uparrow$

La première ligne contient les coefficients des termes en  $p^{n-2k}$ , dans l'ordre des puissances décroissantes.

La deuxième ligne contient les coefficients des termes en  $p^{n-2k-1}$ , et se termine suivant la parité de  $n$ .

Les lignes suivantes sont remplies en suivant les lois de formation suivantes :

$$b_{n-2} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}, \quad b_{n-i} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-i} \\ a_{n-1} & a_{n-i-1} \end{vmatrix},$$

$$c_{n-3} = \frac{-1}{b_{n-2}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-2} & b_{n-4} \end{vmatrix}, \quad c_{n-j} = \frac{-1}{b_{n-2}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-j} \\ b_{n-2} & b_{n-j-1} \end{vmatrix}.$$

Si nécessaire, une case vide est prise égale à zéro. Le calcul des lignes est poursuivi jusqu'à ce que la première colonne soit remplie.

#### Théorème 1.3. [26]

Le système (1.3) est stable si et seulement si tous les termes de la première colonne sont strictement positifs.

**Exemple 1.2.** Soit  $U(p)$  un polynôme de degré 4 :

$$U(p) = p^4 + p^3 + 3p^2 + p + 1.$$

**Construction du tableau des coefficients :**

$$\begin{array}{l} p^4 \\ p^3 \\ p^2 \\ p^1 \\ p^0 \end{array} \left| \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 0.5 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \right. \begin{array}{l} 3 \quad 1 \\ 1 \quad 0 \\ 1 \quad 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} b_2 = \frac{-1}{1} \left| \begin{array}{|c|} \hline 1 \quad 3 \\ \hline 1 \quad 1 \end{array} \right| = 2, \quad b_0 = \frac{-1}{1} \left| \begin{array}{|c|} \hline 1 \quad 1 \\ \hline 1 \quad 0 \end{array} \right| = 1, \\ c_1 = \frac{-1}{2} \left| \begin{array}{|c|} \hline 1 \quad 1 \\ \hline 2 \quad 1 \end{array} \right| = 0.5, \quad c_{-1} = \frac{-1}{2} \left| \begin{array}{|c|} \hline 1 \quad 0 \\ \hline 2 \quad 0 \end{array} \right| = 0, \\ d_0 = \frac{-1}{0.5} \left| \begin{array}{|c|} \hline 2 \quad 1 \\ \hline 0.5 \quad 0 \end{array} \right| = 1, \end{array}$$

en conclusion : le système est stable.

**Exemple 1.3.** Soit  $U(p)$  un polynôme de degré 5 :

$$U(p) = p^5 + 2p^4 + 3p^3 + 4p^2 + 3p + 1.$$

**Construction du tableau des coefficients :**

$$\begin{array}{l} p^5 \\ p^4 \\ p^3 \\ p^2 \\ p^1 \\ p^0 \end{array} \left| \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline -1 \\ \hline 3.5 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \right. \begin{array}{l} 3 \quad 3 \\ 4 \quad 1 \\ 2.5 \quad 0 \\ 1 \quad 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} b_3 = \frac{-1}{2} \left| \begin{array}{|c|} \hline 1 \quad 3 \\ \hline 2 \quad 4 \end{array} \right| = 1, \quad b_1 = \frac{-1}{2} \left| \begin{array}{|c|} \hline 1 \quad 3 \\ \hline 2 \quad 1 \end{array} \right| = 2.5, \\ c_2 = \frac{-1}{1} \left| \begin{array}{|c|} \hline 2 \quad 4 \\ \hline 1 \quad 2.5 \end{array} \right| = -1, \quad c_0 = \frac{-1}{1} \left| \begin{array}{|c|} \hline 2 \quad 1 \\ \hline 1 \quad 0 \end{array} \right| = 1, \\ d_1 = \frac{-1}{-1} \left| \begin{array}{|c|} \hline 1 \quad 2.5 \\ \hline -1 \quad 1 \end{array} \right| = 3.5, \quad d_{-1} = \frac{-1}{-1} \left| \begin{array}{|c|} \hline 1 \quad 0 \\ \hline -1 \quad 0 \end{array} \right| = 0, \\ e_0 = \frac{-1}{3.5} \left| \begin{array}{|c|} \hline -1 \quad 1 \\ \hline 3.5 \quad 0 \end{array} \right| = 1, \end{array}$$

en conclusion : le système est instable.

## 1.5. Contrôle optimal

### 1.5.1 Position du problème

Le problème de contrôle optimal est donné par un système d'équations différentielles dont le comportement dépend du contrôle. Nous considérons un problème de Bolza suivant, avec un temps terminal  $t_1$  fixe :

$$\begin{cases} \min_u J(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_0^{t_1} L(x(t), u(t), t) dt, \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x^0, \\ u(t) \in U, \quad t \in T = [0, t_1], \end{cases} \quad (1.6)$$

où  $J(u)$  est le critère de qualité, avec  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continûment différentiable,  $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $C^1$ ,  $T$  est un intervalle temps,  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une applications de classe  $C^1$ ,  $\Omega$  est l'ensemble des applications mesurables, localement bornées sur  $T$  à valeurs dans l'ensemble non vide  $U \subset \mathbb{R}^m$ ,  $x^0$  est l'état initial du système.

**Remarque 1.1.**

- Si  $\varphi(x(t_1)) = 0$ , alors le problème (1.6) est dit problème de Lagrange.
- Si  $L(x(t), u(t), t) = 0$ , alors le problème (1.6) est dit problème de Mayer.
- Si  $\varphi(x(t_1)) = 0$ ,  $L(x(t), u(t), t) = 1$  et le temps  $t_1$  est non fixé, alors le problème (1.6) correspond au problème en temps minimal.

## 1.5.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires

La contrôlabilité des systèmes linéaires stationnaires et non stationnaires est donnée par la condition de Kalman développée en 1960 [28].

**Théorème 1.4.** [28] *On considère le problème linéaire stationnaire de  $\mathbb{R}^n$  suivant :*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t). \quad (1.7)$$

Alors le système (1.7) est contrôlable en temps  $t_1$  si et seulement si le rang de la matrice

$$K = (B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B)$$

est égal à  $n$ .

**Remarque 1.2.** *La matrice  $K$  est appelée matrice de Kalman et la condition  $\text{rang}(K) = n$  est appelée condition de Kalman, elle ne dépend pas de la condition initiale  $x^0$  et du temps final  $t_1$ . Ceci signifie que si un système linéaire stationnaire est contrôlable en temps  $t_1$  depuis  $x^0$ , alors il est contrôlable en tout temps depuis tout point.*

**Exemple 1.4.** *On considère le système linéaire suivant :*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (1.8)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de Kalman  $K$  est donnée par :

$$K = (B, AB) = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\det K = -1 \neq 0,$$

donc

$$\text{rang}(K) = 2,$$

alors le système (1.8) est contrôlable.

### 1.5.3 Principe du Minimum de Pontryaguine

Le principe du minimum de Pontryaguine est un ensemble de conditions nécessaires pour l'optimalité d'une solution dans un problème de contrôle optimal. Ce principe de Pontryaguine a révolutionné la théorie du contrôle optimal [42].

Considérons le problème de contrôle optimal suivant, avec un temps terminal  $t_1$  fixe :

$$\begin{cases} \min_u J(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_0^{t_1} L(x(t), u(t), t) dt, \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x^0, \\ u(t) \in U, \quad t \in T = [0, t_1], \end{cases} \quad (1.9)$$

où  $U$  est un ensemble compact et convexe de  $\mathbb{R}^m$ .

**Définition 1.10.** Toute commande  $u(t) \in U$ ,  $t \in [0, t_1]$ , est dite commande admissible du problème (1.9).

**Définition 1.11.** Une commande admissible  $u^* = (u^*(t), t \in [0, t_1])$  est dite optimale si :

$$J(u^*) = \min_u J(u),$$

où  $u$  parcourt l'ensemble des commandes admissibles.

D'autre part, une commande admissible  $u^\varepsilon$  est dite  $\varepsilon$ -optimale ou suboptimale si

$$J(u^\varepsilon) - J(u^*) \leq \varepsilon,$$

où  $\varepsilon \geq 0$  est choisi à l'avance.

**Définition 1.12.** Le Hamiltonien du problème (1.9) est la fonction :

$$H(x(t), \psi(t), u(t), t) = L(x(t), u(t), t) + \langle \psi(t), f(x(t), u(t), t) \rangle,$$

où le vecteur  $\psi(t) : [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  est appelé vecteur d'état adjoint.

#### Conditions nécessaires d'optimalité

**Théorème 1.5. (Principe du minimum) [22]**

Soient  $u^*(t) \in U$  une commande optimale admissible du problème (1.9) et  $x^*(t)$  sa trajectoire optimale correspondante. Alors il existe une application

$$\psi^*(t) : [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

absolument continue, telle que pour tout  $t \in [0, t_1]$  on a :

$$\dot{x}^*(t) = f(x^*(t), u^*(t), t), \quad x^*(0) = x^0, \quad (1.10)$$

$$\dot{\psi}^*(t) = - \frac{\partial H(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial x} \Big|_{x(t)=x^*(t), \psi(t)=\psi^*(t), u(t)=u^*(t)}, \quad (1.11)$$

$$\psi^*(t_1) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x(t_1)) \Big|_{x(t_1)=x^*(t_1)}, \quad (1.12)$$

$$H(x^*(t), \psi^*(t), u^*(t), t) \leq H(x^*(t), \psi^*(t), v, t), \quad \forall v \in U. \quad (1.13)$$

### Conditions suffisantes d'optimalité

#### **Théorème 1.6.** [22]

Si l'ensemble  $(x^*(t), \psi^*(t), u^*(t))$  satisfait les conditions nécessaires (1.10)–(1.13) pour tout  $t \in [0, t_1]$ , et si la fonction suivante

$$\min_{v \in U} H(x(t), \psi(t), v, t) \quad (1.14)$$

est convexe en  $x$  pour tout  $t \in [0, t_1]$  et  $\varphi$  est convexe, alors  $u^*(t)$  est une commande optimale du problème (1.9).



# Chapitre 2

## Les systèmes épidémiologiques

### 2.1. Introduction

La modélisation des maladies infectieuses est un outil qui a été utilisé pour étudier les mécanismes par lesquels les maladies se propagent, pour prédire l'évolution future des épidémies et pour évaluer les stratégies de leur contrôle.

Le trajet d'une épidémie dans une population étant dépendant de paramètres extrêmement nombreux (stades cliniques possibles, déplacement des individus, souches de la maladie), alors les modèles mathématiques se sont progressivement affirmés comme outils d'aide à la décision pour les politiques publiques. En effet, les modèles permettent de prévoir pour la population les conséquences d'actions aussi variées que la vaccination, la mise en quarantaine ou la distribution de tests de dépistage.

Une approche fondatrice dans les années 1920 fut celle des modèles compartimentaux, qui divisent la population en classes épidémiologiques telles que les individus susceptibles d'être infectés, ceux qui sont infectieux, et ceux qui ont acquis une immunité suite à la guérison [29]. Depuis, cette approche fut utilisée pour modéliser de très nombreuses maladies, et continue d'être un sujet de recherche active en prenant en compte de nouveaux éléments tels que les découvertes de la science moderne [43].

### 2.2. Modèles SI (Susceptible-Infecté)

On considère d'abord qu'une maladie se transmet directement d'un membre d'une population donnée à un autre en un temps suffisamment court pour que les naissances et morts (naturelles) aient un impact négligeable sur la dynamique de la maladie.

On appelle susceptible la fraction de population qui est saine mais pouvant potentiellement devenir infectée par la maladie et on note  $S$  le compartiment contenant ces individus. À l'instant  $t$ , le compartiment  $S$  comporte  $S(t)$  individus. De la même façon, les individus atteints par la maladie sont désignés par  $I$ ,  $I(t)$  étant leur nombre à l'instant  $t$ .

On considère maintenant que la probabilité qu'un individu susceptible devienne infecté est proportionnelle au nombre d'individus actuellement infectés et que le coefficient de proportionnalité soit  $\beta > 0$ . Si un grand nombre d'individus est en cause, on peut s'attendre à ce que  $S$  d'entre eux deviennent nouvellement infectés chaque jour. Sous forme d'équations différentielles, ceci devient

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = -\beta S(t) I(t), \\ \dot{I}(t) = +\beta S(t) I(t). \end{cases} \quad (2.1)$$

On nomme modèle SI ce genre de modèle très simple, où le seul (événement) pouvant survenir est l'infection d'un individu susceptible.

### 2.3. Modèles SIR (Susceptible-Infecté-Rétabli ) et SIRD (Susceptible -Infecté-Rétabli-Décédé)

Certaines maladies sont mortelles. Afin d'en tenir compte, on utilise le compartiment  $D$  pour stocker les individus décédés suite à la maladie avec un taux de mortalité  $\kappa$ . De plus, pour bon nombre de maladies, les individus ayant été rétablis d'une infection développent une immunité à cette infection. Dans certains cas, cette immunité est permanente et dans d'autres, elle est temporaire. La lettre  $R$  sera utilisée pour référer aux individus rétablis de la maladie à un taux  $\lambda$ , et ayant maintenant acquis l'immunité. Ces individus perdront leur immunité à un taux  $\mu$  et retourneront dans le compartiment susceptible  $S$ .

Le système d'équations différentielles régissant un tel modèle prend la forme :

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = -\beta S(t) I(t) + \mu R(t), \\ \dot{I}(t) = +\beta S(t) I(t) - \lambda I(t) - \kappa I(t), \\ \dot{R}(t) = \lambda I(t) - \mu R(t), \\ \dot{D}(t) = \kappa I(t). \end{cases} \quad (2.2)$$

Il sera nommé modèle SIR lorsque  $D = 0$ , et modèle SIRD dans les cas où  $D > 0$ .

### 2.4. Modèle épidémique général

L'analyse linéaire permet d'obtenir une quantité impressionnante d'informations sur un système dynamique sans même avoir à le résoudre complètement. Avant d'utiliser cet outil, on tente d'abord une approche permettant de définir clairement le nombre de reproduction de base ( $R_0$ ) caractérisant la stabilité du système.

Soit  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ , où  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) est le nombre d'individus dans le compartiment  $i$ . Nous trions les compartiments de sorte que les premiers compartiments  $m$  correspondent aux individus infectés.

Le nombre de reproduction de base  $R_0$  ne peut pas être déterminé à partir de la structure du modèle mathématique seul, mais dépend de la définition des compartiments infectés et non infectés. Nous définissons  $X^s$  comme l'ensemble de tous les états sans maladie

$$X^s = \{x \geq 0 : x_i = 0, i = 1, \dots, m\},$$

où  $x_i$  est le nombre d'individus dans le compartiment  $i$  et  $m$  est le nombre des premiers compartiments qui correspondent aux individus infectés.

Afin de calculer  $R_0$ , il est important de distinguer les nouvelles infections dans tous les autres changements dans la population.

Soient  $F_i(x)$  le taux d'apparition de nouvelles infections dans le compartiment  $i$ ,  $V_i^+$  le taux de transfert des individus dans le compartiment  $i$  et  $V_i^-$  le taux de transfert des individus hors du compartiment  $i$ .

On suppose que chaque fonction est continûment différentiable au moins deux fois en chaque variable. Le modèle de transmission de la maladie se compose de conditions initiales non négatives ainsi que du système d'équations suivant :

$$\dot{x}_i = f_i(x) = F_i(x) - V_i(x), i = 1, \dots, n, \quad (2.3)$$

où  $V_i = V_i^- - V_i^+$  et les fonctions satisfont aux hypothèses **(A1)–(A5)** décrites ci-dessous :

**(A1)** Puisque chaque fonction représente un transfert dirigé d'individus, alors elles sont toutes non négatives. Ainsi,

$$x_i \geq 0 \implies F_i, V_i^-, V_i^+ \geq 0, \forall i = 1, \dots, n. \quad (2.4)$$

**(A2)** Si un compartiment est vide, il ne peut y avoir aucun transfert d'individus hors du compartiment par la mort, l'infection ou tout autre moyen. Ainsi,

$$x_i = 0 \implies V_i^- = 0, \forall i = 1, \dots, n. \quad (2.5)$$

**(A3)** On considère le modèle de transmission de la maladie donné par (2.3), avec :  $f_i, i = 1, \dots, n$ , satisfaisant les conditions **(A1)** et **(A2)**. Si  $x_i = 0$ , alors  $f_i(x) \geq 0$ , c'est-à-dire, le cône non négatif  $(x_i \geq 0, i = 1, \dots, n)$  est invariant vers l'avant. D'après le théorème de Wiggins [52] pour chaque condition initiale non négative, il existe une unique solution non négative. La condition suivante ressort du simple fait que l'incidence de l'infection pour les compartiments non infectés est nulle.

$$F_i = 0, \text{ si } i > m. \quad (2.6)$$

**(A4)** Pour garantir que le sous-espace sans maladie est invariant, nous supposons que si la population est exempte de maladie, alors la population restera exempte de maladie. C'est-à-dire qu'il n'y a pas d'immigration (indépendante de la densité) d'agents infectieux. Cette condition s'énonce comme suit

$$x \in X^s \implies F_i(x) = V_i^+(x) = 0, \forall i = 1, \dots, m. \quad (2.7)$$

**(A5)** La condition restante est basée sur les dérivées à proximité d'un point d'équilibre sans maladie (PEM). Nous définissons un point d'équilibre sans maladie de (2.3) comme une solution d'équilibre stable localement asymptotiquement du modèle sans maladie, c'est-à-dire (2.3) restreint à  $X^s$ .

Notons que nous n'avons pas besoin de supposer que le modèle a un point d'équilibre sans maladie unique. Nous considérons une population proche d'un point d'équilibre sans maladie  $x^e$ . Si la population reste proche d'un point d'équilibre sans maladie (c'est-à-dire si l'introduction de quelques individus infectieux n'entraîne pas d'épidémie), alors la population reviendra à un point d'équilibre sans maladie selon le système linéarisé suivant :

$$\dot{x} = Df(x^e)(x - x^e), \quad (2.8)$$

où  $Df(x^e)$  est la matrice dérivée  $\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$  évaluée à un point d'équilibre sans maladie  $x^e$  (c'est-à-dire la matrice Jacobienne). Ici, certaines dérivées sont unilatérales, puisque  $x^e$  est à la frontière du domaine. Nous limitons notre attention aux systèmes dans lesquels un point d'équilibre sans maladie est stable en l'absence de nouvelle infection. C'est-à-dire, si  $F(x)$  est mis à zéro, alors toutes les valeurs propres de  $Df(x^e)$  ont des parties réelles négatives.

**Lemme 2.1.** [50] *Si  $x^e$  est un point d'équilibre sans maladie de (2.3) et la fonction  $f(x)$  satisfait (A1)–(A5), alors les dérivées  $DF(x^e)$  et  $DV(x^e)$  sont partitionnées comme suit :*

$$DF(x^e) = \begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad DV(x^e) = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ J_3 & J_4 \end{pmatrix},$$

où  $F_1$  et  $J_1$  sont des matrices  $m \times m$  définies par

$$F_1 = \left[ \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x^e) \right] \quad \text{et} \quad J_1 = \left[ \frac{\partial V_i}{\partial x_j}(x^e) \right], \quad \text{avec } 1 \leq i, j \leq m.$$

## 2.5. Nombre de reproduction de base $R_0$

**Définition 2.1.** *Soient  $\lambda_i, i = 1, \dots, l, l \leq m$  les valeurs propres de la matrice  $F_1 J_1^{-1}$ . On appelle rayon spectral de  $F_1 J_1^{-1}$  la quantité :*

$$\rho(F_1 J_1^{-1}) = \max\{|\lambda_i|, i = 1, \dots, l, l \leq m\}.$$

**Définition 2.2.** [50] Nous appelons  $F_1 J_1^{-1}$  la matrice de prochaine génération pour le modèle (2.3) et nous définissons le nombre de reproduction de base par :

$$R_0 = \rho(F_1 J_1^{-1}). \quad (2.9)$$

## 2.6. Stabilité des systèmes épidémiologiques

**Théorème 2.1.** [50] On considère le modèle de transmission de la maladie (2.3), avec  $f(x)$  satisfaisant les conditions (A1)–(A5). Si  $x^e$  est un point d'équilibre sans maladie du modèle (2.3), alors  $x^e$  est localement asymptotiquement stable si  $R_0 < 1$ , sinon ( $R_0 > 1$ ), alors  $x^e$  est instable, où  $R_0$  est défini par (2.9).

## 2.7. Exemple d'un modèle de traitement

Un modèle de traitement est basé sur le modèle de tuberculose de Castillo-Chavez et Feng [16]. La population  $N$  est divisée en quatre compartiments :

1.  $S$  individus susceptibles à la tuberculose ;
2.  $E$  individus exposés ;
3.  $I$  individus infectieux ;
4.  $T$  individus traités.

La dynamique est illustrée sur la figure 2.1. Les individus susceptibles et traités entrent dans le compartiment exposé aux taux

$$\beta_1 \frac{I}{N} \text{ et } \beta_2 \frac{I}{N},$$

respectivement, où

$$N = E + I + S + T.$$

Les individus exposés progressent au même taux  $v$  vers le compartiment infectieux. Tous les nouveau-nés sont susceptibles et tous les individus meurent au taux  $d > 0$ . Les taux de traitement sont  $r_1$  pour les individus exposés et  $r_2$  pour les individus infectieux. Cependant, seule une fraction  $q$  des traitements des individus infectieux réussit. Les individus infectieux traités sans succès rentrent dans le compartiment exposé ( $p = 1 - q$ )(voir la figure 2.1).

Le modèle (SEIT) de transmission de la maladie se compose des équations différentielles suivantes, ainsi que des conditions initiales non négatives :

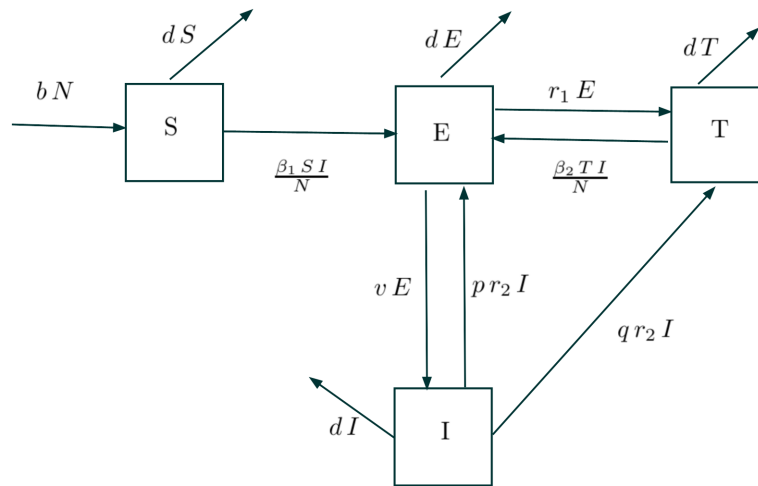


FIGURE 2.1. Schéma de principe du modèle SEIT (2.10).

$$\begin{cases} \dot{E}(t) = \frac{\beta_1 S(t)I(t)}{N} + \frac{\beta_2 T(t)I(t)}{N} - (d + v + r_1) E + p r_2 I(t), \\ \dot{I}(t) = v E(t) - (d + r_2) I(t), \\ \dot{S}(t) = b N - d S(t) - \frac{\beta_1 S(t)I(t)}{N}, \\ \dot{T}(t) = -d T(t) + r_1 E(t) + q r_2 I(t) - \frac{\beta_2 T(t)I(t)}{N}. \end{cases} \quad (2.10)$$

La progression de  $E$  à  $I$  et l'échec du traitement ne sont pas considérés comme de nouvelles infections, mais plutôt comme la progression d'un individu infecté à travers les différents compartiments. Ainsi

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\beta_1 S(t)I(t)}{N} + \frac{\beta_2 T(t)I(t)}{N} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} (d + v + r_1) E - p r_2 I(t) \\ -v E(t) + (d + r_2) I(t) \\ -b N + d S(t) - \frac{\beta_1 S(t)I(t)}{N} \\ d T(t) - r_1 E(t) - q r_2 I(t) + \frac{\beta_2 T(t)I(t)}{N} \end{pmatrix}.$$

Les compartiments infectés sont  $E$  et  $I$ , ce qui donne  $m = 2$ .

Le point d'équilibre sans maladie avec  $E = I = 0$  a la forme :

$$x^e = (0, 0, \frac{b N}{d}, 0)^T.$$

Supposons que  $\frac{b N}{d} = 1$ , alors on a

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_1 = \begin{pmatrix} d + v + r_1 & -p r_2 \\ -v & d + r_2 \end{pmatrix},$$

et

$$J_1^{-1} = \frac{1}{(d + v + r_1)(d + r_2) - v p r_2} \begin{pmatrix} d + r_2 & p r_2 \\ v & d + v + r_1 \end{pmatrix},$$

alors

$$F_1 J_1^{-1} = \frac{1}{(d+v+r_1)(d+r_2) - v p r_2} \begin{pmatrix} \beta_1 v & \beta_1(d+v+r_1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

les valeurs propres de la matrice  $F_1 J_1^{-1}$  sont 0 et  $\frac{\beta_1 v}{(d+v+r_1)(d+r_2) - v p r_2}$ , donc

$$R_0 = \rho(F_1 J_1^{-1}) = \max \left\{ 0, \frac{\beta_1 v}{(d+v+r_1)(d+r_2) - v p r_2} \right\} = \frac{\beta_1 v}{(d+v+r_1)(d+r_2) - v p r_2}.$$

## 2.8. Modèle mathématique retardé de type SEIR pour Covid-19

Dans cette section, nous proposons un modèle mathématique retardé pour Covid-19. Ce modèle considère six variables d'état :

1.  $S(t)$  individus susceptibles ;
2.  $E(t)$  individus exposés ;
3.  $I(t)$  individus infectés ;
4.  $Q(t)$  individus mis en quarantaine ;
5.  $R(t)$  individus rétablis ;
6.  $P(t)$  individus protégés.

La population totale est notée  $N$  :

$$N = S(t) + E(t) + I(t) + Q(t) + R(t) + P(t). \quad (2.11)$$

Pour modéliser la propagation de Covid-19, nous définissons les paramètres dans la table 2.1 :

Paramètre	Signification
$b$	Taux de natalité
$\mu$	Taux de mortalité
$\alpha$	Taux de protection
$\beta$	Taux d'infection
$\gamma$	Inverse de la phase de latence approximative
$\delta$	Taux auquel les personnes infectieuses entrent en quarantaine
$\lambda$	Taux de récupération

**TABLE 2.1.** Les paramètres du modèle mathématique retardé.

Le retard  $\tau \geq 0$  représente la période d'incubation qui est la durée avant que les individus infectés ne deviennent infectieux. Le modèle que nous proposons est donné par le système de

six équations différentielles ordinaires non linéaires suivant :

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = bN - \frac{\beta S(t-\tau)I(t-\tau)}{N} - (\alpha + \mu)S(t), \\ \dot{E}(t) = \frac{\beta S(t-\tau)I(t-\tau)}{N} - (\gamma + \mu)E(t), \\ \dot{I}(t) = \gamma E(t) - (\delta + \mu)I(t), \\ \dot{Q}(t) = \delta I(t) - (\lambda + \mu)Q(t), \\ \dot{R}(t) = \lambda Q(t) - \mu R(t), \\ \dot{P}(t) = \alpha S(t) - \mu P(t), \end{cases} \quad (2.12)$$

où les variables d'état sont soumises aux conditions initiales suivantes :

$$S(\theta) = S_0, \theta \in [-\tau, 0], E(0) = E_0, I(\theta) = I_0, \theta \in [-\tau, 0], Q(0) = Q_0, R(0) = R_0, \text{ et } P(0) = P_0.$$

### 2.8.1 Modèle retardé normalisé du type SEIR (Susceptible-Exposé-Infecté-Rétabli )

Dans la situation où la taille totale de la population  $N$  est constante, il est souvent pratique de considérer les proportions de chaque compartiment d'individus dans la population :

$$s(t) = \frac{S(t)}{N}, e(t) = \frac{E(t)}{N}, i(t) = \frac{I(t)}{N}, q(t) = \frac{Q(t)}{N}, r(t) = \frac{R(t)}{N} \text{ et } p(t) = \frac{P(t)}{N}.$$

Par conséquent, le modèle retardé normalisé du type SEIR est donné par le système suivant d'équations différentielles ordinaires :

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = b - \beta s(t-\tau) i(t-\tau) - (\alpha + b) s(t), \\ \dot{e}(t) = \beta s(t-\tau) i(t-\tau) - (\gamma + b) e(t), \\ \dot{i}(t) = \gamma e(t) - (\delta + b) i(t), \\ \dot{q}(t) = \delta i(t) - (\lambda + b) q(t), \\ \dot{r}(t) = \lambda q(t) - b r(t), \\ \dot{p}(t) = \alpha s(t) - b p(t), \end{cases} \quad (2.13)$$

où les variables d'état du système (2.13) sont soumises aux conditions initiales suivantes :

$$s(\theta) = \frac{S_0}{N}, \theta \in [-\tau, 0], e(0) = \frac{E_0}{N}, i(\theta) = \frac{I_0}{N}, \theta \in [-\tau, 0], q(0) = \frac{Q_0}{N}, r(0) = \frac{R_0}{N} \text{ et } p(0) = \frac{P_0}{N},$$

avec

$$s(t) + e(t) + i(t) + q(t) + r(t) + p(t) = 1.$$

Le modèle (2.13) a deux points d'équilibre : l'équilibre sans maladie et l'équilibre endémique.



### 2.8.2 Équilibre sans maladie et équilibre endémique

L'équilibre sans maladie et le point d'équilibre endémique peuvent être obtenus en égalant les équations (2.13) à zéro, satisfaisant ainsi

$$\begin{aligned} b - \beta s(t - \tau) i(t - \tau) - (\alpha + b) s(t) &= 0, \\ \beta s(t - \tau) i(t - \tau) - (\gamma + b) e(t) &= 0, \\ \gamma e(t) - (\delta + b) i(t) &= 0, \\ \delta i(t) - (\lambda + b) q(t) &= 0, \\ \lambda q(t) - b r(t) &= 0, \\ \alpha s(t) - b p(t) &= 0, \end{aligned}$$

dont l'équilibre sans maladie  $\Sigma_0$  est donné par :

$$\Sigma_0 = (s_0, e_0, i_0, q_0, r_0, p_0) = \left( \frac{b}{\alpha + b}, 0, 0, 0, 0, \frac{\alpha}{\alpha + b} \right), \quad (2.14)$$

et le point d'équilibre endémique  $EE$  est donné par :

$$EE = (s^+, e^+, i^+, q^+, r^+, p^+), \quad (2.15)$$

où

$$\begin{aligned} s^+ &= \frac{(\delta + b)(\gamma + b)}{\beta \gamma}, \\ e^+ &= \frac{\beta s^+ i^+}{(\gamma + b)}, \\ i^+ &= \frac{\beta \gamma b - (\delta + b)(\gamma + b)(\alpha + b)}{\beta (\delta + b)(\gamma + b)}, \\ q^+ &= \frac{\beta \gamma b \delta - \delta (\delta + b)(\gamma + b)(\alpha + b)}{\beta (\lambda + b)(\delta + b)(\gamma + b)}, \\ r^+ &= \frac{\lambda \delta \beta \gamma b - \lambda \delta (\delta + b)(\gamma + b)(\alpha + b)}{b \beta (\lambda + b)(\delta + b)(\gamma + b)}, \\ p^+ &= \frac{\alpha (\delta + b)(\gamma + b)}{b \beta \gamma}. \end{aligned}$$

### 2.8.3 Nombre de reproduction de base

Le déplacement d'une personne du compartiment  $e$  vers  $i$  n'est pas considéré comme une nouvelle infection. Donc

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta s(t - \tau) i(t - \tau) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} -b + \beta s(t - \tau) i(t - \tau) + (\alpha + b) s(t) \\ +(\gamma + b) e(t) \\ -\gamma e(t) + (\delta + b) i(t) \\ -\delta i(t) + (\lambda + b) q(t) \\ -\lambda q(t) + b r(t) \\ -\alpha s(t) + b p(t) \end{pmatrix}.$$

Les compartiments infectés sont  $e$  et  $i$ , ce qui donne  $m = 2$ . Le point d'équilibre sans maladie  $\Sigma_0$  est donné par (2.14), alors on a :

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta b}{\alpha + b} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_1 = \begin{pmatrix} \gamma + b & 0 \\ -\gamma & \delta + b \end{pmatrix},$$

les valeurs propres de la matrice  $F_1 J_1^{-1}$  sont

$$0 \quad \text{et} \quad \frac{\beta \gamma b}{(\alpha + b)(\delta + b)(\gamma + b)},$$

donc

$$R_0 = \frac{\beta \gamma b}{(\alpha + b)(\delta + b)(\gamma + b)}. \quad (2.16)$$

### 2.8.4 Stabilité du modèle retardé normalisé de type SEIR

**Théorème 2.2.** *L'équilibre sans maladie  $\Sigma_0$  est localement asymptotiquement stable pour tout délai  $\tau \geq 0$ , si le nombre de base de reproduction  $R_0 < 1$ . L'équilibre sans maladie est instable pour tout délai  $\tau \geq 0$ , si le nombre de reproduction de base  $R_0 > 1$ .*

*Démonstration.* Nous considérons la transformation de coordonnées suivantes :

$$x_1(t) = s(t) - \bar{s}, \quad x_2(t) = e(t) - \bar{e}, \quad x_3(t) = i(t) - \bar{i},$$

$$x_4(t) = q(t) - \bar{q}, \quad x_5(t) = r(t) - \bar{r}, \quad x_6(t) = p(t) - \bar{p},$$

où  $(\bar{s}, \bar{r}, \bar{i}, \bar{q}, \bar{r}, \bar{p})$  désigne tout point d'équilibre du système (2.13).

Le système linéarisé de (2.13) est de la forme :

$$\dot{X}(t) = A_0 X(t) + A_1 X(t - \tau), \quad (2.17)$$

où  $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T$ ,

$$A_0 = \begin{pmatrix} -\alpha - b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma - b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -\delta - b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -\lambda - b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -b & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & -b \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\beta \bar{i} & 0 & -\beta \bar{s} & 0 & 0 & 0 \\ \beta \bar{i} & 0 & \beta \bar{s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'équation caractéristique du système (2.13) pour tout point d'équilibre est donnée par

$$\Delta(y) = |y Id_{6 \times 6} - A_0 - A_1 e^{-\tau y}| = 0. \quad (2.18)$$

L'équation caractéristique du système (2.13) pour le point d'équilibre sans maladie  $\Sigma_0$  est donnée par

$$P(y, \tau) = (y + b)^2 (y + \alpha + b) (y + \lambda + b) (y^2 + \Lambda_1 y + \Lambda_2) = 0, \quad (2.19)$$

où

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \delta + 2b + \gamma, \\ \Lambda_2 &= (\delta + b)(\gamma + b) - \frac{\beta \gamma b}{\alpha + b} e^{-\tau y}. \end{aligned}$$

i) Pour  $\tau = 0$ , l'équation (2.19) devient

$$P(y, 0) = (y + b)^2 (y + \alpha + b) (y + \lambda + b) \left( y^2 + \Lambda_1 y + (\delta + b)(\gamma + b) - \frac{\beta \gamma b}{\alpha + b} \right) = 0. \quad (2.20)$$

Nous devons prouver que toutes les racines de l'équation caractéristique ont des parties réelles négatives. Il est facile de voir que

$$y_1 = -b, \quad y_2 = -\alpha - b \quad \text{et} \quad y_3 = -\lambda - b$$

sont des racines de l'équation (2.20) et toutes les trois sont strictement négatives. Il suffit donc de considérer le quatrième terme de l'équation ci-dessus.

Soit

$$P_1(y, 0) := y^2 + \Lambda_1 y + (\delta + b)(\gamma + b) - \frac{\beta \gamma b}{\alpha + b}.$$

En utilisant le critère de Routh-Hurwitz [45], nous savons que toutes les racines de  $P_1(y, 0)$  ont des parties réelles négatives si et seulement si les coefficients de  $P_1(y, 0)$  sont strictement positifs. Dans notre cas, on a :

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \delta + 2b + \gamma > 0, \\ (\delta + b)(\gamma + b) - \frac{\beta \gamma b}{\alpha + b} > 0 &\iff R_0 = \frac{\beta \gamma b}{(\delta + b)(\gamma + b)(\alpha + b)} < 1. \end{aligned}$$

Donc l'équilibre sans maladie  $\Sigma_0$  est localement asymptotiquement stable.

ii) Pour  $\tau > 0$ , on utilise le théorème de Routh, nous devons donc prouver que toutes les racines de l'équation caractéristique (2.19) ne peuvent pas couper l'axe imaginaire, c'est-à-dire que l'équation caractéristique ne peut pas avoir de racines imaginaires pures.

On suppose l'inverse, c'est-à-dire qu'il existe  $w \in \mathbb{R}$  tel que  $y = w i$  est une solution de (2.19).

En remplaçant  $y$  dans le quatrième terme de (2.19), on obtient

$$-w^2 + (\delta + 2b + \gamma) w i + (\delta + b)(\gamma + b) - \frac{\beta \gamma b}{\alpha + b} (\cos(\tau w) - i \sin(\tau w)) = 0, \quad (2.21)$$

alors

$$\begin{cases} -w^2 + (\delta + b)(\gamma + b) = \frac{\beta \gamma b}{\alpha + b} \cos(\tau w), \\ (\delta + 2b + \gamma)w = -\frac{\beta \gamma b}{\alpha + b} \sin(\tau w). \end{cases} \quad (2.22)$$

En additionnant les carrés des deux équations et en utilisant la formule trigonométrique fondamentale, on obtient

$$w^4 + ((\delta + b)^2 + (\gamma + b)^2)w^2 + (\delta + b)^2(\gamma + b)^2 - \left(\frac{\beta \gamma b}{\alpha + b}\right)^2 = 0, \quad (2.23)$$

ce qui est équivalent à

$$w^2 = \frac{1}{2} \sqrt{((\delta + b)^2 - (\gamma + b)^2)^2 + 4 \left(\frac{\beta \gamma b}{\alpha + b}\right)^2} - \frac{1}{2} ((\delta + b)^2 + (\gamma + b)^2). \quad (2.24)$$

Si  $R_0 < 1$ , alors  $(\delta + b)^2(\gamma + b)^2 - \left(\frac{\beta \gamma b}{\alpha + b}\right)^2 > 0$ , et

$$\left((\delta + b)^2 + (\gamma + b)^2\right)^2 - 4 \left((\delta + b)^2(\gamma + b)^2 - \left(\frac{\beta \gamma b}{\alpha + b}\right)^2\right) < \left((\delta + b)^2 + (\gamma + b)^2\right)^2,$$

donc

$$\sqrt{((\delta + b)^2 - (\gamma + b)^2)^2 + 4 \left(\frac{\beta \gamma b}{\alpha + b}\right)^2} < (\delta + b)^2 + (\gamma + b)^2.$$

Par conséquent, nous avons  $w^2 < 0$ , ce qui est une contradiction.

Par conséquent, nous avons prouvé que si  $R_0 < 1$ , alors l'équation caractéristique (2.19) ne peut pas avoir de racines imaginaires pures et l'équilibre sans maladie  $\Sigma_0$  est localement asymptotiquement stable pour tout  $\tau > 0$ .

iii) Supposons maintenant que  $R_0 > 1$ . Nous savons que l'équation caractéristique (2.19) a trois racines négatives réelles

$$y_1 = -b, \quad y_2 = -\alpha - b \quad \text{et} \quad y_3 = -\lambda - b.$$

Ainsi, nous devons vérifier si les racines restantes de

$$q(y) := y^2 + \Lambda_1 y + \Lambda_2 \quad (2.25)$$

ont des parties réelles négatives. Il est facile de voir que  $q(0) = \Lambda_2 < 0$ , car  $R_0 > 1$ .

D'autre part

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} q(y) = +\infty.$$

Par conséquent, par continuité de  $q(y)$ , il existe au moins une racine positive de l'équation caractéristique (2.19). Ainsi, nous concluons que le point d'équilibre  $\Sigma_0$  est instable.

□

**Théorème 2.3.** *Le point d'équilibre endémique  $EE$  est localement asymptotiquement stable pour  $\tau = 0$ , si le nombre de base de reproduction  $R_0 > 1$ , et il est localement asymptotiquement stable pour tout retard  $\tau > 0$ , si le nombre de reproduction de base  $R_0$  satisfait les relations suivantes :*

$$1 < R_0 < \min \left( 3, 1 + \frac{\sqrt{(\alpha + b)^2 + (\delta + b)^2 + (\gamma + b)^2}}{\alpha + b} \right), \quad (2.26)$$

$$M_1 R_0^2 + M_2 R_0 + M_3 > 0, \quad (2.27)$$

où

$$\begin{aligned} M_1 &= -(\alpha + b)^2 ((\delta + b)^2 + (\gamma + b)^2), \\ M_2 &= 2(\alpha + b)^2 ((\delta + \gamma + 2b)^2 - 3(\delta + b)(\gamma + b)) \\ &\quad + 2(\alpha + b)(\delta + b)(\gamma + b)(\delta + \gamma + 2b), \\ M_3 &= 2(\alpha + b)(\delta + b)(\gamma + b)(\alpha - \delta - \gamma - b). \end{aligned}$$

*Démonstration.* L'équation caractéristique du système (2.13) pour le point d'équilibre endémique  $EE$  est donnée par :

$$\tilde{P}(y, \tau) = (y + b)^2 (y + \lambda + b) (y^3 + \Delta_1 y^2 + \Delta_2 y + \Delta_3) = 0, \quad (2.28)$$

où

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= L_1 + \bar{L}_1 e^{-\tau y}, \\ \Delta_2 &= L_2 + \bar{L}_2 e^{-\tau y}, \\ \Delta_3 &= L_3 + \bar{L}_3 e^{-\tau y}, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} L_1 &= \alpha + \delta + \gamma + 3b, \\ \bar{L}_1 &= \frac{\beta \gamma b - (\delta + b)(\gamma + b)(\alpha + b)}{(\delta + b)(\gamma + b)}, \\ L_2 &= (\gamma + 2b + \delta)(\alpha + b) + (\gamma + b)(\delta + b), \\ \bar{L}_2 &= (\gamma + 2b + \delta)(\alpha + b)(R_0 - 1) - (\gamma + b)(\delta + b), \\ L_3 &= (\alpha + b)(\gamma + b)(\delta + b), \\ \bar{L}_3 &= \beta \gamma b - 2(\alpha + b)(\gamma + b)(\delta + b). \end{aligned}$$

i) Pour  $\tau = 0$ , l'équation (2.28) devient

$$\tilde{P}(y, 0) = (y + b)^2 (y + \lambda + b) (y^3 + \tilde{\Delta}_1 y^2 + \tilde{\Delta}_2 y + \tilde{\Delta}_3) = 0, \quad (2.29)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_1 &= L_1 + \bar{L}_1, \\ \tilde{\Delta}_2 &= L_2 + \bar{L}_2, \\ \tilde{\Delta}_3 &= L_3 + \bar{L}_3, \end{aligned}$$

Nous devons prouver que toutes les racines de l'équation caractéristique ont des parties réelles négatives. Il est facile de voir que

$$y_1 = -b \text{ et } y_2 = -\lambda - b$$

sont des racines de l'équation (2.29), qui sont toutes les deux négatives. Il suffit donc de considérer le troisième terme de l'équation ci-dessus.

Soit

$$\tilde{P}_3(y, 0) := y^3 + \tilde{\Delta}_1 y^2 + \tilde{\Delta}_2 y + \tilde{\Delta}_3 = 0. \quad (2.30)$$

En utilisant le critère de Routh-Hurwitz [45], nous savons que toutes les racines de  $\tilde{P}_3(y, 0)$  ont des parties réelles négatives si et seulement si les coefficients de  $\tilde{P}_3(y, 0)$  sont strictement positifs, avec

$$\tilde{\Delta}^* = \tilde{\Delta}_1 \tilde{\Delta}_2 - \tilde{\Delta}_3 > 0.$$

Si  $R_0 > 1$ , alors

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_1 &= \alpha + \delta + \gamma + 3b + (\alpha + b)(R_0 - 1) > 0, \\ \tilde{\Delta}_2 &= (\delta + \gamma + 2b)(\alpha + b)R_0 > 0, \\ \tilde{\Delta}_3 &= (\alpha + b)(\delta + b)(\gamma + b)(R_0 - 1) > 0, \\ \tilde{\Delta}^* &= (\alpha + b)(\alpha + b)(\delta + \gamma + 2b)R_0^2 \\ &\quad + (\alpha + b)(\delta^2 + 3b(\delta + b) + \gamma(\delta + \gamma + 3b))R_0 \\ &\quad + (\alpha + b)(\delta + b)(\gamma + b) > 0. \end{aligned}$$

ii) Pour  $\tau > 0$ , on utilise le théorème de Routh, il faut donc prouver que toutes les racines de l'équation caractéristique (2.28) ne peuvent pas couper l'axe imaginaire, c'est-à-dire que l'équation caractéristique ne peut pas avoir de racine imaginaire pure.

Supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe  $w \in \mathbb{R}$  tel que  $y = wi$  est une solution de l'équation (2.28). En remplaçant  $y$  dans le troisième terme de (2.28), on obtient

$$-w^3 i - L_1 w^2 + L_2 w i + L_3 + (-\bar{L}_1 w^2 + \bar{L}_2 w i + \bar{L}_3)(\cos(\tau w) - i \sin(\tau w)) = 0, \quad (2.31)$$

alors

$$\begin{cases} -L_1 w^2 + L_3 = (\bar{L}_1 w^2 - \bar{L}_3) \cos(\tau w) - \bar{L}_2 w \sin(\tau w), \\ -w^3 + L_2 w = -\bar{L}_2 w \cos(\tau w) - (\bar{L}_1 w^2 - \bar{L}_3) \sin(\tau w). \end{cases} \quad (2.32)$$

En additionnant les carrés des deux équations et en utilisant la formule trigonométrique fondamentale, on obtient

$$w^6 + K_1 w^4 + K_2 w^2 + K_3 = 0, \quad (2.33)$$

où

$$\begin{aligned} K_1 &= L_1^2 - \bar{L}_1^2 - 2L_2, \\ K_2 &= 2\bar{L}_1\bar{L}_3 - 2L_1L_3 + L_2^2 - \bar{L}_2^2, \\ K_3 &= L_3^2 - \bar{L}_3^2. \end{aligned}$$

On suppose que le nombre de reproduction de base  $R_0$  satisfait la relation (2.27), avec

$$\min \left( 3, 1 + \frac{\sqrt{(\alpha + b)^2 + (\delta + b)^2 + (\gamma + b)^2}}{\alpha + b} \right) = 1 + \frac{\sqrt{(\alpha + b)^2 + (\delta + b)^2 + (\gamma + b)^2}}{\alpha + b}, \quad (2.34)$$

$$K_1 > 0 \iff 1 < R_0 < 1 + \frac{\sqrt{(\alpha + b)^2 + (\delta + b)^2 + (\gamma + b)^2}}{\alpha + b},$$

où

$$K_1 = (\delta + b)^2 + (\gamma + b)^2 + (\alpha + b)^2 (1 - (R_0 - 1)^2).$$

On suppose que le nombre de reproduction de base  $R_0$  satisfait la relation (2.26), avec

$$\min \left( 3, 1 + \frac{\sqrt{(\alpha + b)^2 + (\delta + b)^2 + (\gamma + b)^2}}{\alpha + b} \right) = 3, \quad (2.35)$$

alors on a

$$1 < R_0 < 3 < 1 + \frac{\sqrt{(\alpha + b)^2 + (\delta + b)^2 + (\gamma + b)^2}}{\alpha + b},$$

ce qui est équivalent à

$$0 < R_0 - 1 < 2 < 1 + \frac{\sqrt{(\alpha + b)^2 + (\delta + b)^2 + (\gamma + b)^2}}{\alpha + b},$$

ce qui est équivalent à

$$1 - \frac{(\alpha + b)^2 + (\delta + b)^2 + (\gamma + b)^2}{(\alpha + b)^2} < 1 - (R_0 - 1)^2 < 1,$$

ce qui est équivalent à

$$-(\delta + b)^2 - (\gamma + b)^2 < (\alpha + b)^2 (1 - (R_0 - 1)^2) < (\alpha + b)^2,$$

ce qui est équivalent à

$$0 < (\alpha + b)^2 (1 - (R_0 - 1)^2) + (\delta + b)^2 + (\gamma + b)^2 < (\alpha + b)^2 + (\delta + b)^2 + (\gamma + b)^2,$$

donc

$$K_1 > 0. \quad (2.36)$$

Maintenant, nous supposons que le nombre de reproduction de base  $R_0$  satisfait la relation (2.27), donc

$$K_2 = M_1 R_0^2 + M_2 R_0 + M_3 > 0. \quad (2.37)$$

Enfin, nous supposons que le nombre de reproduction de base  $R_0$  satisfait la relation (2.26), avec la condition (2.35), donc

$$K_3 = (\alpha + b)^2 (\delta + b)^2 (\gamma + b)^2 (1 - (R_0 - 2)^2) > 0. \quad (2.38)$$

Nous supposons maintenant que  $R_0$  satisfait la relation (2.26), avec la condition (2.34), donc nous avons

$$1 < R_0 < 1 + \frac{\sqrt{(\alpha + b)^2 + (\delta + b)^2 + (\gamma + b)^2}}{\alpha + b} < 3,$$

ce qui est équivalent à

$$-1 < R_0 - 2 < -1 + \frac{\sqrt{(\alpha + b)^2 + (\delta + b)^2 + (\gamma + b)^2}}{\alpha + b} < 1,$$

ce qui est équivalent à

$$1 - (R_0 - 2)^2 > 0,$$

donc

$$K_3 > 0.$$

Nous savons que le membre de gauche de l'équation (2.28) est strictement positif, ce qui implique que cette équation n'est pas possible.

Par conséquent, l'équation (2.29) n'a pas de racines imaginaires, ce qui implique que le point d'équilibre  $EE$  est localement asymptotiquement stable pour tout  $\tau \geq 0$ .

□

## 2.9. Modèle mathématique retardé de type SEIR pour COVID-19 avec vaccination

Nous introduisons dans le modèle (2.12) un contrôle  $u$  et une variable supplémentaire  $W(t)$ ,  $t \in [0, t_1]$ , représentant respectivement le pourcentage d'individus susceptibles vaccinés et le nombre de vaccins utilisés, où

$$\dot{W}(t) = u S(t), \text{ avec la condition initiale } W(0) = 0. \quad (2.39)$$

Notre modèle avec vaccination est alors donné par le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = bN - \frac{\beta S(t-\tau)I(t-\tau)}{N} - (\alpha + u + \mu) S(t), \\ \dot{E}(t) = \frac{\beta S(t-\tau)I(t-\tau)}{N(t)} - (\gamma + \mu)E(t), \\ \dot{I}(t) = \gamma E(t) - (\delta + \mu)I(t), \\ \dot{Q}(t) = \delta I(t) - (\lambda + \mu)Q(t), \\ \dot{R}(t) = \lambda Q(t) - \mu R(t), \\ \dot{P}(t) = \alpha S(t) - \mu P(t), \\ \dot{W}(t) = u S(t) - \mu W(t), \end{cases} \quad (2.40)$$



où la population totale  $N$  est donnée par :

$$N = S(t) + E(t) + I(t) + Q(t) + R(t) + P(t) + W(t), \quad (2.41)$$

les variables d'état sont soumises aux conditions initiales :

$$S(\theta) = S_0, \theta \in [-\tau, 0], E(0) = E_0, I(\theta) = I_0, \theta \in [-\tau, 0], Q(0) = Q_0, R(0) = R_0, P(0) = P_0,$$

et  $W(0) = 0$ .

### 2.9.1 Modèle retardé normalisé de type SEIR avec vaccination

Dans la situation où la taille totale de la population  $N$  est constante, il est souvent pratique de considérer les proportions de chaque compartiment d'individus dans la population :

$$s(t) = \frac{S(t)}{N}, e(t) = \frac{E(t)}{N}, i(t) = \frac{I(t)}{N}, q(t) = \frac{Q(t)}{N}, r(t) = \frac{R(t)}{N}, p(t) = \frac{P(t)}{N} \text{ et } w(t) = \frac{W(t)}{N},$$

selon l'équation (2.41). Par conséquent, le modèle retardé normalisé de type SEIR est donné par le système commandé d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{s}(t) = b - \beta s(t - \tau) i(t - \tau) - (\alpha + u + b) s(t), \\ \dot{e}(t) = \beta s(t - \tau) i(t - \tau) - (\gamma + b) e(t), \\ \dot{i}(t) = \gamma e(t) - (\delta + b) i(t), \\ \dot{q}(t) = \delta i(t) - (\lambda + b) q(t), \\ \dot{r}(t) = \lambda q(t) - b r(t), \\ \dot{p}(t) = \alpha s(t) - b p(t), \\ \dot{w}(t) = u s(t) - b w(t), \end{array} \right. \quad (2.42)$$

où les variables d'état du système (2.42) sont soumises aux conditions initiales suivantes :

$$s(\theta) = \frac{S_0}{N}, \theta \in [-\tau, 0], e(0) = \frac{E_0}{N}, i(\theta) = \frac{I_0}{N}, \theta \in [-\tau, 0], q(0) = \frac{Q_0}{N}, r(0) = \frac{R_0}{N}, p(0) = \frac{P_0}{N},$$

et  $w(0) = 0$ , avec

$$s(t) + e(t) + i(t) + q(t) + r(t) + p(t) + w(t) = 1.$$

Le modèle (2.42) a un point d'équilibre sans maladie.

### 2.9.2 Équilibre sans maladie

L'équilibre sans maladie peut être obtenu en égalant les équations (2.42) à zéro, satisfaisant ainsi

$$\begin{aligned}
 b - \beta s(t - \tau) i(t - \tau) - (\alpha + u + b) s(t) &= 0, \\
 \beta s(t - \tau) i(t - \tau) - (\gamma + b) e(t) &= 0, \\
 \gamma e(t) - (\delta + b) i(t) &= 0, \\
 \delta i(t) - (\lambda + b) q(t) &= 0, \\
 \lambda q(t) - b r(t) &= 0, \\
 \alpha s(t) - b p(t) &= 0, \\
 u s(t) - b w(t) &= 0,
 \end{aligned}$$

dont l'équilibre sans maladie,  $\Sigma_0$ , est donné par

$$\Sigma_0 = (s_0, e_0, i_0, q_0, r_0, p_0, w_0) = \left( \frac{b}{\alpha + u + b}, 0, 0, 0, 0, \frac{\alpha}{\alpha + u + b}, \frac{u}{\alpha + u + b} \right). \quad (2.43)$$

### 2.9.3 Nombre de reproduction de base

Le déplacement d'une personne du compartiment  $e$  vers  $i$  n'est pas considéré comme une nouvelle infection. Donc

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta s(t - \tau) i(t - \tau) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} -b + \beta s(t - \tau) i(t - \tau) + (\alpha + u + b) s(t) \\ +(\gamma + b) e(t) \\ -\gamma e(t) + (\delta + b) i(t) \\ -\delta i(t) + (\lambda + b) q(t) \\ -\lambda q(t) + b r(t) \\ -\alpha s(t) + b p(t) \\ -u s(t) + b w(t) \end{pmatrix}.$$

Les compartiments infectés sont  $e$  et  $i$ , ce qui donne  $m = 2$ . Le point d'équilibre sans maladie  $\Sigma_0$  est donné par (2.43), alors on a :

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta b}{\alpha + u + b} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_1 = \begin{pmatrix} \gamma + b & 0 \\ -\gamma & \delta + b \end{pmatrix},$$

les valeurs propres de la matrice  $F_1 J_1^{-1}$  sont

$$0 \text{ et } \frac{\beta \gamma b}{(\alpha + u + b) (\delta + b) (\gamma + b)},$$

donc

$$\tilde{R}_0 = \frac{\beta \gamma b}{(\alpha + u + b) (\delta + b) (\gamma + b)}. \quad (2.44)$$

### 2.9.4 Stabilité du modèle retardé normalisé de type SEIR avec vaccination

**Théorème 2.4.** *L'équilibre sans maladie  $\Sigma_0$  est localement asymptotiquement stable pour tout retard  $\tau \geq 0$ , si le nombre de reproduction de base  $\tilde{R}_0 < 1$ . L'équilibre sans maladie est instable pour tout délai  $\tau \geq 0$ , si le nombre de reproduction de base  $\tilde{R}_0 > 1$ .*

*Démonstration.* Nous considérons la transformation de coordonnées suivante

$$x_1(t) = s(t) - \bar{s}, \quad x_2(t) = e(t) - \bar{e}, \quad x_3(t) = i(t) - \bar{i}, \quad x_4(t) = q(t) - \bar{q},$$

$$x_5(t) = r(t) - \bar{r}, \quad x_6(t) = p(t) - \bar{p} \text{ et } x_7(t) = w(t) - \bar{w},$$

où  $(\bar{s}, \bar{r}, \bar{i}, \bar{q}, \bar{r}, \bar{p}, \bar{w})$  désigne tout point d'équilibre du système (2.42).

Le système linéarisé de (2.42) est de la forme

$$\dot{X}(t) = \tilde{A}_0 X(t) + \tilde{A}_1 X(t - \tau), \quad (2.45)$$

où  $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)^T$ ,

$$\tilde{A}_0 = \begin{pmatrix} -\alpha - u - b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma - b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -\delta - b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -\lambda - b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -b & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & 0 \\ u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} -\beta \bar{i} & 0 & -\beta \bar{s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta \bar{i} & 0 & \beta \bar{s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'équation caractéristique du système (2.42) pour tout point d'équilibre est donnée par

$$\tilde{\Gamma}(y) = |y Id_{7 \times 7} - \tilde{A}_0 - \tilde{A}_1 e^{-\tau y}| = 0. \quad (2.46)$$

L'équation caractéristique pour le point d'équilibre sans maladie  $\Sigma_0$  est donnée par

$$P^*(y, \tau) = (y + b)^3 (y + \alpha + u + b) (y + \lambda + b) (y^2 + \Gamma_1 y + \Gamma_2) = 0, \quad (2.47)$$

où

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \delta + 2b + \gamma, \\ \Gamma_2 &= (\delta + b)(\gamma + b) - \frac{\beta \gamma b}{\alpha + u + b} e^{-\tau y}. \end{aligned}$$

i) Pour  $\tau = 0$ , l'équation (2.47) devient

$$P^*(y, 0) = (y+b)^3 (y+\alpha+u+b) (y+\lambda+b) \left( y^2 + \Gamma_1 y + (\delta+b)(\gamma+b) - \frac{\beta\gamma b}{\alpha+u+b} \right) = 0. \quad (2.48)$$

Nous devons prouver que toutes les racines de l'équation caractéristique ont des parties réelles négatives. Il est facile de voir que

$$y_1 = -b, \quad y_2 = -\alpha - u - b \quad \text{et} \quad y_3 = -\lambda - b$$

sont des racines de l'équation (2.48), toutes les trois sont négatives. Ainsi, il suffit de considérer le quatrième terme de l'équation ci-dessus.

Soit

$$P_3^*(y, 0) := y^2 + \Gamma_1 y + (\delta+b)(\gamma+b) - \frac{\beta\gamma b}{\alpha+u+b}.$$

En utilisant le critère de Routh-Hurwitz [45], nous savons que toutes les racines de  $P_3^*(y, 0)$  ont des parties réelles négatives si et seulement si les coefficients de  $P_3^*(y, 0)$  sont strictement positifs. Dans notre cas, on a :

$$\Gamma_1 = \delta + 2b + \gamma > 0, \\ (\delta+b)(\gamma+b) - \frac{\beta\gamma b}{\alpha+u+b} > 0 \iff \tilde{R}_0 = \frac{\beta\gamma b}{(\alpha+u+b)(\delta+b)(\gamma+b)} < 1.$$

Ainsi, le point d'équilibre sans maladie  $\Sigma_0$  est localement asymptotiquement stable.

ii) Pour  $\tau > 0$ , on utilise le théorème de Routh, nous devons donc prouver que toutes les racines de l'équation caractéristique (2.47) ne peuvent pas couper l'axe imaginaire, c'est-à-dire que l'équation caractéristique ne peut pas avoir de racines imaginaires pures.

On suppose l'inverse, c'est-à-dire qu'il existe  $w \in \mathbb{R}$  tel que  $y = wi$  est une solution de (2.47).

En remplaçant  $y$  dans le quatrième terme de (2.47), on obtient

$$-w^2 + (\delta + 2b + \gamma)wi + (\delta+b)(\gamma+b) - \frac{\beta\gamma b}{\alpha+u+b} (\cos(\tau w) - i \sin(\tau w)) = 0. \quad (2.49)$$

alors

$$\begin{cases} -w^2 + (\delta+b)(\gamma+b) = \frac{\beta\gamma b}{\alpha+u+b} \cos(\tau w), \\ (\delta+2b+\gamma)w = -\frac{\beta\gamma b}{\alpha+u+b} \sin(\tau w). \end{cases} \quad (2.50)$$

En additionnant les carrés des deux équations et en utilisant la formule trigonométrique fondamentale, on obtient

$$w^4 + ((\delta+b)^2 + (\gamma+b)^2)w^2 + (\delta+b)^2(\gamma+b)^2 - \left( \frac{\beta\gamma b}{\alpha+u+b} \right)^2 = 0, \quad (2.51)$$

ce qui est équivalent à

$$w^2 = \frac{1}{2} \sqrt{((\delta+b)^2 - (\gamma+b)^2)^2 + 4 \left( \frac{\beta\gamma b}{\alpha+u+b} \right)^2} - \frac{1}{2} ((\delta+b)^2 + (\gamma+b)^2). \quad (2.52)$$

Si  $R_0 < 1$ , alors  $(\delta + b)^2 (\gamma + b)^2 - \left( \frac{\beta \gamma b}{\alpha + u + b} \right)^2 > 0$ , et

$$\left( (\delta + b)^2 + (\gamma + b)^2 \right)^2 - 4 \left( (\delta + b)^2 (\gamma + b)^2 - \left( \frac{\beta \gamma b}{\alpha + u + b} \right)^2 \right) < \left( (\delta + b)^2 + (\gamma + b)^2 \right)^2,$$

donc

$$\sqrt{\left( (\delta + b)^2 - (\gamma + b)^2 \right)^2 + 4 \left( \frac{\beta \gamma b}{\alpha + u + b} \right)^2} < (\delta + b)^2 + (\gamma + b)^2.$$

Par conséquent, nous avons  $w^2 < 0$ , ce qui est une contradiction.

Par conséquent, nous avons prouvé que si  $R_0 < 1$ , alors l'équation caractéristique (2.47) ne peut pas avoir de racines imaginaires pures et l'équilibre sans maladie  $\Sigma_0$  est localement asymptotiquement stable pour tout  $\tau > 0$ .

iii) Supposons maintenant que  $R_0 > 1$ . Nous savons que l'équation caractéristique (2.47) a trois racines négatives réelles

$$y_1 = -b, \quad y_2 = -\alpha - u - b \quad \text{et} \quad y_3 = -\lambda - b.$$

Ainsi, nous devons vérifier si les racines restantes de

$$q^*(y) := y^2 + \Gamma_1 y + \Gamma_2(y) \tag{2.53}$$

ont des parties réelles négatives. Il est facile de voir que  $q(0) = \Gamma_2(0) < 0$ , car  $R_0 > 1$ .

D'autre part

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} q^*(y) = +\infty.$$

Par conséquent, par continuité de  $q(y)$ , il existe au moins une racine positive de l'équation caractéristique (2.47). Ainsi, nous concluons que le point d'équilibre  $\Sigma_0$  est instable.  $\square$

# Chapitre 3

## Algorithme à direction hybride pour la résolution des problèmes linéaires de contrôle optimal

### 3.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter un algorithme basé sur la direction hybride pour la résolution des problèmes de contrôle optimal linéaire. D'une façon analogue à [13], nous définissons une estimation d'optimalité et nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour caractériser l'optimalité d'une certaine commande admissible du problème.

Le chapitre est organisé comme suit : dans la section 3.2, nous présentons le problème et nous donnons quelques définitions. Dans la section 3.3, nous présentons le principe de l'algorithme proposé et finalement nous donnons un exemple numérique pour illustrer notre approche.

### 3.2. Problème de contrôle optimal

#### 3.2.1 Présentation du problème

On considère le problème terminal de contrôle optimal suivant :

$$\max_u J(u) = c^T x(t_1), \quad (3.1)$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \quad x(t_0) = x^0, \quad (3.2)$$

$$Hx(t_1) = g, \quad (3.3)$$

$$f_* \leq u(t) \leq f^*, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (3.4)$$

où  $J(u)$  est le critère de qualité,  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  est la matrice dynamique du système,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état du problème,  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  étant l'état initial du problème,  $b \in \mathbb{R}^n$ ,  $H \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$  est une matrice de rang  $m \leq n$ ,  $g \in \mathbb{R}^m$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}$  est une commande constante par morceaux, bornée par  $f_*$ ,  $f^* \in \mathbb{R}$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$  et  $T$  est un intervalle de temps fixe.

**Définition 3.1.** Toute commande vérifiant les contraintes :

$$f_* \leq u(t) \leq f^*, \quad t \in T, \quad Hx(t_1) = g,$$

est dite commande admissible du problème (3.1)-(3.4).

**Définition 3.2.** Une commande admissible  $u^* = (u^*(t), t \in T)$  est dite optimale si :

$$J(u^*) = \max_u J(u),$$

où  $u$  parcourt l'ensemble des commandes admissibles.

D'autre part, une commande admissible  $u^\varepsilon$  est dite  $\varepsilon$ -optimale ou suboptimale si

$$J(u^*) - J(u^\varepsilon) \leq \varepsilon,$$

où  $\varepsilon \geq 0$  est choisi à l'avance.

L'objectif du problème est la détermination d'une commande admissible  $u^*(t), t \in T$ , qui avec la trajectoire correspondante  $x^*(t), t \in T$ , maximise le critère de qualité :

$$J(u^*) = \max_u J(u) = \max_u c^T x(t_1) = c^T x^*(t_1).$$

La solution du système (3.2) est donnée par

$$x(t) = F(t) \left( x^0 + \int_{t_0}^t F^{-1}(\tau) bu(\tau) d\tau \right), \quad t \in T, \quad (3.5)$$

où  $F(t), t \in T$ , est la solution de l'équation différentielle matricielle suivante :

$$\begin{cases} \dot{F}(t) = AF(t), \\ F(t_0) = I_n, \quad t \in T, \end{cases}$$

où  $I_n$  représente la matrice d'identité d'ordre  $n$ .

En remplaçant l'expression (3.5) pour  $t = t_1$  dans le problème (3.1)-(3.4), on trouve

$$J(u) = c^T x(t_1) = c^T F(t_1)x^0 + \int_{t_0}^{t_1} c^T F(t_1)F^{-1}(t)bu(t)dt,$$

$$HF(t_1)x^0 + \int_{t_0}^{t_1} HF(t_1)F^{-1}(t)bu(t)dt = g.$$

Si l'on pose

$$C(t) = c^T F(t_1)F^{-1}(t)b,$$

$$\phi(t) = HF(t_1)F^{-1}(t)b,$$

$$g_0 = g - HF(t_1)x^0,$$

on aura alors le problème équivalent suivant :

$$\begin{cases} \max_u J(u) = c^T F(t_1)x^0 + \int_{t_0}^{t_1} C(t)u(t)dt, \\ \int_{t_0}^{t_1} \phi(t)u(t)dt = g_0, \\ f_* \leq u(t) \leq f^*, t \in T = [t_0, t_1]. \end{cases} \quad (3.6)$$

### 3.2.2 Discrétisation du problème initial

On choisit un sous-ensemble d'instant

$$T_h = \{t_0, t_0 + h, \dots, t_1 - h\},$$

où  $h = \frac{t_1 - t_0}{N}$ , et  $N \in \mathbb{N}^*$ . Faisons une discrétisation de la fonction  $u(t)$ ,  $t \in T$  :

$$u(t) \equiv u(\tau), t \in [\tau, \tau + h], \tau \in T_h.$$

En utilisant cette discrétisation, le problème (3.6) devient :

$$\begin{cases} \max_u J(u) = c^T F(t_1)x^0 + \sum_{\tau \in T_h} q(\tau)u(\tau), \\ \sum_{\tau \in T_h} d(\tau)u(\tau) = g_0, \\ f_* \leq u(\tau) \leq f^*, \tau \in T_h, \end{cases} \quad (3.7)$$

où

$$q(\tau) = \int_{\tau}^{\tau+h} C(s)ds \quad \text{et} \quad d(\tau) = \int_{\tau}^{\tau+h} \phi(s)ds. \quad (3.8)$$

### 3.2.3 Commande de support

L'ensemble  $T_B = \{\tau_i, i = \overline{1, m}\} \subset T_h$ , est dit support si la matrice correspondante  $P_B \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$  est inversible, où

$$P_B = (d(\tau), \tau \in T_B). \quad (3.9)$$

Le couple  $\{u, T_B\}$  formé de la commande admissible  $u$  et du support  $T_B$  est appelé commande de support du problème (3.7). Cette dernière est dite non dégénérée si  $f_* < u(\tau) < f^*$ ,  $\tau \in T_B$ .

### 3.2.4 Formule d'accroissement de la fonctionnelle

Soient  $\{u, T_B\}$  une commande de support et  $x(t)$ ,  $t \in T$ , sa trajectoire correspondante. En utilisant le support  $T_B$ , on construit le vecteur des potentiels  $\nu \in \mathbb{R}^m$  :

$$\nu^T = q_B^T P_B^{-1}, \quad (3.10)$$



où

$$q_B^T = (q(\tau), \tau \in T_B),$$

ainsi que la cocommande  $E(\tau)$ ,  $\tau \in T_h$  :

$$E(\tau) = \nu^T d(\tau) - q(\tau). \quad (3.11)$$

Considérons une autre commande admissible quelconque  $\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$ ,  $t \in T$ , et la trajectoire correspondante  $\bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t)$ ,  $t \in T$ . L'accroissement de la fonctionnelle [23] dans (3.7) est donné par

$$\Delta J(u) = J(\bar{u}) - J(u) = - \sum_{\tau \in T_N} E(\tau) \Delta u(\tau), \quad T_N = T_h \setminus T_B.$$

Le théorème suivant donne la condition nécessaire et suffisante d'optimalité d'une commande admissible  $u$  dans le problème (3.7) :

**Théorème 3.1.** [21] *Les relations suivantes :*

$$\begin{cases} E(\tau) \geq 0, & \text{si } u(\tau) = f_*, \\ E(\tau) \leq 0, & \text{si } u(\tau) = f^*, \\ E(\tau) = 0, & \text{si } f_* < u(\tau) < f^*, \tau \in T_N, \end{cases}$$

*sont suffisantes, et dans le cas de la non-dégénérescence de la commande de support  $\{u, T_B\}$  aussi nécessaires, pour l'optimalité de la commande admissible  $u$ .*

### 3.3. Une itération de l'algorithme à direction hybride pour les problèmes de contrôle optimal (ADHC)

Soient  $\{u, T_B\}$  une commande de support pour le problème (3.7) et  $\eta \in [0, 1]$ . Nous définissons les ensembles suivantes :

$$\begin{aligned} T_N^+ &= \{\tau \in T_N : E(\tau) > \eta(u(\tau) - f_*)\}, \\ T_N^- &= \{\tau \in T_N : E(\tau) < \eta(u(\tau) - f^*)\}, \\ T_N^{P+} &= \{\tau \in T_N : 0 < E(\tau) \leq \eta(u(\tau) - f_*)\}, \\ T_N^{P-} &= \{\tau \in T_N : \eta(u(\tau) - f^*) \leq E(\tau) < 0\}, \\ T_N^{P0} &= \{\tau \in T_N : E(\tau) = 0\}, \\ T_N^P &= T_N^{P+} \cup T_N^{P-} \cup T_N^{P0} \\ &= \{\tau \in T_N : \eta(u(\tau) - f^*) \leq E(\tau) \leq \eta(u(\tau) - f_*)\}. \end{aligned}$$

Alors

$$T_h = T_N^+ \cup T_N^- \cup T_N^P \cup T_B.$$

Nous appelons estimation d'optimalité, la quantité  $\gamma(\eta, u, T_B)$  définie par :

$$\begin{cases} \sum_{\tau \in T_N^+} E(\tau)(u(\tau) - f_*) + \sum_{\tau \in T_N^-} E(\tau)(u(\tau) - f^*) + \frac{1}{\eta} \sum_{\tau \in T_N^{P^+} \cup T_N^{P^-}} E^2(\tau), & \text{si } \eta \in ]0, 1], \\ \beta(u, T_B), & \text{si } \eta = 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Rappelons que l'estimation de suboptimalité  $\beta(u, T_B)$  est donnée par la formule suivante [21] :

$$\beta(u, T_B) = \sum_{\tau \in T^+} E(\tau)(u(\tau) - f_*) + \sum_{\tau \in T^-} E(\tau)(u(\tau) - f^*),$$

où

$$T^+ = T_N^+ \cup T_N^{P^+} \quad \text{et} \quad T^- = T_N^- \cup T_N^{P^-}.$$

**Remarque 3.1.** Lorsque  $\eta \rightarrow 0$ , on aura  $T_N^{P^+} = T_N^{P^-} = \emptyset$ . Donc :

$$T_N^P = T_N^{P_0},$$

$$T_N^+ = \{t \in T : E(t) > 0\},$$

$$T_N^- = \{t \in T : E(t) < 0\},$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \gamma(\eta, u, T_B) = \beta(u, T_B).$$

**Théorème 3.2.** (Condition nécessaire et suffisante d'optimalité [13])

Soient  $\{u, T_B\}$  une commande de support pour le problème (3.7) et  $\eta \in ]0, 1]$ . Alors la condition  $\gamma(\eta, u, T_B) = 0$  est suffisante et, dans le cas de la non-dégénérescence de  $\{u, T_B\}$  aussi nécessaire, pour l'optimalité de la commande admissible  $u$ .

**Démonstration. Suffisance :**

Soient  $\{u, T_B\}$  une commande de support pour le problème (3.7) et  $\eta \in ]0, 1]$ .

Si  $\gamma(\eta, u, T_B) = 0$ , alors on aura

$$\sum_{t \in T_N^+} E(t)(u(t) - f_*) = 0, \quad \sum_{t \in T_N^-} E(t)(u(t) - f^*) = 0, \quad \frac{1}{\eta} \sum_{t \in T_N^{P^+} \cup T_N^{P^-}} E^2(t) = 0.$$

Si  $t \in T_N^+$ , on a  $E(t) > 0$ , alors  $u(t) = f_*$ ,  $\forall t \in T_N^+$ .

Si  $t \in T_N^-$ , on a  $E(t) < 0$ , alors  $u(t) = f^*$ ,  $\forall t \in T_N^-$ .

De plus,  $\frac{1}{\eta} \sum_{t \in T_N^{P^+} \cup T_N^{P^-}} E^2(t) = 0 \Rightarrow T_N^{P^+} = T_N^{P^-} = \emptyset \Rightarrow T_N^P = T_N^{P_0}$ ,

et d'après le critère d'optimalité (Théorème (3.1)) la commande de support  $\{u, T_B\}$  est optimale.

**Nécessité :**

On suppose que  $\{u, T_B\}$  est une commande de support optimale non-dégénérée. D'après le critère d'optimalité (Théorème (3.1)), on déduit que

$$\begin{cases} u(t) = f_*, & \text{pour } E(t) \geq 0, \\ u(t) = f^*, & \text{pour } E(t) \leq 0, \\ f_* < u(t) < f^*, & \text{pour } E(t) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(t) = f_*, & \text{si } t \in T_N^+, \\ u(t) = f^*, & \text{si } t \in T_N^-, \\ T_N^{P^+} = \emptyset \text{ et } T_N^{P^-} = \emptyset. \end{cases}$$

Donc

$$\sum_{t \in T_N^+} E(t)(u(t) - f_*) = 0, \quad \sum_{t \in T_N^-} E(t)(u(t) - f^*) = 0, \quad \frac{1}{\eta} \sum_{t \in T_N^{P+} \cup T_N^{P-}} E^2(t) = 0.$$

Par conséquent  $\gamma(\eta, u, T_B) = 0$ .  $\square$

Soit  $\{u, T_B\}$  une commande de support de départ pour laquelle le critère d'optimalité n'est pas vérifié. Une itération de l'algorithme à direction hybride consiste à passer de  $\{u, T_B\}$  à  $\{\bar{u}, \bar{T}_B\}$ , où  $\bar{u} = u + \theta^0 \Delta u$ . Ce passage se fait en deux étapes :

1. Changement de commande :  $u \rightarrow \bar{u}$ ;
2. Changement de support :  $T_B \rightarrow \bar{T}_B$ .

### 3.3.1 Changement de la commande

Soient  $\{u, T_B\}$  une commande de support pour le problème (3.7) et  $\eta \in [0, 1]$ . On calcule  $\gamma(\eta, u, T_B)$  avec la formule (3.12). Si  $\gamma(\eta, u, T_B) = 0$ , alors la commande de support  $\{u, T_B\}$  est optimale, sinon on procède à son amélioration. Pour cela, on définit la direction admissible  $\Delta u(\tau)$  comme suit :

$$\Delta u(\tau) = \begin{cases} f_* - u(\tau), & \text{pour } \tau \in T_N^+, \\ f^* - u(\tau), & \text{pour } \tau \in T_N^-, \\ \frac{-E(\tau)}{\eta}, & \text{pour } \tau \in T_N^P, \eta \neq 0, \\ 0, & \text{pour } \tau \in T_N^P, \eta = 0, \\ \Delta u_B = (\Delta u(\tau), \tau \in T_B), & \end{cases} \quad (3.13)$$

où

$$\Delta u_B = -P_B^{-1} P_N \Delta u_N, \quad P_N = (d(\tau), \tau \in T_N) \quad \text{et} \quad \Delta u_N = (\Delta u(\tau), \tau \in T_N).$$

Cette direction est dite direction hybride [13]. La direction  $\Delta u(\tau)$  est une direction admissible pour le système (3.7). En effet, pour  $\bar{u}(\tau) = u(\tau) + \theta^0 \Delta u(\tau)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{\tau \in T_h} d(\tau) \bar{u}(\tau) &= \sum_{\tau \in T_h} d(\tau) u(\tau) + \theta^0 \sum_{\tau \in T_h} d(\tau) \Delta u(\tau), \\ &= \sum_{\tau \in T_h} d(\tau) u(\tau) + \theta^0 (P_N \Delta u_N + P_B \Delta u_B), \\ &= \sum_{\tau \in T_h} d(\tau) u(\tau) + \theta^0 (P_N \Delta u_N - P_B P_B^{-1} \cdot P_N \cdot \Delta u_N), \\ &= \sum_{\tau \in T_h} d(\tau) u(\tau), \\ &= g_0. \end{aligned}$$

Dans le but d'améliorer la fonction objectif et tout en restant dans le domaine admissible, on calcule le pas  $\theta^0$  le long de la direction  $\Delta u(\tau)$  de la manière suivante :

$$\theta^0 = \min\{\theta(\tau_1), 1\}, \quad (3.14)$$

où

$$\theta(\tau_1) = \min\{\theta(\tau), \tau \in T_B\}, \text{ avec}$$

$$\theta(\tau) = \begin{cases} \frac{f^* - u(\tau)}{\Delta u(\tau)}, & \text{si } \Delta u(\tau) > 0, \\ \frac{f^* - u(\tau)}{\Delta u(\tau)}, & \text{si } \Delta u(\tau) < 0, \\ \infty, & \text{si } \Delta u(\tau) = 0. \end{cases}$$

Alors la nouvelle commande admissible sera :

$$\bar{u}(\tau) = u(\tau) + \theta^0 \Delta u(\tau), \quad (3.15)$$

où  $\Delta u(\tau)$  et  $\theta^0$  sont définis par les relations (3.13) et (3.14) respectivement.

L'accroissement de la fonction objectif s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta J(u) &= -\theta^0 \sum_{t \in T_N} E(\tau) \Delta u(\tau), \\ &= -\theta^0 \sum_{\tau \in T_N^+} E(\tau) \Delta u(\tau) - \theta^0 \sum_{\tau \in T_N^-} E(\tau) \Delta u(\tau) - \theta^0 \sum_{\tau \in T_N^{p+} \cup T_N^{p-}} E(\tau) \Delta u(\tau), \\ &= \theta^0 \sum_{\tau \in T_N^+} E(\tau)(u(\tau) - f_*) + \theta^0 \sum_{\tau \in T_N^-} E(\tau)(u(\tau) - f^*) + \theta^0 \sum_{\tau \in T_N^{p+} \cup T_N^{p-}} \frac{E^2(\tau)}{\eta}, \\ &= \theta^0 \gamma(\eta, u, T_B) \geq 0. \end{aligned}$$

Alors  $J(\bar{u}) > J(u)$ , pour  $\gamma(\eta, u, T_B) > 0$  et  $\theta^0 > 0$ .

Pour la nouvelle commande admissible  $\bar{u}$ , on définit les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} \bar{T}_N^+ &= \{\tau \in T_N : E(\tau) > \eta(\bar{u}(\tau) - f_*)\}, \\ \bar{T}_N^- &= \{\tau \in T_N : E(\tau) < \eta(\bar{u}(\tau) - f^*)\}, \\ \bar{T}_N^{p+} &= \{\tau \in T_N : 0 < E(\tau) \leq \eta(\bar{u}(\tau) - f_*)\}, \\ \bar{T}_N^{p-} &= \{\tau \in T_N : \eta(\bar{u}(\tau) - f^*) \leq E(\tau) < 0\}, \\ \bar{T}_N^{P0} &= T_N^{P0}, \\ \bar{T}_N^P &= \{\tau \in T_N : \eta(\bar{u}(\tau) - f^*) \leq E(\tau) \leq \eta(\bar{u}(\tau) - f_*)\}, \\ &= \bar{T}_N^{P+} \cup \bar{T}_N^{P-} \cup \bar{T}_N^{P0}. \end{aligned}$$

Alors

$$T_h = \bar{T}_N^+ \cup \bar{T}_N^- \cup \bar{T}_N^P \cup T_B.$$

De plus, on définit la quantité suivante :

$$\bar{\gamma}(\eta, \bar{u}, T_B) = \sum_{\tau \in \bar{T}_N^+} E(\tau)(\bar{u}(\tau) - f_*) + \sum_{\tau \in \bar{T}_N^-} E(\tau)(\bar{u}(\tau) - f^*) + \frac{1}{\eta} \sum_{\tau \in \bar{T}_N^{p+} \cup \bar{T}_N^{p-}} E^2(\tau).$$

**Lemme 3.1.** Soient  $\{u, T_B\}$  une commande de support pour le problème (3.7) et  $\eta \in ]0, 1]$ .

Alors on a :

- i)  $T_N^+ \subset \bar{T}_N^+, T_N^- \subset \bar{T}_N^-, \bar{T}_N^{P+} \subset T_N^{P+}$  et  $\bar{T}_N^{P-} \subset T_N^{P-}$ .  
ii)  $T_N^{P+} = \bar{T}_N^{P+} \cup (\bar{T}_N^+ \setminus T_N^+)$  et  $T_N^{P-} = \bar{T}_N^{P-} \cup (\bar{T}_N^- \setminus T_N^-)$ .

**Lemme 3.2.** [13]

Soient  $\{u, T_B\}$  une commande de support pour le problème (3.7),  $\eta \in ]0, 1]$  et  $\bar{u}$  la nouvelle commande admissible est définie par la relation (3.15). Alors on a :

- i)  $\gamma(\eta, \bar{u}, T_B) = (1 - \theta^0)\gamma(\eta, u, T_B) + \frac{\theta^0}{\eta} \sum_{\tau \in T_N^{P+} \cup T_N^{P-}} E^2(\tau)$ .  
ii)  $\gamma(\eta, u, T_B) \leq \beta(u, T_B)$ ,  $\gamma(\eta, \bar{u}, T_B) \leq \gamma(\eta, u, T_B)$  et  $0 \leq \bar{\gamma}(\eta, \bar{u}, T_B) \leq \gamma(\eta, \bar{u}, T_B)$ .

**Théorème 3.3.** (Condition suffisante d'optimalité de  $\bar{u}(t)$  [13]) Soient  $\{u, T_B\}$  une commande de support pour le problème (3.7) et  $\eta \in ]0, 1]$ . La nouvelle commande admissible  $\bar{u}$ , définie par la relation (3.15), est optimale si  $\gamma(\eta, \bar{u}, T_B) = 0$ .

**Corollaire 3.1.** Si  $\theta^0 = 1$  et  $T_N^{P+} \cup T_N^{P-} = \emptyset$ , alors  $\bar{u}$  est optimale.

*Démonstration.* Si  $\theta^0 = 1$  et  $T_N^{P+} \cup T_N^{P-} = \emptyset$ , on aura alors :

$$\gamma(\eta, \bar{u}, T_B) = (1 - \theta^0)\gamma(\eta, u, T_B) + \frac{\theta^0}{\eta} \sum_{t \in T_N^{P+} \cup T_N^{P-}} E^2(t) = 0.$$

Donc  $\bar{u}(t)$  est optimale. □

### 3.3.2 Changement de support

Si pour la commande de support  $\{\bar{u}, T_B\}$  du système (3.7), on a  $\bar{\gamma}(\eta, \bar{u}, T_B) \neq 0$ , alors on change  $T_B$  en  $\bar{T}_B$  par la méthode duale. On calcule le vecteur  $\omega$  et le nombre  $\alpha_0$  comme suit :

$$\omega(\tau) = u(\tau) + \Delta u(\tau), \tau \in T_h, \text{ et } \alpha_0 = \omega(\tau_1) - \bar{u}(\tau_1).$$

La nouvelle cocommande sera alors donnée par :

$$\bar{E}(\tau) = E(\tau) + \sigma^0 \delta(\tau), \tau \in T_h,$$

et  $\delta(\tau)$  est la direction duale et  $\sigma^0$  le pas dual, avec

$$\delta(\tau) = \begin{cases} 0, & \text{si } \tau \in T_B \setminus \tau_1, \\ +1, & \text{si } \alpha_0 > 0, \tau = \tau_1, \\ -1, & \text{si } \alpha_0 < 0, \tau = \tau_1, \\ \delta_B^T P_B^{-1} d(\tau), \delta_B^T = (\delta(\tau), \tau \in T_B), & \text{pour } \tau \in T_N, \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\sigma^0 = \sigma(\tau_0) = \min_{\tau \in T_N} \sigma(\tau), \quad (3.17)$$

où

$$\sigma(\tau) = \begin{cases} \frac{-E(\tau)}{\delta(\tau)}, & \text{si } E(\tau)\delta(\tau) < 0, \\ 0, & \text{si } E(\tau) = 0, \delta(\tau) < 0, \omega(\tau) \neq f^*, \\ 0, & \text{si } E(\tau) = 0, \delta(\tau) > 0, \omega(\tau) \neq f^*, \\ +\infty, & \text{si } E(\tau)\delta(\tau) > 0, \tau \in T_N. \end{cases}$$

On obtient alors le nouveau support suivant :

$$\bar{T}_B = (T_B \setminus \{\tau_1\}) \cup \{\tau_0\}.$$

L'estimation d'optimalité pour la commande de support  $\{\bar{u}, \bar{T}_B\}$ , est

$$\gamma(\eta, \bar{u}, \bar{T}_B) = (1 - \theta^0)\gamma(\eta, \bar{u}, T_B) - \alpha\sigma^0,$$

où

$$\alpha = |\omega(\tau_1) - \bar{u}(\tau_1)|.$$

### 3.3.3 Schéma de l'algorithme à direction hybride

Soient  $\{u, T_B\}$  une commande de support pour le problème (3.7) et  $\eta$  un nombre réel tel que  $\eta \in [0, 1]$ . Le schéma de la méthode adaptée à direction hybride pour la résolution du problème de contrôle optimal linéaire est décrit dans les étapes suivantes :

#### Algorithme 3.1.

- (1) Calculer  $d(\tau)$ ,  $q(\tau)$ ,  $P_B$ ,  $v^T$ ,  $E(\tau)$  avec les relations (3.8)~(3.11);
- (2) Calculer les ensembles  $T_N^+$ ,  $T_N^-$ ,  $T_N^{P+}$  et  $T_N^{P-}$  ;
- (3) Calculer  $\gamma(\eta, u, T_B)$  avec la formule (3.12);
- (4) Si  $\gamma(\eta, u, T_B) = 0$ , alors l'algorithme s'arrête avec  $\{u, T_B\}$ , une commande de support optimale ;
- (5) Calculer la direction d'amélioration  $\Delta u(\tau)$  en utilisant les relations (3.13);
- (6) Calculer  $\theta(\tau_1) = \min_{\tau \in T_B} \theta(\tau)$ , où  $\theta(\tau)$  est déterminé par la formule (3.14);
- (7) Calculer  $\theta^0 = \min\{1, \theta(\tau_1)\}$ ,  $\bar{u}(\tau) = u(\tau) + \theta^0 \Delta u(\tau)$ ,  $\tau \in T_h$ , et  $J(\bar{u}) = J(u) + \theta^0 \gamma(\eta, u, T_B)$ ;
- (8) Si  $\theta^0 = 1$ , alors
  - (8.1) si  $T_N^{P+} \cup T_N^{P-} = \emptyset$ , alors d'après le corollaire (3.1),  $\bar{u}(\tau)$  est optimale. Stop.
  - (8.2) sinon, poser  $\eta = \frac{\eta}{2}$ ,  $u(\tau) = \bar{u}(\tau)$ ,  $J(u) = J(\bar{u})$  et aller à l'étape (2).
- (9) Déterminer  $\tau_1$  en utilisant la relation (3.14);
- (10) Calculer la direction duale  $\delta(\tau)$ ,  $\tau \in T_h$ , en utilisant les relations (3.16);
- (11) Calculer le pas dual  $\sigma^0$  et déterminer  $\tau_0$  en utilisant la relation (3.17);
- (12) Poser  $\bar{E}(\tau) = E(\tau) + \sigma^0 \delta(\tau)$ ,  $\tau \in T_h$ ,  $\bar{T}_B = (T_B \setminus \{\tau_1\}) \cup \{\tau_0\}$ ;
- (13) Poser  $u(\tau) = \bar{u}(\tau)$ ,  $T_B = \bar{T}_B$ ,  $J(u) = J(\bar{u})$ ,  $E(\tau) = \bar{E}(\tau)$  et aller à l'étape (2).

### 3.4. Exemple numérique

On considère le problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} J(u) = c^T x(2) \rightarrow \max_u, \\ \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), x(0) = 0, \\ Hx(2) = g, \\ -1 \leq u(t) \leq 1, t \in T = [0, 2], \end{cases} \quad (3.18)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b^T = (0, 1), H = (1, -2), g = \frac{1}{2}, c^T = (0, 1).$$

On a

$$F(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, F^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C(t) = c^T F(2) F^{-1}(t) b = 1, \phi(t) = HF(2)F^{-1}(t)b = -t.$$

Soit la commande admissible

$$u(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } t \in [0, 1[, \\ -\frac{1}{2}, & \text{si } t \in [1, 2]. \end{cases}$$

La trajectoire correspondante est

$$x(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{t^2}{4} \\ \frac{t}{2} \end{pmatrix}, & \text{si } t \in [0, 1[, \\ \begin{pmatrix} \frac{-t^2}{4} + t - \frac{1}{2} \\ \frac{-t}{2} + 1 \end{pmatrix}, & \text{si } t \in [1, 2]. \end{cases}$$

On choisit  $h = 0.5$ ,  $\eta = 1$ . On prend  $T_B = \{1\}$  et on obtient la commande de support initiale  $\{u, T_B\}$  pour le problème (3.18).

#### Itération 1

$$P_B = \int_1^{\frac{3}{2}} -s ds = -\frac{5}{8}, P_B^{-1} = -\frac{8}{5}, q_B = \int_1^{\frac{3}{2}} ds = \frac{1}{2},$$

$$\nu^T = \frac{1}{2} \cdot \frac{-8}{5} = -\frac{4}{5}, E(\tau) = \frac{2}{5}(\tau - 1),$$

$$T_N = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\},$$

$$T_N^+ = \left\{\tau \in T_N : \frac{2}{5}(\tau - 1) > (u(\tau) + 1)\right\} = \emptyset,$$

$$T_N^{P^+} = \left\{\tau \in T_N : 0 < \frac{2}{5}(\tau - 1) \leq (u(\tau) + 1)\right\} = \left\{\frac{3}{2}\right\},$$

$$T_N^- = \left\{\tau \in T_N : \frac{2}{5}(\tau - 1) < (u(\tau) - 1)\right\} = \emptyset,$$

$$T_N^{P^-} = \left\{\tau \in T_N : (u(\tau) - 1) \leq \frac{2}{5}(\tau - 1) < 0\right\} = \left\{0, \frac{1}{2}\right\}.$$

Calcul de l'estimation d'optimalité :

$$\gamma(\eta, u, T_B) = \gamma(1, u, 1) = E^2(0) + E^2(0.5) + E^2(1.5) = \frac{6}{25},$$

alors la commande  $u$  n'est pas optimale.

Changement de la commande :

Calcul de la direction  $\Delta u(\tau)$  :

$$\Delta u(\tau) = \begin{cases} +\frac{2}{5}, & \text{si } \tau = 0, \\ +\frac{1}{5}, & \text{si } \tau = \frac{1}{2}, \\ +\frac{2}{25}, & \text{si } \tau = 1, \\ -\frac{1}{5}, & \text{si } \tau = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Calcul du pas le long de la direction  $\Delta u(\tau)$  :

On a  $\Delta u(1) = \frac{2}{25}$ , alors  $\theta(\tau_1) = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{2}{25}} = \frac{75}{4}$ . Donc  $\theta^0 = 1$ .

Calcul de la nouvelle commande :

$$\bar{u}(\tau) = \begin{cases} +\frac{9}{10}, & \text{si } \tau = 0, \\ +\frac{7}{10}, & \text{si } \tau = \frac{1}{2}, \\ -\frac{21}{50}, & \text{si } \tau = 1, \\ -\frac{7}{10}, & \text{si } \tau = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Calcul de l'estimation d'optimalité :

$$\gamma(\eta, \bar{u}, T_B) = E^2(0) + E^2\left(\frac{1}{2}\right) + E^2\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{6}{25}.$$

On a  $\theta^0 = 1$  et  $T_N^{P+} \cup T_N^{P-} \neq \emptyset$ , alors on pose  $\eta = 0$ ,  $E(\tau) = \frac{2}{5}(\tau - 1)$ ,  $u(\tau) = \bar{u}(\tau)$ .

**Itération 02**

$$T^+ = \left\{ \tau \in T_N : \frac{2}{5}(\tau - 1) > 0 \right\} = \left\{ \frac{3}{2} \right\},$$

$$T^- = \left\{ \tau \in T_N : \frac{2}{5}(\tau - 1) < 0 \right\} = \left\{ 0, \frac{1}{2} \right\}.$$

Calcul de l'estimation de suboptimalité :

$$\begin{aligned} \beta(u, T_B) &= \sum_{\tau \in T^+} E(\tau)(u(\tau) - f_*) + \sum_{\tau \in T^-} E(\tau)(u(\tau) - f^*) \\ &= E(1.5)(u(1.5) + 1) + E(0)(u(0) - 1) + E(0.5)(u(0.5) - 1) = \frac{2}{5} = \frac{10}{25}. \end{aligned}$$

Changement de la commande :

Calcul de la direction  $\Delta u(\tau)$  :

$$\Delta u(\tau) = \begin{cases} +\frac{1}{10}, & \text{si } \tau = 0, \\ +\frac{3}{10}, & \text{si } \tau = \frac{1}{2}, \\ +\frac{11}{50}, & \text{si } \tau = 1, \\ -\frac{3}{10}, & \text{si } \tau = \frac{3}{2}. \end{cases}$$



Calcul du pas le long de la direction  $\Delta u(\tau)$  :

On a  $\Delta u(1) = \frac{11}{50}$ , alors  $\theta(\tau_1) = \frac{1 + \frac{21}{50}}{\frac{11}{50}} = \frac{71}{11}$ . Donc  $\theta^0 = 1$ .

Calcul de la nouvelle commande :

$$\bar{u}(\tau) = \begin{cases} +1, & \text{si } \tau = 0, \\ +1, & \text{si } \tau = \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{5}, & \text{si } \tau = 1, \\ -1, & \text{si } \tau = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Calcul de l'estimation de suboptimalité :

$$\begin{aligned} \beta(\bar{u}, T_B) &= \sum_{\tau \in T^+} E(\tau)(u(\tau) - f_*) + \sum_{\tau \in T^-} E(\tau)(u(\tau) - f^*) \\ &= E(1.5)(u(1.5) + 1) + E(0)(u(0) - 1) + E(0.5)(u(0.5) - 1) = 0. \end{aligned}$$

Alors la commande

$$u^0(\tau) = \begin{cases} +1, & \text{si } \tau = 0, \\ +1, & \text{si } \tau = \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{5}, & \text{si } \tau = 1, \\ -1, & \text{si } \tau = \frac{3}{2}, \end{cases}$$

est optimale, avec  $J(u^0) = \frac{2}{5}$ . Par conséquent, la commande

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in [0, 1[, \\ -\frac{1}{5}, & \text{si } t \in [1, \frac{3}{2}[, \\ -1, & \text{si } t \in [\frac{3}{2}, 2], \end{cases}$$

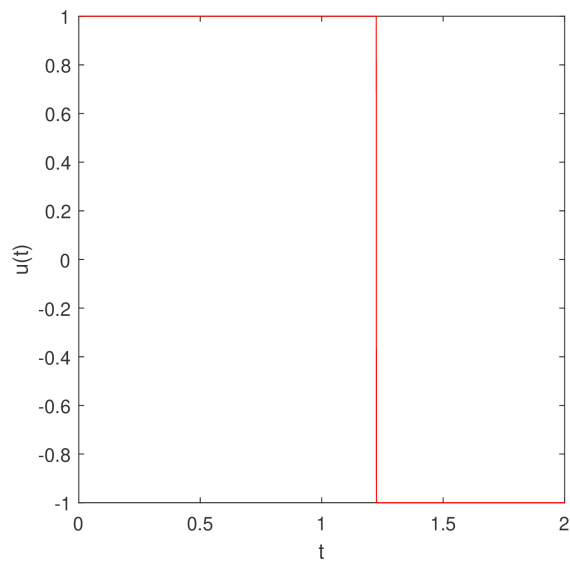
est une solution optimale approchée du problème non discrétisé (3.18).

Afin de trouver une bonne solution approximative pour le problème continu original (3.18), nous avons implémenté la technique de discrétisation en utilisant la formule de Cauchy et l'algorithme de direction hybride avec MATLAB R2018a. Le programme développé a été testé sur un ordinateur pro 2, avec 4GO de mémoire et processeur Intel(R) Core(TM) i5-4300U CPU 1,90 GHz 2,50 GHz, fonctionnant sous Microsoft Windows 10. L'approche d'initialisation proposée dans [13] peut être utilisée pour calculer une commande de support admissible initiale, cependant, nous avons initialisé l'algorithme de direction hybride avec le contrôle admissible évident suivant

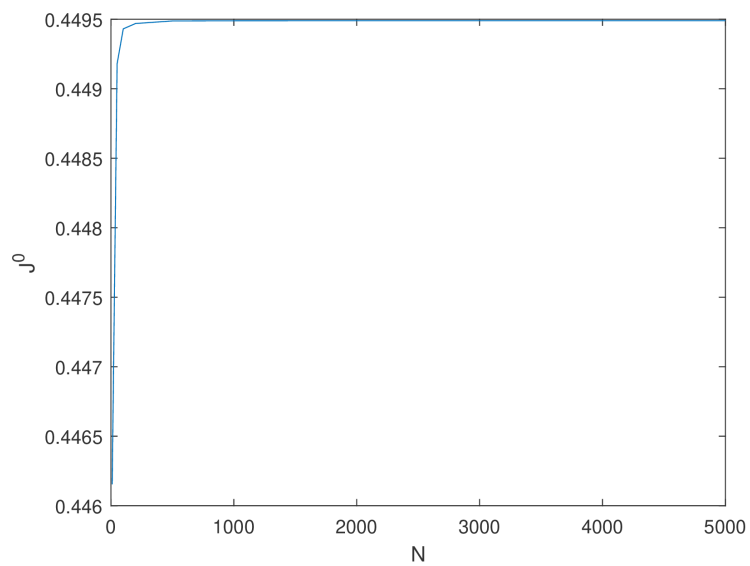
$$u(t) = \begin{cases} +1, & \text{si } t \in [0, 1[, \\ -1, & \text{si } t \in [1, 2]. \end{cases}$$

Dans la table 3.1, nous rapportons les résultats numériques pour différentes valeurs de  $N$ , où  $T_{CPU_1}$ ,  $T_{CPU_2}$ ,  $N_{itr}$  et  $J^0$  représentent respectivement le temps CPU de la phase de discrétisation, le temps d'exécution, le nombre d'itérations de l'algorithme de direction hybride et la valeur optimale du critère de qualité de (3.18).

Nous traçons le contrôle optimal en fonction de  $t$  pour  $N = 5000$  (Figure 3.1) et nous traçons les valeurs optimales de la fonction objectif pour le programme linéaire (3.7) correspondant au problème (3.18) (Figure 3.2).



**FIGURE 3.1.** Contrôle optimal en fonction de  $t$  pour  $N = 5000$ .



**FIGURE 3.2.** Valeur de la fonction objectif  $J^0$  en fonction de  $N$ .

N	$T_{CPU_1}$	$T_{CPU_2}$	$N_{itr}$	$J^0$
10	0.2689	0.0397	9	0.4461538462
50	1.0252	0.0177	38	0.4491803279
100	1.5805	0.0191	71	0.4494308943
200	3.3212	0.0175	134	0.4494693878
500	7.9160	0.0492	320	0.4494877651
1000	16.1820	0.1482	628	0.4494889796
2000	32.6202	0.5174	1243	0.4494895876
3000	47.3245	1.0210	1856	0.4494897052
5000	80.9802	3.2498	3082	0.4494897273

**TABLE 3.1.** Résultats de simulation numérique pour le problème (3.18).

Notons que pour les grandes valeurs de  $N$ , notre méthode converge vers la valeur optimale du problème continu d'origine, avec  $J^* = 0.4495$ .

### 3.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons appliqué l'algorithme à direction hybride développé dans [13] pour trouver une solution optimale approchée à un problème linéaire de contrôle optimal. Un exemple numérique a été résolu pour illustrer l'approche proposée. Dans le futur, nous allons comparer notre approche avec les approches classiques sur des problèmes de contrôle optimal pratiques.

# Chapitre 4

## Contrôle optimal pour limiter la propagation du Covid-19

### 4.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous modifions le modèle analysé dans [41] afin de considérer les problèmes de contrôle optimal. Plus précisément, nous introduisons trois variables de contrôle et les combinons avec les principaux paramètres du modèle de [41]. Deuxièmement, nous analysons un problème concret de contrôle optimal, en le résolvant par le principe du minimum de Pontryaguine [42]. De plus, nous effectuons des simulations numériques de la propagation du Covid-19 sur des données italiennes.

L'objectif principal de notre contribution est d'inclure des mesures de contrôle qui nous permettent d'interférer avec la réalité. De plus, nous voulons illustrer la validité du modèle dans un contexte différent. Pour cette raison, nous avons pris en compte les données réelles de Covid-19 en provenance d'Italie au lieu de la Chine.

### 4.2. Modèle généralisé de type SEIR

Le modèle classique SEIR comprend quatre compartiments :

1.  $S(t)$  individus susceptibles ;
2.  $E(t)$  individus exposés ;
3.  $I(t)$  individus infectés ;
4.  $R(t)$  individus rétablis.

Ce modèle SEIR est trop simpliste pour décrire l'épidémie de Covid-19. Afin de décrire la réalité, il y a des nouvelles classes qui doivent être incluses, par exemple, les individus décès ( $D(t)$ ) et les individus en quarantaine ( $Q(t)$ ).

Un modèle généralisé de type SEIR pour Covid-19 est proposé par Peng et al. [41], s'expri-

mant par un système dynamique à sept dimensions comme suit :

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = -\frac{\beta S(t)I(t)}{N} - \alpha S(t), \\ \dot{E}(t) = \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - \gamma E(t), \\ \dot{I}(t) = \gamma E(t) - \delta I(t), \\ \dot{Q}(t) = \delta I(t) - \lambda(t)Q(t) - \kappa(t)Q(t), \\ \dot{R}(t) = \lambda(t)Q(t), \\ \dot{D}(t) = \kappa(t)Q(t), \\ \dot{P}(t) = \alpha S(t), \end{cases} \quad (4.1)$$

soumis à des conditions initiales fixes :

$$\begin{aligned} S(0) &= S_0, E(0) = E_0, I(0) = I_0, Q(0) = Q_0, \\ R(0) &= R_0, D(0) = D_0, P(0) = P_0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

où la population  $N$  est divisée en individus susceptibles  $S(t)$ , individus exposés  $E(t)$ , individus infectés  $I(t)$ , individus mis en quarantaine/hospitalisés (confirmés et infectés)  $Q(t)$ , individus rétablis  $R(t)$ , individus décédés  $D(t)$ , et les individus insensibles (population protégée)  $P(t)$ . On considère que la population  $N$  est constante, avec

$$N := S_0 + E_0 + I_0 + Q_0 + R_0 + D_0 + P_0. \quad (4.3)$$

Les paramètres constants  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$  représentent respectivement le taux de protection, le taux d'infection, l'inverse de la phase de latence approximative et le taux auquel les personnes infectieuses entrent en quarantaine, ils ont la dimension du temps<sup>-1</sup> (jour<sup>-1</sup>).

Les taux de récupération  $\lambda$  et de mortalité  $\kappa$  sont des fonctions analytiques dépendantes du temps  $t$ , définies par :

$$\lambda(t) := \frac{\lambda_1}{1 + e^{-\lambda_2(t-\lambda_3)}}, \quad (4.4)$$

et

$$\kappa(t) := \frac{\kappa_1}{e^{\kappa_2(t-\kappa_3)} + e^{-\kappa_2(t-\kappa_3)}}, \quad (4.5)$$

où les paramètres  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ ,  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  et  $\kappa_3$  sont déterminés empiriquement à partir de données réelles. Notons que  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  ont la dimension du temps<sup>-1</sup> (jour<sup>-1</sup>), tandis que  $\lambda_3$  et  $\kappa_3$  ont la dimension du temps (journée).

D'après les équations (4.1) et (4.3), on a :

$$\dot{S}(t) + \dot{E}(t) + \dot{I}(t) + \dot{Q}(t) + \dot{R}(t) + \dot{D}(t) + \dot{P}(t) = 0.$$

**Remarque 4.1.** *Le nombre de reproduction de base est généralement calculé pour les systèmes stationnaires, lorsque la partie droite du système ne dépend pas explicitement du temps  $t$  [5].*

Ici, le système (4.1) dépend de (4.4) et (4.5). Par conséquent, c'est un système non stationnaire. Dans ce cas, nous ne connaissons pas de méthode valable pour calculer le nombre de reproduction de base.

### 4.3. Formulation du problème

Nous introduisons trois commandes dépendant du temps pour le modèle (4.1) de Peng et al. [41] :

1. Une commande  $u_1(t)$  représentant l'effet de la distanciation sociale ;
2. Une commande  $u_2(t)$  représentant l'effet des moyens préventifs ;
3. Une commande  $u_3(t)$  représentant l'effet du traitement.

Mathématiquement, nous avons le système de contrôle suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{S}(t) = -\frac{\beta u_1(t)S(t)I(t)}{N} - (\alpha + u_2(t))S(t), \\ \dot{E}(t) = \frac{\beta u_1(t)S(t)I(t)}{N} - \gamma E(t), \\ \dot{I}(t) = \gamma E(t) - \delta I(t), \\ \dot{Q}(t) = \delta I(t) - (\lambda(t) + u_3(t))Q(t) - \kappa(t)Q(t), \\ \dot{R}(t) = (\lambda(t) + u_3(t))Q(t), \\ \dot{D}(t) = \kappa(t)Q(t), \\ \dot{P}(t) = (\alpha + u_2(t))S(t), \end{array} \right. \quad (4.6)$$

sous les conditions initiales :

$$\begin{aligned} S(0) &= S_0, \quad E(0) = E_0, \quad I(0) = I_0, \quad Q(0) = Q_0, \\ R(0) &= R_0, \quad D(0) = D_0, \quad P(0) = P_0, \end{aligned}$$

Nous appelons le système (4.6) : le modèle de contrôle généralisé de type SEIR. Un diagramme schématique de notre système de contrôle est donné dans la figure 4.1.

### 4.4. Contrôle optimal

On considère le modèle de contrôle généralisé SEIR (4.6) et on formule un problème de contrôle optimal pour déterminer la stratégie  $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ , sur un intervalle fixe du temps  $[0, t_1]$ , qui minimise le coût fonctionnel du type quadratique par rapport à  $u$  :

$$J(u) = \int_0^{t_1} \left( w_1 \frac{\beta u_1 S(t) I(t)}{N} - w_2 R(t) - w_3 P(t) + v_1 \frac{u_1^2}{2} + v_2 \frac{u_2^2}{2} + v_3 \frac{u_3^2}{2} \right) dt, \quad (4.7)$$

où  $t_1$  représente le temps terminal de la période d'étude, les constantes  $w_1$ ,  $w_2$  et  $w_3$  représentent les poids associés au nombre total de nouvelles infections, le nombre d'individus rétablis, le

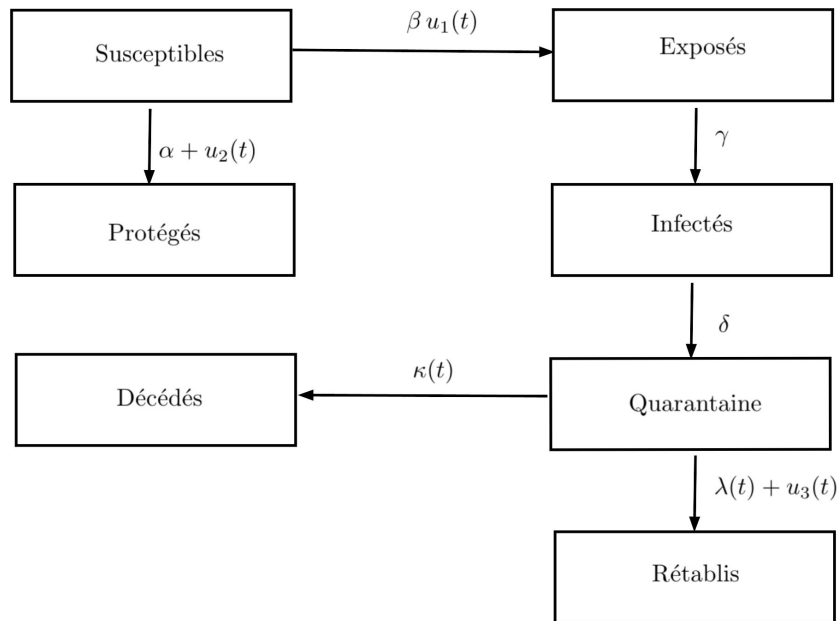


FIGURE 4.1. Schéma du système de contrôle généralisé de type SEIR (4.6).

nombre d'individus insensibles respectivement, les constantes  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_3$  représentent les coûts associés aux commandes  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$  respectivement.

La commande  $u$  est Lebesgue mesurable et bornée :

$$u(t) \in \Gamma := \{ \mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^3 : u_{i \min} \leq \mu_i \leq u_{i \max}, i = 1, 2, 3 \}.$$

Les intervalles  $[u_{i \min}, u_{i \max}]$  traduisent aussi le fait qu'il existe des limites aux effets de la distanciation sociale, les moyens de prévention et de traitement.

Soit

$$x(t) = (x_1(t), \dots, x_7(t)) = (S(t), E(t), I(t), Q(t), R(t), D(t), P(t)) \in \mathbb{R}^7.$$

L'objectif du problème est la détermination d'une commande  $\tilde{u} \in L^1$ ,  $\tilde{u}(t) \in \Gamma$ , qui avec la trajectoire correspondante  $\tilde{x}$ , satisfait le système de contrôle (4.6) et les conditions initiales :

$$x(0) = (S_0, E_0, I_0, Q_0, R_0, D_0, P_0), \quad (4.8)$$

avec

$$\min_{u \in \Gamma} J(u) = J(\tilde{u}).$$

L'existence d'un contrôle optimal  $\tilde{u}$  et de sa trajectoire associée  $\tilde{x}$  provient de la convexité de l'intégrande de la fonctionnelle de coût fonctionnel (4.7) par rapport au contrôle  $u$  et à la propriété lipschitzienne du système d'état par rapport aux variables d'état  $x$  (voir [17] pour l'existence de solutions optimales).

Selon le principe du minimum de Pontryaguine [42], si  $\tilde{u} \in L^1$  est optimal pour le problème (4.6)–(4.8) avec  $t_1$  fixé, alors il existe un vecteur adjoint  $\psi(t)$ ,  $t \in [0, t_1]$  :

$$\psi \in AC([0, t_1]; \mathbb{R}^7), \psi(t) = (\psi_1(t), \dots, \psi_7(t)),$$

tel que

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \psi}, \\ \dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \end{cases}$$

où le Hamiltonien du système est défini par :

$$H(x, u, \psi) = \frac{w_1 u_1 \beta x_1 x_3}{N} - w_2 x_5 - w_3 x_7 + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{u_i^2}{2} + \psi^T \left( Ax + \left( \sum_{i=1}^2 b_i \Lambda_i x \Phi_i + f(x)^T \Phi_3 \right) u \right),$$

où

$$f(x) = (f_1(x) \ f_2(x) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0), \quad f_1(x) = \frac{-\beta x_1 x_3}{N}, \quad f_2(x) = \frac{\beta x_1 x_3}{N},$$

$$b_1 = (-1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)^T, \quad b_2 = (0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0)^T, \quad \Lambda_1 = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0), \quad \Lambda_2 = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0),$$

$$\Phi_1 = (0 \ 1 \ 0), \quad \Phi_2 = (0 \ 0 \ 1), \quad \Phi_3 = (1 \ 0 \ 0),$$

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -\delta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -\lambda(t) - \kappa(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa(t) & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La condition de minimalité :

$$H(\tilde{x}(t), \tilde{\psi}(t), \tilde{u}(t)) = \min_{u \in \Gamma} H(\tilde{x}(t), \tilde{\psi}(t), u) \quad (4.9)$$

tient presque partout sur  $[0, t_1]$ .

De plus, les conditions de transversalité vérifient :

$$\tilde{\psi}_i(t_1) = 0, \quad i = 1, \dots, 7.$$

La résolution de la condition de minimalité (4.9) à l'intérieur de l'ensemble des contrôles admissibles  $\Gamma$  donne :

$$\tilde{u}(t) = \left( \frac{\beta \tilde{x}_1(t) \tilde{x}_3(t) (\tilde{\psi}_1(t) - \tilde{\psi}_2(t) - w_1)}{N v_1}, \frac{\tilde{x}_1(t) (\tilde{\psi}_1(t) - \tilde{\psi}_7(t))}{v_2}, \frac{\tilde{x}_4(t) (\tilde{\psi}_4(t) - \tilde{\psi}_5(t))}{v_3} \right),$$



où les fonctions adjointes satisfont :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\psi}}_1 = -\frac{\tilde{u}_1\beta\tilde{x}_3}{N^2} (\tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 + \tilde{x}_4 + \tilde{x}_5 + \tilde{x}_6 + \tilde{x}_7) (w_1 - \tilde{\psi}_1 + \tilde{\psi}_2) + (\alpha + \tilde{u}_2)(\tilde{\psi}_1 - \tilde{\psi}_7), \\ \dot{\tilde{\psi}}_2 = \frac{\tilde{u}_1\beta\tilde{x}_1\tilde{x}_3}{N^2} (w_1 - \tilde{\psi}_1 + \tilde{\psi}_2) + \gamma(\tilde{\psi}_2 - \tilde{\psi}_3), \\ \dot{\tilde{\psi}}_3 = -\frac{\tilde{u}_1\beta\tilde{x}_1}{N^2} (\tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 + \tilde{x}_4 + \tilde{x}_5 + \tilde{x}_6 + \tilde{x}_7) (w_1 - \tilde{\psi}_1 + \tilde{\psi}_2) + \delta(\tilde{\psi}_3 - \tilde{\psi}_4), \\ \dot{\tilde{\psi}}_4 = \frac{\tilde{u}_1\beta\tilde{x}_1\tilde{x}_3}{N^2} (w_1 - \tilde{\psi}_1 + \tilde{\psi}_2) + \kappa(t)(\tilde{\psi}_4 - \tilde{\psi}_6) + (\lambda(t) + \tilde{u}_3)(\tilde{\psi}_4 - \tilde{\psi}_5), \\ \dot{\tilde{\psi}}_5 = \frac{\tilde{u}_1\beta\tilde{x}_1\tilde{x}_3(w_1 - \tilde{\psi}_1 + \tilde{\psi}_2)}{N^2} + w_2, \\ \dot{\tilde{\psi}}_6 = \frac{\tilde{u}_1\beta\tilde{x}_1\tilde{x}_3(w_1 - \tilde{\psi}_1 + \tilde{\psi}_2)}{N^2}, \\ \dot{\tilde{\psi}}_7 = \frac{\tilde{u}_1\beta\tilde{x}_1\tilde{x}_3(w_1 - \tilde{\psi}_1 + \tilde{\psi}_2)}{N^2} + w_3. \end{cases} \quad (4.10)$$

Les expressions analytiques explicites pour les contrôles  $\tilde{u}_1(t)$ ,  $\tilde{u}_2(t)$  et  $\tilde{u}_3(t)$  sont données par :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(t) &= \frac{\beta\tilde{x}_1(t)\tilde{x}_3(t) (\tilde{\psi}_1(t) - \tilde{\psi}_2(t) - w_1)}{Nv_1}, \\ \tilde{u}_2(t) &= \frac{\tilde{x}_1(t) (\tilde{\psi}_1(t) - \tilde{\psi}_7(t))}{v_2}, \\ \tilde{u}_3(t) &= \frac{\tilde{x}_4(t) (\tilde{\psi}_4(t) - \tilde{\psi}_5(t))}{v_3}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

## 4.5. Résultats numériques pour limiter la propagation de l'épidémie de Covid-19 sur des données italiennes

Notre objectif est de trouver des contrôles optimaux pour limiter la propagation de l'épidémie de Covid-19 sur des données italiennes, en réduisant le nombre de nouvelles infections et en augmentant les individus insensibles et le pourcentage de ceux rétablis, tout en réduisant le coût pendant la période de trois mois à compter du 1<sup>er</sup> septembre 2020.

Tous les calculs numériques ont été effectués dans MATLAB R2019b en utilisant la méthode d'ordre moyen et l'interpolation numérique [46]. Le reste des conditions préliminaires et des données réelles ont été prises et calculées à partir de la base de données [60].

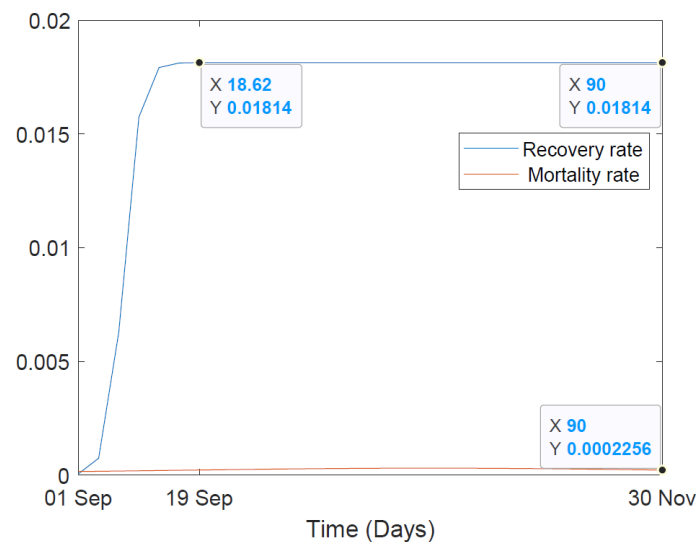
On considère  $w_i = v_i = 1$ ,  $u_{1\min} = 0.1$ ,  $u_{j\min} = 0$  et  $u_{i\max} = 1$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $j = 2, 3$ . Les données réelles de la pandémie de Covid-19 en Italie pour les mois de septembre et octobre 2020, sont résumées en annexe : voir l'annexe A pour les individus rétablis, l'annexe B pour les décès et l'annexe C pour les individus en quarantaine. Les paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$  et  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  ont été adaptés au sens de la méthode des moindres carrés.

Les paramètres initiaux du système (4.1) sont présentés dans la table 4.1. Les paramètres

Paramètre	Valeur initiale	Valeur estimée
$\alpha$	0.06	$1.1775 \times 10^{-7}$
$\beta$	1	3.97
$\gamma$	5	0.0048
$\delta$	0.5	0.1432
$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$	(0.01, 0.1, 10)	(0.0181, 0.8111, 6.9882)
$(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$	(0.001, 0.001, 10)	(0.00062, 0.0233, 54.0351)

**TABLE 4.1.** Les paramètres initiaux du système (4.6).

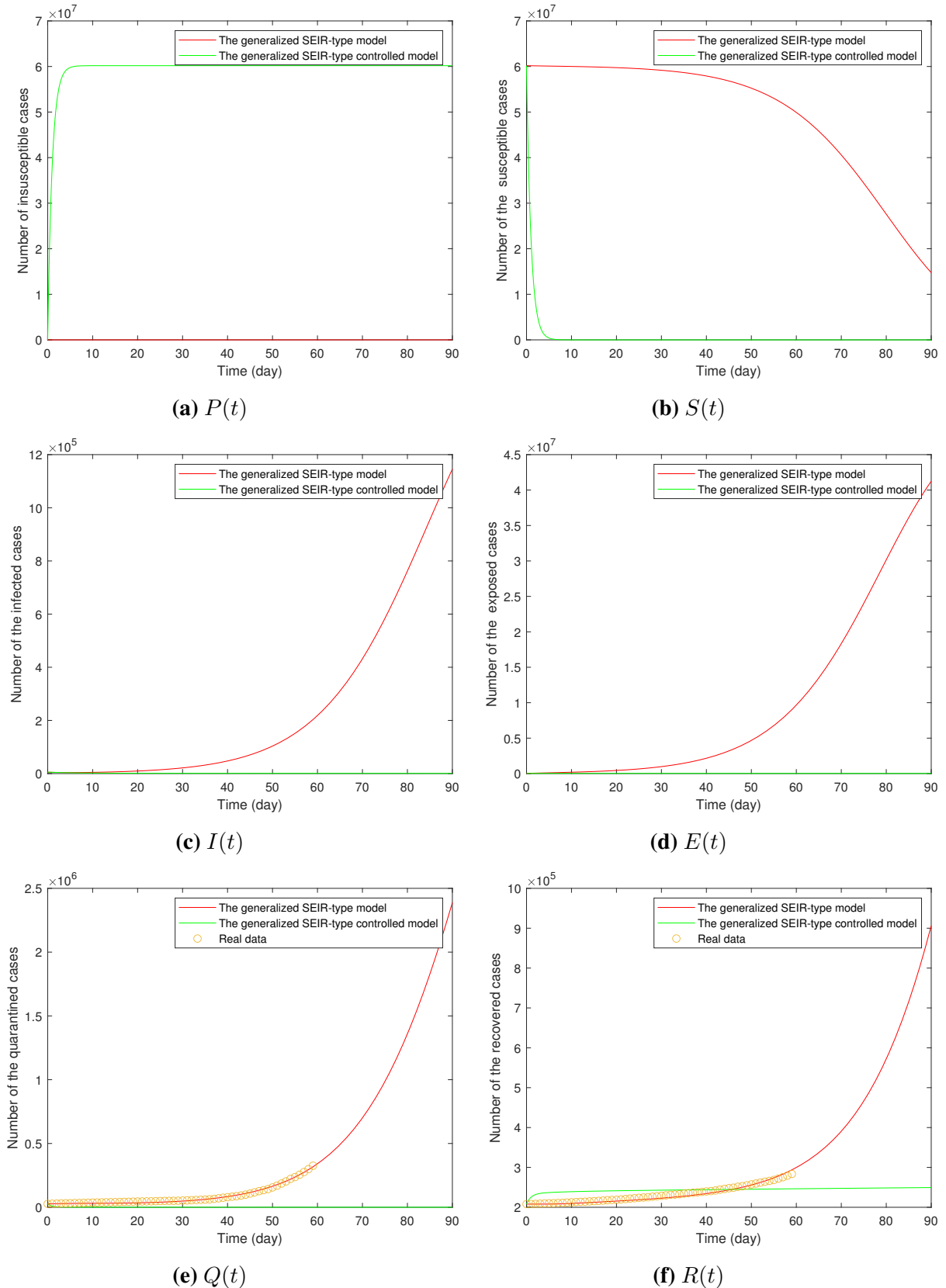
du modèle SEIR généralisé (4.6) ont été calculés simultanément par la méthode des moindres carrés non linéaire [18]. Ces paramètres ont été présentés dans le même tableau 4.1.



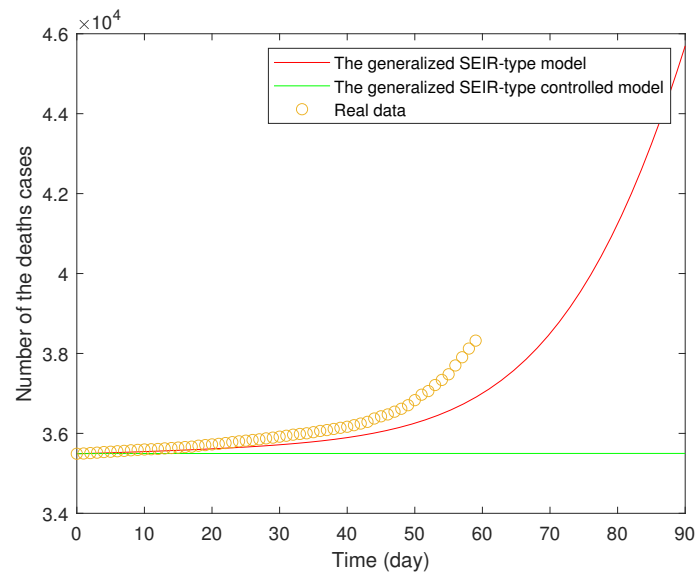
**FIGURE 4.2.** Les taux de récupération et de mortalité pour le cas de l'Italie.

Dans la figure 4.2, nous traçons les fonctions de récupération  $\lambda(t)$  et de mortalité  $\kappa(t)$ . Dans les figures 4.3 et 4.4, nous présentons les solutions numériques aux équations différentielles non linéaires du modèle SEIR généralisé (4.1), en rouge. De même, nous présentons les solutions numériques aux équations différentielles non linéaires du système de contrôle généralisé SEIR (4.6) sous des contrôles optimaux, au sens de la Section 4.4, en couleur verte. Les données réelles des cas mis en quarantaine, du nombre d'individus rétablis et du nombre des décès du 1<sup>er</sup> septembre au 31 octobre 2020, sont représentées en orange. Les contrôles optimaux calculés pour l'Italie du 1<sup>er</sup> septembre au 30 novembre 2020, qui donnent lieu aux courbes vertes dans les parties des figures 4.3 et 4.4, sont montrés dans la figure 4.5.

Les simulations obtenues nous permettent de prédire les résultats des décisions prises en Italie, ainsi que de donner les meilleures décisions pour l'Italie, selon notre système de contrôle généralisé SEIR et notre problème de contrôle optimal.



**FIGURE 4.3.** Prédications pour l'Italie à partir du modèle SEIR généralisé (4.1), en rouge, le système de contrôle généralisé SEIR (4.6) sous des contrôles optimaux, en vert, entre le 1<sup>er</sup> septembre et le 30 novembre 2020, contre données réelles disponibles des mises en quarantaine et rétablies à partir du 1<sup>er</sup> septembre au 31 octobre 2020, en orange.



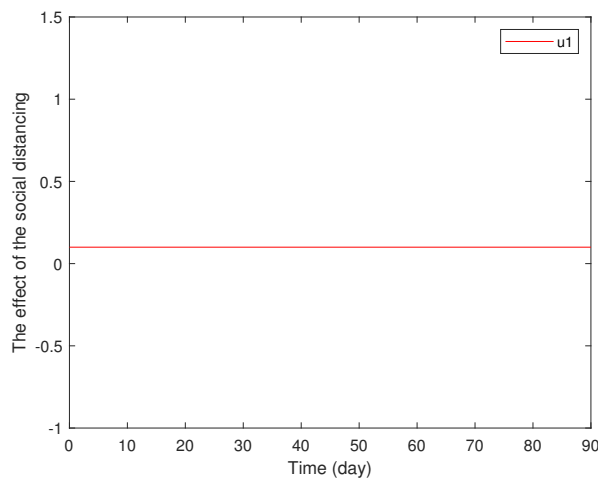
**FIGURE 4.4.** Prédications pour l'Italie à partir du modèle SEIR généralisé (4.1), en rouge, le système de contrôle généralisé SEIR (4.6) sous des contrôles optimaux, en vert, entre le 1<sup>er</sup> septembre et le 30 novembre 2020, par rapport aux données réelles disponibles des décès du 1<sup>er</sup> septembre au 31 octobre 2020, en orange.

Les courbes oranges des Figures 4.3e et 4.3f et Figure 4.4 représentent les données réelles sur les cas de quarantaine, de guérison et de décès en Italie à partir de 1<sup>er</sup> septembre au 31 octobre 2020. Les courbes rouges simulent ce qui se passe du début septembre à fin novembre suivant le modèle SEIR généralisé (4.1), lorsque le nombre de mises en quarantaine, de récupération et de décès augmente, et atteint respectivement, deux millions trois cent quatre-vingt-huit mille (2388000), neuf cent six mille trois cents (906300), et quarante-cinq mille sept cents (45700) cas.

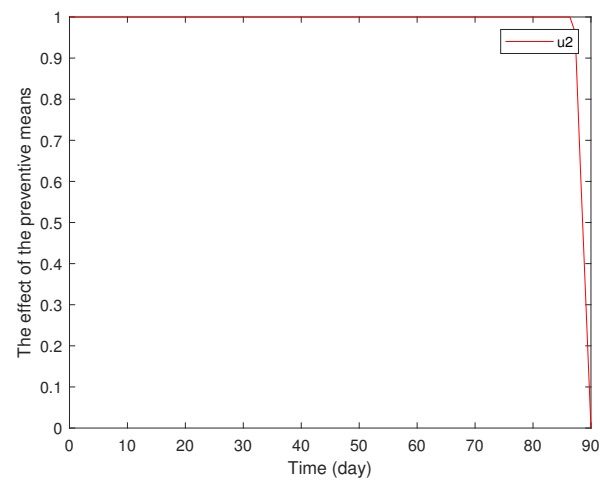
Les courbes rouges des figures 4.3c, 4.3d et 4.3a simulent ce qui se passe du début septembre à fin novembre, selon le modèle SEIR généralisé, lorsque le nombre de cas infectés, exposés et insensibles atteint respectivement, un million cent quarante-six mille (1146000), quarante et un millions deux cent cinquante mille (41250000) et cinq cent vingt-huit (528) cas.

Les courbes vertes des figures 4.3 et 4.4 montrent ce qui se passe du 1<sup>er</sup> septembre au 30 novembre 2020, sous des mesures de contrôles optimaux, quand le nombre d'infectés (Figure 4.3c) et rétablis (Figure 4.3f) 650 et 249400 cas, respectivement, tandis que les nombres d'exposés (Figure 4.3d), insensibles (Figure 4.3a) et mis en quarantaine (Figure 4.3e) atteignent 18490, 60180000 et 128 cas, respectivement. Les décès restent stables sur toute la période, exactement trente-cinq mille cinq cents (35500) cas (Figure 4.4).

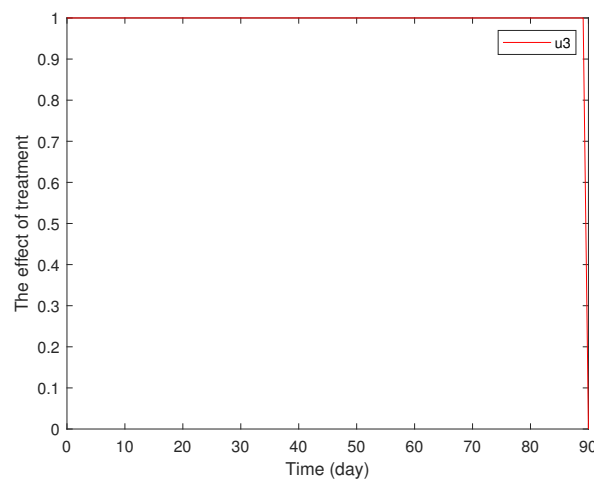
Les courbes de la figure 4.5 montrent les contrôles optimaux à mettre en œuvre afin de réduire le fardeau global du Covid-19 en Italie et obtenir la meilleure situation possible donnée par les courbes vertes des figures 4.3 et 4.4, qui tiennent compte de la réduction des coûts



(a)  $u_1(t)$  (distanciation sociale).



(b)  $u_2(t)$  (moyens de prévention).



(c)  $u_3(t)$  (traitement).

**FIGURE 4.5.** Les contrôles extrémaux de Pontryaguine du problème de contrôle optimal de la section 4.4 pour le cas de l'Italie entre le 1<sup>er</sup> septembre et le 30 novembre 2020.

résultant des contrôles  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .

L'effet de la distanciation sociale est égal à 0.1 ( $u_1 = 0.1$ ), voir Figure 4.5a, et cela correspond à l'application de la distanciation sociale pour l'ensemble de la population.

L'effet des mesures préventives est égal à la valeur maximale de sa contrainte jusqu'au 19 septembre ( $u_2 = 1$ ), voir Figure 4.5b, puis diminue progressivement jusqu'à atteindre zéro ( $u_2 = 0$ ) le 30 novembre 2020, voir Figure 4.5c.

L'effet du traitement prend la valeur maximale de sa contrainte jusqu'au 29 novembre 2020 ( $u_3 = 1$ ), puis diminue à zéro le 30 novembre 2020 ( $u_3 = 0$ ), ce qui signifie une diminution de la pression sur le secteur de la santé.

Notons qu'en prenant des mesures préventives ( $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ ), nous limitons la propagation du Covid-19 et nous avons de meilleurs résultats. Cela signifie qu'avec l'aide de la théorie du contrôle optimal, ce qui s'est passé en Italie aurait été moins dramatique.

# Conclusion et Perspectives

Dans cette thèse, on présente des généralités sur les systèmes dynamiques, épidémiologiques, la théorie de la stabilité et le contrôle optimal. En outre, nous appliquons une nouvelle direction hybride pour la résolution des problèmes de contrôle optimal linéaire. Pour cela, nous définissons une estimation d'optimalité et nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour caractériser l'optimalité d'un certain contrôle admissible du problème discrétisé. Afin de résoudre ce problème on présente un algorithme à direction hybride (ADHC). Puis nous donnons un exemple numérique pour illustrer l'approche proposée. D'autre part, on étudie un modèle épidémiologique du type SEIR pour limiter la propagation du Covid-19, on introduisons trois variables de contrôle : la distanciation sociale, les moyens de prévention et les mesures de traitement pour contrôler ce modèle épidémiologique, on analyse ce problème de contrôle optimal par rapport à la transmission de données réelles en Italie.

Nos résultats montrent la pertinence du modèle, notamment le nombre d'individus mis en quarantaine et rétablis. On montre dans un cas idéal comment on aurait pu diminuer drastiquement le nombre d'individus susceptibles, exposés, infectés, mis en quarantaine et décédés, et nous augmentons la population d'insensibles.

Comme perspectives, il reste l'étude théorique de la stabilité des modèles SEIR dans le cas où les taux de récupération et de mortalité sont des fonctions dépendantes du temps.

## **Annexe A : Rétabli**

Dans les tableaux 4.2 et 4.3, nous montrons les données réelles des individus rétablis de Covid-19 en Italie pour les mois de septembre et octobre 2020, versus le nombre d'individus rétablis prédits par le modèle de Peng et al. [41] et l'amélioration que l'on aurait pu faire en introduisant des contrôles appropriés comme expliqué dans la section 4.3 et en utilisant la théorie du contrôle optimal comme dans la section 4.4.



**TABLE 4.2.** Données réelles des individus rétablis ( $R(t)$ ) de Covid-19, Italie, septembre 2020 par rapport au nombre de  $R(t)$  prédit par le modèle de type SEIR (4.1) et le modèle contrôlé (4.6).

Jour	Réel $R$	$R$ par (4.1)	$R$ par (4.6)	$\eta_R$	$\mathcal{I}_R$
01	207944	207944	207944	0%	0%
02	208201	207947	225126	0.12 %	08.12%
03	208490	207953	231873	0.25%	11.21%
04	209027	207966	234737	0.50%	12.29%
05	209610	207996	236134	0.77%	12.65%
06	210015	208060	236956	0.93%	12.82%
07	210238	208187	237538	0.97%	12.98%
08	210801	208409	238005	1.13%	12.90%
09	211272	208744	238409	1.19%	12.84%
10	211885	209176	238769	1.27%	12.68%
11	212432	209672	239096	1.29%	12.55%
12	213191	210206	239395	1.40%	12.29%
13	213634	210759	239672	1.34%	12.18%
14	213950	211324	239930	1.22%	12.14%
15	214645	211897	240170	1.28%	11.89%
16	215265	212477	240396	1.29%	11.67%
17	215954	213063	240609	1.33%	11.41%
18	216807	213657	241003	1.45%	11.16%
19	217716	214260	241186	1.58%	10.78%
20	218351	214873	241363	1.59%	10.53%
21	218703	215498	241696	1.46%	10.51%
22	219670	216136	241855	1.60%	10.09%
23	220665	216790	242009	1.75%	9.67%
24	221762	217460	242160	1.93%	9.19%
25	222716	218150	242306	2.05%	8.79%
26	223693	218861	242450	2.16%	8.38%
27	224417	219596	242591	2.14%	8.09%
28	225190	220358	242730	2.14%	7.78%
29	226506	221149	242866	2.36%	7.22%
30	227704	221973	243000	2.51%	6.71%

**TABLE 4.3.** Données réelles des individus rétablis ( $R(t)$ ) de Covid-19, Italie, octobre 2020 par rapport au nombre de  $R(t)$  prédit par le modèle de type SEIR (4.1) et le modèle contrôlé (4.6).

Jour	Réel $R$	$R$ par (4.1)	$R$ par (4.6)	$\eta_R$	$\mathcal{I}_R$
01	222832	224334	243132	0.67%	9.11%
02	229970	223731	243263	2.71%	5.78%
03	231217	224672	243392	2.83%	5.26%
04	231914	225662	243520	2.69%	5.00%
05	232681	226703	243647	2.56%	4.71%
06	234099	227801	243772	2.69%	4.13%
07	235303	228961	243896	2.69%	3.65%
08	236363	230188	244019	2.61%	3.23%
09	237549	231490	244141	2.55%	2.77%
10	238525	232871	244263	2.37%	2.40%
11	239709	234341	244383	2.23%	1.94%
12	240600	235905	244503	1.95%	1.62%
13	242028	237573	244622	1.84%	1.07%
14	244065	239353	244740	1.93%	0.27%
15	245964	241255	244857	1.91%	0.45%
16	247872	243290	244974	1.84%	1.16%
17	249127	245468	245089	1.46%	1.62%
18	251461	247802	245205	1.45%	2.48%
19	252959	250305	245319	1.04%	3.02%
20	255005	252990	245433	0.79%	3.75%
21	257374	255872	245547	0.58%	4.59%
22	259456	258968	245659	0.18%	5.31%
23	261808	262296	245771	0.18%	6.12%
24	264117	265872	245883	0.66%	6.90%
25	266203	269718	245994	1.32%	7.59%
26	268626	273855	246104	1.94%	8.38%
27	271988	278306	246214	2.32%	9.47%
28	275404	283094	246324	2.79%	10.55%
29	279282	288247	246401	3.21%	11.77%

## **Annexe B : Décès**

Dans les tableaux 4.4 et 4.5, nous montrons les données réelles des personnes décédées de Covid-19 en Italie pour les mois de septembre et octobre 2020, versus le nombre des décès d'individus prédits par le modèle de Peng et al. [41] et l'amélioration que l'on aurait pu faire en introduisant des contrôles appropriés comme expliqué dans la section 4.3 et en utilisant la théorie du contrôle optimal comme dans la Section 4.4.

**TABLE 4.4.** Données réelles des individus décédés ( $D(t)$ ) de Covid-19, Italie, septembre 2020 par rapport au nombre de  $D(t)$  prédit par le modèle de type SEIR (4.1) et le modèle contrôlé (4.6).

Jour	Réel $D$	$D$ par (4.1)	$D$ par (4.6)	$\eta_D$	$\mathcal{I}_D$
01	35491	35491	35491	0%	0%
02	35497	35495	35493	0.005%	0.01%
03	35518	35500	35494	0.05%	0.06%
04	35533	35505	35495	0.07%	0.07%
05	35541	35510	35495	0.08%	0.12%
06	35553	35515	35495	0.10%	0.16%
07	35563	35521	35495	0.11%	0.19%
08	35577	35526	35496	0.14%	0.22%
09	35587	35532	35496	0.15%	0.25%
10	35597	35538	35496	0.16%	0.28%
11	35603	35544	35496	0.16%	0.30%
12	35610	35550	35496	0.16%	0.32%
13	35624	35556	35496	0.19%	0.35%
14	35633	35563	35496	0.19%	0.38%
15	35645	35570	35496	0.21%	0.41%
16	35658	35576	35496	0.22%	0.45%
17	35668	35583	35496	0.23%	0.48%
18	35692	35591	35496	0.28%	0.54%
19	35707	35598	35496	0.30%	0.59%
20	35724	35606	35496	0.33%	0.63%
21	35738	35614	35496	0.34%	0.67%
22	35758	35622	35496	0.38%	0.73%
23	35781	35630	35496	0.42%	0.79%
24	35801	35640	35496	0.44%	0.85%
25	35818	35648	35496	0.47%	0.89%
26	35835	35658	35496	0.49%	0.94%
27	35851	35668	35496	0.51%	0.99%
28	35875	35680	35497	0.54%	1.05%
29	35894	35690	35497	0.56%	1.10%
30	35918	35702	35497	0.60%	1.17%

**TABLE 4.5.** Données réelles des individus décédés ( $D(t)$ ) de Covid-19, Italie, octobre 2020 par rapport au nombre de  $D(t)$  prédit par le modèle de type SEIR (4.1) et le modèle contrôlé (4.6).

Jour	Réel $D$	$D$ par (4.1)	$D$ par (4.6)	$\eta_D$	$\mathcal{I}_D$
01	35941	35715	35497	0%	0%
02	35968	35728	35497	0.66%	1.30%
03	35986	35742	35497	0.67%	1.35%
04	36002	35757	35497	0.68%	1.40%
05	36030	35773	35497	0.71%	1.47%
06	36061	35790	35497	0.75%	1.56%
07	36083	35808	35497	0.76%	1.62%
08	36111	35827	35497	0.78%	1.70%
09	36140	35848	35497	0.80%	1.77%
10	36166	35870	35497	0.81%	1.84%
11	36205	35894	35497	0.85%	1.95%
12	36246	35920	35497	0.89%	2.06%
13	36289	35947	35497	0.94%	2.18%
14	36372	35976	35497	1.08%	2.40%
15	36427	36008	35497	1.15%	2.55%
16	36474	36042	35497	1.18%	2.67%
17	36543	36078	35497	1.27%	2.86%
18	36616	36118	35497	1.36%	3.05%
19	36705	36160	35497	1.48%	3.29%
20	36832	36206	35497	1.69%	3.62%
21	36968	36255	35497	1.92%	3.97%
22	37059	36307	35497	2.02%	4.21%
23	37210	36364	35497	2.27%	4.60%
24	37338	36425	35497	2.44%	4.93%
25	37479	36491	35497	2.63%	5.28%
26	37700	36638	35497	2.81%	5.84%
27	37905	36720	35498	3.12%	6.35%
28	38122	36902	35498	3.20%	6.88%
29	38321	37003	35498	3.43%	7.36%

# Annexe C : Quarantaine

Dans les tableaux 4.6 et 4.7, nous montrons les données réelles des individus mis en quarantaine de Covid-19 en Italie pour les mois de septembre et octobre 2020, versus le nombre d'individus en quarantaine prédits par le modèle de Peng et al. [41] et l'amélioration que l'on aurait pu faire en introduisant des contrôles appropriés comme expliqué dans la section 4.3 et en utilisant la théorie du contrôle optimal comme dans la Section 4.4.

**TABLE 4.6.** Données réelles des individus en quarantaine ( $Q(t)$ ) de Covid-19, Italie, septembre 2020 par rapport au nombre de  $Q(t)$  prédit par le modèle de type SEIR (4.1) et le modèle contrôlé (4.6).

Jour	Réel $Q$	$Q$ par (4.1)	$Q$ par (4.6)	$\eta_Q$	$\bar{\mathcal{I}}_Q$
01	26754	26754	26754	0 %	0 %
02	27817	27472	10292	01.24%	63.00%
03	28915	28120	4188	02.74%	85.51%
04	30099	28715	1901	04.59%	93.68%
05	31194	29264	1023	06.18%	96.69%
06	32078	29763	668	07.21%	97.91%
07	32993	30197	509	08.47%	98.45%
08	33789	30789	426	08.87%	98.73%
09	34734	30964	374	10.85%	98.92%
10	35708	31105	337	12.89%	99.05%
11	36767	31246	307	15.01%	99.16%
12	37503	31412	282	16.24%	99.24%
13	38509	31617	261	17.89%	99.32%
14	39187	31872	244	18.66%	99.37%
15	39712	32183	228	18.95%	99.42%
16	40532	32557	215	19.67%	99.46%
17	41413	33000	203	20.31%	99.50%
18	42457	33519	193	21.05%	99.54%
19	43161	34119	184	20.94%	99.57%
20	44098	34808	176	21.06%	99.60%
21	45079	35593	169	21.04%	99.62%
22	45489	36480	163	19.80%	99.64%
23	46114	37479	158	18.72%	99.65%
24	46780	38599	153	17.48%	99.67%
25	47718	39848	149	16.49%	99.68%
26	48593	41237	145	15.13%	99.70%
27	49618	42777	142	13.78%	99.71%
28	50323	44480	139	11.61%	99.72%
29	50630	46359	137	08.43%	99.72%
30	51263	48428	134	05.53%	99.73%

**TABLE 4.7.** Données réelles des individus en quarantaine ( $Q(t)$ ) de Covid-19, Italie, octobre 2020 par rapport au nombre de  $Q(t)$  prédit par le modèle de type SEIR (4.1) et le modèle contrôlé (4.6).

Jour	Réel $Q$	$Q$ par (4.1)	$Q$ par (4.6)	$\eta_Q$	$\mathcal{I}_Q$
01	52647	50023	130	04.98%	99.75%
02	53997	53197	129	01.48%	99.76%
03	55566	55931	127	00.65%	99.77%
04	57429	58922	126	02.59%	99.78%
05	58903	62193	124	05.58%	99.78%
06	60134	65764	123	09.36%	99.79%
07	62576	69659	122	11.31%	99.80%
08	59526	73904	121	24.15%	99.79%
09	70110	78527	120	12.00%	99.82%
10	74829	83557	119	11.63%	99.84%
11	79075	89027	118	12.58%	99.85%
12	82764	94972	118	14.75%	99.85%
13	87193	101428	117	16.32%	99.86%
14	92445	108435	117	17.29%	99.87%
15	99266	116035	116	16.89%	99.88%
16	107312	124275	115	15.80%	99.89%
17	116935	133204	114	13.91%	99.90%
18	126237	142876	114	13.18%	99.90%
19	134003	153344	113	14.43%	99.91%
20	142739	164668	112	15.36%	99.92%
21	155442	176913	112	13.81%	99.92%
22	169302	190145	111	12.31%	99.93%
23	186002	204439	111	09.91%	99.94%
24	203182	219871	110	08.21%	99.94%
25	222241	236520	109	06.42%	99.95%
26	236684	254470	109	07.51%	99.95%
27	255090	273812	108	07.33%	99.95%
28	276457	294640	107	06.57%	99.96%
29	299191	317055	107	05.97%	99.96%



# Bibliographie

- [1] V. Arnold, Équations différentielles ordinaires, Éditions Mir, Moscow, 1974.
- [2] P. Agarwal et al., Mathematical Analysis of Infectious Diseases, 1st Edition, Elsevier, 2022.
- [3] M. Azi and M. O. Bibi, Optimal control of a dynamical system with intermediate phase constraints and applications in cash management, Numerical Algebra, Control and Optimization, doi : 10.3934/naco.2021005.
- [4] D. K. Bagal, A. Rath, A. Barua and D. Patnaik, Estimating the parameters of susceptible-infected-recovered model of COVID-19 cases in India during lockdown periods, Chaos Solitons Fractals, **140**, 2020.
- [5] C. Barril, A. Calsina, S. Cuadrado and J. Ripoll, On the basic reproduction number in continuously structured populations, Math. Methods Appl. Sci., **44**, 799–812, 2021.
- [6] M. Bentobache and M.O. Bibi, Adaptive method with hybrid direction : theory and numerical experiments, Proceedings of Optimization, Universidade Nova de Lisboa, Portugal, 2011.
- [7] M. Bentobache and M. O. Bibi, A Two-phase Support Method for Solving Linear Programs : Numerical Experiments, Mathematical Problems in Engineering, Article ID 482193, doi :10.1155/2012/482193, 2012.
- [8] M. Bentobache, On mathematical methods of linear and quadratic programming, PhD thesis, University of Bejaia, 2013.
- [9] D.P. Bertsekas, Dynamic programming and optimal control, Athena Scientific, Belmont, 1995.
- [10] M. O. Bibi, Methods for Solving Linear-Quadratic Problems of Optimal Control, Ph.D Thesis, University of Minsk, 1985.
- [11] M. O. Bibi, Optimization of a linear dynamic system with double terminal constraints on the trajectories, Optimization, **30(4)**, 359–366, 1994.
- [12] M. O. Bibi, Support method for solving a linear-quadratic problem with polyhedral constraints on control, Optimization, **37(2)**, 139–147, 1996.
- [13] M. O. Bibi and M. Bentobache, A hybrid direction algorithm for solving linear programs, International Journal of Computer Mathematics, **92(1)**, 201–216, 2015.

- [14] B. Brahmi and M. O. Bibi, Dual support method for solving convex quadratic programs, *Optimization*, **59(6)**, 851–872, 2010.
- [15] A. Boukhouima et al., Stability analysis and optimal control of a fractional HIV-AIDS epidemic model with memory and general incidence rate, *Eur. Phys. J. Plus*, **136**, 2021.
- [16] C. Castillo-Chavez, and Z. Feng, To treat or not to treat : the case of tuberculosis, *J. Math. Biol.*, **35**, 1997.
- [17] L. Cesari, *Optimization : theory and applications*, Applications of Mathematics (New York), 17, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [18] E. Cheynet, Generalized SEIR Epidemic Model (fitting and computation), 28 Sept 2020. <https://github.com/ECheynet/SEIR/tree/v4.8.7>.
- [19] G. B. Dantzig, *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.
- [20] R. Gabasov and F. M. Kirillova, *Methods of linear programming*, Vol. 1, 2 and 3, Edition of the Minsk University, 1977, 1978 and 1980 (in Russian).
- [21] R. Gabasov, F.M. Kirillova and S.V. Prischepova, *Optimal Feedback Control*, Springer-Verlag, London, 1995.
- [22] R. Gabasov, F. M. Kirillova, *The maximum principle in the theory of control optimal*, Nauka i Technika Edition, Minsk, 1974 (in Russian).
- [23] R. Gabasov, F. M. Kirillova, *Constructive Methods of Optimization, Part 2 : Control Problems*. University Press, Minsk, 1984.
- [24] F. Ghellab and M. O. Bibi, Optimality and suboptimality criteria in a quadratic problem of optimal control with a piecewise linear entry, *International Journal of Mathematics in Operational Research*, **19(1)**, 1–18, 2021.
- [25] I. Goldhirsch, P-L. Sulem and S. A. Orszag, Stability and Lyapunov stability of dynamical systems : A differential approach and a numerical method, *Physica D : Nonlinear Phenomena* Vol. 27, Issue 3, 311–337, 1987.
- [26] Y. Granjon, *Automatique : Systèmes linéaires, non-linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état*, Dunod, 2008.
- [27] T. Guilbaud, *Méthodes numériques en commande optimale*, Ph.D thesis, Université Paris VI, 2002.
- [28] R.E. Kalman. Contributions to the theory of optimal control. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, **5(2)** , 102–119, 1960.
- [29] W. O. Kermack and A. G. McKendrick, A contribution to the mathematical theory of epidemics, *Proc. R. Soc. Lond., Ser. A*, **115**, 700–721, 1927.
- [30] N. Khimoum and M. O. Bibi, Primal-dual method for solving a linear-quadratic multi-input optimal control problem, *Optimization Letters*, **14**, 653–669, 2020.

- [31] E. A. Kostina and O. I. Kostyukova, An algorithm for solving quadratic programming problems with linear equality and inequality constraints, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **41(7)**, 960–973, 2001.
- [32] S. A. Lauer et al., The incubation period of coronavirus disease 2019 (COVID-19) from publicly reported confirmed cases : Estimation and application, *Annals of Internal Medicine*, **172**, 577–583, 2020.
- [33] A. P. Lemos-Paião, C. J. Silva and Delfim F. M. Torres, A new compartmental epidemiological model for COVID-19 with a case study of Portugal, *Ecological Complexity*, **44**, 2020.
- [34] K. Louadj, Résolution des problèmes paramétrés de contrôle optimal, Thèse de doctorat, Université de Tizi-Ouzou, 2012.
- [35] Q. Lin et al., A conceptual model for the coronavirus disease 2019 (COVID-19) outbreak in Wuhan, China with individual reaction and governmental action, *International Journal of Infectious Diseases*, **93**, 211–216, 2020.
- [36] R. Lu et al., Genomic characterisation and epidemiology of 2019 novel coronavirus : Implications for virus origins and receptor binding, *The Lancet*, **395**, 565–574, 2020.
- [37] A. Moussaoui and P. Auger, Prediction of confinement effects on the number of Covid-19 outbreak in Algeria, *Math. Model. Nat. Phenom.*, **15**, 2020.
- [38] F. Ndaïrou et al., Fractional model of COVID-19 applied to Galicia, Spain and Portugal, *Chaos Solitons Fractals*, **144**, 2021.
- [39] F. Ndaïrou and D. F. M. Torres, Mathematical analysis of a fractional COVID-19 model applied to Wuhan, Spain and Portugal, *Axioms*, **10**, 2021.
- [40] O. Oukacha, M. Aidene, Direct Method of solving optimal control problems, *ACTA Universitatis Apulensis*, 123–134, 2014
- [41] L. Peng et al., Epidemic analysis of COVID-19 in China by dynamical modeling, preprint, arXiv :2002.06563v2, 2020.
- [42] L. S. Pontryagin et al., The mathematical theory of optimal processes, Translated from the Russian by K. N. Trilogoff; edited by L. W. Neustadt, Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc. New York, 1962.
- [43] P. Agarwal, J. J. Nieto, M. Ruzhansky and Delfim F. M. Torres, Analysis of Infectious Disease Problems (Covid-19) and Their Global Impact, Springer, 2021.
- [44] S. Radjef, M. O. Bibi, An effective generalization of the direct support method in quadratic convex programming, *Appl. Math. Sci.*, **6(31)**, 1525–1540, 2012.
- [45] N. Rouche, J. Mawhin, Equations différentielles ordinaires, Tome 1 : Théorie générale, Masson, Paris, 1973.

- [46] L. F. Shampine and M. W. Reichelt, The MATLAB ODE suite, *SIAM J. Sci. Comput.*, **18**, 1–22, 1997.
- [47] C. J. Silva et al., Optimal control of the COVID-19 pandemic : controlled sanitary deconfinement in Portugal, *Scientific Reports*, **11** , 2021.
- [48] E. Trélat, *Contrôle optimal : Théorie et applications*. Collection Mathématique Concrètes. Vuibert, 2005.
- [49] A. Tyatyushkin and T. Zarodnyuk, Numerical method for solving optimal control problems with phase constraints, *Numerical Algebra, Control and Optimization*, 481–492, 2017.
- [50] P. van den Driessche and J. Watmough, Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission, *Math. Biosci.*, **180**, 29–48, 2002.
- [51] O. von Stryk and R. Bulirsch, Direct and indirect methods for trajectory optimization, *Annals of Operations Research*, **37** , 357–373, 1992.
- [52] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer, Berlin, 1990
- [53] M. A. Zaitri, M. O. Bibi and M. Bentobache, A hybrid direction algorithm for solving optimal control problems, *Cogent Math. Stat.*, **6** , 2019.
- [54] M. A. Zaitri, M. O. Bibi and Delfim F. M. Torres, Transport and Optimal Control of Vaccination Dynamics for COVID-19, Chapter of Book : *Mathematical Analysis of Infectious Diseases*, 1 st Edition, ELSEVIER, 2022.
- [55] M. A. Zaitri, *Stabilisation des systèmes linéaires et non linéaires par la commande*, Mémoire de Magister en Mathématiques Appliquées. Université de Béjaia, 2014.
- [56] M. A. Zaitri, M. O. Bibi and Delfim F. M. Torres, Optimal Control to Limit the Spread of COVID-19 in Italy, *Kuwait Journal of Science*, Special Issue, 1–14, 2021.
- [57] M. Zamir et al., An optimal control analysis of a COVID-19 model, *Alexandria Engineering Journal*, **60**, 2875–2884, 2021.
- [58] Z. Zhao et al., Prediction of the COVID-19 spread in African countries and implications for prevention and control : A case study in South Africa, Egypt, Algeria, Nigeria, Senegal and Kenya, *Science of the Total Environment*, **729**, 2020.
- [59] H. Zine et al., A stochastic time-delayed model for the effectiveness of Moroccan COVID-19 deconfinement strategy, *Math. Model. Nat. Phenom.*, **15**, 2020.
- [60] <https://raw.githubusercontent.com/pcm-dpc/COVID-19/master/dati-regioni/dpc-covid19-ita-regioni.csv>.

## Abstract

After a reminder on dynamical systems, the stability and control, we present in this thesis an algorithm to find an approximate numerical solution for linear problems of optimal control. After that, optimal control theory was applied to an epidemiological system. The proposed system is a generalized model of the SEIR type which has three controls, representing the effect of social distancing, the effect of preventive means, and the effect of treatment to combat the spread of the Covid-19 pandemic, with available real Italian data. By considering the Pontryagin minimum principle, applied for a nonlinear epidemiological system and a functional which is quadratic and convex with respect to the control, we show how in this case we could have drastically reduced the number of susceptible, exposed, infected, quarantined, and dead individuals, and that, by increasing the population of protected individuals.

**Keywords :** Optimal control; Analysis of the spread of Covid-19; SEIR control model; Pontryagin minimum principle; Numerical results.

## Résumé

Après un rappel sur les systèmes dynamiques, leur stabilité et leur contrôle, on présente dans cette thèse un algorithme pour trouver une solution numérique approximative pour les problèmes linéaires de contrôle optimal. Ensuite, on a appliqué la théorie du contrôle optimal à un système épidémiologique. Le système proposé est un modèle généralisé du type SEIR qui comporte trois contrôles, représentant la distanciation sociale, les moyens de prévention et les mesures de traitement pour lutter contre la propagation de la pandémie de Covid-19, avec des données réelles disponibles italiennes. En considérant le principe du minimum de Pontryagin, appliqué pour un système épidémiologique non linéaire et une fonctionnelle, quadratique et convexe par rapport au contrôle, nous montrons comment dans ce cas on aurait pu diminuer drastiquement le nombre d'individus sensibles, exposés, infectés, mis en quarantaine et morts, et ce en augmentant la population d'individus protégés.

**Mots clés :** Contrôle optimal; Analyse de la propagation du Covid-19; Modèle de SEIR contrôlé; Principe du minimum de Pontryagin; Résultats numériques.

## ملخص

بعد التذكير بالأنظمة الديناميكية، الإستقرار و التحكم الأمثل، نقدم في هذه الأطروحة خوارزمية لإيجاد الحل العددي التقريبي لمسائل التحكم الأمثل. ثم نطبق هذه النظرية على نظام وبائي، الذي هو عبارة عن نموذج معمم من نوع SEIR بواسطة ثلاثة متحكمات: التباعد الإجتماعي، الوسائل الوقائية و تأثير العلاج، نقوم بالحد من انتشار وباء Covid-19، مع أخذ البيانات الحقيقية الإيطالية. من خلال مبدأ بنترياغين الأقصى المطبق على نظام وبائي متحكم غير خطي محدب من الدرجة الثانية، نوضح كيفية التقليل من خطر الإصابة من خلال تخفيض عدد الأفراد المعرضين، المكشوفين و المصابين و زيادة عدد المسعفين والمعزولين.

**الكلمات المفتاحية :** التحكم الأمثل، تحليل إنتشار Covid-19، نموذج تحكم لـ SEIR، مبدأ بنترياغين الأقصى، النتائج العددية.

## Agzul

Umbeed asmekti  $\gamma$ ef inagrawen idinamikiyen aked werkad ed weswad nnsen, nenked deg ugemmir ayi axwarzim i wakken ad' d-naf tifat tumdint yuzan i yegna imzirgen n weswad akkay. Sakin, nesnes tizri n weswad akkay i yiwen unagraw n tezmert. Anagraw i d-ittwasumren iga d amsil asmatuyan n wudem SEIR i-yesan krađ n yeswaden; ineggura yagi ttgensisen abaeed, asehder aked isufar i-uqazem n wađtan n Covid-19, es tikciwin tiđelyaniyin iwejden di tilawt. Es umuqel n wezwir adday n Pontryagin, yettwasensen i yiwen unagraw awer-imzireg n tezmert aked yiwet n tmes $\gamma$ ant tasuzmirt yellan d-tafensut es wassa $\gamma$   $\gamma$ er weswad, nferreg-ed amek i nezmer deg waddad agi ad' nessen $\gamma$ es es wađas amđan n yemdanen seg wađtan agi u ad' nesnerni tawacult n yemdanen yemsetnen.

**Awalen n tsura :** Aswad akkay; Tasleđ n tnezwit n Covid-19; Amsil imesweđ n SEIR; Azwir adday n Pontryagin; Igmudn umđinen.