

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane Mira de Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département de Recherche Opérationnelle



Mémoire Présenté

En vue de l'obtention du Diplôme de Master

en Recherche Opérationnelle

Spécialité : Modélisation Mathématiques et Techniques de Décision

Coloration K-équitable des sommets de nouvelles classes de graphe

Présenté par :

M^{elle} HASSAINI Roumaïssa.

M^{elle} AREZKI Djedjiga.

Devant le jury composé de :

D ^r L. Asli	M.C. classe/ A	Président	à l'UAMB - Béjaïa.
D ^r K. Kabyl	M.C. classe B	Encadrant	à l'UAMB - Béjaïa
D ^r S. Ziani	M.C. classe B	Examineur	à l'UAMB - Béjaïa.

Année Universitaire 2022 – 2023

* Remerciments *

Tout d'abord on aimera d'adresser nos plus remerciements au Dieu le tout puissant miséricordieux de nous avoir donné la chance, la patience et le courage pour réaliser ce modeste travail.

On tient à exprimer nos vifs remerciements à monsieur ***Kamal KABYL*** pour avoir accepté de nous encadrer lors du présent travail en dépit de son emploi du temps très chargé et de confiance qu' il nous a témoigné, et les précieux conseils qu'il a bien voulu prodiguer pour cibler les aspects traités dans ce travail.

On tient à remercier aussi notre chef du département monsieur **KHIMOUM** et monsieur **ASLI**, qui nous donne des conseils très importants en signe de reconnaissance.

On adresse nos sincères remerciements à tous les professeurs, intervenants et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé nos réflexions et ont accepté à nous rencontrer et répondre à nos questions durant notre parcours.

Enfin, on ne voudra pas oublier de remercier tous nos parents et nos amis qu'ont été un soutien que ce soit moral ou matériel, et qui ont contribué de près ou de loin à m'aider.

Beaucoup de charité et Bonne chance à tous.

*** Dédicace ***

Je dédie ce modeste travail :

***A** la lumière de mes jours, la source de mes efforts, d'affection et d'amour, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur : **Maman** que j'adore plus que ma vie.*

***A** mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, que dieu te garde en bonne santé : mon super **Papa**.*

***A** ma sœur : Ferial.*

***A** mes frères : Rayan et Yanis.*

***A** mes grands mères : Ouardia et Malika que dieu vous garde.*

***A** mes tantes : Nassima, Hinda, Malika, Anissa, Hassina, Chafika, Katia, Ghania*

***A** mes oncles : Kamel, Mourad, Nadjim, Omar.*

***A** mes chères amies : Zahra, Amel, Amina, et ma binôme Djedjiga.*

***A** tous chères familles et à tous qui m'aiment.*

Roumaïssa

* Dédicace *

*Avec tous mes sentiments de respect, avec l'expérience de ma reconnaissance, Je dédie
ma remise de diplôme et ma joie :*

*A mon paradis, à la prunelle de mes yeux, à la source de ma joie et mon bonheur, ma
lune et fil d'espoir qui allumer mon chemin, ma moitié, **Maman.***

*A celui qui m'a fait une femme, ma source de vie, d'amour et d'affection, à mon
support qui était toujours à mes côtés pour me soutenir et m'encourager, à mon prince
Papa.*

A mes adorables petits frères : Ayoub, Haroun, et Zinou pour l'amour qu'ils me réserve.

*A tous les membres de ma grande famille, mes grands parents, mes oncles, mes tante et
mes cousines, surtout ma chère tante Asia et ma cousine Anfel qui je la considère
comme ma soeur.*

*son oublier mes amies : Zahra , Sarah et bien sur ma binome Roumaissa pour son
soutien moral sa patience et sa compréhension tout au long de ce travail.*

A tous mes collegues de promotion son exeption .

A tous ce qui ont participé à ma réussite et a tous qui m'aiment.

Djedjiga

Table des matières

Introduction Générale	8
1 Notion de base de la théorie de graphe	10
1.1 Introduction	10
1.2 Définition et concepts de base	10
1.2.1 Graphe	10
1.2.2 Graphe orienté	11
1.2.3 Graphe non orienté	11
1.2.4 Degrés	12
1.2.5 Graphe partiel	12
1.2.6 Sous-Graphe	13
1.2.7 Chaines et cycles	13
1.2.8 Connexité	14
1.2.9 Clique	14
1.2.10 Stable	14
1.2.11 Couplage	15
1.2.12 Identification de deux sommets	15
1.3 Opérations classiques sur les graphes	16
1.3.1 Somme Cartésienne	16
1.3.2 Produit Cartésien	17
1.4 Quelques types de graphe	18
1.4.1 Graphe complet	18
1.4.2 Graphe biparti	18
1.4.3 Graphe biparti complet	19
1.4.4 Graphe planaire	19
1.4.5 Graphe triangulé	19
1.4.6 Arbre et ses propriétés	20
1.5 Mode de représentation graphique	21
1.5.1 Matrice d'adjacence	21
1.5.2 Conclusion	22

2	Coloration des sommets dans les graphes	23
2.1	Introduction	23
2.2	Domaine d'application	23
2.3	Types de coloration	23
2.3.1	Coloration simple	23
2.3.2	Coloration k-équitable	24
2.4	Nombre Chromatique	24
2.4.1	Majoration du nombre Chromatique	25
2.4.2	Minoration du nombre Chromatique	25
2.5	Quelques algorithmes de coloration	26
2.5.1	Algorithme WELSH and POWELL	26
2.5.2	Algorithme de DSATEUR	30
2.5.3	Algorithme de coloration à jeton	32
2.5.4	Conclusion	35
3	Coloration des sommets de nouvelles classes de graphe	36
3.1	Introduction	36
3.2	Classe W_n^3 :	36
3.3	Classe W_n^4	40
3.4	Conclusion	44
4	Implémentation de l'algorithme de Welsh and Powell sur C^{++}	45
4.1	Introduction au Code Block	45
4.1.1	Déroulement de la classe W_2^3 avec l'algorithme Welsh and Powell et implémentation sur C^{++}	47
4.1.2	Déroulement de la classe W_2^4 avec l'algorithme Welsh and Powell et implémentation sur C^{++}	50
4.1.3	Implémentation de la classe W_2^5 avec l'algorithme Welsh and Powell sur C^{++}	54
4.2	Conclusion	55
	Conclusion Générale	57
	Bibliographie	58
	Résumé	61

Table des figures

1.1	Graphe G .	10
1.2	Graphe orienté.	11
1.3	Graphe non orienté.	11
1.4	Graphe G et son graphe partiel G' .	12
1.5	Le graphe G et son sous graphe G' .	13
1.6	Graphe connexe.	14
1.7	Clique et stable de graphe G .	15
1.8	Couplage parfait.	15
1.9	Identification de deux sommets.	16
1.10	Somme Cartésienne de $G \square G'$.	17
1.11	Produit Cartésien de $G \times G'$.	17
1.12	Graphe complet.	18
1.13	Graphe biparti.	18
1.14	Graphe planaire.	19
1.15	Graphe triangulé.	20
1.16	Arbre.	20
1.17	Graphe associé à la matrice M .	21
2.1	Coloration simple.	24
2.2	Coloration k -équitable.	24
2.3	Exemple.	25
3.1	Graphe W_2^3 .	36
3.2	Graphe W_3^3 et W_4^3 .	37
3.3	Coloration 3-équitables.	37
3.4	Coloration 3-équitables.	39
3.5	Graphe W_1^4 .	40
3.6	Coloration 4-équitables.	40
3.7	Coloration 4-équitables.	41
3.8	Graphe W_2^4 .	42

TABLE DES FIGURES

3.9	Graphe W_3^4	43
3.10	Coloration 5-équitables.	44
4.1	Graphe W_2^3	47
4.2	Coloration 3-équitables de W_2^3 obtenue par notre application.	50
4.3	Graphe W_2^4	50
4.4	Coloration 4-équitables de W_2^4 obtenue par notre application.	53
4.5	Coloration 5-équitables de W_2^5 obtenue par notre application.	55

Introduction Générale

La recherche opérationnelle peut être définie comme l'ensemble des méthodes et techniques rationnelles d'analyse et de synthèse des phénomènes de management du système d'information utilisables pour élaborer de meilleures décisions. La recherche opérationnelle propose des modèles conceptuels pour analyser des situations complexes et permet aux décideurs de faire les choix les plus efficaces. Les domaines et les outils faisant part à la recherche opérationnelle sont très vastes, parmi ces outils, on retrouve la théorie des graphes qui a interpellé plusieurs chercheurs et qui s'est développée d'une manière époustouflante au fil du temps, plusieurs résultats sont mis à l'oeuvre et ont été appliqués dans des domaines réelles touchant plusieurs secteurs [20].

La théorie des graphes est utilisée dans un grand nombre de domaines vu sa richesse en résultats théoriques et même d'applications aux problèmes du monde réel. Historiquement, cette théorie prend ses racines des travaux d'Euler au 18ème siècle, qui avait pour but l'étude du problème des ponts de Königsberg (actuellement Kaliningrad). Par ailleurs, elle s'est considérablement développée, pour devenir une théorie incontournable permettant la résolution de nombreux problèmes dans tous les domaines notamment la biologie, la physique, l'informatique, etc.

Le problème de coloration est au cours de la théorie des graphes et fait l'objectif de plusieurs recherches. Il est apparu en 1852, quand le problème des quatre couleurs a été posé pour la première fois par Francis Guthrie, lorsqu'il s'est demandé s'il est toujours possible de colorer n'importe quelle carte géographique en n'utilisant que quatre couleurs, de manière à éviter que deux pays voisins aient la même couleur. C'est qu'en 1976, que deux chercheurs américains, K. Appel et W.Haken ont pu répondre affirmativement à cette question à l'aide d'un calcul par ordinateur. Et depuis, les problèmes de coloration apparaissent dans plusieurs domaines pour modéliser de nombreux problèmes pratiques.

TABLE DES FIGURES

Dans ce manuscrit, nous intéressons principalement à l'étude de la coloration k -équitable dans les graphes. Après une introduction générale, le manuscrit autour de quatre chapitres suivant :

Dans le premier chapitre, nous nous rappelons quelques concepts de base de la théorie des graphes, ainsi que les définitions nécessaires utilisées tout au long de ce mémoire. Le deuxième chapitre consiste à la présentation et définition de la coloration et nous donnons un recueil des principaux résultats existants sur la coloration des sommets d'un graphe. Dans le troisième chapitre, nous introduisons des nouvelles classes de graphe pour lesquels la coloration k -équitable est déterminé. Le dernier chapitre est consacré à la partie application qui consiste à l'implémentation de l'algorithme de Welsh and Powell sur le langage de programmation C^{++} . Cette partie application confirme que les résultats obtenus théoriquement sont les même que ceux obtenus par le programme implémenté et aussi le déroulement de l'algorithme de Welsh and powell pour les nouvelles classes.

Enfin, nous donnons une conclusion et quelques perspectives.

Notion de base de la théorie de graphe

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons quelques notations et notions de base de la théorie des graphes qui seront utilisées tout au long de ce mémoire.

1.2 Définition et concepts de base

1.2.1 Graphe

Un graphe G est une collection d'éléments mis en relation entre eux, constitué d'un ensemble V non vide et fini de points $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ appelés sommets, et d'une famille $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ de paires distinctes de V appelés arêtes. Une arête e de l'ensemble E est définie par une paire de sommets, appelés extrémités.

Graphe G est représenté dans La Figure 1.1 :

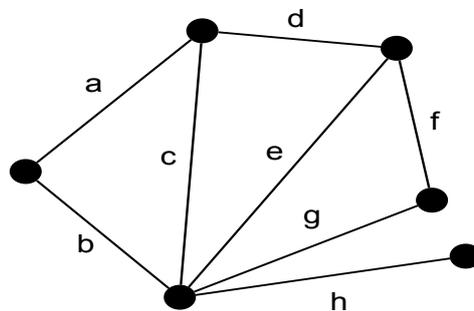


FIGURE 1.1 – Graphe G .

1.2.2 Graphe orienté

un graphe orienté $G = (V, E)$ est un couple formé de V un ensemble, appelé ensemble de sommets et E un ensemble appelé ensemble d'arêtes. Les arêtes sont alors nommées arcs, chaque arête étant un couple de sommets, représenté par une flèche.

La figure 1.2 représente un graphe orienté à 4 sommets.

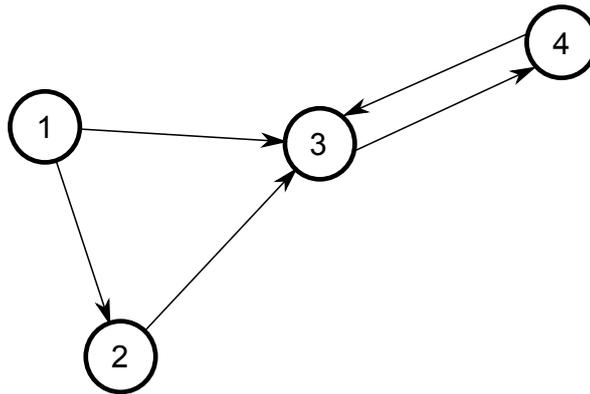


FIGURE 1.2 – Graphe orienté.

1.2.3 Graphe non orienté

Un graphe non orienté est un graphe dont les arêtes ne sont pas orientées et chaque arêtes e est représentée comme suit : $e = (v_i, v_j) = v_i v_j$.

De plus, les boucle sont interdites dans les graphes non-orientés.

La Figure 1.3 représente un graphe non orienté.

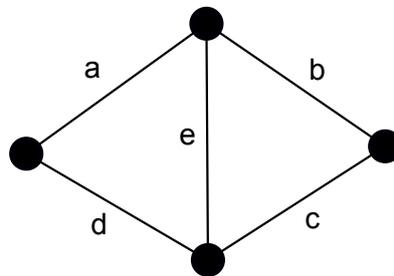


FIGURE 1.3 – Graphe non orienté.

1.2.4 Degrés

Soit $G = (V, E)$ un graphe, le degré d'un sommet v d'un graphe G , noté $d_{G(v)}$ est le nombre de liens (arêtes) reliant ce sommet. Un sommet de degré 0 est dit isolé.

Proposition 1.2.1. (*Lemme des poignées de mains*)

Pour tout graphe $G = (V, E)$ on a :

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E(G)|$$

- Le degré maximum d'un graphe G noté $\Delta(G)$ est le maximum des degrés des sommets de G , $\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} d_G(v)$.

- Le degré minimum d'un graphe G noté $\delta(G)$ est le minimum des degrés des sommets de G , $\delta(G) = \min_{v \in V(G)} d_G(v)$.

1.2.5 Graphe partiel

Soit $G = (V, E)$ un graphe, Le graphe $G' = (V, E')$ est un graphe partiel de G si E' est inclus dans E . Autrement dit, on obtient G' en enlevant une ou plusieurs arêtes de graphe G .

La Figure 1.4 représente un graphe G et son graphe partiel.

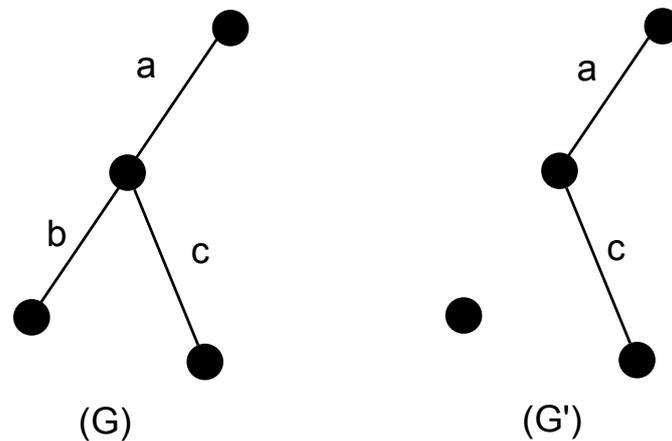


FIGURE 1.4 – Graphe G et son graphe partiel G' .

1.2.6 Sous-Graphe

Un sous graphe $G = (V, E)$ engendré par l'ensemble de sommets $B \subseteq V$, est le graphe : $G_B = (B, E_B)$ où $E_B = \{e = \{x, y\} \in E \mid x \in B \text{ et } y \in B\}$.

La Figure 1.5 représente un graphe G et son sous graphe G' .

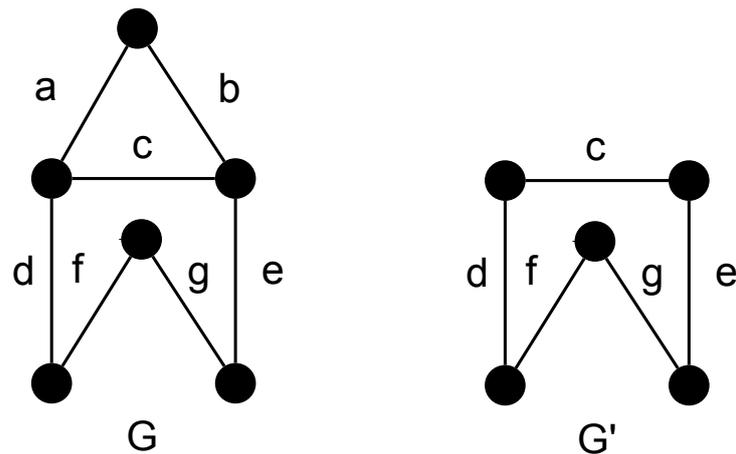


FIGURE 1.5 – Le graphe G et son sous graphe G' .

1.2.7 Chaines et cycles

Chaine : Une chaine entre deux sommets v_0 et v_k dans un graphe G est une suite de sommets reliés par des arêtes telle que deux sommets successifs ont une arête commune. On note la chaine par (v_0, v_1, \dots, v_k) .

- Le premier et le dernier sommets sont appelés les extrémités de la chaine.
- La longueur de la chaine est égale au nombre d'arêtes qui la composent.
- Une chaine qui n'utilise pas deux fois le même sommet est dite **élémentaire**.
- Une chaine qui n'utilise pas deux fois la même arêtes est dite **chaine simple**.

Cycle : Un cycle est une chaine dont les extrémités initiale et finale sont confondues.

- Un cycle élémentaire est un cycle minimal pour l'inclusion qui ne contient aucun autre cycle.

1.2.8 Connexité

Un graphe G est dit connexe si pour tout couple de sommet u et v , il existe une chaîne reliant u et v [3].

La Figure 1.6 représente un graphe connexe :

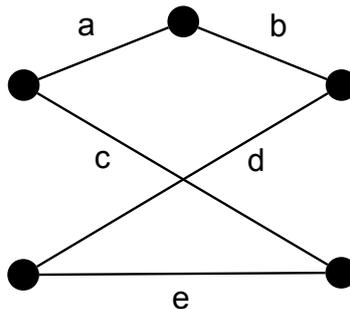


FIGURE 1.6 – Graphe connexe.

1.2.9 Clique

Une clique d'un graphe non orienté G est un sous-ensemble des sommets de G dont le sous-graphe induit est complet, c'est-à-dire que deux sommets quelconques de la clique sont toujours adjacents.

La taille de la plus grande clique dans G est notée $\omega(G)$.

1.2.10 Stable

Dans un graphe G un stable est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents. La taille d'un stable est égale au nombre de sommets qu'il contient.

la Figure 1.7 représente le stable et la clique d'un graphe G :

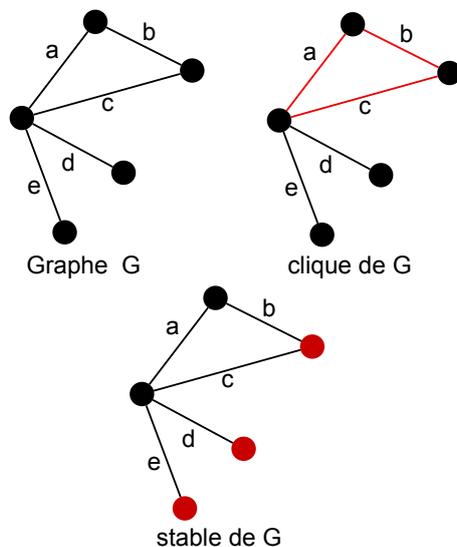


FIGURE 1.7 – Clique et stable de graphe G

1.2.11 Couplage

Un couplage d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble d'arêtes $M \in E$ deux à deux non adjacentes. Un sommet u est saturé par un couplage M , s'il existe une arête de M incidente à u , un couplage qui sature tous les sommets de G est appelé couplage parfait.

La figure 1.8 représente un couplage parfait :

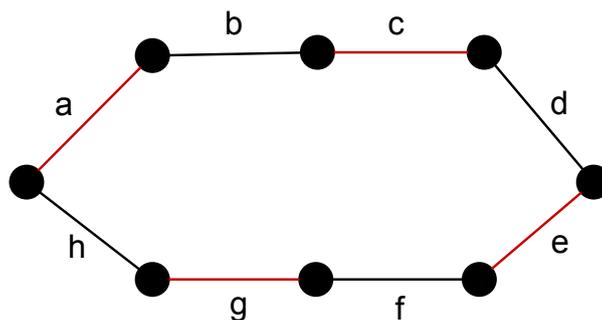


FIGURE 1.8 – Couplage parfait.

1.2.12 Identification de deux sommets

Identification de deux sommets u et v consiste à remplacer les sommets u et v par un sommet w relié à tous les sommets adjacents à u et à tous les sommets adjacents à v .

La figure 1.9 représente l'identification de deux sommets de graphe G et G' :

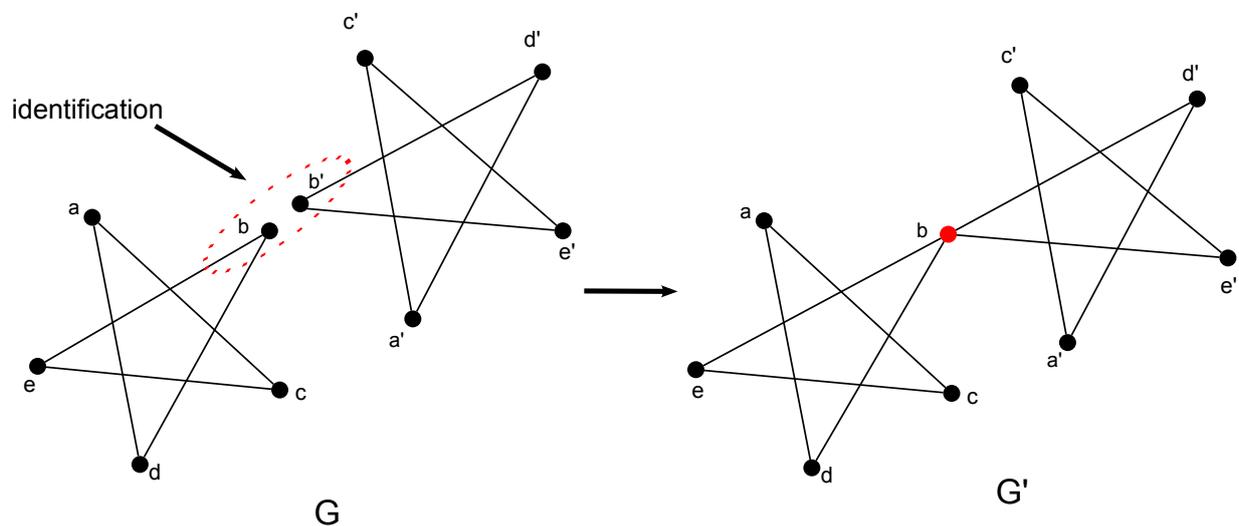


FIGURE 1.9 – Identification de deux sommets.

1.3 Opérations classiques sur les graphes

1.3.1 Somme Cartésienne

Soient deux graphes $G = (V(G), E(G))$ et $G' = (V(G'), E(G'))$, la somme cartésienne de G et de G' , notée $G \square G'$ dont l'ensemble de sommets est égale à $V(G) \times V(G')$, tel que deux sommets (u, u') et (v, v') sont adjacents si seulement si :

$$u = v \text{ et } u'v' \in E(G') \text{ où } uv \in E(G) \text{ et } u' = v'$$

La somme cartésienne de deux graphes G et G' possède les propriétés suivantes :

- L'ordre de graphe $G \square G'$ est égale à $|V(G)||V(G')|$.
- La taille du graphe $G \square G'$ est égale à $|V(G)||E(G')| + |V(G')||E(G)|$.

La figure 1.10 représente la somme cartésienne de graphe G et G' :

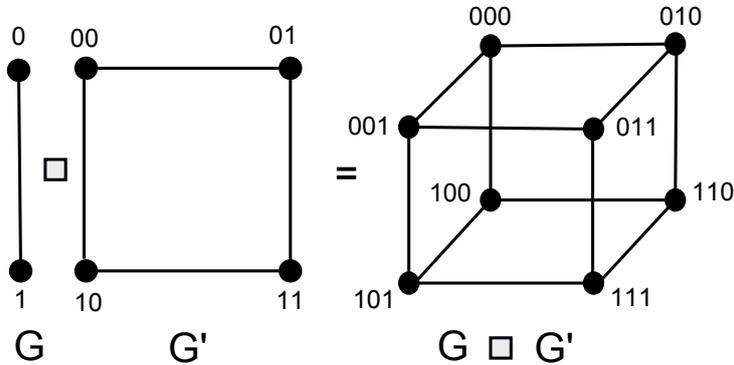


FIGURE 1.10 – Somme Cartésienne de $G \square G'$.

1.3.2 Produit Cartésien

Soit deux graphes $G = (V(G), E(G))$ et $G' = (V(G'), E(G'))$, le produit cartésien de G par G' , noté $G \times G'$ est le graphe défini sur l'ensemble de sommets $V(G) \times V(G')$ tel que deux sommets (u, u') et (v, v') sont adjacents si seulement si :

- $uv \in E(G)$ et $u'v' \in E(G')$.

La figure 1.11 représente le produit Cartésien de graphe G et G' :

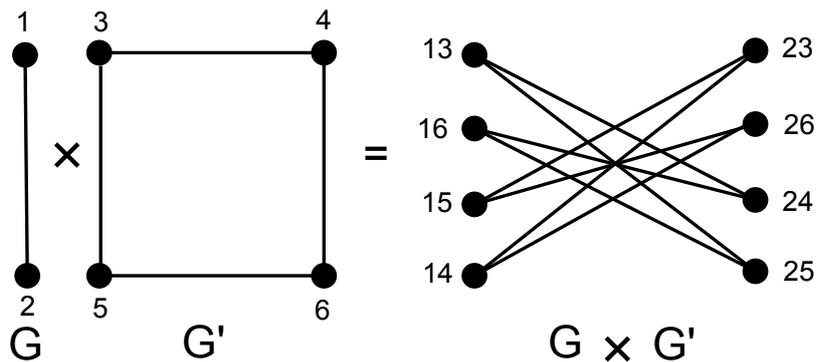


FIGURE 1.11 – Produit Cartésien de $G \times G'$.

1.4 Quelques types de graphe

1.4.1 Graphe complet

Un graphe $G = (V, E)$ est dit complet si tous les sommets sont deux à deux adjacents, c'est-à-dire que tout couple de sommets disjoints est relié par une arête, le graphe complet à n sommet noté K_n .

La figure 1.12 représente le graphe complet K_5 :

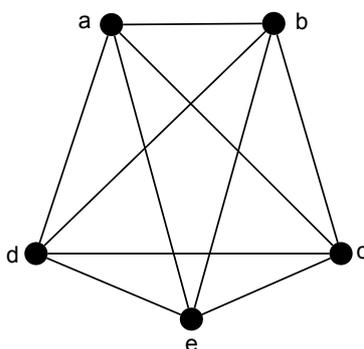


FIGURE 1.12 – Graphe complet.

1.4.2 Graphe biparti

Un graphe $G = (V, E)$ est dit biparti si son ensemble de sommets peut être divisé en deux sous-ensembles disjoints U et V tels que chaque arête a une extrémité dans U et l'autre dans V .

La figure 1.13 représente un graphe biparti :

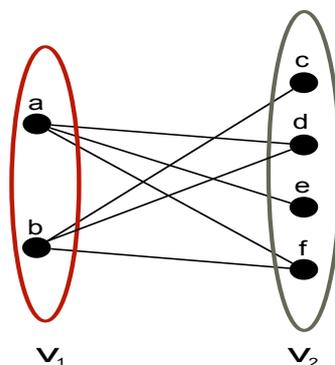


FIGURE 1.13 – Graphe biparti.

1.4.3 Graphe biparti complet

Un graphe est dit biparti complet s'il est biparti et chaque sommet du premier ensemble est relié à tous les sommets du second ensemble. Plus précisément, il existe une partition de son ensemble de sommets en deux sous-ensembles U et V telle que chaque sommet de U est relié à chaque sommet de V .

- Si le premier ensemble U est de cardinal m et le second ensemble V est de cardinal n , le graphe biparti complet est noté K_{mn} .

1.4.4 Graphe planaire

Un graphe G est dit planaire s'il peut être représenté sur le plan de manière que deux arêtes ne se rencontrent pas en dehors de leurs extrémités.

La figure 1.14 représente un graphe planaire :

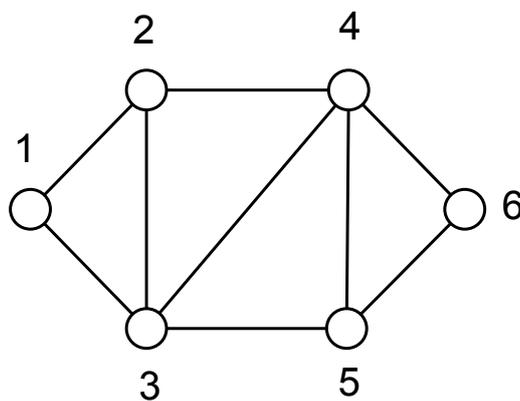


FIGURE 1.14 – Graphe planaire.

1.4.5 Graphe triangulé

Un graphe G est dit triangulé si tout cycle dans G de longueur supérieure à 3 admet une corde (une arête qui relie deux sommets non adjacents dans un cycle).

La figure 1.15 représente un graphe triangulé :

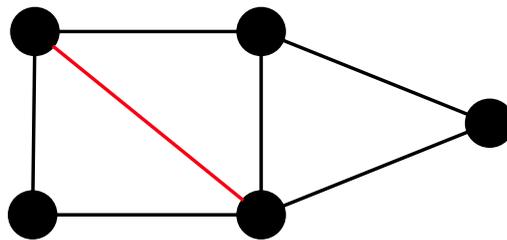


FIGURE 1.15 – Graphe triangulé.

1.4.6 Arbre et ses propriétés

Soit G un graphe non orienté d'ordre $n > 2$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- G est connexe et sans cycle.
- G est sans cycle et possède $n - 1$ arêtes.
- G est connexe et possède $n - 1$ arêtes.
- G est sans cycle et si on ajoutant une arête , on crée un et un seul cycle.
- G est connexe et si on supprime une arête , il n'est plus connexe.
- Il existe une chaîne et une seule entre toutes paires de sommets.

Théorème 1.4.1. [3]

Un arbre T admet au moins deux sommets pendants.

La figure 1.16 représente un arbre à 11 sommets :

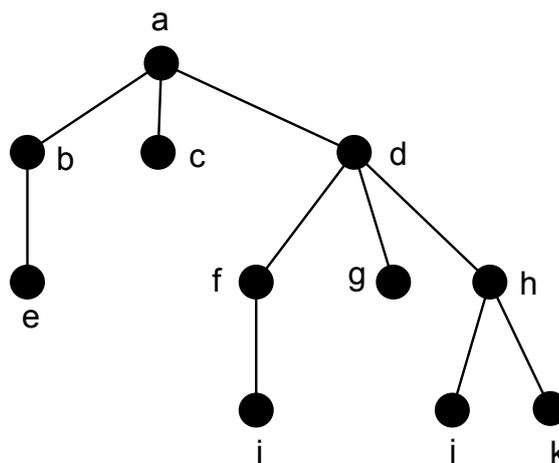


FIGURE 1.16 – Arbre.

1.5 Mode de représentation graphique

1.5.1 Matrice d'adjacence

Soit un graphe $G = (V, E)$ qui possède n sommets, on appelle la matrice d'adjacence de G de dimension $n * n$ est la matrice carrée $M=(m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec :

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } x_i x_j \in E \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

La matrice d'adjacence de graphe G est :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La figure 1.17 représente un graphe à 7 sommets associé à la matrice M :

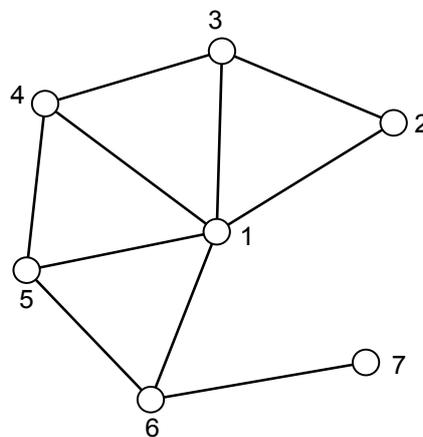


FIGURE 1.17 – Graphe associé à la matrice M .

1.5.2 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné un aperçu sur les notions de base et notation de la théorie des graphes. Nous avons également présenté quelques types de graphes à savoir graphe bipartite, graphe complet (Clique), arbres. Afin de manipuler certains graphes nous avons abordé aussi dans cette partie la représentation matricielle.

Chapitre 2

Coloration des sommets dans les graphes

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons traiter le problème de la coloration des sommets, nous allons commencer à donner les domaines d'applications de cette coloration et quelques définitions nécessaires, des algorithmes et des propriétés relatives à ce problème étudié.

2.2 Domaine d'application

La coloration des sommets dans la théorie des graphes trouve de nombreuses applications pratiques dans divers domaines :

- L'affectation de fréquences dans les réseaux cellulaires.
- L'ordonnement.
- Planification des emplois du temps.
- La gestion de chaînes logistiques.
- La gestion du trafic aérien.
- Les interférences téléphoniques.
- Cartographie des régions.

2.3 Types de coloration

2.3.1 Coloration simple

La coloration de graphe $G = (V, E)$ consiste à attribuer une couleur à chacun de ses sommets de manière que deux sommets reliés par une arête soient de couleur différente.

- On cherche souvent à utiliser le nombre minimal de couleurs, appelé nombre chromatique de G est noté $\chi(G)$.
- Une coloration utilisant K couleurs est dite K -coloration .

La figure 2.1 représente la coloration simple des sommets :

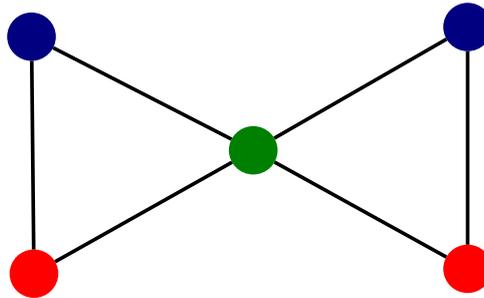


FIGURE 2.1 – Coloration simple.

2.3.2 Coloration k-équitable

Soit $G = (V, E)$ un graphe, la coloration K -équitable est une coloration des sommets du G ou le nombre de sommets coloriés par la couleur C_i est égale au nombre de sommets coloriés par la couleur C_j , $\forall (i,j) \in \{1, \dots, k\}$, avec $i \neq j$.

La figure 2.2 représente une coloration K -équitable d'un graphe G à 6 sommets :

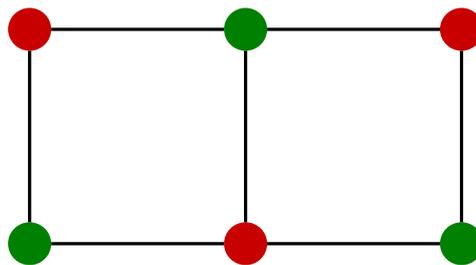


FIGURE 2.2 – Coloration k-équitable.

2.4 Nombre Chromatique

Le nombre chromatique dans un graphe G noté par $\chi(G)$ est le nombre minimal de couleurs qu'on doit utiliser pour colorer tous les sommets d'un graphe en s'assu-

rant que deux sommets adjacents ne soient pas de la même couleur.

L'obtention d'un nombre chromatique dans certains graphes est très compliqué à déterminer, pour cela la majorité ont étudiés l'encadrement du nombre chromatique.

2.4.1 Majoration du nombre Chromatique

Le nombre chromatique d'un graphe G est inférieur ou égale à $\Delta(G)$.

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1 \quad \dots \dots (1)$$

Avec $\Delta(G)$ est le plus grand degré des sommets de graphe G .

La Figure 2.3 représente un exemple qui vérifié la relation (1).

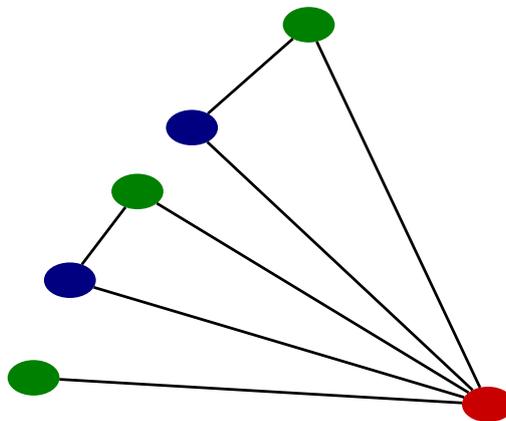


FIGURE 2.3 – Exemple.

2.4.2 Minoration du nombre Chromatique

Le nombre chromatique d'un graphe G est supérieur ou égale à l'ordre de sa plus grande clique, on a alors :

- $\chi(G) \geq \omega(G)$ ou $\omega(G)$ est la taille maximum des cliques du graphe G [27].

Preuve : Ce résultat découle de la définition même du nombre chromatique.

- Le nombre chromatique du graphe sera supérieur ou égal à l'ordre de sa plus grande clique, que l'on note $\omega(G)$. Autrement dit, $\chi(G) \geq \omega(G)$

Définition 2.4.1. *Dans une clique d'ordre m , tous les sommets sont adjacents entre eux, il faudra m couleurs. Donc, il faudra au moins $\chi(G)$ couleurs pour colorer le graphe G [9].*

Théorème 2.4.1. [9]

Pour tout graphe connexe G qui n'est pas complet et qui n'est pas un cycle impair on a :

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

Définition 2.4.2. *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple d'ordre n , alors :*

$$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1 \text{ [32]}.$$

Théorème 2.4.2. (Brooks 1941) [32]

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple d'ordre n , On a l'encadrement suivant :

$$\frac{n}{\alpha(G)} \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

où $\Delta(G)$ est le degré maximal des sommets du G et $\alpha(G)$ est le cardinal de la plus grande partie stable.

Proposition 2.4.1. *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple d'ordre n alors :*

$$\chi(G) = \alpha(G) + 1.$$

2.5 Quelques algorithmes de coloration

2.5.1 Algorithme WELSH and POWELL

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple et connexe :

Étape 1 :

- Ordonner les sommets selon l'ordre décroissant de leur degré ;
- Donner à chaque sommet, son numéro d'ordre dans la liste obtenue ;

Étape 2 :

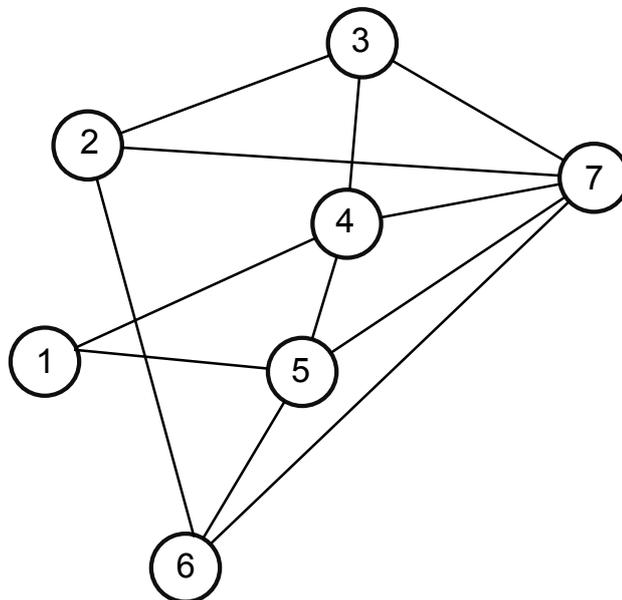
- Parcourir la liste dans l'ordre en attribuant une couleur non encore utilisée, au premier sommet non encore colorié ;
- Attribuer cette même couleur en suivant la liste à chaque sommet non encore colorié et non adjacent à un sommet de cette couleur ;

Étape 3 :

- Revenir à l'étape 2, tant qu'il reste des sommets non coloriés ;
- Sinon s'arrêter : la coloration du graphe est terminée [27].

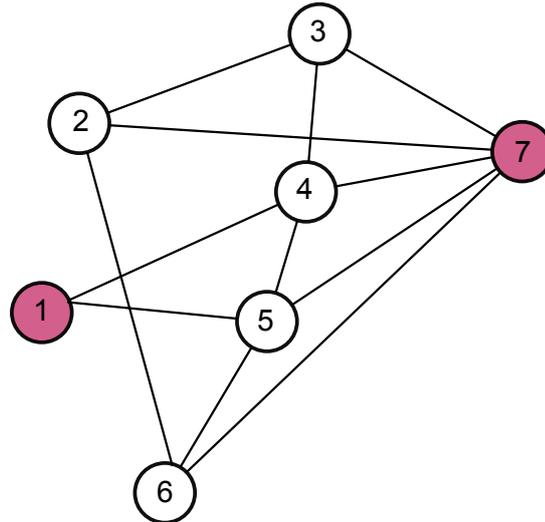
Exemple d'application de l'algorithme Welsh and Powell :

Considérons le graphe G suivant :

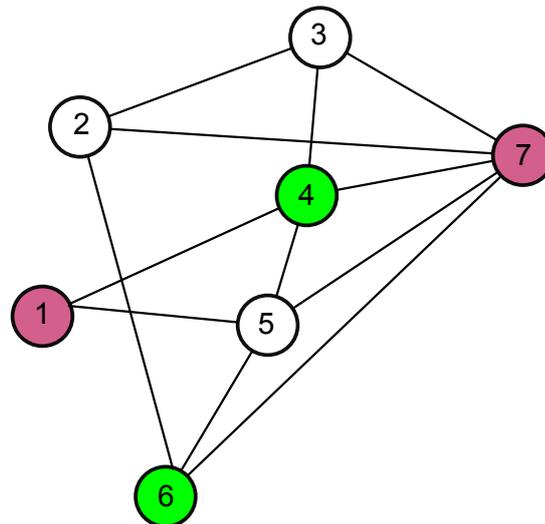


D'après l'algorithme Welsh and Powell :

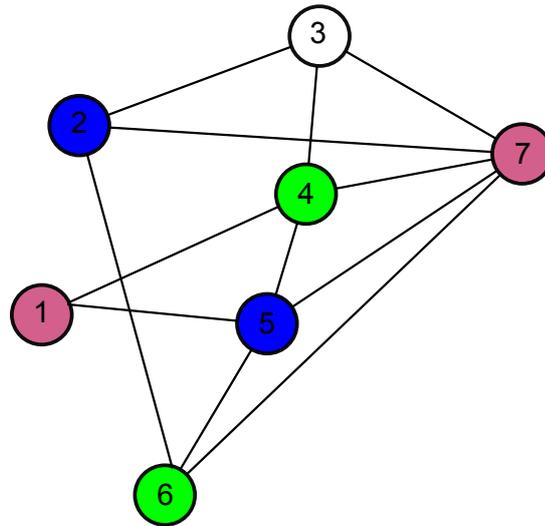
- la liste des sommets classés dans l'ordre décroissant de leurs degrés est : 7, 4, 5, 2, 3, 6, 1.
- À la première étape, on affecte une couleur mauve (C_1) aux sommets 7 qui possède le plus grand degré et on attribue cette couleur au sommet 1 qui n'est pas adjacent au sommet 7. (Voir les Figures)



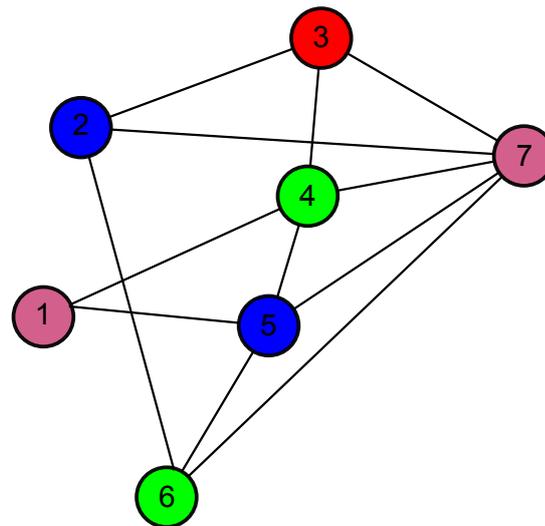
- À la deuxième étape, on affecte une couleur vert (C_2) aux sommets 4 ayant le plus grand degré, et on attribue cette couleur au sommet 6 qui n'est pas adjacent au sommet 4 non encore colorié.



- À la troisième étape, on affecte une couleur bleu (C_3) aux sommets 5 ayant le plus grand degré, et on attribue cette couleur au sommet 2 qui n'est pas adjacent au sommet 5 non encore colorié.



- À la quatrième étape, on affecte une couleur rouge (C_4) aux sommet 3 ayant le plus grand degré parmi les sommets non encore coloriée.



- Tous les sommets sont colorés alors la coloration est terminée, donc on arrête.

Les étapes utilisées pour ce graphe sont résumés dans le tableau suivant :

Sommets(degré)	7(5)	5(4)	4(4)	6(3)	3(3)	2(3)	1(2)
Etape 1	c_1						c_1
Etape 2		c_2		c_2			
Etape 3			c_3			c_3	
Etape 4					c_4		

2.5.2 Algorithme de DSATEUR

On considère un graphe $G = (V, E)$ simple et connexe. Pour chaque sommet v de V , on calcule le degré de saturation $\mathbf{DSAT}(v)$ de manière suivante :

Si aucun voisin de v n'est colorié alors

$$\mathbf{DSAT}(v) = \text{degré}(v)$$

Sinon $\mathbf{DSAT}(v)$ = le nombre de couleurs différentes utilisées dans le premier voisinage de v .

L'algorithme **DSATEUR** est un algorithme de coloration séquentiel, au sens où il colorie un seul sommet à la fois tel que :

Au départ le graphe n'est pas colorié.

On colorie un sommet non déjà colorié.

On stoppe **DSATUR** quand tous les sommets de G sont coloriés.

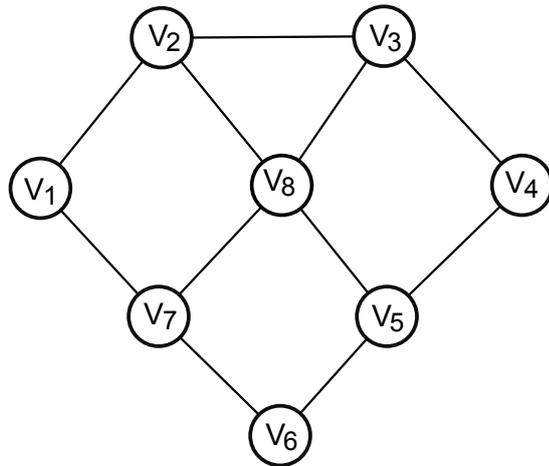
Dans le détail l'algorithme est le suivant :

1. Ordonner les sommets par ordre décroissant de degré.
2. Colorier un sommet de degré maximum avec la couleur 1.
3. Choisir un sommet non colorié avec **DSAT** maximum. Si conflit, choisir celui avec degré maximum.
4. Colorier ce sommet par la plus petite couleur possible.
5. Si tous les sommets sont coloriés alors on arrête.

Sinon aller en 3 [28].

Exemple d'application de l'algorithme Dsateur :

Nous allons appliqué l'algorithme de **Dsateur** pour le graphe suivant :

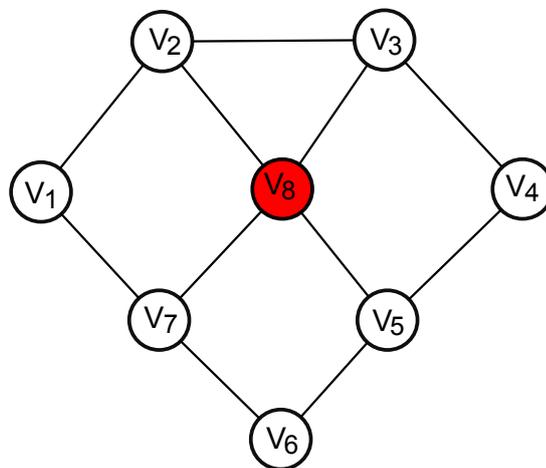


- On ordonne les sommets par ordre décroissant de leurs degré.

on obtient le tableau suivant :

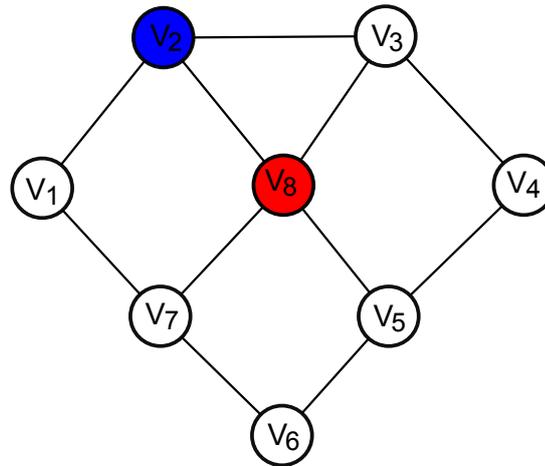
Sommet	V_8	V_2	V_3	V_5	V_7	V_1	V_4	V_6
degré	4	3	3	3	3	2	2	2

- On prend le sommet le plus haut **DSAT** (le plus grand degré) soit le sommet V_8 , on lui affecte la première couleur soit le rouge.

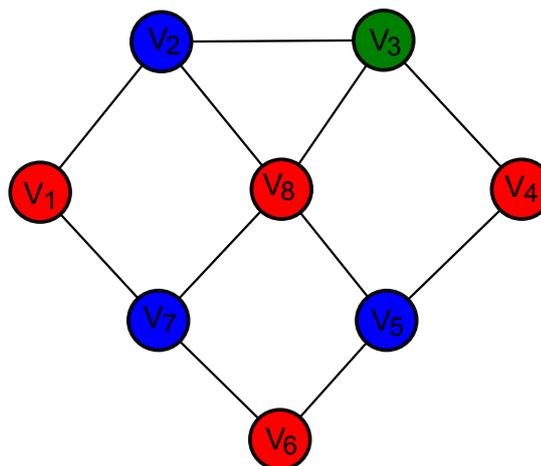


Puis, on passe à la mise à jour des **DSAT** des voisins du sommet déjà coloré.

- On prend le sommet de plus haut DSAT, Nous allons prendre le sommet V_2 . On lui affecte la deuxième couleur minimale soit bleu.



On fait la même chose pour les autres sommets, on obtient le graphe coloré suivant :



2.5.3 Algorithme de coloration à jeton

La coloration s'effectue par circulation d'un jeton, c'est-à-dire qu'à un instant donné, un seul sommet du graphe est en train de choisir une couleur. La circulation du jeton se fera sur l'arbre recouvrant exclusivement. Cet arbre se construira au fur et à mesure de la coloration, par l'envoi ou non de la couleur à ses voisins.

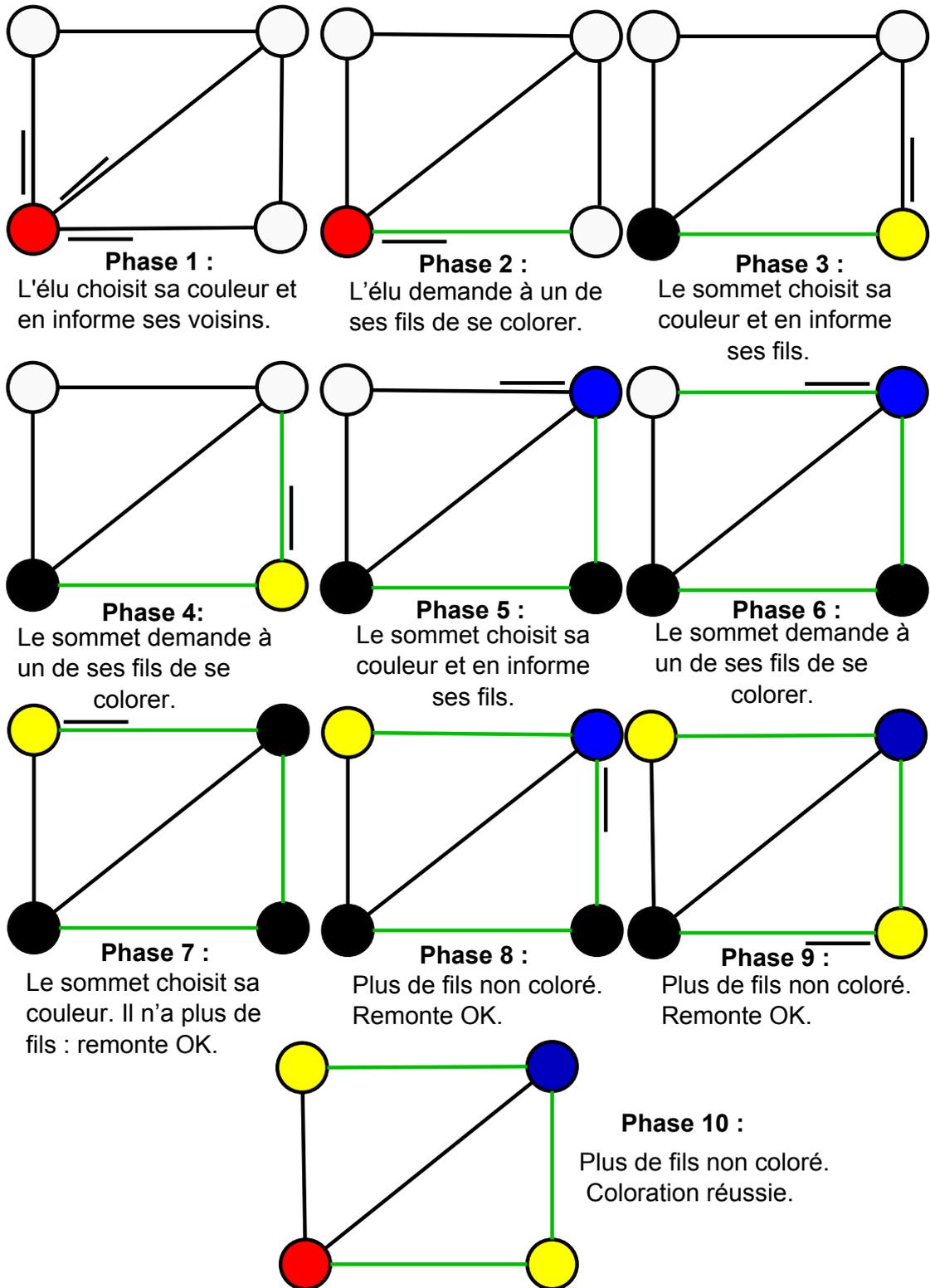
Dans le graphe, un sommet aura des voisins, un père, des aïeuls, et des fils.

- Voisins : tous les sommets voisins.

- Père : le sommet qui lui a demandé de se colorer.
- Aïeux : tous les voisins colorés (ils se sont colorés avant moi).
- Fils : tous mes voisins non colorés.

Un sommet donné ne communiquera sa couleur qu'à ses Fils. Ses Aïeux, qui sont prioritaires sur lui pour choisir leur couleur n'ont pas besoin de connaître sa couleur [5].

Exemple d'application de l'algorithme à jeton :



2.5.4 Conclusion

Ce chapitre est consacré à la présentation de la coloration des sommets dans des graphes, ainsi que des domaines d'applications. Ensuite, nous avons présenté quelques algorithmes de colorations des sommets dans les graphes qui seront utiles tout au long de notre projet d'étude.

Coloration des sommets de nouvelles classes de graphe

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons caractériser des nouvelles classes des graphes, pour lesquels nous allons déterminer inductivement la coloration optimale des sommets.

3.2 Classe W_n^3 :

Le graphe W_n^3 , ($n \geq 1$) est obtenu inductivement comme suit :

- Pour $n = 1$, W_1^3 est le graphe complet K_3 .
- Pour $n = 2$, W_2^3 est le graphe de la figure 3.1 :

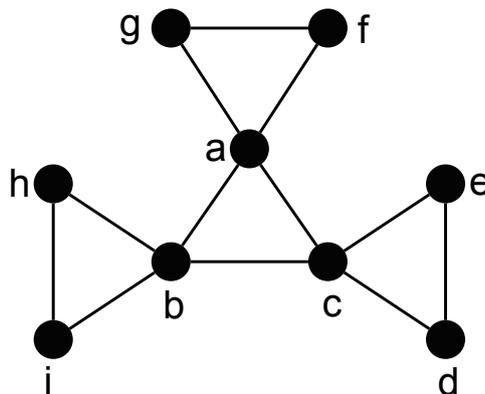


FIGURE 3.1 – Graphe W_2^3 .

CHAPITRE 3. COLORATION DES SOMMETS DE NOUVELLES CLASSES DE GRAPHE

- Pour $n \geq 3$, W_n^3 est obtenu à partir d'une copie de W_{n-1}^3 et $(3 \times 2^{n-2})$ copies disjointes de W_1^3 , tels que chaque sommet de degré 2 de W_n^3 est identifié avec un seul sommet de degré 2 d'une copie de W_1^3 .

Le graphe W_3^3 et W_4^3 sont montrés respectivement sur la figure 3.2 :

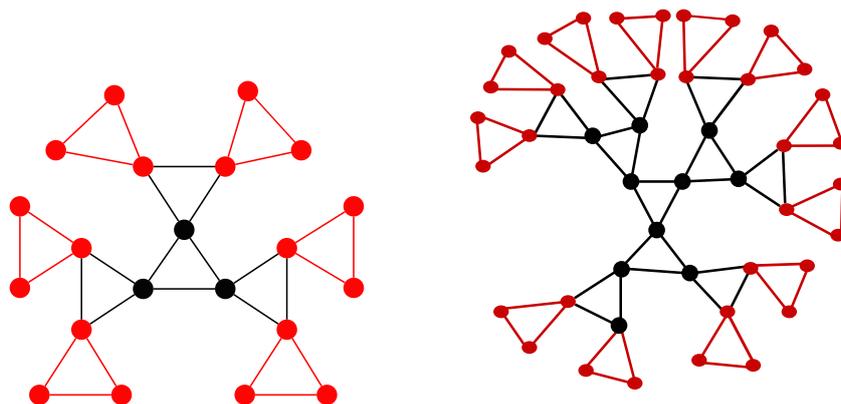


FIGURE 3.2 – Graphe W_3^3 et W_4^3 .

Théorème 3.2.1. *Pour tout $n \geq 1$, W_n^3 admet une coloration 3-équitables tels que $\forall p \in \{1, 2, 3\}$, le nombre de sommets coloriés par p dans W_n^3 est $C_{(n,p)} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k$.*

Preuve : montrons par récurrence sur n que $\forall n \geq 1$, W_n^3 admet une coloration 3-équitables, Il est clair que W_1^3 et W_2^3 possèdent une coloration 3-équitables.

La figure 3.3 montre la coloration 3-équitables de W_1^3 et W_2^3 respectivement :

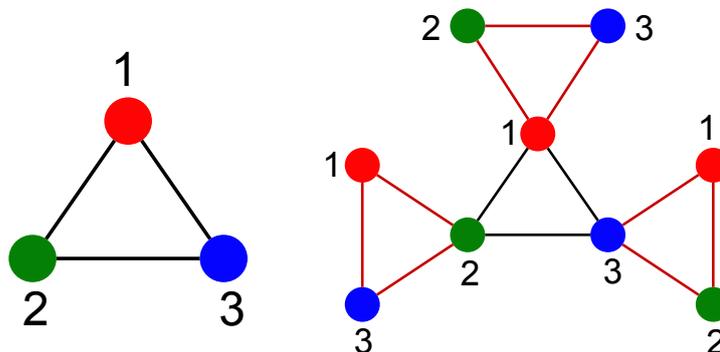


FIGURE 3.3 – Coloration 3-équitables.

Dans la figure 3.3 on a :

- $C_{(1,1)} = C_{(1,2)} = C_{(1,3)} = 1$
- $C_{(2,1)} = C_{(2,2)} = C_{(2,3)} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 3.$

Démonstration

Supposons que la propriété est vraie à l'ordre n , c'est à dire W_n^3 admet une coloration 3-équitable et $\forall p \in \{1, 2, 3\}$, le nombre de sommets coloriés par p dans W_n^3 est $C_{(n,p)} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k$. Puis montrons que W_{n+1}^3 reste coloration 3-équitable, $\forall p \in \{1, 2, 3\}$ le nombre de sommets coloriés par p dans W_{n+1}^3 est $C_{(n+1,p)} = \sum_{k=0}^n 2^k$.

Comme W_{n+1}^3 est obtenu à partir d'une copie de W_n^3 et de $3 \times 2^{(n-1)}$ copies disjointes de W_1^3 tels que chaque sommet de degré 2 de W_n^3 est *identifié* avec un seul sommet de degré 2 d'une copie de W_1^3 .

Supposons que le sommet de degré 2 de W_n^3 identifié avec un sommet y_1 de W_1^3 de degré 2 est colorié par $p \in \{1, 2, 3\}$ alors on va colorier les deux autres sommets y_2, y_3 de W_1^3 respectivement par $i, j \in \{1, 2, 3\} - \{p\}$ avec $i \neq j$.

Si on va procéder de la même manière pour les $(3 \times 2^{n-1}) - 1$ copies de W_1^3 , on obtient $2(3 \times 2^{n-1})$ couleurs des sommets de $V(W_{n+1}^3) - V(W_n^3)$, tels que 2^n sont coloriés par 1, 2^n sont coloriés par 2 et 2^n sont coloriés par 3.

Comme dans W_n^3 on a chaque couleur $i \in \{1, 2, 3\}$ est observée : $\sum_{k=0}^{n-1} 2^k$ (hypothèse de récurrence), si on va prendre en considération la coloration des sommets de $V(W_{n+1}^3) - V(W_n^3)$, alors $\forall p \in \{1, 2, 3\}$, le nombre de sommets coloriés par p dans W_{n+1}^3 est :

$$C_{(n+1,p)} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k + 2^n = \sum_{k=0}^n 2^k.$$

CHAPITRE 3. COLORATION DES SOMMETS DE NOUVELLES CLASSES DE GRAPHE

Par exemple pour, W_3^3 on a : $W_3^3 = W_{2+1}^3$, alors :

$$C_{(2+1,1)} = C_{(2+1,2)} = C_{(2+1,3)} = \sum_{k=0}^{(2+1)-1} 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2 = 7.$$

Comme le montre la figure 3.4 :

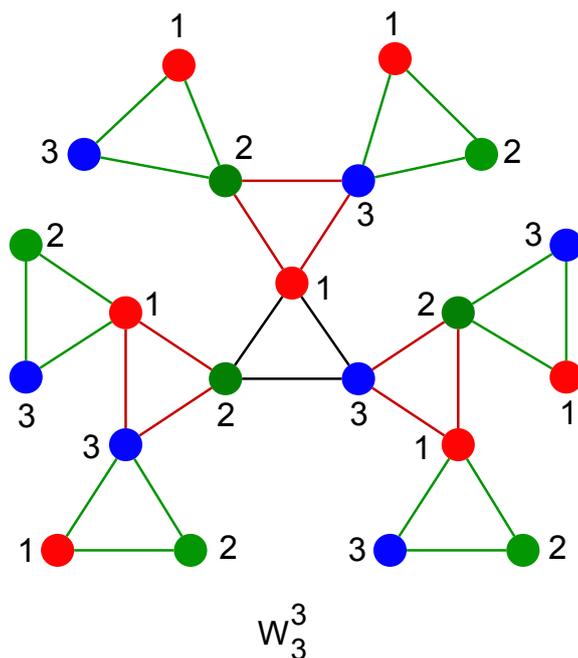


FIGURE 3.4 – Coloration 3-équitable.

3.3 Classe W_n^4

La classe W_n^4 , ($n \geq 1$) est obtenu inductivement comme suit :

- Pour $n = 1$, le graphe W_1^4 est la clique K_4 donnée par la figure 3.5 :

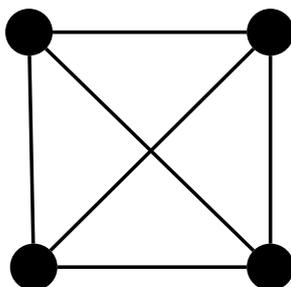


FIGURE 3.5 – Graphe W_1^4 .

- Pour $n \geq 2$, le graphe W_n^4 est obtenu à partir d'une copie de W_{n-1}^4 et de $4 \times 3^{n-2}$ copies disjointes de W_1^4 tels que chaque sommet de degré 3 de W_{n-1}^4 est identifié avec un seul sommet de degré 3 d'une copie de W_1^4 .

La figure 3.6 représente les graphes W_2^4 et W_3^4 respectivement :

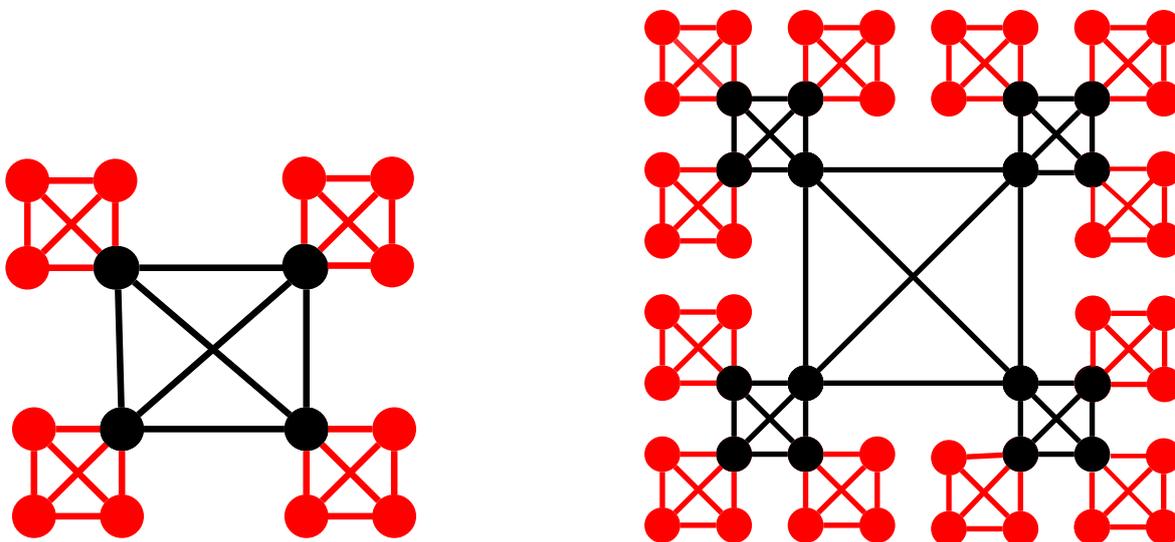


FIGURE 3.6 – Coloration 4-équitables.

Théorème 3.3.1. *Pour tout $n \geq 1$, W_n^4 admet une coloration 4-équitables, tels que $\forall p \in \{1, 2, 3, 4\}$, le nombre de sommets coloriés par p dans W_n^4 est $C_{(n,p)} = \sum_{k=0}^{n-1} 3^k$.*

Démonstration

Pour la preuve nous allons utiliser la récurrence sur n . Il est clair que W_1^4 et W_2^4 admettent une coloration 4-équitables. De plus :

- Dans W_1^4 on a : $C_{(1,1)} = C_{(1,2)} = C_{(1,3)} = C_{(1,4)} = 1 = 3^0$
- Dans W_2^4 on a : $C_{(2,1)} = C_{(2,2)} = C_{(2,3)} = C_{(2,4)} = 4 = 3^0 + 3^1$.

Comme il est illustré dans la figure 3.7 :

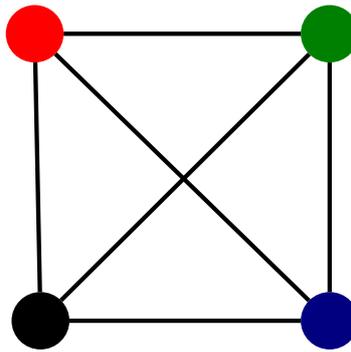


FIGURE 3.7 – Coloration 4-équitables.

Donc la propriété est vraie pour $n = 1$. Supposons que la propriété est vraie à l'ordre n , c'est à dire W_n^4 admet une coloration 4-équitables et $\forall p \in \{1, 2, 3, 4\}$, le nombre de sommets coloriés par p dans W_n^4 est $C_{(n,p)} = \sum_{k=0}^{n-1} 3^k$. Puis montrons que W_{n+1}^4 admet une coloration 4-équitables et $\forall p \in \{1, 2, 3, 4\}$, le nombre de sommets coloriés par p dans W_{n+1}^4 est $C_{(n,p)} = \sum_{k=0}^n 3^k$.

Comme W_{n+1}^4 est obtenu à partir d'une copie de W_n^4 et de $4 \times 3^{(n-1)}$ copies disjointes de W_1^4 tels que chaque sommet de degré 3 de W_n^4 est *identifié* avec un seul sommet de degré 3 d'une copie de W_1^4 .

Supposons que le sommet de degré 3 de W_n^4 *identifié* avec un sommet x_1 de W_1^4 de degré 3 est colorié par $p \in \{1, 2, 3, 4\}$, alors on va colorier les trois autres sommets $x_2, x_3,$

CHAPITRE 3. COLORATION DES SOMMETS DE NOUVELLES CLASSES DE GRAPHE

x_4 de W_1^4 respectivement par $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\} - \{p\}$ avec i, j, k sont différents.

Si on va procéder de la même manière pour les $((4 \times 3^{n-1}) - 1)$ copies de W_1^4 , on obtient $3(4 \times 3^{n-1})$ couleurs des sommets de $V(W_{n+1}^4) - V(W_n^4)$, tels que 3^n sont coloriés par 1, 3^n sont coloriés par 2, 3^n sont coloriés par 3 et 3^n sont coloriés par 4.

Comme dans W_n^4 on a chaque couleur $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ est observée :

$$\sum_{k=0}^{n-1} 3^k \text{ (hypothèse de récurrence).}$$

Si on va prendre en considération la coloration des sommets de $V(W_{n+1}^4) - V(W_n^4)$, alors $\forall p \in \{1, 2, 3, 4\}$, le nombre de sommets coloriés par p dans W_{n+1}^4 est :

$$C_{(n+1,p)} = \sum_{k=0}^{n-1} 3^k + 3^n = \sum_{k=0}^n 3^k.$$

La figure 3.8 montre comment obtenir la coloration 4-équitables de W_2^4 par identification à partir de W_1^4 :

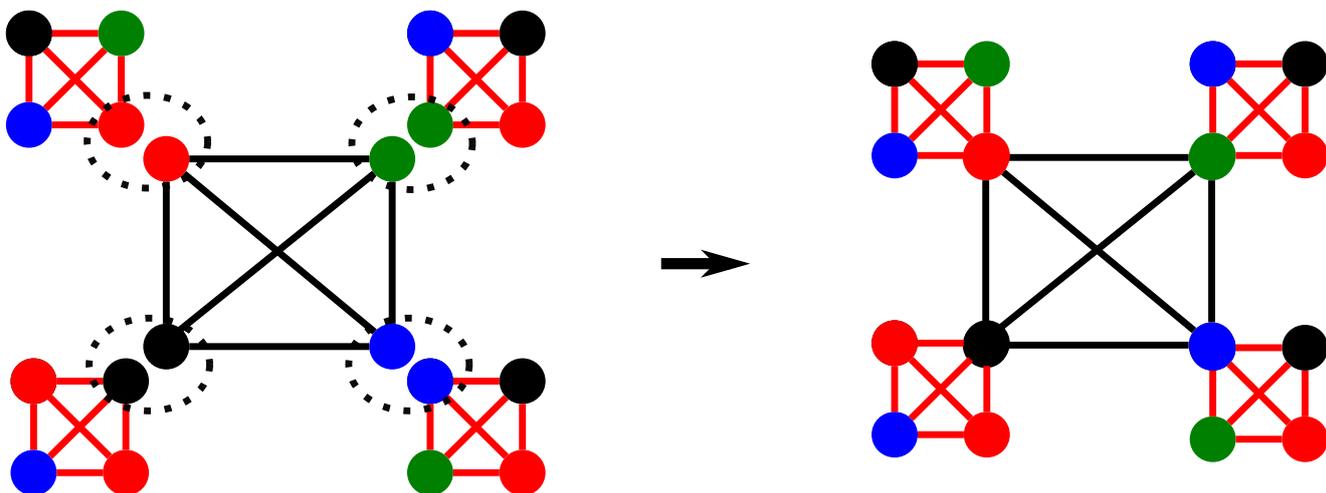


FIGURE 3.8 – Graphe W_2^4 .

CHAPITRE 3. COLORATION DES SOMMETS DE NOUVELLES CLASSES DE GRAPHE

La figure 3.9 montre comment obtenir la coloration 4-équitables par identification de graphe W_3^4 à partir de W_2^4 :

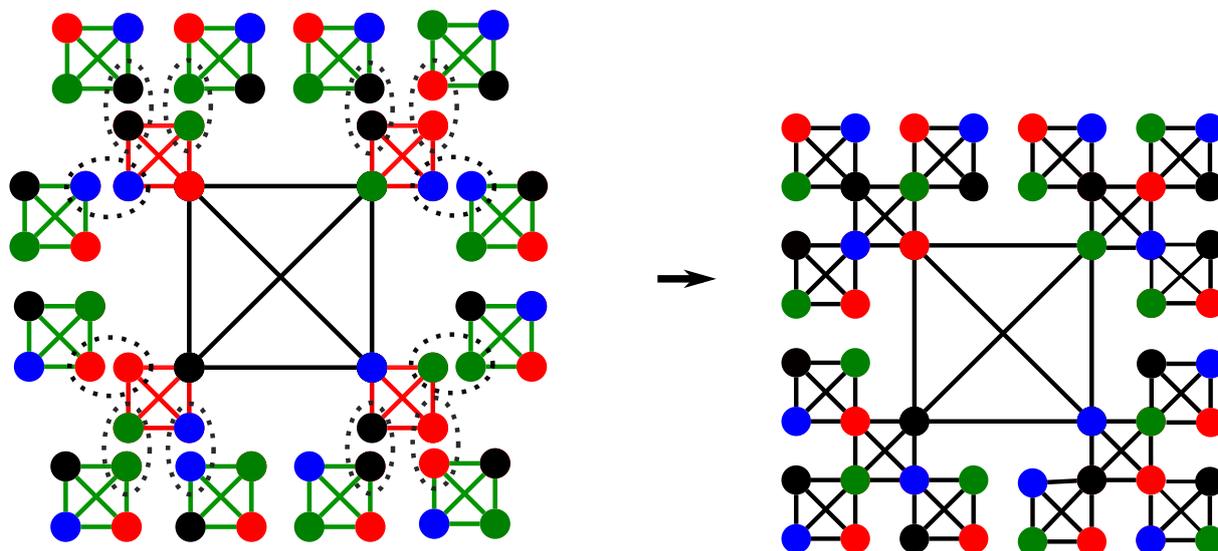


FIGURE 3.9 – Graphe W_3^4 .

En procédant de la même manière que les deux premières classe W_n^3 et W_n^4 , on peut définir la classe généralisée $(W_n^m)_{m \geq 3}$, de la manière suivante :

- Pour $n = 1$, W_1^m est la clique K_m avec $m \geq 3$.
- Pour $n \geq 2$, W_n^m est obtenu à partir d'une copie de W_{n-1}^m et de $m \times (m - 1)^{n-2}$ copies disjointes de W_1^m tels que chaque sommet de degré $(m - 1)$ est identifié avec un seul sommet de degré $(m - 1)$ d'une copie de W_1^m .

La figure 3.10 représente les graphes W_1^5 et W_2^5 respectivement :

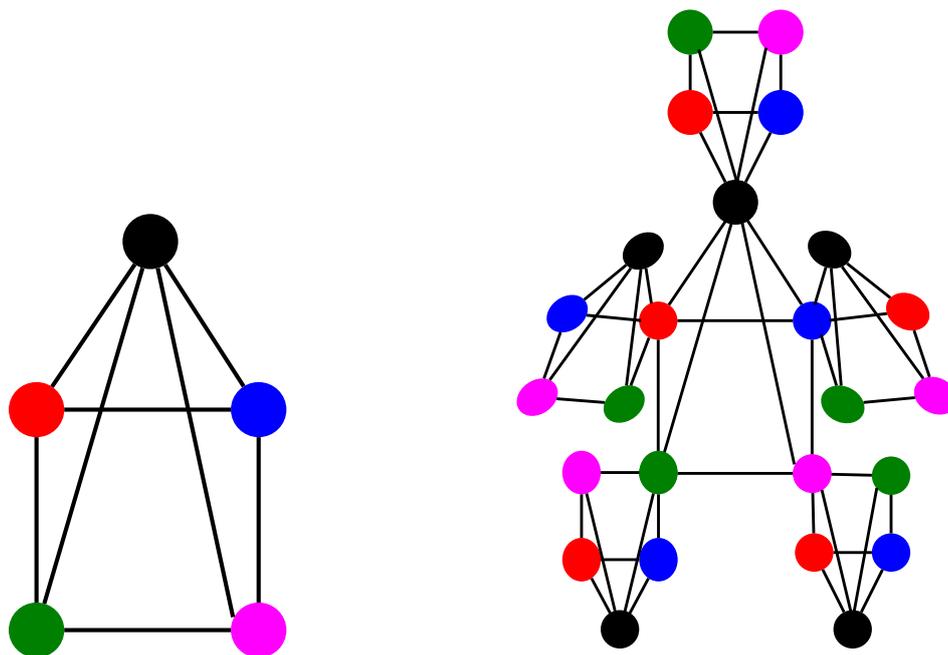


FIGURE 3.10 – Coloration 5-équitable.

Corollaire 3.3.2. *Pour tout $n \geq 1$, $(W_n^m)_{m \geq 5}$ admet une coloration m -équitable tels que le nombre de sommets coloriés par $p \in \{1, 2, \dots, m\}$ est : $\sum_{k=0}^{n-1} (m-1)^k$.*

La preuve de ce corollaire découle directement dans l'un des deux théorèmes précédents.

3.4 Conclusion

Ce chapitre fait l'objet de notre travail dans lequel nous avons introduit deux nouvelles classes de graphe en déterminant leur coloration K -équitable, par la suite nous avons donné une généralisation en introduisant une classe de graphe à partir d'une clique de taille m qui admet une coloration m -équitable.

Chapitre 4

Implémentation de l'algorithme de Welsh and Powell sur C^{++}

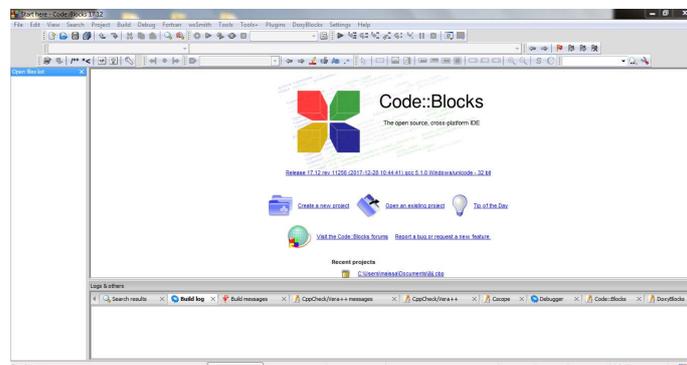
Ce chapitre est consacré à la partie application, dont lequel nous allons appliquer l'algorithme **Welsh and Powell** manuellement, il reste à aborder la partie pratique : l'implémenter de l'algorithme sur C^{++} pour confirmer les résultats théorique que nous avons donnés concernant les classes présentées dans le chapitre trois.

4.1 Introduction au Code Block

Code Blocks est un environnement de développement intégré libre et multiplate-forme. Il est écrit en C^{++} et utilise la bibliothèque wxWidgets. Code : :Blocks offre une plateforme pour développer des applications dans différents langages de programmation tels que C , C^{++} , et FORTRAN.

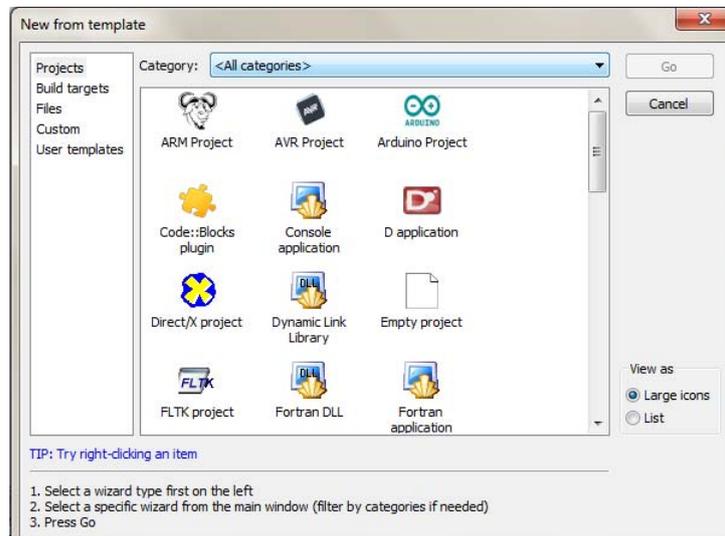
Code Blocks existe pour Linux, Windows et mac OS X. Des utilisateurs indiquent avoir réussi à compiler le code source FreeBSD.

La figure ci-dessous représente la fenêtre de l'interface utilisateur de Code-Blocks :



CHAPITRE 4. IMPLÉMENTATION DE L'ALGORITHME DE WELSH AND POWELL SUR C++

La première opération consiste à créer un nouveau projet : soit en cliquant sur **Create new project** soit en cliquant sur **New project** dans le menu **File** (raccourci clavier Ctl-Shift-n). Une fenêtre dialogue **New from template** s'ouvre et vous demande de choisir un modèle de projet (Voir les figures) :



Il existe des modèles prédéfinis de projets et on peut également choisir de créer seulement des fichiers

On choisit Application Console, une fenêtre nommée Application console s'ouvre on décide si l'on développe une application C ou C++. Ensuite, on spécifie le nom du projet et le dossier où il sera sauvegardé :



Enfin, pour construire et exécuter un projet éditez le fichier `main`, en allant à gauche dans la fenêtre Management dans Sources \rightarrow `main.c`. Ce fichier comporte la fonction `main` qui est la fonction principale du programme.

4.1.1 Déroulement de la classe W_2^3 avec l'algorithme Welsh and Powell et implémentation sur C^{++}

Le graphe associé à la classe W_2^3 est représentée dans la figure 4.1 :

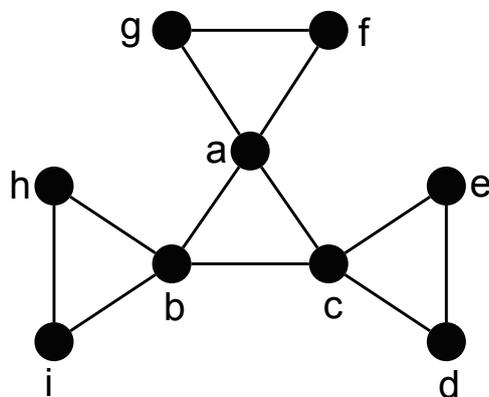
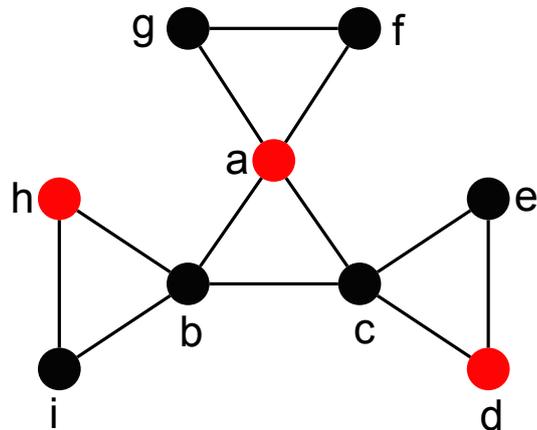


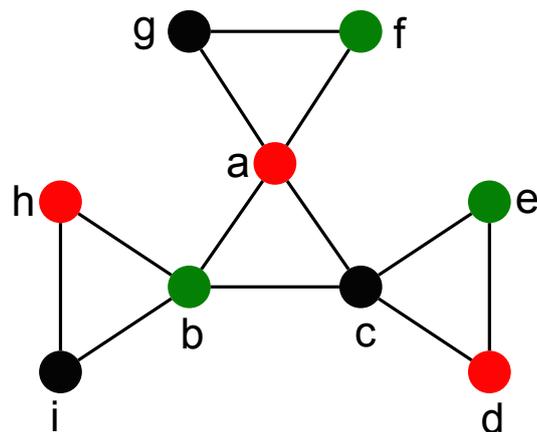
FIGURE 4.1 – Graphe W_2^3 .

Nous allons appliquer manuellement l'algorithme Welsh and Powell sur la classe W_2^3 :

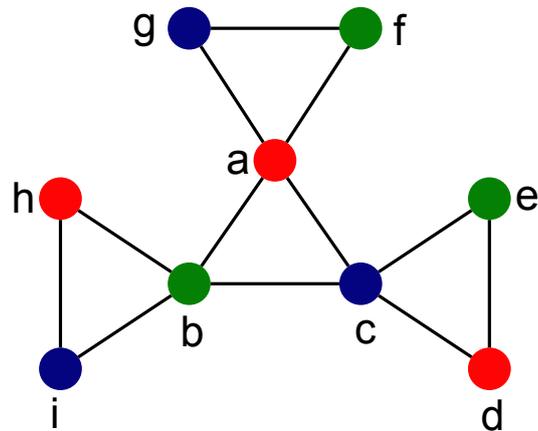
- La liste des sommets sont classés dans l'ordre décroissant de leurs degrés est : a, b, c, d, e, f, g, h, i.
- À la première étape, on affecte une couleur rouge aux sommets (a) qui possède le plus grand degré et on attribue cette couleur au sommet (d) et (h) qui ne sont pas adjacents au sommet (a). (Voir les figures)



- À la deuxième étape, on affecte une couleur vert aux sommets (b) ayant le plus grand degré, et on attribue cette couleur au sommet (e) et f qui ne sont pas adjacents au sommet (b) non encore colorié.



- À la troisième étape, on affecte une couleur bleu aux sommets (c) ayant le plus grand degré, et on attribue cette couleur au sommet (g) et (i) qui ne sont pas adjacents au sommet (c) non encore colorié.



- Tous les sommets sont colorés alors la coloration est terminée donc on arrête, On obtient une coloration 3-équitable.

Maintenant nous utilisons le langage de programmation C^{++} pour confirmer les résultats trouvés précédemment .

La matrice d'adjacence correspondante à cette classe est :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Après exécution du programme de welsch and powell en C^{++} sur la classe W_n^3 . La compilation du programme donne exactement les mêmes résultats trouvés manuellement :

```

input
a:color1
d:color 1
h:color 1
b:color2
e:color 2
f:color 2
c:color3
g:color 3
i:color 3
Graph full colored

...Program finished with exit code 0
Press ENTER to exit console.

```

FIGURE 4.2 – Coloration 3-équitables de W_2^3 obtenue par notre application.

4.1.2 Déroulement de la classe W_2^4 avec l'algorithme Welsh and Powell et implémentation sur C++

Le graphe de la classe W_2^4 est représentée dans la figure 4.3 :

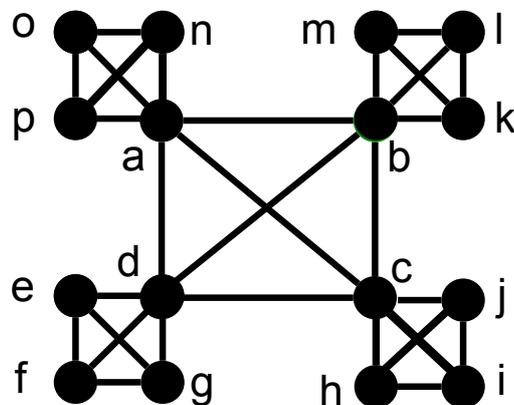
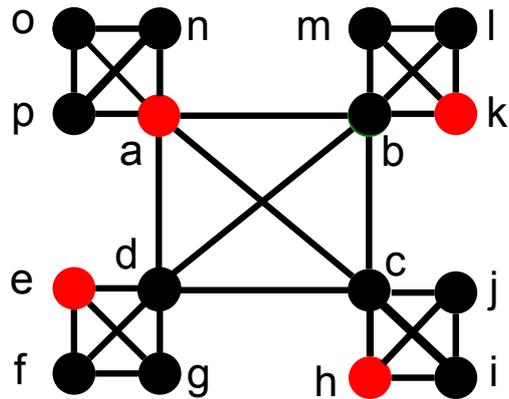
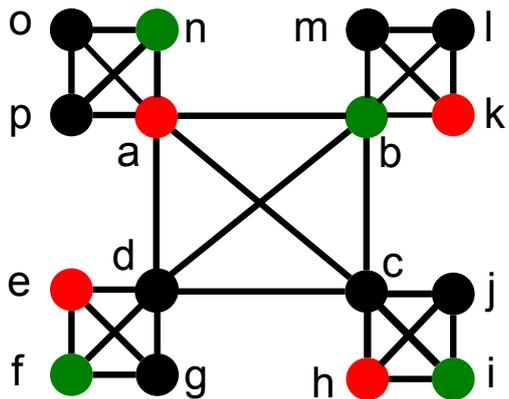


FIGURE 4.3 – Graphe W_2^4

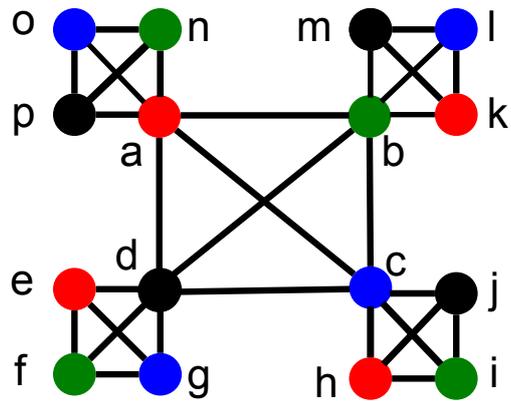
- La liste des sommets sont classés dans l'ordre décroissant de leurs degrés est : a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p.
- À la première étape, on affecte une couleur rouge aux sommets (a) qui possède le plus grand degré et on attribue cette couleur au sommet (k), (h) et (e) qui ne sont pas adjacents au sommet (a). (Voir les figures ci-dessous)



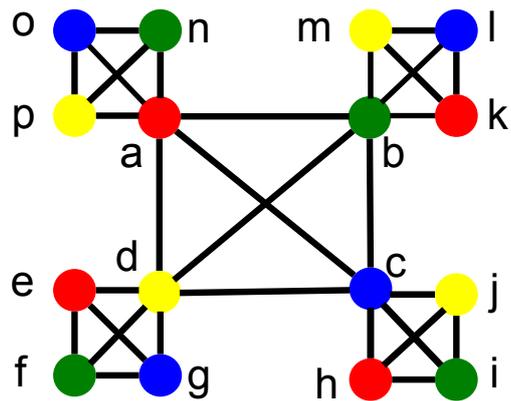
- À la deuxième étape, on affecte une couleur vert aux sommets (b) ayant le plus grand degré, et on attribue cette couleur au sommet (f), (i) et (n) qui ne sont pas adjacent au sommet (b) non encore colorié.



- À la troisième étape, on affecte une couleur bleu aux sommets (c) ayant le plus grand degré, et on attribue cette couleur au sommet (o), (i) et (g) qui ne sont pas adjacent au sommet (c) non encore colorié.



- À la quatrième étape, on fait la même chose pour les autres sommets, on obtient le graphe coloré suivant :



- Tous les sommets sont coloriés alors la coloration est terminée donc on arrête, On obtient une coloration 4-équitable.

La matrice d'adjacence de la classe W_2^4 est comme suit :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

En appliquant l'algorithme de **welsh and powell** sur C++ pour la classe W_2^4

- La compilation du programme donne les résultats suivants :

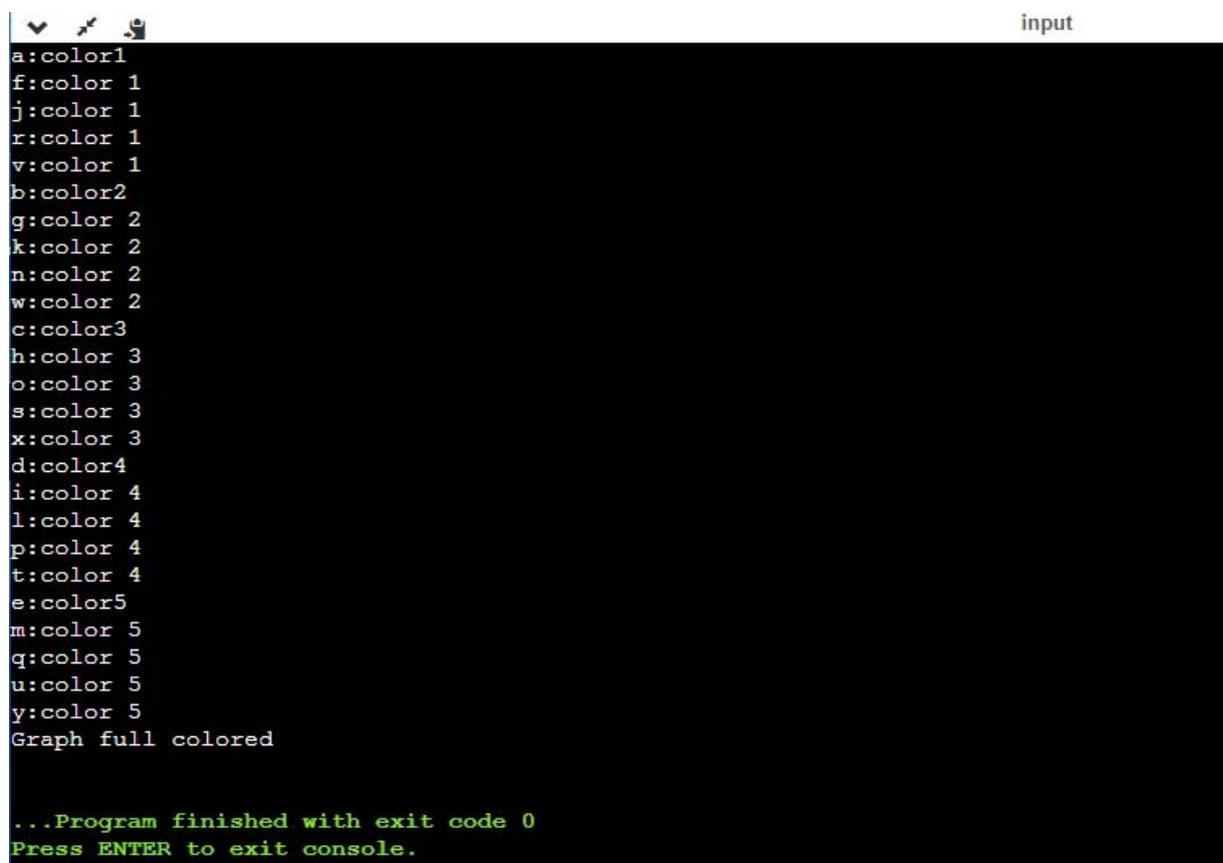
```

input
a:color1
e:color 1
h:color 1
k:color 1
b:color2
f:color 2
i:color 2
n:color 2
c:color3
g:color 3
l:color 3
o:color 3
d:color4
j:color 4
m:color 4
p:color 4
Graph full colored

...Program finished with exit code 0
Press ENTER to exit console.

```

FIGURE 4.4 – Coloration 4-équitable de W_2^4 obtenue par notre application.



```
input
a:color1
f:color 1
j:color 1
r:color 1
v:color 1
b:color2
g:color 2
k:color 2
n:color 2
w:color 2
c:color3
h:color 3
o:color 3
s:color 3
x:color 3
d:color4
i:color 4
l:color 4
p:color 4
t:color 4
e:color5
m:color 5
q:color 5
u:color 5
y:color 5
Graph full colored

...Program finished with exit code 0
Press ENTER to exit console.
```

FIGURE 4.5 – Coloration 5-équitable de W_2^5 obtenue par notre application.

- La couleur une (1) est la couleur rouge tel que $C_{(2,1)} = \{a, f, j, r, v\}$.
- La couleur deux (2) est la couleur vert tel que $C_{(2,2)} = \{b, g, k, n, w\}$.
- La couleur trois (3) est la couleur bleu tel que $C_{(2,3)} = \{c, h, o, s, x\}$.
- La couleur quatre (4) est la couleur noir tel que $C_{(2,4)} = \{d, i, l, p, t\}$.
- La couleur cinq (5) est la couleur mauve tel que $C_{(2,5)} = \{e, m, q, u, y\}$.

4.2 Conclusion

Ce chapitre est consacré à la partie application, dans cette partie nous avons présenté logiciel Code Block, ensuite, nous avons implémenté l'algorithme de Welsh and Powell

CHAPITRE 4. IMPLÉMENTATION DE L'ALGORITHME DE WELSH AND POWELL SUR C++

afin de confirmer les résultats obtenus par le déroulement manuel de cette algorithme de résolution sur les nouvelles classes de graphe introduite dans le chapitre trois.

Conclusion générale

Dans ce manuscrit, nous sommes intéressé à la coloration k -équitable des sommets d'un graphe simple $G = (V(G), E(G))$. Une coloration propre de sommet de G est une affectation de couleurs aux sommets de $V(G)$ de sorte que deux sommets adjacents aient des couleurs différentes. Le nombre minimum nécessaire pour cette coloration est appelé nombre chromatique de G . Une coloration k -équitable de G est une coloration propre des sommets, telle que l'ensemble $V(G)$ est partitionné en k sous-ensembles deux à deux disjoints V_1, V_2, \dots, V_k , avec $|V_i| = |V_j|$ pour tout $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ ($i \neq j$).

Dans notre travail nous avons introduit deux nouvelles classes de graphes W_n^3 et W_n^4 qui possèdent respectivement une coloration 3-équitables et une coloration 4-équitables. Pour ce faire nous avons utilisé la récurrence sur n . Par la suite nous avons procédé de la même manière que les deux premières classes afin d'introduire une classe générale donnée par W_n^m avec $m \geq 5$ et on a démontré de la même manière que les deux résultats obtenus sur W_n^3 et W_n^4 que W_n^m possède une coloration m -équitables.

Afin de confirmer les résultats théorique obtenus sur les classes W_n^3 , W_n^4 et W_n^5 nous avons utilisé l'algorithme de **Welsh and Powell** implémenté sur le langage de programmation C^{++} .

Comme perspective nous visons de :

- Implémenter sur le langage C^{++} d'autres algorithmes de coloration de sommets des graphes, à savoir l'algorithme Dsateur et l'algorithme de jeton et faisons par la suite une étude comparative.
- Traiter des autres nouvelles classes.

Bibliographie

- [1] N. Bellharat. La théorie des graphes. Master's thesis, 2010.
- [2] C. Berge. Graphs and hypergraphs. Dunod. Paris, 1970.
- [3] C. Berge. Graphs and hypergraphs. Dunod Paris, 2nd edition, 1973.
- [4] C. Berge. Graphes gauthier-villars. Discrete Mathematics, (1983).
- [5] C. E. Berna fabrice. Peclier Thomas. Algorithme distribué.
- [6] A. Bondy and U.S.A. Murty "Graph theory".2008.
- [7] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, Graph Theory With Applications, Department of Combinatorics and Optimization, University of Waterloo, Ontario, Canada, 2008.
- [8] O.V. Borodin, Colorings of plane graphs : A survey, Institute of Mathematics and Novosibirsk State University, December 2012.
- [9] P. Bornsztien. Cours théorie des graphes, 2003.
- [10] A. Bretto et Faisant et F. Hennecart. Élément de théorie des graphes, 2012.
- [11] P. Briggs, Keith D. Cooper, et Linda Torczon . Improvement to graph Coloring Register Allocation , Rice University, 15-06-2021 .
- [12] J. Carmesin, « Graph Theory – A Survey on the Occasion of the Abel Prize for László Lovász », Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, vol, 2002.

- [13] L. Cogis et Claudine Schwartz, *Théorie des graphes : problèmes, théorèmes, algorithmes*, Paris, Cassini, 2018.
- [14] T. Davot-Grangé. *Coloration des graphes par multi-sommes*. Mémoire master 2 en informatique, A Université de Bordeaux, 2018.
- [15] R. Diestel. *Graph Theory*. springer, 2006.
- [16] M. R. Garey and D. S. Johnson. A guide to the theory of np-completeness. *Computers and Intractability* 309, pp. 2140–2147, (1979).
- [17] F. Gavril. The intersection graphs of subtrees in trees are exactly the chordal graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 16(1), pp. 47–56, (1974).
- [18] F. Gavril. Linear-time certifying algorithms for recognizing split graphs and related graph classes. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 16(1), pp. 47–56, (2004).
- [19] J. Ravi Sankar A. Felix G. Mokesh Rayalu and M. Maria Sagaya Nathan, A Survey : List Coloring Problem, *International Journal of Control Theory and Applications*, 2016.
- [20] R. Robert Faure, Bernard Lemaire et Christophe Picouleau. *Méthodes et exercices d'application-6^e édition* Dunod.
- [21] Gandron and M. Minoux. *Graphes et algorithmes*. Editions Eyrolles, Paris, 1986.
- [22] F. Havet .*Graph colouring and applications*, Projet Mascotte, CNRS/INRIA/UNSA, INRIA Sophia-Antipolis, 2004 .
- [23] L. Jacques. *Théorie des graphe*, Modulo Editeur, Québec, 1981.
- [24] W. Kocay and D.L. Kreher. *Graphs, algoritms and optimization*. *Discrete Mathematics and its Applications* series editor KENNETH H. ROSEN.
- [25] F. Kramer. Sur le nombre chromatiques $k(p, g)$ des graphes, *rairo. (R-1)* : 67-70, 1972.
- [26] F. Kramer and H. Kramer. Uproblème de coloration de sommets d'un praphe. *C.R. Acad. Sci*, pages 46-48, 1969.
- [27] D. Müller. *Introduction à la théorie des graphes*. CRM, 2012.

BIBLIOGRAPHIE

- [28] E. Sopena. Homomorphisme et coloration de graphe, 2007.
- [29] A. Thomason et T. Luczak. Edge weights and vertex colours. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, page 151-157, 91 2004.
- [30] H. TOPART, étude d'une nouvelle classe de graphes les graphes hypotriangulés. 2011.
- [31] V.I. Volishin. introduction to graph theory, Nova Science Publishers, New York, 2009.
- [32] P. Zhang, Graphs and diagraphs, 6^{eme} édition, Taylor et Francis Goup, 2016.

Résumé

L'objectif de ce manuscrit est d'abordé l'un des plus fameux sujets de la théorie de graphe qui s'agit de la coloration des sommets pour obtenir un nombre chromatique minimal. Nous avons donné quelques concepts de base de la théorie de graphe ainsi les algorithmes de coloration Welsh and Powell, Dsateur, Algorithme de coloration à jeton, ensuite nous avons caractérisé des nouvelles classes pour lequel nous avons déterminé inductivement leurs coloration k-équitable optimal des sommets . A la fin, nous avons implémenté l'algorithme **welsh and powell** manuellement et sur le langage de programmation C^{++} afin de confirmé les résultats trouvé théoriquement.

Mots clés : Graphe, degré, coloration des sommets, coloration K-équitable, nombre chromatique.

Abstract

The objective of this manuscript is to address one of the most famous topics in graph theory, namely the coloring of vertices to obtain a minimal chromatic number. We gave some basic concepts of graph theory as well as the coloring algorithms Welsh and Powell, Dsateur, Token coloring algorithm, then characterized new classes for which we inductively determined their optimal k-equitable vertex coloring . Finally, we implemented the **welsh and powell** algorithm manually and in the programming language C^{++} to confirm the results found theoretically.

Keywords : Graph, degree, vertices coloring, K-equitable coloring, chromatic number.