

RÉPUBLIQUE ALGÉRIEN DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ ABDE RRAHMANE MIRA-BÉJAÏA-ALGÉRIE
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



*Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master
en Mathématiques*

OPTION

Analyse Mathématique

THÈME

*Discrétisation d'un problème inverse linéaire par
la méthode des différences finies*

PAR

Guendour Karima

Devant le jury :

Président : M. BOUHMILA Fateh
Encadreur : Mme. BARACHE Bahia
Examinatrice : Mme. ALLOUTI Chahira
Inviter : M. ARZEKI Samir

Soutenu publiquement le :2022 - 2023

Remerciements

Un mémoire de fin d'étude est le fruit d'une entreprise qui ne peut réussir qu'avec l'aide d'un certain nombre de personnes. Nous tenons à exprimer notre profonde reconnaissance et nos remerciements à toutes celles et ceux qui par leur précieuse contribution ont permis la réalisation de ce travail.

Nous souhaitons tout d'abord exprimer ma gratitude à ma promotrice, Mme Barache, pour ses orientations, ses précieux conseils et sa coopération dans la réalisation de ce modeste travail.

Mes remerciements vont aussi aux membres du jury Mr. Fateh. Bouhmila et Mme. Chahra. Allouti qui m'ont honoré en acceptant d'examiner ce travail. Je remercie également le doctorant Mr. Samir. Arzeki

Nos vifs remerciements vont à Monsieur le Chef de Département, et l'ensemble du corps enseignant du Département de Mathématique.

Je remercie infiniment monsieur BERRAH Abdelmak et HOUCINE Safia

Enfin nous tenons à exprimer nos vifs remerciements à toutes les personnes qui ont directement ou indirectement contribué à l'élaboration de ce travail. Leur apport, quel qu'il soit, a été d'une importance capitale dans la réussite de notre mémoire.

Dédicace

Je souhaite dédier ce mémoire avec profonde gratitude et un amour sincère à moi même, mais surtout à mon incroyable père qui a toujours été mon pilier de force, mon guide et mon inspiration. Tu es mon modèle de persévérance et de détermination, et c'est grâce à toi que je suis devenu la personne que je suis aujourd'hui.

À ma merveilleuse mère, dont la tendresse infinie et le soutien inconditionnel ont nourri mes rêves et ont fait de moi une personne confiante. Ta présence aimante a été ma source de réconfort et de motivation tout au long de ce parcours.

Je suis consciente que cette liste de remerciements ne serait être exhaustive, mais je tiens à exprimer mon sincère gratitude envers tous ceux qui ont joué un rôle dans notre parcours académique et professionnel.

je suis infiniment à leurs reconnaissante.

Je tiens également à dédier ce mémoire à mes soeurs (Rachida, Salima, Zina, Samra) et mon frères(Abderazak) bien-aimés, à ma chère Grand-mère, à mon oncle(Abdelmalk), ainsi qu'à toute ma famille qui m'a encouragé et soutenu tout au long de cette aventure académique.

Enfin, à tous ceux qui ont joué un rôle dans ma vie et dans la réalisation de ce mémoire, je vous dédie ce travail avec une profonde gratitude et un amour infini. Votre présence et votre soutien ont été les piliers de ma réussite.

Table des figures

2.1	Schéma de discrétisation [10]	32
3.1	Surface de la solution approchée	36
3.2	courbe de niveaux de la solution approchée	37
3.3	courbe de niveaux de la solution approchée	41

Table des matières

Introduction	4
1 1 Quelques Rappels	9
1.1 Problème inverse	9
1.2 Problème inverse en thermique	9
1.3 Transformation de Laplace	13
1.4 Quelques rappels sur l'analyse numérique et les EDP	18
1.4.1 Théorème de Taylor et approximation des dérivée	18
1.4.2 Les EDP et les différences finies	20
1.4.3 Méthode des différences finies	20
1.4.4 Equation de la chaleur de 1D et les différences finies	21
1.4.5 Polynôme de Tchebychev	22
2 2 RESOLUTION D'UN PROBLEME INVERSE DU TYPE PARABOLIQUE AVEC LA METHODE DES DIFFERENCES FINIS	24
2.1 Position du problème	24
2.2 Unicité de la solution du problème inverse	25
2.3 Discrétisation par la méthode des différences finies explicite du problème direct .	26
2.4 Discrétisation par la méthode des différences finies explicites du problème inverse	29
2.5 Régularisation du problème avec la méthode des moindres carrés	33
3 3 Application numérique	34
3.1 Problème direct	34
3.2 Problème inverse	38

Introduction Générale

Le mathématicien français Jacques Hadamard (1865-1963) a donné trois conditions pour qu'un problème mathématique soit bien posé. Ces conditions sont

- 1) L'existence de la solution.
- 2) L'unicité de la solution.
- 3) La stabilité de la solution ce qui signifie que la solution doit dépendre continûment des données [5].

Si l'une au moins des conditions précédentes n'est pas vérifiée, le problème est dit mal posé.

Exactement, en mathématique ceci revient à formuler le problème comme suit :

Soit $A : X \rightarrow Y$ un opérateur où X et Y sont deux espaces métriques, le problème qui consiste à résoudre l'équation

$$Ax = u \tag{1}$$

est dit bien posé si et seulement si

- 1) A est bijectif
- 2) A^{-1} continu
- 3) La stabilité de la solution, ce qui signifie que la solution doit dépendre continûment des données.

Sinon le problème est dit mal posé.

Si la surjective de A n'est pas vérifiée la solution peut ne pas exister ce qui n'est pas une difficulté majeure car on peut se restreindre à $\text{Im}A$.

La non unicité est un problème plus sérieux car quand A n'est pas injectif le problème peut admettre plusieurs solutions.

L'absence de continuité de A^{-1} est sans doute le plus problématique. Parmi ces problèmes mal posés, on a une classe un peu particulière dite problème inverse[5].

Une définition plus opérationnelle est qu'un problème inverse consiste à déterminer les causes connaissant des effets, alors qu'un problème direct cherche les effets, les causes étant connues [6].

Un problème inverse consiste à déterminer des causes à partir de la connaissance des effets. Ce problème est l'inverse du problème dit direct ; c'est à dire les aspects physiques que modélise le problème mathématique. Et la principale difficulté des problèmes inverses est que les mêmes effets puissent provenir des causes différentes donc un problème inverse peut avoir plusieurs solution.

Du point de vue mathématique, ces problèmes se répartissent en deux grands groupes. D'une part, il y a les problèmes linéaires et non linéaires.

Les problèmes linéaires, peuvent être formulés comme la résolution d'une équation intégrale de première espèce dans le cas continu ou comme la résolution d'un système d'équations dans le cas discret. L'utilisation de l'analyse fonctionnelle et de l'algèbre linéaire permet d'obtenir des résultats précis et de développer des algorithmes efficaces pour résoudre ces problèmes. Par contre les problèmes non linéaire sont plus difficiles, et il existe moins de résultats généraux car sont souvent des questions d'estimation délicate de paramètres dans des équations différentielles.

Certains problèmes inverses sont des équations différentielles ordinaires (EDO) ou des équations aux dérivées partielles(EDP).

La théorie des problèmes inverses pour les EDP ou les EDO s'est développée d'une manière dans la physique mathématique, vers la fin du 19^{ème} siècle et le début du 20^{ème} siècle. Les sources de problème inverses ont été trouvées parmi les problèmes de la cinématique, en sismologie et le problème inverse de Sturm-Liouville.

Pour résoudre un problème inverse il faut le régulariser d'un problème inverse ou en générale d'un problème mal posé est la donnée de condition supplémentaires pour le transformer en un problème bien posé.

Exemple

Pour voir les problèmes inverses dans les équations différentielles on propose ce problème en thermique. Ce problème consiste à déterminer la répartition de la température dans un matériau non-homogène occupant un domaine ouvert connexe Ω de \mathbb{R}^3 . On modélise le problème avec les équations suivantes :

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{q}) = f(x, y, z) & \text{dans } \Omega, \\ \vec{q} = -k \operatorname{grad} u & . \end{cases} \quad (2)$$

La première équation représente la conservation de l'énergie et la deuxième la loi de fourrier qui relie le flux de chaleur au gradient de température où

c : la chaleur spécifique,

ρ : densité de fluide,

u : température,

\vec{q} : flux de chaleur,

k : conductivité thermique,

f : force volumique.

Toutes ces lois physiques nous conduisent à obtenir l'équation de la chaleur en milieu hétérogène

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = f \quad \text{dans } \Omega, \quad (3)$$

qu'on complète avec des condition aux limites et des conditions initiales.

Quand on cherche la température u avec f , ρ , c et k connus le problème est dit direct.

Quand l'objet de la recherche est différent ; plusieurs problèmes inverses peuvent être posés : linéaires et non linéaires.

La détermination de la condition initiale lorsque une mesure de température est connue à l'instant t_i est un exemple de problème inverse linéaire.

Le problème non linéaire consiste à déterminer certains coefficients de l'équation (3) lorsqu'une mesure partielle de température est donnée.

Ce mémoire est composé de trois chapitre :

Le première chapitre est consacré à quelques rappels d'analyse et d'algèbre qui vont être utile dans les chapitres qui suit. Ainsi que la description de problème inverse en thermique.

Dans le deuxième chapitre nous nous intéressons à la discrétisation d'un problème inverse linéaire en thermique par la méthode des différences finies. Le problème est divisé en deux autres problèmes l'un direct et l'autre inverse qui est mal posé. Ce problème consiste à déterminer une condition au limite à l'un des bords d'une baguette métallique ainsi que la température. Puisque le problème est mal posé alors la régularisation du problème a été faite par la méthode des moindres carrés en basant sur une classe des Polynôme orthogonaux (Polynôme de Tchebychev).

Et le troisième chapitre est consacré à un exemple numérique qui montre l'efficacité de la méthode étudié dans le deuxième chapitre.

1 Quelques Rappels

1.1 Problème inverse

Comme l'étude des problèmes inverses n'est pas au hasard car elle était créée par la nature elle-même ou par la vie réelle, alors on trouve que les sciences des différents domaines fournissent un grand nombre de problèmes inverses. Parmi eux : problèmes inverses en thermique en gravimétrie l'imagerie médicale l'énergie pétrolière le traitement d'image...

1.2 Problème inverse en thermique

Les problèmes inverses en diffusion thermique font référence à la détermination de paramètres inconnus ou de conditions aux limites d'un système de transfert de chaleur en se basant sur des données mesurées. En d'autres termes, étant donnée la distribution de température ou le flux de chaleur à la limite d'un système, l'objectif est de déterminer les propriétés thermiques ou les conditions aux limites qui produiraient cette distribution ou ce flux. Cela s'oppose aux problèmes directs, qui impliquent le calcul des distributions de température et des flux de chaleur étant donné des paramètres et des conditions aux limites connus. Des exemples de problèmes inverses en diffusion thermique incluent :

Déterminer la diffusivité ou la conductivité thermique dépendant du temps d'un matériau à partir de données aux limites.

Déterminer le coefficient de diffusion dépendant du temps de l'équation de la chaleur à partir de données d'extrapolation intégrale.

Déterminer la diffusivité thermique à partir du problème inverse de Fourier en condition transitoire.

La résolution des problèmes inverses en diffusion thermique implique généralement l'utilisation de méthodes de régularisation, d'algorithmes d'optimisation et d'analyse de sensibilité.

On distingue deux types de problèmes inverses : linéaires et non linéaires

◇ Les problèmes inverse linéaires est un type de problème inverse qui consiste à trouver les valeurs des paramètres caractérisant un système à partir d'observations réelles. En citant quelques points essentiels qui caractérisent le problème :

-Le problème inverse implique l'utilisation des résultats d'observations réelles pour déduire les valeurs des paramètres caractérisant le système étudié.

-Le problème inverse consiste à déterminer la distribution de masse à partir des observations de la force verticale. Le modèle peut être formulé de manière abstraite sous la forme $y = Ax$.

-Trois éléments essentiels définissent un problème inverse : l'opérateur de mesure (MO), qui fait correspondre les objets aux mesures ; l'objet inconnu (UO), qui est l'objet d'intérêt ; et l'information préalable (PI), qui représente toute information supplémentaire sur l'UO.

Par contre

◇ Les problèmes inverses non linéaires sont des problèmes dans lesquels le but est de reconstruire le modèle à partir d'un ensemble de mesures. Les problèmes inverses non linéaires sont nettement plus difficiles que les problèmes inverses linéaires. La situation la plus courante qui donne lieu à un problème inverse est la nécessité d'interpréter des mesures physiques indirectes d'un objet d'intérêt inconnu. Les problèmes inverses non linéaires peuvent être résolus à l'aide de techniques d'optimisation et du critère des moindres carrés.

Théorème (Lax-Milgram)

Soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire continue et coercive alors pour tout $\varphi \in H'$, il existe $u \in H$ unique tel que

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle, \forall v \in H.$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$u \in H$$

et

$$\frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}$$

Démonstration :

D'après le théorème de représentation de Reisz-Fréchet, il existe un unique $w \in H$ tel que $\forall v \in H, l(v) = \langle w, v \rangle$.

Comme a est linéaire par rapport à la seconde variable,

$$\forall u \in H, \exists Au \in H$$

tel que

$$\forall v \in H, a(u, v) = \langle Au, v \rangle.$$

Montre que $\exists u \in H, Au = w$.

L'application

$$A : H \rightarrow H$$

$$u \mapsto Au$$

est linéaire et continue.

En effet, $\forall u, u' \in H, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\forall v \in H, \langle Au + \lambda u', -Au - \lambda u', v \rangle = 0$$

D'autre part $\forall u \in H$

$$\| Au \|^2 = \langle Au, Au \rangle = a(u, Au) \leq M \| u \| \| Au \|^2$$

donc

$$\| Au \|^2 \leq M \| u \|^2$$

On pose l'application

$$T : H \rightarrow H$$

$$u \mapsto u - \eta(Au - w)$$

où $\eta = \frac{\sigma}{M^2}$

On a $Au = w$ si et seulement si u est point fixe de T

Or H est complet et T est contractante,

$\forall u, v \in H$,

$$\| T(u) - T(v) \|^2 = \| u - v - \eta(A(u) - A(v)) \|^2$$

$$= \| u - v \|^2 - 2\eta \langle u - v, A(u - v) \rangle + \eta^2 \| A(u - v) \|^2$$

$$= \| u - v \|^2 - 2\eta a(u - v, u - v) + \eta^2 \| A(u - v) \|^2$$

$$\leq \|u - v\|^2 [1 - 2\eta\sigma + \eta^2 M^2]$$

Donc $\exists u$ tel que $Au = w$ d'après le théorème de point fixe.

supposons que la forme $a(u, v)$ est symétrique. Alors $a(u, v)$ définit un nouveau produit scalaire sur H et la norme associée $a(u, u)^{\frac{1}{2}}$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|$. Donc H est aussi un espace de Hilbert pour ce produit scalaire appliquant le théorème de représentation de Reisz-Fréchet on obtient $g \in H$ tel que

$$\langle \varphi, v \rangle = \langle g, v \rangle .$$

Alors

$$a(g - u, v - u) \leq 0.$$

Trouver $u \in K$

$$\min_{u \in K} a(g - v, g - v)^{\frac{1}{2}}$$

Ceci revient à minimiser sur K , $a(g - v, g - v)$ ou encore

$$a(v, v) - 2a(g, v) \quad \text{ou encore} \quad \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle .$$

On vérifie aisément que si $a(u, v)$ est une forme bilinéaire telle que :

$$a(v, v) \geq 0$$

. Alors la fonction $v \mapsto a(v, v)$ est convexe.

Théorème (Application ouverte)

Soient E et F deux espaces de Banach et A un opérateur linéaire continu et bijectif de E dans F . Alors A^{-1} est continu de F dans E .

Démonstration : voir[8]

Théorème (projection sur un convexe fermé)

Soit H un espace de Hilbert et K un convexe fermé non vide de H . Pour tout $f \in H$ il existe un unique $u \in K$ tel que :

$$\|f - u\| = \min_{v \in K} \|f - v\|.$$

La projection u est caractérisée par la propriété

$$\begin{cases} u \in K \\ \langle f - u, v - u \rangle \leq 0, \forall v \in K \end{cases}$$

On notera $u = P_K f$.

Démonstration : voir[8]

1.3 Transformation de Laplace

Motivation et définitions

Comme les équations différentielles sont en général beaucoup plus difficiles à résoudre que les équations algébriques, la transformation de Laplace ramène la résolution des équations différentielles à celle des équations algébriques plus facile à manipuler. Donc la transformation de Laplace est une sorte de traducteur qui transforme un problème d'équations différentielles à un problème d'équations algébriques; et pour avoir la solution du problème de départ après la résolution du problème d'équations algébriques, on fait appel à la transformation de Laplace inverse.

Mathématiquement, la transformation de Laplace est un opérateur qui à une fonction f associe une fonction $F = \mathcal{L}(f)$ définie par

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (1.1)$$

tel que

f est une fonction de temps t (variable réelle définie sur l'intervalle $[0, +\infty]$) à valeur réelles ou complexes

F est une fonction de la variable complexe s (on pose $s = x + iy$)

et la transformation de Laplace inverse est donné par

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c+ix}^{c+iy} F(s) e^{st} ds \quad (1.2)$$

\mathcal{L} : désigne la transformation de Laplace,

\mathcal{L}^{-1} : désigne la transformation de Laplace inverse.

On dit que F est la transformation de Laplace et que f est l'original de F .

Remarque

on a

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Donc

$$\begin{aligned} |F(s)| &= \left| \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right| \Rightarrow |F(s)| \leq \int_0^{\infty} |e^{-st}| |f(t)| dt \\ &\Rightarrow |F(s)| \leq \int_0^{\infty} |e^{-(x+iy)t}| |f(t)| dt \\ &\Rightarrow |F(s)| \leq \int_0^{\infty} e^{-xt} |f(t)| dt \end{aligned}$$

Ainsi si pour tout $t > 0$, $f(t)$ est bornée en module par une certaine exponentielle ($|f(t)| \leq M e^{-x_0 t}$, $M > 0$) alors le module $|F(s)|$ est bornée pour tout s . Comme $\text{Re } s > x_0$, donc on peut écrire

$$\begin{aligned} |F(s)| &\leq \left| \int_0^{\infty} e^{-xt} |f(t)| dt \right| \Rightarrow |F(s)| \leq \int_0^{\infty} |e^{-xt}| |f(t)| dt \\ &\Rightarrow |F(s)| \leq \int_0^{\infty} M e^{-x_0 t} e^{-xt} dt \\ &\Rightarrow |F(s)| \leq M \int_0^{\infty} e^{-(x-x_0)t} dt \\ &\Rightarrow |F(s)| \leq \frac{M}{x-x_0} (x > x_0) \end{aligned}$$

On déduit de cette intégralité que

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} |F(s)| = 0$$

Propriétés

α) Linéarité

La transformation de Laplace est un opérateur linéaire.

Proposition

Soient f, g deux fonctions, $\mathcal{L}(f)$, $\mathcal{L}(g)$ leurs transformation de Laplace et α, β deux scalaires. Alors

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{L}(f) + \beta \mathcal{L}(g)$$

Démonstration : voir [9]

β) Transformation de Laplace d'une dérivée

Théorème

Si $f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ sont continues pour $t \geq 0$, sont de l'ordre de e^{bt} et si $f^{(n)}$ est sequon-tiellement continue sur tout l'intervalle fini $[0, a], a > 0$ est de l'ordre de e^{bt} , alors $\mathcal{L}f^{(n)}$ existe pour $s > b$ et on a

$$\mathcal{L}f^{(n)}(t) = s^n \mathcal{L}f(t) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

En particulier

$$\mathcal{L}f'(t) = s \mathcal{L}f(t) - f(0)$$

.

$$\mathcal{L}f^{(2)}(t) = s^2 \mathcal{L}f(t) - s f(0) - f'(0).$$

$$\mathcal{L}f^{(3)}(t) = s^3 \mathcal{L}f(t) - s^2 f(0) - s f'(0) - f''(0).$$

Démonstration
par récurrence

Pour $n = 1$. Supposons que $|f(t)| < M e^{bt}$, $M > 0$ pour $t > t_0$ et soit $s > b$. On a

$$\mathcal{L}f'(t) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt.$$

Une intégration par partie nous donne

$$\mathcal{L}f'(t) = e^{-st} f(t) dt|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt.$$

D'où

$$\mathcal{L}f'(t) = s\mathcal{L}f(t) - f(0).$$

Supposons que

$$\mathcal{L}f^{(n-1)}(t) = s^{n-1}\mathcal{L}f(t) - s^{n-2}f(0) - s^{n-3}f'(0) - \dots - f^{(n-2)}(0).$$

On obtient après une intégration par partie

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f^{(n)}(t) &= \int_0^\infty e^{-st} f^{(n)}(t) dt. \\ &= e^{-st} f^{(n-1)}(t) dt \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} f^{(n-1)}(t) dt. \\ &= -f^{(n-1)}(0) + s f^{(n-1)}(t). \end{aligned}$$

D'où

$$\mathcal{L}f^{(n)}(t) = s^n \mathcal{L}f(t) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

γ) Transformation de Laplace d'une intégrale

Soient \mathcal{L} Transformation de Laplace et f une fonction de temps t intégrable, F sa Transformation de Laplace alors :

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(\rho) d\rho \right] = \frac{1}{s} F(s).$$

En effet

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\int_0^t f(\rho) d\rho \right] &= \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_0^t f(\rho) d\rho \right] dt. \\ &= \left[\frac{-1}{s} e^{-st} \int_0^t f(\rho) d\rho \right]_0^\infty + \int_0^\infty f(t) \frac{1}{s} e^{-st} dt. \\ &= \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt. \end{aligned}$$

D'où

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(\rho) d\rho \right] = \frac{1}{s} F(s)$$

Application à la résolution d'une EDP

Si on suppose que $u(x, t)$ vérifie les conditions du théorème de dérivées lorsque elle est considérée comme une fonction de t . En posant

$$\bar{U}(x, s) = \mathcal{L}[u(x, t)]$$

on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial t} = s\bar{U}(x, s) - u(x, 0)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = s^2\bar{U}(x, s) - su(x, 0) - \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2}$$

Exemple

Pour résoudre l'équation

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 4u & x \in]0, \pi[\text{ et } t \in]0, \infty[, \\ u(x, 0) = 6 \sin x - 4 \sin 2x & 0 < x < \pi, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & t > 0, \end{cases}$$

on pose

$$\bar{U}(x, s) = \mathcal{L}(u(x, t))$$

La transformation de Laplace de cette équation donne

$$\begin{aligned} s\bar{U}(x, s) - 6 \sin x + 4 \sin 2x &= \frac{d^2 \bar{U}(x, s)}{dx^2} - 4\bar{U}(x, s). \\ &\Downarrow \\ \frac{d^2 \bar{U}(x, s)}{dx^2} - (s + 4)\bar{U}(x, s) &= -6 \sin x + 4 \sin 2x \end{aligned}$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 2. Sa solution est

$$\bar{U}(x, s) = c_2 \bar{U}(x, s) e^{\sqrt{s+4}x} + c_1 \bar{U}(x, s) e^{-\sqrt{s+4}x} + \frac{6}{s+5} \sin x - \frac{4}{s+8} \sin 2x.$$

Comme

$\bar{U}(0, s) = \bar{U}(\pi, s) = 0$ alors $c_1 = c_2 = 0$ alors,

$$\bar{U}(x, s) = \frac{6}{s+5} \sin x - \frac{4}{s+8} \sin 2x.$$

d'où

$$u(x, t) = 6e^{-5t} \sin x - 4e^{-8t} \sin 2x.$$

1.4 Quelques rappels sur l'analyse numérique et les EDP

1.4.1 Théorème de Taylor et approximation des dérivée

Théorème

Soit $f \in C^n[a, b]$ tel que $f^{(n+1)}$ existe sur $[a, b[$. Alors on a pour tout $x_0 \in [a, b]$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + R_n(x), \quad (1.3)$$

où

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}, \xi \in]x_0, x[.$$

Démonstration Voir [9]

Approximation des dérivées

Soit f une fonction suffisamment régulière pour pouvoir utiliser le Théorème de Taylor on a

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots \\ f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots \end{aligned}$$

qui sont obtenues de l'équation(1.3). En faisant quelques opérations entre ces deux équations on obtient l'approximation de $f'(x)$ par trois formules suivantes :

Formules progressive des différences dérivées

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

où l'erreur de l'approximation est

$$-\frac{h}{2}f''(\xi), \xi \in]x, x+h[$$

Formules rétrograde des différences dérivées

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

où l'erreur de l'approximation est

$$-\frac{h}{2}f''(\xi), \xi \in]x-h, x[$$

Formules centrale des différences dérivées

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h}$$

où l'erreur de l'approximation est

$$-\frac{h}{2}f''(\xi), \xi \in]x-h, x+h[$$

Remarque

Cette formule est très utilisée car elle est beaucoup plus précise que les deux autres. L'approximation de $f''(x)$ est donnée par

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

où l'erreur de l'approximation est donnée par

$$-\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi), \xi \in]x-h, x+h[$$

qu'on appelle formule central de la 2^{ème} dérivée.

1.4.2 Les EDP et les différences finies

1) Equation aux dérivées partielles

Soient $u(x,t)$ une fonction définie sur un domaine D de \mathbb{R}^2 et (x_0, y_0) un point de D .

Si la fonction $x \rightarrow u(x_0, y_0)$ admet une dérivée en x_0 cette valeur est la dérivée partielle par rapport à x au point (x_0, y_0) de la fonction u . On la note soit par $\frac{\partial}{\partial x}u(x_0, y_0)$ soit par $u_x(x_0, y_0)$; c'est à dire

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + hy_0) - u(x_0, y_0)}{h}$$

On note $u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}, u_{yx}$, les dérivées de u d'ordre 2. Si u est de classe C^2 alors, $u_{xy} = u_{yx}$.

On générale, si u est continue on note les dérivées d'ordre k par

$$\frac{\partial^k}{\partial^i x \partial^j y} u \text{ avec } k = i + j$$

une équation dérivées partielles est une relation faisant intervenir les variables indépendantes x_1, \dots, x_n , la fonction u et ses partielles. On peut l'écrire sous la forme

$$F(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial^p}{\partial^{p_1} x_1 \dots \partial^{p_n} x_n} u) = 0$$

avec $p_1 + \dots + p_n = p$ et $p > 0$

On appelle ordre d'une EDP l'ordre le plus élevé des dérivées partielles intervenant dans celle-ci.

Une EDP est dite linéaire par rapport à ces arguments u et ses dérivées partielles et les coefficients qui les lient ne dépendent que de (x_1, \dots, x_n) , sinon elle est dite non linéaire.

1.4.3 Méthode des différences finies

Soient H un espace de Hilbert réelle et H' son dual. On note par (\cdot, \cdot) le produit scalaire dans H et $\|\cdot\|$ la norme associée à celui-ci, on note par $\|\cdot\|'$ la norme du dual H' . Pour résoudre

numériquement certaines équations de la forme

$$Au = f \quad (1.4)$$

où $f \in H'$, $A : H \rightarrow H'$ un opérateur linéaire. On considère l'équation discrétisé

$$A_h u_h = f_h \quad (1.5)$$

où h est un paramètre de discrétisation destiné à tendre vers 0, H_h est un espace de dimension finie de dual H'_h et $A_h : H_h \rightarrow H'_h$ est un opérateur discrétisé associé à $A : H \rightarrow H'$. Alors nous cherchons $u_h \in H_h$ solution de (1.5) pour $f_h \in H'_h$.

Théorème.

Pour tout $f_h \in H'_h$ il existe $u_h \in H_h$ unique solution de (1.5).

De plus la solution u_h approchée tend vers la solution u exacte de problème (1.5).

Démonstration Voir [9]

1.4.4 Equation de la chaleur de 1D et les différences finies

Soit l'équation parabolique (équation de la chaleur) suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = v \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \quad (1.6)$$

où $x \in [0, 1]$, $t > 0$ et v peut être une constante, une fonction de x ou de u . Pour discrétiser le domaine $[0, 1] \times \mathbb{R}_+^*$, on introduit un pas d'espace $h = \Delta x = \frac{1}{N} > 0$ et un pas $k = \Delta t = \frac{1}{M} > 0$ avec M et N deux entiers positifs.

On obtient un maillage régulier, en définissant les noeuds $(x_i, t_j) = ih, jk$; $0 \leq i \leq N$; $0 \leq j \leq M$. On note u_{ij} la valeur discrète approchée au point (x_i, t_j) .

En utilisant cette discrétisation et les approximation de la première et la deuxième dérivée de $u(x, t)$, on obtient le schéma des différence finies

$$\frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{k} + \theta v \frac{-u_{i-1j+1} + 2u_{ij+1} - u_{i+1j+1}}{h^2} + (1 - \theta) v \frac{-u_{i-1j} + 2u_{ij} - u_{i+1j}}{h^2} = 0$$

avec $\theta \in [0, 1]$.

Si $\theta = 0$ le schéma est dit explicite. Si $\theta = 1$ le schéma est dit implicite

1.4.5 Polynôme de Tchebychev

Les polynômes de Tchebychev de première espèce d'ordre n , sont définis par la relation de récurrence.

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

et les condition d'initialisation

$$T_0(x) = 1 ; T_1(x) = x.$$

Les premiers Polynôme sont

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \\ T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 \end{aligned}$$

Le polynôme T_n peut être défini par la relation

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta.$$

Ou encore par la relation

$$T_n(x) = \frac{1}{2}((x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n).$$

- (1) T_n est un Polynôme de degré n dont le coefficient, de plus haut degré est 2^{n-1} .
- (2) Les Polynômes de Tchebychev sont solution de l'équation différentielle

$$(1 + x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$$

- (3) Les Polynômes de Tchebychev satisfont la relation de récurrence

$$(1 + x^2)T_n'(x) = nxT_n(x) + nT_{n-1}(x).$$

- (4) Pour $i=0,1,\dots,n$ la relation du produit de deux Polynômes

$$2T_i(x)T_n(x) = T_{n+i}(x) + T_{n-i}(x).$$

(5) Majorations

$$\forall x \in [-1, 1] ; |T_n(x)| \leq 1.$$

$$\forall x \in [-1, 1] ; \left| \frac{dT_n(x)}{dx} \right| \leq n.$$

(6) Les Polynômes de Tchebychev sont des Polynômes orthogonaux relativement à une fonction de poids définie sur l'intervalle $[-1, 1]$.

2 RESOLUTION D'UN PROBLEME INVERSE DU TYPE PARABOLIQUE AVEC LA METHODE DES DIFFERENCES FINIS

2.1 Position du problème

Considérons l'équation qui modélise le problème de propagation de la chaleur

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = f \quad \text{dans } \Omega \quad (2.1)$$

qui modélise les problèmes en thermique. Dans ce cas, considérons le problème inverse linéaire dont le but est de déterminer la température u telle que la température à l'un des bords est inconnue mais une mesure de température à l'intérieure de matériau est connue. Le modèle mathématique est le suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - [a(x)u_x]_x = 0 \quad x \in]0, 1[\text{ et } t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) \quad 0 < x < 1, \\ u(0, t) = p(t) \quad t > 0, \\ u(1, t) = \Phi(t) \quad t > 0, \\ u(x_0, t) = q(t) \quad t > 0, \quad x_0 \in]0, 1[, \end{array} \right. \quad (2.2)$$

où f, p, a, q sont des fonctions connues ; Φ et u sont inconnues. Pour des raisons physiques on prend :
 $a \in C^1[0, \infty]$; $0 < a_0 < a(x) < A_0$.

La donnée de la température $u(x_0, t) = q(t)$ nous permet de diviser le problème initial (2.2) en deux problèmes.

L'un est un problème direct. Il est présenté comme suite :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - [a(x)u_x]_x = 0 \quad x \in]0, x_0[\quad \text{et } t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) \quad 0 < x < x_0, \\ u(0, t) = p(t) \quad t > 0, \\ u(x_0, t) = q(t) \quad t > 0, \end{array} \right. \quad (2.3)$$

L'autre est un problème inverse. Il est présenté comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - [a(x)u_x]_x = 0 \quad x \in]x_0, 1[\quad \text{et } t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) \quad x_0 < x < 1, \\ u(1, t) = \Phi(t) \quad t > 0, \\ u(x_0, t) = q(t) \quad t > 0, \end{array} \right. \quad (2.4)$$

2.2 Unicité de la solution du problème inverse

Avons de passer à la résolution numérique de ce problème, il faut montrer l'unicité de la solution. Donc on utilise la démonstration par l'absurde.

Supposons que le problème admet deux solutions u_1, u_2 et posons $u = u_1 - u_2$.

Pour le problème direct l'unicité est assurée par le théorème de Lax-Milgram. Alors,

$$u(x, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq x_0 \quad t > 0.$$

D'où

$$u(x_0, t) = 0, \quad t > 0.$$

Donc on obtient pour le deuxième

$$u_t = (a(x)u_x)_x, \quad x_0 \leq x \leq 1, \quad t > 0.$$

Appliquons la transformation de Laplace pour résoudre ce problème

$$\begin{cases} S\bar{U} - (a(x)\bar{U}_x)_x = 0, \\ \bar{U}(x_0, t) = 0, \quad \bar{U}_x(x_0, t) = 0, \end{cases}$$

Où $\bar{U}(x, s) = \mathcal{L}[u(x, t)]$ est la transformation de Laplace de $u(x, t)$. Ce problème admet une solution unique qui est

$$\bar{U}(x, t) = 0$$

On obtient donc

$$u(x, t) = 0, \quad x \in [x_0, 1], \quad t \in]0, \infty[$$

D'où

$$u_1 = u_2;$$

c'est à dire que le problème inverse initiale (2.1) admet une solution unique.

2.3 Discrétisation par la méthode des différences finies explicite du problème direct

L'approximation du problème (2.2) avec la méthode des différences finis nécessite la discrétisation du domaine

$$D = \{(x, t) / 0 < x < 1, \quad 0 < t < T\}$$

avec un pas d'espace $\Delta x = h = \frac{1}{N}$ et un pas temporelle $\Delta t = k = \frac{T}{M}$ où T est une constante positive et N, M deux entiers naturels. C'est à dire que l'intervalle $[0,1]$ est subdivisé en N sous intervalle de longueur h et l'intervalle $[0,T]$ est subdivisé en sous intervalles chaque intervalle a comme longueur k. Donc le domaine D peut être remplacé par l'ensemble de point (x_i, t_j) dits noeuds du maillage régulier avec

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N$$

$$t_j = jk, \quad j = 0, 1, 2, \dots, M$$

Posons

$$\begin{aligned} f_i &= f(x_i), \\ p_j &= p(t_j), \\ q_j &= q(t_j), \\ u_{ij} &= u(x_i, t_j), \\ a_i &= a(x_i), \\ x_{i_0} &= i_0 h, \quad 1 < i_0 < N - 1, \end{aligned}$$

Alors

$$u_{i_0 j} = u(x_{i_0}, t_j) = q_j.$$

La construction du schéma explicite pour la première équation du problème (2.3) fait appelle aux formules d'approximation des dérivées introduites dans les rappels d'analyse numérique du première chapitre. Comme cette équation s'écrit aussi

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial a(x)}{\partial x} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + a(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial^2 x};$$

les formules qu'on choisit pour le problème direct sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial a(x)}{\partial x} &\simeq \frac{a_{i+1} - a_i}{h} \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &\simeq \frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{k} \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &\simeq \frac{u_{i+1j} - u_{i-1j}}{h} \\ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial^2 x} &\simeq \frac{u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}}{h^2} \end{aligned}$$

Donc le discrétisé du problème (2.3) est le suivant :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{k} &= \frac{\beta_i(u_{i+1j} - u_{ij}) - \alpha_i(u_{i-1j} - u_{ij})}{h^2}, \\ u_{i_0} &= f(x_i), \quad 0 \leq i \leq i_0, \\ u_{0j} &= p(t_j), \quad 0 \leq j \leq M, \\ u_{i_0 j} &= q(t_j), \quad 0 \leq j \leq M, \end{aligned} \right. \quad (2.5)$$

où

$$\beta_i = \frac{1}{2}(a_i + a_{i+1}); \quad \alpha_i = \frac{1}{2}(a_{i+1} - 3a_i).$$

Posons

$$r = \frac{k}{h^2} \text{ et } \gamma_i = \alpha_i + \beta_i \text{ pour } i = 1, \dots, i_0 - 1.$$

Le problème (2.3) peut s'écrire sous forme matricielle

$$U_{j+1} = AU_j + C_j. \tag{2.6}$$

tels que

$$A = \begin{pmatrix} 1 - r\gamma_1 & r\beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ r\alpha_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & r\beta_{i_0-2} \\ 0 & \dots & 0 & r\alpha_{i_0-1} & 1 - r\gamma_{i_0-1} \end{pmatrix}$$

et

$$U_j = \begin{pmatrix} u_{1j} \\ u_{2j} \\ \vdots \\ u_{i_0-1j} \end{pmatrix} \quad C_j = \begin{pmatrix} r\alpha_1 u_{0j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r\beta_{i_0-1} u_{i_0j} \end{pmatrix}$$

posons

$$A_0 = \max_{0 \leq i \leq N} a_i$$

Théorème

Le schéma des différences finies (2.5) est stable pour $r \leq \frac{1}{2A_0}$.

Démonstration

Remplaçons tous les a_i de la matrice A par A_0 . Donc la matrice A peut être remplacé par \tilde{A} , avec

$$\tilde{A} = rA_0 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice \tilde{A} sont

$$\lambda_0 = 1 - 4rA_0 \sin^2 \frac{s\pi}{2(n-1)}, \quad s = 1, \dots, i_0 - 1.$$

La stabilité est assurée uniquement si $\lambda_s \leq 1$.

$$\begin{aligned} \lambda_s \leq 1 &\iff -1 \leq \lambda_s \leq 1 \\ &\iff -1 \leq 1 - 4rA_0 \sin^2 \frac{s\pi}{2(n-1)} \leq 1 \\ &\iff 4rA_0 \sin^2 \frac{s\pi}{2(n-1)} \leq 2 \\ &\iff r \leq \frac{1}{2A_0} \end{aligned}$$

2.4 Discrétisation par la méthode des différences finies explicites du problème inverse

Les formules d'approximation des dérivées qu'on utilise pour construire le schéma explicite de la première équation du problème (2.4) sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial a(x)}{\partial x} &\simeq \frac{a_{i+1} - a_i}{h} \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &\simeq \frac{u_{i+1j+1} - u_{i+1j}}{k} \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &\simeq \frac{u_{i+1j} - u_{i-1j}}{h} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial^2 x} \simeq \frac{u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}}{h^2}$$

Donc le schéma des différences finis pour le deuxième problème qui est un problème inverse est donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_{i+1j+1} - u_{i+1j}}{k} = \frac{\beta_i(u_{i+1j} - u_{ij}) - \alpha_i(u_{i-1j} - u_{ij})}{h^2} \\ u_{i0} = f(x_i), \quad i_0 \leq i \leq N \\ u_{0j} = p(t_j), \quad 0 \leq j \leq M \\ u_{Nj} = \Phi(t_j), \quad 0 \leq j \leq M \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Pour $i = i_0 + 1, \dots, N - 1$ le problème (2.6) peut s'écrire sous la forme matricielle

$$U_{j+1} = AU_j + C_j \quad (2.8)$$

$$A = \begin{pmatrix} -r\gamma_{i_0} & 1 + r\beta_{i_0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ r\alpha_{i_0+1} & -r\gamma_{i_0+1} & 1 + r\beta_{i_0+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & r\alpha_{N-2} & -r\gamma_{N-2} & 1 + r\beta_{N-2} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & r\alpha_{N-1} & -r\gamma_{N-1} \end{pmatrix}$$

et

$$U_j = \begin{pmatrix} u_{i_0j} \\ u_{i_0+1j} \\ \vdots \\ u_{N-1j} \end{pmatrix}; U_{j+1} = \begin{pmatrix} u_{i_0+1j+1} \\ u_{i_0+1j+1} \\ \vdots \\ u_{Nj+1} \end{pmatrix}; C_j = \begin{pmatrix} r\alpha_{i_0}u_{i_0-1j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 + r\beta_{N-1}u_{Nj} \end{pmatrix}$$

La stabilité de ce schéma est assuré par ce théorème :

Théorème

Le schéma des différences finies (2.7) est stable pour $r \leq \frac{1}{4A_0}$.

Démonstration

Si $A_0 = \max_{0 \leq i \leq N} a_i$ la matrice A peut être remplacé par \tilde{A} telle que :

$$\tilde{A} = rA_0 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

les valeurs propre de la matrice \tilde{A} sont

$$-4rA_0 \sin^2 \frac{s\pi}{2(n-1)}$$

le schéma est stable $\iff |\lambda_s| \leq 1$

$$\begin{aligned} |\lambda_s| \leq 1 &\iff -1 \leq \lambda_s \leq 1 \\ &\iff -1 \leq -4rA_0 \sin^2 \frac{s\pi}{2(n-1)} \leq 1 \\ &\iff 4rA_0 \sin^2 \frac{s\pi}{2(n-1)} \leq 1 \\ &\iff r \leq \frac{1}{4A_0} \end{aligned}$$

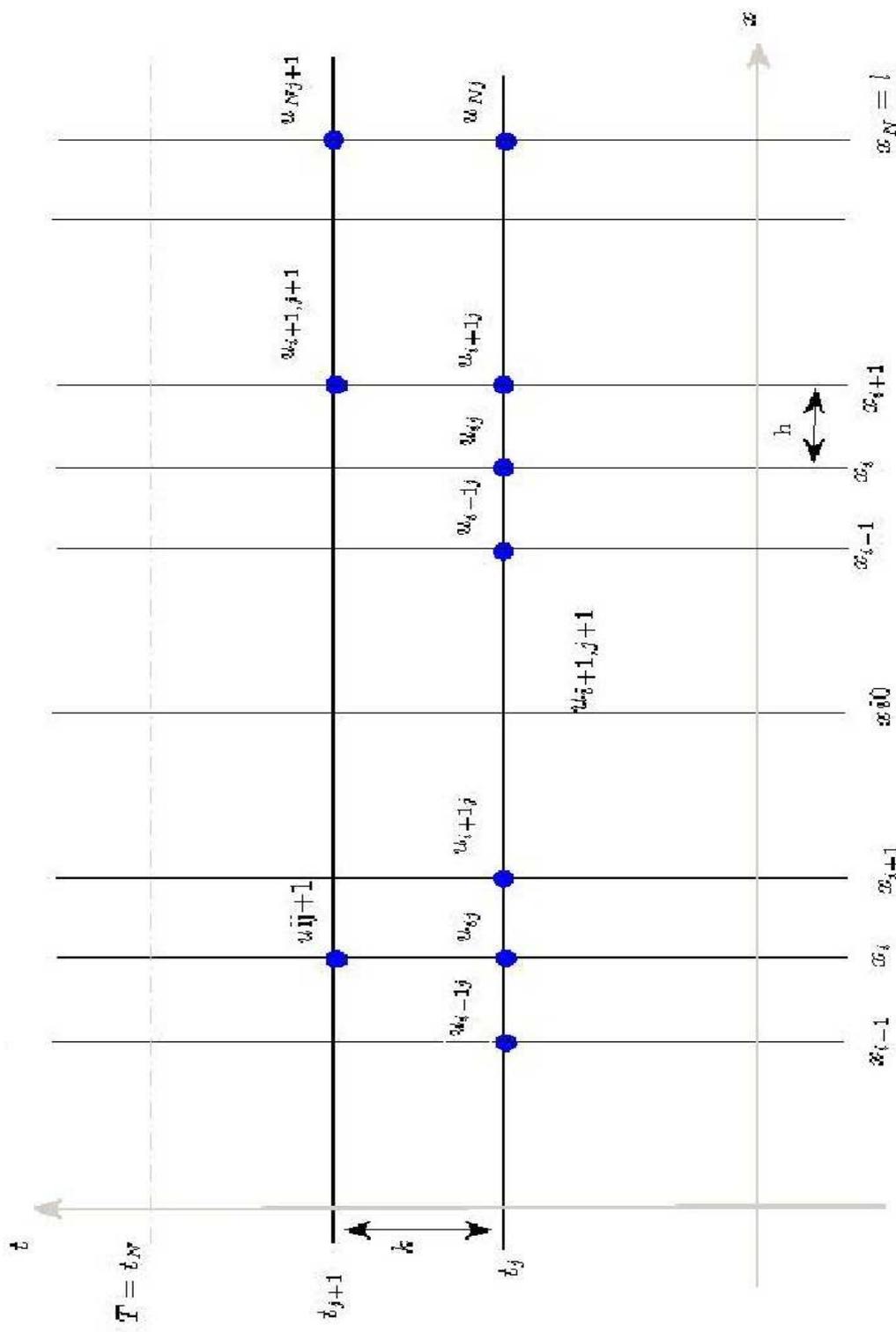


FIGURE 2.1 – Schéma de discrétisation [10]

2.5 Régularisation du problème avec la méthode des moindres carrés

Avec la résolution des deux systèmes (2.5) et (2.7), on trouve les valeurs perturbé de $u_{Nj} \simeq \Phi(t_j)$ (u_{Nj} sont les valeurs approchées de la fonction Φ).

Supposons que :

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^n a_k T_k(t)$$

où $T_k(t)$ est le $k^{ième}$ polynôme de chybeshév de premier espèce et les $\{a_k\}_{k=0}^n$ sont des coefficients inconnus.

En utilisant la méthode des moindres carrés, on minimise les erreurs entre les $\{\Phi(t_j)\}_{j=0}^M$ et $\{\Phi_j\}_{j=0}^M$ dont le but est de déterminer les coefficients réels inconnus $\{a_k\}_{k=0}^n$. Ce qui veut dire minimiser une fonctionnelle de (n+1) coefficients de la forme :

$$\begin{aligned} F = (a_0, a_1, \dots, a_n) &= \sum_{j=0}^M [\Phi(t_j) - \Phi_j]^2 \\ &= \sum_{j=0}^M \left[\sum_{k=0}^n a_k T_k(t_j) - \Phi_j \right]^2 \end{aligned}$$

avec $\frac{\partial F}{\partial a_k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n.$

Donc le problème revient à résoudre un système de (n+1) équation linéaires donné sous la forme matricielle

$$Aa = b$$

tels que

$$a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \text{ avec } b_k = \sum_{j=0}^M T_k(t_j) \phi_j, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

et A est une matrice carrée d'ordre (n+1) et dont les coefficients A_{kl} définie par

$$A_{kl} = \sum_{j=0}^M T_k(t_j) T_l(t_j), \quad k, l = 0, 1, \dots, n$$

3 Application numérique

3.1 Problème direct

Exemple 1

Résolution de l'équation de la chaleur par la méthode des différence finie en dimension 2. Soit :

$$\begin{cases} u_t(x, t) - u_{xx}^2(x, t) = f(x). \\ u(x, 0) = u_0(x) & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & 0 \leq t > T, \end{cases}$$

Pour

$$u_0(x) = \sin(\pi x)$$

$$T = 0.7$$

$$f(x) = -2 + 6x$$

$$k = 0.01$$

$$h = \frac{1}{10}$$

```
clear all; clc; close all; nb = 10;  
pas_temps = 0.01;  
pas_x = 1/(nb + 1);  
T = 0.7;  
xi = 0 : pas_x : 1
```

```

;ti = 0 : pas_temps : T;
ux = sin(pi. * xi);
u = zeros([numel(xi) - 2 * numel(ti)]);
u(:, 1) = ux(2 : end - 1);
fx = -2 + 6. * xi;
fn = zeros(size(u));
mat_dia = 2 * diag(ones(nb, 1)) - diag(ones(nb - 1, 1), 1) - diag(ones(nb - 1, 1), -1);
my_mat = (eye(nb) + (pas_temps/pas_x.^2) .* mat_dia);
it = 1;
while it < numel(ti)
    fn(:, it) = fx(2 : end - 1);
    u(:, it + 1) = my_mat * u(:, it) + pas_temps * fn(:, it);
    it = it + 1;
end
ui = cat(1, zeros([1numel(ti)]), u, zeros([1numel(ti)]));
fig1 = figure('color', [111]);
    xn, tn
= meshgrid(xi, ti);
surf(xn, tn, ui');
xlabel('Distance');
ylabel('Temps');
view(114, 18);
fig2 = figure('color', [111]);
contourf(xn, tn, ui');
xlabel('Distance');
ylabel('Temps');
figure('Renderer', 'zbuffer');
    xn, tn
= meshgrid(xi, ti);
colormap(jet);
xlabel('Distance');
ylabel('Temps');
for in = 1 : 30
    surf(exp(-0.008 * in) * ui'.^2, ui')
    my_animation(in) = getframe;
end

```

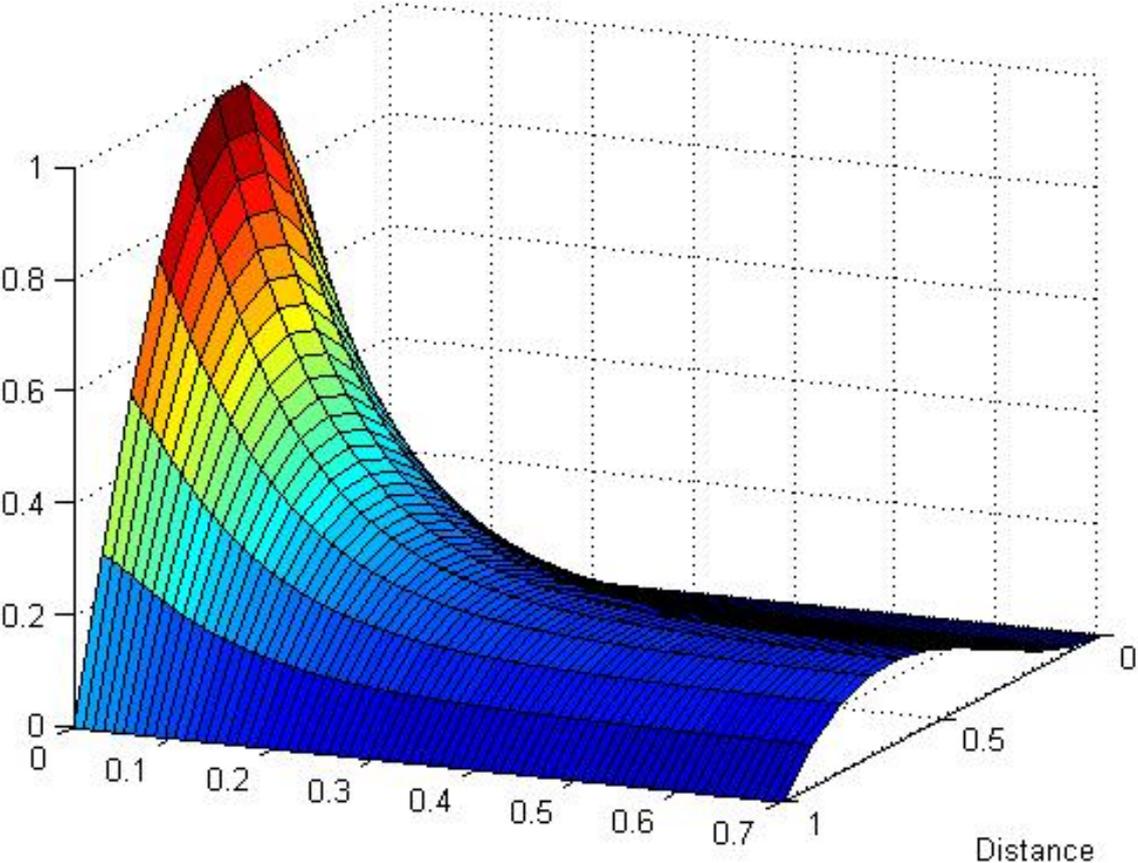


FIGURE 3.1 – Surface de la solution approchée

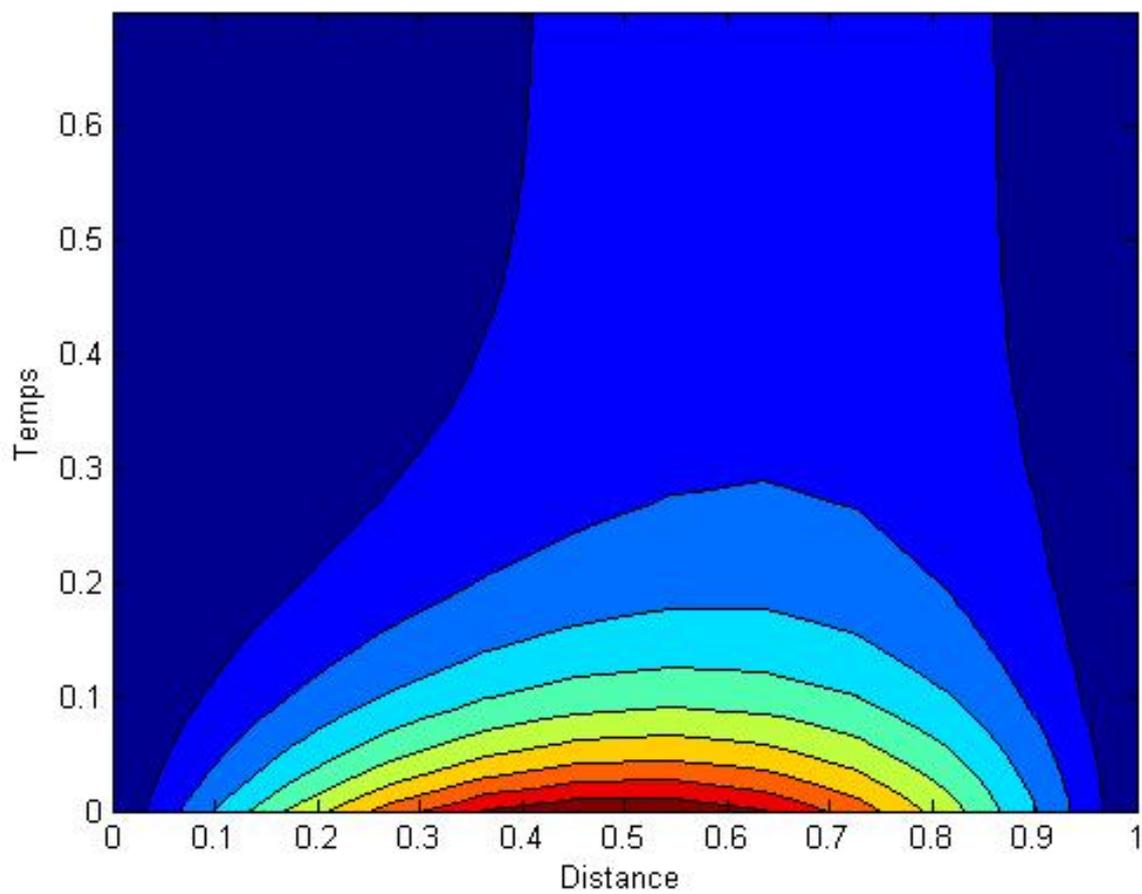


FIGURE 3.2 – courbe de niveaux de la solution approchée

3.2 Problème inverse

Exemple

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - [2xu_x]_x = 0 \quad x \in]0, 1[\text{ et } t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) = x \quad 0 < x < 1, \\ u(0, t) = p(t) = 2t \quad t > 0, \\ u(1, t) = \Phi(t) = ? \quad t > 0, \\ u(x_0, t) = q(t) = 2t \quad t > 0, \quad x_0 \in]0, 1[, \end{array} \right.$$

le problème admet une solution exacte

$$u(x, t) = x + 2t$$

et

$$\Phi(t) = 1 + 2t$$

Algorithme de résolution d'un problème inverse

Etape 1

Introduire les paramètres d'entrée : $M = 1000; k = .001; h = .1; r = h/k^2;$

Etape 2

Calculer pour i allant de 1 à 12

$$X(i) = i * h; a(i) = 2 * X(i)$$

; Calculer pour i allant de 1 à 10

$$\alpha(i) = (1/2) * (a(i+1) - 3 * a(i)); \beta(i) = (1/2) * (a(i) + a(i+1)) \gamma(i) = \alpha(i) + \alpha(i)$$

;

Etape 3

$U_0=0; U=a;$

Calculer pour i allant de 1 à 5

$$A(i; i) = 1 - r * \gamma(i); A(i-1, i) = r * \beta(i); A(i, i-1) = r * \alpha(i);$$

$$X_i = \sum_{l=1}^5 A(i, l) * U(l);$$

Calculer pour i allant de 1 à 4

$$B(i; i) = -r\gamma(5+i); B(i-1, i) = 1 + r * \beta(5+i); B(i, i-1) = r * \alpha(5+i);$$

$$Y_i = \sum_{l=1}^4 B(i, l) * U(5+1+l);$$

Etape 4

Calculer pour j allant de 1 à M

$$C(1) = r * \alpha(1) * 2 * k * j; C(5) = r * \beta(5) * 2 * k * j$$

; Calculer pour i allant de 1 à 5

$$X_i = \sum_{l=1}^5 A(i; l) * U(l) + C(i);$$

$$U6j = 2 * k * j$$

;

$$CC(1) = r * \alpha(5 + 2) * 2 * k * j; CC(5) = 1 + r * \beta(5 + 4) * 2 * k * j$$

; Calculer pour i allant de 1 à 4

$$Y_i = \sum_{l=1}^4 B(i; l) * U(5 + 1 + l) + CC(i);$$

$$U = [XU6jY]; \phi(j) = U(10);$$

Etape 5

$$\begin{cases} T_{n+1}(x) = 2 * x * T_n(x) - T_{n-1}(x); \\ T_0(x) = 1; T_1(x) = x; \end{cases}$$

Calculer pour i allant de 1 à 5

$$b(i) = \sum_{j=1}^M T_i(j * k) * \phi(j);$$

Calculer pour l allant de 1 à 5

$$A(i, l) = \sum_{j=1}^M T_i(j * k) * T_l(j * k);$$

Etape 6

résoudre le système $A * W = b$ et déterminer W les coefficients du polynôme de Tchebychev.

Etape

tracer

$$\phi(t) = 1 + 2t \text{ et } U_{ij}$$

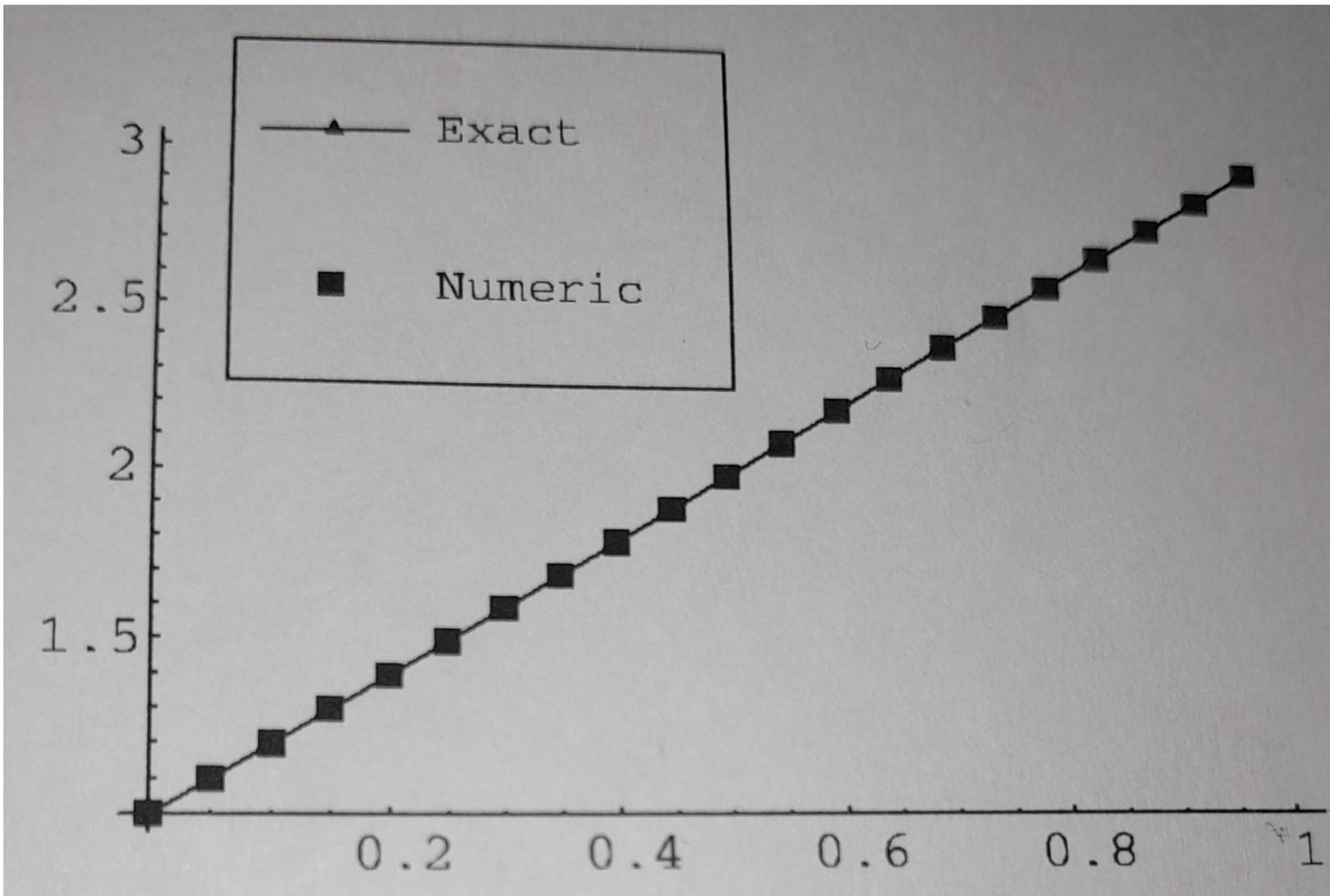


FIGURE 3.3 – Le graphe de temperature $\phi(t)$ avec $x_0 = 0.8$

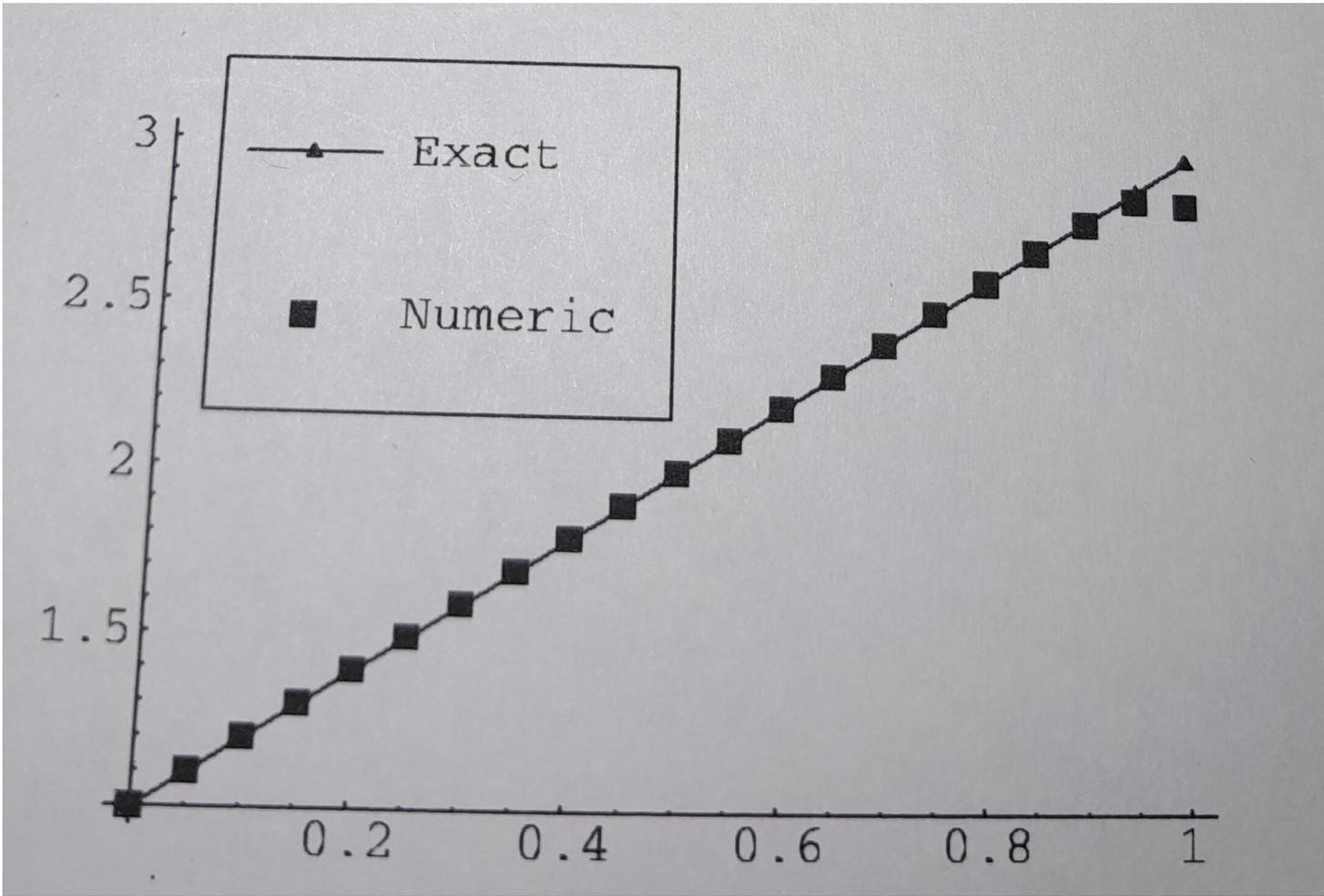


FIGURE 3.4 – Le graphe de temperature $\phi(t)$ avec $x_0 = 0.6$

Conclusion Générale

Le problème inverse linéaire qui est un problème mal posé consiste à déterminer la température à l'un des bords d'un matériau connaissant une température à l'intérieur de celui-ci. Pour sa résolution on a discrétisé le problème avec la méthode des différences finies explicites puis on a régularisé les valeurs approchées de la température à ce bord avec la méthode des moindres carrés.

Bibliographie

- [1] Grégoire Allaire.
Sidi Mahmoud Kaber. *Algebre Linéaire Numérique*, ellipses avril 2002.
- [2] Réal Gélinas .
Equation Diffrentielles et Transformation de Laplace. Les éditions SMG 1984.
- [3] V.Isakov.
Inverse problèmes for partial differential eqations. Number 127 in *Applied Mathematical Sciences* Springer, New-York, 1998
- [4] F.Jedrzewski.
Intoduction aux méthodes numériques Springer 2006
- [5] R.Kress.
Linear Integral Equation , Springer Verlag, vol 82, 1999
- [6] J.B.Keller.
Inverse problems. *Amer Math. Monthly*, 83 :107-118,1976.
- [7] A.Shidfar, J.Damirchi, P.Reihani.
An stabele numerical algorithm for identifying the solution of an inverse problem 2007
- [8] Haim Brézis.
Analyse Fonctionnelle (théorie et application), Dunod 1994
- [9] M.Sibony et J.Cl.Mardon.
*Approximation et équation différentielles (Tome 2)*Hermann N 1406 (1988)

- [10] B.Bahia.
Diplôme de Magister