

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DE BEJAIA
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
Département de Mathématiques**

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Option : probabilité statistique et application

Par

ARAB GHOZLENE

THEME

Etude des modèles autorégressifs non linéaires et le calcul de leurs prévisions

Soutenu devant le jury composé de :

Mme.	K. Timridjine	P	U. de Béjaia	Présidente
Mr.	O. Saci	M.C.B	U. de Béjaia	Rapporteur
Mr.	H. Tabti	M.C.B	U. de Béjaia	Examinatrice

Année 2022/2023

Remerciements

Mes sincères remerciements à Dieu, le tout puissant, qui m'a donné la force, la volonté et le courage afin d'élaborer ce modeste travail.

Je remercie ma famille qui m'a aidé moralement, financièrement, et qui était toujours patiente, compréhensive envers moi et qui a su par sa tendresse et son sacrifice me mettre sur les bons rails.

*Je tiens également à exprimer ma reconnaissance et ma gratitude à mon promoteur, Monsieur **Oualid Saci** pour son aide très précieuse, ses conseils et sa disponibilité qui ont contribué à faire de ce mémoire ce qu'il est aujourd'hui.*

*Mes remerciements sont aussi adressés à Madame **K. Timridjine** et Madame **H. Tabti** qui nous font l'honneur de juger mon travail.*

Je remercie aussi tous les enseignants du département de Mathématiques qui m'ont permis d'améliorer ma formation.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à:

Mes chères parents

Mes deux frères Salah Eddine et Ahmad

Mes deux soeurs Ikram et Amira

La femme de mon grand frère Souhila et Ma petite Ayla

Tous mes camarades de la promo et tous mes ami(e)s

Table des matières

Remerciements	i
Introduction	1
1 Les notions de base sur les séries temporelles	2
1.1 Séries Temporelles	2
1.2 Caractéristique d'une Série Temporelle	2
1.3 Opérateurs de retard et d'avance	5
1.4 Les Processus Linéaires Stationnaires	5
1.4.1 Processus Auto-régressifs $AR(p)$	5
1.4.2 Processus Moyenne Mobile $MA(q)$	7
1.4.3 Processus mixte autorégressif-moyenne mobile, $ARMA(p, q)$	8
1.4.4 Identification et estimation des modèles $ARMA(p, q)$	11
2 Les modèles auto-régressifs non linéaires	15
2.1 Modèle exponentiel	15
2.1.1 Conditions de stationnarité	21
2.1.2 Estimation du modèle $EXPAR$	22
2.2 Modèle exponentiel restreint périodique $PEXPAR$	26
2.2.1 Modèle $PEXPAR(1)$	26
2.2.2 Estimation des paramètres du modèle $PEXPAR(1)$	30
2.2.3 Modèle $PEXPAR(p)$	32
2.2.4 Estimation des paramètres du modèle $PEXPAR(p)$	33

2.3	Présentation des modèles ARCH/GARCH	37
2.3.1	Modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques (ARCH)	37
2.3.2	Modèle avec erreur ARCH	43
2.3.3	Estimation des paramètres ARCH	45
2.3.4	Le modèle ARCH généralisé GARCH(p,q)	46
2.3.5	Propriétés des processus GARCH	47
2.3.6	Estimation des paramètres GARCH	48
2.4	Modèles autorégressifs à seuils (TAR)	49
2.4.1	Modèles SETAR	50
2.4.2	Modèles STAR	51
3	Simulation et Application	53
3.1	Simulation	53
3.1.1	Simulation et estimation d'un modèle <i>EXPAR</i> (1)	53
3.1.2	Simulation d'un modèle <i>EXPAR</i> (2)	55
3.1.3	Simulation et estimation d'un modèle GARCH(1.1)	56
3.2	Application D'un modèle exponentiel non linéaire sur des données réels . .	57
3.2.1	Définition d'une tache solaire	57
3.2.2	Intérêt scientifique de l'observation des taches solaires	58
3.2.3	Nombre mensuel des taches solaires observées depuis 1994	59
3.2.4	Modélisation de la série par un modèle <i>EXPAR</i> (1)	61
	Conclusion	65

Introduction générale

Une série chronologique (temporelle), est une suite finie d'observations, ses données sont indexées par le temps. peut être (minute, heure, jour, année etc....). En statistique, une série chronologique est définie comme un ensemble de variables aléatoires indexée par rapport au temps, et exprime la dynamique d'un certain phénomène au fil du temps. C'est en astronomie qu'apparaissent les premières séries chronologiques constituées volontairement à des fins d'analyse. L'observation systématique du ciel remonte à l'antiquité, par exemple, les romains savaient déjà que l'année dure approximativement 365 jours (calendrier julien). Les séries chronologiques sont étudiés à la fois pour interpréter un phénomène, l'identification de ses composantes à savoir la tendance, la cyclicité, le caractère saisonnier à la fois de prédire son rendement futur.

Depuis le début des années 1970, suite à la parution du livre de Box et Jenkins (1970, édition révisée en 1976) [8] , les modèles linéaires des séries chronologiques ont été Considérées comme un outil puissant pour l'analyse générale des séries temporelles avec des procédures d'estimation robustes, mais devant les problèmes de modélisation rencontrés pour certaines séries de données (des séries de biologie, d'astronomie, des séries financières et monétaires), ces modèles ne sont pas appropriés en présence des caractéristiques non linéaires, par conséquent, les modèles non linéaires ont été envisagés. Plusieurs classes de modèles ont été abordées : *les modèles exponentiels autorégressifs* (Ozaki (1980)[24] et Haggan et Ozaki (1981)[17]([4], [5], [9], [10]), *les modèles ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity) et GARCH (Generalised AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity)* (Engle (1982)[16]) ([11], [21], [12], [13], [18], [22]), *les modèles à seuils (tong (1978))([23], [28], [29])* .

Notre objectif est d'introduire quelques modèles autoregressif non linéaires existant dans la littérature, de donner un aperçu général sur les propriétés caractérisant ces modèles les méthodes d'estimation de leurs paramètres. Puis, de faire quelques expériences de simulation sur des modèles donnés, et appliquer ensuite un modèle sur des données réels pour faire des prévisions.

Afin de tracer notre chemin vers l'objectif, nous articulons ce mémoire autour de trois chapitres

Dans le 1^{er} chapitre, intitulé <Les notions de base sur les séries temporelles> nous présenterons un rappel des principales définitions, propriétés des séries chronologique, et processus linéaires ainsi que quelques notions utiles dans la suite de notre travail.

Dans le 2^{ème} chapitre intitulé <Les modèles autorégressifs non linéaires>, nous définirons trois modèles non linéaires à savoir

- ▶ Modèle $EXPAR(p)$.
- ▶ Modèles $ARCH/GARCH$.
- ▶ Modèle autorégressif à seul ($TAR(p)$).

Ainsi leurs propriétés et méthodes d'estimations.

Dans le 3^{ème} chapitre <Simulations et Applications>, nous nous intéressons à la simulation de quelques modèles, nous choisissons pour cela un modèle exponentiel autorégressif d'ordre 1, et un modèle GARCH d'ordre 1 en estimant les paramètres de chaque modèle pour, ensuite en faire des prévisions, nous traçons les représentations graphiques des séries chronologiques simulées et celles obtenues par la prévision. Enfin, on a appliqué le modèles $EXPAR(1)$, sur une série de nombres des taches solaires observées et comptées mensuellement depuis 1994 à ce jour.

A la fin, une conclusion générale des principaux résultats obtenus au cours de notre travail.

Les notions de base sur les séries temporelles

Dans ce chapitre, nous sommes intéressés par les séries temporelles (chronologique), l'objectif d'étudier ce type de séries est de faire des prédictions sur l'évolution de la série.

Pour se la, nous avons définis les différents caractéristiques et propriétés des séries temporelles classiques, notamment les processus linéaires classiques comme $(AR(p), MA(q))$ et $ARMA(p, q)$.

1.1 Séries Temporelles

Définition 1.1.1 Une série temporelle ou chronologique Y_t , $t \in \mathbb{Z}$, est une réalisation finie d'un processus stochastique formé par une suite de nombres réels, indexée par des entiers relatifs tels que: $t = \{1, \dots, T\}$, avec T la taille de la série observée de façon équidistante et $\{Y_t\}$ est un vecteur aléatoire de dimension k , avec

$$Y_t = (y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_k}).$$

1.2 Caractéristique d'une Série Temporelle

Soit Y_t une série temporelle, caractérisée par les expressions suivantes :

a) La moyenne

$$\bar{y}_t = E(y_t) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t. \quad (1.2.1)$$

b) La variance

$$\begin{aligned} Var(y_t) &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (y_t - E(Y_t))^2 \\ &= E(y_t - E(y_t))^2. \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Les concepts de stationnarité d'une série chronologique

La stationnarité est une propriété importante dans le cadre de l'étude des séries chronologiques (processus stochastique), on distingue deux concepts:

La stationnarité au sens strict

Un processus Y_t , est dit stationnaire au sens strict si : pour toute suite d'instantanés $\{t_1, \dots, t_k\}$, il existe un entier N , quelconque tel que la fonction de distribution de probabilité jointe f de $\{Y_{t_1}, \dots, Y_{t_k}\}$ est identique à la fonction de distribution de probabilité jointe de $\{Y_{t_1+N}, \dots, Y_{t_k+N}\}$, i.e:

$$f(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_k}) \sim f(Y_{t_1+N}, \dots, Y_{t_k+N})$$

où (\sim) est une égalité en loi.

La stationnarité au sens large

On dit que Y_t est stationnaire au sens large, s'il répond aux deux conditions suivantes:

1. $E(Y_t) = \mu$, est constante (ne dépend pas de t).
2. $Cov(Y_t, Y_{t+h}) = \gamma_h$, $\forall t, h \in Z$, qui signifie que la covariance entre deux instants t et $t+h$ dépend de différence du temps h .

Remarque 1.2.1 *La stationnarité au sens large consiste à poser des conditions sur les deux premiers moments, contrairement à la stationnarité au sens strict qui impose des restrictions sur la distribution conjointe.*

c) La fonction d'auto-covariance

Définition 1.2.1 Soit Y_t , un processus stationnaire, la fonction γ définie par :

$$\gamma_h = \text{cov}(Y_t, Y_{t+h}) = E[(Y_t - E(Y_t))(Y_{t+h} - E(Y_{t+h}))], \forall t, h \in \mathbb{Z}.$$

est appelée la fonction d'auto-covariance d'ordre h qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $\gamma_0 = \text{cov}(Y_t, Y_t) = E[(Y_t - E(Y_t))^2] = V(Y_t)$.
2. $|\gamma_t| \leq \gamma_0, \forall t \in \mathbb{Z}$.
3. $\gamma_h = \gamma_{-h}, \forall h \in \mathbb{Z}$, γ est une fonction paire.

d) La fonction d'autocorrélation

Définition 1.2.2 La fonction d'autocorrélation est définie par l'expression suivante :

$$\rho_h = \frac{\text{cov}(Y_t, Y_{t+h})}{\sqrt{\text{var}(Y_t)\text{var}(Y_{t+h})}} = \frac{\text{cov}(Y_t, Y_{t+h})}{\text{var}(Y_t)} = \frac{\gamma_h}{\gamma_0}$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $\rho_0 = 1$
2. $|\rho_h| \leq \rho_0$
3. $\rho_h = \rho_{-h}$, une fonction paire.

e) Le bruit blanc

Définition 1.2.3 un bruit blanc $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$, est une suite de v.a. non corrélées, de moyenne et de variance finie, autrement dit:

$$E(\varepsilon_t) = \mu, \quad V(\varepsilon_t) = \sigma^2 \quad \text{et} \quad \text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) = 0, \quad \text{pour } h \neq 0$$

Remarques 1.2.2 1. Si l'espérance $\mu = 0$, on dit que le bruit blanc est centré.

2. Une suite de v.a. est dite gaussienne standard lorsque : $E(\varepsilon_t) = 0$ et $V(\varepsilon_t) = 1$.

1.3 Opérateurs de retard et d'avance

L'opérateur de retard noté L est défini par:

$$LY_t = Y_{t-1}.$$

Plus généralement on a :

$$L^n Y_t = Y_{t-n}.$$

Cet opérateur est linéaire et inversible, son inverse s'écrit sous la forme $L^{-1} = F$ tels que : $FY_t = Y_{t+1}$ est appelé opérateur d'avance.

L'opérateur de retard vérifie les propriétés suivantes:

- $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i L^i Y_t = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i Y_{t-1}$.
- $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i L^i Y_t + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} b_i L^i Y_t = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (a_i + b_i) L^i Y_t = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (a_i + b_i) Y_{t-1}$
- $\alpha \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i L^i = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \alpha a_i L^i$.

où a_i et b_i sont des coefficients réels.

1.4 Les Processus Linéaires Stationnaires

1.4.1 Processus Auto-régressifs $AR(p)$

Définition 1.4.1 On appelle processus auto-régressif d'ordre p , noté par $AR(p)$, un processus stationnaire $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, vérifiant une équation du type:

$$Y_t = \sum_{i=1}^p \phi_i Y_{t-i} + \varepsilon_t \quad (1.4.1)$$

avec ϕ_i , pour $i = \{1, \dots, p\}$ sont des réels et ε_t bruit blanc $(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

En introduisant l'opérateur de retard L , l'équation précédente peut s'écrire:

$$\phi(L)Y_t = \varepsilon_t,$$

avec

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p$$

est le polynôme autorégressif de degré p .

Proposition 1.4.1 *La fonction d'auto-covariance d'un processus $AR(p)$ est donnée par:*

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sum_{i=1}^p \phi_i \gamma(h-i), & \text{pour } h > 0, \\ \sigma^2 + \sum_{i=1}^p \phi_i \gamma(i), & \text{pour } h = 0. \end{cases}$$

Démonstration. *Nous avons pour tout t et tout $h \geq 1$,*

$$\text{cov}(Y_t, Y_{t+h}) = E(Y_t Y_{t+h}),$$

alors

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= E(Y_t(\varepsilon_{t+h}) + \sum_{i=1}^p \phi_i Y_{t+h-i}) \\ &= 0 + \sum_{i=1}^p \phi_i \gamma(h-i). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= V(Y_t) \\ &= E(Y_t(\varepsilon_t + \sum_{i=1}^p \phi_i Y_{t-i})) \\ &= E(Y_t \varepsilon_t) + \sum_{i=1}^p \phi_i \gamma(i) \\ &= E((\varepsilon_t + \sum_{i=1}^p \phi_i Y_{t-i})\varepsilon_t) + \sum_{i=1}^p \phi_i \gamma(i) \end{aligned}$$

car ε_t iid, de Y_j , pour $j < t$

$$\gamma(0) = \sigma^2 + \sum_{i=1}^p \phi_i \gamma(i)$$

■

Proposition 1.4.2 [26] *Soit un processus stationnaire $AR(p)$, dont polynôme caractéristique sont de modules > 1 , sa fonction d'autocorrélation est définie comme suit:*

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \begin{cases} 1 & \text{si } h = 0 \\ \sum_{j=1}^p \phi_j \rho(h-j) & \text{si } h \neq 0 \end{cases}$$

Ces relations sont connues sous le nom d'équations de Yule-Walker.

Proposition 1.4.3 [26] *La fonction d'autocorrélation partielle d'un processus $AR(p)$ est donnée par:*

$$r(h) = 0, \quad \text{pour } h \geq p + 1.$$

1.4.2 Processus Moyenne Mobile $MA(q)$

Définition 1.4.2 On appelle processus moyenne mobile d'ordre q noté $MA(q)$, le processus $\{Y_t\}$ qui vérifie la relation suivante :

$$Y_t = \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}, \quad \text{pour tout } t \geq 0. \quad (1.4.2)$$

où θ_i , $i = \{1, \dots, q\}$, sont des réels et ε_t bruit blanc $(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

En introduisant l'opérateur retard L sur Y_t on obtient :

$$Y_t = (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q) \varepsilon_t,$$

où bien

$$Y_t = \theta(L) \varepsilon_t,$$

avec

$$\theta(L) = 1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q$$

est le polynôme moyenne mobile de degré q .

Proposition 1.4.4 La fonction d'auto-covariance d'un processus $MA(q)$ est donnée par

:

$$\gamma(h) = \text{cov}(Y_t, Y_{t+h}) = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{k=0}^{q-|h|} \theta_k \theta_{k+h}, & \text{Si } h \leq q, \\ 0 & \text{Si } h > q. \end{cases}$$

Avec $\theta_0 = 1$.

Démonstration. On a

$$\gamma(h) = \text{cov}(Y_t, Y_{t+h}) = E(Y_t Y_{t+h}) - E(Y_t) E(Y_{t+h})$$

et

$$E(Y_t) = E(Y_{t+h}) = 0 \quad (\text{car } E(\varepsilon_t) = 0)$$

donc

$$\begin{aligned}
 \gamma_h &= E(Y_t Y_{t+h}) = E\left[\left(\sum_{k=0}^q \theta_k \varepsilon_{t-k}\right)\left(\sum_{j=0}^q \theta_j \varepsilon_{t+h-j}\right)\right] \\
 &= E\left[\sum_{k=0}^q \sum_{j=0}^q \theta_k \theta_j \varepsilon_{t-k} \varepsilon_{t+h-j}\right] \\
 &= \sum_{k=0}^q \sum_{j=0}^q \theta_k \theta_j E(\varepsilon_{t-k} \varepsilon_{t-(j-h)}) \\
 &= \begin{cases} \sum_{k=0}^{q-|h|} \sigma^2 \theta_k \theta_{k+h}, & \text{Si } k = j - h, \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \sigma^2 \sum_{k=0}^{q-|h|} \theta_k \theta_{k+h}, & \text{Si } 0 \leq h \leq q, \\ 0 & \text{Si } h > q. \end{cases}
 \end{aligned}$$

* si $h = 0$

$$\begin{aligned}
 \gamma_0 &= \sigma^2 \sum_{k=0}^q \theta_k^2 \\
 &= \sigma^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2)
 \end{aligned}$$

■

Proposition 1.4.5 [26] La fonction d'autocorrelation d'un processus $MA(q)$, est donnée par :

$$\rho(h) = \frac{\gamma_h}{\gamma_0} = \begin{cases} \frac{\sum_{k=0}^{q-h} \theta_k \theta_{k+h}}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2} & \text{si } 1 \leq h \leq q, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1.4.3 Processus mixte autorégressif-moyenne mobile, $ARMA(p, q)$

Les processus $ARMA(p, q)$, d'ordre p et q , généralisent les modèles autorégressifs et moyennes mobiles, ils sont très utiles pour modéliser des séries réelles en nécessitant moins de paramètres que les modèles AR ou MA simples.

Définition 1.4.3 On dit qu'un processus stationnaire $\{Y_t\}$ admet une représentation $ARMA(p, q)$ s'il vérifie la relation suivante :

$$Y_t = \sum_{i=1}^p \phi_i Y_{t-i} + \varepsilon_t - \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}, \quad \forall t \in \mathbb{Z}. \quad (1.4.3)$$

ou bien

$$\phi(L)Y_t = \theta(L)\varepsilon_t$$

où

$$(1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p)Y_t = (1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q)\varepsilon_t,$$

avec :

1. $\phi_p \neq 0$ et $\theta_q \neq 0$.
2. ϕ et θ , n'ont pas de racines communes et leurs racines sont de module $\succ 1$.
3. ε_t bruit blanc $(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

Si Y_t est un processus stationnaire de représentation $ARMA(p, q)$, alors:

1. Y_t admet la représentation $MA(\infty)$:

pour $\varphi_0 = 1$

$$Y_t = \frac{\theta(L)}{\phi(L)}\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{+\infty} \varphi_j \varepsilon_{t-j}.$$

2. Y_t admet la représentation $AR(\infty)$:

pour $\pi_0 = 1$, on a

$$\frac{\phi(L)}{\theta(L)}Y_t = \sum_{j=0}^{+\infty} \pi_j Y_{t-j} = \varepsilon_t.$$

Proposition 1.4.6 La fonction d'auto-covariance d'un processus $ARMA(p, q)$, est donnée par [26] :

$$\gamma(h) = \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{i=1}^p \phi_i \gamma_{h-i} & , \quad \text{pour } h \geq q + 1 \\ \sum_{i=1}^p \phi_i \gamma_{h-i} + \sigma^2 \sum_{j=h}^q \theta_j \varphi_{j-h} & , \quad \text{pour } 0 \leq h \leq q \end{array} \right\}.$$

Démonstration. Soit $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, un processus $ARMA(p, q)$, il admet la représentation $MA(\infty)$:

$$Y_t = \sum_{j=0}^{+\infty} \varphi_j \varepsilon_{t-j}.$$

■

Démonstration. on a

$$\gamma(h) = \text{cov}(Y_t, Y_{t+h}) = E(Y_t, Y_{t+h}) - E(Y_t)E(Y_{t+h}).$$

D'autre part,

$$E(Y_t) = E(Y_{t+h}) = 0 \text{ (d'après l'écriture de } MA(\infty)\text{)}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= E(Y_t, Y_{t+h}) = E\left[\left(\sum_{i=1}^p \phi_i Y_{t+h-i} + \sum_{j=0}^q \theta_j \varepsilon_{t+h-j}\right) Y_t\right] \\ &= \sum_{i=1}^p \phi_i E(Y_t Y_{t+h-i}) + \sum_{j=0}^q \theta_j E(Y_t \varepsilon_{t+h-j}) \\ &= \sum_{i=1}^p \phi_i \gamma_{h-i} + \sum_{j=h}^q \theta_j E\left(\sum_{j=0}^{+\infty} \varphi_j \varepsilon_{t-j} \varepsilon_{t+h-j}\right) \\ &= \sum_{i=1}^p \phi_i \gamma_{h-i} + \sum_{j=h}^q \theta_j \sum_{j=0}^{+\infty} \varphi_j E(\varepsilon_{t-j} \varepsilon_{t-(j-k)}) \\ &= \sum_{i=1}^p \phi_i \gamma_{h-i} + \sigma^2 \sum_{j=h}^q \theta_j \varphi_{j-h}. \end{aligned}$$

■

Proposition 1.4.7 [26] *La fonction d'autocorrélation d'un ARMA(p, q) vérifie l'équation suivante:*

$$\rho(h) = \gamma(h) \quad , \quad \forall h \geq q + 1.$$

Développement autorégressif infini d'un ARMA(p, q) :

On cherche la série en L , π vérifiant $\pi(L)\theta(L) = \phi(L)$ soit :

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j L^j \sum_{j=0}^q \theta_j L^j = \sum_{j=0}^p \phi_j L^j.$$

Cela implique que : $\forall h \geq \max(p + 1, q)$

$$\sum_{j=0}^q \theta_j \pi_{h-j} = 0.$$

Les coefficients du développement $AR(\infty)$ satisfont une équation de récurrence d'ordre q , à partir du rang $\max(p + 1, q)$.

Développement moyenne mobile infinie d'un $ARMA(p, q)$:

Les coefficients h_j de la représentation moyenne infinie vérifient : $\forall l \geq \max(q + 1, p)$

$$\sum_{j=0}^p \phi_j h_{l-j} = 0.$$

Les coefficients du développement $MA(\infty)$ satisfont une équation de récurrence d'ordre p à partir du rang $\max(q + 1, p)$.

1.4.4 Identification et estimation des modèles $ARMA(p, q)$

En pratique, lorsque l'on veut ajuster un modèle AR , MA ou $ARMA$ à des données réelles, la première question qui se pose est celle du choix des ordres p et q du modèle $ARMA$ (on considère que les AR et MA sont des cas particuliers d' $ARMA$ avec respectivement $q = 0$ et $p = 0$). Pour choisir ces ordres, nous pouvons exploiter les résultats suivants [26] :

Le processus	Définitions	Autocorrélations	Autocorrélation Partielles
$AR(p)$	$\phi(L) = \varepsilon_t$	$\rho(h) \searrow 0$	$r(h) = 0, h \geq p + 1$
$MA(q)$	$Y_t = \theta(L)\varepsilon_t$	$\rho(h) = 0$	$r(h)$, rien de particulier
$ARMA(p, q)$	$\phi(L)Y_t = \theta(L)\varepsilon_t$	$\rho(h) \searrow 0, h \geq q + 1$	$r(h) \searrow 0, h \geq \max(q + 1, p + 1)$

Ces résultats sont facilement exploitables dans le cas d'un AR ou MA pur.

Dans le cas d'un $ARMA$ il existe un moyen de déterminer les ordres p et q à l'aide de la méthode du coin basée sur certains déterminants de matrices de corrélations que nous ne développons pas ici.

Une autre approche est de considérer un ensemble crédible de modèles $ARMA(p, q)$, puis de sélectionner un candidat par une méthode de sélection de modèle basée sur des critères d'information de type **BIC** ou **AIC**.

Une fois l'ordre et le type du modèle sont choisis, pour estimer les coefficients des modèles, plusieurs approches sont possibles.

Estimation des paramètres autorégressifs par les équations de Yule-Walker

Les équations de *Yule-Walker*, sont définies par la relation suivante:

$$\left(\begin{pmatrix} -\phi_1 \\ \vdots \\ -\phi_p \end{pmatrix} \right) = [\rho(i-j)]^{-1} \begin{pmatrix} \rho(1) \\ \vdots \\ \rho(p) \end{pmatrix}$$

en exploitant le fait que les autocorrélations empiriques sont un estimateur convergent des autocorrélations, on peut obtenir un estimateur des coefficients ϕ_i .

Pour obtenir ces équations, nous avons exploités les relations d'orthogonalités.

$$Y_t + \sum_{j=1}^p Y_{t-j} = \varepsilon_t$$

en multipliant par Y_{t-h} , en prenant l'espérance et en remarquant que pour $h > 0$, $E(\varepsilon_t Y_{t-h}) = 0$, on obtient la relation à l'origine des équations de Yule-Walker:

$$\gamma(h) + \sum_{j=1}^p \gamma(h-j) = 0 \tag{1.4.4}$$

Cela revient à calculer la projection linéaire de Y_t , sur son passé donc à minimiser en j le risque quadratique:

$$E\left(Y_t - \sum_{j=1}^p \phi_j Y_{t-j}\right)^2$$

Une autre approche consiste à minimiser directement le risque empirique:

$$\sum_{t=p+1}^n \left(Y_t - \sum_{j=1}^p \phi_j Y_{t-j}\right)^2 \tag{1.4.5}$$

On peut montrer que le comportement asymptotique de cet estimateur est le même que celui obtenu par Yule-Walker.

Estimation par Maximum de Vraisemblance :

Si ε_t est gaussien, le vecteur des observations (Y_1, \dots, Y_n) , est gaussien et on peut alors calculer sa vraisemblance. Une approche simplifiée est de calculer la densité de (Y_{p+1}, \dots, Y_n) , conditionnellement à (Y_1, \dots, Y_p) , qui est gaussienne. Sachant que $(Y_t/Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p})$,

est une gaussienne d'espérance $\sum_{j=1}^p \phi_j Y_{t-j}$, et de variance σ^2 , en utilisant la formule des conditionnements successifs, on a:

$$\begin{aligned} f(Y_{p+1}, \dots, Y_n / Y_1 \dots Y_p) &= \prod_{t=p+1}^n f(Y_t / Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p}) \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n-p}{2}}} \exp\left(-\frac{\sum_{t=p+1}^n (Y_t - \sum_{j=1}^p \phi_j Y_{t-j})^2}{2\sigma^2}\right). \end{aligned}$$

Maximiser cette vraisemblance conditionnelle en ϕ en passant au log, revient à minimiser :

$$(\phi_1, \dots, \phi_p, \sigma^2) \rightarrow \left(-\frac{\sum_{t=p+1}^n (Y_t - \sum_{j=1}^p \phi_j Y_{t-j})^2}{\sigma^2}\right),$$

avec σ^2 fixé cela correspond au critère des moindres carrés.

La démarche est donc d'obtenir $\hat{\phi}_{css}$ (pour conditional sum of square) en minimisant

:

$$\hat{\phi}_{css} = \arg \min \sum_{t=p+1}^n (Y_t - \sum_{j=1}^p \phi_j Y_{t-j})^2. \quad (1.4.6)$$

puis

$$\hat{\sigma}_{css}^2 = \frac{1}{n-p} \sum_{t=p+1}^n (Y_t - \sum_{j=1}^p \hat{\phi}_{css} Y_{t-j})^2. \quad (1.4.7)$$

Cette approche se généralise aux *ARMA*, de même que le calcul de la vraisemblance exacte.

Revenons sur le choix de l'ordre d'un *ARMA*(p, q). Nous avons vu précédemment que l'étude des autocorrélations et autocorrélations partielles peuvent permettre de préselectionner un certain nombre de modèles plausibles. On peut ensuite, une fois les paramètres de ces modèles estimés, sélectionner celui qui minimise les critères suivants:

· *AIC Akaike Information Criterion*, adapté au problème de la prévision, défini par:

$$AIC(\phi, \theta, \sigma^2) = -2 \log(L(\theta, \phi, \sigma^2)) + 2k,$$

où L est la vraisemblance, k est le nombre de paramètres dans le modèle donc $p + q$ ou $p + q + 1$ si la constante est dans le modèle.

· *BIC Bayesian Information Criterion*, adapté au problème de la prévision, défini par:

$$BIC(\phi, \theta, \sigma^2) = -2 \log(L(\theta, \phi, \sigma^2)) + \log(n)k.$$

Le principe est donc de sélectionner un modèle qui colle bien aux données (grande vraisemblance) tout en pénalisant les modèles comprenant trop de paramètres.

Les modèles auto-régressifs non linéaires

Ce chapitre est consacré à l'étude de quelques modèles autoregressifs non linéaires et leurs propriétés. Nous allons exposer le modèle exponentiel et le modèle exponentiel périodique. Puis, nous passerons au modèle autoregressif conditionnellement hétéroscédastiques et le modèle généralisé, ensuite nous donnerons un aperçu général du modèle autoregressif à seuil.

2.1 Modèle exponentiel

La classe des modèles **EXPAR** introduits par **Ozaki (1980)** [24] et **Haggan et Ozaki (1981)**[17], ont montré leur pertinence pour capturer certaines caractéristiques bien connues de la théorie des vibrations non linéaires telles que la fréquence dépendante de l'amplitude, les phénomènes de saut et le comportement de cycle limite. Ces modèles ont la forme d'un modèle autorégressif avec des coefficients exponentiels dépendant de l'amplitude. De nombreux résultats et méthodes y compris la stationnarité, l'ergodicité géométrique, l'estimation, la prévision et les tests ont été étudiés comme **Ozaki (1982)**;

1985) [24], Chan et Tong (1985) [6], Al-Kassam et Lane (1989) [1], Koul et Schick (1997) [20] et Allal et El Melhaoui (2006) [2].

Pour construire des modèles de séries temporelles à temps discret qui reproduisent les phénomènes non linéaires précitées, Ozaki (1980) [24] a commencé par prendre un modèle $AR(2)$

$$Y_t = a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t \quad (2.1.1)$$

et par la suite, de permettre aux coefficients a_1 et a_2 de dépendre de Y_{t-1} , précisément, il proposa que les coefficients soit des fonctions exponentielles de Y_{t-1}^2

$$a_1 = \varphi_{1,1} + \varphi_{1,2} \exp(-\gamma Y_{t-1}^2) \quad ; \quad a_2 = \varphi_{2,1} + \varphi_{2,2} \exp(-\gamma Y_{t-1}^2),$$

avec ces valeurs de a_1 et a_2 le modèle (2.1.1) est appelé processus Autorégressif Exponentiel d'ordre 2 ($EXPAR(2)$).

On note que pour une valeur de $|Y_{t-1}|$ grande

$$a_1 \sim \varphi_{1,1} \quad ; \quad a_2 \sim \varphi_{2,1}$$

et pour une valeur $|Y_{t-1}|$ petite

$$a_1 \sim \varphi_{1,1} + \varphi_{1,2} \quad ; \quad a_2 \sim \varphi_{2,1} + \varphi_{2,2}.$$

Ainsi le modèle $EXPAR$ se comporte comme un modèle autorégressif à seuils où les coefficients changent de manière lisse entre les deux valeurs extrêmes. Ce modèle d'ordre 2 peut être étendu à un modèle d'ordre générale, ainsi un modèle $EXPAR(p)$ est donné par

$$Y_t = \sum_{i=1}^p (\varphi_{i,1} + \varphi_{i,2} \exp(-\gamma Y_{t-1}^2)) Y_{t-i} + \varepsilon_t \quad , \quad t \in \mathbb{Z} \quad (2.1.2)$$

Dans cette section on donne les définitions explicites des points singuliers ou fixes et des cycles limites d'une équation (temporelle) de différence discrète générale :

$$y_t = f(y_{t-1}, \dots, y_{t-p}). \quad (2.1.3)$$

Ces définitions sont données par ozaki (1985).

Définition 2.1.1 [*Point singulier ou fixe*]

Un point fixe de l'équation (2.1.3) est un point, pour lequel chaque trajectoire de l'équation (2.1.3) commençant suffisamment près de ξ l'approche soit pour $t \rightarrow \infty$ ou $t \rightarrow -\infty$. Si la trajectoire approche ξ pour $t \rightarrow \infty$ on dit un point fixe stable, et si elle l'approche pour $t \rightarrow -\infty$, on dit un point fixe instable.

Définition 2.1.2 [*cycle limite*]

Un cycle limite de l'équation (2.1.3) est une trajectoire fermée isolée $(y_{t+1}, \dots, y_{t+q})$, où q est un entier positif.

- Le mot "**Fermée**" signifie que si les valeurs initiales (y_1, \dots, y_p) appartiennent au cycle limite, alors $(y_{1+kq}, \dots, y_{p+kq}) = (y_1, \dots, y_p)$, quelque soit l'entier k . Autrement dit la trajectoire fermée revient à la condition initiale après un certain temps.

- Le mot "**Isolée**" signifie que toutes les trajectoires commençant suffisamment près du cycle limite l'approchent soit pour $t \rightarrow \infty$ ou $t \rightarrow -\infty$, c'est à dire les trajectoires voisines ne sont pas fermées, elles sont spirales autour du cycle limite en s'en éloignant ou en s'en approchant. Si les trajectoires approchent le cycle limite pour $t \rightarrow \infty$, le cycle est dit stable ou attractif sinon, il est dit instable. Le plus petit entier q qui satisfait la définition (2.1.1) est appelé la période du cycle limite de l'équation (2.1.3). **Ozaki (1985)[1]** a noté que le point fixe peut être considéré comme un cycle limite de période 1, mais il le distingue car il a une signification physique différente.

Définition 2.1.3 (modèle EXPAR(p)) Soit $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, un processus univarié. $\{Y_t\}$, suit un modèle EXPAR(p), s'il est solution de l'équation aux différences non linéaires stochastique de la forme :

$$Y_t = \sum_{i=1}^p (\varphi_{i,1} + \varphi_{i,2} \exp(-\gamma Y_{t-1}^2)) Y_{t-i} + \varepsilon_t \quad , t \in \mathbb{Z} \quad (2.1.4)$$

où $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (iid), de $E(\varepsilon_t) = 0$ et $V(\varepsilon_t) = \sigma^2$ et $(\varphi_{i,1}, \varphi_{i,2}, \gamma)$ sont des paramètres autorégressifs linéaires pour $i = \{1, 2, \dots, p\}$, et $\gamma > 0$, est le paramètre d'exponentiel, et p est l'ordre du modèle.

Remarques 2.1.1 ◦ Les modèles Autorégressifs Exponentiels (*EXPAR*), ont une structure simple semblable aux modèles Autorégressifs (*AR*) à part les coefficients qui sont état-dépendants.

◦ La non linéarité du processus vient de la forme exponentiel, cette fonction peut rendre la dynamique de la série localement linéaire, mais globalement non linéaire.

Exemple 2.1.1 La **Figure 1** montre la trajectoire simulée d'un processus Autorégressif Exponentiel, générée d'un *EXPAR*(1) avec $n = 100$; $\varphi_{1,1} = 0.8$; $\varphi_{1,2} = 0.2$; $\gamma = 1$; $\varepsilon_t \rightsquigarrow N(0,1)$.

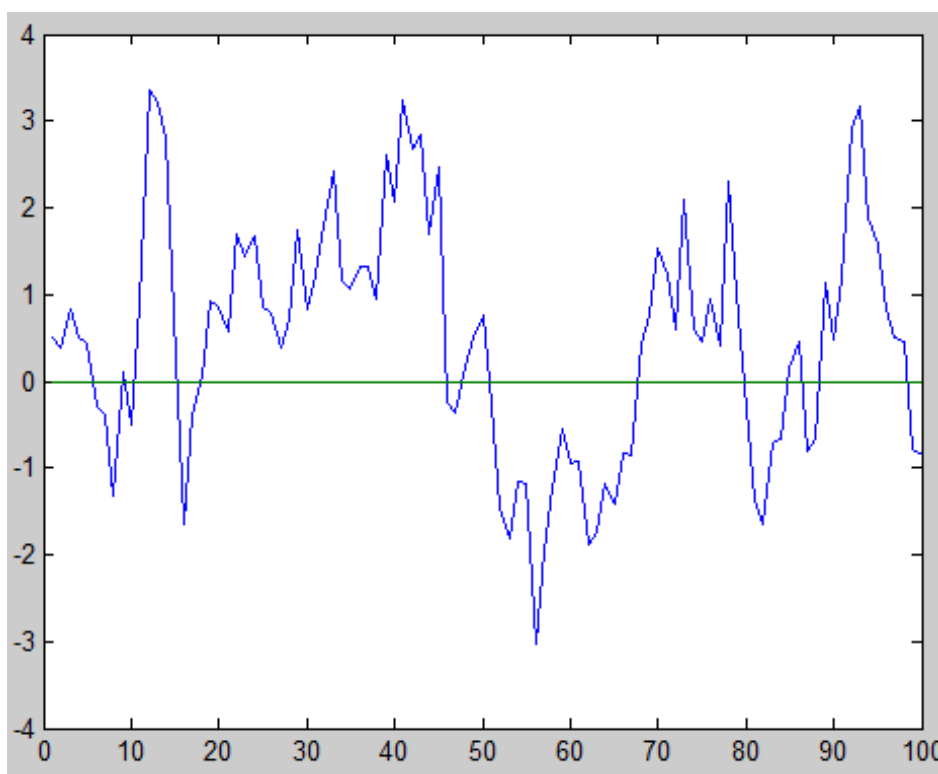


Figure 1 : Représentation graphique de la trajectoire d'un modèle *EXPAR*(1).

Exemple 2.1.2 La **Figure 2** montre la trajectoire simulée d'un processus Autorégressif Exponentiel, générée d'un *EXPAR*(2) avec $n = 100$; $\varphi_{1,1} = -0.3$; $\varphi_{1,2} = 0.5$; $\varphi_{2,1} = 0.8$;

$\varphi_{2,2} = -0.2; \gamma = 2; \varepsilon_t \rightsquigarrow N(0, 1)$.

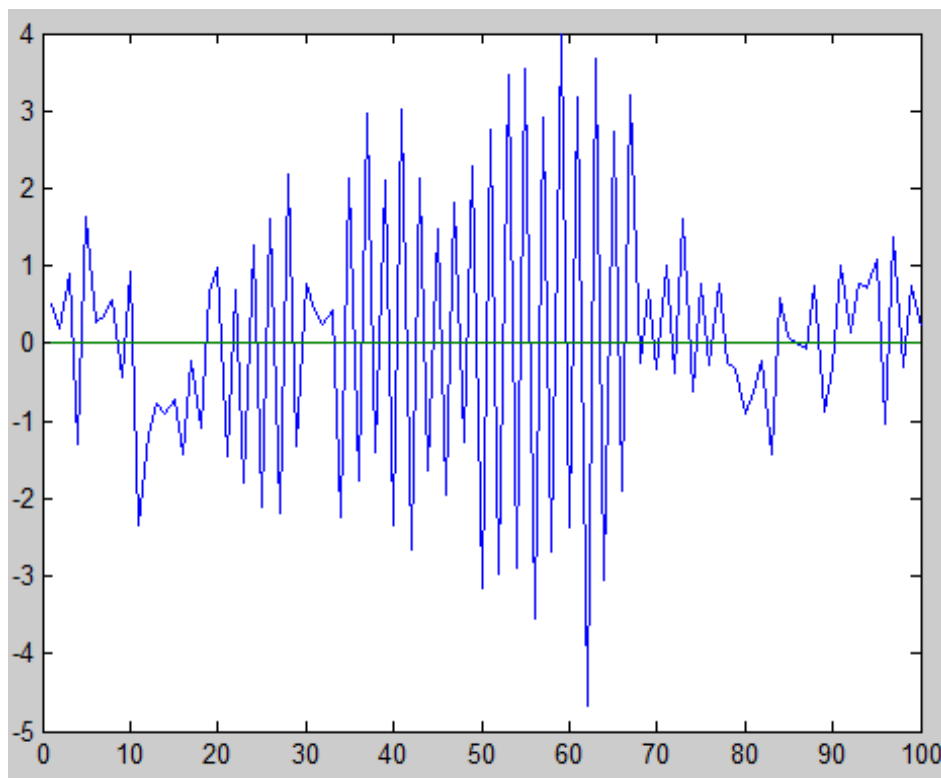


Figure 2 : Représentation graphique de la trajectoire d'un modèle $EXPAR(2)$.

Haggan et Ozaki (1981)[2] ont montré que le modèle $EXPAR$ exhibe un comportement de cycle limite sous les conditions suivantes:

i. Toutes les racines de l'équation caractéristique

$$\lambda^p - \varphi_{1,1}\lambda^{p-1} - \dots - \varphi_{p,1} = 0$$

sont à l'intérieur du cercle unité. Par conséquent Y_t commence à diminuer (amortir) quand $|Y_{t-1}|$ est trop grand.

ii. Quelques racines de l'équation

$$\lambda^p - (\varphi_{1,1} + \varphi_{1,2})\lambda^{p-1} - \dots - (\varphi_{p,1} + \varphi_{p,2}) = 0$$

sont à l'extérieur du cercle unité. Par conséquent Y_t commence à osciller et diverger pour les petites valeurs de $|Y_{t-1}|$:

Le résultat de ces deux effets produit une oscillation auto-entretenu (self excited). La **Figure 3** montre le cycle limite obtenu pour le modèle

$$Y_t = (0.95 + 0.23 \exp(-Y_{t-1}^2))Y_{t-1} - (0.96 + 0.24 \exp(-Y_{t-1}^2))Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

avec $\varepsilon_t \rightsquigarrow N(0, 0.01)$, où les coefficients satisfont les conditions **i.** et **ii.** précédente (exemple cité dans **Haggan et Ozaki (1981)**).

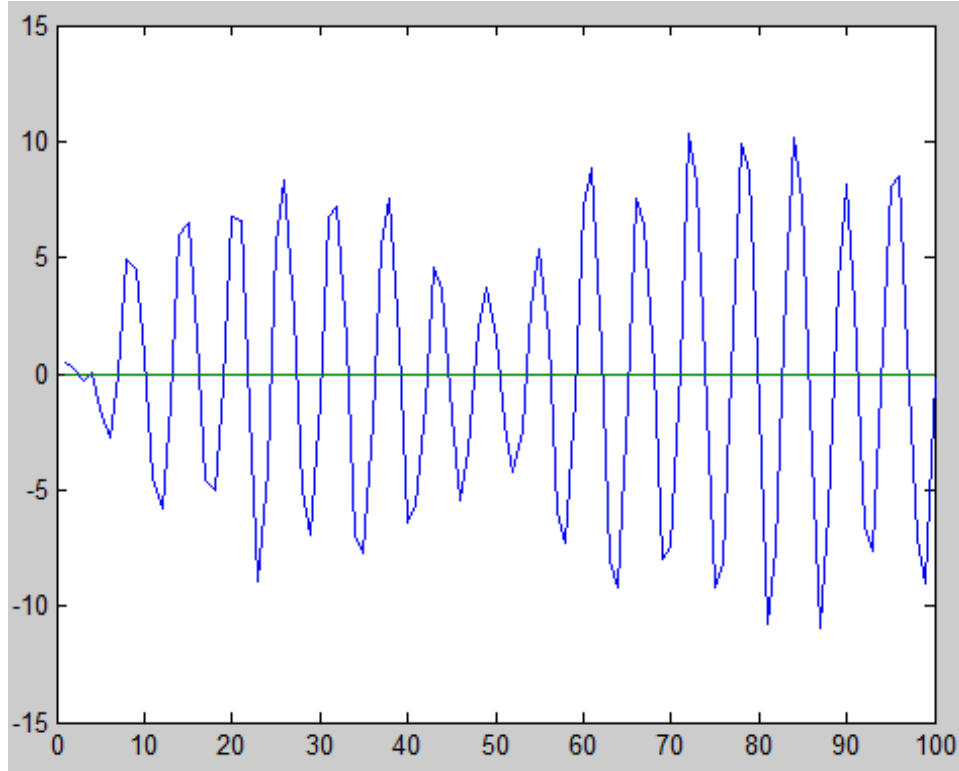


Figure 3 : représentation graphique d'un modèle *EXPAR*(2) ayant un cycle limite

Les deux conditions précédentes sont nécessaires pour l'existence du cycle limite mais pas suffisantes. La condition suffisante est :

iii.

$$\left(1 - \sum_{i=1}^p \varphi_{i,1}\right) / \sum_{i=1}^p \varphi_{i,2} > 1 \quad \text{ou} \quad \left(1 - \sum_{i=1}^p \varphi_{i,1}\right) / \sum_{i=1}^p \varphi_{i,2} < 0.$$

Cette condition est exigée pour prévenir de l'occurrence d'un point singulier stable. Par exemple le modèle :

$$Y_t = (1.8 + 4 \exp(-Y_{t-1}^2))Y_{t-1} - (0.97 + 0.1 \exp(-Y_{t-1}^2))Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

satisfait les conditions **i.** et **ii.** mais la trajectoire de Y_t converge vers un point fixe ξ , voir **Figure 4**.

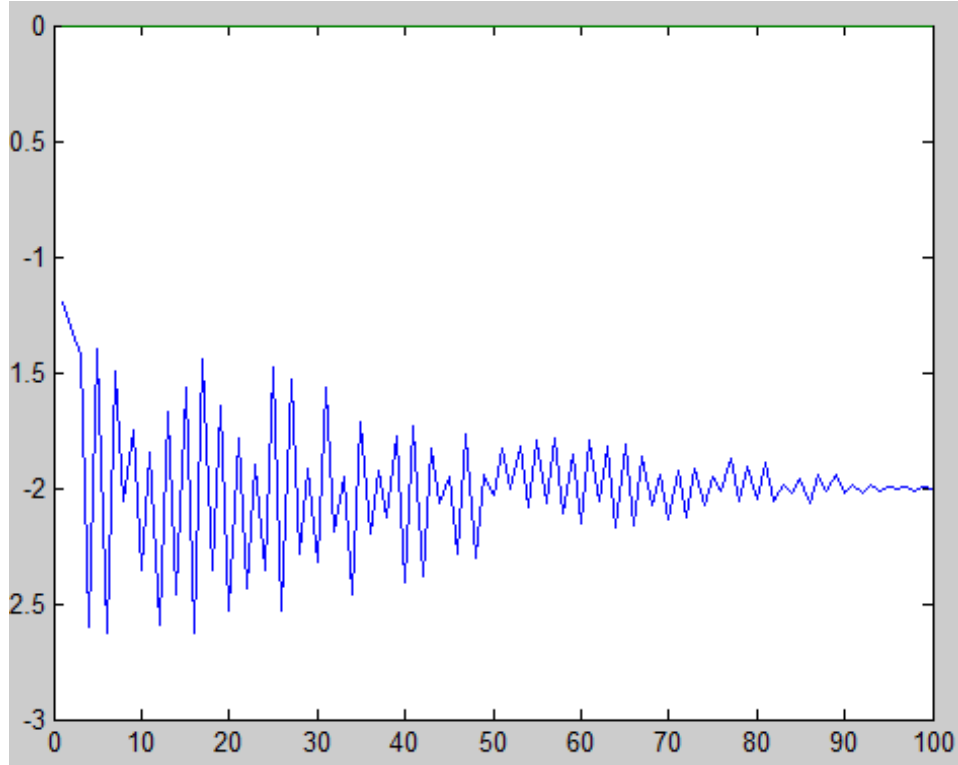


Figure 4 : Représentation graphique d'un modèle $EXPAR(2)$ ayant un point singulier.

On a

$$\xi = (1.8 + 4 \exp(\xi^2))\xi - (0.97 + 0.1 \exp(\xi^2))\xi.$$

Dans ce cas, le point fixe existe parce que les coefficients ne satisfont pas la condition

iii. c'est à dire:

$$0 < (1 - \sum_{i=1}^2 \varphi_{i,1}) / \sum_{i=1}^2 \varphi_{i,2} < 1.$$

2.1.1 Conditions de stationnarité

Afin d'estimer les paramètres avec la méthode des moindres carrés conditionnels, **Tjøstheim (1986)[27]**, a donné une conditions de stationnarité stricte et d'ergodicité, et **Chan et Tong (1985)[15]**, a proposé une condition d'ergodicité géométrique,

pour le modèle $EXPAR(1)$, et

$$Y_t = (\varphi_{1.1} + \varphi_{1.2} \exp(-\gamma Y_{t-1}^2))Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.1.5)$$

pour $t > 2$, et Y_1 étant une variable initiale.

Théorème 2.1.1 (Stationnarité stricte Tjøstheim (1986)[27])

Soit $\{Y_t\}$ définis par (2.1.5), supposons que $|\varphi_{1.1}| + |\varphi_{1.2}| < 1$, et que $\{\varepsilon_t\}$, a une fonction de densité avec un support infini. Alors il existe une distribution unique pour la variable initiale Y_1 ,

tel que : $\{Y_t, t \geq 1\}$ soit strictement stationnaire et ergodique.

Théorème 2.1.2 (ergodicité géométrique, Chan et Tong (1985)[15]) Le modèle $EXPAR(1)$ définis par (2.1.5), est géométriquement ergodique si $|\varphi_{1.1}| < 1$.

La démonstration est basée sur la décomposition de la fonction $h(y) = (\varphi_{1.1} + \varphi_{1.2} \exp(-\gamma y^2))y$, en deux parties $h(y) = h_h(y) + h_d(y)$ où $h_h(y) = \varphi_{1.1}y$, est une fonction continue, $h_d(y) = \varphi_{1.2} \exp(-\gamma y^2)y$, est une fonction bornée.

2.1.2 Estimation du modèle $EXPAR$

Méthode des moindres carrés conditionnels

Tjøstheim (1986) a traité le problème d'estimation des séries temporelles non linéaires dans un cadre général. Son approche est basée sur le **développement de Taylor** de la fonction de pénalité générale qui est par la suite spécialisé à un critère de type moindres carrés conditionnelle (**MCC**) et maximum de vraisemblance (**MV**).

Dans le cas des **MCC** son travail est une généralisation de l'approche de **Klimko et Nelson (1978)** au cas multivarié.

Théorème 2.1.3 [Tjøstheim (1986)]

Soit Y_t définie par (2.1.5), est strictement stationnaire et ergodique et supposons que $E(\varepsilon_t^6) < \infty$, alors il existe une suite d'estimateurs $\{(\hat{\varphi}_{1.1}, \hat{\varphi}_{1.2}, \hat{\gamma})\}$, minimisant la fonction pénalité définie par

$$Q_n = \sum_{t=2}^n (Y_t - E(Y_t | F_{t-1}^y))^2 \tag{2.1.6}$$

où F_t^y est la σ -algèbre générée par $\{Y_s, s \leq t\}$, tel que $(\widehat{\varphi}_{1.1}, \widehat{\varphi}_{1.2}, \widehat{\gamma}) \xrightarrow{p.s.} (\varphi_{1.1}, \varphi_{1.2}, \gamma)$ et $(\widehat{\varphi}_{1.1}, \widehat{\varphi}_{1.2}, \widehat{\gamma})$ est asymptotiquement normal c.à.d

$$\sqrt{n}((\widehat{\varphi}_{1.1}, \widehat{\varphi}_{1.2}, \widehat{\gamma}) - (\varphi_{1.1}, \varphi_{1.2}, \gamma)) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2 U^{-1}),$$

où

$$U = \begin{pmatrix} E(Y_{t-1}^2) & E(\exp(-\gamma Y_{t-1}^2) Y_{t-1}^2) & E(-\varphi_{1.2} \exp(-\gamma Y_{t-1}^2) Y_{t-1}^4) \\ E(\exp(-\gamma Y_{t-1}^2) Y_{t-1}^2) & E(\exp(-2\gamma Y_{t-1}^2) Y_{t-1}^2) & E(-\varphi_{1.2} \exp(-\gamma Y_{t-1}^2) Y_{t-1}^4) \\ E(-\varphi_{1.2} \exp(-\gamma Y_{t-1}^2) Y_{t-1}^4) & E(-\varphi_{1.2} \exp(-2\gamma Y_{t-1}^2) Y_{t-1}^4) & E(-\varphi_{1.2}^2 \exp(-2\gamma Y_{t-1}^2) Y_{t-1}^6) \end{pmatrix}.$$

Preuve. Tjøstheim (1986) a démontré deux théorèmes (2.1.1) et (2.1.2) qui prouvent l'existence d'une suite d'estimateurs minimisant une fonction critère Q_n , la convergence presque sur et la normalité asymptotique, pour des séries temporelles non linéaires. En vérifiant les conditions, $C1, C2, C3$ citées dans les théorèmes (2.1.1) et (2.1.2), il montre l'existence des estimateurs de MCC pour l' $EXPAR(1)$.

pour $t \geq 2$, on a

$$\widetilde{Y}_{t/t-1} = E(Y_t / F_{t-1}^y) = (\varphi_{1.1} + \varphi_{1.2} \exp(-\gamma Y_{t-1}^2)) Y_{t-1}$$

(C1)

$$* \frac{\partial \widetilde{Y}_{t/t-1}}{\partial \varphi_{1.1}} = Y_{t-1} \quad ; \quad \frac{\partial \widetilde{Y}_{t/t-1}}{\partial \varphi_{1.2}} = \varphi_{1.2} \exp(-\gamma Y_{t-1}^2) Y_{t-1} \quad ; \quad \frac{\partial \widetilde{Y}_{t/t-1}}{\partial \gamma} = -\varphi_{1.2} \exp(-\gamma Y_{t-1}^2) Y_{t-1}^3.$$

Puisque Y_t est strictement stationnaire alors $E(\varepsilon_t^6) < \infty$, ce qui implique que $E(Y_t^6) < \infty$

d'où :

$$E \left\{ \left| \frac{\partial \widetilde{Y}_{t/t-1}}{\partial \varphi_{1.1}} \right|^2 \right\} < \infty \quad ; \quad E \left\{ \left| \frac{\partial \widetilde{Y}_{t/t-1}}{\partial \varphi_{1.2}} \right|^2 \right\} < \infty \quad \text{et} \quad E \left\{ \left| \frac{\partial \widetilde{Y}_{t/t-1}}{\partial \gamma} \right|^2 \right\} < \infty.$$

* Pour la même raison on a :

$$E \left\{ \left| \frac{\partial^2 \widetilde{Y}_{t/t-1}}{\partial \varphi_{1.2} \partial \gamma} \right|^2 \right\} < \infty \quad \text{et} \quad E \left\{ \left| \frac{\partial \widetilde{Y}_{t/t-1}}{\partial \gamma^2} \right|^2 \right\} < \infty.$$

(C2)

Soit a_1, a_2 et a_3 des nombres réels arbitraires, alors

$$E \left(\left| a_1 \frac{\partial \tilde{Y}_{t/t-1}}{\partial \varphi_{1.1}} + a_2 \frac{\partial \tilde{Y}_{t/t-1}}{\partial \varphi_{1.2}} + a_3 \frac{\partial \tilde{Y}_{t/t-1}}{\partial \gamma} \right|^2 \right) = 0,$$

implique que

$$a_1 \frac{\partial \tilde{Y}_{t/t-1}}{\partial \varphi_{1.1}} + a_2 \frac{\partial \tilde{Y}_{t/t-1}}{\partial \varphi_{1.2}} + a_3 \frac{\partial \tilde{Y}_{t/t-1}}{\partial \gamma} \stackrel{ps}{=} 0,$$

d'où :

$$Y_{t-1} [a_1 + \exp(-\gamma Y_{t-1}^2)(a_2 + a_3 \varphi_{1.2} Y_{t-1}^2)] \stackrel{ps}{=} 0.$$

Puisque : $E(Y_t^2) \geq E(\varepsilon_t^2) > 0$, (d'après la formule(2.1.5)) alors

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0.$$

(C3)

- * $\left| \frac{\partial \tilde{Y}_{t/t-1}}{\partial \varphi_{1.1}} \frac{\partial^2 \tilde{Y}_{t/t-1}}{\partial \varphi_{1.2} \partial \gamma} \right| = |\exp(-\gamma Y_{t-1}^2) Y_{t-1}^4|$; $\left| \frac{\partial \tilde{Y}_{t/t-1}}{\partial \varphi_{1.1}} \frac{\partial^2 \tilde{Y}_{t/t-1}}{\partial \gamma^2} \right| = |\varphi_{1.2} \exp(-\gamma Y_{t-1}^2) Y_{t-1}^2|$.
- * $\left| \frac{\partial \tilde{Y}_{t/t-1}}{\partial \varphi_{1.2}} \frac{\partial^2 \tilde{Y}_{t/t-1}}{\partial \varphi_{1.2} \partial \gamma} \right| = |\exp(-2\gamma Y_{t-1}^2) Y_{t-1}^4|$; $\left| \frac{\partial \tilde{Y}_{t/t-1}}{\partial \varphi_{1.2}} \frac{\partial^2 \tilde{Y}_{t/t-1}}{\partial \gamma^2} \right| = |\varphi_{1.2} \exp(-2\gamma Y_{t-1}^2) Y_{t-1}^6|$.
- * $\left| \frac{\partial \tilde{Y}_{t/t-1}}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 \tilde{Y}_{t/t-1}}{\partial \varphi_{1.2} \partial \gamma} \right| = |\varphi_{1.2} \exp(-2\gamma Y_{t-1}^2) Y_{t-1}^6|$; $\left| \frac{\partial \tilde{Y}_{t/t-1}}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 \tilde{Y}_{t/t-1}}{\partial \gamma^2} \right| = |\varphi_{1.2}^2 \exp(-2\gamma Y_{t-1}^2) Y_{t-1}^8|$.
- * $\left| \left\{ Y_t - \tilde{Y}_{t/t-1} \right\} \frac{\partial^3 \tilde{Y}_{t/t-1}}{\partial \varphi_{1.2} \partial \gamma^2} \right| \leq (|Y_t| + |Y_{t-1}|) |\exp(-\gamma Y_{t-1}^2) Y_{t-1}^5|$, car $|\varphi_{1.1}| + |\varphi_{1.2}| < 1$.
- * $\left| \left\{ Y_t - \tilde{Y}_{t/t-1} \right\} \frac{\partial^3 \tilde{Y}_{t/t-1}}{\partial \gamma^3} \right| \leq (|Y_t| + |Y_{t-1}|) |\varphi_{1.2} \exp(-\gamma Y_{t-1}^2) Y_{t-1}^7|$.

Comme $y^k e^{-\gamma y^2}$ est bornée et $E(Y_t^6) < \infty$, alors toutes les quantités précédentes sont majorées par des fonctions dont les espérances sont finies. ■

Procédure d'estimation donnée par Haggan et Ozaki 1981

Nous allons présenter une description de la procédure d'estimation de l'**EXPAR**, proposée par **Haggan et Ozaki (1981)**, et qui est considérée comme une référence naturelle pour les méthodes alternatives parce que la procédure est directe et aboutie toujours a une

solution. L'estimation de l'ordre p , et des coefficients $\{\gamma, \varphi_{i.1}, \varphi_{i.2}; i = 1, \dots, p\}$, dans le modèle exponentiel (2.1.3) est une procédure d'optimisation non linéaire, impliquant toute les difficultés de calcul propre à cette procédure. Cependant ce problème peut être surmonté en fixant le paramètre γ dans une grille de valeurs et estimer l'ordre et les autres paramètres en appliquant une régression linéaire de Y_t , sur $\{Y_{t-j}, Y_{t-j} \exp(-Y_{t-1}^2); j = 1, \dots, p\}$ où Y_t est la série centrée. Les valeurs de γ sont choisie de manière que $\{\exp(-\gamma Y_{t-1}^2)\}$ soit varie raisonnablement dans l'intervalle $[0, 1]$. L'ordre p est sélectionné en utilisant le **critère AIC** donné par :

$$AIC(p) = (n - p) \log \hat{\sigma}_p^2 + 2(2p + 1),$$

où p est l'ordre maximal du modèle, n est le nombre d'observation et

$$\hat{\sigma}_p^2 = (\hat{\varepsilon}_{p+1}^2 + \hat{\varepsilon}_{p+2}^2 + \dots + \hat{\varepsilon}_n^2) \setminus (n - p)$$

est l'estimateur des moindres carrés de la variance des résidus du modèle.

Les modèles sélectionnés pour chaque γ sont comparés en utilisant *l'AIC* pour trouver le meilleur modèle.

L'algorithme exige la pré-spécification d'un intervalle $[a, b]$; $a \geq 0$, pour les valeurs de l'équation (2.1.3). Cet intervalle sera partagé en M sous intervalles, de manière à avoir une grille de valeurs possibles de γ , par exemple, si on prend l'intervalle $[0, 10]$ tel que $0 < \gamma < 10$, alors on aura une grille de 10000 points avec les valeurs 0.001, 0.002, \dots , 10 comme solutions possibles.

Soit $\delta = \frac{b-a}{M}$ et $\gamma = a$. Alors, les étapes suivantes sont répétées M fois :

- i. Poser $\gamma = \gamma + \delta$.
- ii. Estimer les paramètres $\varphi_{i.1}$ et $\varphi_{i.2}$ par les moindres carrés ordinaires par régression de Y_t , sur $\{Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p}, Y_{t-1} \exp(-Y_{t-1}^2), \dots, Y_{t-p} \exp(-Y_{t-1}^2)\}$.
- iii. Calculer le critère **d'Akaike AIC** et répéter l'étape **ii.** pour $p = 1, \dots, p$, où p est un entier pré-spécifié supérieur à 1.

Les paramètres sélectionnés sont ceux qui minimisent *l'AIC*.

2.2 Modèle exponentiel restreint périodique PEXPAR

Soit $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus stochastique saisonnier de période s ($s \geq 2$):

2.2.1 Modèle PEXPAR(1)

Définition 2.2.1 *Le processus $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, est un modèle Auto-Régressif EXPonentiel Restreint Périodique d'ordre 1, (PEXP(1)) s'il est solution de l'équation aux différences stochastique non linéaire donnée par :*

$$Y_t = \varphi_{t.1} + \varphi_{t.2} \exp(-\gamma Y_{t-1}^2) Y_{t-1} + \varepsilon_t ; \quad t \in \mathbb{Z} \quad (2.2.1)$$

tel que les paramètres autorégressifs et la variance sont périodiques de période s , c.à.d :

$$\varphi_{t+ks.1} = \varphi_{t.1} , \quad \varphi_{t+ks.2} = \varphi_{t.2} , \quad \text{et} \quad \sigma_{t+ks}^2 = \sigma_t^2 ; \quad \forall k, t \in \mathbb{Z},$$

et $\{\varepsilon_t ; t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus iid $(0, \sigma_t^2)$, $\varphi_{t.1}$, $\varphi_{t.2}$, sont les paramètres autorégressifs, et $\gamma > 0$ est le paramètre non linéaire supposé connu. Une détermination heuristique de γ à partir des données est

$$\hat{\gamma} = - \frac{\log \epsilon}{\max_{1 \leq t \leq n} Y_t^2},$$

où ϵ est un nombre petit et n est le nombre des observations. (**Shietal. (2001)** [25]).

Pour mettre en valeur la périodicité, soit $t = i + s\tau$, $i = 1, \dots, s$, et $\tau \in \mathbb{Z}$, alors l'équation (2.2.1) devient :

$$Y_{i+s\tau} = \varphi_{t.1} + \varphi_{t.2} \exp(-\gamma Y_{i+s\tau-1}^2) Y_{i+s\tau-1} + \varepsilon_{i+s\tau} ; \quad i = 1, \dots, s, \tau \in \mathbb{Z}.$$

Dans l'équation (2.2.1), $Y_{i+s\tau}$ est la valeur de Y_t durant la $i^{\text{ème}}$ saison du cycle. τ et $\varphi_{t.1}$, $\varphi_{t.2}$ sont les paramètres du modèle à la saison i .

C'est clair que, les paramètres dépendent de $Y_{i+s\tau-1}$ dans le sens où pour $|Y_{i+s\tau-1}|$ grand : nous avons

$$\varphi_{t.1} + \varphi_{t.2} \exp(-\gamma Y_{i+s\tau-1}^2) Y_{i+s\tau-1} \sim \varphi_{t.1}.$$

Pour $|Y_{i+s\tau-1}|$ petit :

$$\varphi_{t,1} + \varphi_{t,2} \exp(-\gamma Y_{i+s\tau-1}^2) Y_{i+s\tau-1} \sim \varphi_{t,1} + \varphi_{t,2}.$$

En application, le modèle $PEXPAR(1)$ restreint est approprié aux séries temporelles saisonnières affichant des caractéristiques non linéaires tels que le scycles limites.

Ces formes de modèles sont nouvelles dans la littérature des séries temporelles, il est intéressant de faire plusieurs simulations pour voir leurs caractéristiques. Un fait important est leur propriété de non normalité.

Un exemple du modèle A est donné comme suit :

$$\text{Modèle } A = \left\{ \begin{array}{l} Y_{1+2\tau} = (-0.9 + 1.1 \exp(-Y_{2\tau}^2)) Y_{2\tau} + \varepsilon_{1+2\tau} \\ Y_{2+2\tau} = (0.9 - \exp(-Y_{1+2\tau}^2)) Y_{1+2\tau} + \varepsilon_{2+2\tau} \end{array} \right\}$$

Illustration du modèle (A)

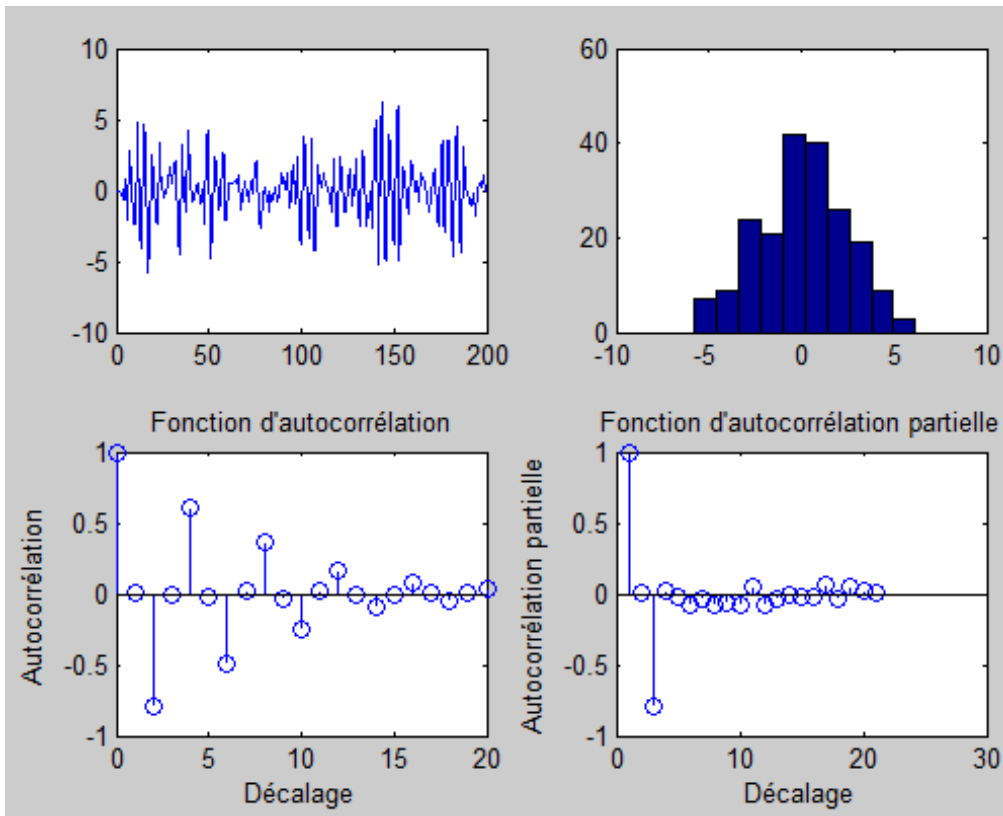


Figure 5 : Représentation graphique de la trajectoire, Histogramme corrélogramme, du modèle (A).

partir de corrélogramme, on peut voir que le processus est stationnaire dans chaque saison à cause de la décroissance rapide vers 0 quand h augmente

Un exemple du modèle B est donné comme suit :

$$\text{Modèle } B = \left\{ \begin{array}{l} Y_{1+2\tau} = (-0.3 + 2 \exp(-Y_{2\tau}^2))Y_{2\tau} + \varepsilon_{1+2\tau} \\ Y_{2+2\tau} = (-0.8 + \exp(-Y_{1+2\tau}^2))Y_{1+2\tau} + \varepsilon_{2+2\tau} \end{array} \right\}$$

Illustration du modèle (B)

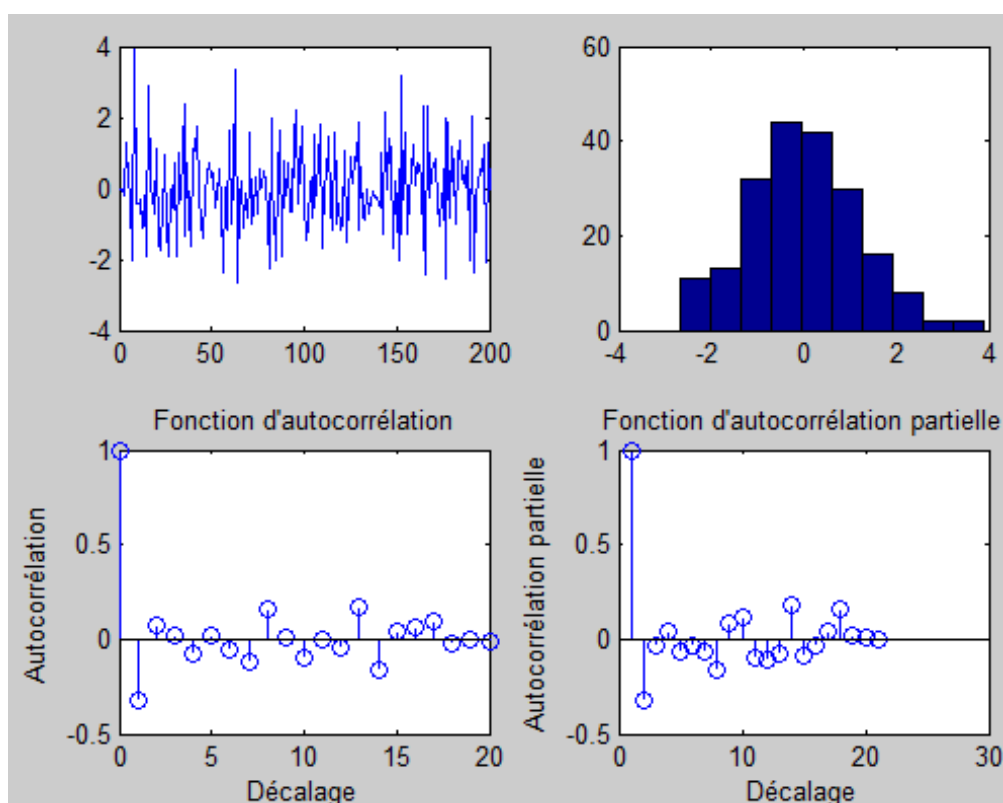


Figure 6 : Représentation graphique de la trajectoire, Histogramme corrélogramme, du modèle (B)

partir de corrélogramme, on peut voir que le processus est stationnaire dans chaque saison à cause de la décroissance rapide vers 0 quand h augmente

Un exemple du modèle C est donné comme suit :

$$\text{Modèle } C = \left\{ \begin{array}{l} Y_{1+2\tau} = (1 - 0.7 \exp(-Y_{2\tau}^2))Y_{2\tau} + \varepsilon_{1+2\tau} \\ Y_{2+2\tau} = (0.95 - 2 \exp(-Y_{1+2\tau}^2))Y_{1+2\tau} + \varepsilon_{2+2\tau} \end{array} \right\}$$

Illustration du modèle (c)

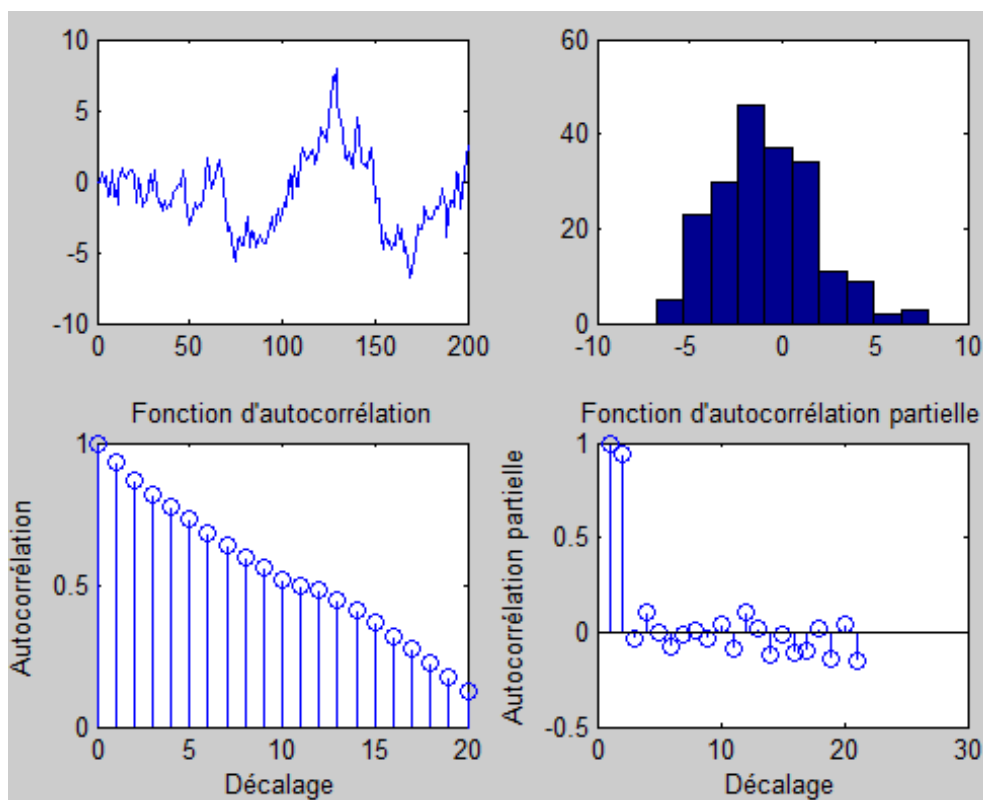


Figure 7 : Représentation graphique de la trajectoire, Histogramme corrélogramme, du modèle (C)

le corrélogramme montre une décroissance lente vers 0 qui est typiquement une signature des séries non stationnaires.

Un exemple du modèle D est donné comme suit :

$$\text{Modèle } D = \left\{ \begin{array}{l} Y_{1+2\tau} = (0.2 - 1.5 \exp(-Y_{2\tau}^2))Y_{2\tau} + \varepsilon_{1+2\tau} \\ Y_{2+2\tau} = (0.8 + 0.3 \exp(-Y_{1+2\tau}^2))Y_{1+2\tau} + \varepsilon_{2+2\tau} \end{array} \right\}$$

Illustration du modèle (D)

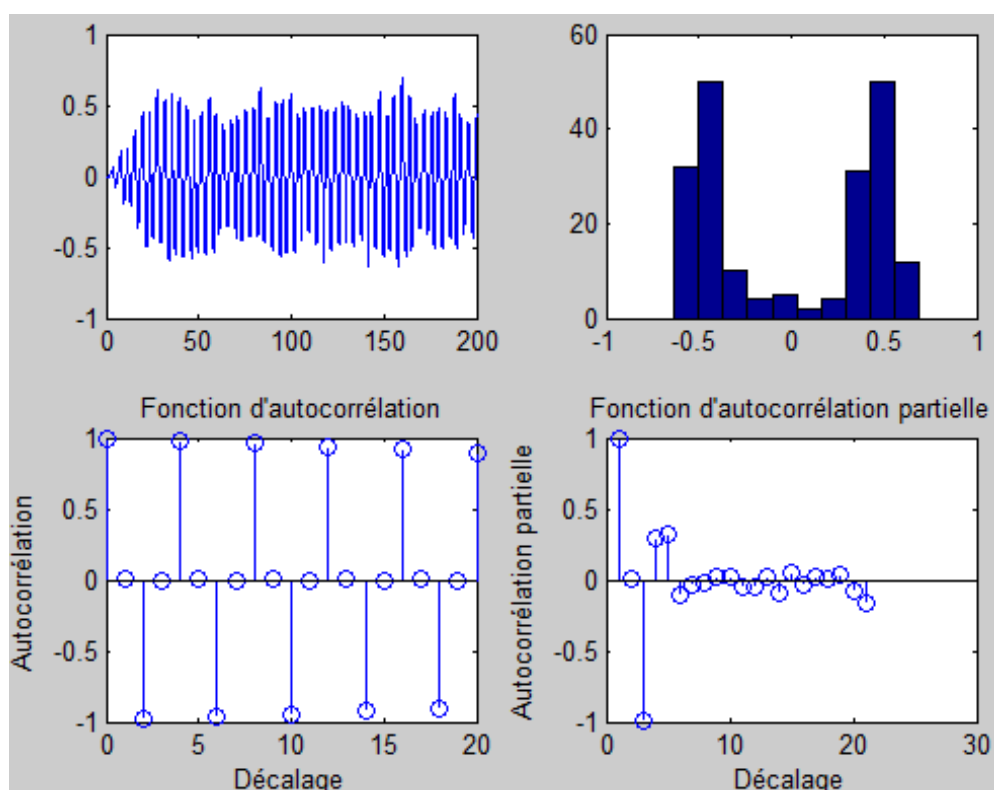


Figure 8 : Représentation graphique de la trajectoire, Histogramme
corrélogramme, du modèle (D)

le corrélogramme montre une décroissance lente vers 0 qui est typiquement une signature des séries non stationnaires.

2.2.2 Estimation des paramètres du modèle PEXPAR(1)

Lemme 2.2.1 (*Koul et Schik (1997)*[20]) *Les estimateurs de MCO de l'EXPAR(1)*

restreint sont donnés par :

$$\begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_1 \\ \widehat{\varphi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2 & \sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2 \exp(-\gamma Y_{t-1}^2) \\ \sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2 \exp(-\gamma Y_{t-1}^2) & \sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2 \exp(-2\gamma Y_{t-1}^2) \end{pmatrix}^{-1} \quad (2.2.2)$$

$$\times \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^n Y_{t-1} Y_t \\ \sum_{t=1}^n Y_{t-1} Y_t \exp(-\gamma Y_{t-1}^2) \end{pmatrix}$$

Preuve. La somme des carrés des résidus de ce modèle est donnée par :

$$S = \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2 = \sum_{t=1}^n (Y_t - \{\varphi_1 + \varphi_2 \exp(-\gamma Y_{t-1}^2)\} Y_{t-1})^2.$$

On remarque que cette fonction objective à minimiser est linéaire par rapport aux paramètres à estimer φ_1 et φ_2 .

La valeur de la fonction S est minimum lorsque ces dérivées par rapport à φ_1 et φ_2 s'annulent, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \varphi_1} &= \sum_{t=1}^n Y_{t-1} (Y_t - \{\varphi_1 + \varphi_2 \exp(-\gamma Y_{t-1}^2)\} Y_{t-1}) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial \varphi_2} &= \sum_{t=1}^n Y_{t-1} \exp(-\gamma Y_{t-1}^2) (Y_t - \{\varphi_1 + \varphi_2 \exp(-\gamma Y_{t-1}^2)\} Y_{t-1}) = 0 \end{aligned}$$

On peut écrire ce système en utilisant la formule matricielle suivante :

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \sum_{t=1}^n Y_{t-1} Y_t \\ \sum_{t=1}^n Y_{t-1} Y_t \exp(-\gamma Y_{t-1}^2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2 & \sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2 \exp(-\gamma Y_{t-1}^2) \\ \sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2 \exp(-\gamma Y_{t-1}^2) & \sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2 \exp(-2\gamma Y_{t-1}^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_1 \\ \widehat{\varphi}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2 & \sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2 \exp(-\gamma Y_{t-1}^2) \\ \sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2 \exp(-\gamma Y_{t-1}^2) & \sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2 \exp(-2\gamma Y_{t-1}^2) \end{pmatrix}^{-1} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^n Y_{t-1} Y_t \\ \sum_{t=1}^n Y_{t-1} Y_t \exp(-\gamma Y_{t-1}^2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On vérifie que ce point est un minimum, c'est-à-dire la Hessienne est définie positive :

$$H = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2 & \sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2 \exp(-\gamma Y_{t-1}^2) \\ \sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2 \exp(-\gamma Y_{t-1}^2) & \sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2 \exp(-2\gamma Y_{t-1}^2) \end{pmatrix}$$

et le déterminant est :

$$\det(H) = \sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2 \times \sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2 \exp(-2\gamma Y_{t-1}^2) - \left(\sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2 \exp(-\gamma Y_{t-1}^2) \right)^2 > 0.$$

■

2.2.3 Modèle PEXPAR(p)

En pratique, quand on a des séries temporelles saisonnières qui exhibent des caractéristiques non linéaires comme citées auparavant avec la moyenne et la structure de covariance périodique, on pourra analyser la série avec un modèle $EXPAR(p)$ périodique qui représente une fusion entre la présence de non linéarité et de comportement périodique. Nous nous intéressons principalement au cas où le paramètre non linéaire est restreint.

Définition 2.2.2 *Le processus $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ est dit suivre le modèle AutoRégressif EXPonentiel Restreint Périodique PEXPAR_S (p_t), de période s , s'il est solution de l'équation aux différences non linéaire périodique stochastique de la forme:*

$$Y_t = \sum_{j=1}^{pt} (\varphi_{t,j} + \pi_{t,j} \exp(-\gamma Y_{t-1}^2)) Y_{t-j} + \varepsilon_t \quad ; \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (2.2.3)$$

où $\{\varepsilon_t \ ; \ t \in \mathbb{Z}\}$, est un processus périodique i.i.d. avec une densité continue $f_{\sigma_t}(\cdot)$, pas nécessairement Gaussienne, de moyenne 0 et de variance finie σ_t^2 .

Les paramètres autorégressifs $\varphi_{t,j}$, $\pi_{t,j} \ \forall t \in \mathbb{Z}$, et $j = 1, \dots, p$, l'ordre pt et la variance des innovations σ_t^2 sont périodiques, dans le temps, de période s , i.e.,

$$\varphi_{t+ks,j} = \varphi_{t,j} \quad ; \quad \pi_{t+ks,j} = \pi_{t,j} \quad \text{et} \quad \sigma_{t+ks}^2 = \sigma_t^2 \quad ; \quad \forall t, k \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, p.$$

Le paramètre non linéaire, $\gamma > 0$, est connu.

En mettant $t = i + s\tau, i = 1, 2, \dots, s$ et $\tau \in \mathbb{Z}$, et en prenant $p = \max_{i=\{1,2,\dots,p\}} p_i$ où $\varphi_{t,j} = 0$, $\pi_{t,j} = 0$ pour chaque $j > p_i$, on peut réécrire l'équation (2.2.3) sous la forme équivalente :

$$Y_{i+s\tau} = \sum_{j=1}^p (\varphi_{t,j} + \pi_{t,j} \exp(-\gamma Y_{i+s\tau-1}^2)) Y_{i+s\tau-j} + \varepsilon_{i+s\tau} \quad ; \quad i = 1, \dots, s, \tau \in \mathbb{Z} \quad (2.2.4)$$

Pour $Y_{i+s\tau-1}$ grand, nous avons $\varphi_{t,j} + \pi_{t,j} \exp(-\gamma Y_{i+s\tau-1}^2) \sim \varphi_{t,j}$, $j = 1, \dots, p$ et pour $Y_{i+s\tau-1}$ petit, $\varphi_{t,j} + \pi_{t,j} \exp(-\gamma Y_{i+s\tau-1}^2) \sim \varphi_{t,j} + \pi_{t,j}$, $j = 1, \dots, p$.

En pratique, quand nous avons une série temporelle saisonnière avec des caractéristiques de non linéarité comme les cycles limites et en plus la moyenne et la structure de

covariance qui change avec la saison, on pourra modéliser avec un modèle $EXPAR(p)$ périodique qui représente une fusion entre la présence de non linéarité et la configuration périodique.

Soit

$$\underline{\varphi}_i = (\varphi_{i.1}, \pi_{i.1}, \dots, \varphi_{i.p}, \pi_{i.p})', \quad i = 1, \dots, s \text{ et } \underline{\varphi} = (\underline{\varphi}'_1, \dots, \underline{\varphi}'_s)' \in \mathbb{R}^{2ps}$$

Nous considérons les hypothèses suivantes :

A1 : Les paramètres du modèle AutoRégessifs EXPonentiels Périodiques $\underline{\varphi}$, satisfont la condition de stationnarité stricte périodique de (2.2.3). Une condition suffisante est : Toutes les racines de l'équation caractéristique associée

$$z^p - c_{i.1}z^{p-1} - \dots - c_{i.p} = 0$$

sont à l'intérieur du cercle unité, $c_{i.j} = \max\{|\varphi_{i.j}|, |\varphi_{i.j} + \pi_{i.j}|\}$, $j = 1, \dots, p$; $i = 1, \dots, s$. Dans le cas non périodique.

A2 : Le processus périodiquement ergodique $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, est tel que $E(Y_t^4) < \infty$, pour tout $t \in \mathbb{Z}$.

2.2.4 Estimation des paramètres du modèle PEXPAR(p)

Nous considérons le problème de l'estimation des paramètres $\underline{\varphi}$ du modèle (2.2.3), qui est un problème d'optimisation linéaire, nous pouvons le résoudre en utilisant la procédure des moindres carrés.

Supposons que nous avons des observations $\{Y_1, \dots, Y_N\}$, de (2.2.3), $N = ms$, et définissons la somme conditionnelle des carrés

$$\begin{aligned} L_N(\underline{\varphi}) &= \sum_{i=1}^s L_{i.m}(\underline{\varphi}) \\ &= \sum_{i=1}^s \left(\sum_{\tau=r+1}^{m-1} (Y_{s\tau+i} - E_{\underline{\varphi}}(Y_{s\tau+i} \setminus B_{s\tau+i-1}))^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^s \left(\sum_{\tau=r+1}^{m-1} (Y_{s\tau+i} - \sum_{j=1}^p (\varphi_{i.j} + \pi_{i.j} \exp(-\gamma Y_{s\tau+i-1}^2)) Y_{s\tau+i-j})^2 \right). \end{aligned}$$

où $r = \lfloor \frac{p}{s} \rfloor$, avec $\lfloor y \rfloor$, désigne la partie entière de y , $B_{s\tau+i-1}$ est la σ -algèbre générée par le passé du processus jusqu'au temps $s\tau + i - 1$, et $E_{\underline{\varphi}}(\cdot | \cdot)$ est l'espérance conditionnelle en supposant que $\underline{\varphi}$ est le vrai paramètre.

L'estimation $\widehat{\underline{\varphi}}_i = (\widehat{\varphi}_{i,1}, \widehat{\pi}_{i,1}, \dots, \widehat{\varphi}_{i,p}, \widehat{\pi}_{i,p})'$ pour une saison fixée i , est une solution aux équations d'estimation

$$\frac{\partial L_{i,m}(\underline{\varphi})}{\partial \varphi_{i,j}} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial L_{i,m}(\underline{\varphi})}{\partial \pi_{i,j}} = 0 \quad ; \quad j = 1, \dots, p.$$

La solution pour une saison fixée i est

$$\widehat{\underline{\varphi}}_i = \begin{pmatrix} M_{i,1,1} \cdots M_{i,1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{i,p,1} \cdots M_{i,p,p} \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \sum_{\tau=r+1}^{m-1} Y_{s\tau+i-1} Y_{s\tau+i} \\ \sum_{\tau=r+1}^{m-1} Y_{s\tau+i-1} Y_{s\tau+i} \exp(-\gamma Y_{s\tau+i-1}^2) \\ \vdots \\ \sum_{\tau=r+1}^{m-1} Y_{s\tau+i-p} Y_{s\tau+i} \\ \sum_{\tau=r+1}^{m-1} Y_{s\tau+i-p} Y_{s\tau+i} \exp(-\gamma Y_{s\tau+i-1}^2) \end{bmatrix}$$

et

$$\widehat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{m-r-1} \sum_{\tau=r+1}^{m-1} (Y_{s\tau+i} - \sum_{j=1}^p (\widehat{\varphi}_{i,j} + \widehat{\pi}_{i,j} \exp(-\gamma Y_{s\tau+i-1}^2)) Y_{s\tau+i-j})^2$$

où pour $j, k = 1, \dots, p$

$$M_{i,j,k} = \begin{pmatrix} \sum_{\tau=r+1}^{m-1} Y_{s\tau+i-j} Y_{s\tau+i-k} & \sum_{\tau=r+1}^{m-1} Y_{s\tau+i-j} Y_{s\tau+i-k} \exp(-\gamma Y_{s\tau+i-1}^2) \\ \sum_{\tau=r+1}^{m-1} Y_{s\tau+i-j} Y_{s\tau+i-k} \exp(-\gamma Y_{s\tau+i-1}^2) & \sum_{\tau=r+1}^{m-1} Y_{s\tau+i-j} Y_{s\tau+i-k} \exp(-2\gamma Y_{s\tau+i-1}^2) \end{pmatrix}.$$

Théorème 2.2.1 *Supposons que $\{Y_t\}$, satisfait (2.2.3), est périodiquement strictement stationnaire, alors les estimateurs des moindres carrés sont fortement consistants avec $m \rightarrow \infty$. C'est à dire*

$$\widehat{\underline{\varphi}}_i \xrightarrow{ps} \underline{\varphi}_i \quad \text{et} \quad \widehat{\sigma}_i^2 \xrightarrow{ps} \sigma_i^2$$

et on a

$$\sqrt{m}(\widehat{\underline{\varphi}}_i - \underline{\varphi}_i) \xrightarrow{D}_{m \rightarrow \infty} N(0_{2p}, \sigma_i^2 \Gamma_i^{-1})$$

où

$$\Gamma_i = \begin{pmatrix} \Gamma_{i,1,1} & \cdots & \Gamma_{i,1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{i,p,1} & \cdots & \Gamma_{i,p,p} \end{pmatrix}.$$

et

$$\Gamma_{i,j,k} = \begin{pmatrix} E(Y_{i-j}Y_{i-k}) & E(Y_{i-j}Y_{i-k} \exp(-\gamma Y_{i-1}^2)) \\ E(Y_{i-j}Y_{i-k} \exp(-\gamma Y_{i-1}^2)) & E(Y_{i-j}Y_{i-k} \exp(-2\gamma Y_{i-1}^2)) \end{pmatrix} ; j, k = 1, \dots, p$$

Preuve. En remplaçant par 0 les bornes inférieures des sommes, on obtient les estimateurs comparables :

$$\tilde{\varphi}_i = \begin{pmatrix} M_{i,1,1} \cdots M_{i,1,p} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ M_{i,p,1} \cdots M_{i,p,p} \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \sum_{\tau=0}^{m-1} Y_{s\tau+i-1} Y_{s\tau+i} \\ \sum_{\tau=0}^{m-1} Y_{s\tau+i-1} Y_{s\tau+i} \exp(-\gamma Y_{s\tau+i-1}^2) \\ \vdots \\ \sum_{\tau=0}^{m-1} Y_{s\tau+i-p} Y_{s\tau+i} \\ \sum_{\tau=0}^{m-1} Y_{s\tau+i-p} Y_{s\tau+i} \exp(-\gamma Y_{s\tau+i-1}^2) \end{bmatrix}$$

et

$$\tilde{\sigma}_i^2 = \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} (Y_{s\tau+i} - \sum_{j=1}^p (\tilde{\varphi}_{i,j} + \tilde{\pi}_{i,j} \exp(-\gamma Y_{s\tau+i-1}^2)) Y_{s\tau+i-j})^2 \quad (2.2.5)$$

où pour $j, k = 1, \dots, p$

$$M_{i,j,k} = \begin{pmatrix} \sum_{\tau=0}^{m-1} Y_{s\tau+i-j} Y_{s\tau+i-k} & \sum_{\tau=0}^{m-1} Y_{s\tau+i-j} Y_{s\tau+i-k} \exp(-\gamma Y_{s\tau+i-1}^2) \\ \sum_{\tau=0}^{m-1} Y_{s\tau+i-j} Y_{s\tau+i-k} \exp(-\gamma Y_{s\tau+i-1}^2) & \sum_{\tau=0}^{m-1} Y_{s\tau+i-j} Y_{s\tau+i-k} \exp(-2\gamma Y_{s\tau+i-1}^2) \end{pmatrix}.$$

Comme les approximations $\tilde{\varphi}_i$ et $\hat{\varphi}_i$ ont la même distribution limite, il n'y a pas de différence si nous observons ou non les valeurs initiales en plus des données pour m large. (cf. Brockwell et Davis (1991) [6], chapitre 8 est utilisé dans Basawa et Lund (2001) [7], pour le cas PARMA). Nous étudions donc les propriétés asymptotiques de $\tilde{\varphi}_i$.

En remplaçant $Y_{s\tau+i}$ dans la formule, on obtient :

$$\tilde{\varphi}_i = \underline{\varphi}_i + \begin{pmatrix} M_{i,1,1} \cdots M_{i,1,p} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ M_{i,p,1} \cdots M_{i,p,p} \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \sum_{\tau=0}^{m-1} Y_{s\tau+i-1} \varepsilon_{s\tau+i} \\ \sum_{\tau=0}^{m-1} Y_{s\tau+i-1} \exp(-\gamma Y_{s\tau+i-1}^2) \varepsilon_{s\tau+i} \\ \vdots \\ \sum_{\tau=0}^{m-1} Y_{s\tau+i-p} \varepsilon_{s\tau+i} \\ \sum_{\tau=0}^{m-1} Y_{s\tau+i-p} \exp(-\gamma Y_{s\tau+i-1}^2) \varepsilon_{s\tau+i} \end{bmatrix} \quad (2.2.6)$$

De l'ergodicité périodique de $Y_{s\tau+i}$ on a :

$$\frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} \varepsilon_{s\tau+i} Y_{s\tau+i-j} \xrightarrow{ps} E(\varepsilon_i) E(Y_{i-j}) = 0 ; j = 1, \dots, p$$

et

$$\frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} \varepsilon_{s\tau+i} Y_{s\tau+i-j} \exp(-\gamma Y_{s\tau+i-1}^2) \xrightarrow{ps} E(\varepsilon_i) E(Y_{i-j} \exp(-\gamma Y_{i-1}^2)) = 0 \quad ; \quad j = 1, \dots, p$$

Donc $\tilde{\varphi}_i \xrightarrow{ps} \varphi_i$, quand $m \rightarrow \infty$.

De (2.2.5), on a

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_i^2 &= \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} \left(\sum_{j=1}^p (\varphi_{i,j} + \pi_{i,j} \exp(-\gamma Y_{s\tau+i-1}^2)) Y_{s\tau+i-j} + \varepsilon_{s\tau+i} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^p (\tilde{\varphi}_{i,j} + \tilde{\pi}_{i,j} \exp(-\gamma Y_{s\tau+i-1}^2)) Y_{s\tau+i-j} \right)^2 \\ &= \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} \left(\varepsilon_{s\tau+i} - \sum_{j=1}^p (\tilde{\varphi}_{i,j} - \varphi_{i,j}) Y_{s\tau+i-j} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^p (\tilde{\pi}_{i,j} - \pi_{i,j}) Y_{s\tau+i-j} \exp(-\gamma Y_{s\tau+i-1}^2) \right)^2 \end{aligned}$$

A partir des résultats précédents, on a : quand $m \rightarrow \infty$, $\tilde{\sigma}_i^2 \xrightarrow{ps} E(\varepsilon_i^2) = \sigma_i^2$.

De(2.2.6)

$$\begin{aligned} &\sqrt{m}(\tilde{\varphi}_i - \varphi_i) \\ &= \left(\frac{1}{m} \begin{pmatrix} M_{i,1,1} \cdots M_{i,1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{i,p,1} \cdots M_{i,p,p} \end{pmatrix} \right)^{-1} \times \left(\frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} \sum_{\tau=0}^{m-1} Y_{s\tau+i-1} \varepsilon_{s\tau+i} \\ \sum_{\tau=0}^{m-1} Y_{s\tau+i-1} \exp(-\gamma Y_{s\tau+i-1}^2) \varepsilon_{s\tau+i} \\ \vdots \\ \sum_{\tau=0}^{m-1} Y_{s\tau+i-p} \varepsilon_{s\tau+i} \\ \sum_{\tau=0}^{m-1} Y_{s\tau+i-p} \exp(-\gamma Y_{s\tau+i-1}^2) \varepsilon_{s\tau+i} \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Puisque $\{Y_{s\tau+i-j} \varepsilon_{s\tau+i}\}_\tau$ et $\{Y_{s\tau+i-j} \exp(-\gamma Y_{s\tau+i-1}^2) \varepsilon_{s\tau+i}\}_\tau$, $j = 1, \dots, p$, sont des suites de différences de martingale, alors nous appliquons le théorème centrale limite pour les différences de martingale (**cf.Ibragimov, 1963**)[19] :

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} \sum_{\tau=0}^{m-1} Y_{s\tau+i-1} \varepsilon_{s\tau+i} \\ \sum_{\tau=0}^{m-1} Y_{s\tau+i-1} \exp(-\gamma Y_{s\tau+i-1}^2) \varepsilon_{s\tau+i} \\ \vdots \\ \sum_{\tau=0}^{m-1} Y_{s\tau+i-p} \varepsilon_{s\tau+i} \\ \sum_{\tau=0}^{m-1} Y_{s\tau+i-p} \exp(-\gamma Y_{s\tau+i-1}^2) \varepsilon_{s\tau+i} \end{bmatrix} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{D} N(0_{2p}, \sigma_i^2 \Gamma_i^{-1}).$$

ce qui complète la preuve avec le théorème de **Slutsky**. ■

2.3 Présentation des modèles ARCH/GARCH

Pour aborder ce type de modèle, on introduit la notion de filtration qui représente l'information disponible comme suit :

Soit (Ω, F, P) , un espace de probabilité, dont on considère une filtration F_t (une collection croissante de sous-tribus de F , i.e $F_s \subset F_t, \forall s < t$). Un processus Y_t est adapté à une filtration F_t , si pour tout Y_t est F_t -mesurable. De plus, la filtration naturelle associée à un processus Y_t est par définition la famille de sous-tribus $F_t = \sigma(Y_s, s \leq t)$, où F_t est la plus petite tribu rendant mesurable les applications $\omega \rightarrow Y_s(\omega)$, pour $s \leq t$.

Définition 2.3.1 *Le Kurtosis ou le coefficient d'applatissage d'une variable aléatoire Y correspond à:*

$$K_\mu = \frac{\mu_4}{\sigma^4},$$

avec : μ_4 est le moment centré d'ordre 4 ie : $\mu_4 = E(Y - E(Y))^4$.

- Si le kurtosis > 3 (queues épaisses), la distribution est dite leptokurtique.
- Si le Kurtosis < 3 , la distribution est dite platikurtique.

2.3.1 Modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques (ARCH)

La classe des modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques ("*autoregressive conditional heteroscedastic*" ou *ARCH*) a été proposée par **Engle (1982)**[16]. Le but est de permettre à la variance de bruit de varier conditionnellement au passé de la série. le modèle *ARCH*(q) est défini comme suit.

Définition 2.3.2 *On dit qu'une variable Y_t , suit un processus ARCH(q) si*

$$Y_t = \varepsilon_t \sqrt{h_t}. \tag{2.3.1}$$

Avec

$$h_t = c + \sum_{i=1}^q a_i Y_{t-i}^2.$$

où ε_t désigne un bruit blanc gaussien, d'espérance 0 et de variance 1, et $c > 0$ et $0 < a_i < 1$, et h_t est une variable qui est, conditionnellement à l'ensemble d'informations de valeurs passées de Y_t , c.à.d, Y_t est en fonction de $\{Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-j}, \dots\}$.

L'équation (2.3.1), peut aussi s'écrire sous la forme:

$$Y_t^2 = \varepsilon_t \left[c + \sum_{i=1}^q a_i Y_{t-i}^2 \right]$$

On est intéressé par la modélisation de Y_t^2 , Rappelons que les variables Y_t ne sont pas indépendantes et ne sont pas auto-corrélées, ainsi les espérances conditionnelles et non conditionnelles sont nulles. C'est-à-dire que

$$E(Y_t) = E(\varepsilon_t \sqrt{c + \sum_{i=1}^q a_i Y_{t-i}^2}) = 0,$$

et

$$E(Y_t \setminus F_{t-i}) = E(\varepsilon_t \sqrt{c + \sum_{i=1}^q a_i Y_{t-i}^2} \setminus Y_{t-i}) = 0.$$

Proposition 2.3.1 La variance conditionnelle du processus Y_t , ARCH(p) défini par l'équation précédente est non constante dans le temps et vérifie :

$$V(Y_t / F_{t-h}) = c \frac{(1 - a_1^h)}{(1 - a_1)} + a_1^h Y_{t-h}^2, \quad \forall t$$

C'est la propriété centrale des processus ARCH, le processus Y_t , possède une variance conditionnelle qui dépend du temps.

Démonstration. On sait que $E(Y_t \setminus F_{t-i}) = 0$ dès lors $V(Y_t / F_{t-h}) = E(Y_t^2 \setminus F_{t-i})$.

Considérons le processus Y_t^2 , défini par la relation $Y_t^2 = c + a_1 Y_{t-1}^2 + \varepsilon_t$ où ε_t est un

bruit blanc. Par itération successive, on a :

$$Y_t^2 = c(1 + a_1 + a_1^2 + \dots + a_1^h) + \varepsilon_t + a_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + a_1^{h-1} \varepsilon_{t-h+1} + a_1^h Y_{t-h}^2.$$

En considérant l'espérance conditionnelle de chacun de ces membres, il vient :

$$E(Y_t^2 \setminus F_{t-h}) = \frac{c(1 - a_1^h)}{(1 - a_1)} \sum_{j=0}^{h-1} a_1^j E(\varepsilon_{t-j} / F_{t-h}) + a_1^h E(Y_t^2 \setminus F_{t-h}).$$

Puisque par définition du bruit blanc ε_t , on a $E(\varepsilon_{t-j} / F_{t-h}) = 0$ pour $j = 0, \dots, h-1$, et par définition $E(Y_t^2 \setminus F_{t-h}) = Y_{t-h}^2$, on obtient :

$$V(Y_t / F_{t-h}) = c \frac{(1 - a_1^h)}{(1 - a_1)} + a_1^h Y_{t-h}^2, \quad \forall t.$$

■

Remarque 2.3.1 Lorsque h tend vers l'infini, ces variances conditionnelles convergent vers la variance non conditionnelle, et obtient

$$V(Y_t) = \lim V(Y_t / F_{t-1}) = \lim c \frac{(1 - a_1^h)}{(1 - a_1)} + a_1^h Y_{t-h}^2 = \frac{c}{1 - a_1}$$

Définition 2.3.3 [Modèle ARCH(1)]

Un modèle Y_t est dit autoregressif conditionnellement hétéroscédastique d'ordre 1, qu'on note par ARCH(1), s'il admet l'écriture suivante

$$Y_t = \varepsilon_t h_t \tag{2.3.2}$$

avec

$$h_t^2 = c + a_1 Y_{t-1}^2$$

où $(\varepsilon_t)_t$ un bruit blanc faible (suite de variables aléatoires (i.i.d), centrée et réduite) tel que $E(\varepsilon_t) = 0$ et $V(\varepsilon_t) = 1$, dont la variance conditionnelle $h_t^2 = E[Y_t^2 \setminus F_{t-1}]$ satisfait pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et $c > 0$, $a_1 \geq 0$.

On suppose souvent que les variables ε_t sont indépendantes de la filtration F_{t-1} et que h_t dépend de Y_t . Dans ce cas, le processus Y_t est caractérisé par des autocorrélations nulles $E(Y_t Y_s) = 0$ pour $t \neq s$ ce qui signifie que les Y_t sont non corrélés dans le temps.

Proposition 2.3.2 Le modèle ARCH(1) admet les propriétés suivantes :

1. $V(Y_t \setminus F_{t-1}) = c + a_1 Y_{t-1}^2 = h_t^2$.

2. $V(Y_t) = c + a_1V(Y_{t-1})$.

3. $E[Y_t \setminus F_{t-1}] = 0$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la décomposition de la variance et la variance conditionnelle comme suit : pour tout $Y_t \in L^2$

$$\left\{ \begin{array}{l} V(Y_t \setminus F_{t-1}) = E[Y_t^2 \setminus F_{t-1}] + E[Y_t \setminus F_{t-1}]^2 \\ V(Y_t) = V(E[Y_t \setminus F_{t-1}]) + E(V[Y_t \setminus F_{t-1}]) \end{array} \right\}$$

1.

$$\begin{aligned} V(Y_t \setminus F_{t-1}) &= E[\varepsilon_t^2(c + a_1Y_{t-1}^2) \setminus F_{t-1}] - E[\varepsilon_t h_t \setminus F_{t-1}]^2 \\ &= E(\varepsilon_t^2)E[c + a_1Y_{t-1}^2 \setminus F_{t-1}] - E[\varepsilon_t]^2 E[h_t \setminus F_{t-1}]^2 \\ &= E[c + a_1Y_{t-1}^2 \setminus F_{t-1}] - 0 \\ &= c + a_1Y_{t-1}^2 \\ &= h_t^2 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} V(Y_t) &= V(E[Y_t \setminus F_{t-1}]) + E[V(Y_t \setminus F_{t-1})] \\ &= V(0) + E[c + a_1Y_{t-1}^2] \\ &= c + a_1V(Y_{t-1}) \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse de stationnarité (*i.e.* : $V(Y_t) = V(Y_{t-1})$), ce qui implique que :

$$V(Y_t) = \frac{c}{1 - a_1}$$

Pour que cette variance non-conditionnelle existe, il suffit donc que : $a_1 \in]0, 1[$.

3.

$$\begin{aligned} E[Y_t \setminus F_{t-1}] &= E[\varepsilon_t h_t \setminus F_{t-1}] \\ &= h_t E[\varepsilon_t \setminus F_{t-1}] \\ &= h_t E(\varepsilon_t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

car : h_t est mesurable par rapport à la tribue F_{t-1} , et ε_t est indépendante de F_{t-1} , et $E(\varepsilon_t) = 0$.

■

Proposition 2.3.3 *l'auto-covariance conditionnelle du processus Y_t , ARCH(1), est nulle, c.à.d*

$$\text{cov}(Y_t, Y_{t+k} \setminus F_{t-i}) = 0 \quad \forall k \geq 1 \text{ et } \forall i \geq 1.$$

En d'autres termes, cela signifie que conditionnellement à Y_{t-i} , le processus Y_t , est sans mémoire.

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} \text{cov}(Y_t, Y_{t+k} \setminus F_{t-i}) &= E(Y_t Y_{t+k} \setminus F_{t-i}) - E(Y_t \setminus F_{t-i}) E(Y_{t+k} \setminus F_{t-i}) \\ &= E(Y_t Y_{t+k} \setminus F_{t-i}) \\ &= E(E(Y_t Y_{t+k} \setminus F_{t+k-1}) \setminus F_{t-i}) \\ &= E(Y_t E(Y_{t+k} \setminus F_{t+k-1}) \setminus F_{t-i}) \\ &= E(Y_t 0 \setminus F_{t-i}) \quad (\text{car } E(Y_{t+k} \setminus F_{t+k-1}) = 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

Proposition 2.3.4 a. *Le moment conditionnel centré d'ordre 4 du processus Y_t vérifie*

$$E(Y_t^4 \setminus F_{t-1}) = 3(c + a_1 Y_{t-1}^2)^2.$$

b. *Sous l'hypothèse $3a_1^2 < 1$, le moment non conditionnel centré d'ordre 4 du processus Y_t est donné par :*

$$\begin{aligned} E(Y_t^4) &= 3 \left[c^2 + \frac{2a_1 c^2}{1 - a_1} + a_1^2 E(Y_{t-1}^4) \right] \\ &= \frac{3c^2(1 + a_1)}{(1 - 3a_1^2)(1 - a_1)}. \end{aligned}$$

c. Le kurtosis non conditionnel associé au processus ARCH(1) est donné comme suit :

$$K_\mu = \frac{E(Y_t^4)}{E^2(Y_t^2)} = \frac{3(1 - a_1^2)}{1 - 3a_1^2} \succ 3.$$

Démonstration.

a. On rappelle que si une variable centrée y suit une loi normale centrée, alors

$$E(y^4) = 3(V(y))^2 = 3(E(y^2))^2,$$

donc

$$\begin{aligned} E(y^4 \setminus F_{t-1}) &= 3(E(y^2 \setminus F_{t-1}))^2 \\ &= 3(c + a_1 Y_{t-1}^2)^2. \end{aligned}$$

b. Sous l'hypothèse $3a_1^2 < 1$, on a :

$$\begin{aligned} E(y^4) &= E(E(Y_t^4 \setminus F_{t-1})) \\ &= E(3(c + a_1 Y_{t-1}^2)^2) \\ &= 3E(c^2 + 2ca_1 Y_{t-1}^2 + a_1^2 Y_{t-1}^4) \\ &= 3(c^2 + 2ca_1 E(Y_{t-1}^2) + a_1^2 E(Y_{t-1}^4)) \\ &= 3\left(c^2 + \frac{2a_1 c^2}{1 - a_1} + a_1^2 E(Y_{t-1}^4)\right) \\ &= \frac{3c^2(1 + a_1)}{(1 - 3a_1^2)(1 - a_1)} \end{aligned}$$

c. Le kurtosis non conditionnel associé au processus ARCH(1) est défini par :

$$K_\mu = \frac{E(y^4)}{E^2(y^2)},$$

et d'après les résultats obtenus précédemment, on obtient :

$$\begin{aligned} K_\mu &= \frac{3c^2(1 + a_1)}{(1 - 3a_1^2)(1 - a_1)} \cdot \frac{(1 - a_1)^2}{c^2} \\ &= \frac{3(1 - a_1^2)}{(1 - 3a_1^2)} \succ 3. \end{aligned}$$

■

Remarque 2.3.2 Toutes ces propriétés peuvent être généralisées dans le cas d'un processus $ARCH(q)$.

Remarque 2.3.3 Le kurtosis d'un processus $ARCH$ est toujours supérieur à 3, la loi non conditionnelle d'un processus $ARCH$ est donc une loi de distribution à queue épaisse, donc plus aplatie qu'une gaussienne, on dit que cette distribution est leptokurtique.

2.3.2 Modèle avec erreur ARCH

On suppose que le résidu admet une représentation autorégressive de type $ARCH(p)$

$$Y_t = \varepsilon_t \sqrt{h_t}, \quad (2.3.3)$$

avec

$$h_t = c + \sum_{i=1}^p a_i Y_{t-i}^2$$

et où ε_t désigne un bruit blanc.

On a un modèle qui décrit à la fois l'évolution de l'espérance conditionnelle et la variance conditionnelle du processus Y_t dans le temps. Envisageons le cas le plus simple d'un processus de type $AR(1)$ avec erreur $ARCH(1)$

$$X_t = \delta + \alpha X_{t-1} + Y_t \quad , \quad |\alpha| < 1 \quad (2.3.4)$$

$$Y_t = \varepsilon_t \sqrt{c + a_1 Y_{t-1}^2}$$

Dans ce cas, les résidus satisfont les principales propriétés étudiées précédemment.

i. Le processus Y_t est orthogonal aux valeurs passées, quelque soit le retard

$$E[Y_t / F_{t-s}] = 0 \quad \forall s \geq 1,$$

et suit un processus $ARCH(1)$

$$Y_t^2 = c + a_1 Y_{t-1}^2 + \varepsilon_t.$$

La variance conditionnelle est

$$V(Y_t/F_{t-s}) = c \frac{(1 - a_1^s)}{(1 - a_1)} + a_1^s Y_{t-s}^2, \quad \forall t$$

et

$$V[Y_t] = \frac{c}{1 - a_1}.$$

ii. La propriété d'orthogonalité implique que les corrélations conditionnelles sont nulles:

$$\text{cov}(Y_t, Y_{t+k} \setminus F_{t-i}) = 0.$$

Il y a donc une absence de corrélation entre les valeurs présentes et futures du processus, quels que soient les retards s et k . Mais si la variance conditionnelle de Y_t n'est pas constante, la variance non conditionnelle est constante.

On peut, en outre, en déduire un certain nombre de conclusions quant au processus X_t lui-même. On peut montrer tout d'abord, que l'espérance conditionnelle de X_t vérifie :

$$E[X_t/F_{t-s}] = \delta + \alpha E[X_{t-1}/F_{t-s}] \quad \forall s \geq 1,$$

ce qui montre que les prévisions non linéaires de X_t s'obtiennent comme les prévisions linéaires d'un processus $AR(1)$. Plus généralement

$$X_t = \delta \frac{1 - \alpha^s}{1 - \alpha} + \alpha^s X_{t-s} + Y_t + \alpha Y_{t-1} + \dots + \alpha^{s-1} Y_{t-s+1}.$$

En effet

$$\begin{aligned} X_t &= \delta + \alpha X_{t-1} + Y_t \\ &= \delta + \alpha(\delta + \alpha X_{t-2} + Y_{t-1}) + Y_t \\ &= \delta(1 - \alpha) + \alpha^2 X_{t-2} + \alpha Y_{t-1} + Y_t \\ &= \delta(1 + \alpha + \alpha^2) + \alpha^2 X_{t-3} + \alpha^2 Y_{t-2} + \alpha Y_{t-1} + Y_t \\ &\vdots \\ &= \delta(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{s-1}) + \alpha^s X_{t-s} + \dots + \alpha^{s-1} Y_{t-s+1} + \alpha Y_{t-1} + Y_t \\ &= \delta \frac{1 - \alpha^s}{1 - \alpha} + \alpha^s X_{t-s} + Y_t + \alpha Y_{t-1} + \dots + \alpha^{s-1} Y_{t-s+1}. \end{aligned}$$

En prenant l'espérance conditionnelle de deux cotés, on obtient

$$E[X_t/F_{t-s}] = \delta \frac{1 - \alpha^s}{1 - \alpha} + \alpha^s X_{t-s}.$$

De la même façon, on peut montrer que la variance conditionnelle de X_t dépend du temps. En effet, on montre qu'elle dépend du processus Y_{t-s}^2 de la façon suivante.

Proposition 2.3.5 *La variance conditionnelle du processus AR(1) avec erreur ARCH(1), X_t , s'écrit*

$$V[X_t/F_{t-s}] = \frac{\delta}{1 - a_1} \left[\left(\frac{1 - \alpha^{2s}}{1 - \alpha^s} \right) - a_1 \left(\frac{a_1^s - \alpha^{2s}}{a_1 - \alpha^s} \right) \right] + a_1 \left[\frac{a_1^s - \alpha^{2s}}{a_1 - \alpha^s} \right] Y_{t-s}^2.$$

Ainsi, la variance conditionnelle d'une erreur de prévision à l'horizon 1, s'écrit

$$V[X_t/F_{t-s}] = \delta + a_1 Y_{t-1}^2.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} V[X_t/F_{t-s}] &= V\left[\delta \frac{1 - \alpha^s}{1 - \alpha} + \alpha^s X_{t-s} + Y_t + \alpha Y_{t-1} + \dots + \alpha^{s-1} Y_{t-s+1}/F_{t-s}\right] \\ &= V[Y_t/F_{t-s}] + \alpha^2 V[Y_{t-1}/F_{t-s}] + \dots + \alpha^{2(s-1)} V[Y_{t-s+1}/F_{t-s}] \\ &= \sum_{j=0}^{s-1} \alpha^{2j} \left[\delta \frac{1 - a_1^{s-j}}{1 - a_1} + a_1^{s-j} Y_{t-s}^2 \right] \\ &= \frac{\delta}{1 - a_1} \left[\left(\frac{1 - \alpha^{2s}}{1 - \alpha^s} \right) - a_1 \left(\frac{a_1^s - \alpha^{2s}}{a_1 - \alpha^s} \right) \right] + a_1 \left[\frac{a_1^s - \alpha^{2s}}{a_1 - \alpha^s} \right] Y_{t-s}^2. \end{aligned}$$

■

2.3.3 Estimation des paramètres ARCH

Pour comprendre cette approche, nous allons tout d'abord considérer le cas plus simple d'un processus ARCH pur pour Y_t , sans régression ni composante ARMA.

Estimation par maximum de vraisemblance

L'estimation des paramètres de modèles ARCH se base très souvent sur la maximisation de la fonction de vraisemblance. Par hypothèse Y_t est conditionnellement gaussien. La

vraisemblance associée à Y_t conditionnellement au passé Y_{t-1} est donc

$$L(Y_t/Y_{t-1}; \theta) = \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-Y_t^2}{2\sigma_t^2}\right), \quad (2.3.5)$$

et dépend du vecteur de paramètres $\theta = (c, a_1, \dots, a_p)^t$, à travers σ_t . La fonction de

vraisemblance de $(Y_1, Y_2, \dots, Y_T)^t$ conditionnelle à $Y_0 = 0$, est par conséquent

$$L_T(Y_1, Y_2, \dots, Y_T)/Y_{t-1}; \theta) = \prod_{t=0}^T \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-Y_t^2}{2\sigma_t^2}\right).$$

L'estimateur est alors défini comme le vecteur

$$\hat{\theta}_T = (\hat{c}_T, \dots, \hat{a}_{p;T})^t$$

qui maximise le logarithme de cette fonction de vraisemblance :

$$\hat{\theta}_T = \arg \max_{\theta} \ln L_T(Y_1, Y_2, \dots, Y_T; \theta).$$

Sous diverses conditions de régularité, l'estimateur est convergent (**Weiss 1986**).

2.3.4 Le modèle ARCH généralisé GARCH(p,q)

Le processus *GARCH* (Generalized Auto Regressive Conditional Heteroskedasticity) a été introduit en **1986** par **Bollerslev** [12]. Le processus *GARCH* est une extension du processus *ARCH*, il présente les mêmes propriétés et les mêmes fondements que le processus *ARCH*. Disons que la seule différence se situe au niveau de la définition. Le modèle *GARCH* a deux paramètres (p, q) alors que le modèle *ARCH* en a un (q). Le modèle *GARCH*(p,q) est défini comme suit :

Définition 2.3.4 une variable Y_t suit un processus *GARCH*(p, q) si

$$Y_t = \varepsilon_t \sqrt{h_t} \quad (2.3.6)$$

Avec

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i Y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}$$

et $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, est un bruit blanc, et $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$ et $\beta_j \geq 0$.

Remarques 2.3.4 * Un processus GARCH peut être vu comme un processus ARCH d'ordre infini.

* Un GARCH($p, 0$) est un ARCH(p).

2.3.5 Propriétés des processus GARCH

Les propriétés théoriques des processus GARCH se déduisent de la même façon que nous avons développé les propriétés des processus ARCH.

Proposition 2.3.6 Si Y_t est un processus GARCH(p, q), alors :

- $E(Y_t) = 0$.
- $E(Y_t/F_{t-1}) = 0$.
- $cov(Y_t, Y_{t+h}) = \sigma_h = 0$, $\forall h > 0$.
- $cov(Y_t, Y_{t+h}/F_{t-1}) = 0$.

Proposition 2.3.7 Le modèle GARCH(p, q) est également stationnaire au second ordre. Cela nécessite alors que l'inégalité suivante soit vérifiée :

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1.$$

Cette condition nécessaire et suffisante permet de valider la définition des moments d'ordre deux. Ainsi, la variance non conditionnelle est constante dans le temps et se définit par :

$$V[Y_t] = \frac{\alpha_0}{1 - (\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j)}.$$

Tandis que la variance conditionnelle se présente de la façon suivante

$$E(Y_t/F_{t-i}) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i Y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}.$$

Enfin, on remarque tout comme pour le modèle ARCH(q), les auto-covariances conditionnelles du processus GARCH(p, q) sont nulles.

2.3.6 Estimation des paramètres GARCH

Dans cette partie, nous allons traiter l'estimation des paramètres d'un modèle *GARCH*, et plus généralement, d'un modèle de régression avec erreur. Les modèles introduits reposent sur des formulations des moyennes et variances conditionnelles.

En pratique celle-ci souvent paramétrée de façon que la moyenne conditionnelle notée par $m_t(\theta)$, et la variance conditionnelle notée par $h_t(\theta)$, apparaissent comme des fonctions de paramètres inconnus et de valeurs passées du processus. La connaissance de ces moments ne suffit cependant pas sans hypothèse supplémentaire à caractériser la loi conditionnelle du processus, la méthode d'estimation envisagée est :

- La méthode de maximum de vraisemblance (MV),

$$\left\{ \begin{array}{l} E_0(Y_t/F_{t-1}, X_t) = E_0(Y_t/F_{t-1}) = m_t(\theta_0) \\ V_0(Y_t/F_{t-1}, X_t) = V_0(Y_t/F_{t-1}) = h_t^2(\theta_0) \end{array} \right\},$$

où θ_0 est la vraie valeur inconnue du paramètre θ , $\theta \in \Theta \in \mathbb{R}^p$.

La méthode du maximum de vraisemblance

Pour comprendre cette approche, nous allons tout d'abord, considérer le cas le plus simple d'un processus *ARCH* pour Y_t . Nous étudierons ensuite le cas des processus *GARCH*, et en fin des modèles de régression avec erreur *GARCH*.

L'estimateur des paramètres du modèle *ARCH* se base très souvent sur la maximisation de la fonction de vraisemblance. Nous supposons que le processus Y_t est conditionnellement gaussien. La vraisemblance associée à Y_t conditionnellement au passé F_{t-1} est donc :

$$L(Y_t/F_{t-1}, \theta) = \frac{1}{h_t \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(Y_t - m_t(\theta))^2}{2h_t^2(\theta)}\right) \quad (2.3.7)$$

et dépend du vecteur $\theta = (\alpha_0, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$.

La fonction de vraisemblance de (Y_1, Y_2, \dots, Y_p) , conditionnelle est par conséquent

$$L(Y_1, Y_2, \dots, Y_p, \theta) = \prod_{t=1}^T L(Y_t/F_{t-1}, \theta).$$

L'estimateur est alors défini comme le vecteur $\hat{\theta}_T = (\hat{\alpha}_0, \dots, \hat{\alpha}_p)$ qui maximise le logarithme de cette fonction de vraisemblance :

$$\hat{\theta}_T = \arg \max \log L(Y_1, Y_2, \dots, Y_p, \theta).$$

Estimation des paramètres du modèle GARCH La vraisemblance associée à Y_t conditionnellement au passé F_{t-1} s'écrit :

$$L(Y_t/F_{t-1}, \theta) = \frac{1}{h_t \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(Y_t - m_t(\theta))^2}{2h_t^2(\theta)}\right),$$

mais cette fois, la variance h_t suit un processus *ARMA* et dépend donc des valeurs passées de la variance conditionnelle $h_1^2 \dots, h_t^2$. Ces valeurs n'étant pas observées en pratique, la maximisation en direct de la vraisemblance est rendue impossible. En pratique, on estime successivement les valeurs de $h_1^2 \dots, h_t^2$ avant de calculer la vraisemblance. Ainsi, pour un vecteur $\theta_0 = (\alpha_0, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q)$ fixé de paramètres, on calcule récursivement

$$\hat{h}_s^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i Y_{s-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \hat{h}_{s-j},$$

avec la convention $Y_i = 0$ et $h_i^2 = 0$ si $i \leq 0$. On remplace donc la fonction de vraisemblance par :

$$L(Y_t/F_{t-1}, \theta) = \frac{1}{\hat{h}_t \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(Y_t - m_t(\theta))^2}{2\hat{h}_t^2}\right),$$

et la fonction de vraisemblance totale est :

$$L(Y_1, Y_2, \dots, Y_p, \theta) = \prod_{t=1}^T L(Y_t/F_{t-1}, \theta).$$

Cette fonction de vraisemblance peut être calculée pour différentes valeurs du vecteur θ_0 et sa maximisation livre l'estimateur du maximum de vraisemblance.

2.4 Modèles autorégressifs à seuils (TAR)

Les modèles autoregressifs à seuil ou modèle TAR (Threshold AutoRegressive) sont particulièrement intéressants dans la mesure où ils permettent de tenir compte des phénomènes

d'asymétrie et des ruptures de forte amplitude, ces modèles exhibent un comportement incorporant des changements de régime liés au franchissement d'un seuil c par une variable de transition exogène observée. Les modèles les plus couramment utilisées dans cette catégorie sont les modèles *SETAR* et *STAR* ou le changement de régime est régi par un seuil (les modèles *TAR*).

2.4.1 Modèles SETAR

Définition 2.4.1 Un modèle *SETAR*($k; p_1, \dots, p_k$) est un modèle à k équations de la forme :

$$Y_t = \left\{ \begin{array}{ll} \phi_0^{(1)} + \sum_{i=1}^{p_1} \phi_i^{(1)} Y_{t-i} + \varepsilon_t^{(1)} & \text{si } Y_{t-d} < c_1 \\ \phi_0^{(2)} + \sum_{i=1}^{p_2} \phi_i^{(2)} Y_{t-i} + \varepsilon_t^{(2)} & \text{si } c_1 \leq Y_{t-d} < c_2 \\ \vdots & \\ \phi_0^{(k)} + \sum_{i=1}^{p_k} \phi_i^{(k)} Y_{t-i} + \varepsilon_t^{(k)} & \text{si } Y_{t-d} \geq c_{k-1} \end{array} \right\} \quad (2.4.1)$$

- k correspond au nombre de régime.
- d un entier positif appelé paramètre de délai (ou de retard).
- les coefficients c_j , $j = 1, \dots, k-1$; sont les paramètres de seuil pour lequel le système passe d'un régime à l'autre.
- On constate que chaque équation représente un modèle *AR* linéaire d'ordre p_i , $i = 1, \dots, k$.

Remarque 2.4.1 Lorsque les ordres de retards sont les même pour toutes les équations ($c\text{-à-}d \ p_i = p, \forall i$), les modèles *SETAR* se ramènent au modèles *TAR* d'ordre p .

Définition 2.4.2 Un modèle *TAR* s'écrit sous la forme :

$$Y_t = \left\{ \begin{array}{ll} \phi_0^{(1)} + \sum_{i=1}^p \phi_i^{(1)} Y_{t-i} + \varepsilon_t^{(1)} & \text{si } Y_{t-d} < c_1 \\ \phi_0^{(2)} + \sum_{i=1}^p \phi_i^{(2)} Y_{t-i} + \varepsilon_t^{(2)} & \text{si } c_1 \leq Y_{t-d} < c_2 \\ \vdots & \\ \phi_0^{(k)} + \sum_{i=1}^p \phi_i^{(k)} Y_{t-i} + \varepsilon_t^{(k)} & \text{si } Y_{t-d} \geq c_{k-1} \end{array} \right\} \quad (2.4.2)$$

2.4.2 Modèles STAR

Définition 2.4.3 Une fonction $F(x, \gamma, c)$, logistique est de la forme :

$$F(x, \gamma, c) = [1 + \exp(-\gamma(x - c))]^{-1}$$

avec $\gamma > 0$ et c une constante réelle.

Définition 2.4.4 Une fonction $F(x, \gamma, c)$, exponentielle est de la forme :

$$F(x, \gamma, c) = 1 - \exp(-\gamma(x - c)^2)$$

avec $\gamma > 0$ et c une constante réelle.

Définition 2.4.5 Un modèle STAR d'ordre p s'écrit :

$$Y_t = H_1(Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p}) + H_2(Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p})F(s_t, \gamma, c) + \varepsilon_t$$

ou H_1 et H_2 sont des fonctions (linéaires ou non linéaires) des valeurs passées de Y_t .

$F(s_t, \gamma, c)$ est la fonction de transition d'un état à un autre (comprise entre 0 et 1) tel que s_t est la variable de transition (voir la définition (2.5.3) ou (2.5.4)), et $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

* Dans le cas où H_1 et H_2 sont des fonctions linéaires, on peut écrire le modèle STAR(p) comme suit :

$$Y_t = \sum_{i=1}^p \phi_{1,i} Y_{t-i} + \left(\sum_{i=1}^p \phi_{2,i} Y_{t-i} \right) F(s_t, \gamma, c) + \varepsilon_t \quad (2.4.3)$$

Exemple 2.4.1 Pour illustrer les modèles avec seuil, nous avons choisi l'exemple suivant, d'équation:

$$Y_t = \left\{ \begin{array}{ll} 5 - 0.2(Y_{t-1} - 5) + \varepsilon_t & \text{si } Y_{t-1} \leq 6.5 \\ 5 + 0.9(Y_{t-1} - 5) + \varepsilon_t & \text{si } Y_{t-1} > 6.5 \end{array} \right\}$$

pour un échantillon de taille $n = 250$, sa représentation graphique est comme suit :

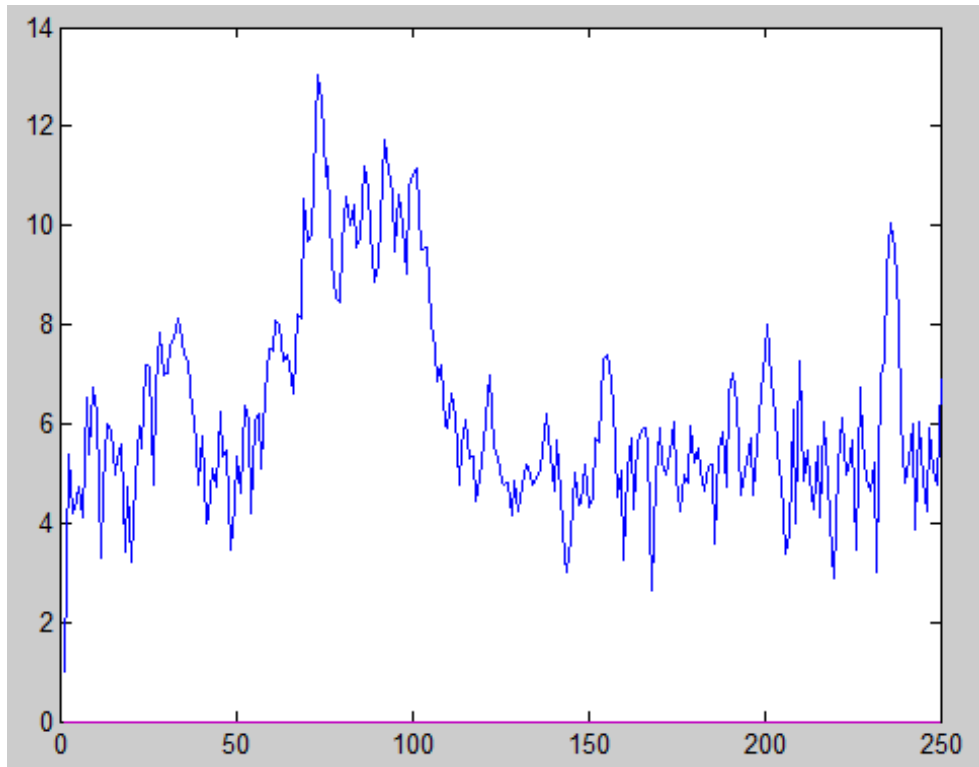


Figure 9 : la représentation graphique d'un modèle TAR(2)

3.1 Simulation

3.1.1 Simulation et estimation d'un modèle *EXPAR*(1)

simulation d'un modèle *EXPAR* d'ordre 1

considérons le modèle autoregressif exponentiel d'ordre 1 suivant:

$$Y_t = (\varphi_{1.1} + \varphi_{1.2} \exp(-\gamma Y_{t-1}^2))Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

avec $\varphi_{1.1} = 0.8$, $\varphi_{1.2} = 0.3$ et $\gamma = 1$.

Les estimateurs des paramètres du modèle obtenus a partir d'un échantillon de taille $n = 150$, sont données par :

$$\hat{\varphi}_{1.1} = 0.75 \text{ et } \hat{\varphi}_{1.2} = 0.24$$

La Figure13, illustre la représentation graphique des valeurs simulées et celles estimées par le modèle exprimé par les paramètres estimés.

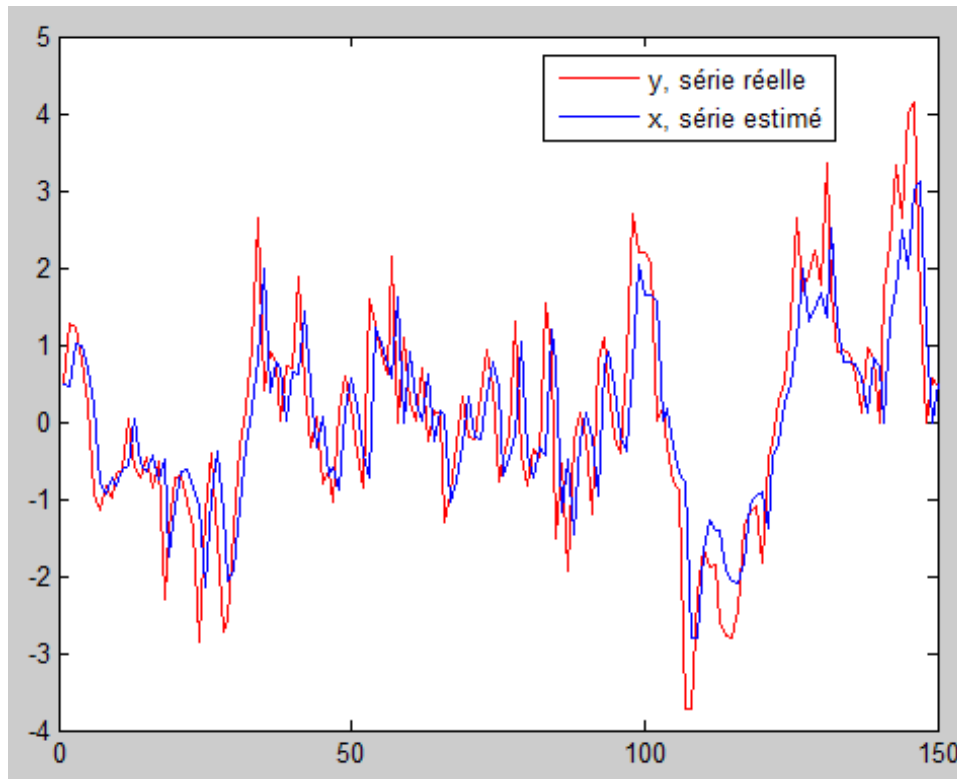


Figure 10 : Représentation graphique d'un modèle EXPAR(1) et les valeurs estimées

Les valeurs des paramètres estimés sont proches des valeurs du modèle. La représentation graphique du modèle estimé est visiblement proche de la représentation du modèle donné, par conséquent le modèle estimé représente bien la série du départ.

Estimation empirique des paramètres d'un modèle EXPAR d'ordre 1

Le tableau ci-dessous présente la moyenne, le biais et la variance du modèle $EXPAR(1)$, de 100 répliques, en simulant des échantillons de taille différentes, $n = 300$, $n = 1000$ et $n = 5000$

Taille de l'échantillon	$n = 200$		$n = 1000$		$n = 5000$	
<i>valeurs estimer</i>	$\hat{\varphi}_{1.1}$	$\hat{\varphi}_{1.2}$	$\hat{\varphi}_{1.1}$	$\hat{\varphi}_{1.2}$	$\hat{\varphi}_{1.1}$	$\hat{\varphi}_{1.2}$
<i>moyenne</i>	0.7903	0.3631	0.7669	0.9520	0.7984	0.3014
<i>biais moyenne</i>	0.0097	0.0631	0.0339	0.6520	0.0016	0.0014
<i>variance</i>	0.0028	0.1185	0.0011	0.4251	0.00006	0.0032

Tableau 1 : la moyenne , le biais moyenne et la variance du modèle *EXPAR*(1) pour trois échantillon

Le biais moyen des estimateurs obtenus est petit se qui signifie que les estimateurs sont proche des valeurs réelles. D'autre part la variance indique une dispersion faible des estimateurs obtenus, par consequent le modèle estimé represente approximativement bien le modèle donné.

Ces résultats sont obtenus par un programme sous MATLAB.

3.1.2 Simulation d'un modèle *EXPAR*(2)

Considérons le modèle *EXPAR*(2) suivant :

$$y_t = \left(\varphi_{1,1} + \varphi_{1,2}e^{-y_{t-1}^2} \right) y_{t-1} + \left(\varphi_{2,1} + \varphi_{2,2}e^{-y_{t-1}^2} \right) y_{t-2} + \varepsilon_t.$$

avec $\varphi_{1,1} = 0.5$; $\varphi_{1,2} = -0.8$; $\varphi_{2,1} = 0.4$; $\varphi_{2,2} = 0.3$. Déterminer les estimateurs des paramètres $(\varphi_{1,1}, \varphi_{1,2}, \varphi_{2,1}, \varphi_{2,2})$ en utilisant la méthode des moindres carrés conditionnelle consiste à calculer les valeurs des paramètres $(\hat{\varphi}_{1,1}, \hat{\varphi}_{1,2}, \hat{\varphi}_{2,1}, \hat{\varphi}_{2,2})$ minimisant la fonction pénalité définie par :

$$Q_n = \sum_{t=2}^n \left[y_t - \left(\left(\hat{\varphi}_{1,1} + \hat{\varphi}_{1,2}e^{-y_{t-1}^2} \right) y_{t-1} + \left(\hat{\varphi}_{2,1} + \hat{\varphi}_{2,2}e^{-y_{t-1}^2} \right) y_{t-2} \right) \right]^2.$$

L'estimation des paramètres a apporté les résultats suivant : $\hat{\varphi}_{1,1} = 0.64$, $\hat{\varphi}_{1,2} = -1.4$, $\hat{\varphi}_{2,1} = 0.7$, $\hat{\varphi}_{2,2} = 0.52$.

La présentation suivante est une comparaison graphique entre la série simulée et celle obtenue en utilisant les paramètres estimés.

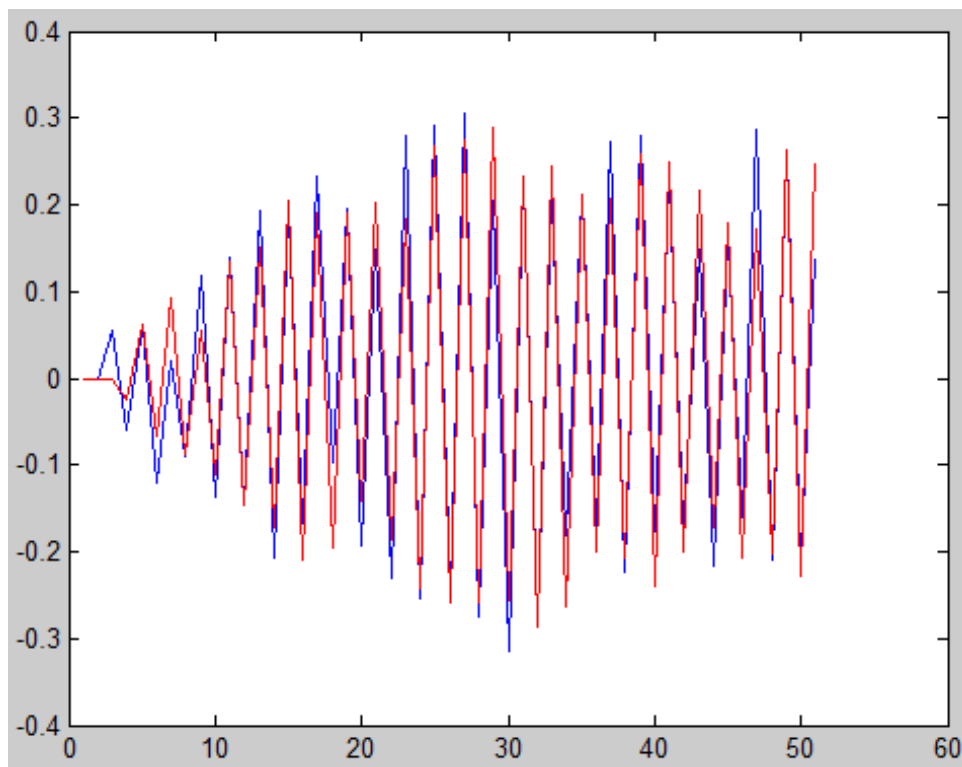


Figure 11 : Comparaison graphique entre la série d'un modèle *EXPAR*(2) et la série obtenue par le modèle estimé

On voit bien que le graphe de la série simulée est proche du graphe de la série simulée, ce qui signifie que les paramètres estimés sont proches des paramètres simulés.

3.1.3 Simulation et estimation d'un modèle GARCH(1.1)

Considérons le modèle suivant :

$$y_t = \varepsilon_t \sqrt{h_t} \quad \text{et} \quad h_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

avec $\alpha_0 = 0.1$, $\alpha_1 = 0.3$ et $\beta_1 = 0.6$

Nous simulons des échantillons de taille 250, puis nous estimons les paramètres de chaque modèle.

3.2. Application D'un modèle exponentiel non linéaire sur des données réels

L'estimation des paramètres du modèle a apportée les résultats suivant :

Paramètre	valeur estimée	erreure standard
α_0	0.091469	0.0330508
α_1	0.357174	0.0789965
β_1	0.598673	0.0661375

Tableau 2 : Estimation de paramètres d'un modèle *GARCH*(1, 1).

les paramètres du modèle estimé sont proche au paramètre du modèle simuler au depart avec une erreure petite.

3.2 Application D'un modèle exponentiel non linéaire sur des données réels

3.2.1 Définition d'une tache solaire

Une tache solaire est une zone de la surface du Soleil de température moins élevée que la température moyenne de la surface. Une tache solaire n'est pas vraiment "froide" au sens qu'on lui donne dans la vie courante car sa température est quand même de 3000-4000 degrés, mais elle apparaît sombre par contraste avec le reste de la surface qui est à environ 5500 degrés.

Ces taches sont dues à une activité très importante et localisée du champ magnétique solaire qui ne permet pas de convection. C'est son champ magnétique qui inhibe la convection par un effet similaire aux freins à courants de Foucault, ralentissant ainsi l'apport de chaleur venant de l'intérieur du soleil (dans cette zone), formant des zones ou

la température de surface est réduite.

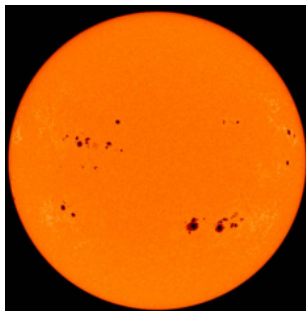


Figure 12 : Les taches solaires sombres sur la surface du soleil.

Les taches solaires sont observées depuis des siècles, et leur étude continue à contribuer à notre compréhension du Soleil et de son activité. Elles sont généralement observées à l'aide de télescopes spéciaux équipés de filtres solaires pour protéger les yeux des observateurs, car il est dangereux de regarder directement le Soleil sans protection appropriée.

3.2.2 Intérêt scientifique de l'observation des taches solaires

L'observation du nombre de taches solaires présente un intérêt scientifique important en raison de leurs effets sur la terre, notamment :

1. **Activité géomagnétique** : Les taches solaires sont souvent associées à des éruptions solaires, qui sont des événements violents où des quantités massives d'énergie et de particules sont éjectées de la surface du Soleil. Lorsque ces éruptions atteignent la Terre, elles peuvent perturber le champ magnétique de notre planète, entraînant des variations dans l'activité géomagnétique. Cela peut provoquer des aurores boréales et australes spectaculaires, mais aussi des perturbations des communications radio et des réseaux électriques.
2. **Perturbations des communications** : Les éruptions solaires associées aux taches solaires peuvent libérer des particules chargées qui interagissent avec le champ magnétique terrestre. Ces particules peuvent perturber les signaux des communications radio, notamment ceux utilisés par les satellites et les systèmes de communication à haute fréquence.
3. **Impact sur les systèmes énergétiques** : Les éruptions solaires majeures peuvent entraîner des surcharges de courant dans les réseaux électriques, ce qui peut endommager les transformateurs et provoquer des pannes d'électricité à grande échelle. Les compagnies

électriques prennent des mesures pour atténuer ces risques, mais les événements solaires intenses restent une préoccupation pour les infrastructures énergétiques.

4. Effets sur les satellites : Les éruptions solaires peuvent également perturber les satellites en orbite autour de la Terre. Les particules chargées peuvent endommager les composants électroniques et provoquer des pannes temporaires ou permanentes. Les opérateurs de satellites prennent des mesures pour protéger leurs engins spatiaux pendant les périodes d'activité solaire intense.

5. Recherche sur le climat terrestre : Certains scientifiques étudient les relations potentielles entre l'activité solaire et le climat terrestre. En examinant les variations du nombre de taches solaires sur de longues périodes, ils cherchent à comprendre si l'activité solaire peut influencer le climat de la Terre à l'échelle globale.

En résumé, l'observation du nombre de taches solaires permet de mieux comprendre l'activité solaire, d'améliorer les prévisions météorologiques de l'espace, d'étudier le champ magnétique solaire et d'explorer les liens potentiels entre l'activité solaire et le climat terrestre.

3.2.3 Nombre mensuel des taches solaires observées depuis 1994

En 1849 R. Wolf à M. Waldmeier en 1980, et par l'observatoire Royale de Belgique depuis 1981, ont pu construire une série initiale de nombre des taches solaires, depuis 1^{er} juillet 2015, les données d'origine des taches solaires sont remplacées par une nouvelle série de

3.2. Application D'un modèle exponentiel non linéaire sur des données réels

données, qui est représentée dans le tableau suivant :

Année	Jan	Fév	Mar	Avr	Mai	Jui	Juil	Aou	Sep	Oct	Nov	Déc
1994	84.9	54.9	47.5	27.4	29.8	39.7	50.6	34.3	40.5	67.1	29.5	32.2
1995	32.6	45.8	46.3	21.6	19.4	22.5	20.4	18.2	15.7	30.6	14.0	14.9
1996	13.3	7.7	12.6	6.8	7.6	16.5	11.8	19.7	3.0	0.7	24.9	14.0
1997	7.4	11	12.1	23	25.4	20.8	12.9	35.7	59.7	32.8	50.4	55.5
1998	44.5	50.2	82	70.6	74	90.5	96.5	121.1	132	78.5	97.3	119.2
1999	86	98	103.5	93.6	149.6	207.2	173.5	142.3	106.3	168.7	188.3	116.2
2000	133.1	165.7	217.7	191.9	165.9	188	244.3	180.5	156	141.6	158.1	143.3
2001	142.6	121.5	165.8	161.7	142.1	202.9	123	161.5	238.2	194.1	176.6	213.4
2002	184.6	170.2	147.1	186.9	187.5	128.8	161	175.6	187.9	151.2	147.2	135.3
2003	133.5	75.7	100.7	97.9	86.8	118.7	128.3	115.7	78.5	97.8	82.9	72.2
2004	60.6	74.6	74.8	59.2	72.8	66.5	83.8	69.7	48.8	74.2	70.1	28.9
2005	48.1	43.5	39.6	38.7	61.9	56.8	62.4	60.5	37.2	13.2	27.5	59.3
2006	20.9	5.7	17.3	50.3	37.2	24.5	22.2	20.8	23.7	14.9	35.7	22.3
2007	29.3	18.7	7.2	5.4	19.5	21.3	15.1	9.8	4	1.5	2.8	17.3
2008	4.1	2.9	15.5	3.6	4.6	5.2	0.6	0.3	1.2	4.2	6.6	1
2009	1.3	1.2	0.6	1.2	2.9	6.3	5.5	0	7.1	7.7	6.9	16.3
2010	19.5	28.5	24	10.4	13.9	18.8	25.2	29.2	36.4	33.6	34.4	24.5
2011	27.3	48.3	78.6	76.1	58.2	56.1	54.5	65.8	120.1	125.7	139.1	109.3
2012	94.4	47.8	86.6	85.9	96.5	92	100.1	94.8	93.7	75.5	87.6	56.8
2013	96.1	60.9	78.3	107.3	120.2	76.7	86.2	91.8	54.5	114.4	113.9	124.2
2014	117	146.1	128.7	112.5	112.5	102.9	100.2	106.9	130	90	103.6	112.9
2015	93.0	66.7	54.5	75.3	88.8	66.5	65.8	64.4	78.6	63.6	62.2	58.0
2016	57.0	56.4	54.1	37.9	51.1	20.5	32.4	50.2	44.6	33.4	21.4	18.5
2017	26.1	26.4	17.7	32.3	18.6	19.2	17.8	32.6	43.7	13.2	5.7	8.2

Tableau 3 : Nombre mensuel des taches solaire observées de 1994 à 2017

La représentation graphique de cette série réelle est comme suit

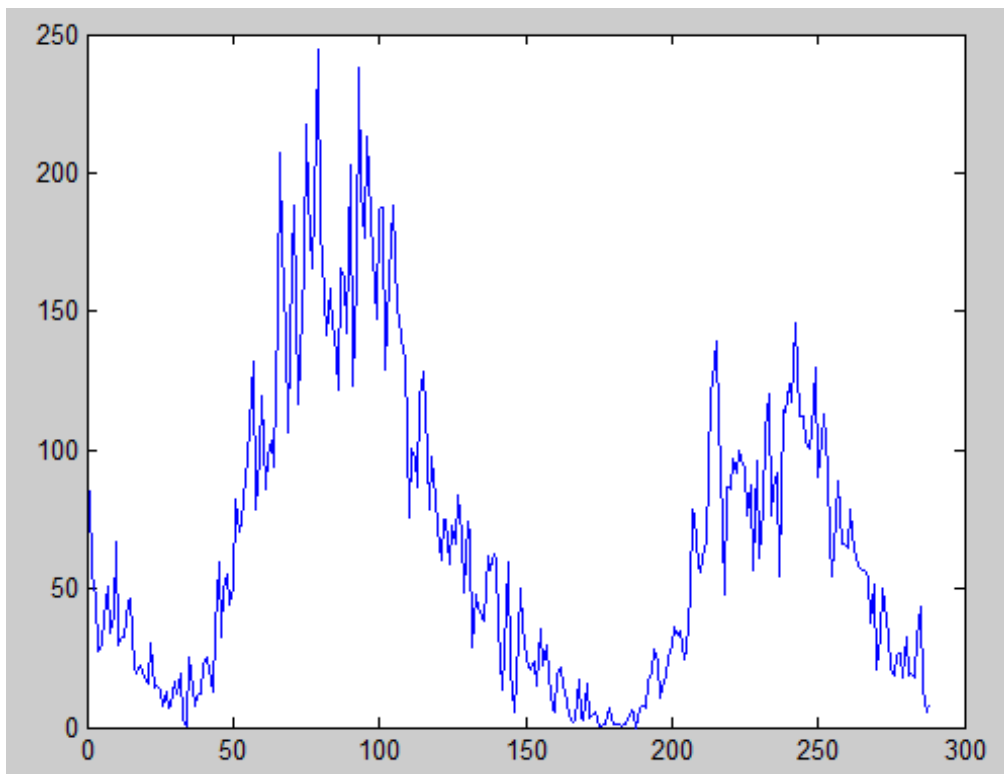


Figure 13 : La représentation graphique du nombre mensuel des taches solaires de 1994 jusqu'à 2017

3.2.4 Modélisation de la série par un modèle $EXPAR(1)$

Afin d'estimer le nombre de taches solaire à partir de janvier 2018, nous allons modéliser cette série par un modèle $EXPAR(1)$ en estimant ses paramètres, puis nous faisons une estimation des valeurs s'étallant de janvier 2018 jusqu'à 2023, puis les comparer aux valeurs observées.

Posons $\gamma = 1$, le modèle $EXPAR(1)$ est défini par la formule suivante

$$Y_t = (\varphi_{1.1} + \varphi_{1.2} \exp(-Y_{t-1}^2))Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Pour estimation les paramètres du modèle nous avons utilisé la serie de $n = 288$ observations données dans le tableau précédant.

Les estimateurs du modèle sont obtenus par la méthode des moindres carrés ordénaires (MCO), et sont calculés comme suit :

$$\begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{1.1} \\ \hat{\varphi}_{1.2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{288} Y_{t-1}^2 & \sum_{t=1}^{288} Y_{t-1}^2 \exp(-Y_{t-1}^2) \\ \sum_{t=1}^{288} Y_{t-1}^2 \exp(-Y_{t-1}^2) & \sum_{t=1}^{288} Y_{t-1}^2 \exp(-2Y_{t-1}^2) \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{288} Y_{t-1} Y_t \\ \sum_{t=1}^{288} Y_{t-1} Y_t \exp(-Y_{t-1}^2) \end{pmatrix}.$$

Ob obtient

$$\hat{\varphi}_{1.1} = 0.9673 \quad , \quad \hat{\varphi}_{1.2} = 7.5999.$$

Ci-dessous le graphe ses valeurs obtenues en utilisant le modèle EXPAR(1) avec les paramètres $\hat{\varphi}_{1.1}$ et $\hat{\varphi}_{1.2}$, comparée à la série observée.

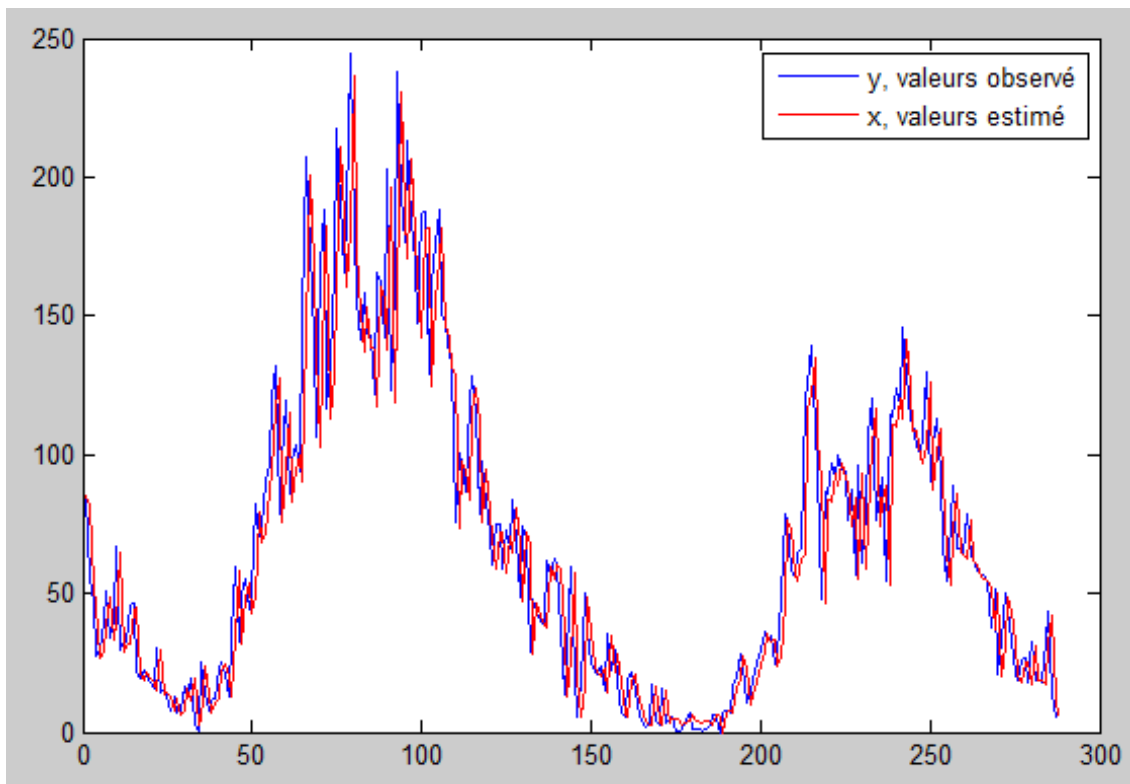


Figure 14 : Representation graphique de la série estimer par modèle EXPAR(1)

Le graphe de la série observé est proche de graphe de la série estimée se qui signifie que les paramètres obtenues sont proche aux paramètres du départ.

3.2. Application D'un modèle exponentiel non linéaire sur des données réels

Le tableau suivant résume le nombre de taches solaires enregistrées depuis le mois de janvier 2018.

Année	Jan	Fév	Mar	Avr	Mai	Jui	Juil	Aou	Sep	Oct	Nov	Déc
2018	6.8	10.7	2.5	8.9	13.1	15.6	1.6	8.7	3.3	4.9	4.9	0.1
2019	7.7	0.8	9.4	9.1	9.9	1.2	0.9	0.5	1.1	0.4	0.5	1.5
2020	6.2	0.2	1.5	5.2	0.2	5.8	6.1	7.5	0.6	14.6	34.5	23.1
2021	10.4	8.2	17.2	24.5	21.2	25.0	34.3	22.0	51.3	37.4	34.8	67.5
2022	55.3	60.9	78.6	84.0	96.5	70.3	91.4	74.6	96.0	95.5	80.5	112.8
2023	143.6	110.9	122.6	96.4	-	-	-	-	-	-	-	-

Tableau 4 : Nombre de taches solaires observées depuis 2018 à 2023

Après estimation du nombre de taches solaires en utilisant le modèle estimé, la représentation graphique des valeurs obtenues, comparées à celles observées est donnée dans le graphe suivant.

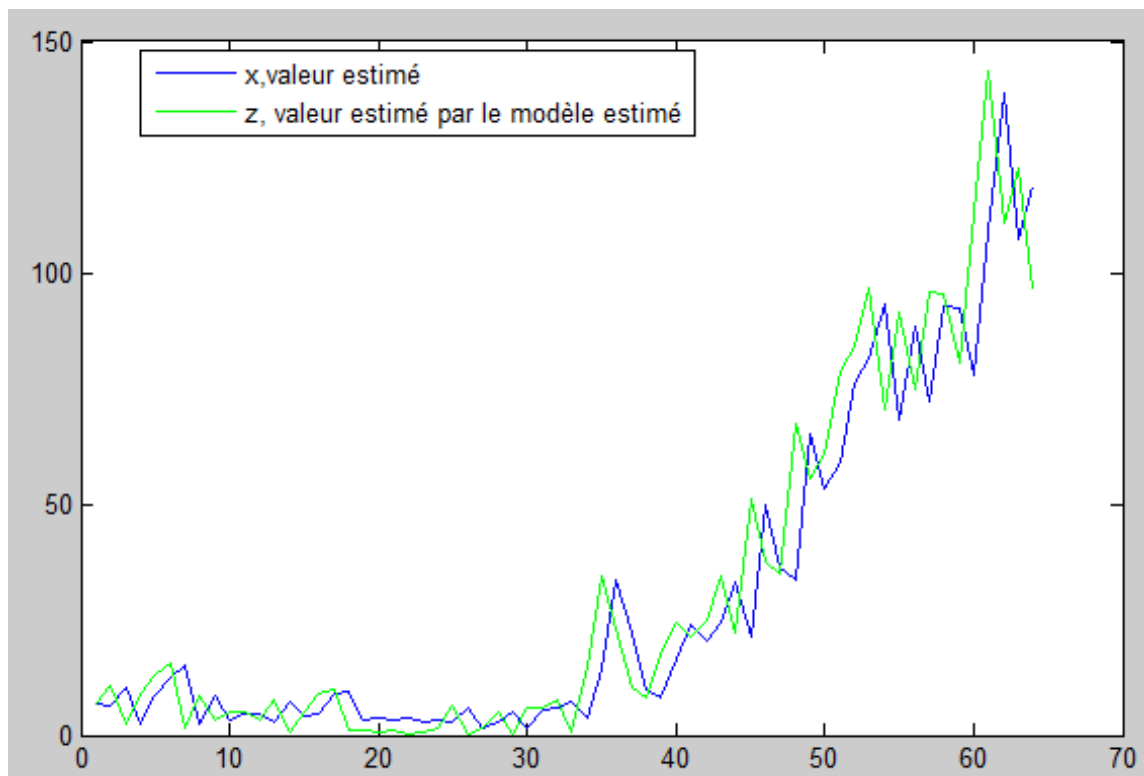


Figure 15 : La représentation graphique de la série estimée de 2018 jusqu'à 2023

3.2. Application D'un modèle exponentiel non linéaire sur des données réels

Les deux représentation graphiques illustre bien la cohérence entre les estimations obtenues et les valeurs observées, en effet la courbe de l'estimation suit la tendance de la courbe d'observations.

Conclusion

Ce travail est juste une introduction des modèles autorégressifs non linéaires.

Au départ nous avons étendu, la série temporelle et ces différents caractéristiques, puis nous avons cité les trois types important dans la modélisation des modèles linéaires. Vu que les caractéristique de ce type du modèle linéaire ne s'applique pas sur certain phénomène, nous avons introduit le modèle autorégressifs non linéaire, nous avons cité parmi ses différents modèles existons, trois modèles qui sont : le modèle autorégressifs exponentiel d'ordre p ($EXPAR(p)$), le modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques d'ordre p ($ARCH(p)$) et le modèle $ARCH$ généralisé d'ordre q ($GARCH(q)$), modèle autorégressifs à seuil ($TAR(p)$), donnons les différent caractéristiques de chaque modèles, et les méthodes d'estimation de leurs paramètres.

Nous avons appliquée les informations cité dans la partie théorique pour réaliser une étude empirique, dans la partie de simulation, nous sommes intéressées de faires une simulation sur trois échantillons aléatoires de taille différente donnée au hasard par le modèle $EXPAR(1)$, et estimé ses paramètres, puis données leurs représentation graphique, d'autres part on a simulé un autre échantillon par le modèle $GARCH(1, 1)$, et donnée ses paramètres estimés et les représentés graphiquement.

A la fin nous avons, appliqués le modèle $EXPAR(1)$ sur la série mensuel des nombres des taches solaires ont donnons sa représentation graphique, après avoir estimé ces paramètres $\varphi_{1.1}$, $\varphi_{1.2}$, ont utilisons la méthode de moindre carrée ordinaires MCO , puis réalisée une séries estimée en utilisant les paramètres estimé $\hat{\varphi}_{1.1}$, $\hat{\varphi}_{1.2}$ et tracer le graphe qui représente cette modélisation.

Bibliographie

- [1] Al-Kassam, M. S. and Lane, J. A. (1989). Forecasting Exponential Autoregressive Models Of Order 1. *Journal Of Time Series Analysis*. 10(2), 95-113.
- [2] Allal, J. and El Melhaoui, S. (2006). Optimal Detection Of Exponential Component. *Journal Of Time Series Analysis*. 27(6), 793-810.
- [3] Azouagh, N. and El Melhaoui, S. (2019). An Exponential Autoregressive model for the forecasting of annual sunspots number. *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol.7(3), pp. 17-23.
- [4] Al-Kassam, M. S. and Lane, J. A. (1989). Forecasting Exponential Autoregressive-Models Of Order 1. *Journal Of Time Series Analysis*. 10(2) : 95-113.
- [5] Allal, J. and ElMelhaoui, S.(2006). Optimal Detection Of Exponential Component. *Journal Of Time Series Analysis* Vol. 27, No. 6, PP(793-810).
- [6] Brockwell, P. J. and Davis, R. A. (1991). *Time Series : Theory and methods*. Springer-Verlag. New York.
- [7] Basawa, I. and Lund, R. (2001). Large sample properties of parameters estimates for periodic ARMA models. *Journal of Time Series Analysis*, 22, 1-13..
- [8] Box, G. E. P., & Jenkins, G. M. (1970). *Time Series Analysis : Forecasting and Control*, Holden-Day, San Francisco. First Edition
- [9] Baragona, R., Battaglia, F. and Cuccina, D. (2002) : A note on estimating autoregressive exponential models. *Quaderni di Statistica*, Vol.4, 2002.

-
- [10] Bentarzi, M. (1995) : "Modèles de séries chronologiques à coefficients périodiques".
Thèse de Doctorat. Institut de mathématiques, U.S.T.H.B, Alger, Algérie.
- [11] Bentarzi, M. and Merzougui, M. (2010). Adaptive Test for Periodicity in Autoregressive Conditional Heteroskedastic Processes. *Comm. Simulation Comput.* 39, 1735-1753.
- [12] Bollerslev, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *J. Econometrics* 31, 307-327, 1986.
- [13] Bousseba Fatma Zohra : Utilisation des modèles Arch-Garch pour modéliser le marché de l'énergie : Prix de pétrole et de gaz, mémoire de Doctorat, département de Mathématiques, Université Badji Mokhtar Annaba, 2017.
- [14] Becila, S. (2021): "Estimation dans les modèles autorégressifs exponentiels périodiques". Thèse de Doctorat. Université de Badji Mokhtar - Annaba.
- [15] Chan, K. S. and Tong, H. (1985). On the use of the deterministic Lyapunov function for the ergodicity of stochastic difference equations. *Advances in applied probability*, 17(3), 666-678.
- [16] ENGLE B. (1982) "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation", *Econometrica*, 987-1008
- [17] Haggan, V. and Ozaki, T. (1981), Modeling non linear random vibrations using an amplitude-dependent autoregressive time series model. *Biometrika*. 68(1), 96-189
- [18] Hisseine Saad Mahamat : Estimation de la volatilité des données financières à haute fréquence par le modèle Score-GARCH, mémoire de Doctorat, Ecole Doctorale Economie Gestion, Université Montpellier, 2017.
- [19] Ibragimov, I. A. (1963): A central limit theorem for a class of dependent random variables, *Theory of Probability & Its Applications* 8(1), 83-89.
- [20] Koul, H. L. and Schick, A. (1997). Efficient estimation in non linear autoregressive time series models. *Bernoulli*, 3, 247-277.

-
- [21] Linton, O. (1993): Adaptive Estimation in ARCH Models. *Econometric Theory* 9, 539–569.
- [22] Michel Terraza et Ali Zatout : Modélisation de l'hétéroscédasticité conditionnelle du prix spot du marché pétrolier de l'O.C.D.E., *Journal de la société statistique de Paris*, tome 134, n°3, p. 21-39, 1993.
- [23] Melard G. et Roy R. (1988): "Modèles de Séries Chronologiques avec Seuils", *Revue de Statistique Appliquée*, 36, 4, 5-24.
- [24] Ozaki, T. (1980). Non-linear timeseries models for non-linear random vibrations, *Journal of Applied Probability* 17, 84–93.
- [25] Shi, Z. ,Tamura, Y. ,and Ozaki, T. (2001). Monitoring the stability of BWR oscillation by non linear time series modeling. *Annals of Nuclear Energy*, 28, 953-966.
- [26] SEN, Ashish K. and Muni S. Srivasti (1990) *Regression analysis: theory, methods and applications* New York, Springer-Verlag
- [27] Tjøstheim, D. (1986): *Estimation in Nonlinear Time Series Models*. El-sevier Science Publishers B.V. North-Holland.*Stochastic Processes and their Applications* 21(1986), 251-273.
- [28] Tong H. et Lim K.S.(1980): "Threshold Autoregression, Limit Cycles and Cyclical Data", *Journal of the Royal Statistical Society*, B42, 245-292.
- [29] Zakořian J.M. (1990): "Modèles autorégressifs à seuils de séries chronologiques", Thèse de Doctorat, Université Paris-IX Dauphine.

Résumé

Dans ce mémoire, nous étendons les modèles autorégressifs non linéaires, notre objectif est d'introduire quelques modèles autorégressif non linéaires existant dans la littérature, de donner un aperçu général sur les propriétés caractérisant ces modèles les méthodes d'estimation de leurs paramètres. Puis, de faire quelques expériences de simulation sur des modèles donnés, et appliquer ensuite un modèle sur des données réelles pour faire des prévisions.

Abstract

In this report, we extend the nonlinear autoregressive models, our objective is to introduce some nonlinear autoregressive models existing in the literature, to give a general outline on the properties characterizing these models, the methods of estimation of their parameters. Then, to do some simulation experiments on given models, and then apply a model to real data to make forecasts.

Mots clés série temporelle, les modèles linéaires, les modèles non linéaires, modèle autorégressifs exponentiel, ARCH/GARCH, modèle autorégressifs à seuil, méthode moindre carrée conditionnels, méthode moindre carrée ordinaire, Modèle exponentiel restreint périodique.