

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane Mira de Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques



جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Mémoire de fin de cycle
En vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques
Option : Probabilités Statistique et Applications

Thème

Analyse de sensibilité et d'incertitude du modèle M/G/1/N avec pannes classiques

Réalisé par :

Mlle. HAMRAOUI Meriem

Devant le Jury composé de :

Mme. BACHI	Katia	M.C.B	Présidente	Université A.Mira de Béjaïa
M. OUAZINE	Sofiane	M.C.B	Rapporteur	Université A.Mira de Béjaïa
M. SOUFIT	Massinissa	M.C.B	Examineur	Université A.Mira de Béjaïa

Année universitaire : 2022 / 2023

Remerciements

En premier lieu je tiens à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné la force et la patience d'accomplir mon mémoire.

*Je tiens à remercier mon promoteur **M. OUAZINE Sofiane** pour avoir accepté de m'encadrer, je le remercie aussi pour son implication, son soutien, sa disponibilité et ses encouragements tout au long de ce travail.*

*Je tiens à remercier également l'honorable jury : la présidente **Mme. BACHI Katia** et l'examineur **M. SOUFIT Massinissa** pour avoir consentir à évaluer et à juger mon travail.*

Je tiens à remercier tous les enseignants du département de mathématiques qui ont assuré ma formation universitaire.

Je tiens à remercier tous ceux et celles qui ont contribué de près ou de loin à finaliser ce modeste travail.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à tous ceux et celles qui m'ont aidé de proche ou loin, notamment :

À mes parents qui ne m'ont jamais laissé tomber dans toutes les circonstances. Que Dieu vous protège et que la réussite soit toujours à ma portée pour que je puisse vous combler ce bonheur.

À mes chères sœurs Wahiba, Fatiha, Saliha, Leubna et Rahma.

À mon cher frère Abdelouahab.

À A mes chères nièces Yassmine, Nihade, Amina et mes neveux Oussama et Amine.

À tous ceux qui me sont chers.

Meriem

Table des matières

Liste des figures	I
Liste des tableaux	II
Introduction générale	1
1 Files d'attente en générale	3
1.1 Chaîne de Markov finies	3
1.1.1 Définitions et rappels	3
1.2 Systèmes de files d'attente classiques	5
1.2.1 Description d'une file d'attente simple	5
1.2.2 Notation de Kendall	6
1.2.3 Analyse mathématique d'un système d'attente	7
1.2.4 Type de modèles	7
1.2.5 Mesures de performance d'une file d'attente	8
1.3 Systèmes de files d'attente complexes	10
1.3.1 Systèmes de files d'attente avec serveur non fiable	10
2 Analyse de sensibilité et d'incertitude des files d'attente	12
2.1 Analyse de sensibilité	12
2.1.1 Analyse de sensibilité avec la méthode de Sobol	13
2.1.2 Indice de sensibilité globale de Sobol	13
2.2 Analyse d'incertitude	14
2.2.1 Notion d'incertitude paramétrique	15
2.2.2 Quantification et propagation de l'incertitude paramétrique	15
3 Application sur le modèle d'attente $M/G/1/N$ avec pannes classiques	19
3.1 Description du modèle	19
3.2 Analyse de sensibilité du modèle	21
3.2.1 Indice de sensibilité de Sobol de premier ordre	21
3.2.2 Calcul numérique	23
3.3 Analyse d'incertitude du modèle	27

3.3.1	Sur le modèle $M/M/1/4$ avec pannes	27
3.3.2	Sur le modèle $M/E_2/1/4$ avec pannes	30
3.3.3	Sur le modèle $M/H_2/1/4$ avec pannes	31
3.3.4	Sur le modèle $M/D/1/4$ avec pannes	34
3.3.5	Simulation de la moyenne et de l'écart type	36
	Conclusion générale	37
	Bibliographie	38

Table des figures

1.1	Représentation d'une de file d'attente simple.	6
2.1	Principales étapes d'une analyse de propagation d'incertitude.	17
3.1	Indices de Sobol pour les paramètres de modèle $M/M/1/4$ avec pannes classiques.	24
3.2	Indices de Sobol pour les paramètres de modèle $M/E_2/1/4$ avec pannes classiques.	25
3.3	Indices de Sobol pour les paramètres de modèle $M/H_2/1/4$ avec pannes classiques.	26
3.4	Indices de Sobol pour les paramètres de modèle $M/D/1/4$ avec pannes classiques.	27
3.5	Histogramme du paramètre incertain λ de modèle $M/M/1/4$ avec pannes classiques.	29
3.6	Histogramme du paramètre incertain μ de modèle $M/M/1/4$ avec pannes classiques.	29
3.7	Histogramme du paramètre incertain α de modèle $M/M/1/4$ avec pannes classiques.	30
3.8	Histogramme du paramètre incertain λ de modèle $M/E_2/1/4$ avec pannes classiques.	31
3.9	Histogramme du paramètre incertain λ de modèle $M/H_2/1/4$ avec pannes classiques.	32
3.10	Histogramme du paramètre incertain μ_2 de modèle $M/H_2/1/4$ avec pannes classiques.	33
3.11	Histogramme du paramètre incertain α de modèle $M/H_2/1/4$ avec pannes classiques.	33
3.12	Histogramme du paramètre incertain β de modèle $M/D/1/4$ avec pannes classiques.	35
3.13	Histogramme du paramètre incertain d de modèle $M/D/1/4$ avec pannes classiques.	35

Liste des tableaux

3.1	Espérance et écart type par la simulation de Monte Carlo pour les quatre modèles étudiés.	36
-----	---	----

Introduction générale

La théorie des files d'attente se base sur l'étude de systèmes où des clients se succédant et demandant un service. Puisqu'un client occupe le serveur pendant un certain temps, les autres clients doivent attendre avant d'être servis, formant ainsi une file d'attente. Les files d'attente sont aujourd'hui des phénomènes que l'on rencontre quotidiennement dans de très nombreux domaines et sous diverses formes.

L'étude de système de files d'attente a vu naissance en 1909 par l'ingénieur Danois Erlang, lors de ses travaux sur la gestion des réseaux téléphoniques. Depuis, l'analyse de performances des systèmes à flux discret utilise les modèles d'attente comme un outil vu leur qualité puissante.

L'objet principal des files d'attente est de résoudre un système où des entités, appelées clients, cherchent à accéder à un service, tout en prenant en considération la situation du serveur soit libre, occupé ou bien en panne.

Les systèmes de files d'attente avec pannes sont largement utilisés pour modéliser les problèmes rencontrés dans les ordinateurs, les systèmes de fabrication et les réseaux de communication. Plusieurs chercheurs ont étudié les systèmes de files d'attente dont le serveur est sujet à des pannes. White et Christie [33] ont étudié un système de files d'attente avec pannes et leur relation avec le modèle prioritaire. Avi-Itzhak [5] et Gaver [13] ont considéré un système d'attente, avec serveur sujet à des pannes, sous différentes disciplines de service.

Lors de la modélisation d'un système d'attente, le manque d'informations sur les valeurs des paramètres caractérisant le système et la connaissance imprévisible de son comportement sont les deux facteurs majeurs que l'ingénieur puissent rencontrer, c'est à partir de là que l'expression "incertitude paramétrique" intervient pour définir tel scénario, c'est à dire, l'incertitude des paramètres du modèle. En effet, la construction de tout modèle mathématique est soumise aux sources d'incertitude qui peuvent être classées en deux types, à savoir : incertitude aléatoire et incertitude épistémique [12]. Le premier étant irréductible et dû à la variabilité naturelle des phénomènes aléatoires. Le deuxième est dû à un manque de connaissances qui peut être réduit en faisant davantage d'efforts (recueil de données, consultation d'experts, etc).

Pour résoudre ce problème, plusieurs méthodes ont été mises en place pour l'analyse de sensibilité de ces phénomènes complexes. Ces méthodes permettent d'évaluer l'influence des paramètres d'un modèle à la variation des sorties du modèle. L'analyse de sensibilité décrit comment les incertitudes d'entrée se répercutent sur les variables de sortie. Comme ces informations sont utilisées pour prendre des décisions sur le phénomène étudié, il est important d'avoir à l'esprit que des incertitudes sont associées au modèle utilisé.

Au cours de ces dernières années, l'une des méthodes les plus utilisées pour le traitement des problèmes liés à l'analyse de la propagation des incertitudes paramétriques est l'échantillonnage de Monte-Carlo [31]. Cette méthode consiste à générer des réalisations (indépendantes) des paramètres aléatoires basées sur leurs densités de probabilités.

L'objet assigné à ce mémoire premièrement, est d'effectuer une analyse de sensibilité de la distribution stationnaire du modèle $M/G/1/N$, en d'autres termes, de dégager les paramètres les plus influents du modèle en utilisant les indices de Sobol. Ensuite effectuer une analyse d'incertitude paramétrique afin d'étudier la robustesse du modèle.

Ce mémoire contient trois chapitres essentiels, qui sont structurés comme suit :

- Le premier chapitre est consacré à la présentation de quelques notions sur les files d'attente.
- Le deuxième chapitre porte sur l'étude théorique en un premier lieu, l'analyse de sensibilité globale de Sobol est proposé comme méthode d'analyse, en deuxième lieu, l'analyse de l'incertitude, on va s'intéresser à une méthode de propagation et de quantification de l'incertitude paramétrique qui est la méthode de Monte Carlo.
- Le troisième chapitre est consacré à l'application des méthodes de simulation de Monte Carlo aux systèmes de files d'attente $M/G/1/N$ avec pannes classiques, afin d'estimer les indices de sensibilité des paramètres d'entrées du modèle, ainsi, la quantification de l'incertitude à travers de l'approximation de l'espérance et l'écart type des composantes de la distribution stationnaire.

Nous terminons notre travail par une conclusion et une bibliographie.

Chapitre 1

Files d'attente en générale

La théorie des files d'attente est une théorie mathématique relevant du domaine des probabilités, qui étudie les solutions optimales de gestion des files d'attente, ou queues [15]. Une queue est nécessaire et se créera d'elle même si ce n'est pas anticipé, dans tous les cas où la demande est supérieure à la capacité d'écoulement d'une offre (un service). Elle peut s'appliquer à différentes situations : gestion des avions au décollage ou à l'atterrissage, attente des clients et des administrés aux guichets, ou bien encore traitement informatique de données par un serveur..., etc.

Dans ce chapitre, nous présentons d'abord les concepts essentiels des chaînes de Markov discrètes à espace d'état fini, puisque la modélisation des systèmes de files d'attente est basée sur les chaînes de Markov. Ensuite nous donnons une description générale des systèmes de files d'attente, et les systèmes avec pannes.

1.1 Chaîne de Markov finies

1.1.1 Définitions et rappels

Définition 1.1.1. *Un processus stochastique [7] est défini comme une famille de variables aléatoire X_t , $t \in T$, où chaque variable aléatoire X_t est indexé par un paramètre $t \in T$ qui est généralement appelé le paramètre de temps si $T \subseteq \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$. L'ensemble de toutes les valeurs possibles de X_t (pour chaque $t \in T$) est connu comme l'espace d'état \mathbb{S} du processus stochastique.*

- Si $T \subseteq \mathbb{Z}$, on parle alors de processus stochastique à temps discret noté $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.
- Si $T = [0, +\infty[$; on dit alors que $\{X_t; t \geq 0\}$ est un processus stochastique à temps continu.

L'ensemble de valeurs de $X(t)$ s'appelle l'espace d'état, qui peut également être discret

(fini ou dénombrable), ou continu.

Dans ce qui suit, on s'intéresse qu'aux chaînes de Markov à espace d'état fini.

Définition 1.1.2. *Un processus stochastique $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ est appelé une chaîne de Markov [17] si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous les états $\{i_1, \dots, i_{n-1}, i, j\} \in \mathbb{S}$:*

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \quad (1.1.1)$$

Autrement dit, étant donné l'état actuel du système, nous pouvons faire des prévisions au sujet de son état futur sans consulter les états passés.

L'équation (1.1.1) s'appelle la propriété de Markov, et en fait, n'importe quel processus stochastique satisfaisant la propriété de Markov sera considéré comme une chaîne de Markov.

Il existe plusieurs cas particuliers de chaîne de Markov. Nous allons définir l'une d'entre elles :

Définition 1.1.3. *(Chaîne de Markov homogène).*

On dit qu'une chaîne de Markov (X_1, \dots, X_n, \dots) est homogène si :
 $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (i, j) \in \mathbb{S}$,

$$P_{i,j} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \text{ ne dépend pas de } n.$$

conséquence :

$$\forall n \in \mathbb{N}; \forall (i, j) \in \mathbb{S}; P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P(X_1 = j | X_0 = i)$$

$P_{i,j}$ est la probabilité de transition de l'état i vers l'état j .

La matrice de transition est une matrice carrée stochastique, $P = (P_{ij})$ $i, j \in \mathbb{S}$, vérifiant les deux conditions :

— *Positivité de leurs éléments :* $P_{ij} \geq 0, \forall (i, j) \in \mathbb{S}$.

— *Somme des éléments de chaque lignes est 1 :*

$$\sum_{j \in \mathbb{S}} P_{ij} = 1, \forall i \in \mathbb{S}.$$

Définition 1.1.4. *(Probabilité de transition en n étapes)*

On définit la probabilité de transition en n étapes par la probabilité de passage de l'état i vers l'état j en n étapes.

Soit : $P_{ij}^{(n)} = P(X_n = j | X_0 = i)$, $n \geq 1$.

Loi de probabilité de X_n :

La probabilité qu'une chaîne de Markov se retrouve dans l'état j après n étapes, si elle se trouve actuellement dans l'état i , est donnée par l'élément (i, j) de la matrice P^n .

On définit la distribution de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par le vecteur $\pi(n) = (\pi_1(n), \pi_2(n), \dots)$, avec $\sum_{i \in \mathbb{S}} \pi_i(n) = 1$, donc pour calculer la distribution des états de la chaîne après n étapes $\pi^{(n)}$ il faut connaître d'abord la distribution initiale $\pi^{(0)}$ et : $\pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^n$. Soit $\pi(0)$ la distribution initiale, d'après le théorème des probabilités totales on a :

$$\pi_j(n) = \sum_{i \in \mathbb{S}} \pi_i(0) p_{ij}^n$$

forme matricielle $\pi(n) = \pi(0) P^n$, $n = 1, 2, \dots$

1.2 Systèmes de files d'attente classiques

Un système de file d'attente consiste d'un ou de plusieurs serveurs qui fournissent un service d'une certaine nature à des clients qui se présentent. Les clients qui arrivent et trouvent tous les serveurs occupés rejoindront (généralement) une ou plusieurs files (ou lignes) devant les serveurs, d'où la qualification de file d'attente.

1.2.1 Description d'une file d'attente simple

Le système de file d'attente est caractérisé par les composantes suivantes :

- le processus d'arrivée : L'arrivée des clients au sein du système est décrite par la distribution des intervalles séparant deux arrivées consécutives.
- le processus de service : la quantité de service demandée par un client, qui est définie par la distribution du temps aléatoire de service.
- Nombre de serveurs : Le service peut être constitué d'un ou plusieurs serveurs, qui peuvent être disposés d'une façon parallèle.
- Capacité du système : Elle représente le nombre maximal de clients dans le système. Un client arrivant et trouvant ce nombre de clients présents dans le système sera perdu.
- la discipline de la file : La discipline de service indique dans quel ordre sont traités les clients. Un certain nombre de règles courantes sont adoptées. Les principales disciplines de service les plus utilisées sont :

FIFO (First In First Out) : Premier Arrivée, Premier Servi, i.e., les clients sont servis dans leur ordre d'arrivée.

LIFO (Last In First Out) : Dernier Arrivée, Premier Servi, i.e., le dernier client arrivée sera le premier servi.

Et voilà une illustration d'une file d'attente simple dans la figure (1.1).

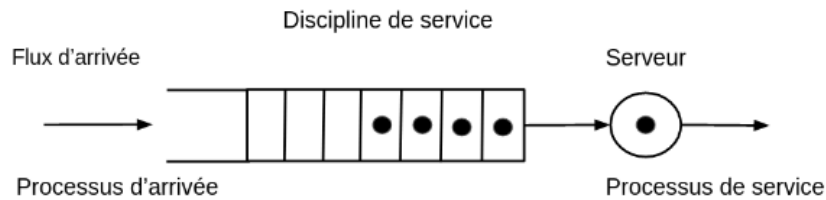


FIGURE 1.1 – Représentation d'une de file d'attente simple.

1.2.2 Notation de Kendall

La notation de Kendall est une notation symbolique, utilisée pour décrire le type de la file d'attente. Elle est définie comme suit :

$$A/B/s/N/M/D$$

Avec :

- A : la distribution des temps d'inter-arrivées.
- B : la distribution des temps de service.
- s : le nombre de serveurs en parallèle.
- N : la capacité du système.
- M : la taille de la population des clients.
- D : la discipline de service, qui est FIFO par défaut.

Pour spécifier le processus d'entrée (processus d'arrivées) et de sortie (processus de service), on utilise souvent les symboles :

- M : loi Exponentielle (Processus markovien).
- D : loi Constante (Cas déterministe).

- G : loi Générale(quelconque).
- H_k : loi Hyperexponentielle d'ordre k .
- E_k : loi d'Erlang d'ordre k .

1.2.3 Analyse mathématique d'un système d'attente

L'étude mathématique d'un système d'attente se fait à partir de la distribution stationnaire du processus $\{X(t); t \geq 0\}$. Ainsi, on cherche à calculer :

- les probabilités d'état $p_n(t) = P(X(t) = n)$ définissant le régime transitoire du processus stochastique $\{X(t), t \geq 0\}$.
Généralement la distribution de X_n varie en fonction du temps et dépend de la distribution initiale $\pi(0)$.
- le régime stationnaire du processus est défini par :

$$\pi_n = \lim_{t \rightarrow +\infty} p_n(t) = P(X(+\infty) = n) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2.1)$$

Nous écrivons X au lieu de $X(+\infty)$.

À l'exception de certains modèles simples, le calcul explicite du régime transitoire est souvent pénible, voire impossible. On se contentera alors de déterminer le régime stationnaire d'un phénomène d'attente.

1.2.4 Type de modèles

Modèles markoviens

Pour un système d'attente markovien, les deux quantités stochastiques principales, qui sont le temps inter-arrivées et la durée de service, sont des variables aléatoires indépendantes et exponentiellement distribuées (le modèle (M/M/1)). La propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle facilite l'étude de ces modèles. L'étude mathématique de tels systèmes se fait par l'introduction d'un processus stochastique approprié. Ce processus est souvent le processus $\{X(t); t \geq 0\}$ défini comme étant le nombre de clients dans le système à l'instant t . L'évolution temporelle du processus markovien $\{X(t); t \geq 0\}$ est complètement défini grâce à la propriété d'absence de mémoire.

Modèles non markoviens

Les systèmes non markoviens sont des systèmes de files d'attente dont lesquels la propriété de Markov du processus de base $\{X(t); t \geq 0\}$ qui facilite l'étude de ces systèmes n'est plus valable. L'analyse mathématique de ces modèles est très délicate, voire impossible. Pour développer ce type de file d'attente on se ramène à choisir un processus de Markov à l'aide de l'une des méthodes d'analyse suivantes [1] :

1. **Méthode des étapes d'Erlang** : Son principe est d'approximer toute loi de probabilité ayant une transformée de Laplace rationnelle par une loi de *Cox* (mélange de lois exponentielles). Cette dernière possède la propriété d'absence de mémoire par étapes.
2. **Méthode des variables supplémentaires** : Elle consiste à compléter l'information sur le processus $\{X(t); t \geq 0\}$ en lui donnant un caractère Markovien, ainsi on se ramène à l'étude du processus $\{X(t), A(t_1), A(t_2), \dots, A(t_n)\}$, où $A(t_k), k \in \{1, 2, \dots, n\}$ sont dites variables supplémentaires.
3. **Méthode de la chaîne de Markov induite** : Une méthode élaboré par Kendall, elle consiste à choisir une séquence d'instantants $1, 2, 3, \dots, n$ (déterministes ou aléatoires) telle que la chaîne induite $X_n, n \geq 0$, où $X_n = X(n)$ est le nombre de clients dans le système à l'instant n , soit markovienne et homogène.
4. **Méthode des événements fictifs** : Le principe de cette méthode est d'introduire des événements fictifs qui permettent de donner une interprétation probabiliste aux transformées de Laplace et aux variables aléatoires décrivant le système étudié.
5. **Simulation** : C'est un procédé d'imitation artificielle d'un processus réel donné sur ordinateur qui permet d'étudier les systèmes les plus complexes, de prévoir leurs comportements et de calculer leurs caractéristiques. Les résultats obtenus ne sont qu'approximatifs, mais peuvent être utilisés avec une bonne précision. Cette technique se base sur la génération de variables aléatoires.

1.2.5 Mesures de performance d'une file d'attente

L'objectif de la théorie des systèmes d'attente est d'en étudier et d'estimer les valeurs caractéristiques permettant de décrire les performances d'un tel système à partir de la distribution stationnaire du processus $\{X(t); t \geq 0\}$.

les principales mesures de performance sont :

- L : le nombre moyen de clients dans le système.
- L_q : le nombre moyen de clients dans la file d'attente.
- T : le temps de séjours dans le système.
- W : la durée moyenne de séjour dans le système (attente et service).
- W_q : la durée moyenne d'attente dans la file.

Soient les paramètres suivants :

- λ : le taux d'arrivées de client dans le système.
- μ : taux de service.
- $1/\lambda$: intervalle de temps moyen séparant deux arrivées consécutives.
- $1/\mu$: durée moyenne de service.
- $\rho = \lambda/\mu$: l'intensité de trafic.

Formules de Little

La formule de Little (démontrée par Little [18]) est une relation très utile dans la théorie de files d'attente, la loi de Little est applicable seulement si le système est stable.

Théorème 1.2.1. *La relation entre le nombre moyen de clients dans le système et le temps moyen de séjour d'un client dans le système est donnée par la formule :*

$$L = \lambda_e W, \quad \lambda_e < \lambda.$$

Où λ_e est le taux d'entrée des clients dans le système.

La relation entre le nombre moyen de clients dans la file et le temps moyen d'attente d'un client dans la file est :

$$L_q = \lambda_e W_q, \quad \lambda_e < \lambda.$$

Remarque 1.2.1. *Si la capacité du système est infinie on a :*

$$\lambda_e = \lambda \text{ Sinon on a } \lambda_e < \lambda$$

D'autres relations

$$\begin{cases} L = L_q + \frac{\lambda_e}{\mu}; \\ W = W_q + \frac{1}{\mu}. \end{cases}$$

1.3 Systèmes de files d'attente complexes

L'analyse des systèmes de files d'attente complexes se fait par l'étude de plusieurs variantes. Les systèmes d'attente complexes les plus élaborés sont :

1. Système de files d'attente avec arrivées négatives.
2. Système de files d'attente avec vacances.
3. Système de files d'attente avec rappels.
4. Système de files d'attente avec serveur non fiable.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'étude des systèmes d'attente avec serveur non fiable (systèmes avec pannes).

1.3.1 Systèmes de files d'attente avec serveur non fiable

Plusieurs chercheurs [5, 10, 9] ont étudié les systèmes de files d'attente avec serveur non fiable. White et Christie [33] ont étudié la relation entre un système de file d'attente avec pannes et le modèle prioritaire. Avi-Itzhak et Naor [5], ont investi l'analyse mathématique des modèles de files d'attente avec pannes. Avi-Itzhak et Naor [5] et Gaver [13] ont considéré le système d'attente $M/G/1$, et le système de files d'attente $M^X/G/1$, avec serveur sujet à des pannes, sous différentes disciplines de service. Madan [19], a étudié le système de files d'attente $M/M^X/1$ dont le processus de service est sujet à des interruptions, il a obtenu aussi la fonction génératrice de la longueur de la file.

Lors de l'analyse de fonctionnement [2] de ces modèles de file d'attente, on supposait que les serveurs étaient absolument fiables. Cependant, en pratique dans plusieurs situations, on trouve souvent des cas où le serveur est assujéti à tomber en panne. Dans ce cas, le service des clients est immédiatement interrompu. Concernant la nature de ces interruptions, on distingue généralement les cas suivants :

- **Pannes de nature conservatrices** [6] : Dès que la panne se produit, le service est interrompu, mais le client reste auprès du serveur et attend que ce dernier soit réparé. Après la réparation, le service reprend là où il a été interrompu (la partie de service déjà acquise est donc conservée).
- **Pannes de nature non conservatrices** [6] : Dans ce cas, la partie de service déjà acquise est détruite. Après la réparation de la panne, le service reprend à zéro.
- **Pannes avec perte définitive de client** [3] : Dès que la panne se produit, le client quitte le système pour de bon.

- **Pannes avec perte momentanée de client** [16] : Dès que la panne se produit, le client quitte le serveur et entre en orbite. Par la suite, son comportement ne diffère en rien de celui des clients qui se trouvent déjà en orbite.

Les systèmes de files d'attente avec serveur non fiable [8] sont de grandes importance. Ainsi, les modèles mathématiques des systèmes et réseaux de files d'attente, les plus élaborés sont justement ceux qui tiennent compte de la possibilité pour les serveurs de tomber en panne. Ils se posent naturellement dans la modélisation de plusieurs applications, et en particulier dans le cadre de l'évaluation des performances des systèmes informatisés de production et de télécommunication. En effet, la fiabilité des serveurs influe beaucoup sur les caractéristiques du système. Par exemple, plus les indices de fiabilité des serveurs sont bas, plus le nombre de clients dans la file est élevé et plus la durée d'attente de chaque client dans la file est longue.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé les concepts essentiels des chaînes de Markov finies puis nous avons donné une description générale des systèmes de file d'attente et les systèmes avec pannes.

Lors de l'étude de ces systèmes, des grandes difficultés analytiques sont rencontrées. Pour pallier à ces difficultés, plusieurs auteurs ont tenté de développer des méthodes approximatives d'analyse de ce type de modèles. Parmi les principales approches développées au cours de ces dernières années on trouve l'analyse de sensibilité globale de Sobol et l'analyse de l'incertitude. L'étude de cette approche est l'objet du chapitre prochain.

Chapitre 2

Analyse de sensibilité et d'incertitude des files d'attente

L'analyse de sensibilité est une méthode qui permet d'évaluer l'influence des facteurs d'entrées d'un modèle à la variation des sorties du modèle. C'est une méthode étudie la façon dont la variabilité des entrées se répercute sur celle de sortie.

L'analyse de sensibilité est une discipline [32] à part entière de la statistique, très importante dans des travaux d'élaboration de modèle (numérique ou non), dans l'interprétation de leurs résultats et dans le cadre de la validation du modèle.

Après avoir déterminer les paramètres d'entrés les plus influents, on doit étudier leur incertitude sur le modèle.

Pour mener à bien une telle analyse de sensibilité et d'incertitude, plusieurs méthodes ont été déjà développées au cours de ces dernières années. T.A. Mara [20] et A. Saltelli [28] en dressent un large aperçu.

2.1 Analyse de sensibilité

Dans cette section, nous allons mentionner une analyse préliminaire qui est l'analyse de sensibilité, elle vient avant l'analyse d'incertitude. L'analyse de sensibilité étudie la contribution des variables d'entrée d'un modèle sur les variables de sortie. Il existe plusieurs types d'analyse de sensibilité, on peut les regrouper en deux groupes :

- Méthodes d'analyse de sensibilité locale : elle étudie l'influence local des variables d'entrée sur les sorties du modèle.
- Méthodes d'analyse de sensibilité globale : elle évalue l'influence de chaque variable à la variance des sorties.

Dans ce travail on va s'intéresser à la méthode d'analyse de sensibilité globale(méthode de Sobol).

2.1.1 Analyse de sensibilité avec la méthode de Sobol

L'analyse de sensibilité globale est un bon choix pour décrire les mesures de performance et le comportement d'un modèle de simulation complexe et non linéaire. D'ailleurs, cette méthode utilise la décomposition de la variance pour calculer les indices de sensibilité de Sobol et dépend fortement des méthodes d'échantillonnage et de la distribution des paramètres d'entrée. Elle peut être appliquée dans plusieurs problèmes dont le modèle est non linéaire. Spécifiquement, la méthode de Sobol est une méthode d'analyse de sensibilité globale basée sur la variance est appliquée à une fonction non linéaire. Elle est utilisée pour évaluer l'importance des entrées sur la sortie du modèle.

2.1.2 Indice de sensibilité globale de Sobol

Considérons un modèle mathématique qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}, \\ X &\mapsto Y = f(X). \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

La fonction f du modèle peut être complexe (système d'équations différentielles, distribution stationnaire...etc.), et est en pratique évaluée à l'aide d'un code informatique, plus ou moins onéreux en temps de calcul.

$X = (X_1, \dots, X_m)$ est un vecteur de variables d'entrées aléatoires, Y est une variable de sortie aussi aléatoire (l'image directe via une fonction f).

La méthode de Sobol utilise la décomposition de la variance pour calculer les indices de sensibilité de Sobol [30]. Cette méthode montre l'utilité des bases de Fourier pour la décomposition de la fonction du modèle et la décomposition fonctionnelle. Dans ce chapitre, on s'intéresse aux calculs des indices de Sobol de premier ordre, bien évidemment il existe des indices de Sobol avec un ordre supérieur à 1.

Définition 2.1.1. *L'indice de sensibilité [14] exprimant la sensibilité de Y à X_i est défini par :*

$$S_i = \frac{V(E[Y|X_i])}{V(Y)}, i = 1, \dots, m. \tag{2.1.2}$$

Lorsque la fonction f est complexe et non connue analytiquement, le calcul des indices de sensibilité de Sobol de premier ordre s'avère très difficile et même des fois impossible. On ne peut pas calculer ces indices de sensibilité, il est alors nécessaire de les estimer.

Afin d'estimer les indices de Sobol, il existe plusieurs méthodes, nous présentons la méthode de Monte Carlo [31], simple en terme de formulation et d'utilisation.

Indice de Sobol par la simulation de Monte Carlo

Dans beaucoup de problèmes, on s'est amené au calcul de l'intégrale du type :

$$\int_D f(X) dX.$$

La méthode Monte Carlo, désigne une famille de méthodes algorithmiques visant à calculer une valeur numérique approchée en utilisant des procédés aléatoires de cette façon :

$$I \approx \hat{I}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(X_i).$$

Considérons un N -échantillon de réalisation des variables d'entrée (X_1, \dots, X_m) :

$$X_N = (X_{j1}, X_{j2}, \dots, X_{jm}) \quad j = 1, \dots, N.$$

L'espérance et la variance de la variable de sortie Y sont notées par f_0 et V . Elles sont estimées par \hat{f}_0 et \hat{V} à l'aide de la méthode de Monte Carlo comme suit :

$$\hat{f}_0 \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(X_{j1}, X_{j2}, \dots, X_{jm}). \quad (2.1.3)$$

$$\hat{V} \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f^2(X_{j1}, X_{j2}, \dots, X_{jm}) - \hat{f}_0^2. \quad (2.1.4)$$

Sobol a introduit une technique d'estimation des indices de sensibilité de premier ordre [30].

$$V_i = V[E(Y/X_i)] = E[E(Y/X_i)^2] - E[E(Y/X_i)]^2 = U_i - E(Y)^2. \quad (2.1.5)$$

Sobol propose d'estimer la quantité U_i de manière classique (2.1.2). mais en tenant compte du conditionnement à X_i , en faisant varier entre les deux appels à la fonction f toutes les variables sauf la variable X_i . On considère deux échantillons de réalisations des variables d'entrée.

$$\begin{aligned} \hat{U}_i &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(X_{j1}^{(1)}, \dots, X_{j(i-1)}^{(1)}, X_{ji}^{(1)}, X_{j(i+1)}^{(1)}, \dots, X_{jm}^{(1)}) \\ &\quad \times f(X_{j1}^{(2)}, \dots, X_{j(i-1)}^{(2)}, X_{ji}^{(1)}, X_{j(i+1)}^{(2)}, \dots, X_{jm}^{(2)}). \end{aligned}$$

Les indices de sensibilité de premier ordre peuvent être estimés par :

$$\hat{S}_i = \frac{\hat{V}_i}{\hat{V}} = \frac{\hat{U}_i - \hat{f}_0^2}{\hat{V}}.$$

2.2 Analyse d'incertitude

L'analyse d'incertitude est une analyse vient après l'analyse de sensibilité, elle s'intéresse à l'influence des facteurs d'un modèle sur les sorties de ce modèle par propagation à travers la fonction f du modèle. Une analyse d'incertitude permet principalement de

répondre à la question : quel est le niveau d'incertitude la sortie Y du modèle induit par l'incertitude sur les entrées X_i ?

Les étapes principales d'une analyse d'incertitude sont de déterminer les sources d'incertitude sur les entrées d'effectuer l'analyse et d'évaluer leur influence sur la sortie des modèles en proposant une modélisation de l'incertitude sur la sortie. Généralement l'analyse d'incertitude est la mise en œuvre dans un cadre probabiliste particulièrement appliqué pour répondre aux questions posées.

2.2.1 Notion d'incertitude paramétrique

On parle de l'incertitude paramétrique lorsque les paramètres d'entrées sont incertains et engendrent de l'incertitude dans les résultats finaux. En effet, la construction de tout modèle mathématique est soumise aux sources d'incertitude qui peuvent être classées en deux groupes, à savoir :

Incertitude aléatoire

L'incertitude aléatoire dite aussi stochastique est une source apparaît lors de l'estimation des paramètres du modèle. Cette incertitude est la variabilité naturelle sur les paramètres d'entrée physiques. On peut dire alors que c'est une incertitude responsable pour obtenir des résultats différents lorsque l'on répète dans les mêmes conditions une expérience. Des exemples d'incertitude aléatoire apparaissent entre autres dans les conditions aux limites ou dans la description géométrique du modèle. La variabilité des conditions aux limites et des paramètres géométriques sera toujours présente en raison de la variabilité naturelle et de la précision limitée, par exemple, des processus de production.

Incertitude épistémique

Le mot épistème, du grec signifie "connaissance". L'incertitude épistémique appelée aussi une incertitude réductible à cause de la réduction d'incertitude lors de l'augmentation des connaissances. Pour ces incertitudes contenant une certaine imprécision, aucune fonction de densité de probabilité ne peut être spécifiée. Les exemples liés à ce type d'incertitudes sont données expérimentales insuffisantes ou des connaissances physiques insuffisantes du système analysé.

2.2.2 Quantification et propagation de l'incertitude paramétrique

Les principales étapes d'une analyse de propagation d'incertitude à travers un modèle numérique peuvent être décrites suivant un algorithme qui comprend quatre étapes [4] :

- **Étape 0** : Elle consiste à proposer un modèle mathématique du système physique étudié.

- **Étape 1** : Elle a pour objectif de modéliser les paramètres sujets à des variabilités (propriétés intrinsèques des matériaux, géométrie du modèle ou les champs sources) sous formes de variables ou champs aléatoires. Cette étape est cruciale pour une bonne analyse stochastique car elle requière des essais expérimentaux et le jugement d'experts. Une modélisation insuffisamment représentative des paramètres aléatoires peut conduire à des conclusions erronées sur les réponses aléatoires du système réel. La mise en œuvre de méthodes probabilistes suppose que la loi conjointe de toutes les grandeurs d'entrée aléatoires est connue. Or, ce n'est souvent pas le cas en pratique du fait que les données expérimentales manquent ou sont inexistantes car très coûteuses à obtenir, voire même inaccessibles. De plus, dans la culture de l'ingénieur, les données d'entrée sont souvent supposées connues et il existe peu de modèles dans la littérature de lois de comportement probabilistes. Les analyses stochastiques des systèmes réels où les incertitudes sont identifiées à partir des mesures expérimentales sont rares. Dans le cas où suffisamment de mesures expérimentales sont disponibles, les méthodes les plus répandues dans la littérature pour modéliser les incertitudes sont la méthode de vraisemblance [11, 24], la méthode des noyaux [25, 27] ou les méthodes Bayésiennes [26].
- **Étape 2** : C'est l'étape de propagation des incertitudes de l'étape 1 à travers le modèle construit à l'étape 0. Elle peut nécessiter un effort plus au moins conséquent en implémentation informatique suivant la méthode de propagation retenue.
- **Étape 3** : Cette étape de post-traitement nous permet d'exploiter les résultats de l'étape 2. Elle permet en particulier d'obtenir les densités de probabilité des grandeurs locales et globales et de réaliser une étude de sensibilité. Cette dernière permet de classer les paramètres d'entrée aléatoires suivant leurs influences sur les solutions.

Une représentation schématique de ces étapes est illustrée sur la figure 2.1.

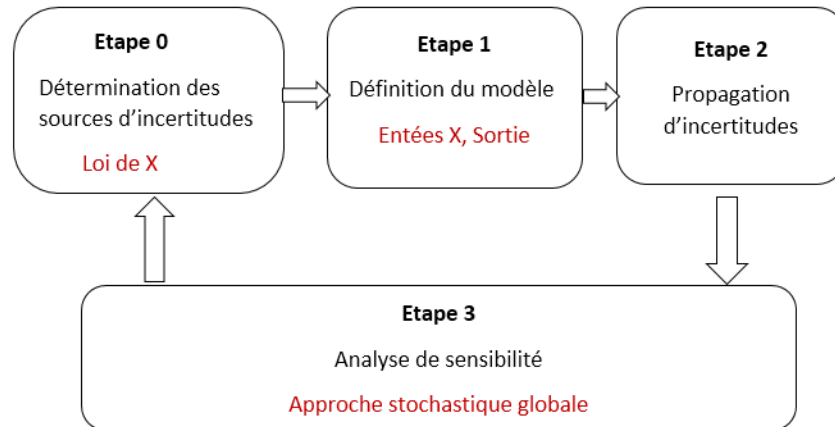


FIGURE 2.1 – Principales étapes d'une analyse de propagation d'incertitude.

Après avoir identifier les différentes sources d'incertitude, on doit aborder sa propagation dans un modèle numérique, afin d'estimer l'incertitude sur la sortie qui est induite par les paramètres d'entrée incertains. L'étude de la propagation des incertitudes paramétriques à travers des modèles de prédiction déterministes peut se faire par plusieurs méthodes, à savoir : l'ensemble flous, méthode des séries de Taylor [23, 22], l'arithmétique d'intervalles, ...etc. Dans ce travail, on s'intéresse à la simulation des paramètres incertains par la méthode d'échantillonnage de Monte Carlo [21, 29].

Méthode d'échantillonnage Monte Carlo

L'une des méthodes les plus couramment utilisées pour le traitement des problèmes liés à l'analyse de la propagation des incertitudes paramétriques est la méthode d'échantillonnage Monte Carlo [31]. Le principe de la méthode consiste à générer aléatoirement un échantillon contenant m variables incertains (x_1, \dots, x_m) suivant une distribution de probabilité $\{x^{(1)}, \dots, x^{(N)}\}$, et les injecter, ensuite, dans le modèle déterministe $Y = f(x)$.

- **Étape 1** : Affecter une densité de probabilité à chaque paramètre d'entrée $x_i; i = 1, \dots, m$.
- **Étape 2** : Générer un échantillon de taille N du vecteur X et supposons que les paramètres sont indépendants.
- **Étape 3** : Déterminer d'une manière aléatoire une valeur à chaque paramètre selon leur densité de probabilité.
- **Étape 4** : Calculer les différentes statistiques de la distribution de sortie : moyenne, variance,....

On répète l'algorithme un nombre important de fois afin d'obtenir un échantillon

assez grand de valeurs sortantes pour garantir une estimation précise des statistiques du modèle.

L'espérance et la variance de la sortie Y peuvent être estimées en utilisant les expressions suivantes :

$$E(Y) \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(x^j). \quad (2.2.1)$$

$$V(Y) \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [f(x^j) - E(Y)]^2. \quad (2.2.2)$$

La méthode Monte Carlo est simple et facile à mettre en œuvre, son inconvénient majeur est qu'elle est très gourmande en temps de calcul, car elle nécessite des échantillons de très grandes taille.

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les différentes source d'incertitude, afin de quantifier cette incertitude, une étape préliminaire est recommandée, c'est l'analyse de sensibilité. Plus précisément, nous avons présenté l'estimation des indices de Sobol avec la méthode de simulation. L'analyse de sensibilité étudie la contribution des variables d'entrée d'un modèle sur les variables de sortie. Elle consiste à évaluer des indices de sensibilité qui quantifient combien une variable ou un groupe de variables contribue à la variance de la sortie. Cette nouvelle approche sera l'objet d'une application, dans le prochain chapitre, sur la file d'attente $M/G/1/N$ avec pannes classiques.

Chapitre 3

Application sur le modèle d'attente $M/G/1/N$ avec pannes classiques

Dans ce chapitre, nous considérons un système de file d'attente $M/G/1/N$ avec pannes classiques. Nous proposons la méthode de Monte Carlo pour étudier la propagation d'incertitude des paramètres dans la file d'attente considérée. De ce fait, une analyse de sensibilité est effectuée afin d'étudier l'impact des paramètres d'entrées de la distribution stationnaire du modèle considéré sur la sortie en supposant que ces paramètres sont incertains.

3.1 Description du modèle

Considérons la file d'attente $M/G/1/N$, dont le processus de service est sujet à des pannes. Les clients arrivent selon un processus de Poisson avec un taux λ . La distribution de la durée de service est générale, de fonction de répartition et de fonction de densité respectivement $S(x)$ et $s(x)$. La capacité de la file d'attente est finie de taille N et la discipline de service est FIFO.

L'état du système de file d'attente à un instant t est décrit par le processus stochastique suivant :

$$E(t) = \{X(t), N(t), Y(t), t \geq 0\}.$$

Où,

- $X(t) \in \{0, 1\}$: décrit les propriétés globales de la file telle que :

$$X(t) = \begin{cases} 0, & \text{si le serveur est en bon état;} \\ 1, & \text{si le serveur est en mauvais état (en panne).} \end{cases}$$

- $N(t) \in \mathbb{N}$: est le nombre de clients dans la file à l'instant t .
- $Y(t) \in \mathbb{R}^+$: est la quantité du service déjà reçue par le client qui est entrain d'être servi dans le système (0 si la file ne contient aucun client).

Le processus stochastique $E(t) = \{X(t), N(t), Y(t); t \geq 0\}$ d'espace d'état $\{0, 1\} \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}^+$ forme une chaîne de Markov de matrice de transition donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} & \cdots & p_{0,N-1} & 1 - \sum_{k=0}^{N-1} p_{0k} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1,N-1} & 1 - \sum_{k=0}^{N-1} p_{1k} \\ 0 & p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2,N-1} & 1 - \sum_{k=1}^{N-1} p_{2k} \\ 0 & 0 & p_{32} & p_{33} & \cdots & p_{3,N-1} & 1 - \sum_{k=2}^{N-1} p_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{N,N-1} & 1 - p_{N,N-1} \end{pmatrix}.$$

ses composantes sont données par [2] :

- Si $i = 0$
 - Si $j = 0$

$$P_{00} = (1 - \beta) \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dS(x). \quad (3.1.1)$$

- Si $j \geq 1$

$$P_{0j} = (1 - \beta) \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^j}{j!} dS(x) + (1 - \beta) \sum_{k=2}^{j+1} \beta^{k-1} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{j-k+1}}{(j - k + 1)!} dS(x). \quad (3.1.2)$$

- Si $i = j + 1, i \geq 1$

$$P_{ij} = (1 - \alpha) \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dS(x). \quad (3.1.3)$$

- Si $i \geq 1, j \geq i + 1$

$$\begin{aligned} P_{ij} &= (1 - \alpha) \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{j-i+1}}{(j - i + 1)!} dS(x) \\ &+ \alpha(1 - \beta) \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{j-i}}{(j - i)!} dS(x) \\ &+ \alpha(1 - \beta) \sum_{k=2}^{j-i+1} \beta^{k-1} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{j-k-i+1}}{(j - k - i + 1)!} dS(x). \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

- Si $i = j \geq 1$

$$P_{ii} = (1 - \alpha) \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} (\lambda x) dS(x) + \alpha(1 - \beta) \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dS(x). \quad (3.1.5)$$

- Sinon

$$P_{ij} = 0 \quad (3.1.6)$$

Avec $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \beta < 1$ et $\alpha + \beta < 1$ telles que :

- Lorsque le système n'est pas vide (c'est à dire $N(t) \geq 1$) et $Y(t) > 0$, alors le serveur est en bon état et la file sera dite en état $X(t) = 0$. À chaque instant de départ, $N(t)$ est diminué par un et $Y(t)$ devient 0 donc on est à l'état $\{X(t) = 0; N(t) = n; Y(t) = 0\}$. Si $N(t) \neq 0$, le système peut être dans l'un des deux états possibles :
Soit il reste à l'état $X(t) = 0$ avec une probabilité $1 - \alpha$ et il commence à servir au moins un des clients en attente ; ou il fait une transition à l'état $X(t) = 1$ avec une probabilité α , dans lequel il commence une période de panne.
- Lorsque le système $\{X(t) = 1; N(t) = n; Y(t) = 0\}$ c'est à dire, autant que la panne est longue et n'est pas terminée, les transitions en dehors de cet état auront lieu uniquement aux instants d'arrivée d'un client. En effet il fait une transition avec une probabilité β à l'état $\{X(t) = 1; N(t) = n + 1; Y(t) = 0\}$ et avec une probabilité $1 - \beta$ à l'état $\{X(t) = 0; N(t) = n + 1; Y(t) = 0^+\}$ (0^+ car un nouveau service sera commencé tout de suite).

3.2 Analyse de sensibilité du modèle

Dans cette section, nous allons estimer les indices de Sobol à l'aide de la méthode de Monte Carlo à partir de la distribution stationnaire d'un modèle de file d'attente avec pannes, afin d'évaluer la contribution d'une variable d'entrée sur la variable de sortie.

3.2.1 Indice de sensibilité de Sobol de premier ordre

Considérons l'application suivante :

$$\begin{aligned} \pi_l : \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \theta &\longmapsto \pi_l(\theta), \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Où, $\pi_l, l = 0, 1, \dots, N$ est la distribution stationnaire et $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ un vecteur des paramètres du modèle. Supposons que les paramètres du modèle $\theta_i, i = 1, 2, \dots, m$ sont indépendants. L'indice de sensibilité de premier ordre de Sobol exprimant l'influence de la distribution stationnaire au paramètre θ_i est donné par la formule suivante :

$$S_i = \frac{\text{Var}(E(\pi_l|\theta_i))}{\text{Var}(\pi_l)}, \quad i = 1, \dots, m; \quad l = 0, 1, \dots, N.$$

Remarque 3.2.1. *Les valeurs des indices de Sobol sont compris entre 0 et 1, permettent de déterminer le degré d'influence sur la sortie. De plus, plus l'indice se rapproche de 1, plus il est influent.*

Concernant les files d'attente du type M/G/1/N, on applique la technique d'échantillonnage de Monte Carlo, pour estimer les indices de Sobol du premier ordre. Pour cela, on suppose que les paramètres de ce modèle de file d'attente sont des variables aléatoires. Soit X_n un échantillon de taille n tel que :

$$X_n = (\theta_{k1}, \theta_{k2}, \dots, \theta_{km})_{k=1, \dots, n}$$

Notons, la moyenne de la distribution stationnaire π_l par $\mathbb{E}(\pi_l) = \hat{\pi}_l$ et sa variance par $\mathbb{V}(\pi_l) = \hat{V}_l$. les quantités $\hat{\pi}_l$ et \hat{V}_l sont estimées par :

$$\hat{\pi}_l = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \pi_l(\theta_{k1}, \theta_{k2}, \dots, \theta_{km}),$$

et

$$\hat{V}_l = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \pi_l^2(\theta_{k1}, \theta_{k2}, \dots, \theta_{km}) - \hat{\pi}_l^2.$$

Aussi la variance par rapport à chaque paramètre θ_i , notée V_i doit être estimée :

$$V_i = E[E(\pi_l/\theta_i)^2] - E[E(\pi_l/\theta_i)]^2 = U_i - E(\pi_l)^2.$$

La quantité U_i est estimée par U_i de manière classique mais en tenant compte du conditionnement en θ_i , en faisant varier entre les deux appels à la fonction π_l toutes les variables sauf la $i^{\text{ème}}$ variable. On considère alors deux échantillons Y_1^n et Y_2^n de variables d'entrée aléatoires θ_i :

$$\hat{U}_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \pi_l(\theta_{k1}^{(1)}, \theta_{k2}^{(1)}, \dots, \theta_{km}^{(1)}) \times (\theta_{k1}^{(2)}, \theta_{k2}^{(2)}, \dots, \theta_{km}^{(2)}),$$

$$\hat{U}_2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \pi_l(\theta_{k1}^{(1)}, \theta_{k2}^{(1)}, \dots, \theta_{km}^{(1)}) \times (\theta_{k1}^{(2)}, \theta_{k2}^{(1)}, \dots, \theta_{km}^{(2)}),$$

$$\widehat{U}_m = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \pi_l(\theta_{k1}^{(1)}, \theta_{k2}^{(1)}, \dots, \theta_{km}^{(1)}) \times (\theta_{k1}^{(2)}, \theta_{k2}^{(2)}, \dots, \theta_{km}^{(1)}),$$

Par conséquent, les indices de Sobol de premier ordre sont estimés par :

$$\widehat{S}_i = \frac{\widehat{U}_i - \widehat{\pi}_i^2}{\widehat{V}}.$$

3.2.2 Calcul numérique

Le processus de service a une grande importance dans l'analyse des performances d'un système de files d'attente, de plus dans la plupart des situations pratiques, la distribution de la durée de temps du service des clients est différente de la loi exponentielle. Pour cela, nous avons considéré comme loi de distribution de temps de service les quatres types des lois connues dans la littérature : (1) Exponentielle (M); (2) Erlang (E2); (3) Hyper-exponentielle (H2); (4) Déterministe (D). Le choix de ces quatres lois est argumenté sur le fait d'englober tous les cas possibles de coefficient de variation.

Dans la suite, nous présentons quelques exemples numériques aux quels nous avons fait notre étude, la sensibilité de la distribution stationnaire au variation des paramètres du modèle. On considère que les paramètres $\lambda, \mu, \mu_1, \mu_2, d$ sont uniformément répartis sur $[1,3]$ et α, β, q sur $[0,0.49]$. Nous fixons la capacité de la file $N = 4$ et nous estimons les valeurs des indices de sensibilité de premier ordre pour chaque composante de la distribution stationnaire pour chaque modèle analysé par la technique de Monte Carlo.

Exemple 3.2.1. Considérons le modèle $M/M/1/4$ avec pannes classiques, où la distribution des inter-arrivées et celle de temps de service sont exponentielles de moyenne $1/\lambda$ et $1/\mu$ repectivement. La fonction de densité de probabilité de la durée de service est donnée par :

$$f(x) = \mu e^{-\mu x}, \quad x \geq 0.$$

Soit le vecteur des paramètres d'entrées $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = (\lambda, \mu, \alpha, \beta)$.

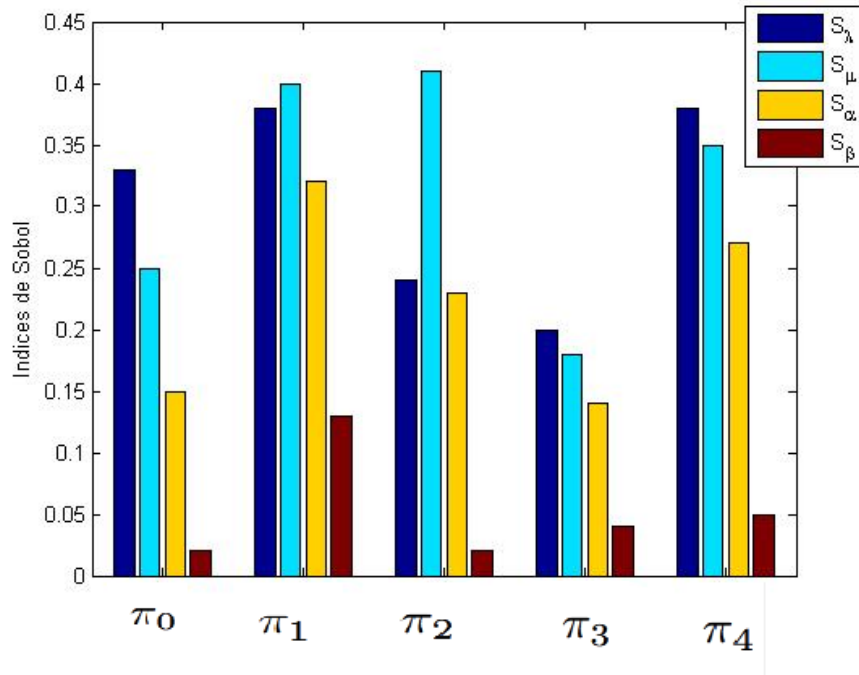


FIGURE 3.1 – Indices de Sobol pour les paramètres de modèle $M/M/1/4$ avec pannes classiques.

D'après la figure (3.1), nous constatons que les valeurs des indices de sensibilité les plus élevées sont celles qui correspondent aux paramètres λ , μ et α pour chaque composante de la distribution stationnaire, donc ces trois derniers sont les plus influents sur la distribution stationnaire, et le paramètre qui reste β est négligeable et considéré déterministe (constante).

Exemple 3.2.2. Considérons la file d'attente $M/E_2/1/4$ avec pannes classiques, où le processus des arrivées est exponentiel de moyenne $1/\lambda$ et la durée de service est d'Erlang d'ordre 2 avec un taux μ . La fonction de densité de probabilité de la loi Erlang d'ordre 2 est donnée par :

$$f(x) = \frac{\mu_1 \mu_2 (e^{-\mu_1 x} - e^{-\mu_2 x})}{(\mu_2 - \mu_1)}$$

Soit le vecteur des paramètres d'entrées $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5) = (\lambda, \mu_1, \mu_2, \alpha, \beta)$.

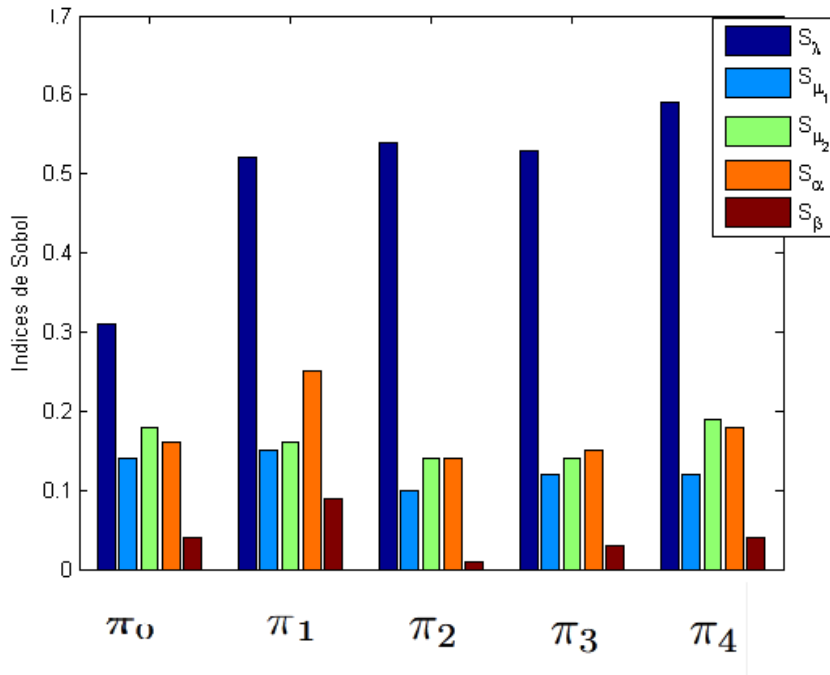


FIGURE 3.2 – Indices de Sobol pour les paramètres de modèle $M/E_2/1/4$ avec pannes classiques.

D'après les résultats obtenus dans la figure (3.2), on constate que la plus grande valeur des indices de sensibilité correspond au paramètre λ pour chaque composante de la distribution stationnaire du modèle. Donc le paramètre λ est plus influent sur le modèle étudié, car les autres paramètres ont une influence mais elle est moins par rapport à λ .

Exemple 3.2.3. On considère le modèle d'attente $M/H_2/1/4$ avec pannes classiques, où les clients arrivent selon un processus poissonien et le temps de service est distribué selon la loi hyper-exponentielle d'ordre 2 de taux μ_1 et μ_2 . La distribution de la loi hyper-exponentielle d'ordre 2 est donnée sous la forme suivante :

$$f(x) = q\mu_1 e^{-\mu_1 x} + (1 - q)\mu_2 e^{-\mu_2 x}$$

Soit le vecteur des paramètres d'entrées $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6) = (\lambda, \mu_1, \mu_2, \alpha, \beta, q)$.

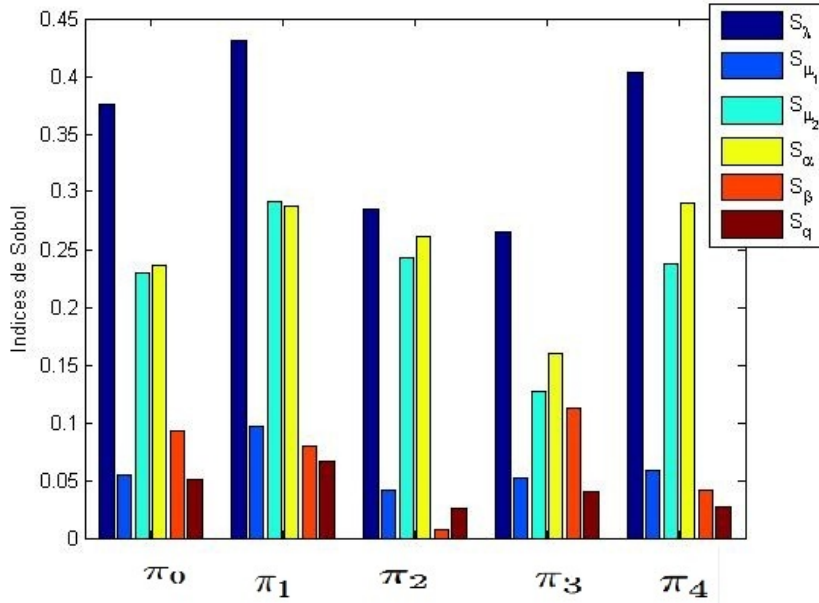


FIGURE 3.3 – Indices de Sobol pour les paramètres de modèle $M/H_2/1/4$ avec pannes classiques.

D'après la figure (3.3), on remarque que les indices de sensibilité les plus grands sont ceux qui correspondent aux paramètres λ , μ_2 et α . donc on dit que les indices de sensibilité associés aux paramètres λ , μ_2 et α pour chaque composante de la distribution stationnaire sont les plus influents et les autres paramètres qui reste sont considérés déterministes.

Exemple 3.2.4. on considère la file d'attente $M/D/1/N$ avec pannes, dont le processus des inter-arrivées est exponentiel, la durée de service est déterministe de taux d .

Soit le vecteur des paramètres d'entrés $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = (\lambda, \alpha, \beta, d)$.

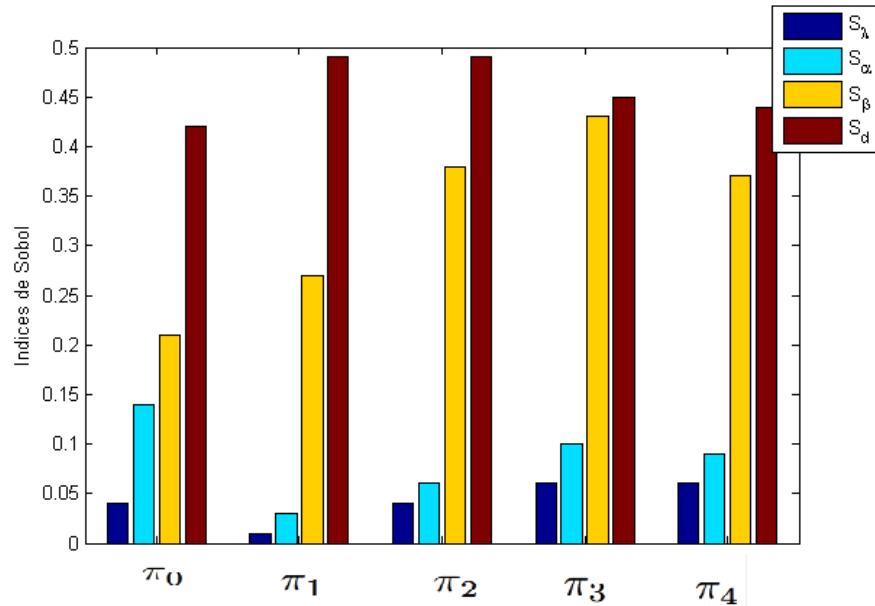


FIGURE 3.4 – Indices de Sobol pour les paramètres de modèle $M/D/1/4$ avec pannes classiques.

on constate d'après la figure (3.4), la valeur de l'indice de sensibilité la plus élevée correspond au paramètre d et β pour chaque composante de la distribution stationnaire, cette raison nous permet de considérer les indices de sensibilité associés aux paramètres d et β les plus influents, car les autres paramètres ont une influence mais moins par rapport à celle de d et β .

3.3 Analyse d'incertitude du modèle

Dans la section précédente, nous avons étudié la sensibilité des paramètres d'entrées sur la distribution stationnaire pour les quatre modèles. Dans la suite, nous étudions l'incertitude de ces paramètres en estimant la moyenne et l'écart type de chaque composante de la distribution stationnaire $\pi_l, l = 0, \dots, N$ en introduisant des nouveaux modèles aux paramètres les plus sensibles et le reste des paramètres les fixer déterministes.

3.3.1 Sur le modèle $M/M/1/4$ avec pannes

D'après les résultats obtenus dans l'exemple (3.2.1) lors de l'analyse de sensibilité, on a constaté que les paramètres les plus influents sont λ, μ, α correspondants à chaque composante de la distribution stationnaire $\pi_l, l = 0, \dots, 4$ et le paramètre qui reste β est considéré comme déterministe.

Pour approximer la moyenne et l'écart type de la distribution stationnaire, on introduit une nouvelle formule pour les paramètres incertains λ , μ et α définie comme suit :

$$\lambda = \bar{\lambda} + \sigma_{\lambda}\varepsilon_{\lambda}, \quad \varepsilon_{\lambda} \sim N(0, 1), \quad (3.3.1)$$

$$\mu = \bar{\mu} + \sigma_{\mu}\varepsilon_{\mu}, \quad \varepsilon_{\mu} \sim N(0, 1), \quad (3.3.2)$$

$$\alpha = \bar{\alpha} + \sigma_{\alpha}\varepsilon_{\alpha}, \quad \varepsilon_{\alpha} \sim N(0, 1), \quad (3.3.3)$$

où

- ★ $\bar{\lambda}$: la moyenne du paramètre incertain λ .
- ★ σ_{λ} : l'écart type de λ .
- ★ ε_{λ} : le bruit blanc associé au paramètre incertain λ .
- ★ $\bar{\mu}$: la moyenne du paramètre incertain μ .
- ★ σ_{μ} : l'écart type de μ .
- ★ ε_{μ} : le bruit blanc associé au paramètre incertain μ .
- ★ $\bar{\alpha}$: la moyenne du paramètre incertain α .
- ★ σ_{α} : l'écart type de α .
- ★ ε_{α} : le bruit blanc associé au paramètre incertain α .

Nous fixons : $\bar{\lambda}=2$, $\sigma_{\lambda}=0.2$, $\bar{\mu} = 1$, $\sigma_{\mu} = 0.1$, $\bar{\alpha}=0.3$, $\sigma_{\alpha}=0.03$.

Les figures(3.5), (3.6) et (3.7) représentent les histogrammes pour les nouveaux modèles 3.3.1 et 3.3.2 et 3.3.3 attribués au paramètres λ , μ et α respectivement.

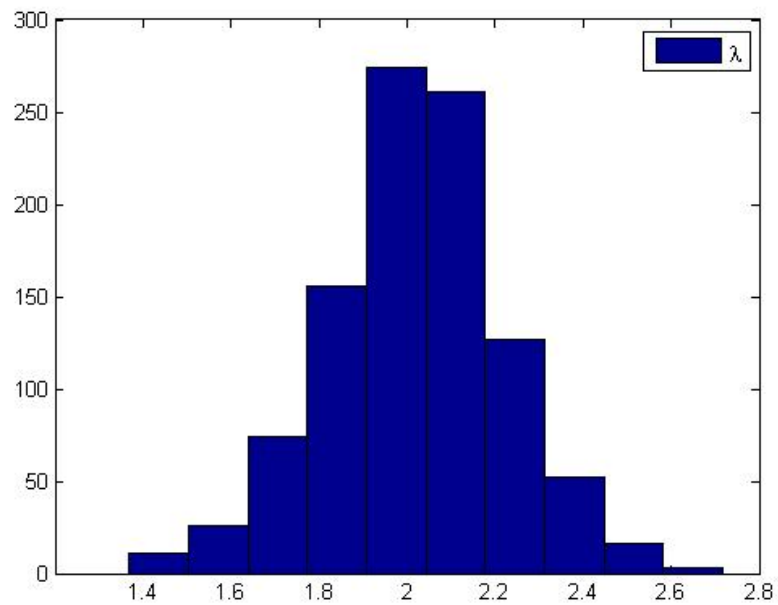


FIGURE 3.5 – Histogramme du paramètre incertain λ de modèle $M/M/1/4$ avec pannes classiques.

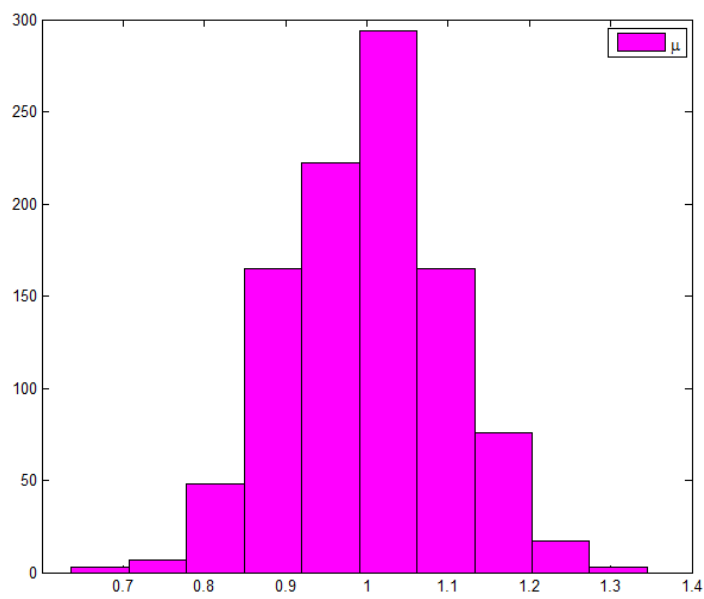


FIGURE 3.6 – Histogramme du paramètre incertain μ de modèle $M/M/1/4$ avec pannes classiques.

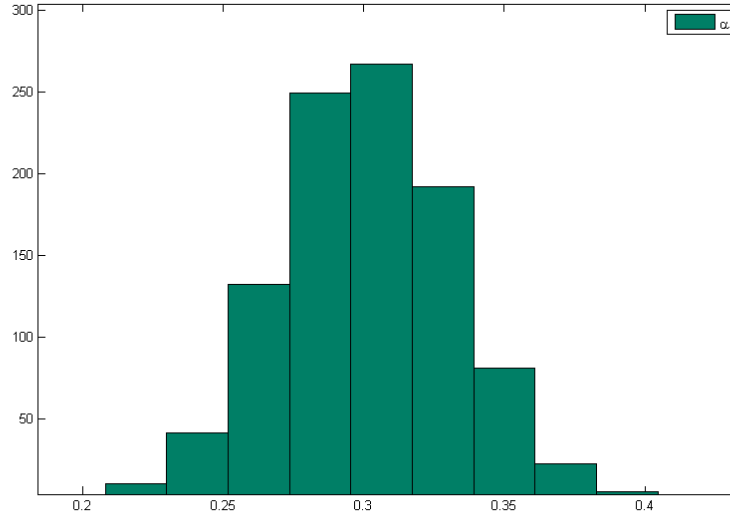


FIGURE 3.7 – Histogramme du paramètre incertain α de modèle $M/M/1/4$ avec pannes classiques.

3.3.2 Sur le modèle $M/E_2/1/4$ avec pannes

Soit le paramètre λ le plus influent dans le modèle étudié et les paramètres $\mu_1, \mu_2, \alpha, \beta$ sont considérés des constantes (déterministes).

Nous allons introduire un nouveau modèle pour simuler la moyenne et la variance de la distribution stationnaire π_λ :

$$\lambda = \bar{\lambda} + \sigma_\lambda \varepsilon_\lambda, \quad \varepsilon_\lambda \sim N(0, 1), \quad (3.3.4)$$

où

- ★ $\bar{\lambda}$: la moyenne du paramètre incertain λ .
- ★ σ_λ : l'écart type de λ .
- ★ ε_λ : le bruit blanc associé au paramètre incertain λ .

Nous fixons : $\bar{\lambda}=2$, $\sigma_\lambda =0.2$

La figure (3.8) représente l'histogramme pour le nouveau modèle 3.3.4 attribué au paramètre λ .

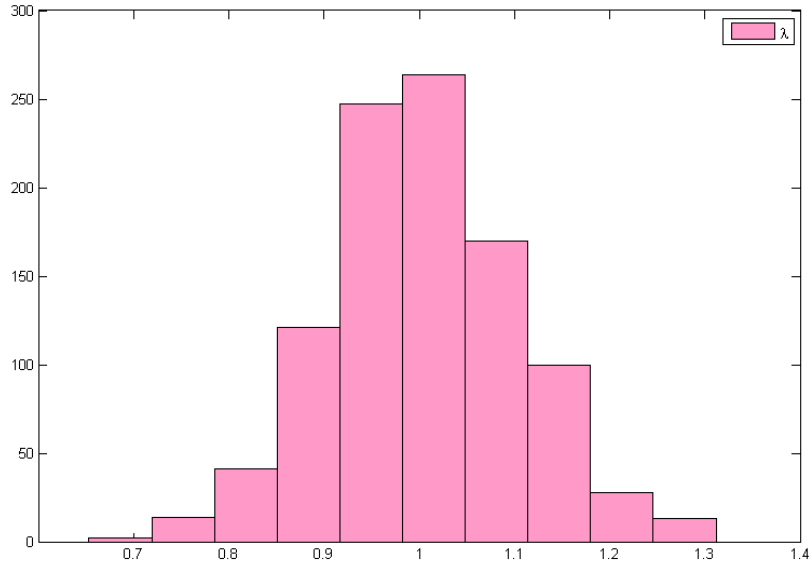


FIGURE 3.8 – Histogramme du paramètre incertain λ de modèle $M/E_2/1/4$ avec pannes classiques.

3.3.3 Sur le modèle $M/H_2/1/4$ avec pannes

Soient les paramètres λ , μ_2 et α les plus dominants en terme de sensibilité vis à vis la distribution stationnaire et les autres paramètres qui reste μ_1 , β et q sont considérés déterministes.

Nous allons introduire un nouveau modèle pour approximer la moyenne et la variance de la distribution stationnaire des paramètres incertains π_λ , π_{μ_2} et π_α :

$$\lambda = \bar{\lambda} + \sigma_\lambda \varepsilon_\lambda, \quad \varepsilon_\lambda \sim N(0, 1), \quad (3.3.5)$$

$$\mu_2 = \bar{\mu}_2 + \sigma_{\mu_2} \varepsilon_{\mu_2}, \quad \varepsilon_{\mu_2} \sim N(0, 1), \quad (3.3.6)$$

$$\alpha = \bar{\alpha} + \sigma_\alpha \varepsilon_\alpha, \quad \varepsilon_\alpha \sim N(0, 1), \quad (3.3.7)$$

où

- ★ $\bar{\lambda}$: la moyenne du paramètre incertain λ .
- ★ σ_λ : l'écart type de λ .
- ★ ε_λ : le bruit blanc associé au paramètre incertain λ .
- ★ $\bar{\mu}_2$: la moyenne du paramètre incertain μ_2 .
- ★ σ_{μ_2} : l'écart type de μ_2 .

- * ε_{μ_2} : le bruit blanc associé au paramètre incertain μ_2 .
- * $\bar{\alpha}$: la moyenne du paramètre incertain α .
- * σ_α : l'écart type de α .
- * ε_α : le bruit blanc associé au paramètre incertain α .

Nous fixons : $\bar{\lambda}=2$, $\sigma_\lambda =0.2$, $\bar{\mu}_2=1$, $\sigma_{\mu_2} =0.1$, $\bar{\alpha}=0.3$, $\sigma_\alpha =0.03$.

Les figures (3.9) , (3.10) et (3.11) représentent les histogrammes pour les nouveaux modèles 3.3.5 et 3.3.6 et 3.3.7 attribués aux paramètres λ , μ_2 et α respectivement.

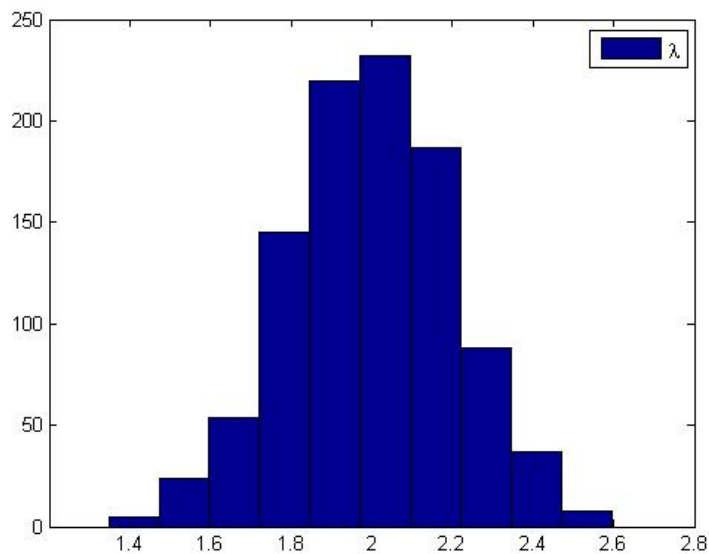


FIGURE 3.9 – Histogramme du paramètre incertain λ de modèle $M/H_2/1/4$ avec pannes classiques.

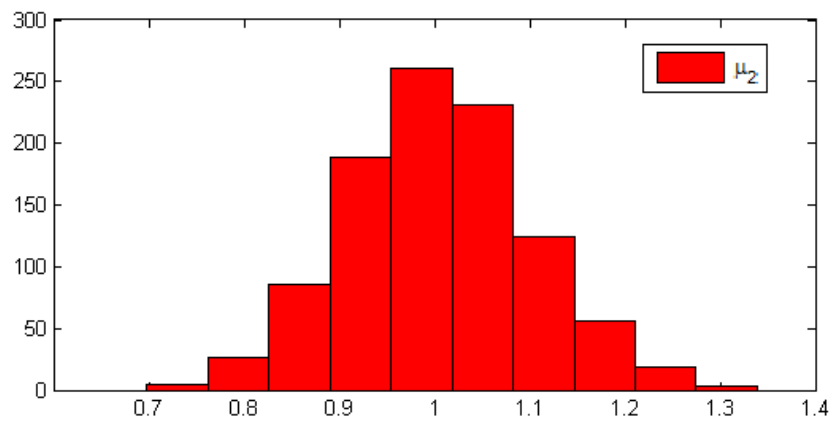


FIGURE 3.10 – Histogramme du paramètre incertain μ_2 de modèle $M/H_2/1/4$ avec pannes classiques.

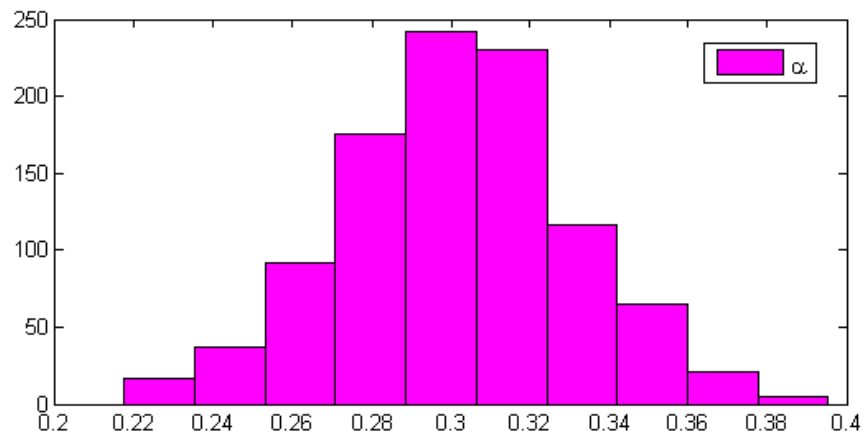


FIGURE 3.11 – Histogramme du paramètre incertain α de modèle $M/H_2/1/4$ avec pannes classiques.

3.3.4 Sur le modèle $M/D/1/4$ avec pannes

D'après l'analyse de sensibilité effectuée dans ce modèle, on a obtenu comme paramètres les plus influents sur la distribution stationnaire les deux paramètres β et d , le reste des paramètres λ et α , on peut les considérer comme des constantes.

Afin de simuler la moyenne et la variance de la distribution stationnaire, nous avons introduire une nouvelle formule pour les paramètres incertains β et d définie comme suit :

$$\beta = \bar{\beta} + \sigma_{\beta}\varepsilon_{\beta}, \quad \varepsilon_{\beta} \sim N(0, 1), \quad (3.3.8)$$

$$d = \bar{d} + \sigma_d\varepsilon_d, \quad \varepsilon_d \sim N(0, 1), \quad (3.3.9)$$

où

- ★ $\bar{\beta}$: la moyenne du paramètre incertain β .
- ★ σ_{β} : l'écart type de β .
- ★ ε_{β} : le bruit blanc associé au paramètre incertain β .
- ★ \bar{d} : la moyenne du paramètre incertain d .
- ★ σ_d : l'écart type de d .
- ★ ε_d : le bruit blanc associé au paramètre incertain d .

Nous fixons : $\bar{\beta}=0.4$, $\sigma_{\beta} =0.04$, $\bar{d}=1$, $\sigma_d=0.1$

Les figures (3.12) et (3.13) représentent les histogrammes pour les nouveaux modèles 3.3.8 et 3.3.9 attribués aux paramètres β et d .

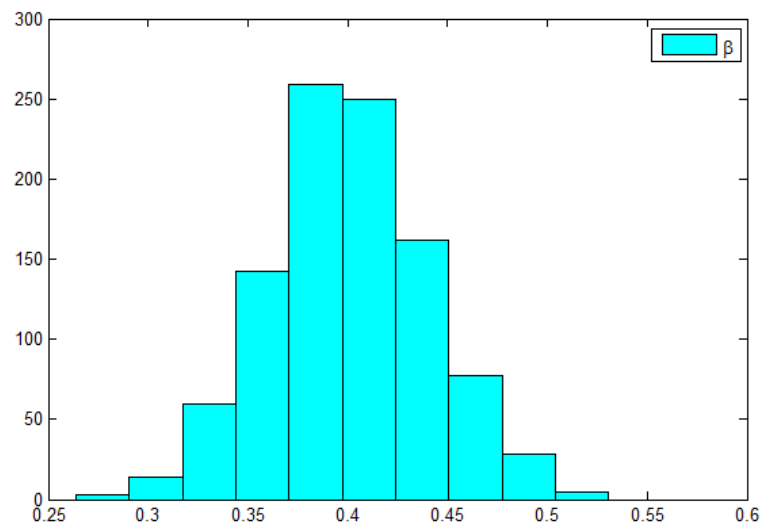


FIGURE 3.12 – Histogramme du paramètre incertain β de modèle $M/D/1/4$ avec pannes classiques.

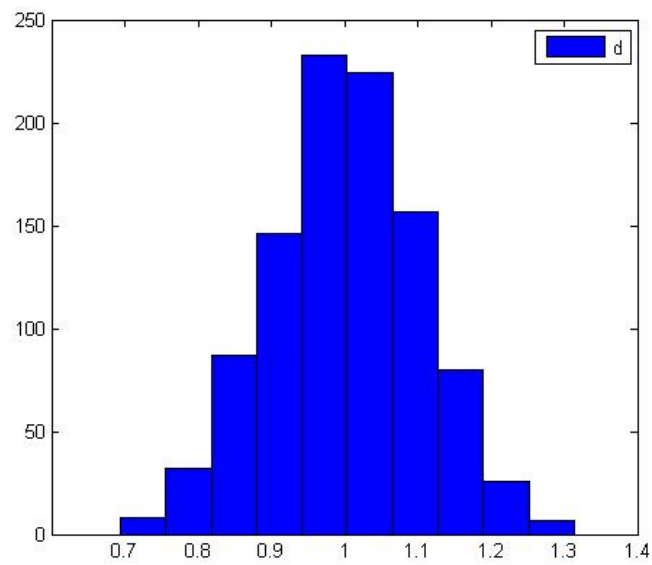


FIGURE 3.13 – Histogramme du paramètre incertain d de modèle $M/D/1/4$ avec pannes classiques.

3.3.5 Simulation de la moyenne et de l'écart type

Le tableau suivant résume les résultats obtenus lors de l'application numérique sur l'estimation de l'espérance et l'écart type de chaque composante de la distribution stationnaire par la simulation de Monte Carlo pour les différents modèles d'attente étudiés :

Modèle avec pannes	Simulation	$\pi(0)$	$\pi(1)$	$\pi(2)$	$\pi(3)$	$\pi(4)$
$M/M/1/4$	Espérance	0.0061	0.0219	0.0689	0.2160	0.6871
	Ecart type	0.0029	0.0075	0.0144	0.0163	0.0407
$M/E_2/1/4$	Espérance	0.0000	0.0005	0.0060	0.0733	0.9202
	Ecart type	0.0000	0.0002	0.0017	0.0095	0.0114
$M/H_2/1/4$	Espérance	0.0485	0.0946	0.1591	0.2626	0.4352
	Ecart type	0.0136	0.0180	0.0150	0.0028	0.0451
$M/D/1/4$	Espérance	0.0019	0.0105	0.0447	0.1840	0.7588
	Ecart type	0.0006	0.0027	0.0072	0.0121	0.0225

TABLE 3.1 – Espérance et écart type par la simulation de Monte Carlo pour les quatres modèles étudiés.

D'après les résultats obtenus dans le tableau précédant, nous remarquons qu'une petite perturbation de chaque paramètre entraine un écart type très petit pour tous les modèles. Donc on dit que les quatres modèles étudiés par rapport à l'incertitude infligée dans les paramètres influents sont robustes.

Conclusion générale

En premier lieu nous sommes intéressés à évaluer l'importance des paramètres d'entrées du modèle $M/G/1/N$ sur les variables d'intérêt de sortie dont la fonction de modèle est la distribution stationnaire π . Nous avons utilisé les indices de Sobol comme méthode d'analyse, et pour estimer ces indices, nous avons fait appel à la simulation de Monte Carlo. Cette technique nous a permis de déterminer les paramètres d'entrées les plus influents sur la variabilité de la réponse du modèle et les variables les moins influentes sont considérées comme des constantes.

En deuxième lieu, nous avons utilisé une méthode statistique de propagation précise, c'est la simulation de Monte Carlo, afin de propager et quantifier l'incertitude infligée dans la détermination de certains paramètres en calculant la distribution stationnaire des quatre modèles étudiés : $M/M/1/4$, $M/E_2/1/4$, $M/H_2/1/4$ et $M/D/1/4$ avec pannes classiques. Nous avons simulé les valeurs de chaque composante de la distribution stationnaire du modèle considéré, tout en caractérisant son espérance et son écart type.

Nous concluons par donner certaines perspectives :

- Estimer les indices de Sobol avec d'autres méthodes, comme la méthode de Taylor, la méthode de chaos,..etc.
- Appliquer la même procédure à l'analyse des autres modèles et réseaux de files d'attente.

Bibliographie

- [1] K.Abbas. Stabilité forte dans un système d'attente $M/G/1$ à serveur non fiable. Thèse de Magister. Université de béjaia. **(2003)**.
- [2] K.Abbas. Approximation dans les systèmes de files d'attente non fiable. Thèse de Doctorat. Université de béjaia. **(2009)**.
- [3] A. Aïssani and D. Aïssani. Fiabilité des systèmes. Systèmes de files d'attente non fiables, Mathématiques-Informatique, ENITA, Brdj-El-Bahri, Alger, **(1986)**.
- [4] L. Ameer. Analyse des systèmes de files d'attente avec rappels : Estimation de l'incertitude paramétrique. Thèse de Doctorat. Université de Bejaia. **(2019)**.
- [5] B. Avi-Itzhak and P. Naor. Some queueing problems with the service station subject to breakdown. *Jornal of Operation Research.*, 11 :3 :303-320, **(1963)**.
- [6] F. Baccelli and T. Znati. Queueing systems with breakdowns in data base modeling, *Proceedings of performance 81 (8 th IFIP International Symposium on Comp. Perf. Model.)*. North Holland, Amsterdam, 213-232, **nov. (1981)**.
- [7] G. Bolch. S. Greiner. H. Meer and K.S. Trivedi. *Queueing networks and Markov chains : Modeling and performance evaluation with computer science applications*, 2nd edition. Wiley-Interscience. Canada. **(2006)**.
- [8] K. Boukhetala et D. Aïssani. *Modélisation Stochastique et Statistique*, 77-83, **(2018)**.
- [9] H. Bruneel. A general model for the behaviour of infinite buffers with periodic service opportunities. *European Journal of Operational Research* 16 :98-106, **(1984)**.
- [10] H. Bruneel and K. G. Byung. *Discrete-time models for communication systems including ATM*. Kluwer Academic Publishers, **(1993)**.

- [11] C. Desceliers. R. Ghanem and C. Soize. Maximum likelihood estimation of stochastic chaos representations from experimental data. *International journal for numerical methods in Engineering*. 66(6) : 978-1001. **(2006)**.
- [12] M. Elisabeth Paté Cornell. Uncertainties in risk analysis six levels of treatment. *Reliability Engineering and system safety*. **(1996)**.
- [13] D. P. Gaver. A waiting line with interrupted service, including priorities. *Journal of the Royal Statistical Society Journal* 24 (ser. B) : 73-90, **(1962)**.
- [14] J. Jacques. *Pratique de l'analyse de sensibilité : comment évaluer l'impact des entrées aléatoires sur la sortie d'un modèle mathématique*. Lille. **(2011)**.
- [15] A. Kaufmann et R. Cruon. *Les phénomènes d'attente : théorie et applications*, 274, Paris. **(1961)**.
- [16] V. G. Kulkarni and B. D. Choi. Retrial queues with server subject to breakdowns and repairs. *Queueing Systems* 7 : 191-208, **(1990)**.
- [17] M. Lefebvre . *Cours et exercices de probabilité appliquées*, presses intl, polytechnique, 2-4. **(2005)**.
- [18] LITTLE, J.D.C. A proof of the queueing formula : $L = \lambda W$. *Operations research*. 9 (3), 383-387. **(1961)**.
- [19] K. C. Madan. A single channel queue with bulk service subject to interruptions. *Microelectron. Reliab.*, 29 :5 :813-818, **(1989)**.
- [20] T.A. Mara. S. Tarantola. "Application of global sensitivity analysis of model output to building thermal simulations" *Build Simul*, 1 :290-302, **(2008)**.
- [21] M. McKay et al. Comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. *Technometrics*, 21(2) : 239-245, **(1979)**.
- [22] S. Ouazine and K. Abbas. A functional approximation for retrial queues with two way communication. *Annals of Operations Research*, 247(1) : 211-227, **(2016)**.
- [23] S. Ouazine and K. Abbas. Development of computational algorithm for multiserver queue with renewal input and synchronous vacation. *Applied Mathematical Model-*

- ling, 40(2) :1137-1156, **(2016)**.
- [24] M. A. Pascal and P. Kareiva. Predicting the out come of competition using experimental data : maximum likelihood and bayesian approaches. *Ecology*. 77 (2) : 337-349. **(1996)**.
- [25] H. J. Pradlwater and G. I Shuëller. The use of kernel densities and confidence intervals to cope with insufficient data in validation experiments. *Computer methods in applied mechanics and engineering*. 197 (29-32) : 2550-2560. **(2008)**.
- [26] C. P. Robert. *The bayesian choice*. Springer-Verlag. second edition. New York. **(2001)**.
- [27] V. Romero. B. Rutherford. L. Swiler and A. Urbina. An initial comparison of methods for representing and aggregation experimental uncertainties in volving sparse data. In 52nd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC/ Structures, structural dynamics and matricals conference 19th AIAA/ ASME/AHS Adaptive structures conference 13t : 1705. **(April, 2011)**.
- [28] A. Saltelli. M. Ratto. T. Andres. F. Campolongo . J. Cariboni. D. Gatelli. M. Saiana and S. Tarantola. "Global sensitivity analysis. The Primer" John Wiley and Sons, Ltd. **(2008)**.
- [29] I. Sobol. On the distribution of points in a cube and the approximate evaluation of integrals. *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*, 7(4) :784-802, **(1967)**.
- [30] I. Sobol. Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models. *Mathematical modelling and computational experiments*, 1(4) :407-414, **(1993)**.
- [31] Sobol, I.M. Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates. *Mathematics and computers in simulation* 55(1-3) : 271-280. **(2001)**.
- [32] C. Spitz. L. Mora. A. Jay and E. Wurtz. Analyse de sensibilité et d'incertitude du comportement thermique d'un logement. Université de Savoie.
- [33] H. C.White and L. S. Christie. Queueing with peemptive priorities or with Break-down. *Oper. Res*, 6 :79-95, **(1958)**.

Résumé :

Notre travail a pour but, en particulier de voir et de déterminer les paramètres d'entrée auxquels la distribution stationnaire du modèle $M/G/1/N$ avec pannes classiques est sensible, par une analyse de sensibilité globale en utilisant les indices de Sobol du premier ordre simulés par la technique d'échantillonnage de Monte Carlo. Dans ce contexte, nous avons propagé l'incertitude des paramètres d'entrée les plus influents sur le modèle d'attente $M/G/1/N$ avec pannes classiques, tout en estimant ses statistiques (l'espérance et l'écart type) pour chaque composante de la distribution stationnaire.

Mots clés : File d'attente $M/G/1/N$ avec pannes classiques ; Analyse de sensibilité ; Analyse de sensibilité globale ; Analyse d'incertitude ; Incertitude paramétrique ; indices de Sobol ; Simulation Monte Carlo.

Abstract :

The purpose of our work is to analyse and determine the influents inputs of the stationary distribution of the $M/G/1/N$ model with classical breakdowns, through a global sensitivity analysis using the first order Sobol's indices simulated by the Monte Carlo sampling technique. In this context, we propagate the uncertainty of the most influential inputs parameters on the $M/G/1/N$ queuing model with classical breakdowns, while estimating its statistics (expectation and standard deviation) for each component of the stationary distribution.

Key words : $M/G/1/N$ queue with classical breakdowns ; Sensitivity analysis ; Global sensitivity analysis ; Uncertainty analysis ; Parametric uncertainty ; Sobol's indices, Monte Carlo simulation.