

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Université A.Mira de Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques



Mémoire

En vue de l'Obtention du Diplôme de

Master en Mathématiques

Option : Probabilités Statistique et Applications

Thème

Synthèse sur les propriétés asymptotiques des
modèles de long mémoire

Présenté par :

Chikhi Yasmine

Soutenue le 22 Juin 2023 devant le jury composé de :

Mme. Karima Lagha	Présidente	Professeur	Univ. Béjaïa
Mme. Karima Timeridjine	Rapporteur	Professeur	Univ. Béjaïa
Mr. Djillali Seba	Examineur	Dr	Univ. Béjaïa

Remerciements

Nous tenons à remercier toutes les personnes qui ont contribué lors de la rédaction de ce mémoire pour ce fait :

Nous adressons nos sincères remerciements à Madame Karima Timeridjine (Professeur à l'Université de Bejaia) de nous avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.

Nous remercions vivement madame Karima Lagha (Professeur à l'Université de Bejaia) d'avoir accepté présider le jury.

Nous tenons aussi à remercier chaleureusement monsieur Seba Djillali (Docteur à l'Université de Bejaia) d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Nous remercions également mademoiselle Nesrine Benaklef pour son aide.

Enfin, nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à toutes les personnes qui nous ont soutenu et encouragé depuis toujours.

Dédicaces

Je dédie ce travail avec ma profonde gratitude :

à mon père,

à ma mère,

qui m'ont soutenu et encouragé depuis toujours,

à mon frère et ma soeur,

à toute ma famille,

à mes amis.

Yasmine Chikhi

Table des matières

Table des figures	v
Liste des tableaux	vi
Notations et symboles	vii
Introduction Générale	1
1 Généralités	4
1.1 Outils mathématiques	4
1.2 Notions fondamentales sur les processus	12
2 Processus autoregressif fractionnaire d'ordre 1 ($FAR(1)$)	36
2.1 Processus $FAR(1)$ à long mémoire	37
2.2 Causalité	37
2.3 Inversibilité	38
2.4 Fonction d'autocovariance	39
2.5 Fonction d'autocorrélation	41
3 Processus fractionnaire à long mémoire avec erreurs mélangeantes	42
3.1 Modèle	42
3.2 Causalité et inversibilité	43
3.3 Comportement d'un processus fractionnaire à long mémoire avec des erreurs mélangeantes	43
4 Modèle longue mémoire à coefficients périodiques	48
4.1 Modèle	49
4.2 Inversibilité et causalité	50
4.3 Propriétés asymptotiques du modèle longue mémoire à coefficients périodiques	50

4.4	Fonction d'autocovariance	51
4.5	Comportement asymptotique de la fonction d'autocorrélation du modèle longue mémoire à coefficients périodiques	55
5	Simulations	58
5.1	Simulation de $FAR(1)$ avec erreurs indépendantes	58
5.2	Simulation de $FAR(1)$ avec erreurs mélangeants	60
5.3	Simulation de $FAR(1)$ à coefficients périodiques	62
	Conclusion Générale	65
	Bibliographie	65

Table des figures

1.1	Corrélogramme d'un processus AR(2)	23
1.2	Corrélogramme partiel d'un processus AR(2)	23
1.3	Corrélogramme d'un processus MA(2)	28
1.4	Corrélogramme partiel d'un processus MA(2)	28
1.5	Corrélogramme d'un processus ARMA(1,1)	34
1.6	Corrélogramme partiel d'un processus ARMA(1,1)	34
5.1	L'autocorrélation d'un $FAR(1)$ avec des erreurs indépendantes pour $d = (0, 25; 0, 35; 0, 45)$ 59	
5.2	L'autocorrélation d'un $FAR(1)$ avec erreurs mélangeants	61
5.3	L'autocorrélation d'un $FAR(1)$ à coefficients périodiques pour $p=2$ et différentes valeurs de d	63

Liste des tableaux

5.1	L'autocorrélation d'un $FAR(1)$ avec des erreurs indépendantes pour $d = (0, 25; 0, 35; 0, 45)$	59
5.2	L'autocorrélation d'un $FAR(1)$ avec erreurs mélangeants pour différentes valeurs de d et α	60
5.3	L'autocorrélation d'un $FAR(1)$ à coefficients périodiques pour $p = 2$ et différentes valeurs de d	62

Notations et symboles

$\Gamma(\cdot)$ \longrightarrow Fonction gamma.

$I(\cdot)$ \longrightarrow Fonction indicatrice.

\mathbb{N} \longrightarrow Ensemble des entiers naturels.

\mathbb{Z} \longrightarrow Ensemble des entiers relatifs.

\equiv \longrightarrow Relation de congruence.

iid \longrightarrow Indépendant et identiquement distribuées.

Introduction Générale

Depuis toujours, les phénomènes évoluant au fil du temps ont suscité l'intérêt de l'homme en vue de pouvoir anticiper l'avenir. Cela a conduit les chercheurs à introduire la notion de série chronologique. Une série chronologique consiste en un ensemble d'observations de ces phénomènes, indexées en fonction du temps. Elle est largement utilisée dans divers domaines tels que l'astronomie, la météorologie, la théorie du signal, la biologie, l'économie, et bien d'autres.

Les processus stochastiques, également connus sous le nom de séries chronologiques, peuvent être classés en deux catégories en fonction du comportement de leurs fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation. Il existe les processus à court terme ou à courte mémoire, qui se caractérisent par une décroissance rapide (exponentielle) vers zéro de leurs fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation. Ensuite, il y a les processus à long terme ou à longue mémoire, qui se distinguent par une décroissance plus lente (hyperbolique) vers zéro de leurs fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation.

Dans le but de comprendre et de prédire les valeurs futures des séries chronologiques, Box et Jenkins (1970) [6] ont introduit le modèle ARMA. Ce modèle est une combinaison de deux parties ou de deux processus : le processus autorégressif (AR) et le processus à moyenne mobile (MA), qui ont été introduits respectivement par Yule et Slutsky en 1927 [37][11]. Box et Jenkins [6] ont introduit cette combinaison dans le but d'estimer au mieux les paramètres nécessaires pour modéliser une classe extrêmement large de séries rencontrées dans la pratique. Malgré sa large applicabilité, certaines difficultés peuvent survenir lors de son utilisation, que ce soit au niveau de l'estimation des paramètres ou de l'adéquation à la réalité.

Deux exemples classiques de telles difficultés sont les suivants : tout d'abord, les paramètres p , d et q sont des valeurs entières, mais souvent, les praticiens continuent à les estimer de manière empirique. Ensuite, une autre difficulté fréquemment rencontrée concerne la description des séries non stationnaires. Généralement, on travaille avec la série différenciée pour la rendre stationnaire, rendant ainsi le modèle ARMA applicable. Cependant, cette approche n'est pas toujours appropriée si la série initiale, bien que stationnaire, présente des corrélations "assez fortes" entre les observations passées et futures, même à long terme.

Pour remédier à ces difficultés, Grange et Joyeux (1980)[15] ainsi qu'Hosking (1981)[16] ont introduit les modèles ARIMA à différenciation fractionnaire afin de décrire le comportement de mémoire de certaines séries chronologiques, qu'elles soient courtes ou longues.

La notion de mémoire à long terme est apparue au début des années 1950, principalement pour l'étude du comportement inhabituel des niveaux du fleuve Nil en Égypte par Hurst (1951). Ces travaux ont par la suite été approfondis par Mandelbrot (1965, 1972) [30] [31], et plus tard par Kashyap et Eom (1988). Le type de comportement induit par un processus à longue mémoire a été observé dans divers domaines depuis un certain temps. Cela inclut certaines anomalies relevées dans des données astronomiques (Newcomb (1886), Karl-Pearson (1902), Jeffrey (1939)), des séries de données chimiques (Student (1927)), des données agricoles (Smith (1938), Whittle (1956, 1962)), et des données d'origine textile (Cox et Townsend (1948)). Cependant, le domaine qui a véritablement contribué au développement rapide de l'utilisation des séries à longue mémoire en statistique est lié à l'étude du "phénomène de Hurst" et est associé à l'hydrologie. On peut se référer aux nombreux travaux de Hurst (1951), Mandelbrot et Taqqu (1979), ainsi que McLeod et Hipel (1978).

En modélisation, il est souvent peu réaliste de supposer l'indépendance des erreurs. L'hypothèse d'indépendance est une simplification de la réalité, car elle ne reflète pas avec précision le comportement d'un processus aléatoire. En effet, les observations dépendantes offrent une meilleure adéquation à la réalité. Rosenblatt a introduit la notion de mélange fort, une mesure de dépendance qui capture avec précision les caractéristiques complexes et les comportements non linéaires des données temporelles. Cette notion offre une flexibilité supplémentaire pour modéliser les dépendances entre les observations.

Généralement, les modèles statistiques sont caractérisés par la stationnarité, ce qui a poussé les chercheurs à considérer la non-stationnarité. Parmi les formes spécifiques de non-stationnarité, la périodicité a été introduite pour la première fois par Gladyshev. Dans ce contexte, la particularité d'un modèle à longue mémoire périodique réside dans la présence de fluctuations périodiques régulières. Cela signifie que les observations de la série chronologique se répètent de manière régulière sur une période spécifiée. Cette période est souvent déterminée par un paramètre de périodicité, qui contrôle la longueur du motif récurrent. Ce phénomène de longue mémoire, qui se manifeste par

la présence de "cycles" de toutes périodicités, se rencontre dans de nombreuses disciplines proches de la physique (par exemple Taqqu (1981), Jonas-Lasinio (1977), Newman (1981), Frolich (1983)).

Notre travail consiste à l'étude temporelle des processus à longue mémoire dans trois cas différents. Dans le premier cas, le processus des innovations est indépendant, et nous cherchons à comprendre l'impact du paramètre de mémoire sur le comportement de la fonction d'autocorrélation. Dans le deuxième cas, le processus des innovations est mélangeant, comme étudié par Haddad.S dans le cadre de sa thèse de doctorat, et notre objectif est de mettre en évidence l'effet du mélange sur le comportement de la fonction d'autocorrélation. Enfin, dans le troisième cas, les coefficients du processus à longue mémoire sont périodiques, comme étudié par Amimour.A dans le cadre de sa thèse de doctorat. Selon la valeur du coefficient de mémoire, nous analysons le comportement de la fonction d'autocorrélation.

Pour atteindre ces objectifs, notre travail est organisé comme suit :

Chapitre 1 : Rappels sur différentes notions utilisées dans les chapitres suivants, telles que le mélange. Et une étude générale des processus et présentation de certains des modèles stochastiques les plus couramment étudiés en pratique, qu'ils soient à courte ou à longue mémoire.

Chapitre 2 : Présentation du modèle à longue mémoire fractionnaire avec des innovations indépendantes, notamment en abordant la causalité, l'invisibilité, la fonction d'autocovariance et la fonction d'autocorrélation. Nous analysons également le comportement asymptotique de ce modèle à l'aide de sa fonction d'autocorrélation.

Chapitre 3 : Traitement du cas des processus fractionnaires lorsque le processus des innovations est mélangeant. Nous commençons par présenter le modèle, puis nous étudions son comportement asymptotique en utilisant sa fonction d'autocorrélation.

Chapitre 4 : Introduction du modèle à longue mémoire à coefficients périodiques, en commençant par sa présentation. Nous analysons ensuite le comportement asymptotique du modèle, en mettant en évidence les garanties fournies par l'étude de ses fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation.

Chapitre 5 : Illustration des résultats développés dans les sections précédentes à l'aide de réalisations pratiques réalisées avec le logiciel R.

Chapitre 1

Généralités

1.1 Outils mathématiques

Dans ce chapitre nous présentons quelques éléments mathématiques tels que des inégalités et définitions qui sont utiles dans les chapitres suivants.

1.1.1 Opérateur retard

on appelle opérateur retard L l'opérateur qui associe à un processus $X_t, t \in \mathbb{Z}$ et le décale une unité de temps vers le passé :

$$L(X_t) = X_{t-1}, t \in \mathbb{T}$$

Cet opérateur est :

- linéaire
- inversible et son inverse est L^{-1} est appelé l'opérateur avance :

$$L^{-1}(X_t) = X_{t+1}$$

On peut décaler le processus X_t de k unité de temps on aura :

$$L^k(X_t) = X_{t-k}, t \in T, k \in \mathbb{N}$$

comme on peut avancer le processus X_t de k unité de temps on aura :

$$L^{-k}(X_t) = X_{t+k}, t \in T, k \in \mathbb{N}$$

1.1.2 Opérateur de différentiation

L'opérateur ∇ fait la différence entre le processus et sa version décalée de d unité de temps, défini par :

$$\nabla^d X_t = (1 - L)^d X_t$$

L'opérateur de différentiation ∇ à l'ordre 1 est obtenu par :

$$\nabla X_t = (1 - L)X_t = X_t - LX_t = X_t - X_{t-1}$$

1.1.3 Variables mélangeantes

En exploitant les diverses caractérisations de l'indépendance, on peut construire plusieurs formes de dépendance, parmi lesquelles la notion de mélange (qui représente un phénomène de dépendance faible) sous ses différents aspects, revêt un intérêt particulier.

Les différentes notions de mélanges sont reliées à des mesures de dépendances entre sous σ -algèbres, variables aléatoires ou processus. Plus précisément soit (Ω, F, P) un espace probabilisé et A et B deux sous σ -algèbres de F , diverses mesures de dépendance entre A et B ont été définies. Nous allons d'abord, définir les différents mélanges entre σ -algèbres[22].

Coefficients de dépendance

Les différentes mesures de dépendance entre deux σ -algèbres \mathbf{A} et \mathbf{B} sont définies comme suit[34] :

— α mélange ou mélange fort

$$\alpha(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sup\{|P(A)P(B) - P(A \cap B)|, A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{B}\} \quad (1.1)$$

Le coefficient α est le coefficient de mélange fort introduit par Rosenblatt [34].

— β mélange

$$\beta(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = E \sup\{|P(B/A) - P(B)|, A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{B}\} \quad (1.2)$$

Le coefficient β est le coefficient de régularisation absolue introduit par Kolmogorov et Rosanov [26] . Il s'écrit sous la forme :

$$\beta(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sup\left\{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J |P(A_i)P(B_j) - P(A_i \cap B_j)|, A_i \in \mathbf{A}, B_j \in \mathbf{B}\right\} \quad (1.3)$$

— ϕ mélange

$$\phi(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sup\left\{|P(B) - \frac{P(A \cap B)}{P(A)}|, A \in \mathbf{A} \text{ et } P(A) \neq 0, B \in \mathbf{B}\right\} \quad (1.4)$$

Le coefficient ϕ est le coefficient de mélange uniforme introduit par Ibragimov [24]. Il s'écrit sous la forme suivante :

$$\phi(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sup\{|P(B/A) - P(B)|, A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{B}\} \quad (1.5)$$

— ψ mélange

$$\psi(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sup\left\{\left|1 - \frac{P(A \cap B)}{P(A)P(B)}\right|, A \in \mathbf{A} \text{ et } P(A) \neq 0, B \in \mathbf{B}, P(B) \neq 0\right\} \quad (1.6)$$

Le coefficient ψ est introduit par Blum, Hanson et Koopmans [5]. Il s'écrit sous la forme suivante :

$$\psi(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sup\left\{\frac{1}{P(B)}|P(B/A) - P(B)|, A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{B}, P(B) \neq 0\right\} \quad (1.7)$$

— ρ mélange

$$\rho(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sup\{|corr(X, Y) - 1|, X \in L^2(\mathbf{A}), Y \in L^2(\mathbf{B})\} \quad (1.8)$$

Le coefficient ρ est le coefficient des corrélations maximales introduit par Hirschfeld [21] et Gebelein [19]

Propriétés Les coefficients de mélange précédents sont définies par les inégalités suivantes :

$$0 \leq \alpha(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \leq \frac{1}{4}$$

$$0 \leq \phi(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \leq 1$$

$$0 \leq \psi(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \leq \infty$$

$$0 \leq \rho(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \leq 1$$

De plus, si l'un d'eux est nulle, les σ -algèbres \mathbf{A} et \mathbf{B} sont indépendants.

Proposition 1. *Les coefficients de dépendance vérifient les inégalités suivantes : [9]*

$$4\alpha(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \leq \rho(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \leq 2\sqrt{\phi(\mathbf{A}, \mathbf{B})\phi(\mathbf{B}, \mathbf{A})} \leq \psi(\mathbf{A}, \mathbf{B})$$

$$2\alpha(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \leq \beta(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \leq \phi(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \leq \frac{1}{2}\psi(\mathbf{A}, \mathbf{B})$$

Preuve

Pour les démonstrations on peut se référer a [9]

Inégalités de covariance Soient \mathbf{A} et \mathbf{B} deux tribus. Soient X une variable \mathbf{A} -mesurable et Y une variable \mathbf{B} -mesurable, alors [9]

$$|Cov(X, Y)| \leq 8\alpha^{\frac{1}{r}}(\mathbf{A}, \mathbf{B})\|X\|_P\|Y\|_q$$

$$|Cov(X, Y)| \leq 2\phi^{\frac{1}{2}}(\mathbf{A}, \mathbf{B})\|X\|_P\|Y\|_q$$

$$|Cov(X, Y)| \leq \psi(\mathbf{A}, \mathbf{B})\|X\|_1\|Y\|_1$$

$$|Cov(X, Y)| \leq \rho(\mathbf{A}, \mathbf{B})\|X\|_2\|Y\|_2$$

Avec

$$p, q \text{ et } r > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1 \text{ et } \|X\|_P = (E|X|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Champ mélangeant

Définition 1. *Un champ aléatoire est une suite de variable aléatoire X_i indexée par Z^d . Pour tout $I \subset Z^d$ on notera X_I pour la suite $(X_i)_{i \in I}$.*

Soit $X = (X_i)_{i \in T}$ un champ aléatoire, où T est un espace métrique. On note par $X_C = \{X_t, t \in C\}$ la C -martingale de X , et par χ_C la σ -algèbre engendrée par X_C pour $C \subset T, |C|$ représente le cardinale de C s'il est fini [9]. Et soient A et B deux sous ensemble de C .

On note par c le coefficient de mélange $\alpha, \beta, \phi, \rho$ ou ψ

$$c_X(A, B) = c(\chi_A, \chi_B)$$

Et pour des entiers u et v

$$c_X(k, u, v) = \sup\{|c_X(A, B)|, d(A, B) \geq k, |A| < u, |B| < v\}$$

Définition 2. On dit qu'un champ aléatoire $X = (X_i), i \in T$ est c -mélangeant pour $c = \alpha, \beta, \phi, \rho$ ou ψ si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_X(k, u, v) = 0$$

pour u et v des entiers positifs ou nuls.

Théorème 1.1.1. Si $X = (X_i), i \in \mathbb{Z}^d$ est un champ aléatoire strictement stationnaire pour $d \neq 1$, alors [9]

$$\alpha_X(k, \infty, \infty) \leq \rho_X(k, \infty, \infty) \leq 2\pi\alpha_X(k, \infty, \infty)$$

Processus mélangeant

Si T est ordonné, par exemple $T \subset \mathbb{Z}$, une autre notion de mélange peut être définie pour le processus $X = (X_i), i \in T$ [9]. Soit

$$c_{X,k,u,v} = \sup_{A,B} \{c_X(A, B)\}$$

Avec

$$|A| \leq u, |B| \leq v, a \leq b + k \text{ si } a \in A, b \in B.$$

Le processus X est dit c -mélangeant si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_{X,k,u,v} = 0, \quad \forall u, v \geq 0$$

Avec $c = \alpha, \beta, \phi, \rho$ ou ψ

En générale, le coefficient de mélange ne dépend pas de u ou v , on peut alors écrire

$$c_{X,k} = \sup\{c_{X,k,u,v}; u; v \geq 0\}$$

Remarque 1.1.1. — Une suite aléatoire β -mélangeante est un champ α -mélangeant [9].

— Une suite aléatoire ψ -mélangeante est un champ ϕ -mélangeant [9].

Suites de mélange fort

Dans cette section, nous allons nous intéresser au mélange fort ou α -mélange de suites de variables aléatoires.

Définition 3. Une suite de variables aléatoires $(X_k, k \in \mathbb{Z})$ est dite α -mélangeante [22] :
si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$$

Avec

$$\alpha_k = \sup_{A \in Q_u^{-\infty}, B \in Q_{u+k}^{+\infty}} \{|P(A \cap B) - P(A)P(B)|\}$$

On distingue principalement deux sous-classes de variables aléatoires α -mélangeantes [9].

Définition 4. Une suite de variables aléatoires $(X_k, k \in \mathbb{Z})$ est dite arithmétiquement (respectivement algébriquement) α -mélangeante avec un taux a [22] si

$$\exists C > 0, \alpha_k \leq Ck^{-a}$$

Elle est dite géométriquement α -mélangeante si

$$\exists C > 0, \exists k \in [0, 1] \alpha_k \leq Ck^{-a}$$

Proposition 2. On suppose que Ω' est un espace semi normé, on a

- $(\varepsilon_k, k \in \mathbb{Z})$ est α -mélangeante $\implies (\|\varepsilon_k\|, k \in \mathbb{Z})$ est α -mélangeante.
- $(\varepsilon_k, k \in \mathbb{Z})$ est géométriquement α -mélangeante (respectivement arithmétiquement α -mélangeante) $\implies (\|\varepsilon_k\|, k \in \mathbb{Z})$ est géométriquement α -mélangeante (respectivement arithmétiquement α -mélangeante) de même ordre [10].

Remarque 1.1.2. — On a le même résultat si on remplace la semi norme par une semi métrique.

- Si $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite α -mélangeante alors $(f(X_n))_{n \geq 1}$ est aussi α -mélangeante pour toute fonction mesurable f [10].

1.1.4 Définitions et Inégalités

Inégalité de Davydov

L'inégalité de Davydov dans le cas mélangeant est donnée par [24] :

Pour $i \neq j$

$$|\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)| \leq c\alpha(|i - j|)$$

Où c : une constante.

Approximation de Stirling

L'approximation de Stirling (1733) est donnée par

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^{n+1/2} e^{-n} \sqrt{2\pi}$$

Formule de Sheppard

Soient $a, b \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{N}$ on a l'approximation suivante quand $j \rightarrow \infty$

$$\frac{\Gamma(j+a)}{\Gamma(j+b)} \sim j^{a-b}$$

(déduite de l'approximation de Stirling)

Fonction indicatrice

Si A et B sont deux ensembles, tels que A est inclus dans B , on appelle fonction indicatrice de A , la fonction I_A , définie sur B , telle que [1] :

- $I_A(x) = 1$, si x est dans A .
- $I_A(x) = 0$, si x n'est pas dans A .

Propriétés des espérances

- [1]
- Si $X = c \implies E(X) = c$.
 - Si $X \leq Y \implies E(X) \leq E(Y)$.
 - Pour $a, b \in \mathbb{R}$ on a $E(aX + bY) = aE(X) + bE(y)$.
 - Pour tout évènement A , $E(I_A) = P(A)$

Lemme de Fatou

[27]

Lemme 1.1.1. *Pour $X_n \geq 0$*

$$E\left[\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n\right] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E[X_n]$$

Convergence monotone

Théorème 1.1.2. *Soit $(X_n, n \geq 0)$ une suite croissante de variables aléatoires positives, qui converge en probabilité vers une variable X c'est à dire [27]*

$$\forall \epsilon > 0, P\{|X_n - X| > \epsilon\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Notée

$$X_n \xrightarrow{P} X$$

Alors

$$E[X_n] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[X]$$

Critère de Cauchy

Théorème 1.1.3. *Une série numérique $\sum_{n \geq 1} a_n$ est convergente si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy [1] :*

Si $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq N, \forall q \geq p$ on a

$$\left| \sum_{n=p}^q a_n \right| \leq \epsilon$$

Les espaces L^p

L^p sont les espaces des variables aléatoires de puissance p intégrable, pour $1 \leq p < \infty$ [27] tel que :

$$E[|X|^p] < \infty$$

Inégalité de Hölder

[27]

Théorème 1.1.4. Soient $X \in L^{p_1}, Y \in L^{p_2}$ avec $p_1, p_2 \in [1, +\infty]$ tel que $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1$ alors $XY \in L^1$, et

$$E[|XY|] \leq E[|X|^{p_1}]^{\frac{1}{p_1}} \times E[|Y|^{p_2}]^{\frac{1}{p_2}}$$

Inégalité de Cauchy-Shwarz

[27]

Corollaire Si $X, Y \in L^2$ alors $XY \in L^1$ et

$$E[|XY|] \leq \sqrt{E[X^2]E[Y^2]}$$

Inégalité de Chebyshev

[1]

Théorème 1.1.5. Soient X une variable aléatoire positive et g une fonction croissante positive sur \mathbb{R}^+ [1], alors pour tout $a > 0$

$$P\{X \geq a\} \leq \frac{E[g(X)]}{g(a)}$$

Fonction Gamma $\Gamma(\cdot)$

$$\Gamma(z) = \begin{cases} \int_0^\infty s^{z-1} e^{-s} ds & z > 0 \\ \infty & z = 0 \end{cases}$$

Pour $z < 0$, $\Gamma(z)$ est défini par la formule de récurrence

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z + 1)$$

1.2 Notions fondamentales sur les processus

Introduction

La théorie des séries chronologiques abordée dans ce chapitre est appliquée de nos jours dans des domaines aussi variés que l'économétrie, la médecine ...etc. Dans le but de comprendre et prédire les valeurs futures des séries chronologiques Box et Jenkins (1970) [6] ont introduit les processus *ARMA* (autoregressive moving average) qui sont des modèles de séries chronologiques largement

utilisés pour modéliser les données qui présentent des structures à court terme. Les modèles *ARMA* combinent des éléments d'autorégression (*AR*) introduite par Yul(1927) [37] et de moyenne mobile (*MA*) introduite par Slutsky (1927) [11] pour capturer les modèles de dépendance temporelle dans les données.

Dans ce chapitre, la première partie est consacrée à la présentation de quelques éléments sur les séries chronologiques, tandis que la deuxième partie est réservée à l'étude de certains processus tels que *AR*, *MA*, *ARIMA* et *FARIMA*.

1.2.1 Processus aléatoire

Définition 5. *Un processus aléatoire (ou stochastique) peut être défini de deux façons :*

- *Comme une application définie de l'espace des événements noté S dans un espace de fonctions de variable réelle (temps) noté F [2] :*

$$X_t : \begin{array}{l} S \longrightarrow F \\ \omega \longmapsto \{X_t, t \in \mathbb{N}\} \end{array}$$

Où à chaque événement élémentaire fait correspondre une fonction du temps ;

- *Où bien comme une collection de variables aléatoires indexées :*

$$\{X_t, t \in \mathbb{T}\}$$

Où X_t est une variable aléatoire pour chaque t .

Remarque 1.2.1. — *Si $T \subset \mathbb{Z}$ on dit le processus est à temps discret.*

- *Si T est un intervalle à valeurs réelles, on dit que c'est un processus continu.*
- *L'observation de n instants d'un processus stochastique est dite série chronologique .*

Série chronologique

Une série chronologique, également appelée série temporelle, est une séquence de valeurs numériques représentant l'évolution d'une quantité spécifique au fil du temps. Elle est généralement analysée pour comprendre son évolution passée et prévoir son comportement futur. Cette représentation mathématique fait souvent appel à des concepts de probabilité et de statistiques.[33].

Ou bien plus simplement, on appelle série chronologique ou chronique une suite X_t d'observations d'un même phénomène, ordonnées dans le temps.

Nous considérons une suite d'observation des variables aléatoires réelles :

$$(X_t, t \in \mathbb{N}) \text{ ou encore } (X_t)_{t \in \mathbb{N}}$$

Où :

— T : L'espaces de temps.

— t : L'ordre de l'observation.

La valeur de la série à la date t dépend des valeurs prises aux dates précédentes selon une fonction f , telle que :

$$X_t = f(\dots, X_{t-1}, X_t, X_{t+1}, \dots)$$

Comme elle peut se limiter à p valeurs :

$$X_t = f(X_{t-p}, \dots, X_{t-1}, X_t, X_{t+1}, \dots)$$

Processus stationnaire

La stationnarité est une propriété essentielle dans l'analyse des séries chronologiques, car elle simplifie les calculs et améliore la compréhension des relations entre les variables aléatoires. Elle facilite également l'estimation des paramètres des modèles stochastiques, ce qui peut s'avérer précieux lors de la prédiction des valeurs futures. Un processus stochastique est considéré comme stationnaire lorsque ses propriétés statistiques demeurent constantes dans le temps..

Cependant, il est important de noter que la plupart des processus réels ne sont pas strictement stationnaires, On définit quelques types de stationnarité.

Stationnarité au sens strict Un processus est stationnaire au sens strict si pour toute valeur de N , sa caractérisation d'ordre N est invariante par rapport à une translation de l'axe des temps [2] :

$$P(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_N}) = P(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_N+h}), \quad \forall h$$

Stationnarité au sens large (ou de deuxième ordre) Un processus aléatoire est stationnaire au sens large si sa moyenne est constante [2] :

$$m_X(t) = m_X, \quad \forall t$$

avec m_X est la moyenne de processus (X_t) .

Et sa fonction d'auto-covariance ne dépend pas de l'origine du temps. Comme elle ne dépend que de deux instants du temps, la condition précédente est équivalente à :

$$Cov_X(t, u) = Cov_X(t - u), \quad t > u$$

Processus inversible

On dit qu'un processus $(X_t)_{t \in T}$ est inversible s'il peut s'écrire comme combinaison linéaire des valeurs d'un autre processus sous la forme suivant :

$$\forall t \in T, X_t = \sum_{i \in T} \psi_i Y_{t-i}$$

Où $(\psi_i, i \in T)$ est une suite réelle telle que :

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\psi_i| < \infty$$

Et $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un autre processus .

Processus causal

un processus $(X_t)_{t \in T}$ est dit causal s'il peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\forall t \in T, Y_t = \sum_{i \in T} \psi_i X_{t-i}$$

Où $(\psi_i, i \in T)$ est une suite réelle telle que :

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\psi_i| < \infty$$

Et $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un autre processus différent de $(X_t)_{t \in T}$.

Fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation

Afin de pouvoir anticiper l'évolution future d'une série chronologique, il est essentiel de comprendre les liens d'interdépendance entre les termes d'un processus X_t . Les fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation sont considérées comme des moyens d'assurer cette interdépendance en calculant respectivement la covariance et la corrélation entre les termes d'une série chronologique.

La fonction d'auto-covariance La fonction d'auto-covariance d'un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est définie par :

$$\gamma(h) = cov(X_t, X_{t-h}), \quad \forall t$$

où :

$$cov(X_t, X_{t-h}) = E[(X_t - E(X_t))(X_{t-h} - E(X_{t-h}))]$$

Ainsi :

$$\gamma(0) = Var(X_t) = E[(X_t - E(X_t))^2] = \sigma_X^2$$

Propriétés $\forall h \in T$:

- $\gamma(-h) = \gamma(h)$
- $|\gamma(h)| \leq \gamma(0)$
- $\gamma(0) \geq 0$

La fonction d'autocorrélation La fonction d'autocorrélation d'un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est définie par :

$$\rho(h) = \text{Corr}(X_t, X_{t-h}) = \frac{\text{Cov}(X_t, X_{t-h})}{\sqrt{\text{Var}(X_t)\text{Var}(X_{t-h})}}, \quad \forall t$$

Dans le cas où $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus stationnaire on a :

$$\text{Var}(X_t) = \text{Var}(X_{t-h}) = \text{Cste}, \forall t, \forall h$$

Donc $\rho(h)$ peut prendre une forme plus simple :

$$\rho(h) = \frac{\text{Cov}(X_t, X_{t-h})}{\text{Var}(X_t)} = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$$

D'où $\rho(h) \in [-1, 1]$.

Propriétés

- $\rho(-h) = \rho(h)$
- $\rho(0) = 1$

1.2.2 Bruit blanc

Le bruit blanc est souvent utilisé comme modèle de base pour représenter les perturbations aléatoires dans les systèmes physiques et les signaux. Par exemple, il peut être utilisé pour modéliser le bruit électrique dans un circuit électronique ou le bruit de fond dans une image numérique. La connaissance des caractéristiques du bruit blanc est importante pour la conception de filtres et d'estimateurs optimaux, ainsi que pour l'analyse et la compréhension des données expérimentales.

Définition 6. Un processus $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ est dit bruit blanc s'il satisfait les hypothèses suivantes :

- $E(\varepsilon_t) = 0$
- $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2 < \infty$
- $\text{Cov}(\varepsilon_s, \varepsilon_t) = 0, \forall t \neq s$

1.2.3 Processus linéaires

Les processus linéaires sont des combinaisons linéaires de bruit blanc, ils constituent alors le modèle le plus simple, l'intérêt de ces processus revient au comportement de leur fonction

d'autocovariance, qui tend vers zéro lorsque l'on compare deux variables éloignées dans le temps :

$$\gamma(h) = \text{Cov}(X_t X_{t+h}) \longrightarrow 0, \quad |h| \longrightarrow +\infty$$

Cela signifie que la mémoire du processus est contrôlée (la liaison du second ordre est plus importante pour deux variables proches dans le temps que pour des variables éloignées).

Définition 7. *Le processus $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ est un processus linéaire de moyenne μ s'il peut être écrit sous la forme :*

$$X_t = \mu + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} b_i \varepsilon_{t-i}$$

où $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ est un bruit blanc de moyenne zéro et variance σ_ε^2 et

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} b_i < +\infty$$

1.2.4 Processus autorégressifs AR

Un processus autorégressif (AR) est un type de modèle de série chronologique qui utilise les valeurs passées d'une variable pour prédire sa valeur future. Dans un modèle AR, la variable dépend d'un certain nombre de ses propres valeurs passées (appelées des termes autorégressifs) ainsi que d'un terme d'erreur aléatoire. Il été introduits pour la première fois par George Udny Yule [37].

Définition 8. *Un processus autorégressif d'ordre p est noté $AR(p)$ est défini par :*

$$X_t = \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \varepsilon_t \quad \forall t \in T$$

Avec :

$(\varepsilon_t)_{t \in T}$ un bruit blanc de variance σ^2 , $(\phi_1, \dots, \phi_p) \in \mathbb{R}^p$ et $\phi_p \neq 0$.

On utilise généralement la notation suivante :

$$\Phi(L)X_t = \varepsilon_t$$

Où

$$\Phi(L) = 1 - \sum_{i=1}^p \phi_i L^i$$

Fonction d'autocovariance

Si $E(X_t) = 0$, $\forall t$ on a :

$$\gamma(h) = \text{cov}(X_t, X_{t-h}) = E(X_t X_{t-h}) \quad \forall h \in \mathbb{Z} \quad (1.9)$$

Proposition 3. *La fonction d'autocovariance $\gamma(h)$ d'un processus $AR(p)$ est donnée par la relation de récurrence suivante [29] :*

$$\gamma(h) = \begin{cases} \phi_1\gamma(1) + \phi_2\gamma(2) + \dots + \phi_p\gamma(p) + \sigma_\varepsilon^2 & \text{si } h = 0 \\ \phi_1\gamma(h-1) + \phi_2\gamma(h-2) + \dots + \phi_p\gamma(h-p) & \text{si } h > 0 \end{cases}$$

où $h \in \mathbb{Z}$.

Preuve

On considère le processus $AR(p)$ suivant :

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

Si $E(X_t) = 0$, $\forall t$ on a $\forall h > 0$:

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= \text{cov}(X_t, X_{t-h}) = E(X_t X_{t-h}) \\ &= \phi_1 E(X_{t-1} X_{t-h}) + \phi_2 E(X_{t-2} X_{t-h}) + \dots + \phi_p E(X_{t-p} X_{t-h}) + E(\varepsilon_t X_{t-h}) \\ &= \phi_1 \gamma(h-1) + \phi_2 \gamma(h-2) + \dots + \phi_p \gamma(h-p) \end{aligned}$$

Puisque X_{t-h} ne dépend que des ε_{t-h-i} avec $i \geq 0$ alors $E(\varepsilon_t X_{t-h}) = 0$.

De la même façon :

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= E(X_t^2) \\ &= \phi_1 E(X_{t-1} X_t) + \phi_2 E(X_{t-2} X_t) + \dots + \phi_p E(X_{t-p} X_t) + E(\varepsilon_t X_t) \\ &= \phi_1 \gamma(-1) + \phi_2 \gamma(-2) + \dots + \phi_p \gamma(-p) + E(\varepsilon_t X_t) \\ &= \phi_1 \gamma(1) + \phi_2 \gamma(2) + \dots + \phi_p \gamma(p) + \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

La stationnarité et la causalité

Un processus autorégressif $AR(p)$ est causal et stationnaire si et seulement si :

$\Phi(z) \neq 0$ avec $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq 1$

Ou :

$\Phi(z) = 0$ avec $z \in \mathbb{C}$ et $|z| > 1$.

L'inversibilité

Tout processus $AR(p)$ est inversible par définition.

Fonctions d'autocorrélation

On a :

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$$

Proposition 4. *la fonctions d'autocorrélation d'un processus $AR(p)$ est donnée par [29] :*

$$\rho(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } h = 0 \\ \phi_1\rho(h-1) + \phi_2\rho(h-2) + \dots + \phi_p\rho(h-p) & \text{si } h \neq 0 \end{cases}$$

Ces relations sont connues sous le nom d'équations de **Yule-Walker**.

Preuve

1. Le processus $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ s'écrit comme suit :

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

En multipliant par X_t et prenons l'espérance on obtient :

$$\begin{aligned} E(X_t^2) &= \phi_1 E(X_{t-1}X_t) + \phi_2 E(X_{t-2}X_t) + \dots + \phi_p E(X_{t-p}X_t) + E(\varepsilon_t^2) + E((\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p})\varepsilon_t) \\ &= \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \dots + \phi_p \gamma_p + \sigma_\varepsilon^2 + 0 \end{aligned}$$

le dernier terme est nul car ε_t est indépendant de $\{X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p}\}$

De plus si $h > 0$ on procède de la même façon :

$$X_t X_{t-h} = \phi_1 X_{t-1} X_{t-h} + \dots + \phi_p X_{t-p} X_{t-h} + \varepsilon_t X_{t-h}$$

Donc

$$\gamma_h = \phi_1 \gamma_{h-1} + \dots + \phi_p \gamma_{h-p} + E(X_{t-h} \varepsilon_t)$$

Où $E(X_{t-h} \varepsilon_t) = 0$, car $X_{t-h} \perp \varepsilon_t$

A partir de la relation de récurrence de γ_h on déduit que :

$$\rho_h = \phi_1 \rho_{h-1} + \dots + \phi_p \rho_{h-p}, \forall h \geq 0$$

Ces dernières équations sont appelées **Equations de Yule-Walker** . Pour $h > 0$, les ρ_h et les γ_h vérifient une relation de récurrence d'ordre p et

$$1 = \phi_1 \rho_1 + \dots + \phi_p \rho_p + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\gamma_0}$$

Donc

$$\gamma_0 = \sigma^2 \frac{1}{1 - (\phi_1 \rho_1 + \dots + \phi_p \rho_p)}$$

Les équations de Yule-Walker pour $h = 1, \dots, p$ peuvent s'écrire :

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{p-2} \\ \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \rho_{p-1} & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \rho_p \end{pmatrix}$$

On peut écrire aussi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \dots + \phi_p \rho_{p-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \rho_p = \phi_1 \rho_{p-1} + \dots + \phi_{p-1} \rho_1 + \phi_p \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \phi_1 &= (1 - \phi_2)\rho_1 - \dots - \phi_p\rho_{p-1} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \phi_p &= \rho_p - \phi_1\rho_{p-1} - \dots - \phi_{p-1}\rho_1 \end{cases}$$

Caractéristiques d'un $AR(1)$

Supposons que $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ est un $AR(1)$ on peut danc écrire [29]

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$$

Pour toute $|\phi| < 1$ on a :

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i \varepsilon_{t-i}$$

l'autocovariance est donnée par

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= Cov(X_t, X_{t+h}) = \lim_{n \rightarrow \infty} E\left[\left(\sum_{i=0}^n \phi^i \varepsilon_{t-i}\right)\left(\sum_{j=0}^n \phi^j \varepsilon_{t+h-j}\right)\right] \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \phi^{|h|} \sum_{i=0}^{\infty} \phi^{2i} \text{(srie convergente car } |h| < 1) \\ &= \frac{\sigma_\varepsilon^2 \phi^{|h|}}{1 - \phi^2} \end{aligned}$$

Les fonctions d'autocorrélation est donnée par

$$\rho(h) = \phi^{|h|}$$

Exemple 1.2.1. Soit $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ un processus $AR(2)$ défini par

$$(1 - 1, 1L + 0, 18L^2)X_t = \varepsilon_t$$

Avec ε_t est un bruit blanc avec moyenne nulle et variance $\sigma_\varepsilon < \infty$.

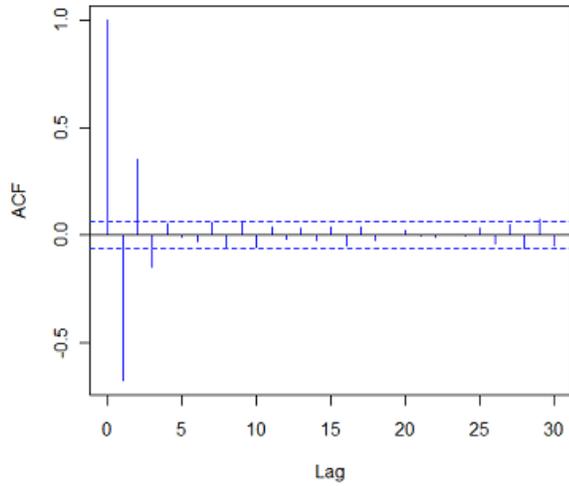


FIGURE 1.1 – Corrélogramme d'un processus AR(2)

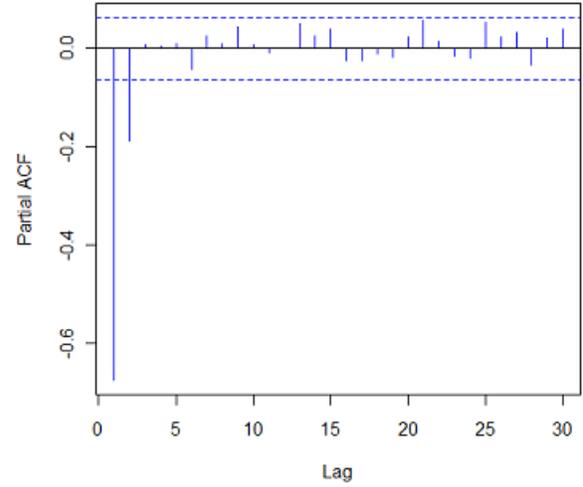


FIGURE 1.2 – Corrélogramme partiel d'un processus AR(2)

1.2.5 Processus moyen mobile MA

Un processus MA (moyenne mobile) est un type de modèle de série chronologique qui modélise la moyenne de la série en fonction d'une combinaison linéaire de ses valeurs passées et de termes d'erreur aléatoire. En d'autres termes, un processus MA est défini comme une somme pondérée des erreurs aléatoires passées. Ce processus a été introduit pour la première fois par Eugen Slutsky (1927) [11].

Définition 9. On appelle un $MA(q)$ tout processus moyen mobile défini par :

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{i=0}^q \theta_i \varepsilon_{t-i}, \forall t \in T$$

Où : $q \geq 1$, $(\theta_i)_{1 \leq i \leq q}$ sont des réelles, $\theta_q \neq 0$ et ε_t est un bruit blanc de moyenne nulle et variance $\sigma^2 < \infty$.

on utilise généralement la notation suivante :

$$X_t = \Theta(L)\varepsilon_t$$

où

$$\Theta(L) = 1 + \sum_{i=0}^q \theta_i L^i$$

La stationnarité

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus $MA(q)$ alors X_t est stationnaire [29].

Preuve (1)

$$\begin{aligned} E(X_t) &= E\left(\varepsilon_t + \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i}\right) \\ &= E(\varepsilon_t) + \sum_{i=1}^q \theta_i E(\varepsilon_{t-i}) \\ &= 0 < \infty \end{aligned}$$

Car $(\varepsilon_t) \sim N(0, \sigma^2)$

(2)

$$\begin{aligned} \gamma_h &= Cov(X_t, X_{t+h}) \\ &= E(X_t X_{t+h}) \\ &= E\left(\sum_{k=0}^q \theta_k \varepsilon_{t-k} \sum_{i=0}^q \theta_i \varepsilon_{t+h-i}\right) \\ &= E\left(\sum_{i=0}^q \sum_{k=0}^q \theta_i \theta_k \varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t+h-k}\right) \\ &= \sum_{i,k=0}^q \theta_i \theta_k E(\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t+h-k}) \\ &= \begin{cases} \sum_{i=0}^{q-|h|} \theta_i \theta_{i+h} + h\sigma^2 & si \quad i = k - h \\ 0 & sinon \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sigma^2 \sum_{i=0}^{q-|h|} \theta_i \theta_{i+h} & si \quad 0 \leq h \leq q \\ 0 & sinon \quad h > q \end{cases} \end{aligned}$$

On remarque que $\gamma(h)$ ne dépend pas de t .

(3)

$$E(X_t^2) = Var(X_t) = \gamma(0) = \sigma^2 \sum_{i=0}^q \theta_i^2 < +\infty$$

Où tout $MA(q)$ est un processus stationnaire.

La causalité

Tout processus $MA(q)$ est causal par définition.

L'inversibilité

Un processus $MA(q)$ est inversible si et seulement si :

$\Theta(z) \neq 0$ avec $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq 1$

Ou :

$\Theta(z) = 0$ avec $z \in \mathbb{C}$ et $|z| > 1$.

L'espérance et la variance

$$E(X_t) = E\left[\sum_{i=0}^q \theta_i \varepsilon_{t-i}\right] = \sum_{i=0}^q \theta_i E(\varepsilon_{t-i}) = 0,$$

et

$$Var(X_t) = \gamma(0) = E(X_t^2) - [E(X_t)]^2 = E(X_t^2),$$

donc

$$\begin{aligned} Var(X_t) &= E(X_t^2) = E\left[\left(\sum_{i=0}^q \theta_i \varepsilon_{t-i}\right)^2\right] \\ &= E\left[\sum_{i=0}^q \sum_{j=0}^q \theta_i \theta_j \varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-j}\right] \\ &= \sum_{i=0}^q \sum_{j=0}^q \theta_i \theta_j E(\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-j}) \end{aligned}$$

on a

$$E(\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-j}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \sigma_\varepsilon^2 & \text{si } i = j \end{cases}$$

d'où

$$Var(X_t) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^q \theta_i^2$$

Fonction d'autocovariance

La fonction d'autocovariance est donnée par [29] :

$$\gamma(h) = E(X_t X_{t+h}) = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{i=0}^q \theta_{|h|+i} \theta_i & \text{si } |h| \leq 1, h \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} \gamma(h) = E(X_t X_{t+h}) &= E\left[\left(\sum_{i=0}^q \theta_i \varepsilon_{t-i}\right)\left(\sum_{j=0}^q \theta_j \varepsilon_{t+h-j}\right)\right] \\ &= \sum_{i=0}^q \sum_{j=0}^q \theta_i \theta_j E(\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t+h-j}) \end{aligned}$$

Sachant que : $E(\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-j}) = \sigma^2 \varepsilon$ quand $t+h-j = t-i \implies i = j-h$ on a :

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-j}) &= \sigma^2 \varepsilon \sum_{i=0}^{q-|h|} \theta_{|h|+i} \theta_i, \text{ si } |h| \leq q \\ \gamma(h) &= \begin{cases} \sigma^2 \varepsilon \sum_{i=0}^{q-|h|} \theta_{|h|+i} \theta_i & \text{si } |h| \leq q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Fonction d'autocorrélation

La fonction d'autocorrélation est donnée par [29] :

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \begin{cases} \frac{\sum_{i=0}^{q-|h|} \theta_{|h|+i} \theta_i}{\sum_{i=0}^q \theta_i^2} & \text{si } |h| \leq q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Caractéristiques d'un processus $MA(1)$

Soit $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ un processus $MA(1)$ sous la forme suivante [29] :

$$X_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$$

pour tel processus, on a :

$$\begin{aligned} E(X_t) &= E(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}) \\ &= E(\varepsilon_t) + \theta E(\varepsilon_{t-1}) = 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_t) &= \text{Var}(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}) \\ &= \text{Var}(\varepsilon_t) + \theta^2 \text{Var}(\varepsilon_{t-1}) \\ &= (1 + \theta^2)\sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

La fonction d'autocovariance est donnée par :

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= E(X_t X_{t+h}) = \text{Cov}(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t+h} + \theta\varepsilon_{t+h-1}) \\ \gamma(1) &= E(X_t X_{t+1}) = \text{Cov}(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t+1} + \theta\varepsilon_t) \\ &= E(\varepsilon_t \varepsilon_{t+1} + \theta\varepsilon_t^2 + \theta\varepsilon_{t+1} \varepsilon_{t-1} + \theta^2 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_t) \\ &= E(\varepsilon_t \varepsilon_{t+1}) + \theta E(\varepsilon_t^2) + \theta E(\varepsilon_{t+1} \varepsilon_{t-1}) + \theta^2 E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_t) \\ &= 0 + \theta\sigma_\varepsilon^2 + 0 + 0 = \theta\sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma(h) &= \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 & \text{si } |h| = 1 \\ 0 & \text{sinon } |h| \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Les coefficients d'autocorrélation :

$$\rho(h) = \begin{cases} \frac{\theta}{1+\theta^2} & \text{si } |h| = 1 \\ 0 & \text{sinon } |h| \geq 2 \end{cases}$$

Exemple 1.2.2. Soit $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ un processus MA(1) défini par

$$X_t = \varepsilon_t + 0.6\varepsilon_{t-1}$$

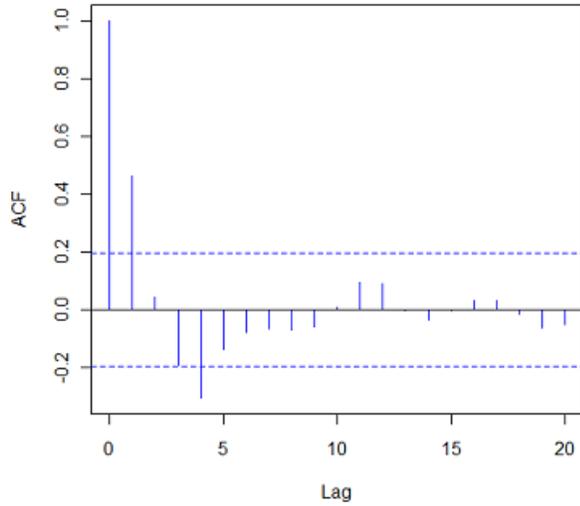


FIGURE 1.3 – Corrélogramme d'un processus MA(2)

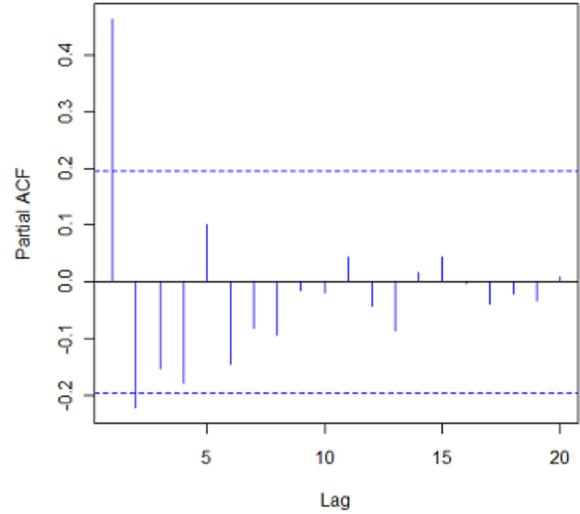


FIGURE 1.4 – Corrélogramme partiel d'un processus MA(2)

1.2.6 Processus $ARMA(p, q)$

Les processus $ARMA$ sont utilisés pour modéliser une grande variété de séries chronologiques, y compris les données financières, économiques, météorologiques, etc. Dans ce but Box et Jenkins (1970) [6] à introduire le modèle $ARMA$. Ce modèle est une combinaison de deux parties ou deux processus : le processus autorégressive (AR) et le processus moyenne mobile (MA) qui ont introduit par Yule et Slutsky respectivement en 1927 [11][37].

Définition 10. On dit qu'un processus stationnaire $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus $ARMA$ (Auto-régressive Moving Average) d'ordre (p, q) , noté $ARMA(p, q)$ si :

Il existe $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_p) \in \mathbb{R}^p$ avec $\phi \neq 0$ et $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_q) \in \mathbb{R}^q$ avec $\theta_q \neq 0$ tel que :

$$X_t - \sum_{i=0}^p \phi_i X_{t-i} = \varepsilon_t + \sum_{i=0}^q \theta_i \varepsilon_{t-i}$$

on utilise généralement la notation suivante :

$$\Phi(L)X_t = \Theta(L)\varepsilon_t$$

Où

$$\Phi(L)X_t = 1 - \sum_{i=0}^p \phi_i L^i$$

et

$$\Theta(L) = 1 + \sum_{i=0}^q \theta_i L^i$$

Remarque

- Un processus $AR(p)$ est un processus $ARMA(p, 0)$.
- Un processus $MA(q)$ est un processus $ARMA(0, q)$.

Proposition Soit $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ un processus $ARMA(p, q)$ [29] :

$$\Phi(L)X_t = \Theta(L)\varepsilon_t$$

- Il admet une écriture $MA(\infty)$:

$$\begin{aligned} X_t &= \Phi^{-1}(L)\Theta(L)\varepsilon_t \\ &= \varepsilon_t + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i} \end{aligned}$$

où $(\psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle.

En posant $\psi_i = 0$ pour $i < 0$, $\theta_0 = 1$ et $\theta_i = 0$ pour $i > q$, on a :

$$\forall i \in \mathbb{N} : \psi_i - \sum_{j=0}^p \phi_j \psi_{i-j} = \phi_i$$

- Il admet une écriture $AR(\infty)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \Theta(L)^{-1}\Phi(L)X_t \\ &= X_t + \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i X_{t-i} \end{aligned}$$

d'où :

$$X_t = - \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i X_{t-i} + \varepsilon_t$$

où $(\psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle.

En posant $\pi_i = 0$ pour $i < 0$, $\phi_0 = -1$ et $\phi_i = 0$ pour $i > p$, on a :

$$\forall i \in \mathbb{N} : \pi_i - \sum_{j=0}^p \phi_j \pi_{i-j} = -\phi_i$$

Stationnarité

Un processus $ARMA(p, q)$ est stationnaire si le polynôme $\Phi(L)$ admet des racines en dehors du cercle unité en module [29].

Si $\Phi^{-1}(L)$ est un opérateur qui existe on a :

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(L)\Phi(L)X_t &= \Phi^{-1}(L)\Theta(L)\varepsilon_t \\ X_t &= \Phi^{-1}(L)\Theta(L)\varepsilon_t \\ &= \Psi(L)\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} \end{aligned}$$

Proposition 5. Si $\Phi(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$ alors l'équation :

$$\Phi(L)X_t = \Theta(L)\varepsilon_t$$

d'un modèle $ARMA$ a une unique solution stationnaire définie par :

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$$

Causalité

Un processus $ARMA(p, q)$ défini par l'équation

$$\Phi(L)X_t = \Theta(L)\varepsilon_t$$

est dit causal s'il existe une suite de constantes ψ_i telle que :

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$$

et X_t peut s'exprimer comme suit :

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$$

La condition de la causalité est équivalente à :

$$\Phi(x) = 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - \dots - \phi_p x^p = 0 \implies |x| > 1$$

1. La détermination des coefficients ψ se fait par l'identification

$$\Phi(L)X_t = \Theta(L)\varepsilon_t \implies X_t = \frac{\Theta(L)}{\Phi(L)}\varepsilon_t = \Psi(L)\varepsilon_t$$

tel que :

$$\begin{aligned} \Psi(L)\Phi(L) &= \Theta(L) \\ \implies (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p)(\psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \dots + \psi_p L^p) \\ &= (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_p L^p) \end{aligned}$$

En développant cette relation et par identification, on peut vérifier que les coefficients ψ se calculent comme suit :

$$\psi_0 = 1, \psi_1 - \phi_1 \psi_0 = \theta_1, \psi_2 - \phi_1 \psi_1 - \phi_2 \psi_0 = \theta_2$$

et d'une manière générale on a :

$$\psi_j - \sum_{k=1}^p \phi_k \psi_{j-k} = \theta_j, \quad j \in \mathbb{N}$$

où $\theta_0 = 1, \theta_j = 0$ pour $j > q$

Inversibilité

Un processus $ARMA(p, q)$ défini par l'équation

$$\Phi(L)X_t = \Theta(L)\varepsilon_t$$

est dit inversible s'il existe une suite de constantes π_j telle que :

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\pi_i| < \infty$$

et ε_t peut s'exprimer tel que :

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j}$$

Théorème 1.2.1. *Un processus ARMA(p, q) est inversible (resp. causal) [29], c'est-à-dire, qu'il peut être représenté sous la forme*

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j}$$

où

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\pi_i| < \infty$$

(resp. $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}$ où $\sum_{i=0}^{\infty} |\psi_i| < \infty$)

, si et seulement si toutes les racines de son polynôme caractéristique $\Theta(L)$ (resp. $\Phi(L)$) sont à l'extérieur du cercle unité. Les coefficients π_j (resp. ψ_j) sont dans ce cas les coefficients de la série de Taylor et nous avons :

$$\pi(L) = \frac{\Phi(L)}{\Theta(L)} \text{ (resp. } \psi(L) = \frac{\Theta(L)}{\Phi(L)} \text{)}$$

La fonction d'autocovariance

La fonction d'autocovariance d'un processus ARMA(p, q) est donnée par :

$$\gamma_h = \sum_{i=1}^p \phi_i \gamma_{h-i}, h \geq q + 1$$

et

$$\gamma_h - \sum_{i=1}^p \phi_i \gamma_{h-i} = \sigma^2 \sum_{j=h}^q \theta_j \psi_{j-h}, 0 \leq h \leq q$$

où les ψ_k correspondent aux coefficients de la forme MA(∞) de $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$:

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \varepsilon_{t-k}$$

La fonction d'autocorrélation

La fonction d'autocorrélation d'un processus $ARMA(p, q)$ est donnée par :

$$\frac{\gamma(h) - \sum_{i=1}^p \phi_i \gamma_{h-i}}{\gamma(0)}, h \geq q + 1$$

Où

$$\rho(h) - \sum_{i=1}^p \phi_i \rho_{h-i}, h \geq q + 1$$

et

$$\rho(h) - \sum_{i=1}^p \phi_i \rho_{h-i} = \frac{\sigma^2}{\gamma_0} \sum_{j=q}^{j=h} \theta_j \psi_{j-h}, 0 \leq h \leq q$$

Caractéristiques d'un $ARMA(1, 1)$

Considérons un processus $ARMA(1, 1)$ qui a la représentation suivante [29]

$$X_t - \phi X_{t-1} = \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}$$

Avec

$$\gamma(h) = \sigma_\varepsilon^2 \left((\phi - \theta) \phi^{h-1} \frac{(\phi - \theta)^2 \phi^h}{1 - \phi^2} \right)$$

Exemple 1.2.3. Soit $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ un processus $ARMA(1, 1)$ défini par

$$X_t = 0.8X_{t-1} + 0.6\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

Remarque 1.2.2. Il existe d'autres processus tel que $SARIMA$ qu'ont n'a pas abordé dans ce mémoire.

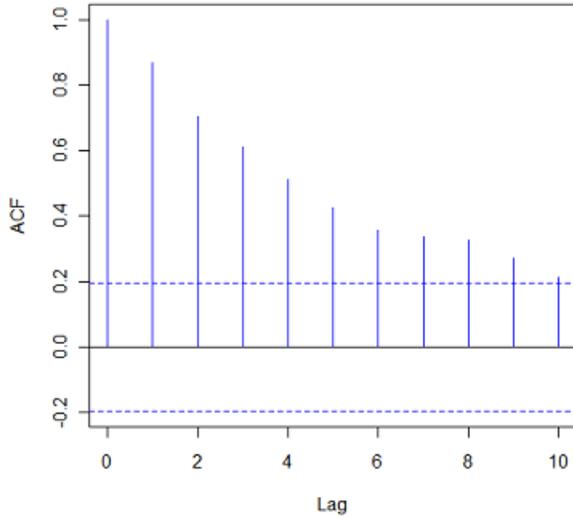


FIGURE 1.5 – Corrélogramme d’un processus ARMA(1,1)

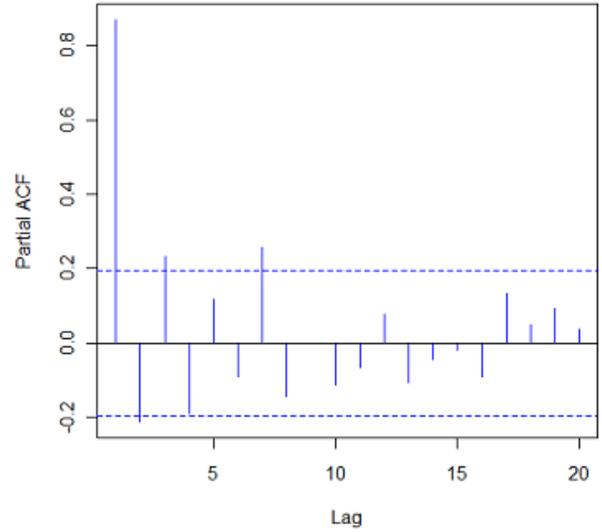


FIGURE 1.6 – Corrélogramme partiel d’un processus ARMA(1,1)

1.2.7 Théorème de Wald

Tout processus X_t stationnaire peut se mettre sous forme d’un modèle $MA(1)$ [7] :

$$X_t = k_t + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}$$

Avec :

ψ_i : des réelles, tel que $\psi_0 = 1$ et

$$\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$$

ε_t : Bruit blanc.

k_t : est une composante linéaire telle que $Cov(k_t, \varepsilon_{t-i}) = 0, \forall t \in \mathbb{Z}$.

1.2.8 Processus FARIMA

Un processus *FARIMA* (Fractional AutoRegressive Integrated Moving Average) est un type de processus stochastique utilisé pour modéliser les séries chronologiques. Il s’agit d’une extension du modèle *ARIMA* (AutoRegressive Integrated Moving Average) qui permet de capturer des dépendances à longue mémoire et des comportements fractals dans les données.

Définition 11. On dit que $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ est un processus *FARIMA*(p, d, q) s’il vérifie l’équation

suivante

$$\Phi_p(L)(1-L)^d X_t = \Theta_q(L)\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}$$

Avec

$$\Phi_p(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p$$

$$\Theta_q(L) = 1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q$$

Où

- d est un nombre fractionnaire .
- $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un bruit blanc avec une moyenne nulle et variance $\sigma_\varepsilon^2 < \infty$.

En économie, hydrologie, météorologie,...la notion de longue mémoire est très utilisable afin de d'écrire le comportement des certaine séries chronologique. Elle été introduite par Granger et Joyeux (1980)[15] et Hosking (1981)[16] sous forme des modèles *ARIMA* à différentiation fractionnaire (*FARIMA*).

Le processus *FARIMA*(p, d, q) est caractérisé par une dépendance forte entre des observations éloignées ce qui confirmé par la décroissance hyperbolique de leurs autocorrélation .

Dans notre travail, nous intéressons au processus de long mémoire d'ordre 1 (*FAR*(1)) comme cas particulier de processus *ARIMA* fractionnaire.

Dans ce modèle, les valeurs passées de la série chronologique ont un effet sur les valeurs futures, comme dans un modèle AR classique, mais la série est également fractionnellement intégrée pour prendre en compte les dépendances à long terme.

Le processus de long mémoire d'ordre 1 sera developpé dans les chapitres suivants.

Chapitre 2

Processus autoregressif fractionnaire d'ordre 1 ($FAR(1)$)

Introduction

Granger et Joyeux (1980) [15] et Hosking (1981) [16] ont ouvert une large porte de recherche dans la science des séries chronologique avec leur introduction au modèles $FARIMA$ comme les travaux de Medeiros et Veiga (2000) et Beran et Feng (2001) sur les $FAR(1)$ qui sont un cas particulier des modèles $FARIMA$.

Le modèle $FAR(1)$ permet de modéliser des séries chronologiques avec des dépendances persistantes à long terme, ce qui peut être utile pour capturer des tendances ou des comportements à long terme dans les données. Il est souvent utilisé en économétrie, en finance et dans d'autres domaines où les séries chronologiques présentent des dépendances à long terme.

Dans ce chapitre on va aborder la notion du modèle autorégressif fractionnaire d'ordre 1, la causalité, l'inversibilité ainsi que ses fonctions caractéristiques (autocovariance et autocorrélation du processus).

2.1 Processus $FAR(1)$ à long mémoire

Définition 12. Soit $d \in]0; \frac{1}{2}[$, un modèle autoregressif fractionnaire d'ordre 1 noté ($FAR(1)$) à mémoire longue est une équation stochastique de la forme

$$(1 - L)^d X_t = \varepsilon_t \quad (2.1)$$

où $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ est un bruit blanc et (L) est l'opérateur retard.

Toute solution stationnaire $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ de (2.1) est appelée processus autoégressif fractionnaire d'ordre 1.

Pour faciliter la notation on introduit la fonction $\Gamma(\cdot)$, on a

$$(1 - L)^d = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i L^i$$

où

$$\begin{aligned} \pi_i &= \frac{d(d-1)(d-2)\dots(d-i+1)}{i!} \\ &= \frac{\Gamma(i-d)}{\Gamma(i+1)\Gamma(-d)} \\ &= \prod_{0 \leq k \leq i} \frac{k-1-d}{k}, i = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

$\Gamma(x)$ étant la fonction gamma.

2.2 Causalité

Un processus stochastique $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ donné par (2.1) est causal si les innovations s'écrivent en fonction des erreurs passées [20] :

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i} \quad (2.2)$$

Avec

$$\psi_i = \frac{\Gamma(i+d)}{\Gamma(i+1)\Gamma(d)}$$

2.2.1 Propriétés

Soit $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ défini par l'équation stochastique (2.1) qui satisfait l'équation stochastique (2.2) (Sous la définition de la causalité) :

— Si $d < 0$ alors

$$\sum_{i \geq 0} |\psi_i| < \infty$$

— Si $0 < d < \frac{1}{2}$ alors

$$\sum_{i \geq 0} |\psi_i| = \infty, \sum_{i \geq 0} |\psi_i|^2 < \infty$$

— Si $d \geq \frac{1}{2}$ alors

$$\sum_{i \geq 0} |\psi_i| = \infty, \sum_{i \geq 0} |\psi_i|^2 = \infty$$

Proposition 6. *Le processus stationnaire satisfaisant l'équation (2.1) est causal si et seulement si $d < 1/2$.*

2.3 Inversibilité

Un processus stochastique $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ donné par (2.1) est inversible si les erreurs s'écrivent en fonction des erreurs passé et présent de X_t en d'autre terme on a [20]

$$\varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i X_{t-i} \tag{2.3}$$

Avec

$$\pi_i = \frac{\Gamma(i-d)}{\Gamma(i+1)\Gamma(-d)}$$

2.3.1 Propriétés

Soit $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ défini par l'équation stochastique (2.1) qui satisfait l'équation stochastique (2.2) (Sous la définition de la causalité) :

— Si $d > 0$ alors

$$\sum_{i \geq 0} |\pi_i| < \infty$$

— Si $-\frac{1}{2} < d < 0$ alors

$$\sum_{i \geq 0} |\pi_i| = \infty, \sum_{i \geq 0} |\pi_i|^2 < \infty$$

— Si $d \leq \frac{1}{2}$ alors

$$\sum_{i \geq 0} |\pi_i| = \infty, \sum_{i \geq 0} |\pi_i|^2 = \infty$$

Proposition 7. *Le processus stationnaire satisfaisant l'équation (2.1) est inversible si et seulement si $d > -\frac{1}{2}$.*

Proposition 8. *Le processus défini par l'équation (2.1) est inversible et causal si et seulement si $-\frac{1}{2} < d < \frac{1}{2}$*

Remarque 2.3.1. *Le processus (3.1) est dit de long mémoire pour $0 < d < \frac{1}{2}$.*

2.4 Fonction d'autocovariance

fonction d'autocovariance d'un processus $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ donné par (3.1) est

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= Cov(X_t, X_{t+h}) = E[X_{t+h} - E(X_{t+h})]E[X_t - E(X_t)] \\ &= E[X_{t+h}X_t] \\ &= E\left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t+h-i}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}\right)\right] \\ &= E\left[\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 \varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t+h-i}\right] + E\left[\sum_{i \neq j} \psi_i \psi_j \varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t+h-j}\right] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 E[\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t+h-i}] + \sum_{i \neq j} \psi_i \psi_j E[\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t+h-j}] \end{aligned}$$

Pour $h \neq 0$

Si $i = h + j$ on a :

$$\gamma(h) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{i+h} \tag{2.4}$$

Si non on a $\gamma(h) = 0$.

Pour $h = 0$

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= E\left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}\right)\right] \\ &= E\left[\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 \varepsilon_{t-i}^2\right] + E\left[\sum_{i \neq j} \psi_i \psi_j \varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-j}\right] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 E[\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-i}] + \sum_{i \neq j} \psi_i \psi_j E[\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-j}]\end{aligned}$$

Donc

$$\gamma(0) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2$$

La forme explicite des autocovariances se déduit directement de celle des coefficients ψ_i , tel que

$$\psi_i = \frac{\Gamma(d+i)}{\Gamma(d)i!}$$

En remplaçant ψ_i par sa valeur, dans la formule (2.4), on aura

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(d+i)}{\Gamma(d)i!} \frac{\Gamma(d+i+h)}{\Gamma(d)(i+h)!} \\ &= \left[\frac{\sigma_\varepsilon^2 \Gamma(h+d)}{\Gamma(h+1)\Gamma(d)}\right] \left[\frac{\Gamma(h+1)}{\Gamma(h+d)\Gamma(d)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(h+d)\Gamma(h+d+i)}{\Gamma(h+d+i)i!}\right]\end{aligned}$$

On a la fonction hypergéométrique donnée par :

$$F(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+i)\Gamma(b+i)z^i}{\Gamma(c+i)i!} \quad (2.5)$$

Donc la fonction d'autocovariance peut s'écrire comme suit

$$\gamma(h) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{\Gamma(h+d)}{\Gamma(h+1)\Gamma(d)} F(d, h+d, h+1, 1) \quad \forall h \geq 0 \quad (2.6)$$

En utilisant la propriété de la fonction hypergéométrique suivante :

$$F(a, b, c, 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$

On obtient alors

$$F(d, h+d, h+1, 1) = \frac{\Gamma(h+1)\Gamma(1-2d)}{\Gamma(h+1-d)\Gamma(1-d)}$$

La formule (2.6) s'écrit alors comme suit

$$\gamma(h) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{\Gamma(d+h)\Gamma(1-2d)}{\Gamma(h+1-d)\Gamma(1-d)} \quad (2.7)$$

Pour $h = 0$

$$\gamma(0) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{\Gamma(1-2d)}{\Gamma^2(1-d)} \quad (2.8)$$

Proposition 9. *En utilisant la formule de Sheppard, quand h tend vers ∞ , on a :*

$$\gamma(h) \approx \frac{\Gamma(1-2d)}{\Gamma^2(1-d)} \sigma_\varepsilon^2 h^{2d-1}$$

Proposition 10. *Le processus FAR est à mémoire longue si $0 < d < \frac{1}{2}$, car dans ce cas la fonction d'autocorrélation décroît lentement vers zéro.*

2.5 Fonction d'autocorrélation

Grâce aux formules (2.7) et (2.8) la fonction d'autocorrélation pour un retard ($h \in \mathbb{Z}$) est donnée par :

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} \quad (2.9)$$

$$= \frac{\sigma_\varepsilon^2 \frac{\Gamma(d+h)\Gamma(1-2d)}{\Gamma(h+1-d)\Gamma(1-d)}}{\sigma_\varepsilon^2 \frac{\Gamma(1-2d)}{\Gamma^2(1-d)}} \quad (2.10)$$

Donc

$$\rho(h) = \frac{\Gamma(h+d)\Gamma(1-d)}{\Gamma(h+1-d)}$$

Grâce à la formule de Stirling on peut écrire

$$\rho(h) \sim h^{2d-1}$$

Proposition 11. *On a $0 < d < \frac{1}{2}$ et $h \rightarrow \infty$ alors $h^{2d-1} \rightarrow 0$*

ce qui fait que le processus FAR(d) est caractérisé par sa fonction d'autocorrélation qui décroît hyperboliquement vers 0 ($\rho(h) \searrow 0$).

En modélisation, les processus FARIMA généralement exagèrent l'indépendance des erreurs. L'hypothèse qui a approximé l'évolution du phénomène aléatoire ce qui a poussé les chercheurs à penser à la dépendance des erreurs l'une des formes de dépendance est les innovations mélangeants. Elle reflète l'évolution exacte du phénomène aléatoire ce qui permet d'avoir des prévisions plus proches de la réalité, Cette notion a trouvé plus d'application en économie et en finance, elle sera présentée dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Processus fractionnaire à long mémoire avec erreurs mélangeantes

Introduction

Généralement dans un modèle autorégressif fractionnaire à mémoire longue d'ordre 1 $FAR(1)$ les chercheurs s'assurent la dépendance des erreurs, ce qui n'est pas toujours possible.

Dans ce chapitre les erreurs du processus seront considérée fortement mélangeantes, le mélange des erreurs est motivées par sa large applicabilité par ailleurs l'hypothèse d'indépendance des erreurs d'un processus est dans la plupart des cas uniquement une approximation de la véritable structure de corrélation des erreurs[22].

Dans ce chapitre nous traitons le cas de processus fractionnaire lorsque le processus des innovations est mélangeants. Pour ce fait, on va étudier son comportement à l'aide de sa fonction autocorrélation.

Ce travail a été réalisé par Heddad.S et Belaide.K dans le cadre d'une thèse de doctorat en 2019 [24].

3.1 Modèle

Soit $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ un processus qui satisfait une équation de la forme :

$$(1 - L)^d X_t = \varepsilon_t \tag{3.1}$$

Où $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ est le bruit blanc, supposé être fortement mélangeant [22].

— L'équation (3.1) peut être écrite sous $AR(\infty)$, si $d > -\frac{1}{2}$ comme suit :

$$\varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i X_t$$

Avec

$$\pi = \frac{\Gamma(i-d)}{\Gamma(-d)i!}$$

— la solution stationnaire de (3.1), si $d < \frac{1}{2}$ est le processus $AM(\infty)$

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}$$

Avec

$$\psi = \frac{\Gamma(i+d)}{\Gamma(d)i!}$$

— Dans le cas $0 < d < \frac{1}{2}$, nous parlons d'un processus à long mémoire, nous avons donc

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\psi_i| = \infty$$

et

$$\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$$

3.2 Causalité et inversibilité

Il est facile de voir que le modèle (3.1) est causal et inversible pour $|d| < \frac{1}{2}$ (voir chapitre 2).

3.3 Comportement d'un processus fractionnaire à long mémoire avec des erreurs mélangées

Dans le but de voir l'influence du mélange des erreurs sur le comportement du processus considéré, nous étudierons les fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation et leurs comportements asymptotiques.

Soit le modèle (3.1) donnée par

$$(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$$

Avec

d un pas forcement entier.

(ε_t) un processus α -mélangeants de moyenne zéro et de variance $\sigma_\varepsilon^2 < \infty$.

D'abord, introduisons les hypothèses qui seront utiles dans notre étude [22] :

(A₁) La suite de variables aléatoires $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ satisfait la condition de Cramer donnée par :

$$E|\varepsilon_i|^m \leq \frac{m!}{2} E|\varepsilon_1|^2 K^{m-2} \quad m \in \mathbb{N}, m \geq 3$$

Où K une constante positive.

(A₂) Le coefficient de la suite α -mélangeante $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ satisfait la condition donnée ci-après

$$\sum_{j \geq 0} \alpha(j)^{1-\frac{2}{p}} < \infty$$

Remarque 3.3.1. — L'hypothèse (A₁) assure l'existence de $(E(\varepsilon_i)^p)^{\frac{1}{p}}$ avec $p \geq 3$, tandis que l'hypothèse (A₂) assure la convergence de la série de covariances. De plus, l'hypothèse (A₂) combinée à (A₁) assure la décroissance vers zéro du résultat[22].

— Dans le cas stationnaire, Ibragimov obtient la convergence de la série de covariances sous (A₂) avec plus d'hypothèse restrictive d'existence du moment d'ordre p pour les variables aléatoires X_i [22].

Théorème 3.3.1. Sous les hypothèses (A1) et A(2), on a pour tout entier $p \geq 3$

$$|\gamma_X(h)| \leq \sigma_\varepsilon^2 \psi_h F(d, d+h, h+1, 1) + V_p \alpha(h)^{\frac{2-p}{p}} + V'_p \sum_{j=1}^{\infty} \alpha^{\frac{2-p}{p}}(j+h), \quad h > 0$$

Avec

$$\begin{aligned} V_p &= C \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 & p \geq 3 \\ V'_p &= 2C \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j^2 & p \geq 3 \\ \psi_i &= \frac{\Gamma(i+d)}{\Gamma(d)i!} \end{aligned}$$

Où C est une constante positive [23].

Preuve

Pour $h > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
|Cov(X_t, X_{t+h})| &= \left| Cov\left(\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 \varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t+h-i}\right) + Cov\left(\sum_{i \neq j}^{\infty} \psi_i \psi_j \varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t+h-j}\right) \right| \\
&= \left| \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 |Cov(\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t+h-i})| + \left| \sum_{i \neq j}^{\infty} \psi_i \psi_j |Cov(\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t+h-j})| \right| \right|
\end{aligned}$$

Donc, on aura

$$|Cov(X_t, X_{t+h})| \leq A + B$$

Avec

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 |Cov(\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t+h-i})| \\
B &= \sum_{i \neq j}^{\infty} \psi_i \psi_j |Cov(\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t+h-j})|
\end{aligned}$$

Premièrement, on a

$$A = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 |Cov(\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t+h-i})|$$

En utilisant l'inégalité de Davydov , on obtient

$$|Cov(\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t+h-i})| \leq 8\alpha^{\frac{1}{r}}(|h|) \|\varepsilon_{t-i}\|_p \|\varepsilon_{t+h-i}\|_q$$

Si deux variables aléatoires $\xi_1 \in L^p$ et $\xi_2 \in L^q$ avec $1 \leq p, q < \infty$, alors on peut trouver r vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$, tel qu'on ait

$$|Cov(\xi_1 \xi_2)| \leq c\alpha^{\frac{1}{r}} \|\xi_1\|_p \|\xi_2\|_q$$

Où c une constante positive. Sous l'hypothèse (A1), et en prenant $p = q \neq 2$, ceci implique que $r = \frac{p}{p-2}$, on obtient

$$|Cov(\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t+h-i})| \leq C\alpha^{\frac{p-2}{p}}(h) \quad p \geq 3$$

Avec

$$C = 8\left(\frac{p!}{2}\sigma_\varepsilon^2 K^{p-2}\right)^{\frac{2}{p}} \quad K > 0, p \geq 3$$

Par conséquent,

$$A \leq C\alpha^{\frac{p-2}{p}}(h) \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2$$

Donc, on obtient

$$A \leq V_p \alpha^{\frac{p-2}{p}}(h) \quad (4.3)$$

Avec

$$V_p = C \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2$$

Tandis que, pour le second terme, notons le par $B = B_1 + B_2$ Où

$$B_1 = \sum_{i \neq j}^{\infty} |\psi_i \psi_j| \text{Cov}(\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t+h-j}) \quad j = i + h$$

$$B_2 = \sum_{i \neq j}^{\infty} |\psi_i \psi_j| \text{Cov}(\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t+h-j}) \quad j \neq i + h$$

Pour $j = i + h$, en utilisant les propriétés classiques de la fonction hypergéométrique, nous obtenons

$$B_1 \leq \sigma_\varepsilon^2 \psi_i F(d, d + h, h + 1, 1) \quad (4.4)$$

D'autre part, pour $j \neq i + h$, on à

$$\begin{aligned} \sum_{i < j}^{\infty} |\psi_i \psi_j| \alpha^{\frac{p-2}{p}} (i - j + h) &= \sum_{j=1}^{\infty} \alpha^{\frac{p-2}{p}} (j + h) \sum_{i=1}^{\infty} |\psi_i \psi_{i+j}| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \alpha^{\frac{p-2}{p}} (j + h) \left(\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \psi_{i+j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \alpha^{\frac{p-2}{p}} (j + h) \left(\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^2 \right) \end{aligned}$$

Donc, on obtient

$$B_2 \leq V'_p \sum_{j=1}^{\infty} \alpha^{\frac{p-2}{p}} (j + h) \quad (4.5)$$

Avec

$$V'_p = 2C \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j^2$$

De(3.3), (3.4) et(3.5), on obtient l'inégalité qui complète la preuve.

Lemme 3.3.1. *Soit $d \in]0, \frac{1}{2}[$. D'après le théorème dernière, on a*

$$\rho(h) \sim C^{st} h^{2d-1} \quad \text{lorsque } h \longrightarrow \infty$$

Où C^{st} constante positive [22].

Preuve

Le comportement asymptotique de l'autocorrélation se déduit directement de la formule de Shepard.

En modélisation, les processus *FAR* généralement exagérant la stationnarité. L'hypothèse qui approxime l'évolution du phénomène aléatoire ce qui a poussé les chercheurs à penser à la non-stationnarité l'une de ces formes est la périodicité, elle sera présentée dans le chapitre suivant

Chapitre 4

Modèle longue mémoire à coefficients périodiques

Introduction

Depuis toujours les chercheurs sont concentrés sur l'étude des séries chronologiques qui présentent des phénomènes indexés par le temps. Comme conséquences de sa large applicabilité dans des domaines assez variés les chercheurs sont amenés à introduire des modèles mathématiques dédiés à la modélisation de ces phénomènes dans le but de pouvoir prévoir leur future.

Généralement ces modèles sont caractérisés par la stationnarité ce que poussés les chercheurs de penser à la non-stationnarité, parmi ces formes spécifiques la périodicité, elle a été introduite pour la première fois par Gladyshev [12] [13]. En 2006, Gardner et al [14] ont fourni un aperçu général des recherches sur la périodicité des séries chronologiques, considérant plus de 1500 articles publiés sur le sujet.

En pratique on rencontre souvent des séries temporelles exhibant une structure d'autocorrélation périodique ce qui est présenté par un processus périodiquement corrélé.

Après sa introduction par Gladyshev plusieurs chercheurs ont travaillé sur cette notion de périodicité Jones et Brelsford [25], Troutman [36] ont étudié les propriétés d'un modèle autorégressif périodique, de plus Cipra[8], Bentarzi et Hallin [4] et d'autres ont fait des séries de travaux sur les modèles moyennes mobiles p-périodiques à courte mémoire, tel que sont très souvent rencontrés dans plusieurs domaines, en économie(Ghysels et al [18]), en météorologie(Lund et al [28]), et en

hydrologie(Bowers et al [3]).

Dans ce chapitre on va entamer le modèle long mémoire à coefficients périodiques commençons par donner sa définition et quelque propriétés probabilistes tel que la condition qui assure la causalité et l'inversibilité de ce modèle. Ainsi que le comportement asymptotique du modèle garantie par l'étude de ces fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation périodique.

Ce travail est basé sur l'étude qui été faite par Belaïde et Amimour [1].

4.1 Modèle

On appelle processus $FAR(1)$ à coefficients périodiques dans le temps, tout processus $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ satisfaisant l'équation stochastique suivante :

$$(1 - L)^{d_t} X_t = \varepsilon_t \quad (4.1)$$

Avec d_t un coefficient périodique (non forcément entier) dans le temps de période $p \in \mathbb{N}^*$ c'est à dire $d_{t+mp} = d_t$.

Et (ε_t) iid de moyenne zéro et variance $\sigma_\varepsilon^2 < \infty$.

Notant que les modèles $FAR(1)$ appartiennent à une classe de processus périodiquement évolutifs à long mémoire pour $d_i \in [0, \frac{1}{2}]$ $(1 - L)^{d_i}$ est l'opérateur de différenciation fractionnaire qui est aussi périodique et se définit par la série Binomiale suivante [1] :

$$\begin{aligned} (1 - B)^{d_i} &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{d_i}{j} (-B)^j \\ &= 1 - d_i B - \frac{1}{2} d_i (1 - d_i) B^2 - \frac{1}{6} d_i (1 - d_i) (2 - d_i) B^3 - \dots \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d_i (1 - d_i) \dots (d_i - j + 1)}{j!} (-1)^j (B)^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j^i (B)^j \end{aligned}$$

Avec

$$\pi_j^i = \frac{\Gamma(j - d_i)}{\Gamma(j + 1) \Gamma(-d_i)}, \forall j \in \mathbb{N}$$

4.2 Inversibilité et causalité

Dans ce travail, nous allons limiter à une condition suffisante pas forcément nécessaire d'inversibilité et causalité nous supposons que $\forall i = \overline{1, p}, 0 \leq d_i < \frac{1}{2}$.

4.3 Propriétés asymptotiques du modèle longue mémoire à coefficients périodiques

Dans cette section, nous allons étudier les propriétés asymptotiques du modèle. Plus spécifiquement, déterminer les fonctions d'autocovariances et autocorrélations ainsi que leur comportement asymptotique.

4.3.1 Processus périodiquement corrélé

Une classe particulière de processus non stationnaires est celle des processus, dont les fonctions d'autocovariances sont des fonctions périodiques, du temps. La définition du processus périodiquement corrélé a été introduite, dans la littérature de l'étude des processus aléatoires, par Gladyshev[4].

Définition 13. *Un processus du second ordre X_t est dit périodiquement corrélé ou faiblement périodique, s'il existe un entier positif p , tel que pour tout $t, t' \in m\mathbb{Z}$ on a*

$$\gamma_X(t + pm, t' + pm) = \gamma_X(t, t') \quad (4.2)$$

le plus petit entier positif p , permettant de satisfaire cette condition est appelé la période du processus périodiquement corrélé [1].

La proposition suivante, montre la stationnarité périodique du modèle $FAR(1)$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 12. *Le processus donnée par l'équation (4.1) est périodiquement corrélé.*

Preuve

À partir de la représentation moyenne mobile du processus, nous pouvons remarquer que $\psi_j^{i+pm} =$

ψ_j^i est périodique de période p donc

$$\begin{aligned}
\gamma_X^i(t, t') &= \gamma_X^i(i + pm, i + pm + h) \\
&= E[X_{i+pm}, X_{i+pm+h}] - E[X_{i+pm}]E[X_{i+pm+h}] \\
&= E\left[\sum_{j=0}^{\infty} \psi_i^j \varepsilon_{i+pm-j} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{i+h}^{j+h} \varepsilon_{i+pm-j+h}\right] \\
&= E\left[\sum_{j=0}^{\infty} \psi_i^j \psi_{i+h}^{j+h} \varepsilon_{i+pm-j} \varepsilon_{i+pm-j+h}\right] \\
&= \gamma_X^i(i, i + h)
\end{aligned}$$

Gladyshev [12] a établi le lien existant entre un processus périodiquement corrélé de période p et un processus stationnaire multivarié de dimension p . En utilisant la technique de Gladyshev [13] consistant, où la présentation du modèle $FAR(1)$ périodique, par un certain processus p -varié (à coefficients indépendants du temps), correspondant à notre modèle p -périodique, la représentation est donnée par l'équation suivante [1] :

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j^1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1+pm-j} \\ X_{2+pm-j} \\ \vdots \\ X_{p+pm-j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1+pm} \\ \varepsilon_{2+pm} \\ \vdots \\ \varepsilon_{p+pm} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

4.4 Fonction d'autocovariance

Proposition 13. *soit $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ un processus $FAR(1)$, où pour tout $t \in \mathbb{Z}, \exists m \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, p$ tel que $t = i + pm$, dans un premier temps, nous considérons le cas où $p = 2$. La fonction d'autocovariance du modèle $FAR(1)$ est donnée par :*

$$\gamma_X^i(h) = \begin{cases} \sigma_i^2 \frac{\Gamma(1-d_i-d_{i+1})\Gamma(d_{i+1}+h)}{\Gamma(d_{i+1})\Gamma(1-d_{i+1})\Gamma(1+h-d_i)} & \text{si } h \text{ impair,} \\ \sigma_i^2 \frac{\Gamma(1-2d_i)\Gamma(d_i+h)}{\Gamma(d_i)\Gamma(1-d_i)\Gamma(1+h-d_i)} & \text{si } h \text{ pair} \end{cases} \quad (4.4)$$

Preuve

Pour $i = 1$ ou 2 , la fonction d'autocovariance peut s'écrire comme [1]

$$\gamma_X^i(h) = \sigma_i^2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j+d_i)}{\Gamma(d_i)\Gamma(j+1)} \frac{\Gamma(j+d_{i+h}+h)}{\Gamma(d_{i+h})\Gamma(j+1+h)} \quad (4.5)$$

$\gamma_X^i(h)$ dépend de i , le modèle X_{i+2m} n'est pas stationnaire mais périodiquement stationnaire.

Pour $i = 1$ nous avons

$$\gamma_X^1(h) = \sigma_1^2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j+d_1)}{\Gamma(d_1)\Gamma(j+1)} \frac{\Gamma(j+d_{1+h}+h)}{\Gamma(d_{1+h})\Gamma(j+1+h)} \quad (4.6)$$

de plus, quand $h \equiv 1[2]$ et par un calcul direct on aboutit à

$$\gamma_X^1(h) = \sigma_1^2 \frac{\Gamma(d_2+h)}{\Gamma(d_2)\Gamma(h+1)} F(d_1, d_2+h, 1+h, 1)$$

où F est la fonction hypergéométrique donnée par

part lorsque $h \equiv 0[2]$

$$\gamma_X^1(h) = \sigma_1^2 \frac{\Gamma(d_1+h)}{\Gamma(d_1)\Gamma(h+1)} F(d_1, d_1+h, 1+h, 1)$$

D'une manière analogue pour $i=2$ nous avons

$$\gamma_X^2(h) = \sigma_2^2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j+d_2)}{\Gamma(d_2)\Gamma(j+1)} \frac{\Gamma(j+d_{2+h}+h)}{\Gamma(d_{2+h})\Gamma(j+1+h)} \quad (4.7)$$

et quand $h \equiv 1[2]$

$$\gamma_X^2(h) = \sigma_2^2 \frac{\Gamma(d_1+h)}{\Gamma(d_1)\Gamma(h+1)} F(d_2, d_1+h, 1+h, 1)$$

et quand $h \equiv 0[2]$

$$\gamma_X^2(h) = \sigma_2^2 \frac{\Gamma(d_2+h)}{\Gamma(d_2)\Gamma(h+1)} F(d_2, d_2+h, 1+h, 1)$$

Donc, la fonction d'autocovariance, peut s'écrire de façon générale par :

$$\gamma_X^i(h) = \sigma_i^2 \frac{\Gamma(d_{i+h}+h)}{\Gamma(d_{i+h})\Gamma(h+1)} F(d_i, d_{i+h}+h, 1+h, 1) \quad (4.8)$$

En utilisant la propriété de la fonction hypergéométrique, nous obtenons

$$\gamma_X^i(h) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{\Gamma(1-d_i-d_{i+h})\Gamma(d_{i+h}+h)}{\Gamma(d_{i+h})\Gamma(1-d_{i+h})\Gamma(1+h-d_i)} \quad (4.9)$$

Le résultat sera généralisé plus tard dans le cas où la période p est dans \mathbb{N}^* [1].

Proposition 14. *La fonction d'autocovariance périodique définie par $\gamma_X^i(h)$ pour h grand, admet un comportement asymptotique de la forme [1] :*

$$\gamma_X^i(h) \simeq \begin{cases} \sigma_i^2 \frac{\Gamma(1-d_i-d_{i+1})}{\Gamma(1-d_{i+1})\Gamma(d_{i+1})} (h)^{(d_i+d_{i+1}-1)} & \text{si } h \text{ impair} \\ \sigma_i^2 \frac{\Gamma(1-2d_i)}{\Gamma(1-d_i)\Gamma(d_i)} (h)^{(2d_i-1)} & \text{si } h \text{ pair} \end{cases} \quad (4.10)$$

les composantes de la fonction d'autocovariance $\gamma_X^1(h), \gamma_X^2(h)$ décroît à un taux hyperbolique (décroissance lente vers 0 lorsque h tend vers l'infini).

Preuve

À partir de la fonction d'autocovariance et en utilisant l'approximation standard dérivée de la formule de Stirling, pour h large $\frac{\Gamma(d_i+h)}{\Gamma(1+h-d_i)}$ est bien approximée par $(h)^{d_i+d_i+h-1}$ donc pour $i = 1$ [1]

$$\gamma_X^1(h) \simeq \begin{cases} \sigma_1^2 \frac{\Gamma(1-d_2-d_1)}{\Gamma(1-d_2)\Gamma(d_2)} (h)^{(d_1+d_2-1)} & \text{si } h \text{ impair} \\ \sigma_1^2 \frac{\Gamma(1-2d_1)}{\Gamma(1-d_1)\Gamma(d_1)} (h)^{(2d_1-1)} & \text{si } h \text{ pair} \end{cases} \quad (4.11)$$

de même, pour $i = 2$

$$\gamma_X^2(h) \simeq \begin{cases} \sigma_2^2 \frac{\Gamma(1-d_1-d_2)}{\Gamma(1-d_1)\Gamma(d_1)} (h)^{(d_2+d_1-1)} & \text{si } h \text{ impair} \\ \sigma_2^2 \frac{\Gamma(1-2d_2)}{\Gamma(1-d_2)\Gamma(d_2)} (h)^{(2d_2-1)} & \text{si } h \text{ pair} \end{cases} \quad (4.12)$$

La décroissance est non exponentielle, mais elle est de l'ordre d'une puissance négative de h , bien que le processus n'est pas stationnaire mais périodiquement stationnaire, l'influence de X_t sur X_{t+h} sera importante même pour une valeur élevée de h , ceci explique la terminologie longue mémoire retenue pour ce type de modèle, la structure périodique apparaît donc, dans le comportement asymptotique de la fonction d'autocovariance [1].

Dans la suite, nous allons considérer le cas où la période $p \geq 2$.

Nous allons maintenant généraliser les résultats qu'on a simplifié précédemment, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 2$, nous prenons la formule de la proposition précédente, et nous aurons p composantes, la fonction d'autocovariance pour $i = 1, \dots, p$ et $h \in \mathbb{N}^*$ est définie par :

$$\gamma_X^i(h) = \sigma_i^2 \frac{\Gamma(1-d_i-d_{i+h})\Gamma(d_{i+h}+h)}{\Gamma(d_{i+h})\Gamma(1-d_{i+h})\Gamma(1+h-d_i)} \quad (4.13)$$

En utilisant l'approximation standard dérivée de la formule de Stirling, pour h grand, l'approximation de $\gamma_X^i(h)$ est donnée par :

$$\gamma_X^i(h) \simeq \sigma_i^2 \frac{\Gamma(1-d_i-d_{i+h})}{\Gamma(d_{i+h})\Gamma(1-d_{i+h})} (h)^{d_i+d_{i+h}-1} \quad (4.14)$$

alors on a

$$\gamma_X^i(h) \sim C_i h^{-\alpha_i}, C_i > 0, 0 < \alpha_i < 1, \text{ quand } h \longrightarrow \infty$$

avec

$$\alpha_i = -d_i - d_{i+k} + 1, h \equiv k[p]$$

et

$$C_i = \sigma_i^2 \frac{\Gamma(1 - d_i - d_{i+k})}{\Gamma(d_{i+k})\Gamma(1 - d_{i+k})}$$

La formule explicite du comportement de la fonction d'autocovariance périodique du modèle considéré est donnée par :

$$\gamma_X^i(h) \simeq \left\{ \begin{array}{l} \gamma_X^1(h) \simeq \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1^2 \frac{\Gamma(1-d_1-d_2)}{\Gamma(d_2)\Gamma(1-d_2)} (h)^{d_1+d_2-1} \quad h \equiv 1[p] \\ \sigma_1^2 \frac{\Gamma(1-d_1-d_3)}{\Gamma(d_3)\Gamma(1-d_3)} (h)^{d_1+d_3-1} \quad h \equiv 2[p] \\ \vdots \\ \sigma_1^2 \frac{\Gamma(1-2d_1)}{\Gamma(d_1)\Gamma(1-d_3)} (h)^{2d_1-1} \quad h \equiv 0[p] \end{array} \right. \\ \\ \gamma_X^2(h) \simeq \left\{ \begin{array}{l} \sigma_2^2 \frac{\Gamma(1-d_2-d_3)}{\Gamma(d_3)\Gamma(1-d_3)} (h)^{d_2+d_3-1} \quad h \equiv 1[p] \\ \sigma_2^2 \frac{\Gamma(1-d_2-d_4)}{\Gamma(d_4)\Gamma(1-d_4)} (h)^{d_2+d_4-1} \quad h \equiv 2[p] \\ \vdots \\ \sigma_2^2 \frac{\Gamma(1-2d_2)}{\Gamma(d_2)\Gamma(1-d_2)} (h)^{2d_2-1} \quad h \equiv 0[p] \end{array} \right. \\ \\ \vdots \\ \\ \gamma_X^p(h) \simeq \left\{ \begin{array}{l} \sigma_p^2 \frac{\Gamma(1-d_p-d_1)}{\Gamma(d_1)\Gamma(1-d_1)} (h)^{d_p+d_1-1} \quad h \equiv 1[p] \\ \sigma_p^2 \frac{\Gamma(1-d_p-d_2)}{\Gamma(d_2)\Gamma(1-d_2)} (h)^{d_2+d_p-1} \quad h \equiv 2[p] \\ \vdots \\ \sigma_p^2 \frac{\Gamma(1-2d_p)}{\Gamma(d_p)\Gamma(1-d_p)} (h)^{2d_p-1} \quad h \equiv 0[p] \end{array} \right. \end{array} \right.$$

4.5 Comportement asymptotique de la fonction d'autocorrélation du modèle longue mémoire à coefficients périodiques

Dans cette section nous allons focaliser sur l'obtention de la fonction d'autocorrélation du modèle $FAR(1)$ à coefficients périodiques, et l'étude de son comportement asymptotique à partir des résultats de la section précédente.

4.5.1 Fonction d'autocorrélation du modèle $FAR(1)$ à coefficients périodiques cas $p = 2$

Proposition 15. *La fonction d'autocorrélation périodique du modèle longue mémoire à coefficients périodiques pour $p = 2$ est donnée par [1]*

$$\rho_X^i(h) = \begin{cases} \frac{[\Gamma(1-d_i)]^2 \Gamma(1-d_i-d_{i+1}) \Gamma(d_{i+1}+h)}{\Gamma(d_{i+1}) \Gamma(1-d_{i+1}) \Gamma(1-2d_i) \Gamma(1+h-d_i)} & h \text{ impair} \\ \frac{\Gamma(1-d_i) \Gamma(d_i+h)}{\Gamma(d_i) \Gamma(1+h-d_i)} & h \text{ pair} \end{cases} \quad (4.15)$$

Son comportement asymptotique pour h grand est donné par

$$\rho_X^i(h) \simeq \begin{cases} \frac{[\Gamma(1-d_i)]^2 \Gamma(1-d_i-d_{i+1})}{\Gamma(d_{i+1}) \Gamma(1-d_{i+1}) \Gamma(1-2d_i)} (h)^{d_{i+1}+d_i-1} & h \text{ impair} \\ \frac{\Gamma(1-d_i)}{\Gamma(d_i)} (h)^{2d_i-1} & h \text{ pair} \end{cases} \quad (4.16)$$

Preuve

Pour $i = 1$ et par un calcul directe nous obtenons la fonction d'autocorrélation [1]

$$\rho_X^1(h) = \frac{\gamma_X^1(h)}{\gamma_X^1(0)} = \begin{cases} \frac{[\Gamma(1-d_1)]^2 \Gamma(1-d_1-d_2) \Gamma(d_2+h)}{\Gamma(d_2) \Gamma(1-d_2) \Gamma(1-2d_1) \Gamma(1+h-d_1)} & h \text{ impair} \\ \frac{\Gamma(1-d_1) \Gamma(d_1+h)}{\Gamma(d_1) \Gamma(1+h-d_1)} & h \text{ pair} \end{cases} \quad (4.17)$$

En utilisant la formule de Stirling, nous avons l'approximation

$$\rho_X^1(h) \simeq \begin{cases} \frac{[\Gamma(1-d_1)]^2 \Gamma(1-d_1-d_2)}{\Gamma(d_2) \Gamma(1-d_2) \Gamma(1-2d_1)} (h)^{d_1+d_2-1} & h \text{ impair} \\ \frac{\Gamma(1-d_1)}{\Gamma(d_1)} (h)^{2d_1-1} & h \text{ pair} \end{cases} \quad (4.18)$$

De même pour $i = 2$

$$\rho_X^2(h) = \begin{cases} \frac{[\Gamma(1-d_2)]^2 \Gamma(1-d_2-d_1) \Gamma(d_1+h)}{\Gamma(d_1) \Gamma(1-d_1) \Gamma(1-2d_2) \Gamma(1+h-d_2)} & h \text{ impair} \\ \frac{\Gamma(1-d_2) \Gamma(d_2+h)}{\Gamma(d_2) \Gamma(1+h-d_2)} & h \text{ pair} \end{cases} \quad (4.19)$$

nous avons l'approximation

$$\rho_X^2(h) \simeq \begin{cases} \frac{[\Gamma(1-d_2)]^2 \Gamma(1-d_2-d_1)}{\Gamma(d_1) \Gamma(1-d_1) \Gamma(1-2d_2)} (h)^{d_2+d_1-1} & h \text{ impair} \\ \frac{\Gamma(1-d_2)}{\Gamma(d_2)} (h)^{2d_2-1} & h \text{ pair} \end{cases} \quad (4.20)$$

Dans la suite, nous allons considérer le cas où la période $p > 2$.

Nous pouvons facilement généraliser le résultat pour $p \in \mathbb{N}^*, p > 2$, nous avons p composantes périodiques de la fonction d'autocorrélation, la fonction est donnée par l'équation générale [1] :

$$\rho_X^i(h) = \frac{[\Gamma(1-d_i)]^2 \Gamma(1-d_i-d_{i+h}) \Gamma(d_{i+h}+h)}{\Gamma(1-2d_i) \Gamma(d_{i+h}) \Gamma(1-d_{i+h}) \Gamma(1+h-d_i)} \quad (4.21)$$

Son comportement asymptotique pour h grand est donné par :

$$\rho_X^i(h) \simeq \frac{[\Gamma(1-d_i)]^2 \Gamma(1-d_i-d_{i+h})}{\Gamma(1-2d_i) \Gamma(d_{i+h}) \Gamma(1-d_{i+h})} (h)^{d_{i+h}-d_i-1} \quad (4.22)$$

et par la formule explicite :

$$\rho_X^i(h) \simeq \left\{ \begin{array}{l} \rho_X^1(h) \simeq \left\{ \begin{array}{ll} \frac{[\Gamma(1-d_1)]^2 \Gamma(1-d_1-d_2)}{\Gamma(1-2d_1)\Gamma(d_2)\Gamma(1-d_2)} (h)^{d_1+d_2-1} & h \equiv 1[p] \\ \frac{[\Gamma(1-d_1)]^2 \Gamma(1-d_1-d_3)}{\Gamma(1-2d_1)\Gamma(d_3)\Gamma(1-d_3)} (h)^{d_1+d_3-1} & h \equiv 2[p] \\ \vdots & \\ \frac{\Gamma(1-d_1)}{\Gamma(d_1)} (h)^{2d_1-1} & h \equiv 0[p] \end{array} \right. \\ \\ \rho_X^2(h) \simeq \left\{ \begin{array}{ll} \frac{[\Gamma(1-d_2)]^2 \Gamma(1-d_2-d_3)}{\Gamma(1-2d_2)\Gamma(d_3)\Gamma(1-d_3)} (h)^{d_2+d_3-1} & h \equiv 1[p] \\ \frac{[\Gamma(1-d_2)]^2 \Gamma(1-d_2-d_4)}{\Gamma(1-2d_2)\Gamma(d_4)\Gamma(1-d_4)} (h)^{d_2+d_4-1} & h \equiv 2[p] \\ \vdots & \\ \frac{\Gamma(1-d_2)}{\Gamma(d_2)} (h)^{2d_2-1} & h \equiv 0[p] \end{array} \right. \\ \\ \vdots \\ \\ \rho_X^p(h) \simeq \left\{ \begin{array}{ll} \frac{[\Gamma(1-d_p)]^2 \Gamma(1-d_p-d_1)}{\Gamma(1-2d_p)\Gamma(d_1)\Gamma(1-d_1)} (h)^{d_1+d_p-1} & h \equiv 1[p] \\ \frac{[\Gamma(1-d_p)]^2 \Gamma(1-d_p-d_2)}{\Gamma(1-2d_p)\Gamma(d_2)\Gamma(1-d_2)} (h)^{d_2+d_p-1} & h \equiv 2[p] \\ \vdots & \\ \frac{\Gamma(1-d_p)}{\Gamma(d_p)} (h)^{2d_p-1} & h \equiv 0[p] \end{array} \right. \end{array} \right.$$

À partir de la structure asymptotique d'autocovariance ou d'autocorrélation obtenue, nous déduisons que le modèle $FAR(1)$ à coefficients périodiques est persistant, plus précisément, la fonction d'autocorrélation $\rho_X^i(h)$ ne décroît pas géométriquement, mais présente un comportement asymptotique équivalent à $(h)^{d_i+d_{i+k}-1}$ où $h \equiv k[p]$ quand h très grand [1].

Chapitre 5

Simulations

Dans cette partie, nous allons illustrer les résultats développés dans la section précédente à l'aide d'une simulation réalisée avec le logiciel R. Nous examinerons le modèle à longue mémoire dans trois cas différents en fonction des innovations : indépendant, mélangeant et périodique.

Tout d'abord, nous présenterons graphiquement le modèle à longue mémoire avec des erreurs indépendantes, en considérant différentes valeurs du paramètre de longue mémoire d .

Ensuite, nous aborderons le cas de la longue mémoire avec des erreurs mélangeants. Nous analysons la représentation graphique en fonction du paramètre de mélange et du paramètre de mémoire.

Enfin, nous étudierons l'influence du paramètre de mémoire sur le modèle de longue mémoire à coefficients périodiques.

À l'aide de simulations réalisées dans le logiciel R, nous pourrions visualiser et analyser ces différents cas pour mieux comprendre le comportement du modèle à longue mémoire dans des situations variées.

5.1 Simulation de $FAR(1)$ avec erreurs indépendantes

La simulation de la fonction d'autocorrélation donnée par l'équation (2.6) d'un modèle de long mémoire avec des erreurs indépendantes et identiquement distribués nous permet de générer les

graphiques suivant avec des différentes valeurs du paramètre de mémoire $d(0, 25; 0, 35; 0, 45)$ et un $h = 100$.

	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
d=0,25	0,3333	0,1068	0,0755	0,0617	0,0534	0,0477	0,0436	0,0403	0,0377	0,0356	0,0337
d=0,35	0,5348	0,2725	0,2214	0,1960	0,1798	0,1681	0,1592	0,1520	0,1460	0,1410	0,1366
d=0,45	0,8181	0,6522	0,6085	0,5843	0,5678	0,5552	0,5452	0,5369	0,5297	0,5235	0,5181

TABLE 5.1 – L'autocorrélation d'un $FAR(1)$ avec des erreurs indépendantes pour $d = (0, 25; 0, 35; 0, 45)$

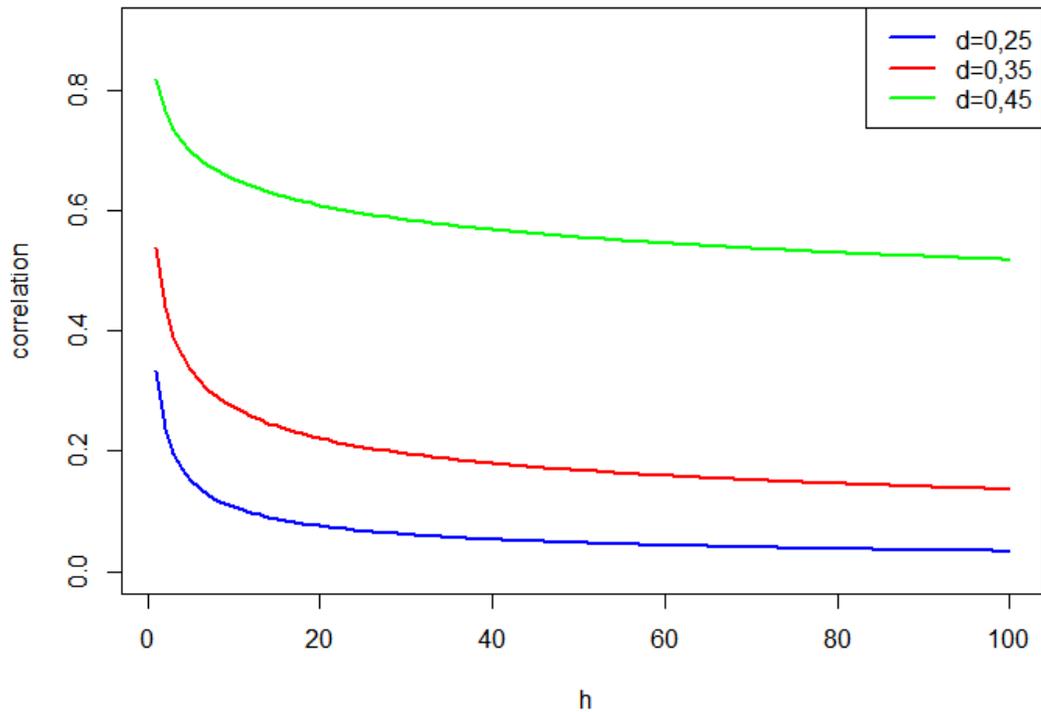


FIGURE 5.1 – L'autocorrélation d'un $FAR(1)$ avec des erreurs indépendantes pour $d = (0, 25; 0, 35; 0, 45)$

En remarque que la fonction d'autocorrélation $\rho(h)$ décrois plus en plus lentement avec la croissance du paramètre de mémoire d , ce qui est illustré dans la figure (6.1) par la décroissance hyperbolique de la fonction autocorrélation $\rho(h)$ avec $d = 0, 45$ sa décroissance est plus lente que l'autocorrélation où $d = 0, 35$ de même que l'autocorrélation $\rho(h)$ où $d = 0, 25$, ce qu'est confirmé

par le tableau (6.1) .

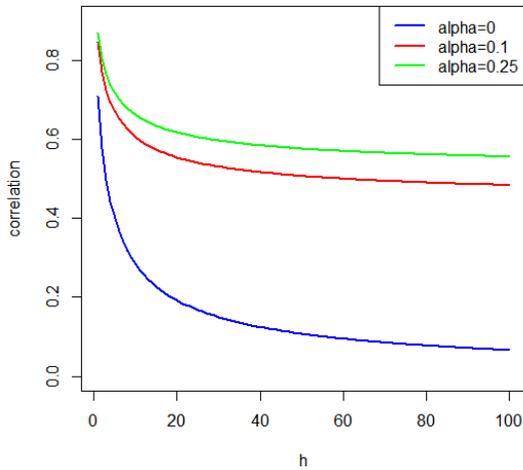
Nous pouvons conclure que lorsque la valeur de d proche de $\frac{1}{2}$ nous remarquons que la fonction d'autocorrélation $\rho(h)$ diminue très lentement, ce qui indique un modèle à long mémoire. Alors que si la valeur de d est plus en plus proche de 0 nous observons une forte décroissance, ce qui signifie que le modèle est à courte mémoire.

5.2 Simulation de $FAR(1)$ avec erreurs mélangeants

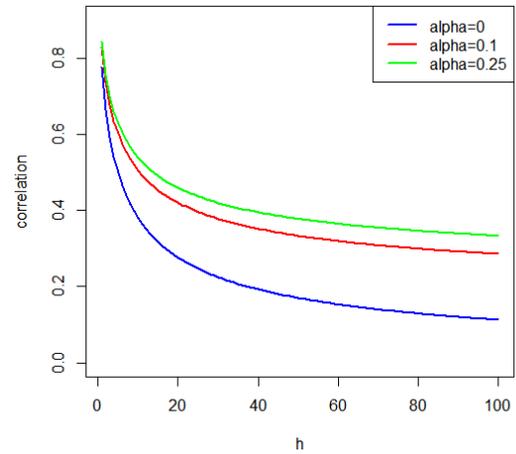
Dans cette partie nous allons réaliser une représentation graphique d'un processus autorégressive fractionnel à long mémoire avec des erreurs mélangeants. Pour cela on va générer une séquence de variables α -mélangeante à l'aide de sa fonction autocorrélation, avec deux valeurs déférente de paramètre de mémoire $d(0,45;0,25)$ pour un $\alpha = 0.1$ et pour $\alpha = 0.25$.

		0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
d=0,15	$\alpha=0$	0,7099	0,2838	0,1922	0,1500	0,1246	0,1075	0,0949	0,0844	0,0769	0,0707	0,0660
	$\alpha=0,1$	0,8447	0,6057	0,5543	0,5360	0,5164	0,5068	0,4998	0,4943	0,4900	0,4862	0,4836
	$\alpha=0,25$	0,8680	0,6614	0,6230	0,5998	0,5863	0,5774	0,5709	0,5660	0,5621	0,5590	0,5550
d=0,25	$\alpha = 0$	0,7768	0,3798	0,2766	0,2252	0,1986	0,1702	0,1532	0,1398	0,1290	0,1200	0,1124
	$\alpha=0,1$	0,8285	0,5043	0,4200	0,3780	0,3516	0,3331	0,3192	0,3082	0,2994	0,2921	0,2859
	$\alpha=0,25$	0,8426	0,5383	0,4592	0,4198	0,3951	0,3777	0,3646	0,3544	0,3461	0,3392	0,3334
d=0,35	$\alpha=0$	0,8380	0,4898	0,3811	0,3227	0,2843	0,2564	0,2349	0,2177	0,2035	0,1893	0,1812
	$\alpha=0,1$	0,8629	0,5423	0,4422	0,3884	0,3531	0,3274	0,3076	0,2932	0,2787	0,2676	0,2581
	$\alpha=0,25$	0,8709	0,5591	0,4617	0,4094	3751	0,3501	0,3309	0,3140	0,3027	0,2920	0,2827
d=0,45	$\alpha=0$	0,8901	0,6054	0,4999	0,4382	0,3961	0,3646	0,3396	0,1312	0,3021	0,2874	0,2746
	$\alpha=0,1$	0,9066	0,6319	0,5297	0,4707	0,4301	0,3996	0,3756	0,3559	0,3393	0,279	0,3129
	$\alpha=0,25$	0,9123	0,6410	0,5400	0,4817	0,4417	0,4116	0,3878	0,3684	0,3520	0,3381	0,3259

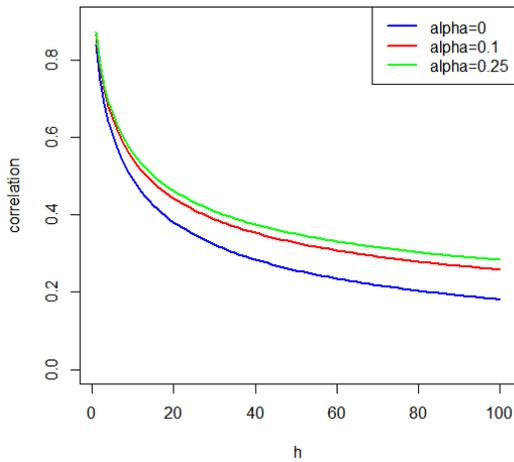
TABLE 5.2 – L'autocorrélation d'un $FAR(1)$ avec erreurs mélangeants pour différentes valeurs de d et α



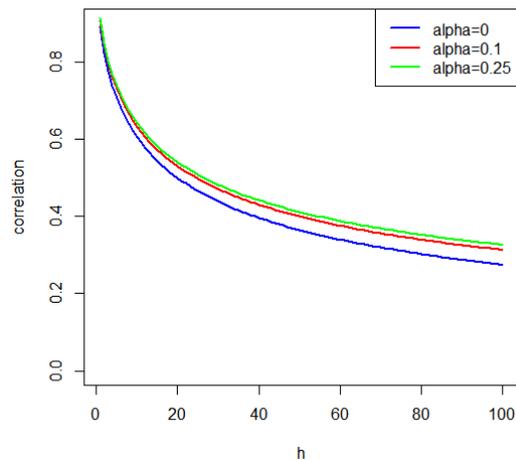
(a) L'autocorrélation d'un $FAR(1)$ avec erreurs mélangeants pour $d=0,15$



(b) L'autocorrélation d'un $FAR(1)$ avec erreurs mélangeants pour $d=0,25$



(c) L'autocorrélation d'un $FAR(1)$ avec erreurs mélangeants pour $d=0,35$



(d) L'autocorrélation d'un $FAR(1)$ avec erreurs mélangeants pour $d=0,45$

FIGURE 5.2 – L'autocorrélation d'un $FAR(1)$ avec erreurs mélangeants

La sous-figure (d) illustre une décroissance d'autocorrélation plus lente pour le modèle $FAR(1)$ avec $\alpha = 0,25$ et $d = 0,45$ en comparaison avec le modèle $FAR(1)$ ayant $FAR(1)$ avec $\alpha = 0,25$; $d = 0,35$ comme montré dans la sous-figure (b); $\alpha = 0,25$; $d = 0,25$ dans la sous-figure (c) et $\alpha = 0,25$; $d = 0,15$ dans la sous-figure (a).

Cela met en évidence l'influence du paramètre de mémoire d sur le processus autorégressif fractionnaire d'ordre 1 avec des innovations mélangeantes, en plus de son impact sur $FAR(1)$ dans le

cas indépendant.

D'autre part dans la sous-figure (a) où nous avons fixé $d = 0,15$ pour des différentes valeurs de $\alpha = (0; 0, 1; 0, 25)$, nous observons une décroissance de plus en plus lente à mesure que le paramètre de mélange α augmente. Cette observation est confirmée par les sous-figures (b), (c), (d).

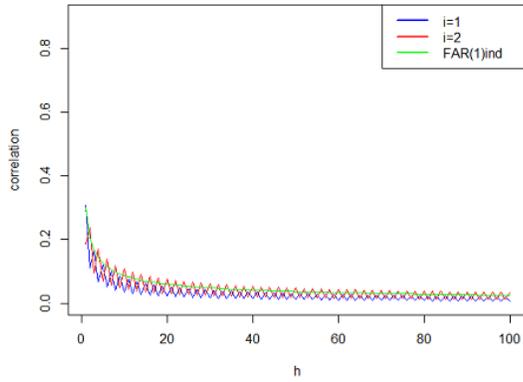
Par conséquent, pour des valeurs de α différentes de 0, les autocorrélations augmentent.

5.3 Simulation de $FAR(1)$ à coefficients périodiques

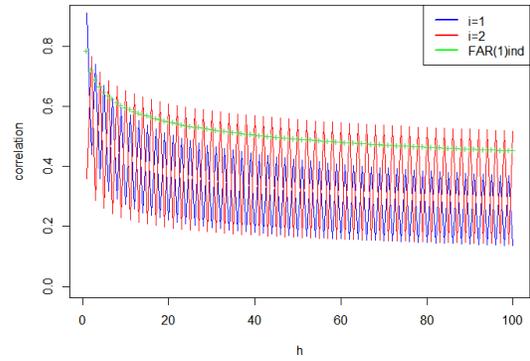
Dans cette partie nous allons simuler le modèle autorégressive fractionnel à long mémoire à coefficients périodiques à l'aide de sa fonction d'autocorrélation pour une période $p = 2$, en considérant des valeurs différentes du paramètre d_i , dont le but d'étudier le comportement asymptotique pour montrer l'existence de l'influence du paramètre de mémoire d_t sur l'autocorrélation. Nous allons considérer trois cas, comme suit $d = (0,15; 0,25)$, $d = (0,15; 0,45)$ et $d = (0,35; 0,45)$.

		0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
d=(0,15;0,25)	i=1	0,3063	0,0356	0,0281	0,0193	0,0151	0,0126	0,0101	0,0091	0,0083	0,0076	0,0071
	i=2	0,1850	0,1068	0,0755	0,0617	0,0534	0,0477	0,4363	0,403	0,0377	0,0356	0,0337
d=(0,15;0,45)	i=1	0,6227	0,0356	0,0219	0,0165	0,0135	0,0115	0,0101	0,009	0,008	0,0076	0,0071
	i=2	0,0923	0,6522	0,6085	0,5843	0,5678	0,5552	0,5452	0,5369	0,5697	0,5235	0,5181
d=(0,35;0,45)	i=1	0,9103	0,272	0,2214	0,1960	0,1798	0,1681	0,1592	0,1520	0,1460	0,1410	0,1366
	i=2	0,3583	0,6522	0,6085	0,5834	0,5678	0,5552	0,5452	0,5369	0,5297	0,5235	0,5181

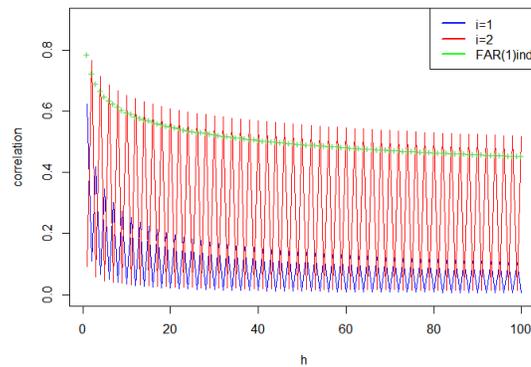
TABLE 5.3 – L'autocorrélation d'un $FAR(1)$ à coefficients périodiques pour $p = 2$ et différentes valeurs de d



(a) L'autocorrélation d'un $FAR(1)$ à coefficients périodiques pour $p = 2, d = (0, 15; 0, 25)$



(b) L'autocorrélation d'un $FAR(1)$ à coefficients périodiques pour $p = 2, d = (0.35; 0.45)$



(c) L'autocorrélation d'un $FAR(1)$ à coefficients périodiques pour $p=2, d = (0.15; 0.45)$

FIGURE 5.3 – L'autocorrélation d'un $FAR(1)$ à coefficients périodiques pour $p=2$ et différentes valeurs de d

Dans la sous-figure (a), pour une valeur de $d = (0, 15; 0, 25)$, on observe une décroissance rapide de la fonction autocorrélation par rapport à la sous-figure (b). De plus, à partir des sous-figures (a) et (b) nous remarquons, que les autocorrélations sont similaires.

La figure (5.3) illustre, d'une part, que pour des valeurs de d_i plus en plus proches de 0 la fonction d'autocorrélation diminue d'une manière rapide, et que lorsque les d_i proches de $\frac{1}{2}$ la fonction d'autocorrélation diminue d'une manière hyperbolique, ce qui indique une dépendance à long terme. D'autre part, lorsque les valeurs de d_i sont éloignées les unes des autres on observe des autocorrélations distinctes, ce qui est indicatif d'un cycle de périodicité.

Conclusion

Dans l'étude de simulation, nous avons examiné le comportement des processus à longue mémoire sous différentes conditions : avec des erreurs indépendantes, des erreurs fortement mélangeantes et des coefficients périodiques. Nous avons démontré que les processus avec des erreurs fortement mélangeantes et des coefficients périodiques présentent une décroissance plus lente dans leurs autocorrélations par rapport à un processus à longue mémoire avec des erreurs indépendantes et des coefficients constants, tout en conservant la décroissance hyperbolique de ces fonctions d'autocorrélations. Cela implique que, pour les processus avec des erreurs fortement mélangeantes et des coefficients périodiques, il est possible de faire des prévisions pour un avenir beaucoup plus lointain par rapport à des processus à longue mémoire avec des erreurs indépendantes.

D'une part, cette étude nous a permis de voir l'impact du mélange sur les autocorrélations, pour des valeurs de d_i plus en plus proches de 0 la fonction d'autocorrélation diminue d'une manière rapide, et que lorsque les d_i proches de $\frac{1}{2}$ la fonction d'autocorrélation diminue d'une manière hyperbolique, ce qui indique une dépendance à long terme.

D'autre part, lorsque les valeurs de d_i sont éloignées les unes des autres on observe des autocorrélations distinctes, ce qui est indicatif d'un cycle de périodicité.

Conclusion Générale

Au cours de ce travail, j'ai acquis de nouvelles connaissances, notamment sur les processus fractionnaires, le mélange fort et la périodicité. Ce mémoire se concentre sur l'étude du comportement probabiliste d'un modèle FAR(1) à longue mémoire lorsque les erreurs sont indépendantes, fortement mélangeantes ou périodiques. D'une part, nous avons démontré que le paramètre de mémoire influence le comportement du processus dans les trois cas abordés dans ce mémoire. D'autre part, nous avons observé que l'influence du mélange des erreurs sur le comportement du modèle est d'autant plus marquée que le paramètre de mémoire est élevé (proche de $\frac{1}{2}$), ce qui se traduit par une décroissance plus lente des autocorrélations. La dépendance entre les erreurs a un impact significatif sur la décroissance des autocorrélations. En effet, dans le cas d'un fort mélange des erreurs, plus le coefficient de mélange est élevé, plus la décroissance est lente. De plus, la périodicité a également un impact sur les autocorrélations.

<

Bibliographie

- [1] Amimour, A., Belaïde, K. (2020). Modèles de Longue Mémoire à Coefficients Périodiques. Thèse Doctorat. Université A. Mira de Béjaïa.
- [2] Belaïde, K. (2017). Cours doctorant : Processus Stochastiques. Université A. Mira de Béjaïa.
- [3] Bowers, M. C., Tung, W., Gao, J. B. (2012). On the distributions of seasonal river flows : lognormal or power law. *Water Resources Research*. 48 :W05536.
- [4] Bentarzi, M., Hallin, M. (1994). On the invertibility of periodic moving-average models. *Journal of Time Series Analysis*. 15 :263–268.
- [5] Blum, J. R., Hanson, D.L., Koopmans (1963). On the strong law for large numbers for a class of stochastic processes. *Z. W. 2* :1-11.
- [6] Box, G., Jenkins, G. (1970). *Time series analysis : forecasting and control*, Holden-Day, San Fransisco.
- [7] Charpentier, A. (2012). Modèles de prévision-Séries temporelles.
- [8] Cipra, T. (1985). Periodic moving average processes. *Aplikace Matematily*. 30 :218–29.
- [9] Doukhan, P. (1994). *Mixing : Properties and examples*. *Lecture Notes in Statistics (Vols.85)*, Springer.

- [10] Ferraty, F., Vieu, P. (2006). Nonparametric functional data analysis theory and practice. Springer.
- [11] Slutsky, E. (1927). The summation of random causes as the source of cyclic processes. *Econometrica*. 5 :105–146.
- [12] Gladyshev, E. G. (1961). Periodically correlated random sequences. *Soviet. Mathematics*. 2 :385–388.
- [13] Gladyshev, E. G. (1963). Periodically and almost pc random processes with continuous time parameter. *Theory Probability and its Applications*. 8 :173–177.
- [14] Gardner, W., Napolitano, A., Paura, L. (2006). Cyclostationarity : Half a century of research. *Signal Processing*, 86 :639–697.
- [15] Granger, C. W. J., Joyeux, R. (1980). An introduction to long-range time series models and fractional differencing. *Journal of Time Series Analysis*, 1 , 15-30.
- [16] Hosking, J.R.M. (1981). Fractional differencing, *Biometrika*, 68, 165-176.
- [17] Hurst, H. E. (1951). Long term storage capacity of reservoirs *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 116, 770-779.
- [18] Ghysels, E., Hall, A., Lee, H. S. (1996). On periodic structures and testing for seasonal unit roots. *Journal of the American Statistical Association*. 91 :1551–1559.
- [19] Gebelein, H. (1941). Des statistics problem der korelation variation und eigenwert-problem und sein zusammenhang mit der ausgleichsrechnung. *Z. Angew Math, Mech* 21 :364-379.

- [20] Gonçalves, E. (1987). Une généralisation des processus ARIMA. *Annales d'économie et de statistique*. 5.
- [21] Hirschfeld, O. (1935). A connection between correlation and contingency. *Math. Proc. Of Cambridge Phil. Soc.* 31 :520-524.
- [22] Haddad, S., Belaïde, K. (2019). *Processus de Long Mémoire à Erreurs Mélangeantes*. Thèse de Doctorat, Université A. Mira de Béjaïa.
- [23] Haddad, S., Belaïde, K. (2020). Local asymptotic normality for long memory process with strong mixing noises. *Communications in Statistics-Theory and Methods*. 49 :2817–2830.
- [24] Ibragimov, I. A. (1962). Some limit theorems for stationary processes. *Th. Prob.Appl.* 7 :349-382.
- [25] Jones, R. H., Brelsford, W. M. (1967). Time series with periodic structure. *Biometrika*. 54 :403– 408.
- [26] Kolmogorov, A. N., Rosanov, Y. A. (1960). On the strong mixing conditions for stationary gaussian sequences. *Th. pronb. Appl.* 5 :204-207.
- [27] Karr, A. F. (1993). *Probability*. Springer-Verlag, New York.
- [28] Lund, R., Hurd, H., Bloomfield, P., Smith, R. (1995). Climatological time series with periodic correlation. *Journal of climate*. 8 :2787–2809.
- [29] Lescheb, I. (2021-2022). *Modèles Econométriques et Séries Chronologiques*. Université Frères Mentouri, Constantine.

- [30] Mandelbrot, B. (1965). Une classe processus stochastiques homothétiques à soi ; application à la loi climatologique h. e. hurst. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences paris- Series I. 260 :3274–3277.
- [31] Mandelbrot, B. (1972). A statistical methodology for non-periodic cycles : from the covariance to r/s analysis. Annals of Economic and Social Measurement. 1 :259–290.
- [32] Pipiras, V., Taqqu, M. S. (2017). Long-range dependence and self-similarity. Cambridge Universit.
- [34] Perraudin. (2004-2005). Séries chronologiques, quelques éléments du cours. Université Paris.
- [35] Rio, E. (2000). Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants. Mathématiques and Applications. (Vol.31). Berlin :Springer-Verlag.
- [36] Rosenblatt, M.(1956). A central limit theorem and a strong mixing condition, Proc. Nat. Acad. Sci., 42 :43-47, USA.
- [37] Smith, F. H. (1938). An empirical law describing heterogeneity in the yields of agricultural crops. Journal of Agricultural Science. 28 :1–23.
- [38] Yule, U. (1927). On a method of investigating periodicities in disturbed series, with special reference to wolfer's sunspot numbers. Philosophical Transactions of the Royal Society. 226.

Résumé

Ce mémoire est consacré pour l'étude d'un processus fractionnaire à long mémoire. Dans la première partie, nous présentons le processus autorégressif fractionnaire ainsi que quelques propriétés probabiliste. Dans la seconde partie, nous effectuons une étude sur le comportement des fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation d'un modèle autorégressif fractionnaire à longue mémoire, en considérant trois cas d'innovations : indépendantes, fortement mélangées et à coefficient périodique. L'objectif est d'observer l'influence du mélange et de la périodicité sur le processus de longue mémoire à l'aide d'une simulation avec le logiciel R.

Mots clés : Processus autorégressive fractionnaire- Long mémoire - Mélange fort-FAR(1)- coefficients périodiques.

Abstract

This dissertation is devoted to the study of a long-memory fractional process. In the first part, we present the fractional autoregressive process along with some probabilistic properties. In the second part, we conduct a study on the behavior of the autocovariance and autocorrelation functions of a long-memory fractional autoregressive model, considering three cases of innovations : independent, strongly mixed, and with periodic coefficients. The objective is to observe the influence of mixing and periodicity on the long memory process through a simulation using the R software.

Keywords : Fractional autoregressive process - Long memory - Strong mixing - FAR(1) - Periodic coefficients.