

RÉPUBLIQUE ALGÉRIEN DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ ABDERRAHMANE MIRA-BÉJAÏA-ALGÉRIE  
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



جامعة بجاية  
Tasdawit n Bgayet  
Université de Béjaïa

*Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master  
en Mathématiques*

**OPTION**

Analyse Mathématiques

**THÈME**

*Résolution d'une équation intégrale de Fredholm  
par les méthodes itératives d'approximation du  
point fixe*

**PAR**

Nemouchi Siham

Devant le jury :

**Président :** Mme.HOCINE Safia

**Encadreur :** Mme. BARACHE Bahia

**Examineur :** Mme.TAKHEDMIT Baya

Année Universitaire : 2022/2023

---

## Remerciements

Je remercie Allah le tout puissant qui ma accordé la santé et la patience durant toutes ces années pour que je viens aujourd'hui et présenter ce travail.

Je tiens à remercier mon encadreur Mme.Barache Bahia, pour son aide et ces conseils précieux.

Je tiens aussi à remercier monsieur.Soufit Massinissa pour son aide à la réalisation de ce mémoire. Mes remerciements vont aussi aux membre de jury Mme.HOCINE.Safia et Mme.TAKHEDMIT Baya qui m'ont honoré en acceptant de jury ce travail.

Je remercie tous les enseignants de département de mathématiques.

Mes remerciements vont aussi à toute ma famille et a tous mes amis pour leur aide et leur soutien.

Enfin je remercie tous les personnes qui ont directement ou indirectement contribué à l'élaboration de ce travail.

---

## Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

**A** mes chères **parents** ma **mère** et mon **père**

Pour leur patience, leur soutien et leur encouragement.

**A mes frères** : YAHIA et RAYAN.

**A mes chères soeurs** : SILIA et IBETISSAM.

**A** Ma chère **grand-mère**.

**A** mes **amies** et toute la famille **NEMOUCHI** et **KETTAM** qui m'a encouragé  
et soutenu toute ou lang de cette aventure académique.

---

---

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Les équations intégrales</b>	<b>7</b>
1.1 Équations intégrales linéaires . . . . .	8
1.1.1 Équations intégrales linéaires de Fredholm . . . . .	8
1.1.2 Équations intégrales linéaire de Volterra . . . . .	10
1.2 Équations intégrales non linéaires . . . . .	11
1.2.1 Équation intégrale non linéaire de Fredholm . . . . .	11
1.2.2 Équation intégrale non linéaire de Volterra . . . . .	12
1.3 Alternative de Fredholm . . . . .	13
1.4 Quelques Méthodes analytique de résolution des équations intégrales de Fredholm .	14
1.4.1 La méthode de calcul direct . . . . .	14
1.4.2 Méthode du noyau dégénéré . . . . .	16
<b>2 Les méthodes itératives d'approximation du point fixe</b>	<b>19</b>
2.1 Théorie du point fixe . . . . .	19
2.1.1 Principe de contraction de Banach . . . . .	22
2.1.2 Résolution des équations intégrales . . . . .	25
2.2 Méthodes d'approximation du point fixe . . . . .	27
2.2.1 la méthode itérative de picard . . . . .	28
2.2.2 Méthode itérative de Mann . . . . .	29
2.2.3 Méthode itérative de Mann avec erreurs . . . . .	31
<b>3 Application numérique</b>	<b>32</b>
3.1 Résolution numérique des équations intégrales de Fredholm de second espèce . . . . .	33

---

---

## Table des figures

2.1	$f(x) = 2\sin(x) - x$ , sur $[-1, 2]$ , point fixe unique . . . . .	20
2.2	$f(x) = x^2$ , sur $[-1, 2]$ , deux points fixes . . . . .	21
2.3	$f(x) = x$ , sur $[-5, 2]$ , infinité du point fixe . . . . .	21
2.4	$f(x) = x + \frac{1}{2}$ , sur $[-2, 2]$ , aucun point fixe . . . . .	22
3.1	La solution approchée à l'aide de l'algorithme de Mann avec des erreurs indépendantes.	37
3.2	La solution approchée à l'aide de l'algorithme de Mann avec des erreurs négativement associée . . . . .	39
3.3	La solution approchée à l'aide de l'algorithme de Mann avec des erreurs $\alpha$ -mélangeantes	42
3.4	La solution approchée à l'aide de l'algorithme de Mann avec des erreurs indépendantes. . . . .	47
3.5	La solution approchée á l'aide de l'algorithme de Mann avec des erreurs négativement associée . . . . .	50
3.6	La solution approchée à l'aide de l'algorithme de Mann avec des erreurs $\alpha$ -mélangeantes	52

---

---

## Introduction Générale

La théorie du point fixe est fondamentale en mathématiques. En effet, la résolution de plusieurs problèmes en mathématiques se ramène souvent à la recherche d'un point fixe pour certaines applications linéaires ou non linéaires. De plus, plusieurs problèmes intervenant en physique, en chimie et en biologie..., sont modélisés par des équations différentielles des systèmes d'équations différentielles ou d'équations intégrales qu'on peut écrire comme équation du point fixe c-à-d  $F(x) = x$  [5].

En mathématique une équation intégrale est une équation dans laquelle l'inconnu apparaît sous le signe intégral. Cette inconnue est une fonction d'une ou de plusieurs variables.

Dans la théorie des équations intégrales qui s'est développée très rapidement à la suite des travaux de Fredholm et de Volterra, on distingue les équations de Fredholm (qui ont été introduites par le mathématicien Suédois Ivar Fredholm en 1900 qui a joué un rôle majeur dans l'établissement de la théorie des opérateurs). Ces équations constitue aujourd'hui une importante branche de l'analyse mathématique.

Les méthodes de résolution numériques sont très importantes dans plusieurs domaines scientifiques comme les mathématiques appliquées, la physique mathématique, et beaucoup des problèmes faisant intervenir les équations différentielles ordinaires, aux dérivées partielles et intégrales. Dans ce mémoire, nous intéressons à la résolution des équations intégrales de Fredholm. Le mémoire est divisé en trois chapitres

Dans le premier chapitre, nous allons donner la définition et la classification des équations intégrales de Fredholm. Ainsi que quelques Méthodes analytiques pour la résolution de ces équations.

Le deuxième chapitre consacré à la présentation de quelques théorèmes du point fixe et quelques méthodes itératives d'approximations du point fixe.

Dans le troisième chapitre une méthode de résolution numérique de l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce à été faite.

Le mémoire se termine par une conclusion et des références bibliographiques.

---

## Les équations intégrales

On appelle équation intégrale toute équation fonctionnelle apparaît sous le signe intégrale. Et classé comme étant soit une équation intégrale linéaire ou non linéaire. Les équations intégrales les plus fréquemment utilisées sont les équations intégrales de Fredholm et celles de Volterra. Et la forme générale d'une équation intégrale est donnée par :

$$\int_E k(x, t, u(t)) dt = \lambda u(x) + f(x); (x, t) \in E.$$

La fonction  $u$  est l'inconnue de cette équation intégrale,  $\lambda \neq 0$  est un paramètre la fonction  $f$  est donnée et la fonction  $K(x; t; u(t))$  s'appelle le noyau de l'équation intégrale. Ces équations sont classées selon les deux caractéristiques suivantes :

1. Limites d'intégrations ( les bornes d'intégration) :
  - Si les deux sont fixées, alors cette équation est de Fredholm.
  - Si l'une est variable, c'est l'équation de Volterra.
2. On dit qu'une équation est de première espèce
  - Si la fonction inconnue est seulement à l'intérieur de l'intégrale.
3. On dit qu'une équation est de second espèce ou de troisième espèce
  - Si l'inconnue est à l'intérieur et à l'extérieur de l'intégrale. voire[1]

## 1.1 Équations intégrales linéaires

### 1.1.1 Équations intégrales linéaires de Fredholm

**Définition 1.1.1** On appelle équation intégrale linéaire de Fredholm l'équation de la forme :

$$\alpha(x)u(x) = \lambda \int_a^b K(x;t)u(t)dt + f(x) \quad (1.1)$$

$\alpha, f, K$  sont des fonctions connues et  $\lambda$  est un paramètre réel non nul

La fonction  $K$  est appelée le noyau de l'équation de Fredholm

#### 1) Équation intégrale de Fredholm de première espèce

**Définition 1.1.2** Si  $\alpha(x) = 0$  dans l'équation (1.1) alors elle s'appelle équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce et s'écrit sous la forme :

$$\int_a^b k(x;t)u(t)dt + f(x) = 0; \quad a < x < b \text{ et } a < t < b \quad (1.2)$$

où  $u$  est la fonction inconnue,  $k(x;t)$  et  $f(x)$  sont des fonctions données,  $(x, t)$  deux variables réelles parcourant l'intervalle  $[a, b]$  :

La fonction  $k(x;t)$  est appelée le noyau de l'équation intégrale (1,2)

Si le second membre  $f(x) \neq 0$ , l'équation (1,2) est dite non homogène. dans le cas contraire, l'équation (1.2) s'écrit :

$$\int_a^b k(x;t)u(t)dt = 0$$

et on dit qu'elle est homogène.

**Exemple 1.1** Équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce

$$\int_0^1 (3x - 2)tu(t)dt = x^3 + 3x - 1$$

pour cet exemple on a :

$$k(x;t) = (3x - 2)t; \quad (t;x) \in [0; 1] \text{ et } f(x) = x^3 + 3x - 1; \quad x \in [0; 1].$$



## 2) Équation intégrale de Fredholm de second espèce

• Si  $\alpha = 1$  dans l'équation (1.1) alors l'équation est dite équation intégrale linéaire de Fredholm de second espèce et s'écrit sous la forme :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x;t)u(t)dt \quad (1.3)$$

où  $u(x)$  est la fonction inconnue,  $k(x;t)$  et  $f(x)$  des fonctions données,  $x$  et  $t$  deux variables réelles parcourant l'intervalle  $[a; b]$  et  $\lambda$  un paramètre réel, La fonction  $k(x;t)$  est le noyau de l'équation intégrale.

On suppose que le noyau  $k(x;t)$  est défini dans le carré  $\omega = \{(x, t) / a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$  du plan  $(x; t)$  et continu dans  $\omega$  ou présente des discontinuités telles que l'intégrale

$$\int_a^b \int_a^b |k(x;t)|^2 dxdt$$

soit finie.

• Si  $f(x) \neq 0$ , l'équation (1.3) est dite non homogène, dans le cas contraire l'équation intégrale (1.3) s'écrit

$$u(x) - \lambda \int_a^b k(x;t)u(t)dt = 0$$

et on dit qu'elle est homogène.

**Exemple 1.2** (équation intégrale de Fredholm de second espèce)

1. L'équation

$$u(x) - \lambda \int_a^b (5x^2 - 3)t^2 u(t)dt = e^x$$

est une équation intégrale de Fredholm de second espèce

2. L'équation

$$u(x) = e^x - x + \int_0^1 x(e^{xt} - 1)u(t)dt$$

admet  $u(x) = 1$  comme solution.

3. L'équation

$$u(x) = (x - 1)e^{-x} + 4 \int_0^\infty e^{-(x+t)} u(t)dt$$

admet  $u(x) = xe^{-x}$  comme solution.

### 3) Équation intégrale de Fredholm de troisième espèce

Si  $\alpha(x)$  de l'équation (1.1) est continue et s'annule en certains points, mais pas en tout point de  $[a, b]$ , elle est dite de troisième espèce.

#### 1.1.2 Équations intégrales linéaire de Volterra

**Définition 1.1.3** Une équation à une inconnue  $u$ , de la forme

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)u(t)dt \quad (1.4)$$

est appelée équation intégrale linéaire de Volterra.

Où  $f; K$  sont des fonctions connues, et  $\lambda$  est un paramètre réel non nul. La fonction  $K$  est appelée le noyau de l'équation de Volterra.

1. Si  $f(x) = 0$  l'équation (1,4) écrit :

$$u(x) = \lambda \int_a^x k(x, t)u(t)dt \quad (1.5)$$

s'appelle équation homogène de Volterra de deuxième espèce.

2. L'équation à l'inconnue  $u$ , de la forme

$$\int_a^x k(x, t)u(t)dt = f(x) \quad (1.6)$$

est appelée équation intégrale de Volterra de première espèce.

**Remarques 1.1** L'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, il suffit de prendre  $K(x; t) = 0$ , pour  $t > x$

## 1.2 Équations intégrales non linéaires

### 1.2.1 Équation intégrale non linéaire de Fredholm

L'équation intégrale non linéaire de Fredholm et l'équation de la forme :

$$\alpha(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x; t; u(t))dt \quad (1.7)$$

1. Si  $\alpha(x) = 0$ , alors l'équation (1.7) devient :

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x; t; u(t)) = 0$$

Cette équation est appelée équation intégrale non linéaire de Fredholm de première espèce.

2. Si  $\alpha(x) = r$  (constante réelle non nulle), alors l'équation (1.7) devient :

$$ru(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t, u(t))$$

et cette équation est appelée équation intégrale non linéaire de Fredholm de second espèce.

3. Si  $\alpha(x) \neq 0$ , alors l'équation (1.7) est appelée équation intégrale non linéaire de Fredholm de troisième espèce.

4. Si  $f(x) \neq 0$ , l'équation (1.7) est dite équation intégrale non linéaire de Fredholm non homogène.

5. Si  $f(x) = 0$ , alors l'équation (1.7) devient :

$$\alpha(x)u(x) = \lambda \int_a^b K(x; t; u(t))dt \quad (1.8)$$

et cette équation est appelée équation intégrale non linéaire de Fredholm homogène

### 1.2.2 Équation intégrale non linéaire de Volterra

L'équation intégrale non linéaire de Volterra et l'équation de la forme suivante :

$$\alpha u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t, u(t)) dt \quad (1.9)$$

1. Si  $\alpha(x) = 0$ , alors l'équation (1.9) devient :

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t, u(t)) = 0$$

Cette équation est appelée équation intégrale non linéaire de Volterra de première espèce

2. Si  $\alpha(x) = r$  (constante réelle non nulle), alors l'équation (1.9) devient :

$$ru(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t, u(t))$$

et cette équation est appelée équation intégrale non linéaire de Volterra de second espèce.

3. Si  $h(x) \neq 0$ , alors l'équation (1.9) est appelée équation intégrale non linéaire de Volterra de troisième espèce.

4. Si  $f(x) \neq 0$ , l'équation (1.9) est dite équation intégrale non linéaire de Volterra non homogène.

5. Si  $f(x) = 0$ , alors l'équation (1.9) devient :

$$h(x)u(x) = \lambda \int_a^x k(x, t, u(t))$$

et cette équation est appelée équation intégrale non linéaire de Volterra homogène.

#### Remarques 1.2

- Si  $f(x) \neq 0$ , dans l'équation (1.3) et dite non homogène
- Si  $f(x) = 0$ , l'équation et dite homogène.

### 1.3 Alternative de Fredholm

**Théorème 1.3.1** (voire[2],page84)

**(Théorème d'alternative de Fredholm)**

Si l'équation intégrale homogène de Fredholm

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x;t)u(t)dt \quad (1.10)$$

possède seulement la solution triviale  $u(x) = 0$ ; alors l'équation non homogène de Fredholm correspondante.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x;t)u(t)dt \quad (1.11)$$

possède toujours une unique solution. Ce théorème est connu par le théorème alternatif de Fredholm.

**Démonstration** (voire[2],page84)

**Remarques 1.3** Dans la pratique l'alternative de Fredholm est plus importante.

Au lieu de démontrer que l'équation intégrale non homogène (1.11) a une solution, on démontre que l'équation homogène associée (1.10) n'a pas d'autres solutions non triviales.

**Théorème 1.3.2 ( Solution Unique)**(voire[2])

Si le noyau  $K(x;t)$  dans l'équation intégrale de Fredholm (1,10) est une fonction réelle, continue, bornée dans le carré  $a \leq x \leq b$  et  $a \leq t \leq b$  ( $[a, b] \times [a, b]$ ); et si  $f(x)$  est une fonction continue à valeurs réelles une condition nécessaire pour l'existence d'une solution unique pour l'équation intégrale de Fredholm (1.1)

est donnée par

$$|\lambda|M(b-a) < 1 \quad (1.12)$$

avec

$$|K(x;t)| \leq M \in \mathbb{R} \quad (1.13)$$

Au contraire, si la condition nécessaire (1.12) n'a pas eu lieu, alors une solution continue peut exister pour l'équation intégrale de Fredholm.

Pour illustrer cela, nous considérons l'équation intégrale de Fredholm

$$u(x) = -2 - 3x + \int_0^1 (3x+t)u(t)dt \quad (1.14)$$

Il est clair que  $\lambda = 1$  ;  $|K(x; t)| = |3x + t| \leq 4$  et  $(b - a) = 1$  ce qui donne  $\lambda M(b - a) = 4$ . Cependant, l'équation de Fredholm (1.13) a une solution exacte donnée par  $u(x) = 6x$ .

#### Remarques 1.4

Diverses méthodes analytiques et numériques ont été utilisées pour traiter les équations intégrales de Fredholm. (La méthode de calcul direct, la méthode des approximations successives, la méthode de picard, la méthode à noyau dégénéré...).

Et la conversion de l'équation de Fredholm en un problème à valeur au bord sont parmi de nombreuses méthodes traditionnelles qui ont été couramment utilisées.

Mais dans notre travail on utilise une autre méthode itérative des point fixe qui est la méthode itérative de Mann avec erreurs.

## 1.4 Quelques Méthodes analytique de résolution des équations intégrales de Fredholm

### 1.4.1 La méthode de calcul direct

Dans cette section, la méthode de calcul direct sera appliquée pour résoudre l'équations intégrales de Fredholm. La méthode approche les équations intégrales de Fredholm de manière directe et donne la solution sous une forme exacte et non sous une forme d'une série. Il est important de souligner que cette méthode sera appliquée pour les noyaux dégénérés ou séparables

$$K(x, t) = \sum_{k=1}^n g_k(x)h_k(t) \quad (1.15)$$

La méthode de calcul direct peut être appliquée comme suit :

1. Nous remplaçons d'abord (1.15) dans l'équation intégrale

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t)u(t)dt \quad (1.16)$$

2. Cette substitution donne

$$u(x) = f(x) + \int_a^b \sum_{k=1}^n g_k(x)h_k(t)u(t)dt \quad (1.17)$$

Basé sur ceci, l'équation (1.17) devient

$$u(x) = f(x) + \sum_{k=1}^n \alpha_k g_k(x) \quad (1.18)$$

avec

$$\alpha_k = \int_a^b h_k(t)u(t)dt; 1 \leq k \leq n \quad (1.19)$$

3. La substitution de (1.18) dans (1.19) donne un système de  $n$  équations algébriques qui peut être résolu pour déterminer les constantes  $\alpha_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ . En utilisant les valeurs numériques obtenues de  $\alpha_k$  en (1.18), la solution  $u(x)$  de l'équation intégrale de Fredholm (1.16) est obtenue.

### Remarques 1.5

Il faut noter ici que la méthode de calcul direct a fourni une solution exacte, plutôt qu'une solution sous forme de série où la constante  $\alpha$  a été déterminé. L'évaluation est entièrement dépendante de la structure du noyau  $K(x, t)$ , et parfois il peut arriver que des difficultés de calcul peuvent survenir dans la détermination de la constante  $\alpha$  si l'équation algébrique résultante est de troisième ordre ou plus. Ce genre de difficulté peut survenir dans l'équation intégrale non linéaire.

**Exemple 1.3** Pour trouve la solution non triviale de l'équation intégrale homogène de Fredholm en utilisant la méthode de calcul direct :

$$u(x) = \frac{2}{\pi} \lambda \int_0^\pi \cos(x-t)u(t)dt.$$

Étant donné que

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{2}{\pi} \lambda \int_0^\pi \cos(x-t)u(t)dt \\ u(x) &= \frac{2}{\pi} \lambda \int_0^\pi [\cos(x)\cos(t) + \sin(x)\sin(t)]u(t)dt \\ u(x) &= \frac{2}{\pi} \lambda \alpha \cos x + \frac{2}{\pi} \lambda \beta \sin x \end{aligned}$$

Avec

$$\alpha = \int_0^\pi \cos(t)u(t)dt$$

et

$$\beta = \int_0^\pi \sin(t)u(t)dt$$

Par conséquent, en utilisant la valeur de  $u(x)$  sous les signes intégrales de  $\alpha$  et  $\beta$  nous obtenons une équation algébrique simultanée donnée par :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2\lambda}{\pi} \left[ \int_0^\pi \cos(t)(\alpha \cos(t) + \beta \sin(t))dt \right] \\ \beta &= \frac{2\lambda}{\pi} \left[ \int_0^\pi \sin(t)(\alpha \cos(t) + \beta \sin(t))dt \right] \end{aligned}$$

Après avoir effectué les intégrations et la réduction, les valeurs de  $\alpha$ , et  $\beta$ , sont trouvés  $\alpha = 2\lambda\alpha$  et  $\beta = 2\lambda\beta$ . Si  $\alpha \neq 0$  et  $\beta \neq 0$ , alors  $\lambda = \frac{1}{2}$ . Par conséquent, la solution de l'équation est :

$$u(x) = \frac{1}{\pi}(\alpha \cos x + \beta \sin x)$$

Avec  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes arbitraires.

### 1.4.2 Méthode du noyau dégénéré

On considère l'équation

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt \quad (1.20)$$

Supposons que le noyau  $k(.,.)$  soit séparable, c-a-d.

$$k(x, t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(x)\beta_j(t) \quad (1.21)$$

Portons dans l'équation (1.20), il vient

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^n \alpha_j(x) \int_a^b \beta_j(t)u(t)dt$$

Alors

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^n c_j \alpha_j(x) \quad (1.22)$$

Donc le problème se réduit à trouver les quantités  $c_j$ . En multipliant (1.22) par  $\beta_i(x)$  et en intégrant on obtient

$$\int_a^b u(x)\beta_i(x)dx = \int_a^b f(x)\beta_i(x)dx + \lambda \sum_{j=1}^n c_j \int_a^b \alpha_j(x)\beta_i(x)dx$$

Ou de manière équivalente

$$C_i = f_i + \lambda \sum_{j=1}^n c_j a_{ij} \quad (1.23)$$

avec

$$a_{ij} = \int_a^b \beta_i(x)\alpha_j(x)dx \quad (1.24)$$



$$f_i = \int_a^b \beta_i(x) f(x) dx \quad (1.25)$$

Nous avons donc un système linéaire à  $n$  variables inconnues  $C_1, \dots, C_n$  et  $n$  équations

$$C_i = f_i + \lambda \sum_{j=1}^n c_j a_{ij} \quad 1 \leq i \leq n$$

Le système peut s'écrire sous forme matricielle

$$(I - \lambda A)c = f \quad (1.26)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \quad \text{et } c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Le déterminant  $D(\lambda)$  de ce système est

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1 - \lambda a_{22} & & -\lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \cdots & -\lambda a_{nn} \end{vmatrix}$$

qui est un polynôme en  $\lambda$  de degré au plus égal à  $n$ , en outre, il n'est pas identique à zéro, puisqu'il se réduit à l'unité lorsque  $\lambda = 0$ . Pour toutes les valeurs de  $\lambda$  pour lesquelles  $D(\lambda) \neq 0$ , le système algébrique (1.23) admet une solution unique et ainsi l'équation intégrale (1.20). D'autre part, pour toutes les valeurs de  $\lambda$  pour lesquelles  $D(\lambda) = 0$ , le système algébrique (1.23) n'admet pas de solution ou bien admet un nombre infini de solutions.

**Remarques 1.6** Nous avons considéré que l'équation intégrale du second type, où seule cette méthode est applicable.

**Exemple 1.4** Pour illustrer la méthode ci-dessus, nous considérons l'équation intégrale à noyau dégénéré suivante

$$u(x) = \frac{-2}{\pi} \cos(x) + \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x-t) u(t) dt$$

Le noyau  $k(x, t) = \cos(xt)$ , peut être écrit comme

$$k(x, t) = \cos(x)\cos(t) + \sin(x)\sin(t)$$

qui est un noyau séparable tel que

$$k(x, t) = \sum_{i=0}^2 \alpha_i(x)\beta_i(t)$$

$$\alpha_1(x) = \cos(x); \beta_1(t) = \cos(t)$$

$$\alpha_2(x) = \sin(x); \beta_2(t) = \sin(t)$$

Maintenant, en utilisant les relations (1.24) et (1.25) on obtient

$$a_{11} = \int_a^b \beta_1(t)1(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\cos(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 + \cos(2t)]dt = \frac{\pi}{4},$$

$$a_{12} = a_{21} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\sin(t)dt = \frac{1}{2}$$

$$a_{22} = \frac{\pi}{4}$$

$$f_1 = \frac{-2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\cos(t)dt = \frac{-1}{2} f_2 = \frac{-1}{\pi}$$

Pour trouver ci on utilise la relation sous forme matricielle (1.26)

$$\left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{\pi} \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\pi} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

La relation (1.22) nous donne

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^2 c_j \alpha_j(x) = -\frac{2}{\pi} \cos(x) + \frac{4}{\pi} \left( \frac{1}{2} \cos(x) + \frac{\pi}{4} \sin(x) \right)$$

on trouve

$$u(x) = \sin(x)$$

qui est la solution exacte.

---

## Les méthodes itératives d'approximation du point fixe

### 2.1 Théorie du point fixe

*Dans ce chapitre nous allons présenter quelques théorèmes et méthodes itératives du point fixe, ainsi la nature du point fixe. La plupart des phénomènes naturels de la vie réelle (en physique, en chimie, en mécanique .....)*  
*s'expriment mathématiquement sous forme d'équation aux dérivées partielle ou d'équation intégrale....,qu'on peut écrire sous la forme  $f(x) = x$ , qu'on appelle équation du point fixe. On peut conclure que la résolution de ces problèmes se ramène á la recherche des points fixes pour certaines applications.*

**Définition 2.1.1** [3]

*Soit  $X$  un ensemble non vide et  $f : X \longrightarrow X$  une application. On dit que  $x \in X$  est un point fixe de  $f$  s'il vérifie*

$$f(x) = x.$$

*On note l'ensemble des points fixes de  $f$  par  $Fix(f)$  qui est défini par*

$$Fix(f) = \{x \in X / f(x) = x\}$$

**Remarques 2.1**

*l'application  $f$  admet un unique point fixe ssi l'ensemble  $\text{Fix}(f)$  contient seulement ce point fixe.*

*L'application  $f$  n'admet aucun point fixe ssi l'ensemble  $\text{Fix}(f)$  égale à l'ensemble vide.*

*L'application  $f$  admet plusieurs points fixes ssi l'ensemble  $\text{Fix}(f)$  contient plus d'un point.*

**Exemple 2.1** Dans le cas réel :

$1-f(x) = 2\sin(x) - x$  admet un unique point fixe sur  $[-1, 2]$ , qu'on peut avoir dans le graphe suivant :

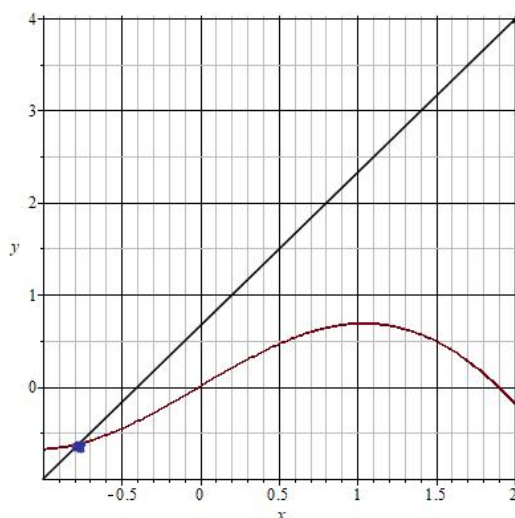


FIGURE 2.1 –  $f(x) = 2\sin(x) - x$ , sur  $[-1, 2]$ , point fixe unique

2)  $f(x) = x^2$  admet deux points fixes sur  $[-1, 2]$ , qu'on peut voir dans le graphe suivant :

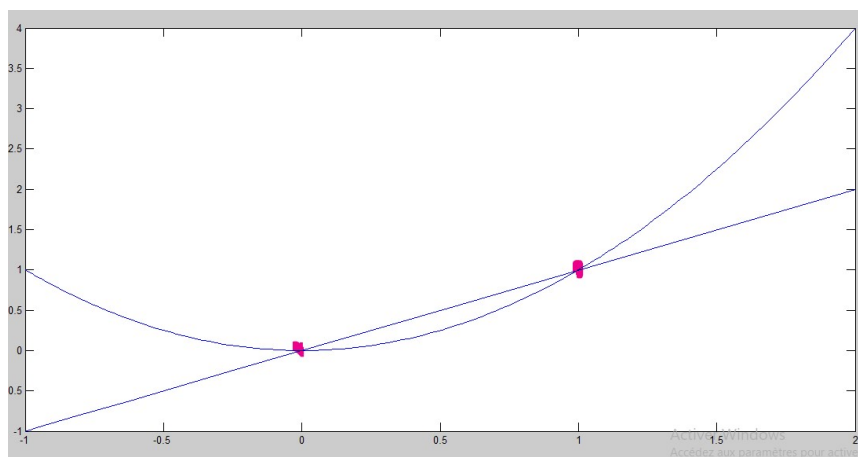


FIGURE 2.2 –  $f(x) = x^2$ , sur  $[-1, 2]$ , deux points fixes

3)  $f(x) = x$  une infinité du point fixe sur  $\mathbb{R}$ , qui on peut avoir dans le graphe suivant :

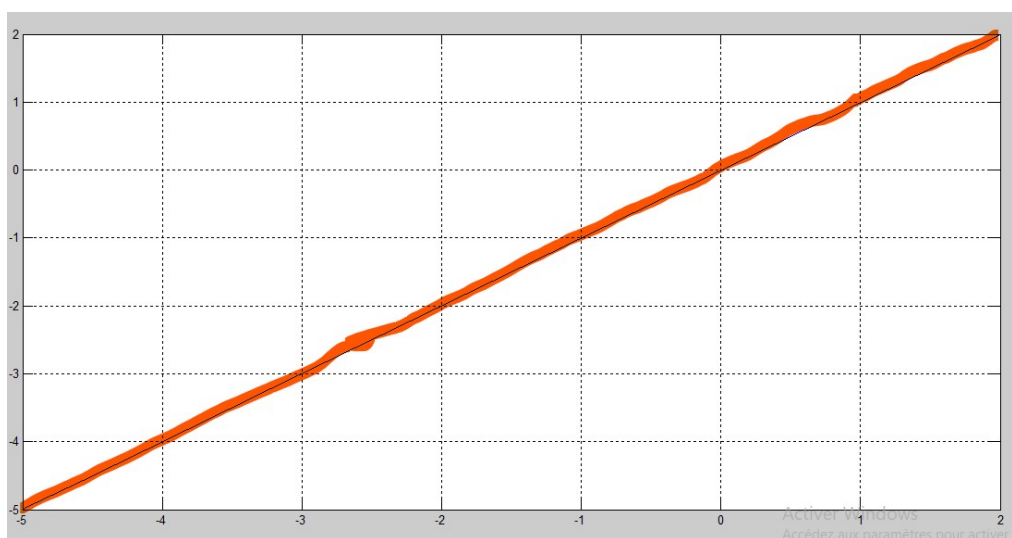


FIGURE 2.3 –  $f(x) = x$ , sur  $[-5, 2]$ , infinité du point fixe

4)  $f(x) = x + \frac{1}{2}$  n'admet aucun point fixe, car il n'existe aucun nombre réel  $x$  égal à  $x + \frac{1}{2}$ , comme on observe dans le graphe suivant :

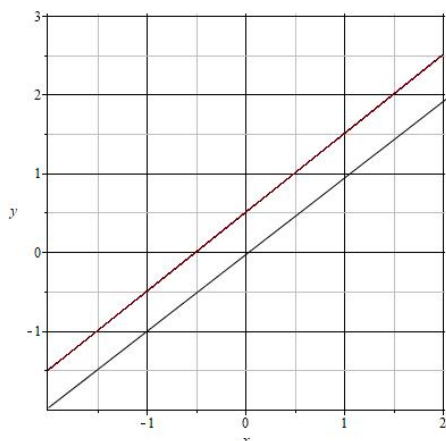


FIGURE 2.4 –  $f(x) = x + \frac{1}{2}$ , sur  $[-2, 2]$ , aucun point fixe

**Remarques 2.2** On remarque que l'existence ou l'existence et l'unicité du point fixe dépend de (domaine d'étude, l'application qu'on a choisie, et la méthode de recherche). On va présenter dans cette partie alors quelque théorème très important dans le cadre du point fixe.

### 2.1.1 Principe de contraction de Banach

Le théorème du point fixe de Banach, connu aussi sous le nom du principe de contraction de Banach ou théorème du point fixe du Picard, est apparu pour la première fois en 1922 dans le cadre de la résolution d'une équation intégrale. Notons que ce théorème est une abstraction de la méthode classique des approximations successives introduite par Liouville (en 1837) et développée par la suite par Picard (en 1890). Cause de sa simplicité et de son utilité, ce théorème est largement utilisé dans plusieurs branches de l'analyse mathématique, en particulier, dans la branche des équations différentielles et équation intégrale. Le théorème du point fixe de Banach a connu de diverses généralisations dans différents espaces.

**Définition 2.1.2** *Application  $K$ -contractante*[5] soit

$$f : (\mathbb{X}, d_x) \rightarrow (\mathbb{Y}, d_y)$$

une applications d'un espace métrique  $\mathbb{X}$  vers un espace métrique  $\mathbb{Y}$  vérifie le résultat suivant :

$$\exists k \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{X} : d_y(f(x), f(y)) \leq kd_x(x, y)$$

Alors  $f$  est dite lipschitzienne et  $k$  est la constante de Lipschitz de l'application  $f$  de plus.

- Si  $k < 1$   $f$  est dite contractante.
- Si  $k = 1$   $f$  est dite non -expansive.
- Si  $d_y(f(x), f(y)) < d_x(x, y)$   $f$  est dite contractive.

**Remarques 2.3** Toute application lipschitzienne est continue.

**Proposition 2.1.1** [3]

Une application contractante est continue.

**Théorème 2.1.1**

Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet et  $f : X \rightarrow X$  une application  $k$ -contractante. Alors  $f$  un point fixe unique  $x^* \in X$  (ie  $f(x^*) = x^*$ ).

De plus toute suite récurrente

$$\begin{cases} x_0 \in X \\ x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Converge vers  $x^*$ .

**Remarques 2.4**

La suite itérative définit dans ce théorème est dite suite itérative de picard.

**Démonstration** [3][5][7]

**Exemple 2.2** Soit :

$$f : X = [-4, +\infty[ \longrightarrow [-4, +\infty[ \\ x \longrightarrow \frac{1}{2}x + 3$$

On a

$$\forall x \in X, f(X) \subset X$$

1. Montrons que  $f$  est contractante :

Soit  $x, y \in X$ , On a :

$$|f(x) - f(y)| = |\frac{1}{2}x + 3 - \frac{1}{2}y - 3| = |\frac{1}{2}(x - y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$$

Alors  $\exists k = \frac{1}{2} < 1$  tel que  $d(f(x) - f(y)) \leq kd(x, y)$

D'où  $f$  est  $k$ -contractante avec  $K = 1/2$ .

2. Comme  $X$  est un intervalle fermé de  $\mathbb{R}$ , alors  $X$  est complet.

D'après ce qui précède le théorème de contraction de Banach nous assure l'existence et l'unicité du point fixe de  $f$ .

**Exemple 2.3** Soient  $X = [a, b]$  et l'application  $f : X \longrightarrow X$  tq  $f$  est dérivable sur  $]a, b[$  elle

vérifie  $|f'(x)| \leq k < 1$ , pour tout  $x \in [a, b]$ , alors d'après le théorème des accroissements finis, si

$x, y \in X$ ,  $\exists$  une constante  $x < c < y$  t.q  $|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y|$

comme  $|f'(x)| \leq k < 1 \implies |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$  alors  $f$  est contractante donc d'après le

principe de contraction de Banach  $f$  admet un unique point fixe.



### 2.1.2 Résolution des équations intégrales

*Existence et unicité de la solution d'une équation intégrale de Fredholm*

**Théorème 2.1.2** Soient  $f$  et  $K$  deux fonctions continues dans  $[a; b]$  et  $[a; b] \times [a; b]$  (resp.)

et  $M = \sup |K(x; t)|$  et  $x; t \in [a; b]$  et  $\lambda$  un nombre réel tel que  $M|\lambda|(b-a) < 1$ . Alors l'équation intégrale (1.1) admet une seule solution.

**Démonstration 2.1.1** Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution de (1.1)

revient à montrer que l'application continue et définie par :

$$(Tu)(x) = \lambda \int_a^b K(x; t)u(t)dt + f(x)$$

est une contraction, Soit  $u_1, u_2 \in [a; b]$ , on a :

$$\begin{aligned} \|Tu_1 - Tu_2\| &= |\lambda| \sup \left| \int_a^b K(x; t)(u_1(t) - u_2(t))dt \right| \\ &\leq |\lambda| \sup \int_a^b |K(x; t)(u_1(t) - u_2(t))| dt \\ &\leq |\lambda| M \int_a^b \sup |u_1(t) - u_2(t)| dt \\ &= |\lambda| M \|u_1(t) - u_2(t)\| \int_a^b dt \\ &= |\lambda| M(b-a) \|u_1(t) - u_2(t)\|. \end{aligned}$$

Par hypothèse  $|\lambda|M(b-a) < 1$ , donc d'après le théorème de contraction de Banach  $T$  admet un unique point fixe.

**Théorème 2.1.3** Soit l'équation suivante :

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x; t)u(t)dt + f(x) \tag{2.1}$$

avec le noyau  $K$  est continu sur  $[a, b]$   $f \in L^2([a; b])$  et  $K^* < 1$ , de plus

$K^* = \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(x; t)|^2 dx dt}$ . Alors l'équation (2.1) admet une unique solution

$$u \in L^2([a; b])$$

**Démonstration 2.1.2** Considérons l'équation (2.1). Comme  $f \in L^2([a; b])$ , alors  $Tu \in L^2([a; b])$

Si  $\int_a^b K(x; t)u(t)dt \in L^2([a; b])$

Montrons que  $\int_a^b K(x; t)u(t)dt \in L^2([a; b])$  revient à montrer que :

$$\int_a^b \left| \int_a^b K(x; t)u(t)dt \right|^2 < \infty$$

On a

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b K(x; t)u(t)dt \right| &\leq \int_a^b |K(x; t)u(t)|dt \\ &\leq \left( \int_a^b |K(x; t)|^2 dt \right)^{1/2} \left( \int_a^b |u(t)|^2 dt \right)^{1/2} \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Cauchy Schwartz D'où

$$\left| \int_a^b K(x; t)u(t)dt \right|^2 \leq \int_a^b |K(x; t)|^2 dt \int_a^b |u(t)|^2 dt$$

or

$$\begin{aligned} \int_a^b \left| \int_a^b K(x; t)u(t)dt \right|^2 &\leq \int_a^b \left( \int_a^b |K(x; t)|^2 dt \right) \left( \int_a^b |u(t)|^2 dt \right) dx \\ &\leq \int_a^b \int_a^b |K(x; t)|^2 dt dx \int_a^b |u(t)|^2 dt \end{aligned}$$

Comme  $\int_a^b \int_a^b |K(x; t)|^2 dt dx < \infty$  et  $\int_a^b |u(t)|^2 dt$ .

alors L'équation (2.1) est satisfaisante et  $T$  est définie de  $L^2([a; b])$  dans lui même.

Donc  $\int_a^b K(x; t)u(t)dt \in L^2([a; b])$ , où l'opérateur  $(Tu)(x) = \int_a^b K(x; t)u(t)dt$  est borné.

D'après le théorème de contraction de Banach l'équation  $Tu = u$  admet une unique solution pour  $\lambda K^* < 1$ .

## 2.2 Méthodes d'approximation du point fixe

*Le premier résultat sur la convergence d'une suite est une combinaison de deux termes successifs de l'itération de Picard et a été obtenu par Krasnoselskii en 1955.*

*le schéma est le suivant :*

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + f(x_n)), n > 0.$$

*Dans cette section, il a démontré que si  $X$  est un convexe fermé borné d'un espace uniformément convexe et  $f : X \rightarrow X$  est un opérateur non-expansive et compact c'est-à-dire ( $f$  est continue et  $f(X)$  est relativement compact).*

*Alors la suite  $(x_n)_n$  définie par le schéma précédant converge vers le point fixe de  $f$ .*

*Deux ans après Schaefer a fait une extension de résultat de Krasnoselskii avec un petit changement, dans le Schéma, il a remplacé la constante  $\frac{1}{2}$  avec un paramètre  $\lambda \in [0, 1]$ , et le nouveau schéma est :*

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n + \lambda f(x_n), n > 0.$$

*qu'est appelé itération de Krasnoselskii.*

*Ce dernier est exactement l'itération de Picard si  $\lambda = 1$ .*

*Le processus itératif de Mann à été introduit en 1953, bien que le schéma itératif de Mann dans sa forme normale soit une généralisation de celui de Krasnoselskii.*

*En remplaçant le paramètre  $\lambda$  dans la formule par une suite  $(\alpha_n)_n$  qui vérifie certaines conditions.*

*Le schéma est le suivant :*

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n f(x_n), n \in \mathbb{N}^*.$$

### 2.2.1 la méthode itérative de picard

**Définition 2.2.1 (Itération de Picard)** Soit  $(X, d)$  un espace métrique,  $C \subset X$  un sous ensemble fermé de  $X$  et  $T : C \rightarrow C$  une application possédant au moins un point fixe  $p \in F(T)$ , la suite  $\{x_n\}$  donnée par :

$$\begin{cases} x_0 \in C \\ x_{n+1} = T(x_n), \quad n = 1, 2, 3.. \end{cases}$$

est appelée **l'itération de Picard** ou **la suite d'approximations successives**.

**Définition 2.2.2 (Itération de Krasnoselskii)** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace normé et  $T : E \rightarrow E$  une application, et  $\lambda \in [0, 1]$  La suite  $\{x_n\}$  donnée par :

$$\begin{cases} x_0 \in E \\ x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n + \lambda T x_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

est appelée **Itération de Krasnoselskii**.

**Théorème 2.2.1** [5][3][7]

Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet et  $F : X \rightarrow X$  une application  $k$ -contractante c'est-à-dire :

$$d(F(x), F(y)) \leq Kd(x, y) , \text{ avec } k \in [0, 1[$$

Alors :

- $F$  admet un unique point fixe  $x^*$  .
- La suite récurrente associée à l'itération de Picard  $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$  définie par :

$$x_n = F(x_{n-1}) = F^n(x_0), \text{ converge vers } x^* .$$

- Les estimations d'erreur suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} (1) \dots d(x_n, x^*) &\leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1), \quad n = 1, 2, \dots \\ (2) \dots d(x_n, x^*) &\leq \frac{k}{1-k} d(x_{n-1}, x_n), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

- Le taux de convergence donnée par :

$$d(x_n, x^*) \leq kd(x_{n-1}, x^*) \leq k^n d(x_0, x^*), \quad n = 1, 2, \dots$$

**Démonstration 2.2.1** Voir[[4]]

**Exemple 2.4** pour Résoudre l'équation

$$\begin{cases} u'(x) = 2x(1 + u), \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Par la méthode de Picard, nous allons utiliser l'équation intégrale

$$u(x) = \int_0^x 2t(1 + u(t))dt;$$

et comme approximation initiale, on prend  $u_0(x) = 0$ . On obtient alors

$$u_1(x) = \int_0^x 2t(1 + u_0(t))dt = \int_0^x 2t(1 + 0)dt = \int_0^x 2tdt = x^2$$

;

$$u_2(x) = \int_0^x 2t(1 + u_1(t))dt = \int_0^x 2t(1 + t^2)dt = \int_0^x 2t + 2t^3dt = x^2 + 12x^4$$

$$u_3(x) = \int_0^x 2t(1 + t^2 + \frac{1}{2}t^4)dt = x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6$$

⋮ ⋮

$$u_n(x) = x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!}$$

On voit alors que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \exp(x^2) - 1$$

qui est la solution exacte de l'équation intégrale.

### 2.2.2 Méthode itérative de Mann

En 1953, Mann a introduit un schéma itératif qui est une généralisation de celui de Krasnoselskii, bien qu'il fut introduit chronologiquement deux ans plus tôt que ce dernier.

**Définition 2.2.3** Soit  $X$  un espace linéaire et  $C$  un ensemble convexe de  $X$  et  $T : C \rightarrow C$  une application, soit une suite dans  $[0, 1]$  satisfait des conditions appropriés. On définit une suite  $\{x_n\}$  dans  $C$  par :

$$\begin{cases} x_0 \in C \\ x_{n+1} = M(x_n, \alpha_n, T), \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

où  $M(x_n, \alpha_n, T) = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_nTx_n$ , alors la suite  $\{x_n\}$  est appelée **itération de Mann**.

**Définition 2.2.4** [3]

Soit  $X$  un espace vectoriel,  $Y$  un sous espace convexe,  $F : Y \rightarrow Y$  une application. pour  $x_0 \in Y$  et  $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty \subset [0, 1]$ , la suite  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  définie par :

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n F(x_n), n = 0, 1, \dots$$

est appelée itération de Mann avec des condition sur  $(\alpha_n)$  soit :

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ .
- $0 \leq \alpha_n < 1, n \in \mathbb{N}^*$  .
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n = +\infty$ .

**Remarques 2.5** [4]

1. A l'origine, l'itération de Mann était définie par une formulation matricielle. Si la suite  $\alpha_n = \lambda$  (constante), alors le processus itératif de Mann est réduit á l'itération de Krasnoselskii. Si on considère :

$$F_n = (1 - \alpha_n)I + \alpha_n F.$$

Alors nous avons  $Fix(F) = Fix(F_n)$ , pour tout  $\alpha_n \in ]0, 1]$

## Opérateur de Zamfirescu

**Définition 2.2.5** [5]

Soit  $(X, d)$  un espace métrique. L'opérateur  $f : X \rightarrow X$  est appelée opérateur de Zamfirescu s'il

existe des nombres réels  $\alpha, \beta, \gamma$  satisfaisant  $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1, 0 < \gamma < \frac{1}{2}$  telle que pour tout

$x, y \in X$ , l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$ .
- $d(f(x), f(y)) \leq \beta [d(x, f(x)) + d(y, f(y))]$ .
- $d(f(x), f(y)) \leq \gamma [d(x, f(y)) + d(y, f(x))]$ .

**Théorème 2.2.2** (voir[4]page-294-)

Soit  $X$  un espace de Banach uniformément convexe,  $Y$  un sous ensemble fermé de  $X$ , et  $F : Y \rightarrow Y$  une application de Zamfirescu puis l'itération de Mann  $\{x_n\}$  est :

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n F(x_n) , n = 1, 2, \dots$$

avec  $\{\alpha_n\}$  satisfaisant les conditions suivantes :

- $\alpha_1 = 1$ .
- $0 < \alpha_n < 1$ , pour tout  $n \geq 1$ .
- $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(1 - \alpha_n) = +\infty$ .

converge vers un unique point fixe de  $F$ .

**Démonstration** voir[4]

### 2.2.3 Méthode itérative de Mann avec erreurs

L'idée de construire le schéma itérative de Mann avec erreur vient pratiquement de calcul numérique.

**Définition 2.2.6** [4]

Soit  $X$  un sous ensemble d'un espace normé linéaire  $Y$ , et soit  $F : X \rightarrow X$  une application, la suite  $(x_n)_n$  dans  $Y$  définie par :

$$\begin{cases} x_1 \in X \\ x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n F(x_n) + \beta_n \epsilon_n. \end{cases}$$

Avec  $(\alpha_n)$  et  $(\beta_n)$  deux suites réelles et  $(\epsilon_n)$  une suite d'erreurs aléatoires.

avec  $x_1 \in X$  point arbitraire ,et  $(\alpha_n)$  vérifient :

- $0 \leq \alpha_n \leq 1, \forall n$ .
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$ .
- $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ .

et  $(\beta_n)$  vérifie  $\sum_{n=0}^{+\infty} \|\beta_n\| < \infty$

est l'itération de Mann avec erreurs.

---

## Application numérique

*Dans la pratique, en général, la solution d'une équation intégrale est impossible à déterminer explicitement, où encore si sa forme explicite est compliquée, et on s'intéresse donc à la résolution approchée (numériques) de cette équation. Il existe plusieurs méthodes pour obtenir cette solution. Dans ce chapitre nous donnons deux exemples d'équations intégrales de Fredholm de seconde espèce pour trouver la solution approchée par des méthodes numériques du point fixe.*

*Et le but de notre travail est d'appliquer la méthode itérative de Mann avec différents types d'erreurs :*

- *négativement associées*
- *$\alpha$ -mélangeantes*
- *indépendant*

*Et la programmation a été faite sous MATLAB*



### 3.1 Résolution numérique des équations intégrales de Fredholm de second espèce

De nombreux problèmes mathématiques de domaines variés sont modélisés pour les équations intégrales de Fredholm. Celle-ci peut s'écrire comme une équation  $A(u) = u$  avec  $u$  est une solution exacte, et pour trouver la solution exact et en général impossible. Donc l'utilisation des méthodes numériques, est la seule moyenne pour calculer la solution approchée. de l'équation de pont fixe précédent :

**Exemple 3.1** Soit :

$$u(x) = 3x + 3x^2 + \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 t u(t) dt \quad (3.1)$$

est une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce.

#### 1. Les méthodes Analytiques :

##### (a) (Méthode de calcul direct)

Soit le noyau  $K(x, t) = x^2 t$  est séparable. Par conséquent, nous récrivons (3.1) comme suit :

$$u(x) = 3x + 3x^2 + \frac{1}{2} x^2 \int_0^1 t u(t) dt \quad (3.2)$$

l'équation (3.2) peut être réécrite comme suit :

$$u(x) = 3x + 3x^2 + \frac{1}{2} \alpha x^2 \quad (3.3)$$

où

$$\alpha = \int_0^1 t u(t) dt \quad (3.4)$$

Pour déterminer  $\alpha$  nous substituons (3.3) dans (3.4), nous avons

$$\alpha = \int_0^1 t \left( 3t + 3t^2 + \frac{1}{2} \alpha t^2 \right) dt \quad (3.5)$$

Intégrons le membre droit de (3.5), d'où

$$\frac{7}{4} + \frac{1}{8} \alpha \quad (3.6)$$

ce qui donne  $\alpha = 2$  Substituons la valeur de  $\alpha$  dans (3.3), nous obtenons la solution exacte

$$3x + 4x^2$$

## 2. Les méthodes numériques

(a) **Méthode d'approximation successive** (Méthode de Picard) Utilisez la méthode des approximations successives pour résoudre l'équation intégrale de Fredholm suivante :

$$u(x) = 3x + 3x^2 + \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 t u(t) dt \quad (3.7)$$

Nous sélectionnons  $u_0(x) = 0$  :

$$u_{n+1}(x) = 3x + 3x^2 + \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 t) u_n(t) dt, \quad n \geq 0 \quad (3.8)$$

Substituons  $u_0(x) = 0$  dans (3.8), nous obtenons

$$u_1(x) = 3x + 3x^2$$

$$u_2(x) = 3x + \frac{31}{8}x^2$$

$\vdots$

$$u_{n+1}(x) = 3x + 3x^2 + \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 t) u_n(t) dt.$$

on suppose que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $u_0 = 0$

$$u_n(x) = 3x + \left(4 + \frac{1}{8^n}\right)x^2$$

et on montre par récurrence que

$$u_{n+1}(x) = 3x + \left(4 + \frac{1}{8^{n+1}}\right)x^2$$

on a :

$$u_{n+1}(x) = 3x + 3x^2 + \frac{1}{2} \int_0^1 t \left(3t + \left(4 - \frac{1}{8^n}\right)t^2\right) dt$$

D'après le calcul de cette intégral on trouve :

$$u_{n+1}(x) = 3x + x^2 \left(4 - \frac{1}{8^{n+1}}\right)$$

D'où  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$u_n(x) = 3x + \left(4 - \frac{1}{8^n}\right)x^2$$

Conséquemment, la solution  $u(x)$  de (3.7) est donnée par

$$u_{ex}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = 3x + 4x^2$$

**(b) Méthode itérative de Mann avec erreurs**

La suite récurrente de cette méthode qui calcule les itérés  $x_n$

$$x_{n+1} = \left(1 - \frac{a}{n}\right)x_n + \frac{a}{n}f(x_n) + \frac{a}{n^2}R(n)$$

avec  $R(n)$  est l'erreur aléatoire centrée réduite  $\sim \mathcal{N}(0, 1)$  (la loi normale).

Et  $a$  est une constante et  $f(x) = x + e^x$ . Le point initial  $u_0 = 0$ .

nous considérons un exemple numérique où nous prenons un intégrale de Fredholm suivant :

$$u(x) = 3x + 3x^2 + \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 t u(t) dt$$

En utilisant l'algorithme de Mann, on obtient le point fixe approché et on le compare avec la solution exacte en donnant l'erreur absolue et l'erreur relative .

concéder

$$K(x, t) = x^2 t \text{ et } f(x) = 3x^2 + 3x \text{ et } u_0 = 0$$

et la solution exacte est

$$u_{ex} = 3x + 4x^2$$

alors en donne les valeurs approchées du point fixe pour différents nombres d'itérations  $n$

**Algorithme de Mann avec erreurs indépendantes**

function[g10, g20, g30] = calcul1()

syms x t;

$U = 3x + 4x^2$ ;

$f = 3x + 3x^2$ ;

$k = x^2 t$ ;

$u0 = 0$ ;

for i = 1 : 30

$K = k * u0$ ;

---

```
u1 = (1/i) * u0 + 1/i * (f + int(K, t, 0, 1) + 1/i * random('normal', 0, 1)); u0 = u1;

if(i == 10)

g10 = u1;

end

if(i == 20)

g20 = u1;

end

if(i == 30)

g30 = u1;

end

end

X = [0 : 0.001 : 1];

for i = 1 : length(X)

UU(i) = double(subs(U, x, X(i)));

gg10(i) = double(subs(g10, x, X(i)));

gg20(i) = double(subs(g20, x, X(i)));

gg30(i) = double(subs(g30, x, X(i)));

end

figure(1)
```

Le résultat de cette algorithm est :

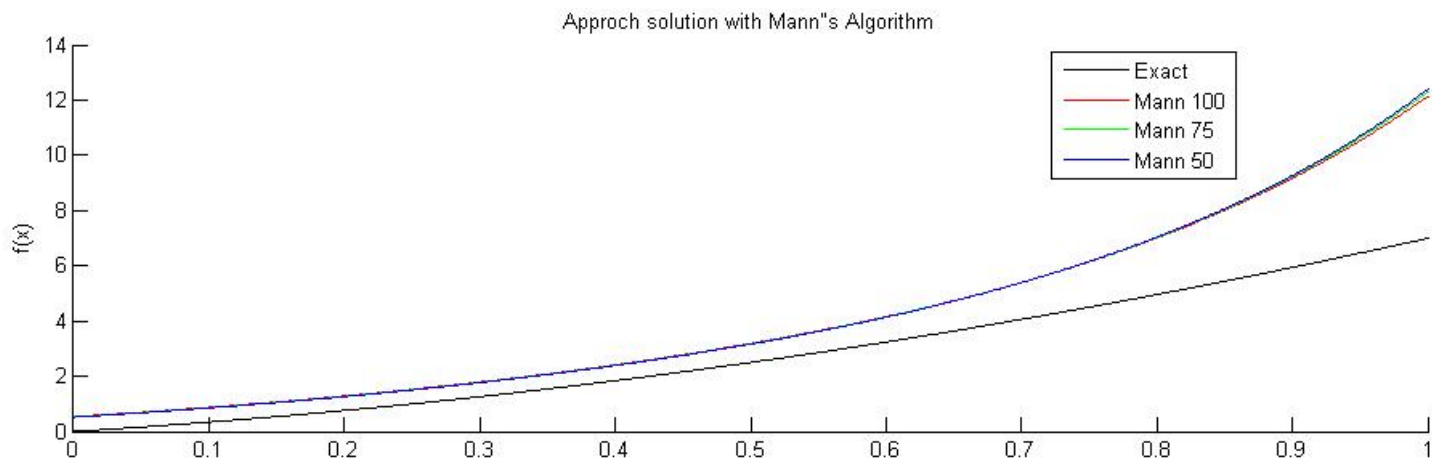


FIGURE 3.1 – La solution approchée à l'aide de l'algorithme de Mann avec des erreurs indépendantes.

**Algorithme 3.1.1** *Algorithme de Mann avec erreur négativement associée*

```
function[g10, g20, g30] = calculman1 - neg()
symsxt;
```

$$U = 4x^2 + 3x;$$

$$f = 3x^2 + 3x;$$

$$k = x^2t;$$

$$u0 = 0;$$

```
for i = 1 : 30
```

$$K = k * u0;$$

$$u1 = (1 - 1/i) * u0 + 1 / (f + \text{int}(K, t, 0, 1) + 1/i * \text{abs}(\text{random}('normal', 0, 1) - \text{random}('normal', 0, 1)));$$

$$u0 = u1;$$

```
if (i == 10)
```

$$g10 = u1$$

```
end

if(i == 20)
g20 = u1
end

if(i == 30)
g30 = u1
end

end

end

X = [0 : 0.001 : 1];

for i = 1 : length(X)
UU(i) = double(subs(U, x, X(i)));
gg10(i) = double(subs(g10, x, X(i)));
gg20(i) = double(subs(g20, x, X(i)));
gg30(i) = double(subs(g30, x, X(i)));
end

figure(1)

hold on

title('Approch solution with Mann"s Algorithm')

xlabel('x')

ylabel('f(x)')
```

```
plot(X,UU,'black',X,gg10,'red',X,gg20,'green',X,gg30,'blue')
```

```
holdoff
```

```
legend('Exact','Mann30','Mann20','Mann10')
```

Le résultat de cette algorithm est :

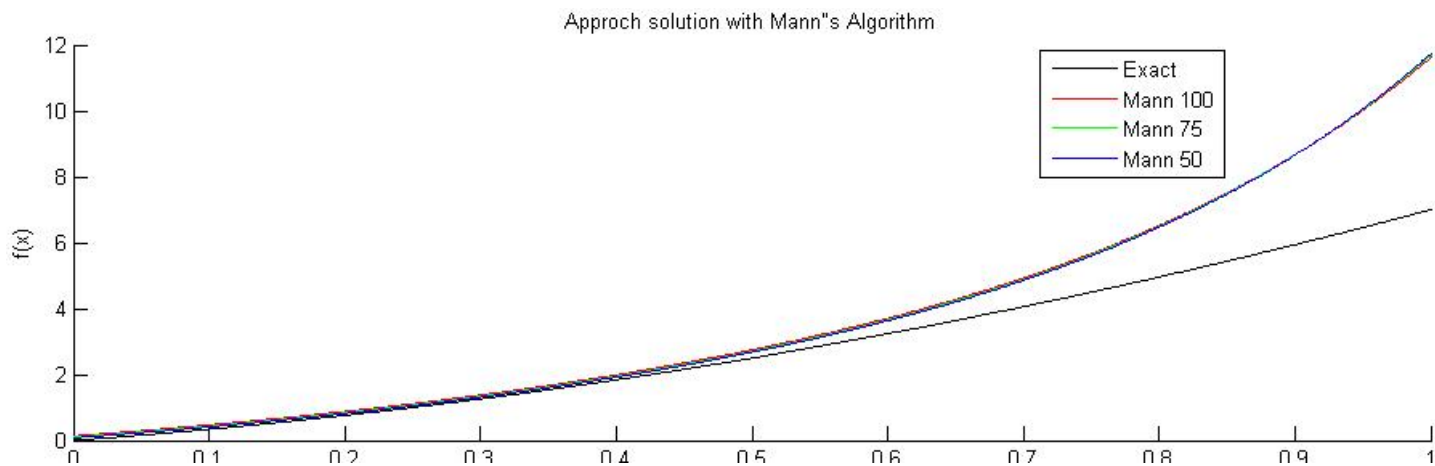


FIGURE 3.2 – La solution approchée à l'aide de l'algorithme de Mann avec des erreurs négativement associée

**Algorithme 3.1.2 Algorithme de Mann avec erreur  $\alpha$ -mélange**

```
function[g10, g20, g30] = mann1 - alpha()

symsxt;

U = 4x2 + 3x;

phi = 0.2;

f = 3x2 + 3x;

k = x2t;

u0 = 0;

xi(1) = 0;

for i = 1 : 30

K = k * u0;

u1 = rand();

u2 = rand();

g = sqrt(-2 * log(u1)) * cos(2 * pi * u2);

xi(i + 1) = phi * xi(i) + g;

u1 = (1 - 1/i) * u0 + 1/i * (f + int(K, t, 0, 1) + 1/i * xi(i + 1));

u0 = u1;

if(i == 10)

g10 = u1;

end
```



```
if(i == 20)

g20 = u1;

end

if(i == 30)

g30 = u1;

end

end

X = [0 : 0.001 : 1];

for i = 1 : length(X)

UU(i) = double(subs(U, x, X(i)));
gg10(i) = double(subs(g10, x, X(i)));
gg20(i) = double(subs(g20, x, X(i)));
gg30(i) = double(subs(g30, x, X(i)));
end

figure(1)

hold on

title('Approch solution with Mann"s Algorithm')

xlabel('x')

ylabel('f(x)')

plot(X, UU, 'black', X, gg10, 'red', X, gg20, 'green', X, gg30, 'blue')

hold off

legend('Exact', 'Mann30', 'Mann20', 'Mann10')
```

Le résultat de cette algorithm est :

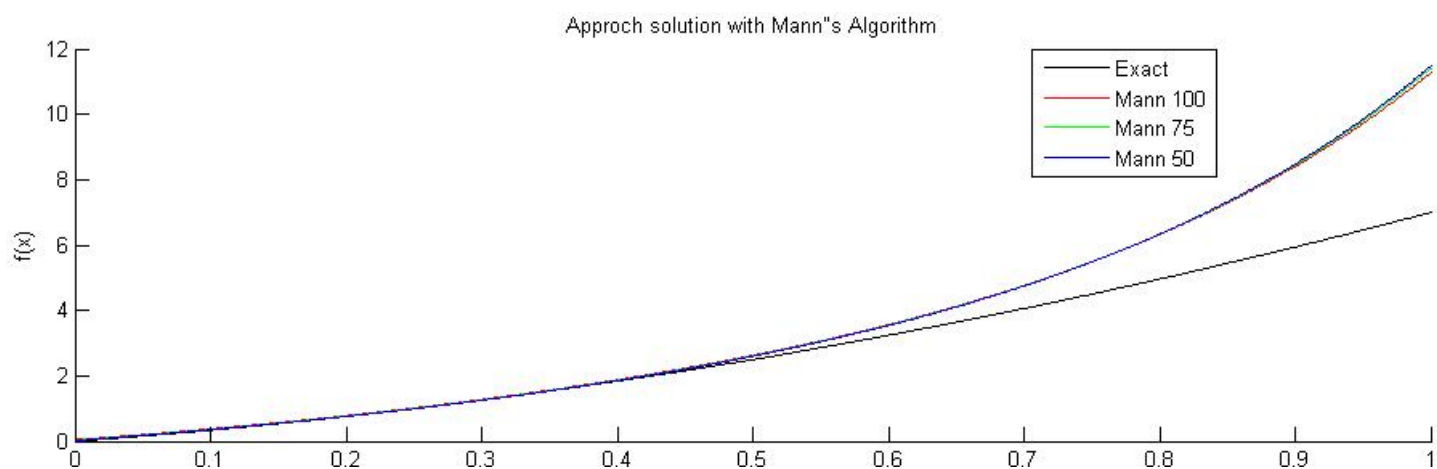


FIGURE 3.3 – La solution approchée à l'aide de l'algorithme de Mann avec des erreurs  $\alpha$ -mélangeantes

**Exemple 3.2** Soit :

$$u(x) = x + e^x - \int_0^1 xtu(t)dt \quad (3.9)$$

Est un équation intégrale de Fredholm de 2<sup>nd</sup> espèce .

### 1. Les méthodes Analytiques :

(a) (*méthode de calcul direct*)

Soit Le noyau  $K(x, t) = xt$  est séparable. Par conséquent, nous récrivons (3.9) comme suit :

$$u(x) = x + e^x - x \int_0^1 tu(t)dt \quad (3.10)$$

l'équation (3.10) peut être réécrite comme suit :

$$u(x) = x + e^x - x\alpha \quad (3.11)$$

où

$$\alpha = \int_0^1 tu(t)dt \quad (3.12)$$

Pour déterminer  $\alpha$  nous substituons (3.11) dans (3.12), nous avons

$$\alpha = \int_0^1 t(t + e^t - t\alpha) dt \quad (3.13)$$

Intégrons le membre droit de (3.13), d'où

$$1 + \alpha \quad (3.14)$$

ce qui donne  $\alpha = 1$  Substituons la valeur de  $\alpha$  dans (3.11), nous obtenons la solution exacte

$$e^x$$

## 2. Méthode numérique

(a) **Méthode d'approximation successives** (Méthode de Picard)

Utilisez la méthode des approximations successives pour résoudre l'équation intégrale de Fredholm suivante :

$$u(x) = x + e^x - \int_0^1 xtu(t)dt \quad (3.15)$$

nous sélectionnons  $u_0(x) = 0$  :

$$u_{n+1}(x) = x + e^x - \int_0^1 (xt)u_n(t)dt \quad , n \geq 0 \quad (3.16)$$

Substituons  $u_0(x) = 0$  dans (3.16), nous obtenons

$$u_1(x) = x + e^x$$

$$u_2(x) = e^x - \frac{1}{3}x$$

$$u_{n+1}(x) = x + e^x - \int_0^1 (xt)u_n(t)dt = e^x + \frac{(-1)^n}{3^n}x. \quad (3.17)$$

Conséquemment, la solution  $u(x)$  de (3.15) est donnée par

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}(x) = e^x \quad (3.18)$$

**(b) Méthode itérative de Mann avec erreurs**

no considérons un exemple numérique où nous prenons un intégrale de Fredholm suivant :

$$A(u(X)) = \int_0^1 xt u(t) dt + x + e^x;$$

En utilisant l'algorithme de Mann ,on obtient le point fixe approché et on le compare avec la

solution exacte en donnant l'erreur absolue et l'erreur relative.  
concéder

$$K(x, t) = xt \text{ et } f(x) = x + e^x \text{ et } u_0 = 0$$

et la solution exacte est

$$u_{ex} = e^x$$

alors en donne les valeurs approchées du point fixe pour différents nombres d'itérations  $n$

**Algorithme de Mann avec erreurs indépendantes.**

function[g10, g20, g30] = calcul()

syms x t;

U = e<sup>x</sup>;

f = x + exp(x);

k = x \* t;

u0 = 0;

for i = 1 : 30

K = k \* u0;

u1 = (1 - 1/i) \* u0 + 1/i \* (f + int(K, t, 0, 1) + 1/i \* random('normal', 0, 1));

u0 = u1;

```
if(i == 10)

g10 = u1;

end

if(i == 20)

g20 = u1;

end

if(i == 30)

g30 = u1;

end

end

X = [0 : 0.001 : 1];

for i = 1 : length(X)

UU(i) = double(subs(U, x, X(i)));

gg10(i) = double(subs(g10, x, X(i)));

gg20(i) = double(subs(g20, x, X(i)));

gg30(i) = double(subs(g30, x, X(i)));

end

figure(1)

hold on

title('Approch solution with Mann"s Algorithm')
```

```
xlabel('x')  
ylabel('f(x)')  
plot(X,UU,'black',X,gg10,'red',X,gg20,'green',X,gg30,'blue')  
hold off  
legend('Exact','Mann 30','Mann 20','Mann 10')
```

Le résultat de cette algorithm est :

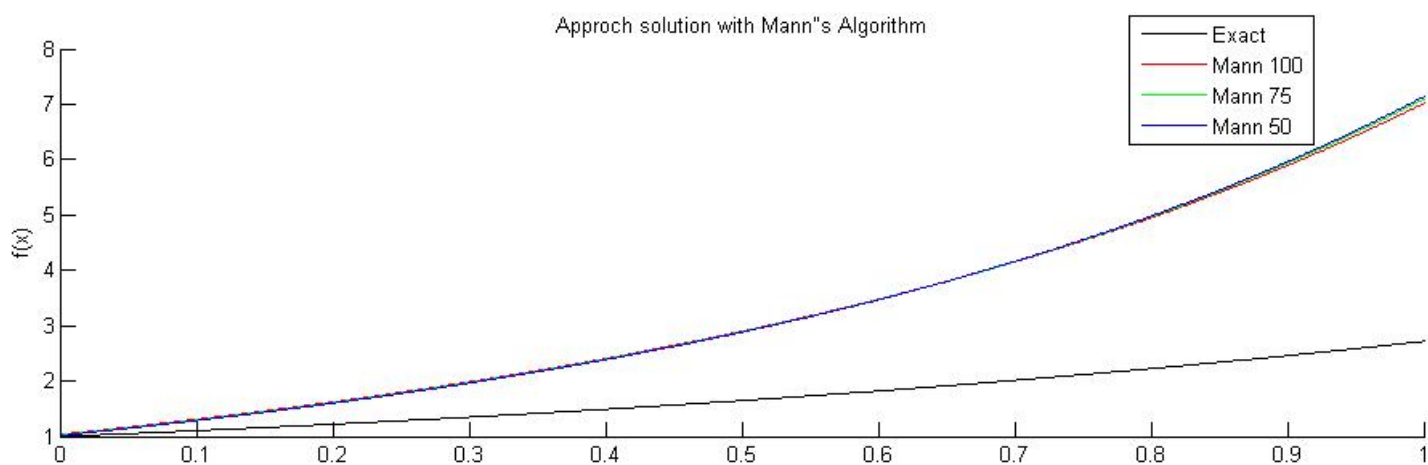


FIGURE 3.4 – La solution approchée à l'aide de l'algorithme de Mann avec des erreurs indépendantes.

**Algorithme 3.1.3** *Algorithme de Mann avec erreur négativement associée*

```
function[g10, g20, g30] = calculman - neg()
symsxt;

U = exp(x);

f = x + exp(x);

k = x * t;

u0 = 0;

for i = 1 : 30

K = k * u0;

u1 = (1 - 1/i) * u0 + 1/(f + int(K, t, 0, 1)
+ 1/i * abs(random('normal', 0, 1) - random('normal', 0, 1)));
u0 = u1;

if(i == 10)

g10 = u1

end

if(i == 20)

g20 = u1

end

if(i == 30)

g30 = u1

end
```



```
end

X = [0 : 0.001 : 1];

for i = 1 : length(X)

UU(i) = double(subs(U, x, X(i)));

gg10(i) = double(subs(g10, x, X(i)));

gg20(i) = double(subs(g20, x, X(i)));

gg30(i) = double(subs(g30, x, X(i)));

end

figure(1)

hold on

title('Approch solution with Mann"s Algorithm')

xlabel('x')

ylabel('f(x)')

plot(X, UU, 'black', X, gg10, 'red', X, gg20, 'green', X, gg30, 'blue')

hold off

legend('Exact', 'Mann 30', 'Mann 20', 'Mann 10')
```

*Le résultat de cette algorithm est :*

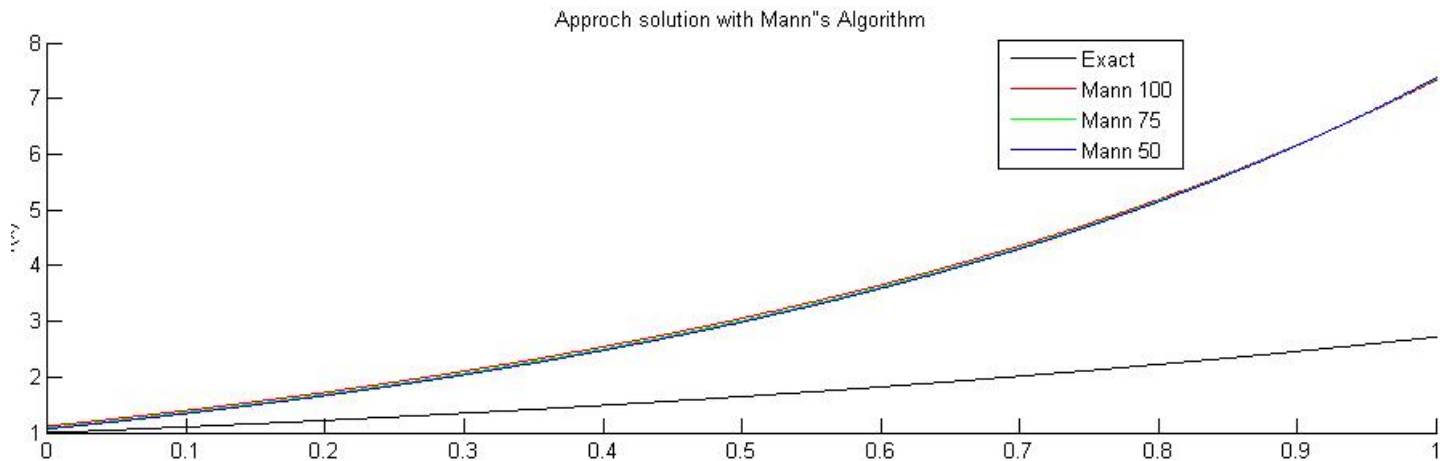


FIGURE 3.5 – La solution approchée à l'aide de l'algorithme de Mann avec des erreurs négativement associée

**Algorithme 3.1.4** *Algorithme de Mann avec erreur  $\alpha$ -mélange*

```
function[g10,g20,g30] = mann - alpha()
```

```
symsxt;
```

```
U = ex;
```

```
phi = 0.2;
```

```
f = x + ex;
```

```
k = xt;
```

```
u0 = 0;
```

```
xi(1) = 0;
```

```
fori = 1 : 30
```

```
K = k * u0;
```

```
u1 = rand();
```

```
u2 = rand();

g = sqrt(-2 * log(u1)) * cos(2 * pi * u2);

xi(i + 1) = phi * xi(i) + g;

u1 = (1 - 1/i) * u0 + 1/i * (f + int(K, t, 0, 1) + 1/i * xi(i + 1));

u0 = u1;

if(i == 10)

g10 = u1;

end

if(i == 20)

g20 = u1;

end

if(i == 30)

g30 = u1;

end

end

X = [0 : 0.001 : 1];

for i = 1 : length(X)

UU(i) = double(subs(U, x, X(i)));
gg10(i) = double(subs(g10, x, X(i)));
gg20(i) = double(subs(g20, x, X(i)));
gg30(i) = double(subs(g30, x, X(i)));
end
```

```

figure(1)

hold on

title('Approch solution with Mann"s Algorithm')

xlabel('x')

ylabel('f(x)')

plot(X, UU, 'black', X, gg10, 'red', X, gg20, 'green', X, gg30, 'blue')

hold off

legend('Exact', 'Mann30', 'Mann20', 'Mann10')

```

Le résultat de cette algorithme est :

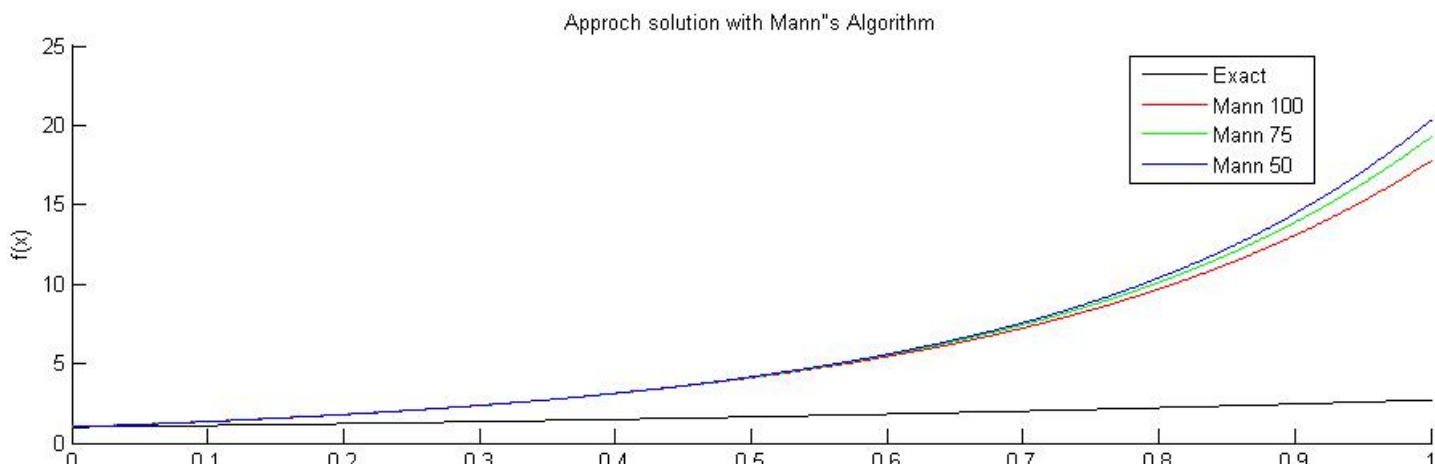


FIGURE 3.6 – La solution approchée à l'aide de l'algorithme de Mann avec des erreurs  $\alpha$ -mélangeantes

**Remarques 3.1** Plus nous augmentons le nombre d'itérations, plus notre solution approchée s'approche de plus en plus vers la solution exacte.

---

## Conclusion Générale

*Dans ce mémoire nous avons appliqué l'algorithme de Mann avec erreurs pour résoudre l'équation intégrale de Fredholm de second espèce cette équation peut s'écrire comme équation du point fixe  $F(x) = x$*

*L'opérateur choisi dans notre travail est un opérateur contractant donc le théorème de Banach du point fixe assure l'existence et l'unicité de la solution. Comme la solution analytique en générale, ne peut pas être déterminée alors l'approche numérique est l'utile principale pour résoudre ce type de problème de plus, le terme calcul est entaché d'erreurs, alors l'algorithme de Mann avec erreurs est encore meilleure dans ces situations.*

---

## Bibliographie

- [1] *M. Krasnov, A. Kissélev and G. Makarenko : Equation Intégrale, MIR, Moscou 1977.*
- [2] *M. Krasnov, A. Kissélev, G. Makarenko, Equations Intégrales : Problèmes et exercices. Mir. Moscou, (1976)*
- [3] *Hassina ARROUDJ, étude de points fixe dans un cadre aléatoire mélangeant, Thèse, université A.MIRA-BEJAIA, December 2017.*
- [4] *Vasile Berinde, Iterative approximation of fixed points, 2nd rev. and enl. ed ed., Lecture notes in mathematics, no. 1912, Springer, Berlin ; New York, 2007, OCLC : ocn137248687.*
- [5] *Bahia BARACHE, inégalités exponentielles pour le processus itératif de Mann avec des erreurs aléatoires, Thèse, université A.MIRA-BEJAIA, December 2017.*
- [6] *Cheng-yen Lin and Chuanrong Lu, limit theory for mixing dependent random variables ,Mathematics and its application, no.v.378, science Press ;kluwer Academic Publishers, New York :Dordrecht ;Boston, 1996.*
- [7] *Ravi P. Agarwl, Maria Meehan, and Donal O'Regan, Fixed point theory and applicatons, Cambridge tracts in mathematics, no.141, Combridge University Press, Cambridge, UK ;New York, N. Y, USA, 2001, OCLC :ocm46783051*

## Résumé

équations intégrales de Fredholm intervient dans de nombreux domaines comme la physique, la biologie, la médecine et l'économie... , ces équations peuvent s'écrire comme équation du point fixe. Comme dans la plupart des cas, on ne peut pas trouver la solution exacte de ces équations, alors il est nécessaire de chercher la solution approchée. Parmi les méthodes d'approximation du point fixe, on trouve la méthode de Picard, la méthode de Krasnosalskii, la méthode de Mann, la méthode de Mann avec erreurs... dans ce mémoire, nous sommes intrigués à la méthode de Mann avec erreur .

### Mots-clé:

Équations intégrales de Fredholm, points fixes, solution approchée.

---

## Abstract

Fredholm integral equations are encountered in various fields such as physics, biology, medicine, and economics. However, in most cases, finding the exact solution to these equations is not possible. Therefore, it is necessary to employ methods of fixed-point approximation. There are several methods available to solve these equations. In this paper, we present the direct method, the successive approximation method, and the Mann method with error.

**Keywords:** Fredholm integral equations, fixed points, the exact solution.

---

## ملخص

تعمل معادلات فريدهولم التكاملية في العديد من المجالات مثل الفيزياء والبيولوجيا والطب والاقتصاد. ومع ذلك، في معظم الحالات، لا يمكننا العثور على الحل الدقيق لهذه المعادلات. لذلك، من الضروري استخدام طرق تقريبية لنقاط الثبات. هناك عدة طرق لحل هذه المعادلات. في هذه الورقة، نقدم النهج المباشر، وطريقة التقريب المتتالية، وطريقة مان مع الخطأ. الكلمات الرئيسية: معادلات فريدهولم، نقاط الثبات، الحل الدقيق.