République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abderrahmane Mira de Béjaïa

Faculté des Sciences Exactes

Département de Recherche Opérationnelle

# Mémoire de Master 2

**en mathématiques appliquées**

**Option : Modélisation Mathématique et Techniques de Décision**

***Thème***

# *Jeu de négociation Multi-Objectifs : Résolution Numérique et Implémentation*

Présenté par :

**Attab Lina Djihane**

**Soutenu devant le jury composé de :**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Présidente** | **Dr K. Krimat** | MCB | **U. A/Mira Béjaïa** |
| **Rapporteur** | **Dr N. khimoum** | MCB | **U. A/Mira Béjaïa** |
| **Examinatrice** | **Dr N. Halimi** | MCA | **U. A/Mira Béjaïa** |

**Promotion 2022-2023**

# *Rremerciements*

"Besmi allah" je remercie Dieu de m'avoir donné le courage et la volonté de travailler consciencieusement pour l'élaboration de ce modeste travail.

En premier lieu, je voudrais adresser mes remerciements les plus chaleureux à mon encadreur, Docteur N.KHIMOUM, pour son dévouement et sa bienveillance. Vos conseils éclairés, votre expertise et votre disponibilité ont été d'une aide inestimable dans la conduite de ce mémoire. Je vous suis reconnaissant(e) pour votre patience et votre encouragement qui ont été une source de motivation pour moi.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance envers les membres du jury pour leur temps, leur expertise et leur évaluation minutieuse de mon travail.

Je tiens aussi à exprimer ma profonde gratitude envers mes professeurs, votre expertise, votre passion pour l'enseignement et votre dévouement envers notre réussite académique ont été des facteurs déterminants dans mon parcours d'apprentissage.

Je voudrais également remercier chaleureusement mes parents, ma famille et mes proches pour leur amour inconditionnel et leur soutien indéfectible.

Enfin, un merci spécial à mes amis et camarades de class qui ont partagé cette aventure avec moi. Vos échanges, vos discussions et votre camaraderie ont rendu ce parcours enrichissant et mémorable.

# *Dédicaces*

À la mémoire de ***Yema***, mon pilier, qui repose en paix. Tu as été ma source d'inspiration et de force, et ton amour éternel continuera à illuminer ma vie. Ce mémoire est dédié à toi, en souvenir de ton soutien indéfectible et de tes encouragements constants.

À ***mes grands-pères***, qui ont quitté ce monde en laissant derrière eux un héritage de sagesse et de courage. Que vos âmes reposent en paix, et que votre héritage continue à guider mes pas tout au long de ma vie. Ce mémoire est dédié à vous, en hommage à votre influence et à votre amour inconditionnel.

À ma ***mère***, mon idole, dont la force, la détermination et le dévouement ont été une source d'admiration constante. Tu as été mon guide et mon exemple de persévérance. Cette dédicace est un témoignage de ma gratitude pour tout ce que tu as sacrifié pour mon éducation et mon bonheur.

À mon ***père***, mon héros, qui a été mon roc dans les moments difficiles et ma source d'inspiration pour atteindre mes objectifs. Tu as toujours cru en moi et m'as encouragé à poursuivre mes rêves. Cette dédicace est une reconnaissance de ton amour inébranlable et de ton soutien sans faille.

À ma sœur ***Ines***, qui a toujours été présente à mes côtés, me soutenant et me comprenant comme personne d'autre. Ta présence et ton soutien indéfectibles ont été une bénédiction dans ma vie. Cette dédicace est une marque de mon amour et de mon appréciation pour toi.

À mes frères, ***Zino*** et ***Ayoub***, qui ont partagé avec moi tant de moments de joie, de rires et de complicité. Votre soutien et votre amitié inébranlables ont enrichi ma vie. Cette dédicace est un témoignage de ma gratitude pour votre présence précieuse dans ma vie.

À mes meilleures amies ***Nermine***, ***Rofia***, ***Manel***, ***Nivin***, et la charmante et magnifique ***lisa***, qui ont été mes piliers de soutien tout au long de ce parcours académique. Vos encouragements, votre amitié sincère et vos échanges enrichissants ont été d'une valeur inestimable. Cette dédicace est un témoignage de mon appréciation et de mon amour pour vous.

À mes tantes, ***Mina*** et ***Widad***, qui m'ont toujours entouré(e) de leur amour et de leur bienveillance. Votre présence et vos conseils précieux ont été une source de réconfort. Cette dédicace est une marque de ma reconnaissance pour votre soutien inconditionnel.

À mes oncles, ***Abd-kader***, ***Tonton Saleh*** et ***Naceredine***, qui ont toujours été là pour moi, offrant des conseils sages et une épaule sur laquelle m'appuyer. Votre amour familial et votre soutien inconditionnel ont été une source de réconfort et de force. Cette dédicace est un témoignage de ma gratitude pour votre présence et votre influence bienveillante dans ma vie.

À vous tous, mes proches, ma famille élargie, mes amis et mes mentors, je vous dédie ce mémoire avec émotion et reconnaissance. Votre amour, votre soutien et vos encouragements ont joué un rôle déterminant dans mon parcours académique et personnel. Que cette dédicace témoigne de l'importance que vous avez dans ma vie et de l'impact positif que vous avez eu sur moi.

# Table des matières

# Introduction Générale

La négociation est un processus interactif et stratégique dans lequel deux ou plusieurs parties s'engagent dans des discussions pour parvenir à un accord ou résoudre des différents. C'est une méthode utilisée pour gérer les conflits d'intérêts en trouvant des solutions acceptables pour les deux parties. La négociation implique une communication ouverte, la recherche de compromis, la persuasion et la prise de décisions éclairées. Elle peut avoir lieu dans différents contextes, tels que les affaires, la politique, les relations interpersonnelles ou la résolution de conflits. Le but de la négociation est généralement de parvenir à un accord équitable, satisfaisant les intérêts et les besoins des parties concernées et entretenant une relation constructive.

Au cours du processus de négociation, les parties peuvent échanger des offres, discuter de problèmes, et de proposer des solutions alternatives. Les négociateurs peuvent utiliser une variété de stratégies et tactiques pour influencer les résultats, comme le raisonnement, la recherche de valeur, la création d'options et la gestion des compromis. Il est important de noter que la négociation ne se limite pas à trouver un compromis. Cela peut également être un moyen d'établir des relations durables et de résoudre pacifiquement les conflits, et surtout de maximiser des avantages mutuels.

L'objectif de ce mémoire est de mettre l'accent sur l'intervention de la théorie des jeux et son application dans la résolution des problèmes de négociation multiobjectifs, qui constituent un cadre analytique puissant pour modéliser et résoudre des situations de négociation où les parties prenantes doivent prendre en considération divers objectifs et critères contradictoires.

.

Le mémoire est organisé de la manière suivante : Le premier chapitre débutera par un rappel des principes fondamentaux de la programmation linéaire, et jettera ensuite les bases nécessaires pour comprendre et aborder les défis spécifiques liés à la résolution des problèmes d'optimisation multiobjectifs.

Le deuxième chapitre rappelle quelques définitions et concepts fondamentaux en théorie des jeux, où nous abordons spécifiquement les jeux multiobjectifs. En outre, nous passerons en revue l'état de l'art dans le domaine des jeux de négociation multiobjectifs. Nous examinerons les stratégies utopiques efficaces utilisées dans les jeux matriciels multicritères, ainsi que les solutions maximales généralisées qui ont été développées pour les négociations multicritères.

Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons particulièrement à une méthode de résolution d'un jeu de négociation multiobjectifs. Nous avons implémenté en Matlab la méthode donnée dans [Marmol et al., 2007], où les résultats sont fournis par les auteurs (sans détails), en notant que la résolution des programmes est donnée par le logiciel payant ADBASE. Nous terminons par la résolution d'un exemple d'un problème d'héritage.

# 1 Programmation linéaire multiobjectifs

## 1.1 Introduction

Dans le présent chapitre, nous nous intéressons à la programmation linéaire multiobjectifs, qui constitue une extension du domaine de la programmation linéaire monoobjectif, largement utilisée pour résoudre des problèmes d'optimisation en cherchant à maximiser ou minimiser une seule fonction. Cependant, de nombreuses situations réelles nécessitent la prise en compte de plusieurs critères parfois contradictoires, ce qui donne lieu à des problèmes d'optimisation multiobjectifs.

## 1.2 Notions de Programmation linéaire

Un problème de programmation linéaire s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} max\ Z &= C^T x \\ Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

L'ensemble $X = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq B, x \geq 0\}$ est appelé ensemble des solutions réalisables du problème (1.1) ou $A$ est une $m \times n$ matrice et $b$ un vecteur de $\mathbb{R}^m$.

On note :

$I = \{1, 2, \ldots, m\}$ l'ensemble des indices des lignes de $A$.

$J = \{1, 2, \ldots, n\}$ l'ensemble des indices des colonnes de $A$.

$A = (I, J)$ ; $rang(A) = m < n$.

$C$ : vecteur de coefficients associés aux variables de décision du problème. Chaque composante de ce vecteur, notée $C_i$, représente le coefficient de la variable de décision correspondante $x_i$ dans la fonction objectif $Z = C^T x$.

### 1.2.1 Bases et solutions de base

**Définition 1.1** *On appelle base du problème (1.1) toute sous-matrice carrée $A_B A(I, J_B)$ telle que $det(A_B) \neq 0$ où $J_B = \{j_1, j_2, ..., j_m\} \subset J$.*

Soit $A_B$ une base du problème (1.1) qui s'écrit sous forme $A_B = A(I, J_B)$. En posant $J_N = J/J_B$ on aura $A = [A_B A_N]$ où $A_N = (I, J_N)$ est une sous-matrice de $A$ formée des vecteurs de $A$ qui ne sont pas dans la base $A_B$ (vecteurs non basiques ou hors base).

Le système $Ax = b,\ \ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ où $x = \begin{pmatrix} x_B \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$ est équivalent à :

$$Ax = b \equiv A_B x_B + A_N x_N = b \tag{1.2}$$

En posant $x_N = 0$ on obtient :

$$A_B x_B \Rightarrow x_B = A_b^{-1} b.$$

La solution $x_B = A_b^{-1} b$ est appelée solution de base associée à la base $A_B$.

Si $x_B \geq 0$ la base associée est dite réalisable

- Une solution de base réalisable est dite non dégénérée si $x_j > 0$ , $\forall j \in J_B$.
- Dans le cas contraire, c'est à dire $\exists j \in J_B / x_j = 0$, la solution de base est dite dégénérée.

### 1.2.2 Caractérisation des points extrêmes

**Théorème 1.1** *L'ensemble des points extrêmes du polyèdre convexe*

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$$

*est égal à l'ensemble de ses solutions de base réalisables.*

**Théorème 1.2** *Soit le polyèdre convexe fermé et borné*

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$$

*ayant n points extrêmes* $S^1, S^2, \ldots, S^n$*. Tout point de X peut s'écrire sous forme d'une combinaison linéaire convexe de ses points extrêmes, c'est à dire :*

$$\forall x \in X, x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j S^j, \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \in [0,1], \quad \forall j = 1, 2, \ldots, n.$$

### 1.2.3 Optimalité en un point extrême

**Théorème 1.3** *La fonction objectif du problème (1.1) atteint son maximum en un point extrême de l'ensemble X des solutions réalisables.*

*Si la fonction objectif atteint son maximum en plusieurs points, elle prendra cette même valeur maximale en tout point qui est combinaison convexe de ces points extrêmes.*

### 1.2.4 Conditions d'optimalité

**Théorème 1.4** *L'inégalité* $E_N > 0$ *est suffisante pour l'optimalité de la solution de base réalisable x, et c'est aussi une condition nécessaire pour l'optimalité de la solution de base réalisable x, si celle-ci est non dégénérée.*

### 1.2.5 Solution non bornée

Le théorème suivant fournit les conditions suffisantes d'existence d'une solution non bornée pour le problème (1.1).

**Théorème 1.5** *La fonction objectif du problème (1.1) n'atteint pas son maximum si parmi les composantes non basiques du vecteur des estimations, il existe une qui est strictement négative et pour laquelle correspond le vecteur* $A_B^{-1} a_{j_0} \leq 0$.

### 1.2.6 Schéma de l'Algorithme du Simplexe

Supposons que nous avons obtenu une solution réalisable de base $x = (x_B, x_N)$, la base correspondante $A_B = A(I, J_B)$, ainsi que la matrice inverse $A_B^{-1}$.
Une itération de l'algorithme du simplexe se résume alors dans les étapes suivantes :

**Étape 1** Calculer le vecteur des potentiels $u^T = c_B^T A_B^{-1}$

**Étape 2** Calculer le vecteur des estimations $E_j = u^T a_j - c_j,\ j \in J_N$

**Étape 3** Si $E_j \geq 0, \forall j \in J_N$, alors x est une solution optimale pour le problème (1.1), terminer le processus de résolution, sinon

- Si $\exists j_0 \in J_N / E_{j_0} < 0$ et le vecteur $A_B^{-1} a_{j_0} \leq 0$, le problème (1.1) n'admet pas de solution finie
- Sinon

  1. Calculer l'indice $j_0$ tel que :
  $$E_{j_0} = \min\Big\{E_j / j \in J_N\Big\}.$$
  2. Calculer les composantes $x_{jj_0}$ du vecteur $A_B^{-1} a_{j_0}$
  3. Calculer $\theta^0 = \min\left\{\theta_j = \dfrac{x_j}{x_{jj_0}},\ x_{jj_0} > 0,\ j \in J_B.\right\} = \dfrac{x_{j_1}}{x_{j_1 j_0}} = \theta_{j_1}.$
  4. Calculer $\bar{x} = (\bar{x}_B, \bar{x}_N)$ où $\begin{cases} \bar{x}_B = x_B - \theta^0 l_B; & \\ \bar{x}_j = x_j = 0, & \forall j \in J_N / j_0; \\ \bar{x}_{j_0} = \theta^0. & \end{cases}$
  5. Poser $\bar{J}_B = \{J_B / j_1\} \cup j_0$ et $\bar{J}_N = \{J_N / j_0\} \cup j_1$
  6. Calculer $\bar{A}_B^{-1} = D(\bar{J}_B, J_B).A_B^{-1}(J_B, I)$ .

**Étape 4** Poser $x = \bar{x}$ et aller à **l'Étape 1**.

### 1.2.7 Tableaux du Simplexe

Les tableaux du simplexe sont une autre façon de présenter les calculs algébriques et les opérations que l'on fait sur le système d'équations en effectuant les calculs sur le tableau des coefficients qui porte le nom de tableau Simplexe, qui consiste à partir d'une solution de base réalisable (correspondant à un sommet de la région réalisable), à chaque itération de :

- choisir comme variable entrante, celle de coefficient le plus élevé dans la ligne objectif (ce qui correspond à choisir la direction assurant plus grand taux d'accroissement à la fonction objectif) ;
- choisir comme variable sortante, la première variable de base à s'annuler ce qui correspond à la rencontre de la première contrainte dans la direction choisie) ;

– faire le pivotage : la variable entrante prend la colonne de la variable sortante dans le système d'équation, en ce compris dans l'expression de la fonction objectif.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | | | $x_1$ | $x_2$ | $\dots$ | $x_n$ | $x_{n+1}$ | $x_{n+2}$ | $\dots$ | $x_{n+m}$ | |
| c | | | $c_1$ | $c_2$ | $\dots$ | $c_n$ | 0 | 0 | $\dots$ | 0 | |
| $c_B$ | base | b | $a_1$ | $a_2$ | $\dots$ | $a_n$ | $a_{n+1}$ | $a_{n+2}$ | $\dots$ | $a_{n+m}$ | $\theta$ |
| 0 | $a_n$ | $b_1$ | $a_1 1$ | $a_1 2$ | $\dots$ | $a_1 n$ | 1 | 0 | $\dots$ | 0 | $\theta_1$ |
| 0 | $a_{n+1}$ | $b_2$ | $a_2 1$ | $a_2 2$ | $\dots$ | $a_2 n$ | 0 | 1 | $\dots$ | 0 | $\theta_2$ |
| 0 | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| 0 | $a_{n+m}$ | $b_m$ | $a_m 1$ | $a_m 2$ | $\dots$ | $a_m n$ | 0 | 0 | $\dots$ | 1 | $\theta_m$ |
| Z=0 | | E | $E_1$ | $E_2$ | $\dots$ | $E_n$ | $E_{n+1}$ | $E_{n+2}$ | $\dots$ | $E_m$ | |

Table 1.1 – Tableaux du simplexe

### 1.2.8 Résolution d'un Problème minimax

Considérons le problème de programmation linéaire suivant :

$$\begin{cases} \max\limits_{i=1,\dots,k} \quad \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \longrightarrow \min \\ \qquad\quad Ax = b, \\ \qquad\quad x \geq 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

equivalent à :

$$\begin{cases} \max\limits_{i=1,\dots,k} \quad c_i^T x \longrightarrow \min \\ \qquad\quad Ax = b, \\ \qquad\quad x \geq 0, \end{cases}$$

equivalent à :

$$\begin{cases} \max\limits_{i=1,\dots,k} \quad g_i(x) \longrightarrow \min \\ \qquad\quad Ax = b, \\ \qquad\quad x \geq 0, \end{cases}$$

où $g_i(x) = c_i^T x$.

equivalent à :

$$\begin{cases} \min & f(x) \\ & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{cases}$$

où $f(x) = \max\limits_{i=1,\dots,k} g_i(x)$.

Considérons le problème de programmation linéaire suivant :

$$\begin{cases} \min\limits_{x,\xi} \xi \\ \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}x_j \leq \xi, \quad \forall i = 1,\dots,k; \\ Ax = b, \\ x \geq 0, \end{cases} \tag{1.4}$$

• Résoudre le problème (1.3) revient a résoudre le problème (1.4).Démontrons l'équivalence des deux problèmes (1.3) et (1.4).

Soit $x^*$ une solution optimale du problème (1.3). Posons

$$\xi^* = \max_{i=1,\dots,k} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j^*$$

Il est évident que $(x^*, \xi^*)$ est une solution réalisable du problème (1.4). Montrons qu'elle est optimale.

Supposons le contraire, i,e. il existe une autre solution réalisable $(\tilde{x}, \tilde{\xi})$ dans le problème (1.4) telle que,

$$\begin{aligned} &\tilde{\xi} < \xi^* \\ \Rightarrow &\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\tilde{x}_j \leq \tilde{\xi} < \xi^*, \ \forall i = 1,\dots,k \end{aligned}$$

En particulier,

$$\max_{i=1,\dots,k} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\tilde{x}_j < \xi^* = \max_{i=1,\dots,k} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j^*,$$

ce qui contredit l'hypothèse que $x^*$ est une solution optimale dans le problème (1.3).

Réciproquement, supposons que $(x^*, \xi^*)$ est solution optimale du problème (1.4). Montrons que $x^*$ est une solution optimale du problème (1.3).

Supposons le contraire, i,e. il existe un $\tilde{x}$ solution réalisable du problème (1.3) telle que :

$$\max_{i=1,\ldots,k} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\tilde{x}_j < \max_{i=1,\ldots,k} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j^*. \tag{1.5}$$

Le vecteur $(\tilde{x}, \tilde{\xi} = \max_{i=1,\ldots,k} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\tilde{x}_i)$ est une solution réalisable dans le problème (1.4) et $\tilde{\xi} < \xi^*$, ceci contredit l'hypothèse que $(x^*, \xi^*)$ est une solution optimale dans le problème (1.4).

## 1.3 Programmation linéaire multiobjectives

Dans ce qui suit, nous considérons un problème d'optimisation en présence de objectives multiples et contradictoires. Les $p$ objectives à optimiser sont des fonctions explicites des variables de décision. Le domaine sur lequel les alternatives admissibles prennent leurs valeurs est continu. Nous supposerons sans perte de généralités que tous les objectifs sont à maximiser. De manière formelle, un problème d'optimisation multiobjectifs s'écrit :

$$\begin{aligned} \max \quad & Z(x) = (Z_1(x), Z_2(x), \ldots, Z_p(x)), \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Dans la suite de ce chapitre nous utilisons les notations suivantes :

- $p$, le nombre de objectives,$p \geq 2$,
- $x$, le vecteur des variables de décision,
- $Z_k(.)$, le $k^{ime}$ objective, $Z_k : X \to R$ pour $k = 1, 2, \ldots, p$,
- $Z(.)$, le vecteur des fonctions objectives, appelé vecteur objectives par contraction,
- $X$, l'espace des solutions qui décrivent les décisions possibles,
- $\mathcal{Z}$, l'espace des vecteurs objectives admissibles (l'ensemble des images des $x$ appartenant à $X$)
- $I$, l'ensemble des indices des objectives, c'est-à-dire $I = \{1, 2, \ldots, p\}$.

Notons par $Z(x) \geq Z(y)$ comme abréviation de $Z_k(x) \geq Z_k(y)$ pour tout $k \in I$ :

### 1.3.1 Concepts de base

**Définition 1.2 (Dominance)** *Soient deux vecteurs* $(Z^1;Z^2) \in \mathcal{Z}^2$. *On dit que* $Z^1$ *domine* $Z^2$ *si et seulement si* $Z^1 \geq Z^2$ *et* $Z^1 \neq Z^2$ *(i.e :* $Z_k^1 \geq Z_k^1$ *pour tout* $k \in I$ *, et* $Z_k^1 > Z_k^1$ *pour au moins un k).*
*Si* $Z^1$ *domine* $Z^2$*, alors* $Z^1$ *est au moins aussi bon que* $Z^2$ *sur tous les objectifs, et meilleur que lui sur au moins un objectif.*

**Définition 1.3 (Dominance forte)** *Soient deux vecteurs* $(Z^1;Z^2) \in \mathcal{Z}^2$. *On dit que* $Z^1$ *domine fortement* $Z^2$ *si et seulement si* $Z^1 > Z^2$ *(i.e :* $Z_k^1 > Z_k^1$ *pour tout* $k \in I$ *). Si* $Z^1$ *domine* $Z^2$*,alors* $Z^1$ *est meilleur que* $Z^2$ *sur tous les objectifs.*

**Définition 1.4 (Efficacité)** *Une solution* $\overline{x}$ *est une solution efficace de (1.6), si* $\overline{x} \in X$ *et s'il n'existe pas de* $x \in X$ *tel que* $Z(x)$ *domine* $Z(\overline{x})$*. Un point est efficace si son image par Z est un vecteur non dominé. Le terme efficacité est aussi connu sous le nom de l'optimalité de Pareto ou non infériorité.*

**Définition 1.5 (Efficacité faible)** *Une solution* $\overline{x}$ *est une solution faiblement efficace, s'il n'existe pas de* $x \in X$ *tel que* $Z(x) > Z(\overline{x})$*. Une solution est dite faiblement efficace si son vecteur objectif n'est pas fortement dominé.*

**Définition 1.6 (Efficacité forte)** *Une solution* $\overline{x}$ *est une solution fortement efficace si* $\overline{x} \in X$ *s'il n'existe pas de* $x \in X$ *tel que* $x \neq \overline{x}$ *et* $Z(x) \geq Z(\overline{x})$*.*
*Une solution x fortement efficace s'il n'existe pas d'autre solution telle que le vecteur objectives, qui lui est associé, soit aussi bon que celui de x. Remarquons que l'efficacité forte implique l'efficacité qui implique à son tour l'efficacité faible.*

**Définition 1.7 (Point idéal)** *Le point idéal est, dans* $\mathbb{R}^p$*, le point de coordonnées* $(Z_1^*,\ldots,Z_p^*)$ *avec*

$$Z_k^* = \max_{x \in X} Z_k(x), \quad k = 1,\ldots,p.$$

*On notera par* $X_k^*$ *l'ensemble des points* $x_k^*$ *qui maximisent* $Z_k(.)$*.*

**Définition 1.8 (Point anti-idéal)** *Le point anti-idéal est, dans* $\mathbb{R}^p$*, le point de coordonnées* $(Z_1^*,\ldots,Z_p^*)$ *avec*

$$Z_k^* = \min_{x \in X} Z_k(x), \quad k = 1,\ldots,p.$$

### 1.3.2 Méthode du Simplexe multiobjectifs

Dans cette section, nous présentons une extension de la méthode du simplexe aux problèmes multiobjectifs. Le problème, noté (1.7), que nous allons étudier est donné sous forme standard :

$$\begin{aligned} max\ Z &= C^T x \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{1.7}$$

où :

$C$ est une matrice $p \times n$,

$A$ est une matrice $\mathbb{R}^{m\times n}$,

$b$ est un vecteur $\mathbb{R}^m$ .

#### Description de la méthode

Un schéma général pour trouver les sommets efficaces et les demi-droites efficaces du (1.7) consiste en les phases suivantes :

**Phase 1** : Trouver une base réalisable pour commencer. Cette phase est réalisée à l'aide de la méthode du simplexe décrite dans la section (1.2.6). Soit x une solution de base réalisable.

**Phase 2** : Vérifier l'efficacité de x.

**Phase 3** : Passer aux sommets adjacents pour trouver des sommets adjacents efficaces ou des demi-droites efficaces infinies.

**Phase 4** : Stocker tous les sommets efficaces trouvés dans une liste et les sommets dominés dans une autre liste, et s'arrêter lorsque tous les sommets ont été explorés.

**Vérification de l'efficacité de la base actuelle**

Afin de vérifier si un sommet x est efficace ou non, nous effectuons le calcul suivant :

$$\overline{b} = A_B^{-1} b$$
$$\overline{C}_N = C_N - C_B A_B^{-1} A_N,$$
$$x \geq 0$$

où $A_B$ est une base réalisable correspondant à $x$ qui est supposé non dégénéré et $A = (A_B A_N)$. La matrice d'objectif $C$ est décomposée en sous-matrices de base et hors-base, respectivement $C_B$ et $C_N$. La sous-matrice $\overline{C_N}$ est appelée matrice de coûts réduits à la base $A_B$. Comme précédemment, les colonnes de la matrice $C^T$ sont désignées par $c_1, \ldots, c_k$.

**Théorème 1.6** *Soit x une solution réalisable de base. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *La solution x est efficace.*
2. *La solution x résout le problème suivant*

$$\begin{aligned} max\ & C^T x \\ sc\ & Ax = b \\ & Cx \geq C\overline{x} \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

*Si de plus x est non dégénéré, (1) est équivalent à chacune des deux conditions suivantes.*

3. *Le système suivant a une solution*

$$-[\overline{C}_N]^T (y \geq 0)$$
$$Ax = b, \quad y \in \mathbb{R}^k.$$

4. *La valeur optimale du problème suivant est zéro*

$$\begin{aligned} max\ & y_1 + \ldots, y_k \\ sc\ & -\overline{C}_N z + y = 0, \\ & y \geq 0, \quad z \geq 0, \quad y \in \mathbb{R}^k, \quad z \in \mathbb{R}^{n-k}. \end{aligned}$$

*En particulier, les affirmations suivantes sont vraies.*

(a) *Si toutes les entrées de la matrice des coûts réduits $\overline{C}_N$ sont négatives ou nulles, alors le sommet actuel $x$ est une solution efficace idéale.*

(b) *Si la matrice des coûts réduits a une ligne strictement négative, alors $\overline{x}$ est une solution efficace.*

(c) *Si la matrice des coûts réduits a une colonne non nulle et positive, alors le sommet actuel $\overline{x}$ n'est pas une solution efficace.*

**Sommets adjacents**

Soit $s$ un indice non basique. Nous savons que si la colonne $\overline{a}_s = A_B^{-1} a_s$ est négative, alors le rayon $\overline{x} + tv^s$, $t \geq 0$ est réalisable, où les composantes basiques et non basiques de $v^s$ sont données par :

$$\begin{aligned} v_B^s &= \quad -\overline{a}_s \\ v_N^s &= \quad\quad e^s \end{aligned} \tag{1.8}$$

dans lequel $e^s$ est la partie non basique du vecteur unitaire de coordonnée s de $\mathbb{R}^n$. Sinon, définir :

$$t_s := \frac{\overline{b}_l}{\overline{a}_{ls}} = min\left\{\frac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{is}} : \overline{a}_{is} > 0\right\} \tag{1.9}$$

et une nouvelle base est obtenue à partir de $A_B$ en introduisant la colonne s à la place de la colonne l. Le nouveau sommet de solution est donné par $\widehat{x} = x + t_s v^s$.

**Théorème 1.7** *Supposons que la colonne $\overline{a}_s$ soit négative. Les affirmations suivantes sont vraies*

1. *Si $\overline{x}$ n'est pas efficace, alors chaque élément du rayon $\overline{x} + tv^s$, $t \geq 0$ n'est pas efficace.*
2. *Si $\overline{x}$ est efficace et si la colonne $\overline{C}_s$ de la matrice des coûts réduits est nulle, alors le rayon $\overline{x} + tv^s$, $t \geq 0$ est efficace.*
3. *Si $\overline{x}$ est efficace et si la colonne $\overline{C}_s$ est négative, alors chaque point du rayon $\overline{x} + tv^s$, $t \geq 0$ est dominé par $\overline{x}$.*
4. *Si $\overline{x}$ est non dégénéré, efficace et si la colonne $\overline{C}_s$ a à la fois des composantes négatives et positives, alors le rayon $\overline{x} + tv^s$, $t \geq 0$ est efficace si et seulement si le système*

*suivant a une solution :*

$$-(\overline{C}_N)^T y \geq 0$$
$$(\overline{C}_N e^s)^T y = 0$$
$$y \in \mathbb{R}^k y > 0,$$

*ce qui est équivalent à la valeur optimale zéro du problème linéaire*

$$\begin{aligned} & max\ y_1 + \ldots, y_k \\ & sc\ \overline{C}_N(z + e^s) + y = 0, \\ & \quad y \geq 0, \ \ z \geq 0, \ \ t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

5. *Si x est efficace et que les colonnes non basiques $\overline{C}_s$ et $\overline{C}_r$ de la matrice des coûts réduits $\overline{C}_N$ correspondant aux colonnes négatives $\overline{a}_s$ et $\overline{a}_r$ ont des composantes mixtes avec $\alpha\overline{C}_s \geq \overline{C}_r$ pour un certain nombre positif $\alpha$, alors le rayon correspondant à la colonne $\overline{a}_r$ est dominé.*

**Théorème 1.8** *Supposons que la colonne $\overline{a}_s$ a des composantes positives. Les affirmations suivantes sont vraies*

1. *Si la colonne $\overline{C}_s$ est négative, alors le nouveau sommet $\widehat{x}$ est dominé par l'ancien sommet $\overline{x}$.*
2. *Si pour tout indice non basique s et r pour lesquels $\widehat{x}^s$ et $\widehat{x}^r$ sont finis, on a $t_s\overline{C}_s - t_r\overline{C}_r \geq 0$, alors le nouveau sommet avec $x_r$ entrant dans la base n'est pas efficace.*

**Théorème 1.9** *Si toutes les bases réalisables de la matrice A sont non dégénérées, alors l'algorithme du simplexe se termine en un nombre fini d'itérations.*

### 1.3.3 Tableaux du Simplexe multiobjectifs

Pour résoudre le problème (1.7), nous supposons que b est un vecteur positif et que la matrice A est donnée par $(A_B A_N)$ où $A_B$ est une base réalisable non dégénérée et $A_N$ est la partie non basique de A. Le tableau simplex initial, noté T, est de la forme :

$$T = \begin{array}{|cc|c|} \hline C_B & C_N & 0_{k\times 1} \\ \hline A_B & A_N & \text{b} \\ \hline \end{array}$$

En pré-multipliant le tableau T par l'inverse étendu de $A_B$ :

| | |
|---|---|
| $I_{k\times k}$ | $C_B A_B^{-1}$ |
| $0_{m\times k}$ | $A_B^{-1}$ |

nous obtenons le tableau $T^*$ de la manière suivante :

$T^* =$

| | | |
|---|---|---|
| $0_{m\times k}$ | $\overline{C}_N = C_N - C_B A_B^{-1} A_N$ | $-C_B A_B^{-1} b$ |
| $I_{m\times m}$ | $\overline{A_N} = A_B^{-1} A_N$ | $A_B^{-1} b$ |

Le tableau $T^*$ contient toutes les informations nécessaires pour l'algorithme du simplexe.

- La solution de base associée à $A_B$ est trouvée dans la case en bas à droite : $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ avec $x_B = A_B^{-1} b$ et $x_N = 0$.
- La valeur de la fonction objective à cette solution de base est donnée dans la case en haut à droite : $-Cx = -C_B A_B^{-1} b$.
- La matrice des coûts réduits $\overline{C}_N$ est donnée dans la case en haut au centre.

Avec ce tableau, nous passons à la recherche d'une solution de base efficace.

**Trouver une solution de base efficace**

Le tableau $T^*$ nous permet de déterminer l'efficacité ou la non-efficacité de la solution de base réalisable $\overline{x}$ dans certaines situations évidentes énumérées ci-dessous :

- x n'est pas efficace si $\overline{C}_N$ a une colonne non nulle et positive.
- x est idéalement efficace si les entrées de $\overline{C}_N$ sont non positives.
- x est efficace si au moins l'une des lignes de $\overline{C}_N$ est strictement négative.

Dans toutes les situations restantes, il est nécessaire de vérifier l'efficacité de $\overline{x}$. Cela peut être fait en résolvant un problème auxiliaire décrit dans le Théorème (1.6 (2)). En introduisant m variables excédentaires $y_1, \ldots, y_m$, ce problème, est écrit sous la forme standard suivante :

$$\begin{aligned} & max \;\; \langle c_1 + \cdots + y_k, x \rangle \\ & sc \;\; \begin{pmatrix} I & C \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C\overline{x} \\ b \end{pmatrix} \\ & x \geq 0, \;\; y \geq 0. \end{aligned} \tag{1.10}$$

La solution réalisable $\begin{pmatrix} 0 \\ \overline{x} \end{pmatrix}$ est de base et associée à la base $\widehat{B} = \begin{pmatrix} -I_{k\times k} & C_B \\ 0_{m\times k} & B \end{pmatrix}$. Le tableau du simplexe à cette base est obtenu à partir du tableau $T^*$ de la manière suivante :

$$\widehat{T^*} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0_{1\times k} & 0_{1\times m} & c_N = c_B A_B^{-1} A_N & c_B A_B^{-1} b \\ \hline I_{k\times k} & 0_{k\times m} & C_N + C_B A_B^{-1} A_N & 0_{k\times 1} \\ 0_{m\times k} & I_{m\times m} & A_B^{-1} A_N & A_B^{-1} b \\ \hline \end{array}$$

Dans ce tableau, c représente la somme des lignes de la matrice C. À partir de ce tableau, nous déduisons la conclusion suivante sur l'efficacité de $\overline{x}$ :

– $\overline{x}$ est efficace si le vecteur de coûts réduits $\overline{c}_N$ est négative.

Si le vecteur des coûts réduits $\overline{c}$ a toutes ses composantes strictement positives, rien ne peut être dit sur l'efficacité de $\overline{x}$ car la base $\widehat{B}$ est dégénérée. En introduisant une variable non basique $x_j$ correspondant à une composante strictement positive de $\overline{c}$, nous pouvons soit supprimer une variable excédentaire, soit obtenir une solution réalisable$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ avec $y \geq 0$.

Si aucune de ces solutions réalisables n'est obtenue, alors $\overline{x}$ est efficace. Sinon, $\overline{x}$ est non-efficace. Ensuite, appliquez les pivots habituels de l'algorithme du simplexe à (1.10). Son résultat fournit soit une solution vertex optimale $(y, x)$ de (1.10), auquel cas x est une solution vertex efficace de (1.7), soit montre que (1.10) a une valeur optimale non bornée. Dans ce dernier cas, (1.7) n'a pas de solution efficacee car l'ensemble des valeurs consistant en $C_x$ avec $Cx \geq C\overline{x}$ et x réalisable est non borné. Son cône asymptotique non trivial se situe dans le quadrant positif $\mathbb{R}^k_+$. Par conséquent, l'ensemble des valeurs de (1.7) a aussi une direction asymptotique non nulle positive.(1.7) n'a pas d'élément maximal, donc il n'a pas de solution efficacee.

Lorsque la matrice A n'est pas donnée sous la forme $(A_B A_N)$, une attention particulière doit être portée aux colonnes de$A_B$ et $A_N$.

**Passer d'un sommet efficace à des sommets adjacents efficaces**

Après avoir trouvé une solution de base efficace, notre tâche consiste à explorer d'autres solutions de base efficaces. Nous savons que l'ensemble des solutions efficaces est connexe par arcs, donc s'il n'existe pas de valeur de solution unique, il doit exister des solutions de base adjacentes à la solution de base donnée. Dans cette sous-section, nous discutons de la façon de trouver toutes ces solutions adjacentes en utilisant le tableau du simplexe $T^*$.

Supposons que x soit une solution de base efficace, mais pas idéale. Conformément au théorème (1.6), la matrice des coûts réduits $\overline{C}_N$ a des entrées strictement positives, entre autres, et aucune colonne positive non nulle. Nous classifions les indices non basiques en deux catégories : ceux avec $\overline{C}_s$ négatif et les autres indices s avec $\overline{C}_s$ non comparables au vecteur nul. Conformément au théorème (1.8), nous déduisons certaines règles pour ne pas introduire une variable non basique $x_s$ dans une nouvelle base :

- Si $\overline{C}_s = 0$ et $\overline{a}_s \geq 0$, alors le rayon $\overline{x} + tv^s$, $t \geq 0$, où $v^s$ est donné par (1.8), est un rayon efficace.
- Si $\overline{C}_s \leq 0$, alors $x_s$ ne doit pas être introduit car l'introduction de $x_s$ dans une base conduit à une solution dominée.
- Si $\overline{C}_s$ et $\overline{C}_r$ ont des composantes mixtes, où j est un autre indice non basique, avec $t_s$ et $t_r$ strictement positifs, et si $t_r\overline{C}_r - t_s\overline{C}_s \geq 0$, alors $x_s$ ne doit pas être introduit.

Il est maintenant clair qu'une variable non basique $x_s$ est éligible pour être introduite si $\overline{C}_s$ n'est pas comparable au vecteur nul et n'est également pas comparable à d'autres vecteurs de coûts réduits non basiques. Nous supposons que $x_s$ est une telle variable avec $t_s > 0$. Elle entre dans la base et $x_l$ en sort. Le pivot du tableau simplex actuel est l'élément $\overline{a}_{ls}$. Le nouveau tableau simplex correspondant à la base avec l'entrée de $x_s$ et la sortie de $x_l$ est obtenu en pré-multipliant le tableau $T^*$ par la matrice étendue du changement

$$S = \left[\begin{array}{c|ccccc} I_{k\times k} & 0_{k\times 1} & \dots & -\overline{C}_s/\overline{a}_{ls} & \dots & 0_{k\times 1} \\ \hline & 1 & \dots & -\overline{a}_{1s}/\overline{a}_{ls} & \dots & 0 \\ & & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0_{m\times k} & & & 1/\overline{a}_{ls} & & \\ & & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ & 0 & \dots & -\overline{a}_{ms}/\overline{a}_{ls} & \dots & 1 \end{array}\right]$$

Le nouveau tableau nous permettra de déterminer si la nouvelle base produit un sommet adjacent efficace à $\overline{x}$ ou non.

**Générer toutes les solutions de sommet efficaces**

Comme déjà discuté, en raison de la connexité par arcs de l'ensemble des solutions efficaces de (1.7), toutes les solutions basiques efficaces peuvent être générées en explorant les sommets adjacents. Voici un schéma parmi d'autres pour le réaliser. Étant donné une solution basique réalisable $v$, l'ensemble des sommets adjacents efficaces à $v$ est noté $G(v)$.

**Première méthode**

- Soit $v^0$ la solution basique efficace initiale.
- Définir $E_0 = \{v_0\}$ (la génération initiale) et $W_0 = G(v^0)\backslash E_0$ (la première génération).
- Définir $E_1 = E_0 \cup W_0$ et $W_1 = \cup_{v\in W_0} G(v)\backslash E_1$ (la deuxième génération).
- Pour $s \geq 1$, si $W_s = \emptyset$, tous les sommets efficaces se trouvent dans $E_s$.

  Sinon, définir :

  $E_{s+1} = E_s \cup W_s$ et

  $W_{s+1} = \cup_{v\in W_s} G(v)\backslash E_s$ (il s'agit de la $(s+1)^{me}$ génération).

  Continuer la procédure jusqu'à ce qu'aucune nouvelle génération ne soit obtenue, c'est-à-dire jusqu'à ce que $W_s$ soit vide.

Il convient de remarquer que pour obtenir les sommets efficaces de la $(s+1)^{ime}$ génération, tous les tableaux du simplexe de la $s^{ime}$ génération et leurs informations associées (matrices inverses, matrices étendues de changement, etc.) doivent être stockés, ce qui nécessite beaucoup de mémoire informatique. Une autre méthode consiste à obtenir seulement un sommet efficace à chaque itération, ce qui nécessite moins de mémoire. Étant donné deux solutions de base $u$ et $v$, la distance utilisée ci-dessous entre elles est mesurée par le nombre de colonnes qui doivent être introduites dans la base associée à $u$ afin d'obtenir la base associée à $v$. Ainsi, si $u \neq v$, la distance entre $u$ et $v$ est d'au moins un, ce qui est le cas lorsqu'ils sont adjacents l'un à l'autre, et au plus $m$, le nombre total de colonnes d'une base.

**deuxième méthode**

- Soit $v_0$ la solution de base initiale efficace.
- Définir $E_0 = \{v0\}$ et

$$W_0 = G(v^0)\backslash E_0$$

.

- Choisir $v^1$ dans $W_0$ qui est le plus proche de $v^0$ et définir

$$E_1 = E_0 \cup \{v^1\}$$

et

$$W_1 = W_0 \cup G(v^1)\backslash E_1.$$

- Pour $s \geq 1$, si $W_s = \emptyset$, tous les sommets efficaces se trouvent dans $E_s$. Sinon, choisir $v^s$ dans $W_s$ qui est le plus proche de $v^{s-1}$, le dernier sommet ajouté à $E_s$, et définir

$$E_{s+1} = E_s \cup \{v^s\}$$

et

$$W_{s+1} = W_s \cup G(v^{s+1}) \setminus E_s.$$

Continuer la procédure jusqu'à ce que $W_s$ soit vide.

**La procedure du simplexe**

Nous résumons la procédure du simplexe pour calculer les sommets efficaces et les stocker dans V comme suit.

**Étape 1 :** Trouver le sommet réalisable initial en résolvant le problème linéaire.

$$miny_1 + \cdots + y_m$$

$$scAx + y = b$$

$$x, y \geq 0$$

- Si aucun sommet réalisable n'existe, arrêter. Le problème est irréalisable.
- Sinon, soit $x^0$ un sommet réalisable. Définir $i = 1$ et $v^i = x^0$.

**Étape 2 :** Calculer le tableau du simplexe au sommet vi et passer à **l'étape 4** si $i = 1$.

**Étape 3 :** Vérifier les lignes de la matrice des coûts réduits $\overline{C}_N$.

- Si $\overline{C}_N = 0$, arrêter. Toutes les solutions efficaces x de (MOLP) satisfont l'égalité $Cx = Cv^i$. Ce sont des solutions idéales.
- Sinon, passer à **l'étape** 4.

**Étape 4 :** Vérifier si une ligne de $\overline{C}_N$ est strictement négative, ou si la somme des lignes de $\overline{C}_N$ est négative ou non.

- Si oui, cette solution est efficace. Passer à **l'étape 6**.
- Sinon, passer à **l'étape 5**.

**Étape 5 :** Vérifier l'efficacité de la solution actuelle ou trouver un sommet efficace dominant la solution actuelle en résolvant le problème linéaire

$$\begin{aligned} &max\langle c^1 + \cdots + c^m, x\rangle \\ &scAx = b \\ &Cx \geq Cv^i \qquad x, y \geq 0. \end{aligned}$$

- Si la valeur optimale est non bornée, arrêter. Le problème (1.7) n'a pas de solutions efficaces.
- Si la valeur optimale est finie et si $v^i$ est une solution optimale, alors elle est efficace et passer à **l'étape 6**.
- Si x est un sommet optimal avec $C\overline{x} \geq Cv^i$, alors $v^i$ n'est pas efficace et $\overline{x}$ est efficace. Calculer le tableau du simplexe à $\overline{x}$ et passer à **l'étape 6**.

**Étape 6 :** Stocker ce sommet efficace dans V.

**Étape 7 :** Trouver tous les indices non basiques r du dernier sommet stocké satisfaisant

- $\overline{C}_r$ contient des composantes mixtes (négatives et positives).
- Il n'existe pas d'autre indice non basique s satisfaisant (1) tel que $t_s\overline{C}_s = t_r\overline{C}_r$.

**Étape 8 :** Stocker toutes les bases non explorées en introduisant r à partir de l'étape précédente.

- Si de telles bases n'existent pas, arrêter.
- Sinon, obtenir $v^{i+1}$ la solution de base avec r entrant dans la base.
- **Étape 9** Définir $i = i + 1$ et revenir à **l'étape** 2.

## 1.4 Conclusion

En conclusion, ce chapitre a abordé deux aspects essentiels de la programmation linéaire : la programmation linéaire monoobjectif et l'optimisation multiobjectif. Nous avons revisité les principes fondamentaux de la programmation linéaire monoobjectif, et exploré le domaine de l'optimisation multiobjectif, qui permet de prendre en compte plusieurs critères contradictoires lors de la résolution des problèmes d'optimisation. Ce chapitre a fourni les bases nécessaires pour comprendre ces concepts, et mieux appréhender les principes et les techniques de la programmation linéaire multiobjectifs, en rappelant les outils essentiels pour résoudre les problèmes d'optimisation et souligner l'importance, mais aussi la complexité de prendre en compte plusieurs objectifs dans la prise de décision.

# 2 Jeux de Négociation Multiobjectifs (JNM)

## 2.1 Introduction

Le présent chapitre évoque les jeux de négociation multiobjectifs, une extension des jeux sous forme normale qui permet de prendre en compte plusieurs critères dans un processus de négociation. Les jeux de négociation multiobjectifs constituent un cadre analytique puissant pour modéliser et résoudre des situations de négociation où les parties prenantes doivent prendre en considération divers objectifs et critères contradictoires.

## 2.2 Concepts de la théorie des jeux

Ce qui suit est un rappel de quelques concepts clés de la théorie des jeux, utilisés pour analyser et modéliser une variété de situations de prise de décision, qu'il s'agisse de compétitions sportives, de négociations commerciales, de conflits militaires, de comportements économiques, etc.

### 2.2.1 Jeux sous forme normale

Un jeu sous forme normale est un jeu à information complète et simultané, où chaque joueur choisit une stratégie indépendamment du choix de l'autre joueur et le jeu ne se répète pas, les joueurs sont rationnels et leurs objectif est la maximisation de leurs paiement. Formellement, un jeu sous forme normale peut être représenté sous la forme :

$$\langle N, \{X_i\}_{i\in N}, \{U_i\}_{i\in N} \rangle \tag{2.1}$$

- Un ensemble de n joueurs : $N = \{1, 2, \ldots, n\}$.
- Pour chaque joueur $i$ , $i \in N$, un ensemble de stratégies $X_i$ ≡toutes les stratégies possibles de ce joueur.

  $x_i \in X_i$ →une stratégie particulière du joueur $i$.

  Par conséquent, $X_i = \{x_i^1, x_i^2, \ldots, x_{n_i}^1\}$ si $n_i$ stratégies sont disponibles pour le joueur $i$.
- Chaque joueur $i$ choisit une stratégie $x_i$ → le résultat (ou profil de stratégies) : $x \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
- Pour chaque joueur $i$, une fonction de gain, $U_i$ (les préférences du joueur $i$) :

$$U_i : X = \prod_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$$

$$x \equiv (x_1, x_2, \ldots x_n) \longmapsto U_i(x)$$

### 2.2.2 Équilibre de Nash

L'équilibre de Nash, introduit par John Nash en 1950 [Nash, 1950], est un concept fondamental en théorie des jeux. Il décrit une issue du jeu dans laquelle aucun joueur ne souhaite modifier sa stratégie étant donnée la stratégie de chacun de ses rivaux maintenue.

**Définition 2.1 (Équilibre de Nash)** *Une situation $x^* = \{x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\} \in X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ est un équilibre de Nash en stratégies pures du jeu (2.1) si :*

$$U_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geq U_i(x_i, x_{-i}^*), \forall x_i \in X_i, \forall i \in I \tag{2.2}$$

*où : $x_{-i} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ .*

En d'autres termes, un équilibre de Nash est une issue du jeu dont aucun joueur n'a intérêt à dévier unilatéralement.

### 2.2.3 Stratégies de sécurité

Le concept de sécurité dans un jeu est basé sur le scénario le plus défavorable, où un joueur suppose que tous les autres joueurs choisissent leurs stratégies, en réponse à sa stratégie choisie, avec l'objectif d'atteindre une situation du jeu qui engendre la plus petite valeur de sa fonction de gain. La valeur de la fonction de gain dans une telle situation est appelée niveau de sécurité correspondant à la stratégie du joueur. La stratégie de sécurité pour un joueur est la stratégie qui lui engendre le `meilleur` niveau de sécurité.

**Définition 2.2 (Stratégie de garantie)**
*Une stratégie* $\bar{x}^i \in X^i$ *est dite* stratégie de garantie *du joueur* $i \in \mathcal{N}$ *dans le jeu (2.1), si*

$$\inf_{x^{-i} \in X^{-i}} U^i(x^i, x^{-i}) \leq \inf_{x^{-i} \in X^{-i}} U^i(\bar{x}^i, x^{-i}), \quad \forall x^i \in X^i, \tag{2.3}$$

*où* $x^{-i} = (x^1, x^2, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^N) \in X^{-i} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} X^j$.
*La quantité* $\underline{V}_i = \sup_{x^i \in X^i} \inf_{x^{-i} \in X^{-i}} U^i(x^i, x^{-i})$, *appelé* niveau de sécurité, *est le gain minimal garanti du joueur* $i \in \mathcal{N}$.

**Équilibre de Pareto**

On dit que $\overline{x} \in X$ est un équilibre de pareto du jeu (2.1) si pour n'importe quelle situation $\tilde{x} \in X$, le système d'inégalités suivant est vérifié :

$$U_i(\overline{x}) \geq U_i(\tilde{x}_i), \text{ dont au moins une inégalités est stricte, } \forall i \in I.$$

### 2.2.4 Jeux multiobjectifs

Les jeux multiobjectifs sont l'extension des jeux classiques (2.1) pour décrire des situations où chaque joueur s'intéresse à plusieurs objectifs à optimiser. Cette extension fournit alors des modèles plus réalistes pour modéliser des problèmes pratiques. La caractéristique fondamentale dans un jeu multiobjectifs est que les fonctions de gain des joueurs sont des fonctions vectorielles, ce qui explique que l'optimisation classique ne peut pas être appliquée. Pour cela, d'autres concepts de solution ont été proposés par différents auteurs. Un jeu multiobjectifs sous forme stratégique est un triplet

$$\langle \mathcal{N}, \{X_i\}_{i\in N}, U_i \rangle \tag{2.4}$$

- où $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$ est l'ensemble des joueurs.
- $X_i$ : l'ensemble des issues du joueur $i$.
- $U_i = (U_{i1}, U_{i2}, \ldots, U_{ip}) : X \to \mathbb{R}^p$ est une fonction vectorielle de gain du joueur $i$, et chaque joueur $i$ possède $p$ fonctions de gains à optimiser.

### 2.2.5 Stratégies de sécurité optimale de Pareto

Dans les jeux monocritères, les stratégies de sécurité sont définies comme étant les stratégies maximin. Par contre dans les jeux multicritères, la situation n'est pas de la même simplicité, ceci est dû au fait que différentes relations d'ordre peuvent être définies dans l'espace des valeurs des objectifs. Le concept de sécurité qui est communément utilisé est l'optimalité de Pareto.

**Définition 2.3 (Stratégie de sécurité optimale de Pareto)**
*Une stratégie $\bar{x}^i \in X^i$ est dite* stratégie de garantie optimale de Pareto *du joueur $i \in \mathcal{N}$ dans le jeu (2.8), si*

$$\nexists x^i \in X^i \,/\, \underline{V}^i(x^i) \geq \underline{V}^i(\bar{x}^i). \tag{2.5}$$

*Le niveau de sécurité du joueur $i \in \mathcal{N}$ associé à la stratégie $x^i \in X^i$ est le vecteur défini par :*

$$\underline{V}^i(x^i) = (\underline{V}^i_1(x^i), \underline{V}^i_2(x^i), \ldots, \underline{V}^i_{r(i)}(x^i)), \tag{2.6}$$

*où*

$$\underline{V}^i_l(x^i) = \min_{x^i \in X^i} U^i_l(x^i, x^{-i}), \ \ \forall l = \overline{1, r(i)} \tag{2.7}$$

*représente le niveau de sécurité du joueur $i \in \mathcal{N}$ selon le critère $l$.*

## 2.3 La négociation

### 2.3.1 Définitions

D'aprés, le P. Larousse la négociation est une série d'entretiens, d'échange de vues, de démarche qu'on entreprend pour parvenir à un accord, pour conclure une affaire.

Par ailleurs, le P. Robert propose la définition suivante "art, action de mener à bonne fin les grandes affaires, les affaires publiques".

### 2.3.2 Négociation en théorie de jeu

Une négociation met en jeu des ressources, qui seront rassemblées afin d'être négociées dans un contrat, et un ensemble de personnes qui participent à cette négociation. Il y a toujours un ou plusieurs managers (vendeur ou autre) et un ou plusieurs contractants (acheteurs ou autre).
Nous pouvons dire que " Une négociation est une activité collaborative, au cours de laquelle des personnes procèdent à des échanges des points de vues à partir d'une idée ou des idées de départ (divergence/convergence), en suivant de processus dans l'intention de construire un compromis".

### 2.3.3 Stratégies de négociation

D'aprés Dupont " en matière de négociation, la stratégie est d'abord réflexion (élaboration mise en place) et ensuite action. La réflexion constitue un aspect important de la préparation, l'application se situe au moment du déroulement".

#### Stratégie conflictuelle ou distributive

La négociation distributive a comme fonction de résoudre les conflits à l'égard des enjeux pour lesquels il existe une divergence au niveau des intérêts des parties. Selon ce processus,les gains de l'un seront proportionnels aux pertes de l'autre.

#### Stratégie coopérative ou intégrative

La négociation intégrative, deuxième sous-processus, a comme fonction de régler les différents à l'égard d'enjeux où il existe des objectifs communs. Contrairement à la négociation distributive, il devrait en résulter des gains pour les deux parties et les avantages obtenus par l'un ne le seront pas au profit de l'autre .

### 2.3.4 Approches de la négociation

Avant d'examiner les différentes approches de la négociation, il faudrait définir le verbe "Gagner ". "Gagner, c'est toujours préserver le lien moral qui fonde l'identité de sa propre organisation, et obtenir au contraire la dissolution du lien moral qui fonde l'identité de l'organisation adverse ".

Cette définition, généralement admise en matière de stratégie militaire, n'est pas adaptée au monde des affaires. Dans cette deuxième hypothèse, le verbe "Gagner" devrait signifier " obtenir satisfaction de ses demandes, tout en respectant un certain équilibre entre les interlocuteurs ". Une telle définition se réfère à l'approche gagnant-gagnant de la négociation, tandis que la première se réfère à l'approche gagnant-perdant, voire même perdant-perdant.

#### Approche gagnant-gagnant

Ce concept consiste à rechercher son propre intérêt tout en comprenant que si nous servons les intérêts de l'autre personne, nous pouvons aussi mieux servir les nôtres. Pour que la négociation soit réussie, les deux parties doivent avoir l'impression d'avoir gagné.Les parties n'ont sans doute pas tout ce qu'elles avaient demandé initialement, mais toutes deux reçoivent une contrepartie estimée satisfaisante. En d'autres termes, la négociation sert à parvenir à un équilibre.

#### Approche gagnant-perdant

Situation dans laquelle, une partie dit : "*je veux obtenir ce pour quoi je suis venu, je veux gagner la négociation, et si je gagne l'autre partie aura perdu* ". Le résultat de la négociation est alors inégale, rendant fragile l'exécution du contrat. Approche utilisée souvent dans le cadre des relations internationales. Dans le cadre de cette approche, la stratégie est définie comme " *l'art de la dialectique des volontés employant la force pour résoudre leur conflit.Son but est d'atteindre la décision en créant et en exploitant une situation entrâinant une désintégration morale de l'adversaire suffisante pour lui faire accepter les conditions qu'on veut lui imposer. L'art de la stratégie consiste alors à identifier le 'point décisif' permettant d'atteindre le résultat. Cette formule se situe au niveau de la 'stratȉegie totale', dont l'emploi éventuel de la force militaire n'est qu'une composante.*

*L'objectif du stratège est d'imposer sa volonté, et non pas de gagner une simple bataille*".

**Approche perdant-perdant**

Si les deux parties sont déterminées à ne pas laisser l'autre gagner, elles peuvent toutes deux finir par ne pas atteindre leur objectif. Ceci arrive quand les parties adoptent une approche de "gagnant-perdant" et sont plutôt déterminées à ne pas céder. Dans cette hypothèse, la négociation aboutit à un échec.

## 2.4 Jeux de Négociation multiobjectifs

Un problème de négociation décrit une situation de prise de décision dans laquelle les agents doivent parvenir à un accord mutuel. Il existe un ensemble d'alternatives réalisables, parmi lesquelles l'une peut être le résultat du problème de négociation si tous les agents y sont d'accord. Dans le cas où aucun accord mutuel n'est atteint, un résultat de désaccord prédéterminé sera le résultat. Ces problèmes ont généralement été analysés d'un point de vue monocritère. Cependant, dans les négociations du monde réel, il est souvent le cas où plus d'un enjeu est en jeu. Dans ce sens, les modèles multiobjectifs fournissent une représentation plus réaliste de ces problèmes. Formellement, un jeu de négociation multiobjectifs peut être décrit par :

$$< N, F, d >, \tag{2.8}$$

où,
$N = \{1, 2, \ldots, n\}$ est l'ensemble des joueurs ;
$F = \{f(x) : x \in X\}$ est l'ensemble des gains possibles et $X$ l'ensemble des issues réalisables ;
$d^i \in \mathbb{R}^m$ est le gain attribué à chaque joueur $i \in N$ en cas de désaccord.

La fonction de gain du $i^{eme}$ joueur, est la fonction vectorielle $f^i$ définie par :

$$\begin{aligned} f^i : X &\to \mathbb{R}^m \\ x &\mapsto f^i(x) \end{aligned}$$

Chaque joueur $i \in N$, a la possibilité de choisir une stratégie $x_k$ dans son ensemble de stratégies $X^i$, $k \in \{1,\ldots,|X^i|\}$. Le profil de stratégies ainsi formé de toutes les stratégies choisies par tous les joueurs, soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(x_i \in X^i,\ i = 1,\ldots,n)$, sera évaluée par les fonctions vectorielles des $n$ joueurs (chaque joueur ayant $m$ critères à évaluer), donnant ainsi une issue réalisable du jeu représentée par la $m \times n$-matrice :

$$f(x) = \begin{vmatrix} f_1^1(x) & f_1^2(x) & \ldots & f_1^n(x) \\ f_2^1(x) & f_2^2(x) & \ldots & f_2^n(x) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ f_m^1(x) & f_m^2(x) & \ldots & f_m^n(x) \end{vmatrix}$$

La $j^{eme}$ ligne $(f_j^1(x), f_j^2(x), \ldots, f_j^n(x))$ représente le gain de tous les joueurs selon le $j^{eme}$ critère. La $i^{eme}$ colonne $(f_1^i(x), f_2^i(x), \ldots, f_m^i(x))^T$ représente le gain du $i^{eme}$ joueur selon tous les critères.

Le problème consiste alors pour l'ensemble des joueurs à choisir un profil de stratégies $x \in X$ tel que son évaluation par $f$ soit la meilleure solution possible. En d'autres termes, le profil de stratégies qui répond le mieux à leurs préférences.

## 2.5 État de l'art

La littérature sur la théorie des jeux appliquée à la négociation peut être divisée en deux courants : l'approche coopérative et l'approche non coopérative. Les premiers travaux sur les jeux de négociation dans le cadre des jeux coopératifs remontent aux années 1950 et 1960. John Nash, lauréat du prix Nobel d'économie est l'un des pionniers dans ce domaine qui a posé les bases de la théorie des jeux appliquée à la négociation [Nash, 1950]. Quelques années plus tard, Ariel Rubinstein a marqué un tournant dans l'approche non coopérative de la négociation. Rubinstein a développé dans son article [Rubinstein, 1982], un modèle de négociation où les joueurs prennent des décisions séquentielles et établissent des offres et des contre-offres.

Ces premiers travaux ont ouvert la voie à de nombreuses recherches ultérieures, et de nombreux chercheurs ont contribué au développement de cette théorie, en explorant différents aspects tels que la stratégie, la communication, la réputation et les structures de pouvoir dans les jeux de négociation, et notamment le caractère multiobjectif des fonctions de gain des joueurs, qui représente le centre d'intérêt de notre travail.

Dans ce qui suit, nous exposons quelques approches de résolution des jeux de négociation multiobjectifs, et nous appliquerons l'une d'elles sur un cas pratique.

### 2.5.1 Approche des stratégies maximin généralisées

Un premier article fondamental sur les jeux de négociation multiobjectifs dans le contexte non coopératif est celui de [Hinojosa et al., 2005], où les auteurs ont abordé la question, et ont proposé la classe des solutions maximin généralisées comme une extension naturelle pour les jeux de négociation conventionnels. L'idée derrière ce concept de solution est que les agents se mettent en accord sur les résultats dont les niveaux minimaux ne peuvent pas être améliorés simultanément par rapport à tous les critères.

Afin d'affiner ce concept de solution, les auteurs ont définit un ordre partiel lexicographique multiobjectif et présenté la classe des solutions *leximin* généralisées comme étant les solutions non dominées selon cette relation. Ils établissent certaines propriétés de ces solutions et les caractérisent comme tant des solutions pour le problème multiobjectif.

#### Solutions maximin généralisées

Pour définir le concept de solution maximin généralisée pour cette classe de jeux de négociation multiobjectifss, chaque issue réalisable sera évaluée par un vecteur en fonction de ses pires gains par rapport à chacun des critères. Considérons les définitions suivantes tirées de [Hinojosa et al., 2005].

**Définition 2.4** *Un vecteur $X^* \in S \subseteq \mathbb{R}^{m\times n}$ est dit Pareto-optimal dans $S$, si $\nexists Y \in S$, tel que $Y \geq X$.*

**Définition 2.5** *$X^* \in S \subseteq \mathbb{R}^{m\times n}$ est faiblement Pareto-optimal dans $S$, si $\nexists Y \in S$, tel que $Y > X$.*

#### Gain minimal garanti

**Définition 2.6** *Pour chaque résultat réalisable $x \in S$, le vecteur de gain minimum est :*

$$z(x) = z_1(x), z_2(x), \ldots, z_m(x), \tag{2.9}$$

*où $z_j(X) = \min\limits_{1\leq i\leq n} \{x_j^i\}$, $\forall j = 1, \ldots, m$, est le gain garanti aux agents selon le $j^{ème}$ critère.*

Le vecteur (2.9) représente le gain minimum que tous les agents peuvent atteindre pour chaque critère. Un vecteur de gain minimum $z \in \mathbb{R}^m$ peut être obtenu à partir de différents résultats réalisables en X. Nous désignons l'ensemble de tous les résultats associés à un vecteur de gain minimum, $z$, comme étant

$$S(z) = \{x \in X / z(x) = z\}$$

Les agents chercheront les résultats réalisables dont le vecteur de gain garanti ne peut être amélioré, c'est-à-dire les résultats qui maximisent, au sens vectoriel, le vecteur de gain minimum.

#### Gain minimal efficace

**Définition 2.7** *Un vecteur $z \in \mathbb{R}^m$ est un vecteur de gain minimum efficace (non dominé) dans $X$ s'il existe $x \in X$ tel que $z(x) = z$ et il n'existe pas $y \in X$ tel que $z(y) \geq z$.*

Nous désignons par $\mathcal{N}(\mathcal{S})$ l'ensemble des vecteurs de gains minimaux non dominés dans S :

$$\mathcal{N}(\mathcal{S}) = \{z \in \mathbb{R}^m / \exists x \in X,\ \ z(x) = z,\ \ \nexists y \in X,\ \ z(y) \geq z\}.$$

**Définition 2.8** *Un résultat réalisable, $x \in X$, est une solution maximin généralisée pour le jeu de négociation multiobjectifs, si son vecteur de gain minimum, $z(x)$, est non dominée en $X$.*

L'ensemble des solutions maximin généralisées pour le jeu de négociation multiobjectifs sera noté :

$$\mathcal{GM}(\mathcal{S}) = \{x \in X / z(x) \in \mathcal{N}(\mathcal{S})\}$$

Des deux définitions ci-dessus, il en découle que l'ensemble des solutions maximales est l'union des ensembles de résultats correspondant à chacun des vecteurs de gains minimaux non dominés :

$$\mathcal{GM}(\mathcal{S}) = \bigcup_{z \in \mathcal{N}(\mathcal{S})} S(z)$$

Les auteurs ont montré dans [Hinojosa et al., 2005], que la condition de non-dominance induite par le critère maximin implique une faible optimalité de Pareto. En fait, les solutions maximin généralisées présentent une condition plus forte.

### 2.5.2 Matrices Efficaces

Considérons la relation de dominance suivante entre les matrices [Hinojosa et al., 2005].

**Définition 2.9** *Soient $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times m}$. La matrice $X \geq_c Y$ si $X \geq Y$, et il existe $j \in \{1, \ldots, m\}$, tel que $X_j > Y_j$.*

Une matrice de gains $X$, domine une autre matrice de gains $Y$, au sens de la relation précédente, si au moins pour l'un des critères, le gain obtenu avec $X$ est strictement meilleur que celui obtenu avec $Y$ pour tous les agents. Cette condition de dominance est plus forte que $X \geq Y$ et plus faible que $X > Y$ .

**Proposition 2.1** *Soit $x^*$ une solution maximin généralisée, alors $x^*$ est non dominée par rapport à la relation $\geq_c$ dans $X$.*

Par conséquent, si $x^*$ est une solution maximin généralisée, alors $x^*$ est une solution Pareto-optimale faible dans $X$, au sens défini en (2.5).

Une solution $x^*$, maximin généralisée pour le problème de négociation multiobjectifs, peut être dominée dans $X$ par rapport à la relation de dominance classique. Le lemme suivant [Hinojosa et al., 2005], stipule que tous les résultats réalisables $x \in X$ dominant $x^*$ correspondent au même vecteur de gain minimum.

**Lemme 2.1** *Soit $x^*$ une solution maximin généralisée, si $x \in X$, $x \geq x^*$ alors $X \in S(z(x^*))$.*

Afin de caractériser les solutions maximin généralisées et les vecteurs de gains minimums non dominés, considérons le problème multiobjectifs suivant associé au jeu de négociation multiobjectifs (2.8) :

$$\begin{aligned}
max \quad & z_1, \ldots, z_m \\
s.c \quad & x_1^i \geq z_1 \qquad \forall i = 1, \ldots, n \\
& \vdots \\
& x_m^i \geq z_m \qquad \forall i = 1, \ldots, n \\
& X \in S
\end{aligned} \tag{2.10}$$

**Proposition 2.2** *[Hinojosa et al., 2005] Soit* $(x^*, z^*)$ *une solution non dominée de (2.10), alors* $x^* \in \mathcal{GM}(\mathcal{S})$ *et* $z^*$ *est son vecteur de gain minimum. Réciproquement, si* $x^* \in \mathcal{GM}(\mathcal{S})$*, alors* $(x^*, z(x^*))$ *est une solution non dominée de (2.10).*

**Remarque 2.1** *En général, le problème multiobjectifs (2.10) peut être difficile à traiter. La classe des jeux de négociation linéaires multiobjectifss, où l'ensemble des gains réalisables est un polyédre, l'ensemble des solutions maximin peut être obtenu en résolvant un problème linéaire multiobjectifs. Bien que la dimension du problème puisse être élevée, les auteurs recommandent des logiciels existants, par exemple ADBASE (Steuer, 1995), pour résoudre ce problème.*

A noter que le logiciel ADBASE est un logiciel payant. ADBASE fournit les vecteurs de gain minimum non dominés et les points extrêmes des ensembles $S(z)$ correspondants, ce qui permet d'obtenir l'ensemble des solutions maximin généralisées, $\mathcal{GM}(\mathcal{S})$, en tant qu'union conjointe de ces ensembles.

### 2.5.3 Solutions leximin généralisées

La suite naturelle de l'approche présentée ci-dessus est de sélectionner une solution maximin généralisée parmi celles associées à un certain vecteur de gain minimum non dominé. Pour cela, les auteurs ont définit une relation de préférence dans $\mathbb{R}^{m \times n}$ qui généralise l'ordre lexicographique maximin dans $\mathbb{R}^n$.

Il s'agit de construire pour une matrice $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$, une $m \times n$-matrice $\pi(X)$, où la $j^{\text{ème}}$ ligne de la matrice $\pi(X)$ contient les éléments de la $j^{\text{ème}}$ ligne de la matrice $X$, classés par ordre croissant. Par conséquent, la première colonne de $\pi(X)$, notée

$\pi^1(X)$, contient l'élément le plus faible de chaque ligne de la matrice $X$, la deuxième colonne $\pi^2(X)$, contient le deuxième élément le plus faible de chaque ligne de la matrice $X$. En général, $\pi^k(X)$ représente le $k^{\text{ème}}$ élément le plus faible de chaque ligne de la matrice $X$.

**Définition 2.10** *La matrice $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$ est lexicographiquement meilleure que la matrice $Y \in \mathbb{R}^{m\times n}$, que l'on note $X \geq_{lex} Y$, si $\pi^k(X) \geq \pi^k(Y)$, pour la première colonne, $k$, telle que $\pi^k(X) \neq \pi^k(Y)$.*

Notons que pour $m = 1$, cette relation se réduit à l'ordre lexicographique maximin dans $n$, mais en général, elle ne définit pas un ordre complet dans $m \times n$. Le résultat suivant indique que, comme dans le cas des vecteurs à $n$ dimensions, la relation de dominance $\geq$ entre les matrices est plus forte que la relation de dominance lexicographique définie.

**Lemme 2.2** *Soit $X, Y \in \mathbb{R}^{m\times n}$ alors $X \geq_{lex} Y$.*

L'ordre partiel lexicographique multiobjectifs défini leur a permet d'établir l'extension suivante de la solution de négociation leximin.

**Définition 2.11** *Un résultat réalisable $X \in S \subseteq \mathbb{R}^{m\times n}$ est une solution leximin généralisée pour le jeu de négociation à critères multiples, s'il n'existe pas un autre $Y \in S$ tel que $X \leq_{lex} Y$.*
*En d'autres termes, les solutions leximin généralisées sont des matrices représentant les gains des agents par rapport à leurs critères qui sont lexicographiquement non dominés dans $S$.*

Étant donné un vecteur de gain minimum non dominé, la proposition (2.1) montre que tous les issues réalisables associés sont au moins non dominés par rapport à la relation $\geq_c$ dans $S$, et donc faiblement optimales au sens de Pareto. Les solutions leximin généralisées présentent donc une propriété plus forte de l'optimalité de Pareto, comme l'établit le résultat suivant :

**Proposition 2.3** *[Hinojosa et al., 2005] Si $X^*$ est une solution leximin généralisée, alors $X^*$ est Pareto-optimal dans $S$.*

Afin d'obtenir des solutions leximin généralisées, les auteurs procèdent par identifier les vecteurs de gains minimaux non dominés, et les solutions maximin généralisées associées à l'un d'entre eux. Ensuite, déterminer le second plus faible vecteur de gain garanti non dominé, et continuer ainsi jusqu'à ce qu'une une solution unique associée à un certain niveau soit obtenue.

L'importance des lemmes suivants résident dans le fait qu'ils permettent de réduire le problème à chaque étape, à un problème de négociation multiobjectifs avec un ensemble réalisable convexe où les valeurs de $m$ variables sont fixées. Ceci, permet de garantir que la procédure se termine au plus en $n$ étapes. Les auteurs montrent que sous l'hypothèse de convexité de $S$, l'ensemble des solutions réalisables associées à un certain vecteur de gain minimum non dominé est un ensemble convexe.

**Lemme 2.3** *Soit $S$ un ensemble convexe, alors $S(z^*)$ est un ensemble convexe pour tout $z^* \in \mathcal{N}(\mathcal{S})$.*

**Lemme 2.4** *Soit $S$ un ensemble convexe, alors $S(z^*)$ un vecteur de gain minimum non dominé, alors $\forall j = 1,\ldots,m,\ \ \exists k \in N$, tel que : $z_j(X) = x_j^k = z_j^*,\ \ \forall X \in S(z^*)$.*

Dans ce qui suit, nous décrivons une procédure récursive [Hinojosa et al., 2005], que les auteurs ont développée pour obtenir des solutions leximin. Dans le cas d'un jeu de négociation linéaire multiobjectifs, n'importe quelle solution leximin peut être calculée par cette procédure.

### 2.5.4 Procédure de résolution

Dans un premier temps, un vecteur de gain minimum non dominé $z^1 \in \mathcal{N}(\mathcal{S})$, est obtenu en résolvant le problème (2.10). Si $S(z^1)$ est un singleton, $S(z^1) = \{X\}$, alors $X$, est lexicographiquement non dominé dans $S$, et c'est donc une solution leximin.

Dans d'autres cas, $S(z^1)$ est un sous-ensemble convexe de $S$. remarque $Z(X) = \pi^1(X)$, donc nous pouvons écrire $S(z^1) = \{X \in S/\pi^1(X) = z^1\}$.

Notons par $i(1) = (i(1)_1,\ldots,i(1)_m)$, le vecteur des agents pour lesquels la valeur minimale est atteinte pour chaque critère. Dans l'ensemble $S(z^1)$, les valeurs des variables $x_j^{i(1)}$ sont fixes et égales à $z_j^1,\ \ \forall j = 1\ldots,m$.

Dans un deuxième temps, nous considérons un problème de négociation multiobjectifs dont l'ensemble réalisable est $S(z^1)$), et choisissons un vecteur de gain minimum non dominé pour ce problème, $z^2 \in \mathcal{N}(\mathcal{S}(z^1))$. Pour obtenir $z^2$, nous résolvons un nouveau problème multiobjectifs, (2.11) où les valeurs des variables $x_j^{i(1)j}$ , qui sont fixes et égales à $z_j$ , ne sont pas prises en compte afin de maximiser les niveaux minimaux.

$$
\begin{aligned}
max \quad & z_1, \ldots, z_m \\
s.c \quad & x_1^i \geq z_1 \qquad \forall i = 1, \ldots, n \\
& \vdots \\
& x_m^i \geq z_m \qquad \forall i = 1, \ldots, n \\
& X \in S
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

et de définir l'ensemble $S(z^1, z^2) = \{X \in S(z^1)/\pi^2(X) = z^2\}$.

En général, à l'étape k, un vecteur de gain minimum non dominé pour le kème problème,$z^k \in \mathcal{N}(\mathcal{S}(z^1, \ldots, z^{k-1}))$, est choisi, et le nouvel ensemble réalisable

$$S(z^1, \ldots, z^k) = \{X \in S(z^1, \ldots, z^{k-1})/\pi^k(X) = z^k\}$$

est défini.$i(k)$ représente le vecteur des agents pour lesquels le kème gain le plus faible est obtenu dans chaque critère, c'est-à-dire où $\pi^k(X) = z^k$ , et le problème à résoudre pour obtenir $z^k \in \mathcal{N}(\mathcal{S}(z^1, \ldots, z^{k-1}))$ est le suivant

$$
\begin{aligned}
max \quad & z_1, \ldots, z_m \\
s.c \quad & x_1^i \geq z_1 \;\; \forall i = 1, \ldots, n; \;\; i \neq i(r)_1 \qquad \forall r = 1, \ldots, k-1 \\
& \vdots \\
& x_m^i \geq z_m \;\; \forall i = 1, \ldots, n; \;\; i \neq i(r)_m \quad \forall r = 1, \ldots, k-1 \\
& X \in S(z^1, \ldots, z^{k-1})
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

La procédure se termine lorsqu'à une certaine étape, $r$, l'ensemble $S(z^1, \ldots, z^r)$ est un singleton. Il découle du lemme (2.4) qu'à chaque étape, les valeurs de $m$ variables sont fixées. Par conséquent, la procédure aboutit à une solution unique au plus en $n$ étapes. Par construction, la solution obtenue à la dernière étape est lexicographiquement non dominée dans $S$ et donc c'est une solution leximin pour le problème de négociation multiobjectifs.

Dans le cas particulier d'un problème de négociation linéaire multiobjectifs, les ensembles $S(z^1,\ldots,z^r)$ sont polyédriques $r = 1,\ldots,n$ et peuvent être représentés comme l'enveloppe convexe de leurs points extrêmes. Cela permet d'appliquer récursivement ADBASE pour résoudre la séquence de problèmes linéaires multiobjectifss afin de calculer des solutions leximin.

### 2.5.5 Approche des stratégies utopiques efficaces

Dans l'article [Caballero et al., 1996], les auteurs ont proposé un nouveau concept de solution pour les problèmes multiobjectifs appelé ≪ efficacité utopique ≫. Les auteurs ont élaboré une prodédure qui permet d'obtenir l'ensemble des stratégies utopiques efficaces pour ces jeux en résolvant des programmes linéaires multiobjectifs. De plus, ils ont développé un critère de choix des décisions qui ne repose sur aucune information *à priori* pour guider le choix d'un joueur parmi ses différentes stratégies.

Dans cet article, le concept de solution utopique efficace est introduit et les relations de ce concept avec les solutions de Pareto et les méthodologies utilisant les distances par rapport aux points idéaux pour calculer les vecteurs non dominés sont exposées. L'analyse réalisée démontre que les points d'équilibre et les méthodes basées sur les distances par rapport à un point idéal sont des cas particuliers de la méthodologie basée sur les solutions utopiques efficaces. De plus, ces idées sont également appliquées pour introduire un concept alternatif de solution pour les jeux matriciels multiobjectifss : le concept de stratégie utopique efficace (UES). Enfin, une fonction d'évaluation est présentée afin de choisir parmi l'ensemble complet des UES.

#### Efficacité et utopie dans la programmation multiobjectifs

Considérons le problème général de programmation multiobjectif suivant :

$$\begin{aligned} &max = f(x) \\ &s.cx \in S \end{aligned} \tag{2.13}$$

ou :

$S \subset \mathbb{R}^n$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$

$f = (f_1, \dots, f_k)\,;\, rang(A) = m < n.$

Notons la valeur maximale des fonctions $f_i$ sur $S$ par $c_i^0$ , $i = 1, \dots, k$ et $c^0 = (c_1^0, \dots, c_k^0)$.

**Définition 2.12** *Le vecteur $P = (P_1, \dots, P_k)$ est un point utopique pour le problème (2.13), si $P_i \geq c_i^0$, $i = 1, \dots, k$.*

Pour tour $x \in S$, on définit $d_i^P = P_i - f_i(x)$, $\forall i = 1, \dots, k$. Le vecteur $d^P(x) = (d_1^P(x), \dots, d_k^P(x))$ est le vecteur de déviation par rapport au point utopique $P$.

**Définition 2.13** *Soit $P$ un point utopique pour (2.13). Le vecteur $\overline{x} \in S$ est une solution utopique efficace s'il n'existe pas un autre vecteur $x \in S$ tel que $d^P(x) \leq d^P(\overline{x})$, et $d^P(x) \neq d^P(\overline{x})$.*

Il en découle que $\overline{x} \in S$ est une solution utopique-efficace si et seulement si elle est une solution efficace du problème :

$$min = d^P(x)$$
$$s.c x \in S$$

Soit $U^P$ l'ensemble des solutions utopiques efficaces associées à un point utopique $P$.

**Théorème 2.1** *[Caballero et al., 1996] L'ensemble $E$ des solutions efficaces du problème (2.13) coïncide avec l'ensemble des solutions utopiques-efficaces $U^P$, pour tout point utopique $P$, c'est-à-dire :*

$$E \equiv U^P \quad ,\forall P \geq c^0$$

**Remarque 2.2** *L'auteur a montré que l'ensemble $U^P$ est indépendant de $P$. Par conséquent, si $P$ n'est pas un point utopique, cette approche ne permet pas d'obtenir toutes les solutions efficaces de (2.13). De plus, il se peut qu'il n'existe aucun point efficace.*

Le résultat suivant relie le concept de point utopique et le concept de point d'équilibre.

**Définition 2.14** *Étant donné $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta^k) \in \mathbb{R}^k$, avec $\eta \geq 0$, notons :*

$$S^0_{n_i} = \{x \in S,\ \ c^0_i - f_i(x) \leq \eta_i\}$$

*$\eta$ est un point d'équilibre si $S^0_\eta = \bigcap_{i=1}^k S^0_{\eta_i} \neq \{\phi\}$, et pour tout $\eta' \in \mathbb{R}^k$ , tel que $0 \leq \eta' \leq \eta$, $\eta' \neq \eta$, $S^0_{\eta'} = \{\phi\}$*

**Théorème 2.2** *$\eta \in \mathbb{R}^k$ est un point d'équilibre si et seulement si $\eta = d^P(x)$, où $x$ est une solution utopique efficace pour $P = c^0$.*

### Stratégies utopiques efficaces dans les jeux multiobjectifss matriciels

Dans cette section, les auteurs ont développé le concept des solutions utopiques efficaces pour les MOP à un nouveau concept de solution pour les jeux multiobjectifss (MG).

Ils ont considéré un jeu fini multiobjectifs à deux personnes sous forme normale (jeu matriciel) avec une matrice de gains $n \times m$, $A = (a_{ij})$, de k-tuples, $a_{ij} = (a_{ij}(1), \ldots, a_{ij}(k))$. Cela, amène à définir des matrices particulières de dimension $n \times m$ comme suit :

$$A(s) = (a_{ij}(s)), \qquad s = 1, \ldots, k.$$

Les joueurs sont représentés par $P_1$, (le maximiseur, qui choisit les lignes),et $P_2$ ( le minimiseur, qui choisit les colonnes). Les espaces de stratégies mixtes pour $P_1$ et $P_2$ sont respectivement :

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ \ x_i \geq 0,\ \ i = 1, \ldots, n\}$$

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^m, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1,\ \ y_j \geq 0,\ \ j = 1, \ldots, n\}$$

**Définition 2.15** *Le gain espéré du jeu, lorsque $P_1$ choisit $x \in X$ et $P_2$ choisit $y \in Y$ est*

$$v(x,y) = x^t A y = [v_1(x,y), \ldots, v_k(x,y)]$$

*ou $v_s(x,y) = x^t A(s) y$ $s = 1, \ldots, k$.*

**Définition 2.16** *Le vecteur de niveau de sécurité pour $P_1$ est défini, pour chaque $x \in X$, par :*

$$v(x) = (v_1(x), \ldots, v_k(x))$$

*où $v_x = min\ \ v_s(x,y) = min\ \ x^t A(s)$, $s = 1, \ldots, k$.*

### 2.5.6 Stratégies de sécurité optimales de Pareto

De la définition 2.16, il découle que l'ensemble des $POSS$ pour $PI$ est l'ensemble des solutions efficaces du problème multiobjectif suivant :

$$\begin{aligned} &\max v_1(x), \dots, v_1(x) \\ &s.c \quad x \in X \end{aligned} \tag{2.14}$$

Dans [Caballero et al., 1996], les auteurs ont obtenu une autre caractérisation des POSS, basée sur les différences entre les niveaux de sécurité obtenus et certains niveaux de sécurité idéale.(point utopique).

#### Vecteur de gain et stratégie efficace utopiques

Soit $v_s^0 = \underset{x \in X}{max}$ c'est-à-dire les valeurs des k jeux scalaires induits par le jeu multiobjectifs.

**Définition 2.17** *$P = (P_1, \dots, P_k)$ est un vecteur de gain utopique pour le jeu multiobjectifs si $P_s \geq v_s^0, \;\; s = 1, \dots, k$.*

Pour chaque $x \in X$, le vecteur des déviations par rapport au vecteur de gain utopique $P = (P_l, \dots, P_k)$ est $d(x) = (d_l(x), \dots, d_k(x))$, où $d_s(x) = p_s - v_s(x)$, $\forall s = 1, \dots, k$.

**Définition 2.18** *Soit $P = (P_1, \dots, P_k)$ un vecteur de gain utopique pour (MG). Une stratégie $x^* \in X$ est une stratégie utopiquement efficace pour PI s'il n'existe pas de stratégie $x \in X$ telle que $d(x) \leq d(x^*)$.*

Par conséquent, $x^* \in X$ est une stratégie utopique-efficace pour PI si et seulement si elle est une solution efficace pour le problème

$$\begin{aligned} &min \;\; d_l(x), \dots, d_k(x) \\ &s.c x \in X \end{aligned} \tag{2.15}$$

le théorème suivant caractérise les stratégies utopiques-efficaces pour PI comme les solutions efficaces d'un problème linéaire multiobjectif qui ne dépend que de la matrice des écarts entre le gain et les valeurs utopiques.

Pour chaque $s = 1, \dots, k$, nous considérons la matrice de déviation $\overline{A}(s) = \overline{a}_{ij}(s)$,où $\overline{a}_{ij}(s) = P_s - a_{ij}(s)$, et $e^t = (1,...,1) \in \mathbb{R}^k$ . Les écarts par rapport à P peuvent s'écrire comme suit :

$$d_s(x) = P_s - v_s(x) = P_s - \min_j \; x^t A(s) = \max_j (P_s e^t - x^t A(s))$$
$$= \max_j \; x^t (e P_s e^t - A(s)) = \max_j \; x^t \overline{A}(s)$$

Ainsi, $d_s(x)$ représente l'écart maximal garanti attendu par rapport à $P_s$, dans le $s^{\text{ème}}$ jeu scalaire, lorsque PI choisit la stratégie $x$.

Considérons le problème linéaire multiobjectif suivant :

$$\begin{aligned} & min \;\; d_l(x), \ldots, d_k(x) \\ & s.c \;\; x^t \overline{A}(s) \leq (d_s, \ldots, d_s) \qquad s = 1, \ldots, k \\ & \qquad x \in X \end{aligned} \tag{2.16}$$

**Théorème 2.3** *$x^* \in X$ est une stratégie efficace utopique et $d^* = d(x^*)$ son vecteur de déviation pour PI si et seulement si $(x^*, d^*)$ est une solution efficace pour (2.16 ) .*

**Théorème 2.4** *$x^* \in X$ est une POSS pour PI si et seulement si $x^* \in X$ est une stratégie utopique efficace pour PI.*

**Théorème 2.5** *$x^* \in X$ est un POSS pour PI si et seulement si $\exists \omega > 0$, tel que $(x^*, d^*)$ est une solution optimale du problème linéaire pondéré :*

$$\begin{aligned} & min \quad \sum_{s=1}^{k} \omega_s d_s \\ & s.c \quad x^t \overline{A}(s) \leq (d_s, \ldots, d_s) \qquad s = 1, \ldots, k \\ & \qquad x \in X \end{aligned}$$

Les auteurs Notent qu'en raison du Théorème 2.5, les $POSS$ peuvent être obtenues comme les stratégies qui minimisent la distance pondérée $LI$ au vecteur de gain utopique. Ce résultat établit un lien entre leur approche et le calcul de points efficaces à l'aide les méthodes dites archimédiennes (Steuer, 1986) lorsque $PI$ a déterminé un vecteur de poids de pénalité associés aux écarts. Cependant, alors que l'approche archimédienne peut générer des solutions qui ne sont pas efficaces, cette approche génère toujours un $POSS$ pour n'importe quel vecteur de poids.

### 2.5.7 Évaluation des stratégies utopiques-efficaces

Une fois que nous disposons d'un ensemble de stratégies utopiques-efficaces et de leurs vecteurs de déviation, nous avons besoin de critères pour choisir entre elles. En utilisant la probabilité d'obtenir ces vecteurs de déviation, nous présentons une procédure afin de décider quelle stratégie à jouer.

Soit $P = (P_1, \dots, P_k)$ un vecteur de gain utopique pour le jeu multiobjectifs, $x^* \in X$ une stratégie utopique efficace pour PI, et $d_s^*$ le vecteur de déviation associé.

Si PI choisit la stratégie $x^*$, et P2 choisit $y \in Y$, la probabilité que l'écart par rapport à $P_s$ soit au plus $d_s^*$ dans le $s^{\text{ème}}$ jeu scalaire est :

$$p(x^*, y, d_s^*) = x^{*t} T(s) y$$

où $T(s) = (t_{ij}(s)), \;\; i = 1, \dots, n, \;\; j = 1, \dots, m, \;\; s = 1, \dots, k.$

$$t_{ij}(s) = \begin{cases} 1 & \text{Si } \overline{a}_{ij}(s) \leq d_s^* \\ 0 & \text{Si } \overline{a}_{ij}(s) > d_s^* \end{cases}$$

Comme $p(x^*, y, d_s^*)$ dépend de la stratégie jouée par P2, nous considérerons cette probabilité dans le pire des cas, c'est à dire dans le cas où la stratégie de P2 n'est pas respectée, c'est-à-dire,

$$p(x^*, d_s^*) = \min_{y \in Y} \; p(x^*, y, d_s^*) = \min_{y \in Y} \; x^{*t} T(s) y = \min_j x^{*t} T(s)$$

Nous appellerons $p(x^*, d_s^*)$ la probabilité d'obtenir au plus d : lorsque PI apres c les définition des stratégie de sécurité.

## 2.6 Conclusion

Nous avons rappelé dans ce chapitre la formulation générale d'un jeu multiobjectifs sous forme normale, la notion de l'équilibre non coopératif et la notion de sécurité dans les jeux multiobjectifs. Nous avons exploré en particulier les jeux de négociation multiobjectifs, une extension des jeux sous forme normale qui permettent de prendre en compte plusieurs critères dans le processus de négociation.

Nous avons également passé en revue l'état de l'art dans le domaine des jeux de négociation multiobjectifs, nous avons exploré quelques travaux qui ont contribué au développement de la théorie des jeux appliquée dans le domaine des négociatiosn. En particulier, les jeux multiobjectifs.

# 3 Solutions équitables dans un (JNM)

## 3.1 Introduction et Position du Problème

La formulation du problème de négociation entre $n$ joueurs introduite dans ce chapitre est tirée de [Marmol et al., 2007], où l'on considère $n$ joueurs qui ont la possibilité de collaborer ensemble afin d'atteindre des situations mutuellement favorables. Lorsque les $n$ joueurs négocient pour s'accorder sur le choix d'une situation parmi un ensemble de solutions réalisables, une seule peut être l'issue du problème de négociation, si tous les joueurs l'acceptent. Dans le cas où aucun accord n'est atteint, chaque joueur observera un gain pré-spécifie associé à une situation de désaccord.

Soit le jeu de négociation multiobjectifs suivant :

$$< N, F, d >, \tag{3.1}$$

où $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ est l'ensemble des joueurs, $F = \{f(x)/x \in X\}$ est l'ensemble des gains possibles et $X$ l'ensemble des issues réalisables. $d^i \in \mathbb{R}^m$ est le gain attribué à chaque joueur $i \in N$ en cas de désaccord.

La fonction de gain du $i^{eme}$ joueur, est la fonction vectorielle $f^i$ définie par :

$$f^i : X \to \mathbb{R}^m$$
$$x \mapsto f^i(x)$$

Chaque joueur $i \in N$, a la possibilité de choisir une stratégie $x_k$ dans son ensemble de stratégies $X^i$, $k \in \{1, \ldots, |X^i|\}$. Le profil de stratégies ainsi formé de toutes les stratégies choisies par tous les joueurs, soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(x_i \in X^i$, $i = 1, \ldots, n)$, sera évaluée par les fonctions vectorielles des n joueurs (chaque joueur ayant $m$ critères à évaluer), donnant ainsi une issue réalisable du jeu représentée par la $m \times n$-matrice :

$$f(x) = \begin{vmatrix} f_1^1(x) & f_1^2(x) & \ldots & f_1^n(x) \\ f_2^1(x) & f_2^2(x) & \ldots & f_2^n(x) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ f_m^1(x) & f_m^2(x) & \ldots & f_m^n(x) \end{vmatrix}$$

La $j^{eme}$ ligne $(f_j^1(x), f_j^2(x), \ldots, f_j^n(x))$ représente le gain de tous les joueurs selon le $j^{eme}$ critère. La $i^{eme}$ colonne $(f_1^i(x), f_2^i(x), \ldots, f_m^i(x))^T$ représente le gain du $i^{eme}$ joueur selon tous les critères.

**Remarque 3.1** *Notons que dans ce jeu, les n joueurs ayant la possibilité de conclurent des accords, opteront pour un profil de stratégies $x \in X$ si ce dernier procure à chacun, un gain supérieur ou égale à celui qu'il peut obtenir en agissant individuellement. Dans le cas contraire, si les n joueurs ne s'accordent pas sur un profil de stratégies commun, un gain $d^i \in \mathbb{R}^m$ sera attribué à chaque joueur $i \in N$.*

Le problème consiste alors pour l'ensemble des joueurs à choisir un profil de stratégies $x \in X$ tel que son évaluation par $f$ soit la meilleure solution possible. En d'autres termes, le profil de stratégies qui répond le mieux à leurs préférences.

**Définition 3.1** *Une issue $s \in S \subseteq \mathbb{R}^{m \times n}$ est optimale de Pareto s'il n'existe pas une autre issue $r \in S$, tel que $r \geq s$.*

**Définition 3.2** *Une issue $s \in S \subseteq \mathbb{R}^{m \times n}$ est optimale de Slater s'il n'existe pas une autre issue $r \in S$, tel que $r > s$.*

La définition suivante consiste en la la relation de dominance entre les matrices qui est spécifique pour l'analyse qui suit.

**Définition 3.3** *Une issue* $s \geq_c r$ *si* $s \geqq r$, *et il existe un* $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, *tel que* $s_j > r_j$.

## 3.2 Concepts de Solutions

### 3.2.1 Solutions équitables

L'idée derrière le concept des solutions équitables proposé par l'auteur [Marmol et al., 2007] est de comparer le vecteur gain que les joueurs peuvent atteindre (pour chaque issue réalisable), avec le vecteur gain minimal fictif définis comme suit :

#### vecteur gain minimal

**Définition 3.4** *Pour toute issue réalisable* $s \in S \subseteq \mathbb{R}^{m \times n}$ *le vecteur gain minimal est défini par :*

$$V(s) = (V_1(s), V_2(s), \ldots, V_m(s))$$

où, $V_j(s) = \min_{1 \leq i \leq n}(f_j^i(x)), \forall j \in \{1, \ldots, m\}$ représente le gain garanti de tous les joueurs selon le $j^{eme}$ critère.

**Remarque 3.2** *Le vecteur* $V(x)$ *représente ainsi, le gain que chacun des joueurs a la possibilité d'atteindre et cela pour tous les critères. A chaque issue réalisable* $s \in S$ *est associé un vecteur gain minimal. Notons l'ensemble de toutes les issues réalisables aux quelles est associé un vecteur gain par :* $S(s) = \{s \in S / V = V(s)\}$

### 3.2.2 Gain minimal fictif

**Définition 3.5** *Un vecteur gain minimal fictif est défini par :*

$$V^u = (V_1^u, V_2^u, \ldots, V_m^u),$$

*où,* $V_j^u = \max_{s \in S} V_j(s)$, $\forall j = \{1, \ldots, m\}$.

$V_j^u$ est la valeur optimale du programme linéaire suivant :

$$
\begin{aligned}
P_j(1): \quad & \max V_j; \\
s/c \quad & \\
& f_j^i(x) \geq V_j, \quad \forall i = 1, \ldots, n; \\
& s \in S;
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

**Vecteur des Déviations**

Le vecteur des déviations représente les différences entre le niveau minimal fictif et le niveau atteint pour chaque issue réalisable et cela selon chaque critère, normalisé par la composante correspondante du vecteur gain minimal fictif.

**Définition 3.6** *Pour toute issue réalisable $s \in S$, le vecteur des déviations $d(s)$ associé au vecteur gain minimal fictif $V^u$ est le vecteur de dimension $m$ défini par :*

$$d(s) = \left( \frac{V_1^u - V_1(s)}{V_1^u}, \frac{V_2^u - V_2(s)}{V_2^u}, \ldots, \frac{V_m^u - V_m(s)}{V_m^u} \right)$$

Pour comparer les déviations associées à chaque issue réalisable, la relation d'ordre lexicographique est utilisée.
Soit $ord(x)$, $x \in \mathbb{R}^m$ un vecteur de $\mathbb{R}^m$, dont les composantes sont celles du vecteur $x$ arrangées par ordre décroissant.

**Définition 3.7** *Une issue réalisable $s \leq_{lex} r$, s'il existe un $i \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $ord_i(s) < ord_i(r)$, et $ord_j(s) = ord_j(r)$, $\forall j < i$.*

**déviations minimales et solution équitable**

**Définition 3.8** *$d(s)$ est un vecteur des déviations minimal au sens lexicographique pour $S \subseteq \mathbb{R}^{m \times n}$ s'il n'existe pas une autre décision $r \in S$ tel que $d(r) \leq_{lex} d(s)$.*

Le concept de solutions équitables pour les jeux multiobjectifs est défini par :

**Définition 3.9** *Une solution réalisable $s \in S$ est dite solution équitable pour le jeu multiobjectifs (3.1) si $d(s)$ est le vecteur des déviations minimal au sens lexicographique pour $S \subseteq \mathbb{R}^{m \times n}$*

Cela signifie qu'une solution équitable est une issue réalisable qui minimise le vecteur des déviations selon l'ordre lexicographique défini précédemment.

**Remarque 3.3** *Les solutions équitables présentent une propriété d'efficacité plus forte que l'optimalité de Slater mais plus faible que l'optimalité de Pareto, du fait que les solutions équitables sont non dominées selon la relation* $\geq_c$ *dans* $S$

**Lemme 3.1** *Si* $V^*$ *est un vecteur gain minimal dont le vecteur des déviations associé est minimal au sens lexicographique, alors l'ensemble de toutes les issues réalisables associé à* $V^*$ *est* $S(V^*) = \{s \in S / f_j^i(x) \geq V_j^*,\ \forall i = 1, \ldots, n,\ \ \forall j = 1, \ldots, m.\}$

Il y 'a un vecteur gain minimal $V^* = (V_1^*, V_2^*, \ldots, V_m^*)$ unique associé au vecteur gain minimal au sens lexicographique. Cependant, l'ensemble des issues réalisables correspondantes peut avoir plus d'un élément. Pour obtenir l'ensemble de toutes les solutions équitables, on considère le problème d'optimisation qui minimise les déviations maximales, défini comme suit :

$$\begin{aligned}
&P(1): \quad \min \max_j \frac{V_j^u - V_j}{V_j^u};\\
&s/c\\
&\qquad f_j^i(x) \geq V_j, \quad \forall i = 1, \ldots, n,\ \ \forall j = 1, \ldots, m;\\
&\qquad s \in S;
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Ce problème est équivalent au problème suivant :

$$\begin{aligned}
&P_1: \quad \min t;\\
&s/c\\
&\qquad t \geq \frac{V_j^u - V_j}{V_j^u} \quad \forall j = 1, \ldots, m;\\
&\qquad f_j^i(x) \geq V_j, \quad \forall i = 1, \ldots, n,\ \ \forall j = 1, \ldots, m;\\
&\qquad s \in S;
\end{aligned} \tag{3.4}$$

S'il existe un $V^*$ unique qui est optimal pour le problème $P(1)$, alors l'issue $s \in S$ tel que $(V^*, s)$ est une solution optimale pour le problème $P(1)$ vérifiant $V^* = V(s)$

et que le vecteur des déviations $d(s)$ est minimal au sens lexicographique. Et par conséquent, l'ensemble des solutions équitables coïncide avec $S(V^*)$. Cependant, si $(V, s)$ est une solution optimale pour le problème $P(1)$, $V$ n'est pas nécessairement le vecteur gain minimal pour $s$.
Notons $I(t^*) = \{j \in \{1, \dots, m\}, t^* = \frac{V_j^u - V_j}{V_j^u}\}$ et $q$ le cardinal de $I(t^*)$.

**Lemme 3.2** *Si $t^*$ est une valeur optimale pour le problème $P(1)$, alors il existe $j \in I(t^*)$, tel que $V_j(s) = V_j$, $\forall (V, s)$ qui est une solution optimale pour le problème $P(1)$.*

**Remarque 3.4** *Lorsque le problème $P(1)$ possède plusieurs solutions optimales, on applique une procédure recursive pour obtenir un vecteur gain minimal unique associé au vecteur des déviations minimal au sens lexicographique.*

## Algorithme

### Étape 1

Résoudre le problème $P(1)$. Si une solution $V^*$ unique est obtenue, alors arrêter l'algorithme, sinon, soit $t_1^*$ la valeur optimale de $P_1$ et $j_1$ le critère avec une contrainte d'inégalité active pour toute solution optimale.

$\vdots$

### Étape k

Soit $t_{k-1}^*$ la solution optimale du problème $P_{k-1}$ et soit $j_{k-1}$ le critère pour la nouvelle contrainte d'inégalité pour toute solution optimale. On considère alors le problème obtenu en éliminant la contrainte d'inégalité active dans l'étape $k-1$, et résoudre ensuite le problème suivant :

$$
P_1 : \quad \min t; \\
t \geq \frac{V_j^u - V_j}{V_j^u} \quad \forall j = 1, \dots, m, \quad j \neq j_1, \dots, j_{k-1}; \\
f_j^i(x) \geq V_j, \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad \forall j = 1, \dots, m, \quad j \neq j_1, \dots, j_{k-1}; \qquad (3.5) \\
f_{j_r}^i(x) \geq V_{j_r}, \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad \forall r = 1, \dots, k-1; \\
s \in S;
$$

Si la solution optimale est unique, alors arrêter l'algorithme, sinon soit $t_k^*$ la solution optimale du problème $P_k$ et soit $j$ le critère de la nouvelle contrainte d'inégalité active et aller à l'étape $k+1$.

**Remarque 3.5** *Si $S$ est un polyèdre, alors tous les problèmes $P_k$ sont linéaires. Et dans ce cas, la contrainte qui devrait être active à chaque étape est celle qui correspond à une variable duale non nulle.*

### 3.2.3 Solution lexicographique équitable

Une fois que l'ensemble $S(V^1)$ est déterminé, si ce dernier est un singleton, $S(V^1) = \{s\}$, le vecteur des déviations correspondant est l'unique vecteur minimal au sens lexicographique pour $S$, et par consequent, $s$ est une solution équitable pour le jeu multiobjectifs (3.1). S'il y a un ensemble d'issues réalisables qui correspondent au vecteur gain minimal $V^1$, alors, il est possible de raffiner la notion de solutions équitables dans le sens qu'un seul vecteur gain minimal dont le vecteur des déviations soit minimal au sens lexicographique est assuré pour tous les joueurs. Ceci peut être fait en appliquant récursivement la procedure décrite précédemment (3.2.2), à l'ensemble $S(V^1)$.

Pour une issue réalisable $s \in S$, on construit une $m \times n$-matrice $V(s)$, où, la $j^{eme}$ ligne de la matrice $V(s)$ contient la $j^{eme}$ ligne de la matrice $s$ arrangés dans l'ordre décroissant. Ensuite, la premiere colonne de $V(s)$, c'est à dire $V^1(s)$, contient le plus petit élément de chaque ligne de la matrice $s$, c'est à dire le gain minimal de $s$. La deuxième colonne $V^2(s)$, contient le second plus petit element de chaque ligne de la matrice $s$, qui représente ainsi le second vecteur gain minimal de la matrice $s$. D'une manière générale, les elements de $V^k(s)$ les $k^{eme}$ plus petits elements de chaque ligne de la matrice $s$, c'est à dire $V^k(s)$ représente le $k^{eme}$ vecteur gain minimal pour $s$.

La seconde étape est d'introduire le concept du $k^{eme}$ vecteur gain minimal fictif et le $k^{eme}$ vecteur des deviations correspondant. Pour ainsi définir le concept de la solution equitable au sens lexicographique.

**Définition 3.10** *Le $k^{eme}$ vecteur gain minimal fictif pour le jeu multiobjectifs (3.1) est défini par :*

$$V^u(k) = (V_1^u(k), V_2^u(k), \dots, V_m^u(k)),$$

*où,* $V_j^u(k) = \max V_j^k(s), \forall j = 1, \dots, m.$

**Définition 3.11** *Pour toute issue réalisable* $s \in S$*, le* $k^{eme}$ *vecteur des deviations* $d^k(s)$ *selon le* $k^{eme}$ *vecteur gain minimal fictif* $V^u(k)$ *est le m-vecteur,*

$$d^k(s) = \left( \frac{V_1^u(k) - V_1^k(s)}{V_1^u(k)}, \frac{V_2^u(k) - V_2^k(s)}{V_2^u(k)}, \dots, \frac{V_m^u(k) - V_m^k(s)}{V_m^u(k)} \right)$$

On définit à present la relation d'ordre dans $\mathbb{R}^{m \times n}$ suivante :

**Définition 3.12** $x \succeq y$ *s'il existe* $k \in \{1, \dots, m\}$ *tel que*

$$d^r(x) = d^r(y), \ \ \forall r < k \ \ et \ \ d^k(x) \leq_{lex} d^k(y).$$

**Remarque 3.6** *La relation d'ordre* $x \geq y \Rightarrow x \succeq y$*. De plus, la relation* $\succeq$ *définit un ordre total dans* $\mathbb{R}^{m \times n}$ *ce qui permit de définir le concept de solution equitable au sens lexicographique.*

**Définition 3.13** *Une issue réalisable* $s \in S$ *est une solution equitable au sens lexicographique pour le jeu multiobjectifs (3.1) s'il n'existe pas de solution* $r \in S$ *tel que* $r \succeq s$*.*

**Remarque 3.7** *Le concept de solution lexicographique equitable possède deux importantes propriétés dans le context des jeux de négociations multiobjectifs qui sont l'unicité et l'optimalité de Pareto.*

Le Lemme suivant, montre que pour toutes les issues réalisables dans $S(V^1)$, une valeur minimale pour chaque critère est atteinte pour le même joueur.

**Lemme 3.3** *Soit* $S$ *un ensemble convexe et* $V^*$ *le vecteur gain minimal dont le vecteur des deviations associés est minimal au sens lexicographique pour* $S$*, alors pour chaque* $j = 1, \dots, m$*, il existe* $k \in \mathbb{N}$*, tel que* $V_j(s) = f_j^k(x) = V_j^*$*, pour tout* $s \in S(V^*)$

La solution proposée pour le calcul de la solution equitable au sens lexicographique, consiste à à determiner le $k^{eme}$ vecteur gain minimal fictif à l'étape $k$, et chercher les issues réalisables qui minimisent le $k^{eme}$ vecteur des deviations par rapport au $k^{eme}$ vecteur gain minimal fictif au sens lexicographique. Pour construire la procedure pour $V^1, V^2, \dots, V^k \in \mathbb{R}^m$, $k = 1, \dots, m$, on définit les ensembles suivants :

$$S(V^1, V^2, \dots, V^k) = \{s \in S / V^i(s) = V^i, \ \ i = 1, \dots, k\}, \quad k = 1, \dots, m$$

Le Lemme (**??**) peut être ainsi appliqué aux ensembles $S(V^1, V^2, \dots, V^k)$, $k = 1, \dots, m$, où, $V^l$, $l = 1, \dots, k$ représente le $l^{eme}$ vecteur gain minimal dont le $l^{eme}$ vecteur des deviations est minimal au sens lexicographique. Dans ce cas, si $i(r)_j$, $r = 1, \dots, k-1$, représente le joueur dont la $r^{eme}$ valeur minimale est atteinte pour le $j^{eme}$ critère. Ces ensembles peuvent être représentés par :

$$S(V^1, V^2, \dots, V^k) = \{s \in S(V^1, V^2, \dots, V^{k-1}) / f_j^i(x) \geq V_j^k, \ \ i \neq i(r), \ \ r = 1, \dots, k-1, \ \ j = 1, \dots, m\}$$

## Algorithme

### Étape 1

Determiner l'ensemble des solutions $S(V^1)$ et le vecteur gain minimal correspondant $V^1$, en utilisant l'algorithme (3.2.2). Si $S(V^1) = \{s^*\}$ alors $s^*$ est une solution equitable au sens lexicographique. Sinon, pour chaque critère $j$, soit $i(1)_j$ le joueur dont la valeur minimale $V_j^1$ est atteinte.

$\vdots$

### Étape k

Pour chaque critère $j$, résoudre le problème

$$\begin{aligned} &P_j(k): \quad \min V_j \\ &s/c \\ &\qquad f_j^i(x) \geq V_j \ \ \forall i = 1, \dots, n, \ \ i \neq i(r)_j, \ \ \forall r = 1, \dots, k-1; \\ &\qquad s \in S(V^1, V^2, \dots, V^{k-1}), \end{aligned}$$

et soit $V_j^u(k)$ la valeur optimale obtenue.
Résoudre le problème

$$\begin{aligned} &P_1: \quad \min \max \frac{V_j^u(k) - V_j}{V_j^u(k)}; \\ &s/c \\ &\qquad f_j^i(x) \geq V_j \ \ \forall i = 1, \dots, n, \ \ i \neq i(r)_j, \ \ \forall r = 1, \dots, k-1, \ \ \forall j = 1, \dots, m \\ &\qquad s \in S(V^1, V^2, \dots, V^{k-1}), \end{aligned}$$

et applique l'algorithme (3.2.2) pour obtenir un $k^{eme}$ vecteur gain minimal unique $V^k$ et la solution correspondante $S(V^1, V^2, \ldots, V^k)$. Si $S(V^1, V^2, \ldots, V^k) = \{s^*\}$ alors, $s^*$ est une solution equitable au sens lexicographique. Sinon, soit $i(k)_j$ le joueur pour lequel la valeur $f_j^i(x)$ est atteinte et procéder à l'étape $k+1$.

**Remarque 3.8** *Cette procedure donne une solution equitable au sens lexicographique en n étapes au plus.*

## 3.3 Application Numérique et Implémentation

Une personne est décédée en laissant un héritage à ses trois enfants, représentés par les individus $A$, $B$ et $C$. Cet héritage se compose de 30 unités monétaires et de 18 biens immobiliers. Le souhait des trois frères est de répartir équitablement entre eux leur héritage, en respectant les contraintes qui figurent dans le testament de leurs défunt père, à savoir :

- L'argent attribué à $A$ ne doit pas dépasser trois fois le nombre de biens qui lui sont attribués.
- L'argent attribué à $B$ ne doit pas dépasser deux fois le nombre de biens qui lui sont attribués.
- L'argent attribué à $C$ ne doit pas dépasser le nombre de biens qui lui sont attribués.

Le but des trois frères est de s'entendre sur des solutions, dans le sens où l'argent et les biens immobiliers alloués à chacun d'eux ne peut être amélioré sans affecter négativement l'héritage de l'autre.

Pour modéliser ce problème d'héritage, nous considérons le jeu de négociations multiobjectifs à trois joueurs $N = \{1, 2, 3\}$, ayant chacun deux objectifs à optimiser.

L'ensemble :

$$
\begin{aligned}
S = \{ & f(x) \in \mathbb{R}^{2\times 3}, \sum_{i=1}^{3} f_1^i(x) \leq 30, \sum_{i=1}^{3} f_2^i(x) \leq 18, \\
& f_1^1(x) \leq 3 f_2^1(x), \\
& f_1^2(x) \leq 2 f_2^2(x), \\
& f_1^3(x) \leq f_2^3(x), \\
& f_j^i(x) \geq 0, \forall i = 1,2,3, j = 1,2 \}.
\end{aligned}
$$

représente l'ensemble des issues réalisables où, $f_1^i(x)$ et $f_2^i(x)$, $i = 1,2,3$, représentent respectivement les gains du joueur $i$, selon chaque critère.

Pour obtenir l'ensemble des solutions équitables, nous calculons d'abord le vecteur des gains minimal fictif en résolvant les deux problèmes de programmation linéaire suivant :

$$
\begin{aligned}
\max \quad & V_1 \\
s/c \quad & \\
& f_1^1(x) \geq V_1, \\
& f_1^2(x) \geq V_1, \\
& f_1^3(x) \geq V_1, \\
& f_1^1(x) + f_1^2(x) + f_1^3(x) \leq 30, \\
& f_2^1(x) + f_2^2(x) + f_2^3(x) \leq 18, \\
& f_1^1(x) \leq 3 f_2^1(x), \\
& f_1^2(x) \leq 2 f_2^2(x), \\
& f_1^3(x) \leq f_2^3(x), \\
& f_j^i(x) \geq 0, \ i = 1,2,3 \ j = 1,2
\end{aligned}
$$

et,

$$\begin{aligned}
&\max \quad V_2\\
&s/c\\
&\qquad f_2^1(x) \geq V_2,\\
&\qquad f_2^2(x) \geq V_2,\\
&\qquad f_2^3(x) \geq V_2,\\
&\qquad f_1^1(x) + f_1^2(x) + f_1^3(x) \leq 30,\\
&\qquad f_2^1(x) + f_2^2(x) + f_2^3(x) \leq 18,\\
&\qquad f_1^1(x) \leq 3f_2^1(x),\\
&\qquad f_1^2(x) \leq 2f_2^2(x),\\
&\qquad f_1^3(x) \leq f_2^3(x),\\
&\qquad f_j^i(x) \geq 0,\ i = 1,2,3;\ j = 1,2
\end{aligned}$$

La resolution de ces deux programmes fournit comme solution optimale, le vecteur gain minimal fictif $V^* = \begin{pmatrix} 9.8 \\ 6 \end{pmatrix}$.

L'ensemble des solutions équitables est obtenu ensuite en résolvant le problème minimax suivant :

$$\begin{aligned}
&\min\max \quad \{\frac{9.8 - V_1}{9.8}, \frac{6 - V_2}{6}\}\\
&s/c\\
&\qquad f_j^i(x) \geq V_j \ \ \forall i = 1,2,3,\ \forall j = 1,2;\\
&\qquad f_1^1(x) + f_1^2(x) + f_1^3(x) \leq 30,\\
&\qquad f_2^1(x) + f_2^2(x) + f_2^3(x) \leq 18,\\
&\qquad f_1^1(x) \leq 3f_2^1(x),\\
&\qquad f_1^2(x) \leq 2f_2^2(x),\\
&\qquad f_1^3(x) \leq f_2^3(x),\\
&\qquad f_j^i(x) \geq 0,\ i = 1,2,3;\ j = 1,2
\end{aligned}$$

equivalent au problème suivant :

$$
\begin{aligned}
&\min \quad t \\
&s/c \\
&\qquad t \geq \frac{9.8 - V_1}{9.8}; \\
&\qquad t \geq \frac{6 - V_2}{6}; \\
&\qquad f_j^i(x) \geq V_j \ \ \forall i = 1,2,3,\ \forall j = 1,2; \\
&\qquad f_1^1(x) + f_1^2(x) + f_1^3(x) \leq 30, \\
&\qquad f_2^1(x) + f_2^2(x) + f_2^3(x) \leq 18, \\
&\qquad f_1^1(x) \leq 3 f_2^1(x), \\
&\qquad f_1^2(x) \leq 2 f_2^2(x), \\
&\qquad f_1^3(x) \leq f_2^3(x), \\
&\qquad f_j^i(x) \geq 0,\ i = 1,2,3;\ j = 1,2
\end{aligned}
$$

qui donne comme unique vecteur gain minimal $V^1 = \begin{pmatrix} 8.1 \\ 4.9 \end{pmatrix}$, et l'ensemble des solutions équitables est alors

$$S(V^1) = Conv\{\begin{pmatrix} 13.8 & 8.1 & 8.1 \\ 4.9 & 4.9 & 8.1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 & 9.9 & 8.1 \\ 4.9 & 4.9 & 8.1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8.1 & 8.1 & 8.1 \\ 4.9 & 4.9 & 8.1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8.1 & 9.9 & 8.1 \\ 4.9 & 4.9 & 8.1 \end{pmatrix}\}$$

où, $Conv\{A\}$ représente l'enveloppe convexe de l'ensemble $A$.

$t^* = 0.173$, c'est à dire que pour toutes les solutions équitables, la déviation maximale de tout le groupe par rapport au vecteur gain minimal fictif est de $17,3\%$.

La suite consiste à determiner parmi les issues équitables de l'ensemble $S(V^1)$ déterminé précédemment, une solution equitable au sens lexicographique unique pour le jeu multiobjectifs défini dans l'exemple.

Notons que pour tout $s \in S(V^1)$, la valeur minimale pour le premier critère est atteinte par le joueur 3, et pour le deuxième critère, la valeur minimale est atteinte par le joueur 1. Ainsi, $i(1) = (3,1)$ et le second vecteur gain minimal fictif est donné par les solutions optimales des problèmes suivants :

$$\begin{aligned} P_1: \quad & \max V_1 \\ & f_1^i(x) \geq V_1, \ \ \forall i = 1,2 \\ & s \in S(V^1), \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} P_2: \quad & \max V_2 \\ & f_2^i(x) \geq V_2, \ \ \forall i = 2,3 \\ & s \in S(V^1), \end{aligned}$$

On obtient ainsi, $V^u(2) = \begin{pmatrix} 9.9 \\ 4.9 \end{pmatrix}$

Les solutions optimales du problème suivant :

$$\min \max \ \ \{\frac{9.9 - V_1}{9.9}, \frac{4.9 - V_2}{4.9}\}$$

$$s/c$$

$$\begin{aligned} & f_1^i(x) \geq V_1, \ \ \forall i = 1,2, \\ & f_2^i(x) \geq V_2, \ \ \forall i = 2,3, \\ & s \in S(V^1), \end{aligned}$$

donnent un second vecteur gain minimal unique $V^2$ (dans ce cas, il coincide avec $V^u(2)$) et les issues réalisables dans $S(V^1)$ qui minimisent le second vecteur des deviations par rapport au second vecteur gain minimal fictif dans l'ordre lexicographique.

$$S(V^1, V^2) = Conv\left\{\begin{pmatrix} 9.9 & 9.9 & 8.1 \\ 4.9 & 4.9 & 8.1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 & 9.9 & 8.1 \\ 4.9 & 4.9 & 8.1 \end{pmatrix}\right\}$$

Le vecteur des joueurs où la valeur minimale est atteinte à chaque critère pour toutes les issues dans $(V^1, V^2)$ est $i(2) = (2,2)$. Cependant, dans la dernière étape de la procedure, en obtient le troisième vecteur gain minimal fictif, $V^u(3) = \begin{pmatrix} 12 \\ 8.1 \end{pmatrix}$, et résolvant le problème

$$\min\max \quad \{\frac{12-V_1}{12}, \frac{8.1-V_2}{8.1}\}$$

$s/c$

$$f_1^1(x) \geq V_1,$$

$$f_2^3(x) \geq V_2,$$

$$s \in S(V^1, V^2),$$

on obtient l'unique solution equitable au sens lexicographique qui est :

$$s^* = \begin{pmatrix} 12 & 9.9 & 8.1 \\ 4.9 & 4.9 & 8.1 \end{pmatrix}$$

# Conclusion Générale

En conclusion, ce mémoire de Master 2 intitulé "Résolution Numérique et Implémentation d'un Jeu de Négociation Multi-Objectifs" a abordé en profondeur les concepts clés de la programmation linéaire multiobjectifs et des jeux de négociation multiobjectifs. Le mémoire a permis d'explorer les principes fondamentaux de la programmation linéaire et d'introduire les méthodes d'optimisation pour résoudre les problèmes multiobjectifs.

En reliant les concepts des jeux et la programmation multiobjectifs avec ceux de la négociation, ce mémoire a mis en évidence l'importance de la théorie des jeux dans la résolution des problèmes de négociation, qui deviennent plus complexes quant ils impliquent plusieurs objectifs et parfois contradictoires. La négociation offre une approche interactive et stratégique pour trouver des solutions acceptables et équitables pour toutes les parties impliquées.

En résumé, ce mémoire a contribué à approfondir mes connaissances sur les méthodes de résolution numérique des problèmes multiobjectifs et leur implémentation dans le contexte des jeux de négociation. Il ouvre la voie à de nouvelles recherches dans le domaine de la programmation multiobjectifs et des jeux de négociation, avec des applications potentielles dans divers domaines tels que la gestion des conflits, la prise de décision en affaires, la politique, et d'autres domaines où des compromis et des solutions équitables sont nécessaires. Ces compétences de résolution de problèmes, basées sur la négociation et l'optimisation, sont précieuses dans le monde complexe et en constante évolution d'aujourd'hui, où la prise de décision éclairée est essentielle pour parvenir à des résultats satisfaisants pour toutes les parties concernées.

# Annexe

## 3.4 Procédure de Résolution : Programme en Matlab

```
clear all; clc; format bank;
c=[0 0 0 0 0 0 -1];
A=[-1 0 0 0 0 0 1;
   0 -1 0 0 0 0 1;
   0 0 -1 0 0 0 1;
   1 1 1 0 0 0 0;
   0 0 0 1 1 1 0;
   1 0 0 -3 0 0 0;
   0 1 0 0 -2 0 0;
   0 0 1 0 0 -1 0];
b=[0; 0; 0; 30; 18; 0; 0; 0];
Aeq=[];
beq=[];
lb=[0 0 0 0 0 0 0];
ub=[];
y=linprog(c,A,b,Aeq,beq,lb,ub);
z1=y(7,1)
```

```
c=[0 0 0 0 0 0 -1];
B=[0 0 0 -1 0 0 1;
   0 0 0 0 -1 0 1;
   0 0 0 0 0 -1 1;
   1 1 1 0 0 0 0;
   0 0 0 1 1 1 0;
   1 0 0 -3 0 0 0;
   0 1 0 0 -2 0 0;
   0 0 1 0 0 -1 0];
b=[0; 0; 0; 30; 18; 0; 0; 0];
Aeq=[];
beq=[];
lb=[0 0 0 0 0 0 0];
ub=[];
y=linprog(c,B,b,Aeq,beq,lb,ub);
z2=y(7,1)

% clear all;
c=[0 0 0 0 0 0 0 0 1];

A=[-1 0 0 0 0 0 1 0 0;
   0 -1 0 0 0 0 1 0 0;
   0 0 -1 0 0 0 1 0 0;
   0 0 0 -1 0 0 0 1 0;
   0 0 0 0 -1 0 0 1 0;
   0 0 0 0 0 -1 0 1 0;
   1 1 1 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 1 1 1 0 0 0;
   1 0 0 -3 0 0 0 0 0;
   0 1 0 0 -2 0 0 0 0;
   0 0 1 0 0 -1 0 0 0;
```

```
   0 0 0 0 0 0 -1 0 -z1;
   0 0 0 0 0 0 0 -1 -z2];
 b=[0; 0; 0; 0; 0; 0; 30; 18; 0; 0; 0; -z1; -z2];
Aeq=[];
beq=[];
lb=[0 0 0 0 0 0 0];
ub=[];
y=linprog(c,A,b,Aeq,beq,lb,ub);
 z3=y(7,1)
 z4=y(8,1)
%  clear all;
A=[
   -1 0 0 0 0 0;
   0 -1 0 0 0 0;
   0 0 -1 0 0 0;
   0 0 0 -1 0 0;
   0 0 0 0 -1 0;
   0 0 0 0 0 -1;
   1 1 1 0 0 0 ;
   0 0 0 1 1 1 ;
   1 0 0 -3 0 0;
   0 1 0 0 -2 0;
   0 0 1 0 0 -1
   ];
 b=[ - z3; - z3; - z3; -z4; -z4; -z4; 30; 18; 0; 0; 0 ];
  rel='<<<<<<<<<<<';
  points=extrpts(A, rel, b);
B=points';
 format bank
 convB = B(1, :);
```

```
for i = 2:size(B, 1)
    is_unique = true;

    for j = 1:size(convB, 1)
        if sum(abs(B(i, :) - convB(j, :))) <= 1
            is_unique = false;
            break;
        end
    end

    if is_unique
        convB = [convB; B(i, :)];
    end
end
convB;
[l,c]=size(convB);
EC=[];
for i=1:l
env(1,:)=convB(i,1:3);
env(2,:)=convB(i,4:6);
env
EC=[EC env];
end
```

# Bibliographie

[Armand and Malivert, 1991] Armand, P. and Malivert, C. (1991). Determination of the efficient set in multiobjective linear programming. *Journal of optimization theory and applications*, 70(3) :467–490.

[Audebert, 1999] Audebert, P. (1999). *La Négociation*. Ed. Organisation, Paris.

[Bugen, 2000] Bugen, L.-B. (2000). *La Négociation dans le Commerce Electronique*. Université de Caen. Maitrise en Informatique.

[Caballero et al., 1996] Caballero, R., Ruiz, F., and Steuer, R. E. (1996). Advances in multiple objective and goal programming. In *in Proceedings of the Second International Conference on Multi-Objective Programming and Goal Programming*, volume 455.

[Dantzig, 1963] Dantzig, G. B. (Princeton, N.J, 1963). *Linear programming and extensions*. Princeton University Press.

[Dantzig and Thapa, 2003] Dantzig, G. B. and Thapa, M. N. (2003). *Linear Programming*, volume II : Theory and Exrensions. Springer-Verlag, New York.

[Ehrgott, 2005] Ehrgott, M. (2005). *Milticriteria Optimisation*. Springer , New York.

[Fernandez and Puerto, 1996] Fernandez, F. and Puerto, J. (1996). Vector linear programming in zero-sum multicriteria matrix games.

[Ghose, 1991] Ghose, D. (1991). A necessary and sufficient condition for pareto-optimal security strategies in multicriteria matrix games.

[Ghose and Prasad, 1989] Ghose, D. and Prasad, U. R. (1989). Solution concepts in two-person multicriteria games.

[Halimi, 2021] Halimi, N. (2020-2021). *Méthodes Multicritères d'Aide à la Décision*. Support de Cours.

[Hinojosa et al., 2005] Hinojosa, M., Marmol, A., and Monroy, L. (2005). Generalized maximin solutions in multicriteria bargaining. *Annals of Operations Research, Vol. 137, pp. 243-255*.

[Khimoum, 2021] Khimoum, N. (2020-2021). *Programmation Linéaire*. Support de Cours.

[Kosma-Lacroze, 2000] Kosma-Lacroze, C. (2000). Communication commerciale. *BTS Commerce International*.

[Marmol et al., 2007] Marmol, A., Monroy, L., and Rubiales, V. (2007). An equitable solution for multicriteria bargaining games. *European Journal of Operational Research, Vol. 177, pp. 1523-1534*.

[Nash, 1950] Nash, J. (1950). Equilibrium points in n-person games.

[OTHMANI, 1998] OTHMANI, I. (1998). *Optimisation multicritère :fondements et concepts*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, France.

[Prevot and Holin, 1986] Prevot, M. and Holin, S. (1986). *Programmation linéaire multiobjectifs*. Collection de L'institut de mathématiques economiques.

[Puerto et al., ] Puerto, J., Fernandez, F., Hinijosa, M., Marmol, A., and Monroy, L. Solution concepts for multiple objective n-person games.

[Rubinstein, 1982] Rubinstein, A. (1982). Perfect equilibrium in a bargaining model. *Econometrica, Vol. 50, No. 1, pp. 97-109*.

[Vanderbei, 2001] Vanderbei, R. J. (2001). *Linear Programming : Foundations and Extensions*. Princeton University Press, Princeton, NJ 08544, second edition.

[Voorneveld, 1999] Voorneveld, M. (1999). Pareto-optimal security strategies as minimax strategies of a standard matrix game.

## *Résumé*

Ce mémoire explore le domaine de la négociation multiobjectifs en se concentrant sur la résolution numérique et l'implémentation. Ils comprend trois chapitres : la programmation linéaire multiobjectives, les jeux de négociation multiobjectifs, et l'état de l'art de l'approche de la stratégie maxmin généralisé et de la solution lexmin généralisé. Une attention particulière est accordée à la recherche de solutions équitables dans les jeux de négociation multiobjectifs, offrant ainsi une contribution significative à ce domaine d'étude.



**Mots clés** :théorie des jeux,négociation, multi-objective .



## *Abstract*

This thesis delves into the realm of multi-objective negotiation with a focus on numerical resolution and implementation.This thesis includes three chapters : multi-objective linear programming, multi-objective negotiation games, and the state-of-the-art of the generalized maxmin strategy approach and lexmin generalized solution. Special attention is devoted to seeking equitable solutions within multi-objective negotiation games, thereby making a significant contribution to this field of study.



**Keywords** :game theory,negociation,multi-objective.