République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A. Mira de Béjaia

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Spécialité

Analyse mathématique

Thème

Nombres irrationnels, algébriques et transcendants

Présenté par : Mlle. GABIS Fatiha

Soutenu le 25 Juin 2023 devant le jury :

Mr	A.KHELOUFI	Prof.	U.A.M. BEJAIA	Président
Mr	S. AISSAOUI	MCB.	U.A.M. BEJAIA	Encadrant
Mr	T.MEKERRI	MAA.	U.A.M. BEJAIA	Examinateur

Béjaia, Juin 2023.

⁎ *Remerciements* ⁎

***O**n remercie dieu le tout puissant de nous avoir donner la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.*

***T**out d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de **M.AISSAOUI Said**, on le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience et sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire.*

***N**os remerciements aussi s'adressent aux membres de jury **M.A. KHELOUFI** et **Mr.T.MEKERRI** d'avoir accepter de présider et d'examiner ce modeste travail.*

***E**nfin on tient à exprimer vivement nos remerciements avec une profond gratitude à toutes les personnes qui ont contribué de prés ou de loin à sa réalisation.*

Merci

⁂ *Dédicaces* ⁂

J*e dédie cet travail*
A *mes chers parents qu'ils nous ont toujours encouragé durant ces années d'étude moralement et matériellement.*
A *mes frères, mes soeurs, ils m'ont chaleureusement supporté et encouragé tout au long de mon parcours.*
A *ma belle famille, mes proches et à ceux qui me donnent de l'amour et de la vivacité.*
A *tous mes professeurs, tous mes amis.*

Merci

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dans ce mémoire, nous allons rappeler les définitions et les propriétés d'une nouvelle catégorie de nombres comprise entre l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ et l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'ensemble des **nombres algébriques** et son complémentaire, **les nombres transcendants**.
On dit qu'un nombre est **algébrique** s'il existe un polynôme à coefficients rationnels dont il est racine. Dans la théorie algébrique des nombres, le concept de nombre est étendu aux nombres algébriques qui sont les racines des polynômes avec des coefficients rationnels. Ces domaines contiennent des éléments analogues aux entiers, connus sous le nom entiers algébriques. Avec ces régles, les propriétés familières des entiers (c-à-d la factorisation unique) ne sont plus les mêmes. Les méthodes employées sont la théorie de Galois, la présentation des groupes qu'elles permettent de retrouver un ordre partiel pour ces nouvelles classes de nombres. Un nombre qui n'est pas algébrique est dit **transcendant**.
En 1944, **Liouville**[1] a démontré l'existence des nombres transcendants et en a donnait les premiers exemple. Il a développé ce travail en 1851, dans le **Journal de Liouville**.

1. **Joseph Liouville** Mathématicien Français (1809-1882), est surtout connu pour ses travaux sur les nombres transcendants. Il a construit une classe infinie de tels nombres.

Bien que l'existence des nombres transcendents est facilement démontrable grâce aux propriétés des nombres réels et des nombres algébriques, le plus difficile dans cette théorie est de montrer que certains nombres sont transcendants.

Hermit[2] en 1873, il a démontré la transcendance du nombre e, et a crée la méthode qui sera la base des principaux progrès dans le futur, puis en 1882, le mathématicien **Lindemann**[3] a démontré la transcendance de π, il a expliqué comment sa démonstration s'étendait à la transcendence de e^{α} pour α algébrique non nul (théorème de **Hermite-lindemann**).

Jusqu'à 1885, parait le mémoire de **Weierstrass**[4] avec les démonstrations complétés des résultats énoncés par Lindemann.

Enfin 1900, au deuxième congrés international de mathématiques, **Hilbert**[5] énonça une liste de 23 problèmes dont la pertinence devait guider les recherches mathématiques durant le $XX^{\text{ème}}$ siècle, Il a estimé que l'étude de la transcendance de certaines réels comme $2^{\sqrt{2}}$ ou e^{π} était suffisamment digne d'intérêt pour constituer le septième problème de sa liste. Ce problème est résolu en 1934 par **Gelfond**[6] et **Schneider**[7]. Dans ce travail, nous sommes intéressés à la théorie des nombres transcendants, qui constitue un domaine de recherche actuel, (il reste de nombreux problèmes ouverts à ce jour).

Nous avons essayé d'assembler une partie de cette théorie, comprendre certains résultats. Pour cela notre mémoire est organisé comme suit :

2. **Charles Hermite** (1822-1901) est un mathématicien français. Ses travaux concernent surtout la théorie des nombres, les formes quadratiques, les polynômes orthogonaux, les fonctions elliptiques et les équations différentielles.

3. **Carl Louis Ferdinand von Lindemann** (1852-1939) est un mathématicien allemand. Il est passé à la postérité pour sa démonstration, publiée en 1882, de la transcendance du nombre π.

4. **Karl Theodor Wilhelm Weierstrass**, , (1815 -1897) à Berlin, est un mathématicien allemand, lauréat de la médaille Copley en 1895.

5. **David Hilbert** (1862-1943) est un mathématicien allemand et l'un des mathématiciens les plus influents du XIXe et du début du XXe siècle.

6. **Alexander Osipovich Gelfond** (1906 -1968) est un mathématicien soviétique, également connu sous le nom de théorème de Gelfond-Schneider, porte son nom.

7. **Theodor Schneider** (1911-1988) est un mathématicien allemand, surtout connu pour avoir démontré, le théorème qui porte désormais leurs noms.

Le premier chapitre est divisé en trois parties : Dans la première partie, nous rappelons quelques propriétés algébriques et analytiques de l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$, dans la seconde partie, nous énonçons les critères et les théorèmes nécessaires et utiles pour aborder les autres chapitres et enfin nous étudions quelques résultats sur l'irrationalité de quelques nombres réels.
Dans le deuxième chapitre, nous rappellons quelques notions et préliminaires sur les polyômes, les nombres algébriques et les entiers algébriques, puis nous définissons la notion de dénombrabilité en donnant quelques exemples d'ensembles dénombrables et non dénombrables, et nous proposons une démonstration sur la dénombrabilité de l'ensemble des nombres algébriques.
Dans le dernier chapitre, nous rappellons quelques théorèmes importants qui consistent à expliquer les différents aspects de la théorie des nombres transcendants, à commencer par une définition des nombres transcendants, et énoncer un célébre théorème de Liouville avec sa démonstration, et ensuite le théorème de Lindemann - Weierstrass qui nous permet de définir une nouvelle classe de nombres transcendants. Nous terminerons ce chapitre par un théorème qui est dû à Gelfond-Schneider.

CHAPITRE 1

NOMBRES RATIONNELS

Les nombres rationnels sont un ensemble de nombres qui peuvent être exprimés sous la forme de fractions, où le numérateur et le dénominateur sont des nombres entiers. Ils sont utilisés pour représenter des quantités réelles et sont largement utilisés en mathématiques et dans d'autres domaines scientifiques. Les nombres rationnels jouent un rôle important en mathématiques, en sciences et dans de nombreux domaines de la vie quotidienne où des mesures précises et des fractions sont nécessaires. Ils sont également utilisés dans des domaines tels que l'algèbre, la géométrie, les probabilités et la physique. Dans ce chapitre, nous donnerons quelque propriétés des nombres rationnels, la mesure d'irrationalité et la démonstration de certains nombres irrationnels, nous avons utilisé les références suivantes [1], [2], [6] .

1.1 Préliminaires et définitions

Définition 1.1.
On appelle rationnel tout nombre pouvant s'écrire sous forme d'une fraction d'entiers relatifs.

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z} \ et \ \ q \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$$

Exemple 1.1.

• *3 , 14 , 15 ,* $\frac{3}{5}$ *, -7 , -3 sont des nombres rationnels.*

• *Les entiers relatifs sont des entiers rationnels,*

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \ \ on \ peut \ écrire \ \ x = \frac{x}{1} \in \mathbb{Q}.$$

.

On munit l'ensemble $\mathbb{Q}$ de deux lois internes

$$\begin{aligned}
(+): \qquad & \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \\
& (\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}) \mapsto \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + p'q}{qq'} \\
(.): \qquad & \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \\
& (\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}) \mapsto \frac{p}{q} . \frac{p'}{q'} = \frac{pp'}{qq'}
\end{aligned}$$

Théorème 1.

L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ *muni de l'addition et de la multiplication est un corps commutatif.*

Théorème 2 (**Densité de** $\mathbb{Q}$ **dans** $\mathbb{R}$).

Le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ *est danse dans le corps des nombres réels* $\mathbb{R}$.

Démonstration.

Pour montrer la densité de $\mathbb{Q}$ *dans* $\mathbb{R}$*, il suffit de montrer que pour tout nombre réel* x *de* $\mathbb{R}$*, il existe une suite* $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *de nombres rationnels qui converge vers* x.

Posons

$$X_n = \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} E(kx) \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

avec $E(x)$ est la partie entière de x.
Puisque $E(kx) \in \mathbb{Z}$, alors

$$2\sum_{k=1}^{n} E(kx) \in \mathbb{Z},$$

et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n^2 \in \mathbb{N}^*$ d'où

$$X_n = \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} E(kx) \in \mathbb{Q}$$

.

Montrons que $(X_n)_n \in \mathbb{N}^*$ converge vers x.
De la définition de la partie entière, on a l'inégalité suivante

$$x - 1 < E(x) \leq x$$

donc

$$kx - 1 < E(kx) \leq kx. \tag{1.1}$$

En additionnant les termes de l'inégalité (1.1) en variant k de 1 à n, on aura

$$\sum_{k=1}^{n} kx - 1 < \sum_{k=1}^{n} E(kx) \leq \sum_{k=1}^{n} kx$$

Donc

$$x\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 < \sum_{k=1}^{n} E(kx) \leq x\sum_{k=1}^{n} k$$

D'où

$$x\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - n < \sum_{k=1}^{n} E(kx) \leq x\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) \tag{1.2}$$

En multipliant les termes de l'inégalité (1.2) par $(\frac{2}{n^2})$ on aura

$$x\left(\frac{(n^2+n)}{n^2}\right) - \frac{2}{n} < X_n \leq x\left(\frac{(n^2+n)}{n^2}\right).$$

par passage à la limite

$$\lim_{n\to\infty} x\left(\frac{(n^2+n)}{n^2}\right) - \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} < \lim_{n\to\infty} X_n \leq \lim_{n\to\infty} x\left(\frac{(n^2+n)}{n^2}\right)$$

D'où

$$x \leq \lim_{n\to\infty} X_n \leq x.$$

Donc la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge vers* x.
En déduire que $\mathbb{Q}$ *est danse dans* $\mathbb{R}$. ■

Remarque 1.1.
On peut montrer la densité de $\mathbb{Q}$ *dans* $\mathbb{R}$*, en montrant qu'entre deux réels distincts, il existe toujours un rationnel, c'est - à - dire*

$$\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2, a\neq b,\ \exists\, r\in\mathbb{Q}, \textit{tel que } a<r<b.$$

Sur la droite réelle, il existe des nombres qui sont irrationnels. Ces nombres apparaissant naturellement dans les figures géométriques.
Par exemple : la diagonale d'un carré de coté 1 qui vaut$\sqrt{2}$ *est un nombre irrationnel, le périmètre d'un cercle de diamétre 1 est* π *qui est un nombre irrationnel.*

Dans la suite de ce paragraphe nous essayons de démontrer l'irrationalité de quelques nombres comme e, π, $\sqrt{p}, \ldots$ etc.

1.2 Les critères d'irrationalité

Théorème 1.1.
S'il existe un réel $\mu > 1$ *,*$x\in\mathbb{R}$ *et une infinité de couple* (p,q) *d'entiers tels que* $q>0$ *et* $0<\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^\mu}$*, alors* x *est irrationnel.*

Démonstration.
Par l'absurde, soit $r=\frac{a}{b}$ *un rationnel (avec* $b>0$*), alors pour tous entiers*

$q > 0$ et p on a :

$$0 < \left| r - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^\mu} \Rightarrow \frac{1}{q^\mu} > \left| \frac{a}{b} - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{aq - bp}{bq} \right| \geq \frac{1}{bq}.$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{bq} \leq \left| \frac{aq - bq}{bq} \right| < \frac{1}{q^\mu} &\Rightarrow \frac{1}{bq} < \frac{1}{q^\mu} \\ &\Rightarrow q^{\mu-1} < b. \end{aligned}$$

Donc il n'y a qu'un nombre fini de valeurs possibles pour q et puisque pour chacune de ces valeurs d'ensembles des solutions p est fini.
Par suite, il y a qu'un nombre fini de couples (p, q) solutions pour l'approximation de r, ce qui prouve qu'aucun rationnel r n'est égal à x. ■

Les résultats (**théorème de Dirichlet, Roth, Liouville**) sur le critère et la mesure d'irrationalité suivants ont été présentés dans [2], [3], [5] et [6].

Théorème 1.2. ***(Dirichlet*** [1]*)*
Soit $x \in \mathbb{R}$, alors , x est irrationnel si et seulement s'il existe une infinité de nombres rationnels $\frac{p}{q}$ avec $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$.

Proposition 1.1 (**La mesure d'irrationalité**).
La mesure d'irrationalité $\mu(x)$ d'un réel x, est ***la borne supérieure*** *de l'ensemble des réels μ pour lesquels il existe une infinité de nombre rationnels $\frac{p}{q}$ tel que $q > 0$ et $0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^\mu}$. Autrement dit*

$$\mu(x) = sup\left\{ \mu \in \mathbb{R} / \textit{ il existe une infinité } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, q > 0 \textit{ alors } 0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^\mu} \right\}$$

Cette proposition est équivalente à la suivante :

1. **Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet** (1805 - 1859) est un mathématicien allemand qui a apporté des contributions à la théorie des nombres (y compris la création du domaine de la théorie analytique des nombres) et la théorie de séries de Fourier.

Proposition 1.2.

*La mesure d'irrationalité d'un réel x est **la borne inférieure** de l'ensemble des réels μ pour lesquels il existe une constante $A > 0$ telle que, pour tout rationnel $\frac{p}{q} \neq x$ avec $q > 0$ et $\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{A}{q^\mu}$. autrement dit :*

$$\mu(x) = inf \left\{ \mu \in \mathbb{R} / \ \exists A > 0, \ \forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \ \frac{p}{q} \leq x, \ q > 0 \, alors \left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{A}{q^\mu} \right\}.$$

Démonstration.

On montrera l'équivalence entre les deux définitions précédentes.
Notons respectivement X et Y les bornes supérieure et inférieure. Soient $\mu > Y$ et $\varepsilon > 0$. Il existe alors $A > 0$ tel que $\forall p \in \mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{N}, q \neq 0$.

$$\frac{p}{q} \neq x \Rightarrow \left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{A}{q^\mu}$$

Donc pour q assez grand,

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{N}, q \neq 0, \ \frac{p}{q} \neq x \Rightarrow q^{\mu+\varepsilon} \left| x - \frac{p}{q} \right| \geq 1$$

Et pour chacun des q restants(qui sont en nombre fini), l'ensemble des entiers p qui ne vérifient pas cette inégalité est borné, donc un nombre fini.
On en déduit que $\mu + \varepsilon \geq X$, et que pour tout $\mu > Y$ et $\varepsilon > 0$ on a $Y \geq X$.
Réciproquement, soit $\mu > X$.
Il n'existe qu'un nombre fini de couples $(p_1, q_1), \ldots, (p_m, q_m)$ vérifiant

$$0 < \left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k^\mu}.$$

En posant

$$A = min \left(1, q_1^\mu \left| x - \frac{p_k}{q_k} \right|, \ldots, \ q_m^\mu \left| x - \frac{p_m}{q_m} \right| \right),$$

on obtient que pour tout rationnel $\frac{p}{q} \neq x$ avec $q > 0$, $\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{A}{q^\mu}$
Donc $\mu \geq Y$ et que pour tout $\mu > X$, on a $X \geq Y$. ■

Remarque 1.2.
*D'après les **proposition** 1.1 et la **proposition** 1.2, on déduit que la mesure d'irrationalité notée μ d'un rationnel est égal à 1, et que celle d'un irrationnel est supérieure ou égale à 2.*

Définition 1.2 (**mesure effective**).
*Soit α un nombre irrationel, on dit que $\mu(\alpha)$ est une mesure d'irrationalité (**effective**) de α si : $\forall \varepsilon > 0, \exists\, q_0(\varepsilon) > 0$ **effectivement calculable** tel que $\forall (p,q) \in \mathbb{Z}^2$ vérifiant :*

$$q \geq q_0(\varepsilon),\ \text{on a } \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q^{\mu-\varepsilon}}$$

Exemple 1.2.

1. ***La mesure d'irrationalité de** π*
   *La mesure d'irrationalité de π a été donné en 1953 par **Mahler**[2] telle que $\mu(\pi) = 42$, puis **Mignotte** a donné en 1974 un autre résultat qui est $\mu(\pi) = 20$, ce résultat a été amélioré légèrement par **Chudnovsky**[3] en 1979 avec $\mu(\pi) = 19.89$, et en 1982 ce dernier annonça que $\mu(\pi) = 17$, puis $\mu(\pi) = 14,65$.*

2. ***La mesure d'irrationalité de** $log2$*
   *La méthode de Baker de minoration de forme linéaire fournit $\mu(log2) = 10^{22}$, en 1978 **Apéry**[4] obtient $\mu(log2) = 4.622\ldots$ par une méthode d'accélération de la convergence de la série définissant $log2$ et en 1964 **Baker** donna que $\mu(log2) = 12.5$, et **Chudnovsky** annonca que $\mu(log2) = 4.2696549$ puis $\mu(log2) = 4.134400029$.*

2. **Kurt Mahler** (26 juillet 1903-1988) mathématicien allemand
3. **David et Gregory Chudnovsky** deux mathématiciens ukraniens sont principalement connus pour leurs travaux sur le nombre π.
4. **Roger Apéry** (1916-1994) est un mathématicien franÃ§ais .

1.3 L'irrationalité de quelques nombres réels

Nous appelons dans la suite quelques résultats sur l'irrationalité de quelques nombres.

1.3.1 L'irrationalité de $\sqrt{p}$, p premier

Proposition 1.3.
Si p un nombre premier alors $\boldsymbol{\sqrt{p}}$ *est un nombre irrationnel.*

Démonstration.
On pose $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$, $(a,b) = 1, (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.
On a

$$(\sqrt{p})^2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = pb^2 \Rightarrow p\, divisie\, a$$

Alors $a = pk, k \in \mathbb{Z}$ *et*

$$\begin{aligned} a^2 = pb^2 &\Rightarrow (pk)^2 = pb^2 \\ &\Rightarrow p^2k^2 = pb^2 \\ &\Rightarrow pk^2 = b^2 \\ &\Rightarrow p\, divise\, b^2 \\ &\Rightarrow p\, divise\, b \end{aligned}$$

On a donc p un diviseur commun de a et b, contradiction car a et b sont premiers entre eux, On déduit que $\sqrt{p}$ est irrationnel ■

1.3.2 L'irrationalité de e

Proposition 1.4.
Le nombre ***e=exp1*** *est un nombre irrationnel.*

Démonstration.
D'après la formule de Taylor on a $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$. *Effectuons une démonstration*

par l'absurde, supposons que e est un rationnel alors il existe deux entiers p et q tels que $e = \frac{p}{q}$ *avec* $p \in \mathbb{N}$ *et* $q \in \mathbb{N} - \{0\}$. *Soit* $X = q!\left(e - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!}\right)$. *Montrons que* X *est un entier strictement positif et plus petit que* 1, *cette contradiction établir l'irrationalité de e.*
On a q divise q! et $0 < k < q$ *donc k! divise q! et comme* $\frac{q!}{q} \in \mathbb{N}$ *et* $\frac{q!}{k!} \in \mathbb{N}$ *donc* $q!\frac{p}{q} \in \mathbb{N}$ *et* $\sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} \in \mathbb{N}$, *d'où* $X = q!\,\frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} \in \mathbb{N}$. *On a alors* $X \in \mathbb{N}$.
Montrons que $0 < X < 1$ *:*

$$X = q!\left(e - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!}\right) = q!\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!}\right) = q!\left(\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!}\right) > 0.$$

En développant cette dernière égalité nous obtenons :

$$X = q! \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = q!\left(\frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + \frac{1}{(q+3)!} + \dots\right)$$

d'où

$$X = \left(\frac{q!}{(q+1)!} + \frac{q!}{(q+2)!} + \frac{q!}{(q+3)!} + \dots\right).$$

Or, nous savons que cette sommation est positive donc

$$\begin{aligned} 0 < X &= \left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \dots\right) \\ &< \left(\frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \dots\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^n} \end{aligned}$$

on a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^n}$ *la somme d'une suite géométrique de raison* $\frac{1}{q+1}$ *et qui est égale á* $\frac{1}{q}$. *Donc on aura :* $0 < X < \frac{1}{q}$ *et comme* $q > 1$ *alors* $\frac{1}{q} < 1$, *alors* $0 < X < 1$ *(contradiction). D'où, il n' y a pas un entier strictement positif plus petit que 1. On déduit que e est irrationnel.* ■

1.3.3 L'irrationalité de π

Lambert [5] a montré en 1961 que π est irrationnel, on énonce le théorème sans donner la démonstration.

Théorème 1.3 (**Lambert**).
π est un nombre irrationnel.

Démonstration.
voir [1].

5. Mathématicien français(1728-1777)

CHAPITRE 2

NOMBRES ALGÉBRIQUES

Les nombres algébriques sont des solutions d'équations polynômiales à coefficients entiers. Ils sont associés à des polynômes minimaux uniques et peuvent être classés en degrés selon ces polynômes. Les nombres algébriques jouent un rôle fondamental dans de nombreux domaines des mathématiques et permettent de comprendre la structure des objets mathématiques complexes. Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions et résultats ainsi que les propriétés concernant les solutions des équations polynômiales , ainsi que la notion de dénombrabilité.
Dans notre étude, nous avons utilisé les références suivantes [1], [4], [9].
$\mathbb{K}$ est un corps commutatif. $\overline{\mathbb{K}}$ sa clôture algébrique, c'est à dire le plus petit corps qui contient $\mathbb{K}$ qui est algébriquement clos.

2.1 Définitions et propriétés

Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{K}}$, on dit que α est **algébrique** sur $\mathbb{K}$, s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$

$$P(X) = \alpha_n X^n + \alpha_{n-1} X^{n-1} + \cdots + \alpha_2 X^2 + \alpha_1 X + \alpha_0$$

avec $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ non tous nuls tel que $P(\alpha) = 0$.

Exemple 2.1.

1. *Tout nombre rationnel est algébrique sur $\mathbb{Q}$, car le quotient $\frac{p}{q}$ de deux entiers relatifs est racine de l'équation $qx-p = 0$* $\left(x - \frac{p}{q} = 0 \iff qx - p = 0\right)$.
2. *Un nombre irrationnel peut être ou non algébrique.*
   Par exemple $\sqrt{2}$ ou $\frac{3^{\frac{1}{3}}}{2}$ sont algébriques sur $\mathbb{Q}$, car ils sont les solutions de
   $x^2 - 2 = 0$ *et* $8x^3 - 3 = 0$ *respectivement.*
3. *Le nombre complexe i est algébrique sur $\mathbb{Q}$, car il est racine de l'équation* $x^2 + 1 = 0$.

Remarque 2.1.
Dans la suite, on définit les nombres algébriques sur le corps des rationnels $\mathbb{Q}$.

Définition 2.1 (**Polynômes irréductibles**).
Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[x]$, $\mathbb{K}$ un corps commutatif.
On dit que P est ***irréductible*** *dans $\mathbb{K}[x]$ s'il n'est pas constant, et si ses seuls diviseurs sur $\mathbb{K}[x]$ sont :*

1 . *Les polynômes constants non nuls.*

2 . *Les polynômes associés à P, c'est-à-dire les λP, avec λ dans $\mathbb{K}^*$.*

Proposition 2.1.
Un polynôme de degré 2 est irréductible s'il n'admet pas de racines dans $\mathbb{R}$.

Démonstration.
En effet, Si $P(X) = aX^2 + bX + c$, est réductible alors P se décompose en produit de deux polynômes de degré 1

$$P \text{réductible} \iff \exists\, Q,\, H \in \mathbb{K}[X],\ \textit{tels que}\ \ P(X) = Q(X)H(X),\ \deg(Q) = \deg(H) = 1.$$

Comme les polynômes Q et H admettent des racines dans $\mathbb{K}$, alors P admet au moins une racine dans $\mathbb{K}$.

Exemple 2.2.

1. *Le polynôme* x^2+1 *est irréductible sur* $\mathbb{R}[x]$ *car il n'admet pas de racine dans* $\mathbb{R}$*, mais il est réductible sur* $\mathbb{C}[x]$ *car* i *est une racine, on peut écrire* $x^2+1=(x-i)(x+i)$ *.*
2. *Le polynôme* x^2-2 *est irréductible sur* $\mathbb{Q}[x]$*, mais réductible sur* $\mathbb{R}[x]$ *car* $\sqrt{2}\in\mathbb{R}$ *est sa racine, on peut écrire* $x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$*.*

Définition 2.2.
P est dit un ***polynôme unitaire*** *si son coefficient dominant est 1, c'est à dire si* $P(X)=\alpha_nX^n+\alpha_{n-1}X^{n-1}+\cdots+\alpha_2X^2+\alpha_1X+\alpha_0$ *alors :*

$$P \textbf{ unitaire } \Longleftrightarrow a_n=1.$$

Définition 2.3 (**Polynôme minimal d'un nombre algébrique**)**.**
Soit α *un nombre algébrique sur* $\mathbb{Q}$ *et* P *un polynôme dans* $\mathbb{Q}[x]$*, si* $P(\alpha)=0$*, et* P *est à la fois* ***unitaire*** *et* ***irréductible*** *sur* $\mathbb{Q}[x]$*. Alors* P *est dit le* ***polynôme minimal*** *de* α*.*

Exemple 2.3.

(1) X^2-2 *est un* ***polynôme minimal*** *de* $\sqrt{2}$ *sur* $\mathbb{Q}[X]$*, car* X^2-2 *est irréductible, unitaire sur* $\mathbb{Q}$ *et* $\sqrt{2}$ *est une racine de* X^2-2*.*

(2) $X-3$ *est un* ***polynôme minimal*** *de* 3 *sur* $\mathbb{R}[x]$*, car* $X-3$ *est irréductible, unitaire sur* $\mathbb{R}$ *et* 3 *est une racine de* $X-3$*.*

Définition 2.4.
On dit que deux éléments algébriques sont conjugués algébriques, s'ils ont le même polynôme minimal.

Exemple 2.4.
$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *et* $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ *sont conjugués, car ils sont racines d'un polynôme unitaire et irréductible qui est* X^2-X-1 *.*

Définition 2.5 (**Degré d'un nombre algébrique**)**.**
Soit α *un nombre algébrique sur* $\mathbb{Q}$ *et* P_α *son polynôme minimal. On appelle* ***degré*** *de* α *le degré de son polynôme minimal* P_α*.*

Exemple 2.5.

(a) $\sqrt{7}$ *est algébrique sur* $\mathbb{Q}$ *de degré 2 car* $P(x) = x^2 - 7$ *est le polynôme minimal de* $\sqrt{7}$ *sur* $\mathbb{Q}[x]$.

(b) *-3 est algébrique sur* $\mathbb{R}$ *de degré 1 car* $R(x) = x + 3$ *est le polynôme minimal sur* $\mathbb{R}[x]$.

(c) $i\sqrt{2}$ *est algébrique sur* $\mathbb{C}$ *de degré 1 car* $Q(x) = x - i\sqrt{2}$ *est un polynôme minimal de* $i\sqrt{2}$ *sur* $\mathbb{C}[x]$.

(d) $i\sqrt{2}$ *est algébrique sur* $\mathbb{R}$ *de degré 2 car* $Q(x) = x^2 + 2$ *est un polynôme minimal de* $i\sqrt{2}$ *sur* $\mathbb{R}[x]$.

Définition 2.6 (Entiers algébriques).
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, *on dit que* α *est un entier algébrique s'il existe un polynôme* $P \in \mathbb{Z}[x]$ ***unitaire*** *tel que* $P(\alpha) = 0$.

Théorème 2.1.
Soit α *un nombre algébrique sur* $\mathbb{Q}$ *, alors il existe* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $\beta = k\alpha$ *soit un entier algébrique.*

Démonstration.
Soit $P_\alpha(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{Q}[x]$, *le polynôme minimal de* α.
On a :

$$P_\alpha(\alpha) = \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_0 = 0.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$ *tel que :* $ka_0 = b_0,\ ka_1 = b_1, \ldots, ka_{n-1} = b_{n-1} \in \mathbb{Z}$. *En multipliant* P_α *par* k^n, *on aura*

$$k^n(\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_0) = 0,$$

donc

$$k^n\alpha^n + k^n a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + k^n a_0 = 0,$$

alors

$$k^n\alpha^n + k^{n-1}b_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + k^{n-1}b_0 = 0.$$

d'où

$$(\alpha k)^n + b_{n-1}(\alpha k)^{n-1} + k b_{n-2}(\alpha k)^{n-2} + \cdots + k^{n-1} b_0 = 0.$$

par conséquent $\beta = k\alpha$ *est un entier algébrique.* ■

Lemme 2.1.
Soit $P \in \mathbb{Z}[x_1,\, x_2, \ldots x_n]$ *un polynôme á coefficients dans l'anneau* $\mathbb{Z}$*. Soient :*

$$\begin{cases} \sigma_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \cdots + \alpha_n = \sum_{n=1}^{n} \alpha_i \;\; (\textit{ la somme des } \alpha_i) \\ \sigma_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \sum_{i<j} \alpha_j\alpha_i \;\; (\textit{ la somme des } \alpha_i\alpha_j). \\ \vdots \\ \sigma_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\alpha_{i_3} \ldots \alpha_{i_k} \;\; (\textit{ la somme des produits de k racines }). \\ \vdots \\ \sigma_n = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \ldots \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i \;\; (\textit{ le produit des}\, \alpha_i). \end{cases}$$

Alors $P(x_1, x_2, \ldots, \;, x_n)$ *peut s'écrire sous la forme d'un polynôme des* n *variables* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$*, à coefficients dans* $\mathbb{A}$*.*

Démonstration.
Pour la démonstration voir [1].

Proposition 2.2.
Si α *et* β *sont deux entiers algébriques alors* $\alpha + \beta$ *et* $\alpha\beta$ *sont des entiers algébriques.*

Démonstration.

1. ***Montrons que*** $(\alpha + \beta)$***est un entier algébrique***

   Soient P_α *et* P_β *les polynômes minimaux de* α *et* β*, avec* P_α *de degré* n *et* P_β *de degré* m*. Soient* $\beta_1 = \beta,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_m$ *les racines de* P_β *dans* $\mathbb{C}$*, alors* $P_\beta(x)$ *s'écrit sous la forme* $(P_{[\sigma]\beta})(x)$ *tel que :*

   $$(P_{[\sigma]\beta})(x) = x^m - \sigma_1 x^{m-1} + \sigma_2 x^{m-2} + \cdots + (-1)^m \sigma_m.$$

   avec $\sigma_1, \sigma_2, \ldots,\ \sigma_m$ *sont définis au lemme précédent,* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n \in \mathbb{Z}$*. On pose*

   $$Q(x) = P_\alpha(x - \beta) P_\alpha(x - \beta_2) \ldots P_\alpha(x - \beta_m)$$

on a bien $Q(\alpha+\beta)=0$ *et* $Q(x)$ *peut s'écrire sous forme* $(Q_{[\sigma]})(x)$, *alors* $Q(x)\in\mathbb{Z}[x]$. *D'où* $(\alpha+\beta)$ *est un entier algébrique.*

2. ***Montrons que*** $(\alpha\beta)$ ***est un entier algébrique :***
pour cela, on prend les polynômes minimaux P_α *et* P_β, *et on pose :*

$$R(x)=(\beta\beta_2.\ldots\beta_n)^n P_\alpha\left(\frac{x}{\beta}\right)P_\alpha\left(\frac{x}{\beta_2}\right)\ldots P_\alpha\left(\frac{x}{\beta_n}\right).$$

On a $R(\alpha\beta)=0$, *et* $R(x)$ *peut s'écrire sous forme* $R_{[\sigma]}(x)$ *alors* $R(x)\in\mathbb{Z}[x]$. *D'où* $\alpha\beta$ *est un entier algébrique.* ■

Théorème 2.2.
L'ensemble des nombres algébrique est un sous corps de $\mathbb{C}$.

Démonstration.

(1) ***Montrons que*** $\alpha+\beta$ ***est un nombre algébrique***.
Soient d *et* d' *les dénominateurs de* α *et* β, *posons* $m=ppcm(d,d')$,*(plus petit multiple commun de* α *et* β*), alors* $m\alpha$ *et* $m\beta$ *sont des entiers algébriques, donc* $m(\alpha+\beta)$ *est un entier algébrique (somme d'entiers algébrique). D'où* $(\alpha+\beta)$ *est algébrique.*

(2) ***Montrons que*** $\alpha\beta$ ***est un nombre algébrique.***
De même on montre que $\alpha\beta$ *est un entier algébrique, alors* $\alpha\beta$ *est nombre algébrique.*

(3) $\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ *est un nombre algébrique.*
on a. α *est algébrique alors il existe* $P\in\mathbb{Q}[x]$ *tel que*

$$p(\alpha)=a_1\alpha^n+a_2\alpha^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

On prend α^n *en facteur on aura*

$$\alpha^n\left[a_1+a_2\left(\frac{1}{\alpha}\right)+a_3\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+\cdots+a_n\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n\right]=0$$

d'où

$$a_1 + a_2\left(\frac{1}{\alpha}\right) + a_3\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \dot{+} a_n\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n = 0$$

donc $\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ *est un nombre algébrique.*

Comme $(\alpha+\beta)$,$\alpha\beta$ *et* $\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ *sont des nombres algébriques, donc l'ensemble des nombres algébriques est un sous corps de* $\mathbb{C}$. ■

Remarque 2.2.

(1) *Tout nombre rationnel est algébrique.*

(2) *Les nombres irrationnels sont soit algébriques ou transcendants.* ($\sqrt{2}$ *irrationnel algébrique,* π *irrationnel non algébrique).*

(3) *Si* $\alpha \in \mathbb{C}$ *un nombre algébriques alors* $\overline{\alpha}$ *est algébrique.*

2.2 La Dénombrabilité

Définition 2.7.
Un ensemble E *est dit* ***dénombrable****, s'il existe une bijection de* E *sur un sous ensemble* $\mathbb{N}$.

Remarque 2.3.
Notons que la définition précédente se reformule en : un ensemble E *est dénombrable s'il existe une injection* $E \hookrightarrow \mathbb{N}$, *on dit aussi qu'un tel ensemble s'injecte dans* $\mathbb{N}$.

Si $f : E \longrightarrow \mathbb{N}$ est injective alors toute partie de E s'injecte dans $\mathbb{N}$ (il suffit de considérer la restriction de $f_{|E}$). De la même façon si $i : F\ longrightarrowE$ est injective et E est dénombrable alors F est dénombrable. (Il suffit de considérer $f \circ i$.).

Proposition 2.3.
Si $f : E \longrightarrow F$ *est une application surjective et* E *est dénombrable alors* F *est dénombrable.*

Démonstration.

Comme f est surjective alors pour tout $y \in F$, le sous ensemble $f^{-1}(\{y\})$ est non vide. Définissons une fonction $g \ : F \ \longrightarrow \ E$ en associant pour chaque y de F un élément $g(y) \in f^{-1}(\{y\})$. On a donc trouvé une fonction de $g \ : \ F \ \longrightarrow \ E$ telle que $f \circ g = I_F$ qui est injective , on déduit donc g injective, d'où F est dénombrable.

Proposition 2.4.

*Tout ensemble **dénombrable** est soit fini soit en bijection avec $\mathbb{N}$.*

Démonstration.

Il suffit de démontrer que toute partie infini $E \subset \mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$. On construit une telle bijection par récurrence.

$$\begin{cases} f(0) = min\, E \\ f(1) = min(E - \{f(0)\}) \\ f(2) = min(E - \{f(0),\, f(1)\}) \\ \vdots \\ f(k) = min(E - \{f(0), f(1),\, f(2),\, \ldots,\, f(k-1)\}) \end{cases}$$

Les ensembles dont on prend les minimums ne sont jamais vides car E est infini. cette fonction définit une bijection entre $\mathbb{N}$ et E .$\blacksquare$

Exemple 2.6.

(1) L'ensemble $\mathbb{N}$ est lui même un ensemble dénombrable.

(2) L'ensemble $\mathbb{N}^k$, avec $k \in \mathbb{N}^*$, est dénombrable.

(3) Les ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont des ensembles dénombrables.

(4) $\mathbb{R}$ et tout intervalle de $\mathbb{R}$ ne sont pas dénombrables.

Lemme 2.2.

Un produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable : si $A_1, \cdots, A_k$ sont dénombrables, alors le produit $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$ est dénombrable.

Démonstration.

Pour $i \in \{1, \ldots, k\}$, *soit* $f_i : A_i \longrightarrow \mathbb{N}$ *une injection*

$$\begin{aligned} A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k &\longrightarrow \mathbb{N}^k \\ (a_1, \ldots, a_k) &\mapsto (f_1(a_1), \ldots, f_k(a_k)) \end{aligned}$$

est alors une injection. Comme $\mathbb{N}^k$ *est* ***dénombrable*** *alors* $A_1 \times \cdots \times A_k$ *l'est aussi.*

2.2.1 La dénombrabilité de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$

Proposition 2.5.

Les ensembles $\mathbb{Z}$ *et* $\mathbb{Q}$ *sont dénombrables.*

Démonstration.

1. *Soit* $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Z}$ *: définie par* $g(a,b) = (-1)^a b$ *une application surjective. Comme* $\mathbb{N}^2$ *est* ***dénombrable****, alors* $\mathbb{Z}$ *l'est aussi.*
2. *Soit* $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{Q}$ *: définie par* $h(a,b,c) = (-1)^a \frac{b}{c+1}$ *une application surjective. Comme* $\mathbb{N}^3$ *est* ***dénombrable****, alors* $\mathbb{Q}$ *est aussi* ***dénombrable****.*

Exemple 2.7.

L'ensemble des nombres relatifs $\mathbb{Z}$ *est dénombrable.*

Soit la fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$.

$$\begin{cases} 2x & si \quad x \geq 0 \\ \\ -(2x+1) & si \quad x < 0 \end{cases}$$

f *est à la fois injective et surjective donc elle est bijective.*

Alors $\mathbb{Z}$ *est* ***dénombrable****.*

Exemple 2.8.

L'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *est dénombrable.*

Soit

$$f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^*$$
$$(x, p) \to 2^x(2p+1)$$

f est une fonction bijective car elle est injective et surjective. Pour trouver une bijection de $\mathbb{N}^2$ de $\mathbb{N}$ il suffit de trouver une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$, on a

$$g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$$
$$y \to y - 1$$

g est bijective, donc, $g \circ f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ est bijective car g et f sont bijectives, d'où $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est ***dénombrable****.*

Exemple 2.9.
L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
Tout rationnel s'écrit de manière unique comme fraction réduite $x = \frac{p}{q}$ ou $q \geq 1$ et $p \wedge q = 1$ Soit l'application

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$$
$$x \mapsto f(x) = (p, q) = \frac{p}{q}$$

est injective, c'est une bijection sur son image, un sous ensemble de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Comme $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ est dénombrable alors $\mathbb{Q}$ est ***dénombrable****.*

2.2.2 Non dénombrabilité de $\mathbb{R}$

Pour la démonstration de la non dénombrabilité de $\mathbb{R}$, on utilise le lemme dit ***principe de Cantor***[1] *des intervalles emboités.*

Lemme 2.3 (Principe de Cantor des intervalles emboités). *Supposons qu'à tout entier naturel n, on associe un intervalle fermé $I_n = [a_n, b_n]$ tel que pour tout n, $I_n \supset I_{n+1}$. Alors $\cap_{n=0}^{\infty} I_n \neq \varnothing$.*

1. **Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor** (1845-1918) est mathématicien. Il a joué un rôle central dans la création de la théorie des ensembles.

Pour la démonstration de ce principe, voir [9]

Théorème 2.3. *[9]*
$\mathbb{R}$ *n'est pas dénombrable.*

2.2.3 La dénombrabilité de l'ensemble des nombres algébriques

Théorème 2.4.
l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

Démonstration.
Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.
On note par E_n *l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels de degré inférieur ou égal à* n *et* Y_n *l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels de degré égal à* n, *alors* E_n *peut s'écrire sous la forme de réunion d'ensemble*

$$E_n = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3 \cup \cdots \cup Y_i \cup \cdots \cup Y_n$$

Avec les Y_i *est l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels de degré égal à* i, *pour* $i = 1, \ldots, n$.
Et comme les Y_i *pour* $i = 1, \ldots, n$ *sont des sous-ensembles dénombrables alors* E_n *est dénombrable comme réunion de sous-ensembles dénombrables.*
On a chacun de ces polynômes possèdent au plus n *racines.*
Donc l'ensemble des nombres algébriques qui sont racines d'un polynôme de degré au plus n *sont dénombrables.*
D'où l'ensemble de tous les nombres algébriques est dénombrable, comme réunion d'ensembles dénombrables. ■

La Dénombrabilité des nombres algébriques et la non-dénombrabilité des nombres réels établira l'existence des nombres non algébriques qu'on appellera **les nombres transcendants**.

CHAPITRE 3

NOMBRES TRANSCENDANTS

Beaucoup de mathématiciens s'intéressaient à la théorie des nombres transcendants (non algébriques).
Avant **Joseph Liouville**, on pouvait croire que tous les nombres étaient algébriques, mais après lui en **1844**, il a montré l'existence des nombres non algébriques dits **transcendants** .

3.1 Définitions et propriétés

Définition 3.1.
*Un nombre α est dit **transcendant** s'il n'est pas algébrique.*
***Autrement dit** : Un nombre **transcendant** est un nombre irrationnel, réel ou complexe, qui ne peut pas être exprimé comme une racine d'une équation polynômiale.*

Remarque 3.1.
*Tous les nombres rationnels sont des nombres algébriques. Par contre, on peut trouver parmi les nombres irrationnels les nombres **transcendants**.*

Exemple 3.1.

(a) *Le nombre* $\sqrt{5}$ *est un nombre irrationnel, mais n'est pas transcendant, parce qu'il est solution de l'équation* $x^2 - 5 = 0$.

(b) *Les nombres* π, e *et* e^i *sont des nombres irrationnels transcendants (voir théorème 3.6).*

3.2 La transcendance de quelques nombres réels

3.2.1 Transcendance des nombres de Liouville

On donne une condition nécessaire due a **Liouville** pour qu'un nombre quelconque soit algébrique.

Théorème 3.1 (Liouville)**.**
Si α *est un nombre irrationnel algébrique alors il existe une constante* $C(\alpha)$ *telle que pour tout rationnel* $\frac{p}{q}$ *on ait :*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{C(\alpha)}{q^{deg(\alpha)}} \Rightarrow \mu(\alpha) \leq deg(\alpha).$$

Ce résultat a été améliore par Roth **Roth**[1] dans le théoréme suivant :

Théorème 3.2. ***(Roth)***
Pour tout nombre irrationnel algèbrique α *et pour tout* $\varepsilon > 0$, *l'inégalité*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$$

n'a qu'un nombre fini de solutions, c-à -d $\mu(\alpha) = 2$.

Ce théorème permet de montrer la transcendance de certains nombres.

1. **Klaus Friedrich Roth** (1925 - 2015) est un mathématicien britannique d'origine allemande qui a remporté la médaille Fields pour avoir prouvé le théorème de Roth sur l' approximation diophantienne des nombres algébriques .

Exemple 3.2. *[7] On montre que l'inéquation*

$$\left|e - \frac{p}{q}\right| < C\frac{log(log(q))}{q^2 log(q)}$$

a une infinité de solution si $C > \frac{1}{2}$*, mais un nombre fini de solution si* $C < \frac{1}{2}$*. On en déduit immédiatement que* $\mu(e) = 2$*.*

Théorème 3.3 (**Le critère d'algébricité de Liouville**).
Soit α *un nombre algébrique réel de* $\deg \geq 2$ *(donc irrationnel), alors il existe* $C > 0$ *telle que, pour tout rationnel* $\frac{p}{q}$*, on a :*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C}{q^n}$$

Démonstration.
Soit α *un nombre algébrique de degré* n *et soient deux entiers* $p \in \mathbb{Z}$ *et* $q \in \mathbb{N}^*$ *tels que* $r = \frac{p}{q} \neq \alpha$

- *Si n =1, alors* α *est rationnel, donc* $\alpha = \frac{a}{b}$ *avec* $a \in \mathbb{Z}$ *et* $b \in \mathbb{N}^*$*, alors* $|\alpha - r| = \left|\frac{a}{b} - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{aq-bp}{bq}\right| \geq \frac{1}{bq}$ *car le numérateur est un entier non nul et donc* $c(x) = \frac{1}{b}$ *convient.*

- *Si* $n > 1$*,* α *est alors racine d'un* $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ *à coefficients entiers irréductible dans* $\mathbb{Q}[X]$*, alors* $P(r) \neq 0$ *car* $P(x)$ *n'est pas divisible par* $qx - p$ *donc* $|P(r)| = \left|\frac{\alpha_0 q^n + \alpha_1 p q^{n-1} + \cdots + \alpha^n p^n}{q^n}\right| \geq \frac{1}{q^n}$ *car le numérateur est un entier non nul.*
  On pose $K = sup_{[\alpha-1,\alpha+1]}|P'(x)|$ *tels que* $K > 0$ *car le* $\deg(P') \geq 1$*. D'aprés l'inégalité des accroissements finis entre* α *et* $\frac{p}{q} \in [\alpha - 1, \alpha + 1]$ *on a*

  $$|P(\alpha) - P(r)| \leq K|\alpha - r| \quad \textit{(inégalité des accroissements finis)},$$

  et comme $P(\alpha) = 0$*, on aura* $\frac{1}{q^n} \leq |P(r)| \leq K|\alpha - r|$*.*
  On a alors deux cas :

(i) Pour $r \in [\alpha - 1, \alpha + 1]$, *on a* $|\alpha - r| \geq \frac{1}{Kq^n}$.

(ii) Pour $r \notin [\alpha - 1, \alpha + 1]$, *alors on a* $|\alpha - r| \geq 1 \geqslant \frac{1}{q^n}$.

Dans les deux cas, $C = min\left(1, \frac{1}{K}\right)$ *convient .* ■

Théorème 3.4 (**Liouville**).
Soit α *un nombre réel tel qu'il existe une suite strictement croissante* $\frac{p_n}{q_n}$ *des rationnels tels que :*

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^n}.$$

Alors α *est transcendant, un tel nombre est appelé nombre de* ***Liouville***.

Démonstration.
Supposons que α *est algébrique, alors il existe un entier* n *et un polynôme*

$$P(X) = a_n X^n + \cdots + a_X + a_0 \in \mathbb{Z}$$

dont α *est racine, alors pour tout rationnel* $\frac{p}{q}$ *assez proche de* α, $\frac{p}{q}$ *n'est pas racine de* P, *donc*

$$\left|p\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|\frac{a_n p^n + a_n q^{n-1} p + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n}{q^n}\right| = \frac{m}{q^n} \geq \frac{1}{q^n}.$$

Par le théorème des accroissements finis, on écrit :

$$\left|P(\alpha) - P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leq M\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \Longrightarrow \left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leq M\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|, car\ P(\alpha) = 0.$$

Alors

$$\frac{1}{q^n} \leq M\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|. \qquad \blacksquare$$

Remarque 3.2.
Le théorème précédent donne la transcendance de tous les nombres de la forme

$$\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{b^{n!}}$$

où b *est un entier* ≥ 2, *et* $(a_n)_{n \geq 0}$ *une suite d'entiers bornée.*

Exemple 3.3.
Considérons la série

$$\alpha = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{10^{n!}}$$

Montrons que cette série est un nombre de Liouville, pour $n \geq 1$*, on a*

$$\begin{aligned} \left| \alpha - \sum_{n \geq 0} \frac{1}{10^{n!}} \right| = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{10^{n}!} &\leq \frac{1}{10^{(k+1)!}} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots \right) \\ &< \frac{1}{(10^{(k)!})^k} . \frac{1}{10^{(k)!}} . \frac{10}{9} < \frac{1}{(10^{(k)!})^k} \end{aligned}$$

Si nous posons

$$\frac{p}{q} = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{10^{k!}}, q = 10^{k!}$$

On aura

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}$$

Donc α *est un nombre de Liouville.*

En utilisant le théorème suivant pour montrer la transcendance de e et π, c'est un cas particulier de **théorème de Lindemann** en 1882, et qui ensuite été rigoureusement démontré par **Weierstrass**.

3.2.2 Théorème de Lindemann-Weierstrass

Nous allons voir dans cette partie un théorème très fort indépendance algébrique, qui permet d'en déduire de nombreux nombres transcendants les plus connus, parmi lesquels e et π.

Théorème 3.5 (**Lindemann-Weierstrass**).
Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ *des nombres algébrique avec les* α_i *deux à deux distincts et les* b_i *non nuls, alors*

$$b_1 e^{\alpha_1} + b_2 e^{\alpha_2} + \dots + b_n e^{\alpha_n} \neq 0$$

Une démonstration de ce est dûe à F. Beukers, J.P.Bézivinet, P.Robba. Pour la démonstration, on peut voir [8]

3.2.2.1 Les résultats de théorème de Lindemann-Weierstrass

On peut alors citer quelques théorèmes qui découlent directement du paragraphe précédent, suivi à chaque fois de quelques exemples de nombres transcendants.

Théorème 3.6 (**Hermite-Lindemann**)**.**
Soit α un nombre algébrique non nul, alors e^{α} est transcendant.

Démonstration.
Supposons $b = e^{\alpha}$ algébrique alors, d'après le théorème de Lindemann-Weierstrass, $e^{\alpha} - b \neq 0$, ce qui est absurde. ■

On sait alors que e est transcendant, ainsi que $e^2, \sqrt{e}, e^{\sqrt{2}}$.
Et pour **La transcendance de** π, elle provient directement du théorème de Hermite-Lindemann.
En effet : Supposons que π soit algébrique, alors $i\pi$ est également, donc $e^{i\pi} = 1$ est transcendant ce qui est absurde.
Donc π **est transcendant**

La preuve du théorème de **Baker** a résolu le problème du nombre de classes égal à 1.

Théorème 3.7. ***(Baker*[2]*)***
Si α un reél positif different de 1, alors l'un au moins des deux nombres α et $\ln(\alpha)$ est transcendant

Démonstration.
Si α est algébrique, $\ln(\alpha)$ est transcendant, faute de quoi $e^{\ln(\alpha)} = \alpha$ serait

2. **Alan Baker**(1939-2018) est un mathématicien anglais , connu pour ses travaux sur les méthodes efficaces en théorie des nombres, en particulier celles découlant de la théorie transcendantale des nombres .

transcendant d'après le théorème de Hermite-Lindemann.
Sinon α ***est transcendant.*** ■

Exemple 3.4.
$\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ \ln(n)$ *est transcendant* $(\ln 2, \ln 3, \dots)$.

Théorème 3.8.
Si $\alpha \neq 0$ *est algébrique,* $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ *et* $\tan(\alpha)$ *sont transcendants.*

Démonstration.
Supposons $\sin(\alpha)$ *algébrique alors d'après le théorème de Lindemann-Weierstrass, comme* $i\alpha,\ -i\alpha,\ \frac{1}{2i}$ *sont algébriques*

$$\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} - \sin(\alpha) \neq 0$$

ce qui est absurde.
De même, supposons que $\cos(\alpha)$ *est algébrique alors d'après le théorème de Lindemann- Weierstrass*

$$\frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} - \cos(\alpha) \neq 0$$

ce qui est absurde.
Si $\tan(\alpha)$ *est algébrique donc* $\cos(\alpha)$ *est algébrique, d'où la contradiction.*
■

Exemple 3.5.
$\cos(\sqrt{2}),\ \cos(1),\ \sin(1),\ \tan(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ *sont tous des nombres transcendants.*

Théorème de **Gelfond-Schneider** prouve qu'une grande classe de nombres est constituée de nombres transcendants, cette classe reste dénombrable. Beaucoup de constantes mathématiques ne sont toujours pas connues pour être transcendantes, et dans certains cas, on ne sait même pas si elles sont rationnelles ou irrationnelles.

3.2.3 Théorème de Gelfond-Schneider

Ce théorème s'intéresse à montrer la transcendance d'une nouvelle classe de nombres du type α^β, et d'avoir quelque autre nombres mystérieux en ce qui concerne leur caractère algébrique ou non.

Théorème 3.9.
Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} - \{0,1\}$ ($\overline{\mathbb{Q}}$ *est la clôture algébrique de* $\mathbb{Q}$) *. Si* β *un nombre algébrique irrationnel alors* α^β *est transcendant.*

Démonstration.
Pour la démonstration voir [8]
On utilise ici la détermination principale du logarithme complexe, que l'on définit sur $\mathbb{C}$ *par :*

$$\log(\alpha) = \ln|\alpha| + i\arg\alpha$$

Ainsi,$\forall\alpha \in \mathbb{C}$ *et* $\forall\alpha \in \mathbb{C}$*, on a*

$$\alpha^\beta = e^{\beta\log\alpha}.$$

On peut déduire la transcendance de $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$*.*
De plus, $e^\pi = e^{-i\log(-1)} = (-1)^{-i}$ *est transcendant car* -1 *est algébrique et* $-i$ *est algébrique irrationnel.*

3.2.4 Autres nombres encore mystérieux

Les problèmes ouverts sont très nombreux dans les théorèmes des nombres transcendent, ne permettent pas de déterminer si certains nombres sont algébriques ou non.
Pour $e+\pi$, $e\pi$, $e-\pi$, $\frac{\pi}{e}$, $\frac{e}{\pi}$, e^e, π^π on ne sait pas s'ils sont algébriques ou non, d'ailleurs, on ne sait même pas s'ils sont tous irrationnels
Ce pendant, le fait que $\overline{\mathbb{Q}}$ est algébriquement clos fournit des résultats intéressants.

Théorème 3.10.
Soit α et β deux nombres transcendants, alors l'un au moins des deux nombres $\alpha\beta$ et $\alpha + \beta$ est transcendant.

Démonstration.
Supposons le contraire

$$P(x) = x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta \in \overline{\mathbb{Q}}[X].$$

Or

$$P(x) = (x - \alpha)(x - \beta).$$

Et $\overline{\mathbb{Q}}$ algébriquement clos, donc $(\alpha, \beta) \in \overline{\mathbb{Q}}^2$
Ainsi, bien qu'on ne sache rien sur $e + \pi$ et $e\pi$ on peut être sÃr que l'un au moins de ces deux nombres est transcendant. ■

3.3 La non dénombrabilité des nombres transcendants

Lorsque l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable et $\mathbb{R}$ étant non dénombrable, on en déduit en procédant par absurde que l'ensemble des nombres réels transcendants est non dénombrable. Cantor a montré l'existence des nombres transcendants en réussissant à en exhiber seulement de manière implicite.
En effet, partant du fait que $\overline{Q} \cap [0, 1]$ est dénombrable, on peut lister ces éléments en écrivant sur chaque ligne d'un tableau infini leur développement en base 10 (par exemple à noter que si un nombre admet deux développements différents comme 0.1 et 0.0999..., chacun occupera une ligne distincte). Notons a_{ij}, les éléments de ce tableau. Considérons alors $b = 0, b_1b_2 \dots b_n$ avec $b_i \neq a_{ii}$. Alors b est transcendant, car si l'on suppose le contraire, il existe k tel que le développement de b soit sur la $k^{\text{ième}}$ ligne, et donc cela contredit $b_k \neq a_{kk}$. On a ainsi expliqué le procédé dit de la diagonale de

Cantor.

On rappelle ici le principe de la diagonale de Cantor.
La méthode diagonale de Cantor est une technique utilisée pour démontrer la non-dénombrabilité d'un ensemble. Elle a été développée par le mathématicien Georg Cantor pour prouver que certains ensembles infinis sont plus grands que d'autres en terme de cardinalité.

La méthode diagonale de Cantor peut être appliquée dans le contexte de listes ou d'énumérations infinies d'éléments d'un ensemble donné. Voici les étapes générales de la méthode diagonale de Cantor :

Supposons par l'absurde que l'ensemble en question est dénombrable, c'est-à-dire qu'il peut être énuméré de manière exhaustive sous forme d'une liste infinie.

Considérons cette liste comme une matrice infinie, où chaque élément de la liste est placé dans une cellule correspondante. Par exemple, si nous avons une liste de nombres réels entre 0 et 1, nous pouvons les organiser dans une matrice infinie.

Maintenant, nous allons construire un nouvel élément qui est garanti de ne pas figurer dans la liste énumérée. Pour ce faire, nous choisissons soigneusement chaque composante de l'élément en utilisant la diagonale de la matrice.

Pour la première composante du nouvel élément, nous choisissons un élément différent de celui de la première ligne de la matrice. Par exemple, si le premier élément de la première ligne est 0.3245, nous pouvons choisir une valeur différente, comme 0.7, pour la première composante du nouvel élément.

De même, pour la deuxième composante, nous choisissons un élément différent de celui de la deuxiéme ligne de la matrice. Nous continuons ce processus pour chaque composante, en choisissant à chaque fois un élément différent de celui de la diagonale.

Ainsi, nous avons construit un nouvel élément qui ne figure pas dans la matrice.

CONCLUSION

Depuis la fin du $XIX^{\text{ème}}$ siècle, la théorie des nombres transcendents a connu un développement considérable. Des mathématiciens tels que CH. Hermite et F. Lindemann ont établi respectivement la transcendance de e et π. Par la suite, la transcendance de $\ln \alpha$ (où α est un nombre algébrique différent de 0 ou 1), α^β(où α est un nombre algébrique différent de 0) et e^α (où α est un nombre algébrique irrationnel) a été démontrée. Ces résultats ont été obtenus par Gelfond et Schneider dans les années 30. Notons que e^π est transcendant, car $e^\pi = i^{(-2i)}$...

Bien que de nombreux résultats aient été obtenus sur la transcendance de plusieurs nombres, il reste encore de nombreux nombres dont la transcendance n'a pas été démontrée, tels que $\pi^e, e+\pi, e\pi$, ainsi que la constante d'Euler γ, définie comme la limite de la somme de $1/k$ moins $\ln(n)$ lorsque n tend vers l'infini.

La théorie des nombres transcendents connaît aujourd'hui un essor important grâce aux travaux profonds de nombreux mathématiciens tels que A. Baker, W.D. Brownawell, S. Lang, K. Mahler, D. Masser, K.F. Roth, W. Schmidt, M. Waldschmidt et bien d'autres.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Daniel Duverney, Théorie des nombres, DUNOD, paris 1998

[2] E. Lebeau, Nombres irrationnels-Nombres transcendants,Le journal de maths des élevés, Volume 1 (1995).

[3] J.Liouville, sur des classe très étendues de quantité dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques, J. Math.Pures Appl.16(1851), 133-142.

[4] P.Pansu, Dénombrabilité, 14 mai 2005

[5] G.H.Hardy et E.M.Wright, An introduction to the theory of numbers, 3ème édition, Oxfords, 1954

[6] S.Fischler, Mesures d'irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$, (14 juin 2002)

[7] Y.V.Nesterenko et N.I.Fel'dman, Number Theory IV, Transcendental Numbers,A.N.Parshin et I.R.Shafarevich eds, Encyclopaedia of Mathematical sciences 44, Springer,1998

[8] L. Vector, Les nombres transcendants. TIPE ENS

[9] K. Allab, Élément d'analyse, OPU, 1986