

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDERRAHMANE MIRA BEJAIA

FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MASTER

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Energétique

Par :

MAOUCHE Ferial

SEDDAR Cherif

Thème

Etude théorique d'un profil aérodynamique

Soutenu le 26 Juin 2023 devant le jury composé de:

Mr. DJERRADA. A	Président
Mr. BENSLIMANE. A	Rapporteur
Mr. SAHI. A	Examineur
Mr. HAMDI. M	Examineur

Année Universitaire 2022-2023

Remerciements

Ce mémoire marque l'aboutissement d'un long cheminement universitaire. Il représente toute l'énergie et tout le dévouement que nous avons investis dans nos études à ce jour.

Nous remercions Dieu le tout puissant de nous avoir donné la santé, la volonté et le courage pour achever ce travail.

Nous exprimons nos vifs remerciements, notre profonde gratitude et notre reconnaissance à notre promoteur BENSILIMANE Abdelhakim qui nous a fait l'honneur de diriger ce travail et pour ses conseils, ses remarques pertinentes et surtout sa disponibilité et ses orientations.

Nous remercions également tous les enseignants du Département de génie mécanique de l'université de Bejaia pour leur aide précieuse.

Nous tenons aussi à remercier l'ensemble du personnel de la bibliothèque de Targa Ouzemour.

Nos remerciements s'adressent également aux les membres du jury pour avoir accepté de lire et d'évaluer ce travail.

Dédicaces

A Dieu le tout puissant, à qui je dois tout, et surtout d'avoir honoré et éclairé mon chemin par le savoir. (Merci ALLAH de m'avoir appris, protégée, guidée tout au long de ma vie)

A la source de tendresse et d'amour ; à celle qui m'a offert une enfance très heureuse et celle qui a su être toujours à mes côtés dans la joie et dans la peine, ma mère, que Dieu te garde pour nous.

A mon cher père, qui a toujours été mon appui moral, et qui n'a jamais arrêté de m'encourager et de m'aider dans ma vie et surtout dans mes études, que Dieu te garde pour nous

« Mon père, ma mère merci pour tout »

A ma grand-mère « nana »

A mon cher frère « Houssam »

A mes chères sœurs « Wassima et Meriem »

A toutes mes cousines et cousins, mes tantes, mes oncles

A mon binôme Cherif pour sa patience sa gentillesse et sa générosité tout le long de nos études, ainsi qu'à toute sa famille

A mes amies : Miyada, Lydia, Nadjat, Kenza et Wissam

A toute la promotion master2 Energétique 2023, à qui je souhaite un bon parcours professionnel

A tous mes camarades de l'université qui j'ai côtoyé tout au long de mon cursus

MAOUCHE Ferial

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

*Mes chers parents et mes deux sœurs, eux qui m'ont
Doté d'une éducation digne, leur amour a fait de moi ce
Que je suis aujourd'hui.
Ma grande famille pour leur soutien*

*A ma binôme Ferial
A tous ceux qui me sont chers*

SEDDAR Cherif

Sommaire

Remerciements	i
Dédicaces	ii
Dédicaces	iii
Sommaire	iv
Liste des figures	vii
NOMENCLATURE.....	ix
Introduction Générale.....	1
Chapitre I Généralités sur l'aérodynamique.....	2
I.1. Introduction	2
I.2. Histoire de l'aérodynamique	2
I.3. Concepts fondamentaux	3
I.4. Forces fondamentales du vol.....	4
I.4.1. Poids.....	4
I.4.2. Portance.....	4
I.4.3. Trainée	4
I.4.4. Poussée.....	5
I.5. Lois de conservation.....	5
I.5.1. Conservation de la masse	5
I.5.2. Conservation de la quantité de mouvement	5
I.5.3. Conservation de l'énergie	6
I.6. Flux incompressibles ou compressibles	6
I.7. Régime de nombre de Mach.....	7
I.7.1. Écoulement subsonique	7
I.7.2. Écoulement transsonique :	7
I.7.3. Écoulement supersonique :	7
I.7.4. Écoulement hypersonique :.....	7
I.8. Conclusion.....	8
Chapitre II Caractéristiques aérodynamiques et géométriques d'ailes d'avion et leurs profils	9
II.1. Introduction	9
II.2. Ailes d'avion	9
II.3. Principales composantes d'une aile d'avion	10
II.4. Formes géométrique des ailes	10

II.5.	Profil d'une aile d'avion.....	10
II.6.	Caractéristiques géométriques d'un profil :	11
II.7.	Désignation d'un profil	12
II.7.1.	Famille des profils NACA	12
II.7.2.	Classement des profils	13
II.7.3.	Type des profils.....	13
II.8.	Caractéristiques aérodynamiques d'un profil.....	14
II.8.1.	Résultante aérodynamique R_a :.....	14
II.8.2.	Composantes de R_a	14
II.8.3.	Portance :	15
II.8.4.	Trainé :	16
II.9.	Étude du coefficient de portance	16
II.10.	Décrochage	16
II.11.	Étude du coefficient de traînée	18
II.12.	Polaire	19
II.13.	Finesse	19
II.14.	L'utilité de l'hypersustentation.....	19
II.15.	Détermination du profil d'aile	20
II.15.1.	Transformation de JOUKOWSKI.....	20
II.15.2.	Transformation de VON-MISES	20
II.15.3.	Transformation de KARMANN-TREFFETZ.....	21
II.16.	Méthodes de résolution.....	21
II.16.1.	Méthodes analytiques.....	21
II.16.2.	Méthodes numériques :	21
II.16.3.	Méthodes des singularités :.....	22
II.16.4.	Méthodes empiriques :	22
II.17.	Conclusion :	22
Chapitre III	Écoulements potentiels et la transformation conforme	23
III.1.	Introduction	23
III.2.	Écoulement potentiel.....	23
III.2.1.	Écoulement irrotationnel – potentiel des vitesses	23
III.2.2.	Fonction de courant.....	24
III.2.3.	Potentiel complexe.....	24
III.2.4.	Vitesse complexe	25
III.3.	Type d'écoulement.....	25

III.3.1. Ecoulement uniforme	25
III.3.2. Ecoulement source ou puit	26
III.3.3. Ecoulement Doublet et dipôle	27
III.3.4. Ecoulement tourbillonnaire	29
III.3.5. Circulation	29
III.4. Superposition d'écoulements	31
III.4.1. Ecoulement autour d'un cylindre sans circulation	30
III.4.2. Ecoulement autour d'un cylindre avec circulation	32
III.5. Relation de Blasius	34
III.6. Transformation conforme	34
III.6.1. Transformation d'un cercle en un plan	36
III.6.2. Transformation d'un cercle en une ellipse	37
III.6.3. Transformation d'un cercle en un profil symétrique	38
III.6.4. Transformation d'un cercle en un arc	39
III.6.5. Transformation d'un cercle en un profil cambré	39
III.7. Conclusion	40
Chapitre IV Modélisation d'un profil Joukovski et détermination analytique de ses caractéristiques aérodynamiques	41
IV.1. Introduction	41
IV.2. Transformation de Joukovski	41
IV.3. Équations paramétriques du cercle générateur	42
IV.3.1. Calcul des paramètres du profil de Joukovski	46
IV.4. Condition de kutta-Joukovski	47
IV.5. Détermination des efforts aérodynamique	48
IV.5.1. Calcul des coefficients de portance et de traînée	50
IV.5.2. Variation du coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence	51
IV.5.3. Variation du coefficient de traînée en fonction de l'angle d'incidence	52
IV.6. Distribution du champ de vitesse sur le profil	52
IV.6.1. Distribution du champ de vitesse	53
IV.6.2. Distribution du coefficient de pression	56
IV.7. Conclusion	60
Conclusion générale	61
Référence bibliographique	62
Résumé	64

Liste des figures

Figure I.1 : Forces appliquées sur l'avion.....	5
Figure II.1 : Schéma représentatif de l'aile.....	9
Figure II.2 : Composition d'une aile d'avion [7].....	10
Figure II.3 :Déférentes forme d'aile d'Avion [8].....	10
Figure II.4 :Profil d'aile [11].....	11
Figure II.5 : Géométrie du profil.....	11
Figure II.6 : Résultante Ra [12].	15
Figure II.7 : Courbe du Cz [14].	16
Figure II.8 : Courbe du Cx [12].....	18
Figure II.9 :Points remarquables de la polaire [19].	19
Figure II.10 : Les dispositifs hypersustentateurs de bord d'attaque, et de bord de fuite [20].	20
Figure III.1 : Ecoulement uniforme.....	26
Figure III.2 : Ecoulement source et puits.....	27
Figure III.3 : Ecoulement Doublet.....	28
Figure III.4 : Ecoulement dipôle.....	28
Figure III.5 : Ecoulement tourbillonnaire.....	29
Figure III.6 : Définition de circulation.	30
Figure III.7 : écoulement autour d'un cylindre sans circulation.....	32
Figure III.8 : lignes de courant pour $ \Gamma < 4\pi V_0 R$ [10].....	33
Figure III.9 : les efforts exercés sur un corps.	34
Figure III.10 : Transformation conforme [1].....	35
Figure III.11 : transformation d'un cercle en un plan [1].	36
Figure III.12 : Ecoulement autour d'une plaque plane placée à un angle d'incidence [1].	37
Figure III.13 : transformation d'un cercle en une ellipse [1].....	38
Figure III.14 : Transformation d'un cercle en un profil symétrique [10].	39
Figure III.15 : Transformation d'un cercle en un arc [10].	39
Figure III.16 : Transformation d'un cercle en profil cambré [10].	40
Figure IV.1 : cercle générateur d'un profil cambré.....	41

Figure IV.2: représentation graphique profil cambré (profil de Joukovski).	46
Figure IV.3: Coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence.	51
Figure IV. 4 : Coefficient de traînée en fonction de l'angle d'incidence	52
Figure IV.4.a: Distribution de la vitesse sur le profil à $\alpha = -5^\circ$	53
Figure IV.4.b: Distribution de la vitesse sur le profil à $\alpha = 0^\circ$	53
Figure IV.4.c: Distribution de la vitesse sur le profil à $\alpha = 5^\circ$	54
Figure IV.4.d: Distribution de la vitesse sur le profil à $\alpha = 10^\circ$	54
Figure IV.4.e: Distribution de la vitesse sur le profil à $\alpha = 15^\circ$	55
Figure IV.4.f: Distribution de la vitesse sur le profil à $\alpha = 20^\circ$	55
Figure IV.5.a: Distribution du coefficient de pression sur le profil à $\alpha = -5^\circ$	56
Figure IV.5.b: Distribution du coefficient de pression sur le profil à $\alpha = 0^\circ$	57
Figure IV.5.c: Distribution du coefficient de pression sur le profil à $\alpha = 5^\circ$	57
Figure IV.5.d: Distribution du coefficient de pression sur le profil à $\alpha = 10^\circ$	58
Figure IV.5.e: Distribution du coefficient de pression sur le profil à $\alpha = 15^\circ$	58
Figure IV.5.f: Distribution du coefficient de pression sur le profil à $\alpha = 20^\circ$	59

NOMENCLATURE

Symboles	Définition	Unité (SI)
b	Envergure du profil	m
C	corde du profil	m
C_x	Coefficient de trainée	/
C_z	Coefficient de portance	/
F_x	force de trainée	kg ms^{-2}
F_z	force de portance	kg ms^{-2}
g	Attraction de la Terre	N kg
M	masse de l'objet	kg
M	Nombre de Mach	/
R	Résultante aérodynamique	kg ms^{-2}
r	Cordonnée polaire	m
S	Surface	m^2
u	Composante de la vitesse suivant l'axe des x	/
v	Composante de la vitesse suivant l'axe des y	/
V	Vitesse	m/s
V_0	Vitesse de l'écoulement à l'infini amont	m/s
V_θ	Composante tangentielle de la vitesse	/
V_r	Composante radiale de la vitesse	/
W	Vitesse complexe du profil Z	/
X, Y	Cordonnées du profil Z	/
x, y	Cordonnées du profil z	/
x', y'	Cordonnées du profil z'	/
Z, z, z'	Variables complexes	/

Symboles grecs

α	Angle d'incidence	(°)
ζ	Plan complexe	/
ρ	Masse volumique	kg / m ³
Ψ	Fonction de courant	/
θ	Cordonnée polaire	(°)
Γ	Circulation	m ² s ⁻¹
η	Abcisse du plan ζ	/
Φ	Potentiel des vitesses	/
λ	Allongement relatif à l'aile	/
ξ	Ordonnée du plan ζ	/
β	Angle de bord de fuite	(°)

Introduction Générale

Introduction Générale

Les profils aérodynamiques cambrés sont très importants dans de nombreuses applications, notamment dans l'aviation, l'automobile et turbomachine.

Les travaux de recherche actuels se concentrent sur la détermination des caractéristiques aérodynamiques de ces profils, ce qui est un défi majeur pour les aérodynamiciens.

La conception des ailes est également un point délicat car elle a un impact important sur les performances de l'avion et nécessite une compréhension approfondie des équations d'aérodynamique.

Les objectifs de ce projet de fin d'étude sont de déterminer théoriquement un profil cambré en ayant recours à la transformation conforme de Joukovski, et d'optimiser la détermination de ses caractéristiques aérodynamiques.

Le travail comporte quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré aux généralités sur l'aérodynamique et les principes fondamentaux de cette science passionnante, ainsi que les forces et les moments qui s'exercent sur les corps en mouvement dans l'air.

Le second chapitre s'intéresse aux ailes en général et aux informations essentielles sur les ailes d'avion, leur fonctionnement et leur composant.

Le troisième chapitre permettra de mieux comprendre les modèles d'écoulement potentiel et leur utilité dans la caractérisation d'un écoulement autour d'une aile. Vous découvrirez également les transformations conformes et leur rôle dans la détermination d'un profil d'aile cambrée de type Joukovski.

Enfin, le quatrième chapitre constitue la contribution principale et originale du travail en déterminant analytiquement un profil cambré et en calculant ses caractéristiques aérodynamiques associées.

Pour conclure notre étude, nous présenterons une synthèse générale qui met en lumière les résultats obtenus grâce à notre contribution dans le cadre de notre projet de fin d'étude.

Chapitre I

Généralités sur

l'aérodynamique

Généralités sur l'aérodynamique

I.1. Introduction

L'aérodynamique (du grec aer =air et dunamis =force) est la science qui a pour objet l'étude des mouvements de l'air autour des corps. En d'autres termes, il s'agit des phénomènes mis en jeu chaque fois qu'il existe un mouvement relatif entre un corps et l'air qui l'entoure. Le corps peut se déplacer dans le fluide immobile (avion en vol) ou être fixe dans le fluide en mouvement (aile d'avion dans une soufflerie).

Le premier objectif de l'aérodynamique est de déterminer les forces et les moments, sur un corps se déplaçant dans un fluide, généralement de l'air, par exemple, la génération de la portance, de la traînée et des moments sur les profils, les ailes d'avion, le fuselage, les nacelles et les hélices. On peut également calculer les forces qui s'exercent sur les pales d'hélicoptère ou sur les éoliennes (machine à vent) à axe horizontal ou à axe vertical.

Le second objectif se résume à la détermination des écoulements internes des gaz dans les tuyaux, les moteurs, les turbines, les compresseurs et les ventilateurs. L'aérodynamique doit permettre de calculer et de mesurer les propriétés de l'écoulement dans un propulseur de missiles (ou de fusées),... etc [1].

I.2. Histoire de l'aérodynamique

- L'aérodynamique moderne ne date que du XVIIe siècle, mais l'homme exploite les forces aérodynamiques dans les voiliers et les moulins à vent depuis des milliers d'années, des images et des récits de vol existent dans l'histoire, comme la légende d'Icare et de Dédale dans la Grèce antique.
- Aristote et Archimède ont tous deux utilisé les termes "continuum", "traînée" et "gradients de pression" dans leurs écrits.
- Sir Isaac Newton, l'un des premiers aérodynamiciens, a été le premier à établir une théorie de la résistance de l'air en 1726.
- Daniel Bernoulli, mathématicien suisse néerlandais, a publié Hydrodynamica en 1738, dans lequel il a défini une relation fondamentale entre la pression, la densité et la vitesse de l'écoulement pour un écoulement incompressible, aujourd'hui connue sous le nom de théorie de Bernoulli, cela fournit une méthode de base pour calculer la portance aérodynamique.

- Les équations d'Euler, plus générales et applicables aux écoulements compressibles et incompressibles, ont été publiées par Leonhard Euler en 1757.
- Dans la première moitié du XIXe siècle, les équations d'Euler ont été élargies pour inclure les conséquences de la viscosité, ce qui a donné les équations de Navier-Stokes. Les équations de Navier-Stokes sont les équations directrices les plus générales de l'écoulement des fluides, mais elles sont difficiles à résoudre, sauf pour les formes les plus simples.
- Sir George Cayley a été le premier à reconnaître les quatre forces aérodynamiques du vol - le poids, la portance, la traînée et la poussée - ainsi que leurs interrelations, en 1799.
- Francis Herbert Wenham a construit la première soufflerie en 1871, ce qui a permis de mesurer avec précision les forces aérodynamiques.
- Charles Renard, ingénieur aéronautique français, a été le premier à prédire la puissance nécessaire à un vol soutenu pour un avion de poids donné et des calculs de traînée d'aile en 1889.
- Otto Lilienthal, d'Allemagne, a élargi les travaux de Wenham en soufflerie et a publié ses recherches en 1889. Il a été le premier à remporter de grands succès avec des vols en planeur, il a également été le premier à proposer de petits profils aérodynamiques courbes à forte portance et faible traînée.
- Les frères Wright ont fait voler le premier avion motorisé le 17 décembre 1903, en se basant sur les inventions et les expériences menées dans leur propre soufflerie [2].

I.3. Concepts fondamentaux

Comprendre le mouvement de l'air autour d'un objet (souvent appelé champ d'écoulement) permet de calculer les forces et les moments agissant sur l'objet, les forces importantes en matière d'aérodynamique sont les forces fondamentales du vol : portance, traînée, poussée et poids, la portance et la traînée sont des forces aérodynamiques, ou des forces causées par un mouvement d'air sur une masse solide. Ces variables sont souvent calculées sur la prémisse que le champ d'écoulement agit comme un continuum. La vitesse d'écoulement, la pression, la densité, et la température sont des paramètres de champs d'écoulement continu qui peuvent varier selon le lieu et le temps. Ces attributs peuvent être observés directement ou indirectement dans des expériences aérodynamiques, ou calculées à partir des équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie dans les écoulements

d'air. La densité, la vitesse d'écoulement et une autre propriété, la viscosité, sont utilisées pour classer les champs d'écoulement [3].

I.4. Forces fondamentales du vol

Le poids, la portance, la poussée et la traînée sont les quatre principes de l'aérodynamique. Ces forces physiques du vol et de la structure des avions font qu'un objet se déplace vers le haut et vers le bas, ainsi que plus vite et plus lentement.

I.4.1. Poids

Le poids est une force qui est toujours dirigée vers le centre de la terre. L'ampleur du poids dépend de la masse de toutes les pièces de l'avion, de la quantité de carburant et de toute charge utile à bord (personnes, bagages, fret, etc.). Le poids est réparti sur l'ensemble de l'avion. Mais on peut souvent considérer qu'il est rassemblé et qu'il agit en un seul point, appelé centre de gravité. En vol, l'avion tourne autour du centre de gravité [4].

I.4.2. Portance

Une portance est une force qui fait s'élever quelque chose. C'est la force opposée au poids. Tout ce qui vole doit avoir une portance. Pour qu'un avion s'élève, il doit avoir plus de portance que de poids.

La portance d'un avion provient de ses ailes. C'est la forme des ailes d'un avion qui lui permet de voler. La partie supérieure de l'aile d'un avion est incurvée, tandis que la partie inférieure est plate. En raison de cette forme, l'air s'écoule plus rapidement sur le dessus que sous le dessous. Par conséquent, la pression de l'air est moindre sur le dessus de l'aile. L'aile, ainsi que l'avion auquel elle est reliée, se déplace vers le haut. En raison de cette situation de nombreux avions utilisent des courbes pour ajuster la pression de l'air [4].

I.4.3. Trainée

Lorsque l'avion se déplace dans l'air, une autre force aérodynamique est présente. L'air résiste au mouvement de l'avion et cette force de résistance est appelée traînée. La traînée est dirigée le long de la direction du vol et s'y oppose, de nombreux facteurs influents sur l'ampleur de la force de traînée, notamment la forme de l'avion, l'adhésivité de l'air et la vitesse de l'avion [4].

I.4.4. Poussée

La poussée est la force opposée à la traînée. C'est la poussée qui fait avancer quelque chose. Pour qu'un avion continue à avancer, il doit avoir plus de poussée que de traînée. La poussée d'un petit avion peut provenir d'une hélice. Un avion plus gros peut obtenir sa poussée grâce à des moteurs à réaction. Un planeur n'a pas de poussée. Il ne peut voler que jusqu'à ce que la traînée l'oblige à ralentir et à atterrir [4].

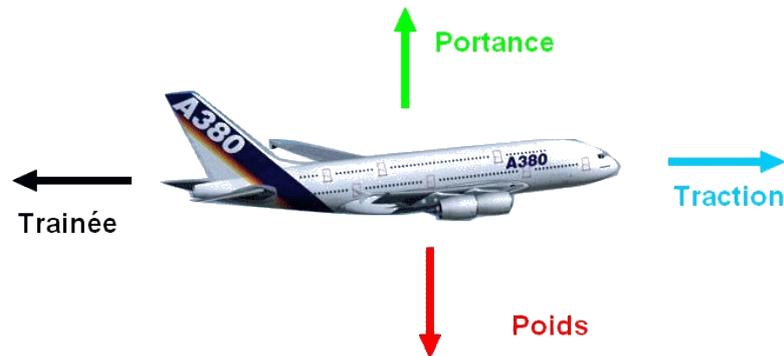


Figure I.1 : Forces appliquées sur l'avion.

I.5. Lois de conservation

Les problèmes d'aérodynamique peuvent être résolus à l'aide des lois de conservation de la dynamique des fluides, dans l'hypothèse d'un continuum fluide. Les trois lois de conservation de l'aérodynamique sont les suivantes :

I.5.1. Conservation de la masse

Le principe de conservation de la masse stipule que la masse ne peut être générée ou détruite Dans un flux; l'équation de continuité de masse est l'articulation mathématique de cette idée [3].

I.5.2. Conservation de la quantité de mouvement

La version mathématique de ce principe pourrait être considérée comme une application de Deuxième loi de Newton. Les forces extérieures, telles que les forces visqueuses, et les forces du corps, telles que le poids, sont les seules choses qui peut modifier l'élan d'un flux. Le principe de conservation de l'élan peut être écrit comme une vectrice équation ou comme combinaison de trois équations scalaires [3].

I.5.3. Conservation de l'énergie

L'énergie n'est ni générée ni détruite à l'intérieur d'un flux, selon l'énergie équation de conservation, et toute addition ou soustraction d'énergie à un volume dans le flux est causée par le transfert de chaleur ou de travail dans et hors de la région préoccupante.

Ces équations sont connues collectivement comme les équations Navier-Stokes, tandis que D'autres auteurs définissent la phrase pour inclure simplement l'équation de moment. Les équations n'ont pas de solution analytique connue et sont résolu par calcul en aérodynamique de courant. Parce que les méthodes de calcul à grande vitesse n'étaient pas accessibles auparavant, et le coût de calcul élevé de résoudre ces équations compliquées maintenant qu'ils sont, les simplifications des équations de Navier-Stokes ont été et continuent d'être utilisées. Les équations d'Euler sont une collection d'équations de conservation comparables qui ignorent la viscosité et peuvent être employées quand l'influence de La viscosité devrait être mineure. D'autres réductions résultent de l'équation de Laplace et de la théorie de l'écoulement potentiel. De plus, l'équation de Bernoulli est une solution unidimensionnelle à la fois aux équations de Moment et d'économie d'énergie. La loi du gaz idéal ou un autre type d'équation d'état est fréquemment utilisé en conjonction avec ces équations pour construire un système déterminé qui permet la solution pour les variables inconnues [3].

I.6. Flux incompressibles ou compressibles

L'aérodynamique compressible et incompressible est des sous-domaines de l'aérodynamique qui se concentrent sur l'étude du comportement des fluides, tels que l'air, lorsqu'ils sont en mouvement autour d'objets solides.

L'aérodynamique incompressible concerne principalement les écoulements où la densité du fluide reste constante, et où la vitesse est inférieure à environ un tiers de la vitesse du son. Les écoulements incompressibles sont souvent étudiés dans des applications de faible vitesse, telles que la conception de voitures, d'ailes d'avion et de bateaux, ainsi que dans les applications hydrauliques.

En revanche, l'aérodynamique compressible concerne les écoulements où la densité du fluide Varie, et où la vitesse est supérieure à environ un tiers de la vitesse du son. Les écoulements compressibles sont souvent étudiés dans des applications de haute vitesse, telles que les avions supersoniques, les missiles et les véhicules spatiaux.

L'aérodynamique compressible est beaucoup plus complexe que l'aérodynamique Incompressible en raison des variations de densité qui peuvent entraîner des effets tels que la compression des ondes de choc et l'expansion des ondes de détente [5].

I.7. Régime de nombre de Mach

Le nombre de Mach M est une mesure sans dimension de la vitesse d'un objet par rapport à la vitesse du son dans le milieu environnant. En aérodynamique, le nombre de Mach est utilisé pour décrire la vitesse de l'écoulement d'air et est utilisé pour définir différents régimes d'écoulement. Les principaux régimes d'écoulement en fonction du nombre de Mach sont :

I.7.1. Écoulement subsonique

$M < 1$ Dans un écoulement subsonique, la vitesse de l'écoulement d'air est inférieure à la vitesse du son. L'écoulement est régulier et l'air circule en dessus et en dessous de l'objet en mouvement sans former de choc. Les avions de ligne volent à des vitesses subsoniques, généralement autour de Mach 0,8 [5].

I.7.2. Écoulement transsonique :

$0,8 < M < 1,2$ Dans un écoulement transsonique, la vitesse de l'écoulement d'air est proche de la vitesse du son. Cela peut entraîner la formation d'ondes de choc autour de l'objet en mouvement, ce qui peut augmenter la résistance de l'air et affecter la stabilité de l'objet. Les avions de chasse volent souvent à des vitesses transsoniques [5].

I.7.3. Écoulement supersonique :

$1,2 < M < 5$ Dans un écoulement supersonique, la vitesse de l'écoulement d'air est supérieure à la vitesse du son. Cela peut entraîner la formation d'ondes de choc, qui peuvent causer des perturbations importantes de l'écoulement d'air et augmenter la résistance. Les avions supersoniques tels que le Concorde volent à des vitesses supersoniques [5].

I.7.4. Écoulement hypersonique :

$M > 5$ Dans un écoulement hypersonique, la vitesse de l'écoulement d'air est très supérieure à la vitesse du son. Les écoulements hypersoniques sont souvent très instables et peuvent générer des ondes de choc multiples. Ces écoulements sont importants pour la

conception de véhicules spatiaux, tels que les navettes spatiales, qui doivent traverser l'atmosphère terrestre à des vitesses très élevées [5].

I.8. Conclusion

Ce chapitre a présenté les principes fondamentaux de l'aérodynamique, y compris les propriétés des fluides, les lois de conservation de la masse et de l'énergie, et la dynamique des fluides. Nous avons examiné comment ces principes s'appliquent aux problèmes de l'aérodynamique, tels que la portance et la traînée dans les avions, Enfin, nous avons également exploré les différents régimes d'écoulements de l'aérodynamique.

Chapitre II
Caractéristiques
aérodynamiques et
géométriques d'ailes d'avion
et leurs profils

Caractéristiques aérodynamiques et géométriques d'ailes d'avion et leurs profils

II.1. Introduction

Une aile se désigne par son profil. De ce profil découle la portance R_z et la traînée R_x mais aussi la finesse de l'aile et quelques autres paramètres dont nous parlerons plus tard.

II.2. Ailes d'avion

Une aile est le principal élément incurvé attaché au fuselage d'un avion, c'est une structure aérodynamique qui génère la portance lorsqu'elle est en mouvement dans un fluide. Elle est définie par sa surface de référence est son envergure [6].

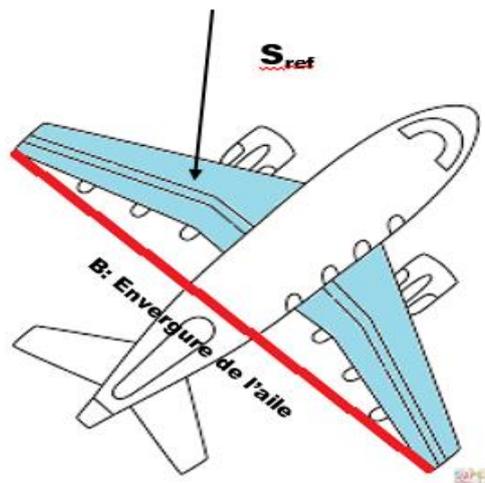


Figure II.1 : Schéma représentatif de l'aile.

On définit également l'allongement d'une aile noté λ qui est égale au carré de l'envergure divisé par la surface de référence [6].

$$\lambda = \frac{b^2}{S_{ref}} \quad (\text{II.1})$$

II.3. Principales composantes d'une aile d'avion

- 1) Ailette verticale marginale (Winglet en anglais)
- 2) Aileron basse vitesse
- 3) Aileron haute vitesse
- 4) Rail de glissement des volets
- 5) Becs de bord d'attaque de type Kruger
- 6) Becs de bord d'attaque de type slats
- 7) Volets intérieurs de type Fowler
- 8) Volets extérieurs de type Fowler
- 9) Spoilers (destructeur de portance)
- 10) Spoilers / Aérofreins

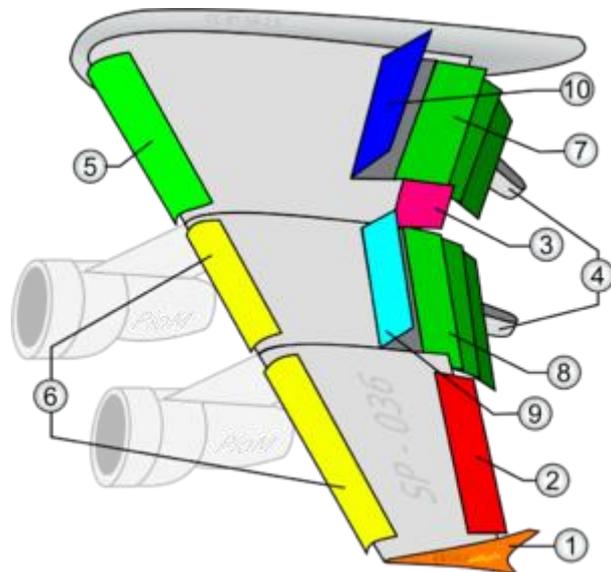


Figure II.2 : Composition d'une aile d'avion [7].

II.4. Formes géométrique des ailes

Il existe de nombreuses formes d'ailes, comme les ailes droites, ailes elliptiques, ailes trapézoïdales pour le régime subsonique, ailes en flèche et en delta pour le régime supersonique. Quelques exemples les plus classiques de formes d'ailes [8] :

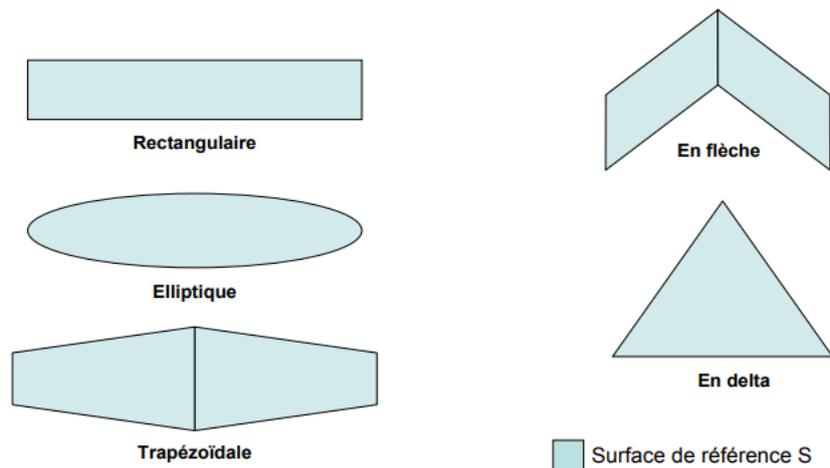


Figure II.3 : Différentes formes d'aile d'Avion [8].

II.5. Profil d'une aile d'avion

Un profil d'aile est un contour géométrique. C'est la forme d'une section de l'aile suivant un plan parallèle au plan de symétrie de l'avion.

La forme du profil d'une aile influe grandement sur les caractéristiques aérodynamiques et les performances d'un avion.

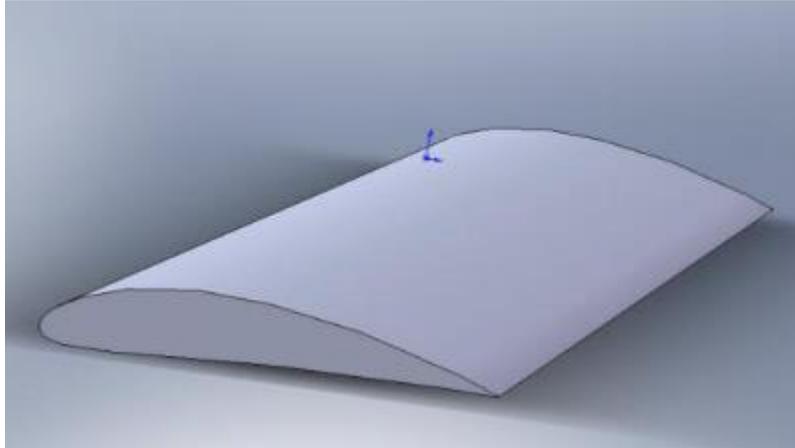


Figure II.4 : Profil d'aile [9].

II.6. Caractéristiques géométriques d'un profil :

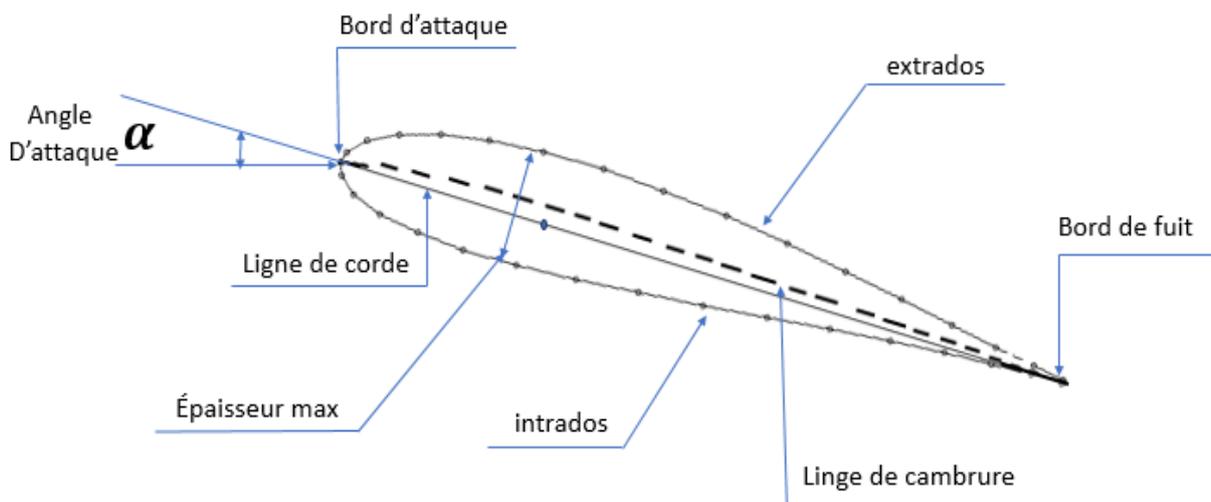


Figure II.5 : Géométrie du profil.

- **la corde** d'un profil (chord line) est le segment de ligne reliant le bord d'attaque (leading edge) et bord de fuite (Trailing edge).
- **L'épaisseur maximale** d'un profil (thickness) est la distance maximale entre l'extrados (upper Wing surface) et l'intrados (Lower Wing surface).
- **La ligne moyenne de cambrure** (Mean camber line) est le lieu des points équidistants de l'extrados et l'intrados. Cette ligne est généralement courbée ou cambrée.
- **La Flèche** (camber max) est la distance maximale entre la corde et la ligne moyenne du profil. Elle définit donc sa courbure.

- **L'angle d'incidence** (notée i en français et α en anglais) correspond à l'angle entre la corde de profil et la direction du vent relatif (trajectoire de l'aéronef). Cet angle varie au cours du vol. Lorsque l'incidence augmente la portance augmente jusqu'à un angle maximal appelé angle critique [10].

II.7. Désignation d'un profil

II.7.1. Famille des profils NACA

Avant la NASA, l'organisation qui l'a précédée était le NACA (National Advisory Committee for Aeronautics). Ce dernier a mené des études sur plusieurs familles de profils qui ont été utilisées pour différentes applications. Parmi ces familles, on peut distinguer celles à quatre chiffres, à cinq chiffres et les profils laminaires [1].

a. NACA à quatre chiffres :

Dans cette famille, on identifie un profil par quatre chiffres, le premier spécifiant la cambrure relative maximale en pourcentage de la corde, le deuxième indiquant la position de cette cambrure en pourcentage de la corde et les deux derniers chiffres représentant l'épaisseur relative maximale, toujours en pourcentage de la corde par exemple.

NACA 2412 : Le premier chiffre (2) représente la cambrure relative maximale en pourcentage de la corde, le deuxième chiffre (4) représente la position de la cambrure 40%. Les deux derniers chiffres (12) indiquent l'épaisseur maximale en pourcentage par rapport à la corde [1].

NACA 0012 : Est un profil symétrique, d'épaisseur maximum 12%.

b. NACA cinq chiffres

Dans cette famille, cinq chiffres caractérisant chaque profil. Par exemple NACA 230-12 : Le premier chiffre (2) indique la valeur de la flèche maximale en pourcentage par rapport à la corde. Le deuxième et le troisième chiffre 30% le double de la distance du bord d'attaque à la position de la flèche maximale en pourcentage par rapport à la corde. Les deux derniers chiffres (12) indiquent l'épaisseur maximale en pourcentage de la corde [1].

c. Profils laminaires

Le NACA a également étudié une série de profils dont l'écoulement est laminaire sur une majeure partie de sa surface et les a désignés par un ensemble de chiffres significatifs. Par exemple pour NACA 662-215 :

- Le premier 6 représentent la désignation de la série (profil laminaire).

- Le deuxième 6 représentent la position de la pression minimale 60%.
- L'indice 2 est la marge au-dessus et au-dessous du coefficient de portance caractéristique pour laquelle il existe un gradient de pression favorable (0,2).
- Le 15 représente l'épaisseur relative maximale 15% [1].

II.7.2. Classement des profils

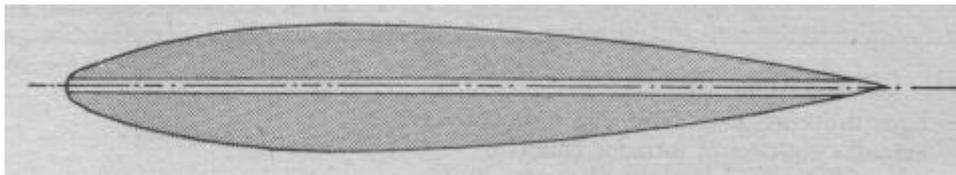
- Profil mince : $e < 6\%$.
- Profil semi-épais : $6\% < e < 12\%$.
- Profil épais : $e > 12\%$.
- Profil concorde : $e = 3\%$ à l'encastrement et 1.82% à l'extrémité.
- Les différents profils sont classés en deux catégories, selon leurs formes géométriques ou selon leurs épaisseurs

II.7.3. Type des profils

Différents types de profils peuvent être utilisés en fonction des applications envisagées [11].

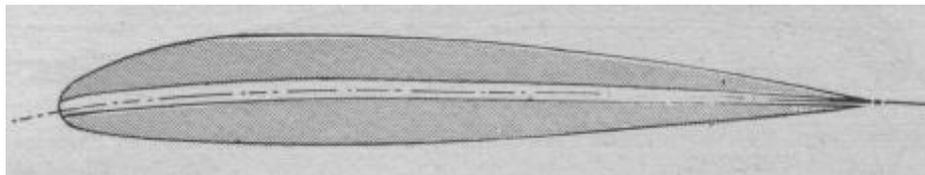
a. Biconvexe symétrique

Les profils symétriques se distinguent par le fait que leur ligne médiane et leur corde se rejoignent. En d'autres termes, l'extrados et l'intrados sont symétriques par rapport à la corde.



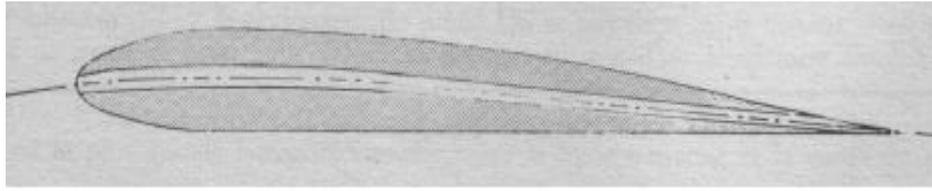
b. Biconvexe dissymétrique

Les biconvexes dissymétriques ont l'extrados plus courbe que l'intrados.



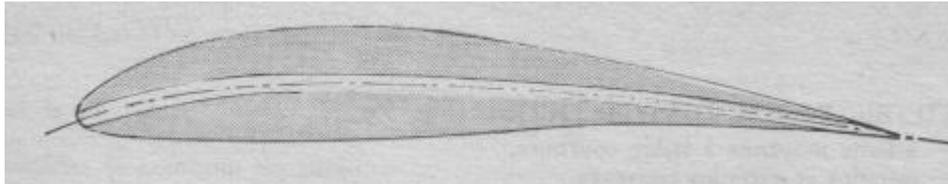
c. Plan convexe

Les profils convexes sont seulement travaillés sur l'extrados, tandis que l'intrados reste plat.



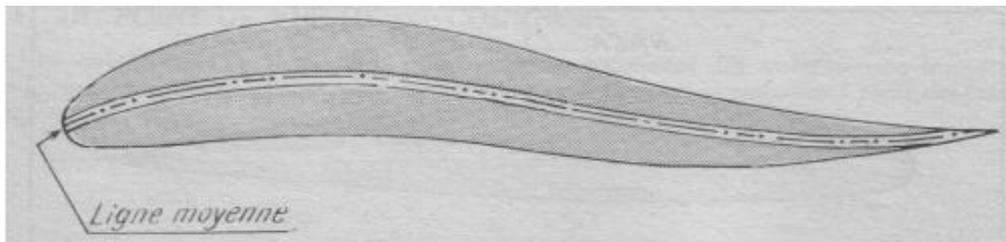
d. Cambrée

La ligne médiane présente une courbure simple, avec l'intrados concave et l'extrados convexe.



e. Double courbure

La ligne moyenne est à double courbure.



II.8. Caractéristiques aérodynamiques d'un profil

II.8.1. Résultante aérodynamique R_a :

La résultante R_a aérodynamique est la somme de toutes les forces aérodynamiques qui agissent sur un objet en mouvement dans l'air. Ces forces incluent la surpression sur l'intrados, la dépression sur l'extrados, et le frottement sur le profil en raison de la viscosité de l'air. La résultante aérodynamique est donc la somme de toutes ces forces, qui agissent ensemble pour influencer le mouvement de l'objet [12].

II.8.2. Composantes de R_a

La résultante aérodynamique R_a se compose de deux forces principales.

La première est la force de portance R_z , qui agit perpendiculairement à la direction de l'écoulement de l'air.

La seconde est la force de traînée R_x , qui agit parallèlement à la direction de l'écoulement de l'air.

Ainsi, la résultante aérodynamique R_a est constituée de ces deux forces principales qui agissent ensemble pour influencer le mouvement de l'objet en mouvement dans l'air [12].

Déterminé par la formule suivante :

$$R = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_R \quad (\text{II.2})$$

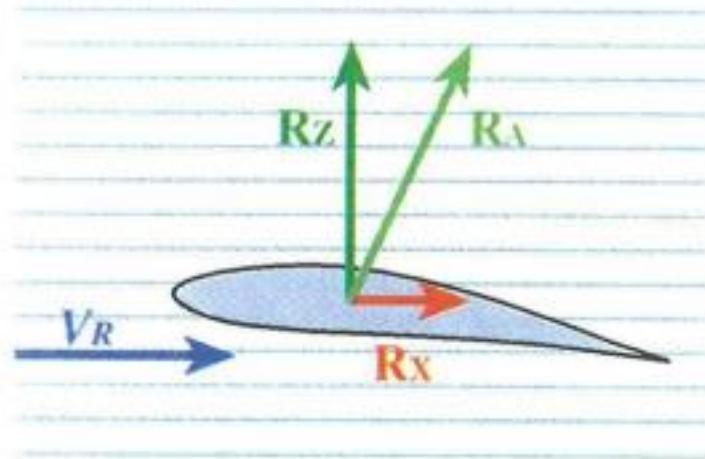


Figure II.6 : la Résultante R_a [12].

II.8.3. Portance :

Lorsqu'un avion est en vol horizontal stable, il est maintenu en l'air grâce à la force de portance, qui est égale et opposée au poids de l'avion [13], Cette force est caractérisée par :

- ✓ Sa direction est perpendiculaire aux flux d'air.
- ✓ Son sens est dirigé de l'intrados (la face inférieure de l'aile) vers l'extrados (la face supérieure de l'aile).
- ✓ Le point d'application au centre de poussée
- ✓ Déterminé par la formule suivante :

$$F_z = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_z \quad (\text{II.3})$$

F_z : Force de la portance (en newton)

ρ : air : Masse volumique de l'air (en kg/m^3)

V : Vitesse de déplacement (en m/s)

S : Surface de référence (en m^2)

C_z : Coefficient de portance

II.8.4. Trainé :

La force qui agit contre le mouvement de l'avion à travers l'air est appelée la force de traînée. Lorsque l'avion est en vol horizontal stable, cette force est directement opposée à la poussée générée par le moteur [13].

- ✓ Sa direction est parallèle aux filets d'air
- ✓ Son sens est dirigé du bord d'attaque au bord de fuite
- ✓ La traînée s'applique au centre de poussée
- ✓ expression est donnée par:

$$F_x = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_x \quad (\text{II.4})$$

F_x : Force de la traînée (en newton)

ρ : air : Masse volumique de l'air (en kg/m³)

V : Vitesse de déplacement (en m/s)

S : Surface de référence (en m²)

C_x : Coefficient de traînée

II.9. Étude du coefficient de portance

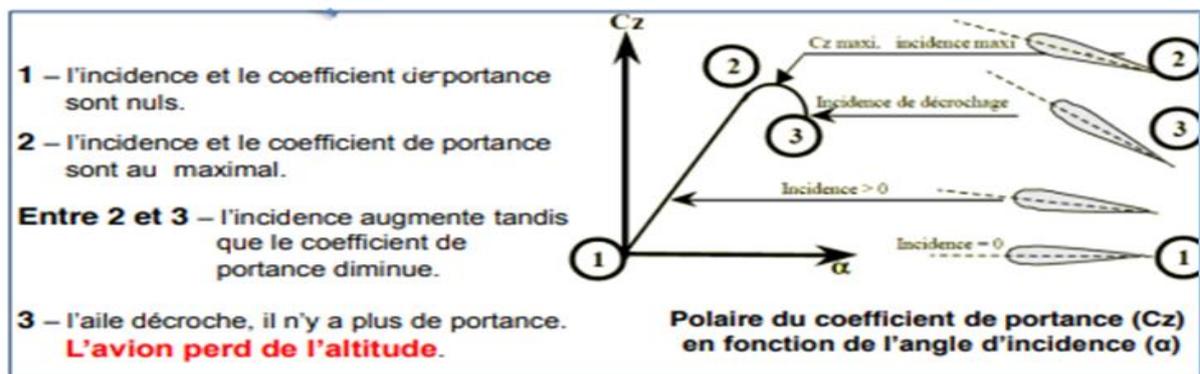
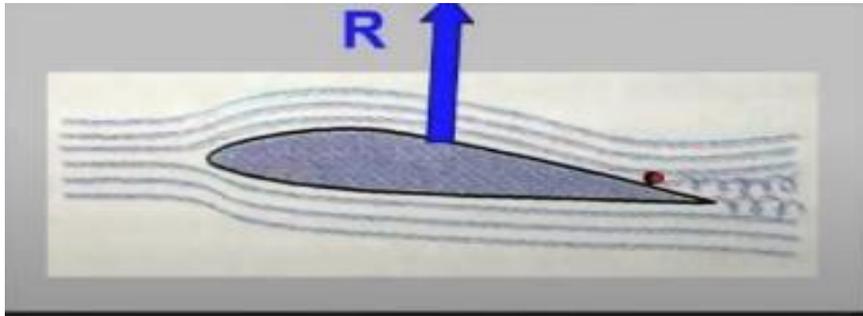


Figure II.7 : Courbe du C_z [14].

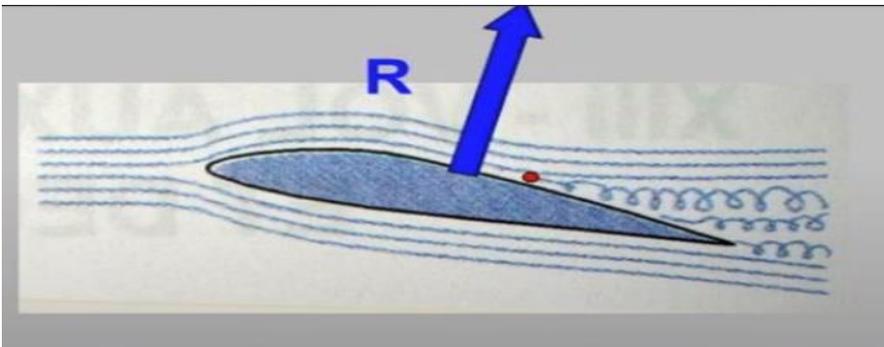
Le coefficient de portance, C_z , évolue en fonction de l'incidence donc ils augmentent avec l'augmentation de l'incidence mais cela jusqu'à une certaine valeur entre 15 et 18 degrés donc l'angle critique ou après l'effet d'air se décroche de l'extrados donc c'est le décrochage.

II.10. Le décrochage

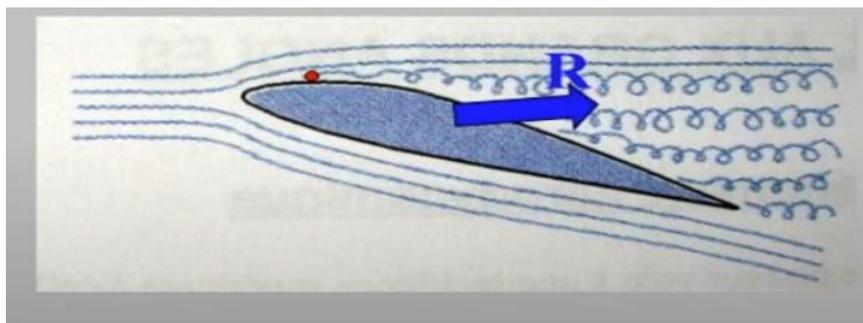
Le décrochage se produit quand l'angle d'incidence dépasse une valeur maximale, ce qui provoque une diminution de la portance.



En vol normal l'incidence est légèrement supérieure à zéro ($\alpha > 0$) on voit que les filets d'air collent au profil, ils sont laminaire.



Lorsque l'incidence augmente les filets d'air proche du bord de fuite commencent à être perturbé et se décolle de l'aile, le point de d'écoulement des flux recule est le flux devient turbulent et tourbillonnaire.



Un moment donné l'incidence atteint une valeur limite celle que l'on a vue sur le graphique précédent et là les filets d'air sont totalement décoller sur l'extrados c'est ce que l'on appelle le décrochage [15].

II.11. Étude du coefficient de traînée

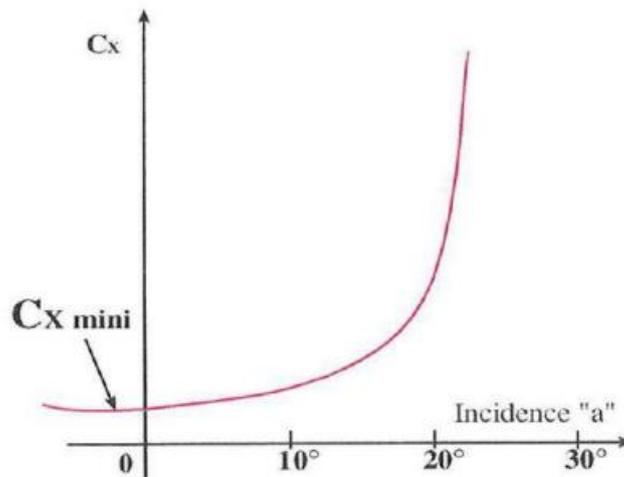


Figure II.8 : Courbe du C_x [12]

En observant le schéma ci-dessus, on peut constater que le coefficient de traînée ne prend jamais une valeur nulle. Cela signifie que l'aile crée toujours une force de résistance à l'air, peu importe l'angle d'incidence de l'aile.

3 phénomènes contribuent à la traînée [16] [17] :

➤ Trainée de frottement

Est due au frottement de l'air sur la surface de l'objet. Les surfaces lisses sont préférées aux surfaces rugueuses ou irrégulières pour permettre aux filets d'air de "s'accrocher" au corps et ne pas se décoller.

➤ Trainée de forme

Provient du détachement des filets d'air de l'objet à l'arrière. Lorsque l'objet avance, l'air s'écoule autour de lui en l'"accrochant", mais les filets d'air ont tendance à se décrocher à l'arrière de l'objet.

➤ Trainée d'onde

Est due au passage à des vitesses supersoniques. Lorsqu'un objet (comme un avion ou une fusée) atteint la vitesse du son, une onde de choc se produit en avant de l'objet, créant une surpression qui ralentit considérablement l'objet. Atteindre de telles vitesses nécessite une énergie considérable.

II.12. Polaire

Est une courbe essentielle qui représente l'évolution de la résultante, Elle montre comment la portance et la traînée change en fonction de l'angle d'incidence. C'est une fonction faite en assemblant deux courbes de traînée C_x (CD) et de portance C_z (CL) à l'aide d'une opération mathématique [18].

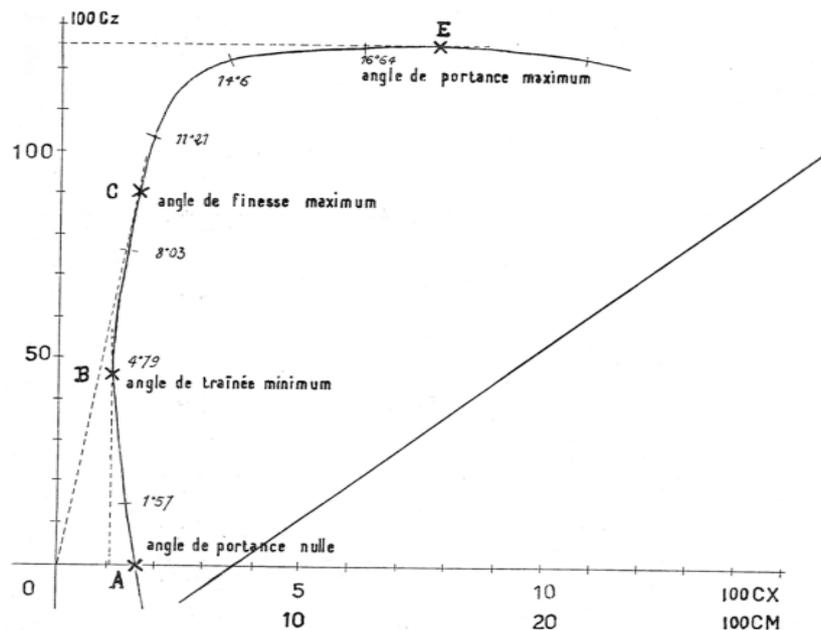


Figure II.9 :Points remarquables de la polaire [19].

II.13. Finesse

C'est le rapport entre la portance et la traînée (C_z/C_x), Il y a un point où le rapport optimal entre la portance et la traînée est atteint, ce qui est connu sous le nom de finesse maximale [x]. L'objectif principal de l'aérodynamique est d'atteindre une bonne finesse, ce qui peut être obtenu en augmentant la portance ou en réduisant la traînée [14].

$$finesse = \frac{C_z}{C_x} \quad (II.5)$$

II.14. L'utilité de l'hypersustentation

L'hypersustentation est une technique utilisée en aérodynamique pour augmenter la portance d'un avion pendant le décollage et l'atterrissage. Cette technique permet d'augmenter la force de portance sans augmenter la vitesse de l'avion, ce qui est essentiel pour les avions qui

décollent et atterrissent sur des pistes courtes, Parmi Les différentes formes de volets hypersustentateurs (volets de bord de fuite et bec de bord d'attaque) [20].



Figure II.10 : Les dispositifs hypersustentateurs de bord d'attaque, et de bord de fuite [20].

L'équation de la sustentation :
$$mg = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_z \quad (\text{II.6})$$

II.15. Détermination du profil d'aile

On peut détermine un profil d'aile en utilisant des transformations conformes qui ont la capacité de transformer un cercle en un profil aérodynamique. Ces transformations sont définies par des variables complexes.

II.15.1. Transformation de JOUKOWSKI

La fonction de transformation de joukowski est définie par :

$$Z = F(z) = z + \frac{a^2}{z} \quad (\text{II.7})$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} Z = X + iY \\ z = x + iy \end{cases}$$

II.15.2. Transformation de VON-MISES

C'est une forme spécifique de séries complexes qui se composent d'un nombre limité de termes. Elle définit par la formule suivante :

$$Z = F(z) = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_n}{z^n} \quad (\text{II.8})$$

II.15.3. Transformation de KARMANN-TREFFETZ

Généralisation de la transformation conforme de Joukovski

$$\left(\frac{z-a}{z+a}\right)^p = \frac{z-a}{z+a} \quad (\text{II.9})$$

Avec
$$p = 2 - \frac{t}{\pi}$$

t : angle formé par les deux tangentes au bord de fuite du profil.

z et a : sont deux complexes arbitraires.

II.16. Méthodes de résolution

La théorie des variables complexe fournit une solution très efficace pour écoulement potentiel d'un fluide incompressible [20].

Le potentiel est défini comme suit :

$$F(z) = \Phi(X, Y) + i\Psi(x, y) \quad (\text{II.10})$$

Avec : $Z = X + iY$

Φ : potentiel complexe

Ψ : la fonction de courant

Le calcul de potentiel complexe est basé sur trois méthodes :

II.16.1. Méthodes analytiques

La méthode analytique permet de trouver des solutions correspondantes avec une complexité potentiellement analytique.

Parmi les méthodes analytiques, on distingue la méthode transformation conforme largement utilisée en aérodynamique [21].

II.16.2. Méthodes numériques :

Il existe différentes méthodes numériques pour résoudre les écoulements autour de profils, en discrétisant les équations différentielles qui régissent ces écoulements [21].

II.16.3.Méthodes des singularités :

Pour décrire un écoulement autour d'un obstacle, on utilise souvent la méthode de superposition de potentiel complexe. Cette méthode consiste à ajouter à l'écoulement uniforme non perturbé des termes qui traduisent la présence de l'obstacle. Pour cela, on utilise une combinaison d'écoulements élémentaires tels que des sources, des vortex ou des doublets, qui permettent de simuler la présence de l'obstacle [21].

II.16.4.Méthodes empiriques :

La méthode empirique repose sur l'expérimentation pour obtenir des résultats et établir des modèles [21].

II.17. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons identifié les différents profils aérodynamiques, en décrivant leurs caractéristiques et nous avons également abordé les méthodes de résolution des problèmes liés aux écoulements autour de ces profils.

Chapitre III

Ecoulements potentiels et la transformation conforme

Écoulements potentiels et la transformation conforme

III.1. Introduction

Ce chapitre aborde le modèle d'écoulement potentiel qui est un modèle très utile pour caractériser un écoulement autour d'une aile, et les transformations conformes que nous utilisons par la suite dans notre étude théorique menant à la détermination d'un profil d'aile cambré de type Joukowski.

III.2. Écoulement potentiel

L'écoulement potentiel est caractérisé par un écoulement irrotationnel et incompressible, autrement dit, si son champ de vitesse dérive d'un potentiel.

Il existe plusieurs types d'écoulements potentiels, notamment l'écoulement potentiel uniforme, l'écoulement potentiel source et puits, l'écoulement potentiel tourbillonnaire et l'écoulement potentiel doublet. Ces différents types d'écoulements peuvent être combinés pour créer des modèles plus complexes et plus réalistes de l'écoulement des fluides.

III.2.1. Écoulement irrotationnel – potentiel des vitesses

Le champ de vitesse $\vec{V}(x,y)$ de composantes $u(x,y)$ et $v(x,y)$ dérive d'une fonction $\phi(x,y)$, appelée potentiel des vitesses.

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi \quad (\text{III.1})$$

Le vecteur vitesse s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{V} = \begin{cases} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

L'écoulement est irrotationnel quand il n'y a pas de rotation de la particule fluide si :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = \vec{0} \quad (\text{III.3})$$

Le vecteur rotationnel s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (\text{III.4})$$

Tenant compte de la relation (III.1) dans (III.3), on obtient :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}\phi) = \vec{0} \quad (\text{III.5})$$

C'est-à-dire que l'écoulement est irrotationnel.

III.2.2. Fonction de courant

L'écoulement est incompressible quand il n'y a pas de variation de volume de la particule de fluide si :

$$\text{div}(\vec{V}) = 0 \quad (\text{III.6})$$

Définit dans un repère cartésien des composante $u(x, y)$ et $v(x, y)$:

$$\text{div}(\vec{V}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.7})$$

Il existe une fonction de courant $\psi(x, y)$, et définie par

$$\vec{V} = \begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

Tenant compte de la relation (III.8) dans (III.7), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \quad (\text{III.9})$$

On montre que $\Psi = \text{constante}$ équation des lignes de courant, si elle vérifie l'équation de

Laplace $\Delta \psi = 0$

III.2.3. Potentiel complexe

Pour un certain type d'écoulement, il est possible d'introduire des variables complexes pour faciliter la résolution du problème d'écoulement.

La variable complexe ne peut être utilisée que si l'écoulement irrotationnel et bidimensionnel et exprimable dans le système de coordonnées cartésiennes (x, y) au polaires (r, θ) , c'est-à-dire que $\nabla^2 \psi = 0 = 0$ et $\nabla^2 \phi = 0$. La variable complexe ne peut être utilisée dans aucun autre système de coordonnées.

Étendre le système des nombres réels en incluant $i = \sqrt{-1}$. Nous considérons alors des nombres de la forme $z = x + iy$ représentent des points du plan (x, y) .

$$\text{Avec : } z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (\text{III.10})$$

Pour une fonction complexe

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (\text{III.11})$$

Solons les conditions de Cauchy-Riemann, si $f(z)$ est analytique alors

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{III.12})$$

Inversement, si une fonction $f(z) = u + iv$. Satisfait les conditions de Cauchy-Riemann, alors (f) peut être écrit en fonction de (z) uniquement.

Lorsque ψ et ϕ sont liés par les relations (III.2) et (III.8), il est possible de former une fonction en tant que combinaison linéaire de ψ et ϕ , et de l'appeler le potentiel complexe.

$$f(x, y) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (\text{III.13})$$

Cependant, comme ψ et ϕ satisfont les conditions de Cauchy-Riemann, on peut représenter $f(x, y)$ comme $f(z)$

$$f(z) = \phi + i\psi \quad (\text{III.14})$$

III.2.4. Vitesse complexe

Si $f(z) = \phi + i\psi$

$$\zeta = \begin{cases} \frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = u - iv \\ \frac{df}{dz} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \frac{i}{i^2} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = -iv + u \end{cases} \quad (\text{III.15})$$

Donc la vitesse complexe elle est définit par

$$\zeta = u + iv \quad (\text{III.16})$$

III.3. Type d'écoulement

III.3.1. Ecoulement uniforme

Considérons l'écoulement plan modélisé par le potentiel complexe des vitesses.

$$f(z) = V_0 z = V_0 re^{i\theta} \quad (\text{III.17})$$

On a alors $\phi(x, y) + i\psi(x, y) = V_0 (x + iy) = V_0 x + iV_0 y$

$$\text{Par identification} \quad \begin{cases} \phi(x, y) = V_0 x \\ \psi(x, y) = V_0 y \end{cases} \quad (\text{III.18})$$

Les lignes de courant sont telles que : $\psi(x, y) = V_0 y = C^{te}$

$\Rightarrow y = C^{te} \forall x$ Ce sont des droites horizontales.

Les équipotentiels sont telles que : $\phi(x, y) = V_0 x = C^{te}$

$\Rightarrow x = C^{te} \quad \forall y$ Ce sont des droites verticales.

Détermination du champ de vitesses :

$$\vec{\zeta} = \begin{cases} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = V_0 \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

La vitesse est uniforme : $\vec{\zeta} = V_0 \vec{e}_x$ (III.19)

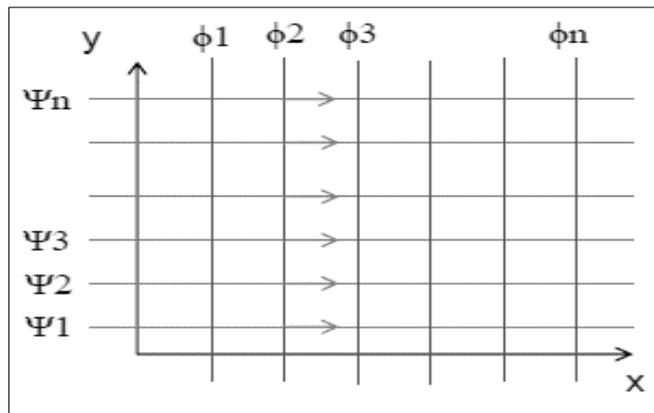


Figure III.1 : Ecoulement uniforme.

III.3.2. Ecoulement source ou puit

Considérons l'écoulement plan modélisé par le potentiel complexe des vitesses

$$f(z) = \frac{+}{-} V_0 \ln z = \frac{+}{-} V_0 \ln(re^{i\theta}) = \frac{+}{-} V_0 (\ln r + i\theta) \tag{III.20}$$

On a alors $\phi(r, \theta) + i\psi(r, \theta) = \frac{+}{-} V_0 (\ln r + i\theta)$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} \phi(r, \theta) = V_0 \ln r \\ \psi(r, \theta) = V_0 \theta \end{cases} \tag{III.21}$$

Les lignes de courant sont telles que : $\psi(r, \theta) = V_0 \theta = C^{te}$

$\Rightarrow \theta = C^{te} \quad \forall r$ Ce sont des droites passant par l'origine.

Les équipotentiels sont telles que : $\phi(r, \theta) = V_0 \ln r = C^{te}$

$\Rightarrow r = C^{te} \quad \forall \theta$ Ce sont des cercles concentriques centrés sur l'origine.

Détermination du champ de vitesses :

$$\vec{\zeta} = \begin{cases} V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{V_0}{r} \\ V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \end{cases}$$

$$D'où : \vec{\zeta} = \frac{V_0}{r} \vec{e}_r \Rightarrow \begin{cases} \text{si } V_0 > 0 \Rightarrow \text{source à l'origine} \\ \text{si } V_0 < 0 \Rightarrow \text{puits à l'origine} \end{cases} \quad (\text{III.22})$$

$$\text{Le débit est donné par : } q = 2\pi r V_r = 2\pi V_0 \rightarrow V_0 = \frac{q}{2\pi} \quad (\text{III.23})$$

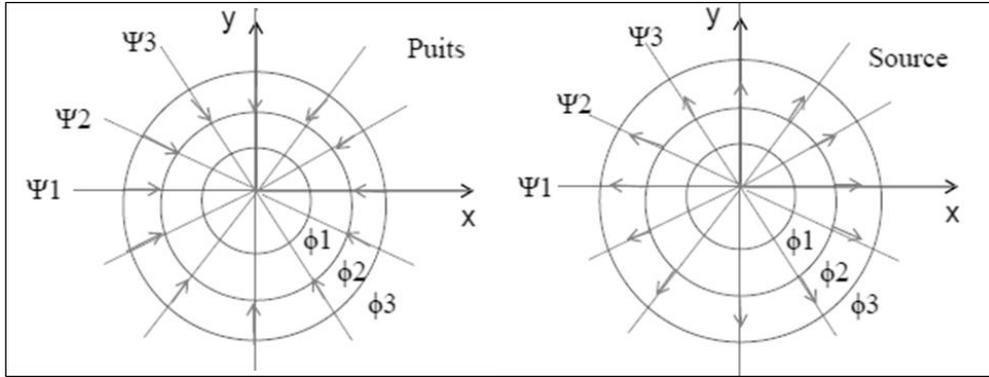


Figure III.2 : Écoulement source et puits.

III.3.3. Écoulement Doublet et dipôle

Par la superposition de ces deux écoulements « source et puits », on obtient des écoulements plus évolués, et ceci par simple addition des potentiels complexes correspondants.

a. Écoulement doublet

Considérons l'association d'un puits et source au sein d'un même écoulement plan, avec une source de débit (+q), en $x = a$ et $y = 0$, et le puits de débit (-q) en $x = -a$ et $y = 0$.

$$f(z) = +\frac{q}{2\pi} \ln(z - a) - \frac{q}{2\pi} \ln(z + a) \quad (\text{III.24})$$

$$\text{Posons } \Rightarrow \begin{cases} z_1 = z + a = r_1 e^{i\theta_1} \\ z_2 = z - a = r_2 e^{i\theta_2} \end{cases} \quad D'où \quad f(z) = \frac{q}{2\pi} (\ln z_1 - \ln z_2) = \frac{q}{2\pi} \left[\ln \frac{r_1}{r_2} + i(\theta_1 - \theta_2) \right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} \\ \psi = \frac{q}{2\pi} (\theta_1 - \theta_2) \end{cases} \quad (\text{III.25})$$

Et donc, les lignes de courant sont telles que : $\psi = \frac{q}{2\pi} (\theta_1 - \theta_2) = C^{te}$

$\Rightarrow \theta_1 - \theta_2 = C^{te}$ Les lignes de courant sont des cercles, les équipotentielle sont également des cercles.

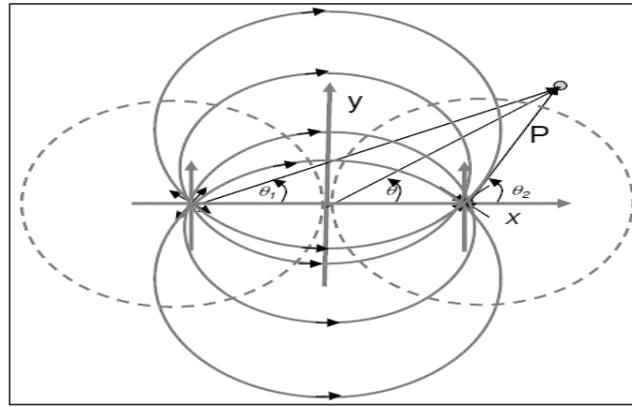


Figure III.3: Ecoulement Doublet.

b. Ecoulement dipôle

Faisons tendre la distance (a) entre la source et le puits vers 0.

$$f(z) = +\frac{q}{2\pi} \ln(z-a) - \frac{q}{2\pi} \ln(z+a) = \frac{q}{2\pi} \ln\left(\frac{z(1-a/z)}{z(1+a/z)}\right) = \frac{q}{2\pi} \ln\left(\frac{(1-a/z)}{(1+a/z)}\right) \tag{III.26}$$

Ou $\frac{1}{1+a/z} \xrightarrow{a \rightarrow 0} 1 - a/z$

Donc $f(z) \approx \frac{q}{2\pi} \ln\left[\left(1 - a/z\right)^2\right] \approx \frac{q}{2\pi} 2\left(-\frac{a}{z}\right) = -\frac{1}{2\pi} \frac{2aq}{z}$ (III.27)

Posons $\Rightarrow \begin{cases} 2aq = k \rightarrow \text{le moment dipolaire} \\ z = re^{i\theta} \end{cases}$

$$f(z) = -\frac{k}{2\pi z} = -\frac{k}{2\pi r} e^{-i\theta} = -\frac{k}{2\pi r} (\cos\theta - i \sin\theta) \tag{III.28}$$

D'où $\begin{cases} \phi = -\frac{k}{2\pi r} \cos\theta \\ \psi = \frac{k}{2\pi r} \sin\theta \end{cases}$ (III.29)

Les lignes de courant et les équipotentielle sont des cercles, et passant tous par l'origine.

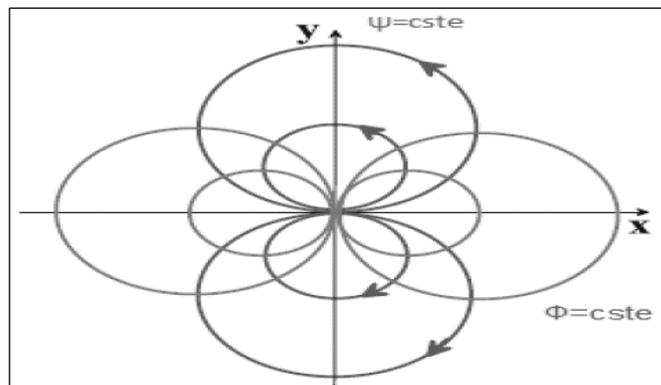


Figure III.4: Ecoulement dipôle.

III.3.4. Ecoulement tourbillonnaire

Considérons l'écoulement plan modélisé par le potentiel complexe des vitesses :

$$f(z) = \frac{V_0}{i} \ln z = \frac{V_0}{i} \ln(re^{i\theta}) = \frac{V_0}{i} (\ln r - i\theta) \quad (\text{III.30})$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} \phi(r, \theta) = V_0 \theta \\ \psi(r, \theta) = V_0 \ln r \end{cases} \quad (\text{III.31})$$

Les lignes de courant sont telles que : $\psi(r, \theta) = V_0 \ln r = C^{\text{te}}$

$\Rightarrow r = C^{\text{te}} \forall \theta$ Ce sont des cercles concentriques centrés sur l'origine.

Les équipotentielles sont telle que : $\phi(r, \theta) = V_0 \theta = C^{\text{te}}$

$\Rightarrow \theta = C^{\text{te}} \forall r$ Ce sont des droites passant par l'origine.

Détermination du champ de vitesses : $\vec{\zeta} = \begin{cases} V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \\ V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{V_0}{r} \end{cases}$

D'où : $\vec{\zeta} = -\frac{V_0}{r} \vec{e}_\theta \Rightarrow \begin{cases} \text{si } V_0 > 0 \Rightarrow \text{sens trigonométrique} \\ \text{si } V_0 < 0 \Rightarrow \text{sens horaire} \end{cases} \quad (\text{III.32})$

La circulation du tourbillon est donnée par :

$$\Gamma = \int \vec{V}_0 \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} -\frac{V_0}{r} (-r d\theta) = 2\pi V_0 \rightarrow V_0 = \frac{\Gamma}{2\pi} \quad (\text{III.33})$$

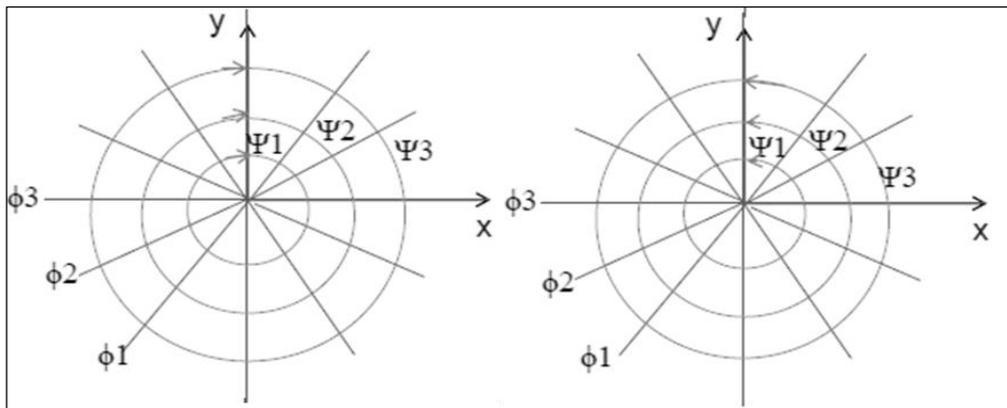


Figure III.5: Ecoulement tourbillonnaire.

III.3.5. Circulation

La circulation de fluide une conception très utile dans le traitement des problèmes en particulier, dans l'analyse aérodynamique.

On aérologique, la circulation du cylindre génère une puissance de portance lorsqu'on ajouté le champ d'écoulement tourbillonnaire, la circulation sera zéro pour n'importe quelle trajectoire fermée autour de n'importe quel nombre de source ou puits.

Elle a défini la circulation Γ comme l'intégrale du champ de vitesse $V(u, v)$ sur la courbe fermée du cylindre.

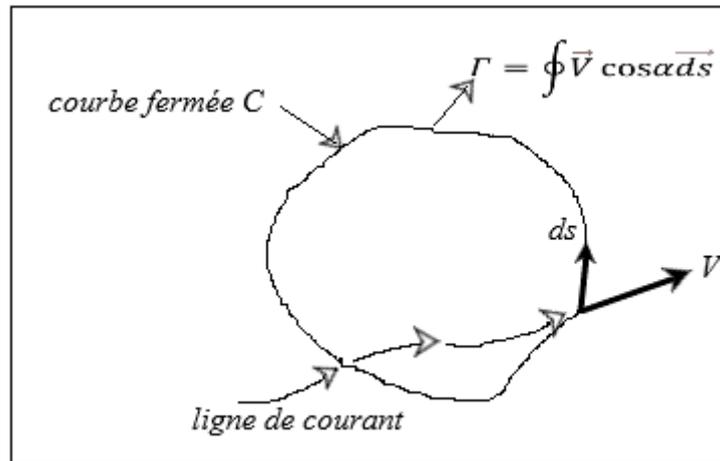


Figure III.6 : Définition de circulation..

$$\Gamma = \oint \vec{V} \cos \alpha d\vec{s} = \int \vec{V} d\vec{s} \quad (\text{III.34})$$

$$\Gamma = \int (u dx + v dy) = \oint d\phi \quad (\text{III.35})$$

III.4. Superposition d'écoulements

La superposition d'écoulement est une méthode utilisée pour calculer un champ d'écoulement potentiel complexe qui consiste à combiner deux ou plusieurs écoulements potentiels simples.

III.4.1. Écoulement autour d'un cylindre sans circulation

La superposition du champ d'écoulement uniforme et dipôle représentant le champ d'écoulement autour d'un cylindre stable sans circulation ne génère pas de force de portance.

$$\begin{aligned} f(z) &= V_0 z + \frac{|k|}{2\pi z} = V_0 r(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{|k|}{2\pi r} e^{-i\theta} \\ &= V_0 r(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{|k|}{2\pi r} (\cos \theta - i \sin \theta) \end{aligned} \quad (\text{III.36})$$

$$= V_0 r \cos \theta \left(1 + \frac{|k|}{2\pi V_0 r^2} \right) + i V_0 r \sin \theta \left(1 - \frac{|k|}{2\pi V_0 r^2} \right) \quad (\text{III.37})$$

$$\text{Par identification : } \Rightarrow \begin{cases} \phi = V_0 r \cos \theta \left(1 + \frac{|k|}{2\pi V_0 r^2} \right) \\ \psi = V_0 r \sin \theta \left(1 - \frac{|k|}{2\pi V_0 r^2} \right) \end{cases} \quad (\text{III.38})$$

Détermination du champ de vitesses :

$$\zeta = \begin{cases} V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = V_0 \cos \theta \left(1 + \frac{|k|}{2\pi V_0 r^2} \right) + V_0 r \cos \theta \frac{|k|}{2\pi V_0 r^3} (-2) = V_0 \cos \theta \left(1 - \frac{|k|}{2\pi V_0 r^2} \right) \\ V_\theta = \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} = -V_0 \sin \theta \left(1 + \frac{|k|}{2\pi V_0 r^2} \right) \end{cases} \quad (\text{III.39})$$

Déterminer les points de stagnation :

Au point de stagnation $V_r = 0$ et $V_\theta = 0$

$$V_\theta = \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} = -V_0 \sin \theta \left(1 + \frac{|k|}{2\pi V_0 r^2} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin \theta = 0 \quad \begin{cases} \theta = 0 \\ \theta = \pi \end{cases}$$

$$V_r = V_0 \cos \theta \left(1 - \frac{|k|}{2\pi V_0 r^2} \right) \begin{cases} \theta = 0 \rightarrow V_r = V_0 \left(1 - \frac{|k|}{2\pi V_0 r^2} \right) = 0 \rightarrow r = \sqrt{\frac{|k|}{2\pi V_0}} \\ \theta = \pi \rightarrow V_r = -V_0 \left(1 - \frac{|k|}{2\pi V_0 r^2} \right) = 0 \rightarrow r = \sqrt{\frac{|k|}{2\pi V_0}} \end{cases}$$

$$\text{Si l'on définit } a = \sqrt{\frac{|k|}{2\pi V_0}} \quad (\text{III.40})$$

Il existe deux points de stagnation dont les coordonnées (r, θ) sont $(a, 0)$ et (a, π)

Pour résumer l'écoulement autour d'un cylindre circulaire de rayon $a = R$

$$\text{Donc : } R = \sqrt{\frac{|k|}{2\pi V_0}} \quad \Rightarrow |k| = R^2 2\pi V_0 \quad (\text{III.41})$$

$$f(z) = V_0 z + \frac{R^2 2\pi V_0}{2\pi z} \quad (\text{III.42})$$

$$f(z) = V_0 \left(z + \frac{R^2}{z} \right) \quad (\text{III.43})$$

$$\text{Avec : } z = re^{i\theta} \quad \Rightarrow \quad f(z) = V_0 \left(re^{i\theta} + \frac{R^2}{r} e^{-i\theta} \right) = \phi + i\psi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi = V_0 \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta \\ \psi = V_0 \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \theta \end{cases} \quad (\text{III.44})$$

La vitesse complexe est donnée par :

$$\zeta = \frac{df(z)}{dz} = V_0 \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right) \quad (\text{III.45})$$

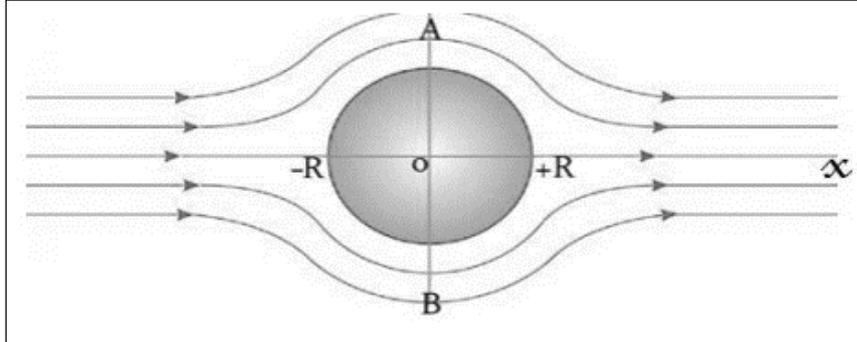


Figure III.7: écoulement autour d'un cylindre sans circulation.

III.4.2. Écoulement autour d'un cylindre avec circulation

Pour obtenir la fonction d'écoulement potentiel complexe autour d'un cylindre circulaire, les fonctions potentielles des champs d'écoulement uniforme, dipôle et tourbillon sont assemblées, ce qui donne la fonction d'écoulement potentiel suivante :

$$f(z) = V_0 \left(z + \frac{R^2}{z} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z) = \phi + i\psi \quad (\text{III.46})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi = V_0 \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta + \frac{\Gamma \theta}{2\pi} \\ \psi = V_0 \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \end{cases} \quad (\text{III.47})$$

La vitesse complexe est donnée par :

$$\zeta = \frac{df(z)}{dz} = V_0 \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi z} \quad (\text{III.48})$$

Les points de stagnation (arrêts) sont donnés par les racines de l'équation du second degré.

Pour $\zeta = 0$ on a :

$$\left[V_0 \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi z} \right] \times \left[\frac{z^2}{V_0} \right] = 0$$

$$z^2 - \frac{i\Gamma}{2\pi V_0} z - R^2 = 0 \quad (\text{III.49})$$

$$\text{Avec : } \Delta = b^2 - 4ac = \frac{-\Gamma^2}{4\pi^2 V_0^2} + 4R^2 \quad (\text{III.50})$$

Après la résolution de l'équation (III.43) on distingue trois cas et le cas le plus important en pratique si $\Delta > 0$: $|\Gamma| < 4\pi V_0 R$

La circulation du cylindre est calculée avec l'angle γ de la vitesse de l'écoulement libre par rapport à l'axe horizontal : $\Gamma = 4\pi V_0 R \sin \gamma$

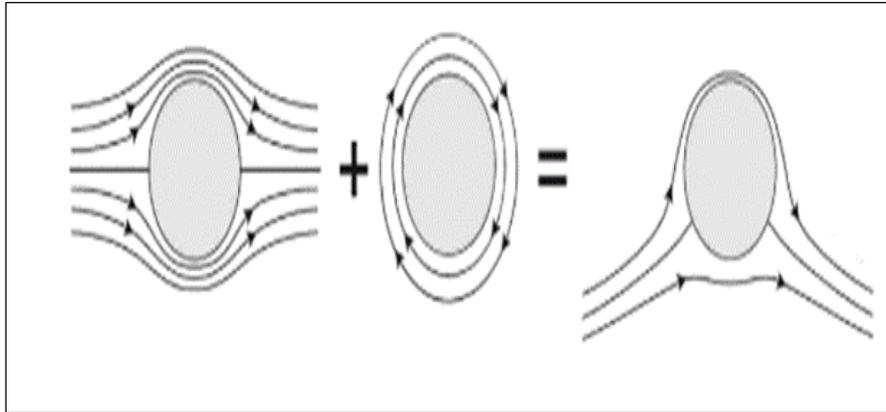


Figure III.8: lignes de courant pour $|\Gamma| < 4\pi V_0 R$ [10].

III.5. Relation de Blasius

Pour un écoulement donné autour d'un corps dont le contour correspond à la ligne de courant $\psi = 0$, on peut déterminer les forces qui agissent sur le corps. On note par R_x la composante sur l'axe O_x de la force résultante et par R_y la composante sur l'axe O_y , et on utilise une variable complexe nommée force complexe définie par :

$$R = R_x - iR_y \quad (\text{III.51})$$

Pour un élément du contour de longueur ds sur lequel la pression est p , les forces élémentaires sur les deux axes de coordonnées sont (Figure III.9) :

$$\begin{cases} dR_x = -p ds \sin \alpha = -p dy \\ dR_y = p ds \cos \alpha = p dx \end{cases} \quad (\text{III.52})$$

La force complexe élémentaire est :

$$dR = dR_x - i dR_y = -i.p(dx - idy) = -i p \overline{dz} \quad (\text{III.53})$$

Où $\bar{dz} = dx - idy$ représente le conjugué complexe de $dz = dx + idy$. Pour trouver la valeur de la pression p , on applique l'équation de Bernoulli :

$$p + \frac{\rho}{2} V^2 = C$$

$$p = C - \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) \quad (\text{III.54})$$

Et la force complexe sera :

$$R = -i \oint_C p \bar{dz} = -i \left[\oint_C C \bar{dz} - \frac{\rho}{2} \oint_C (u^2 + v^2) \bar{dz} \right] = \frac{i\rho}{2} \oint_C (u^2 + v^2) \bar{dz} \quad (\text{III.55})$$

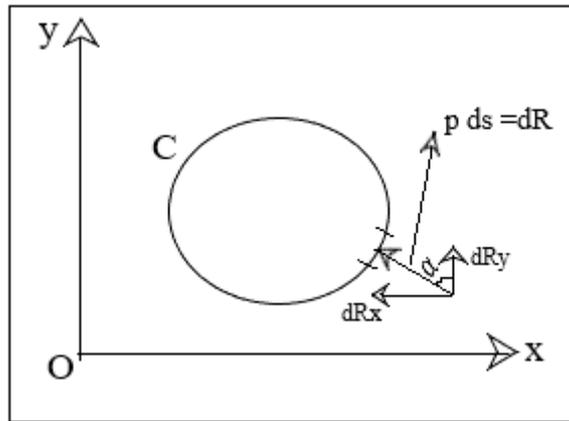


Figure III.9: les efforts exercés sur un corps.

Parce que la première intégrale sur le contour fermé C est nulle. On remplace $u^2 + v^2 = (u + iv)(u - iv)$ et on utilise la relation :

$$(u + iv) \bar{dz} = (u - iv) dz \quad (\text{III.56})$$

Qui existe sur une ligne de courant, pour obtenir la force complexe :

$$R = i \frac{\rho}{2} \oint_C (u - iv)^2 dz$$

$$R = i \frac{\rho}{2} \oint_C w^2(z) dz = i \frac{\rho}{2} \oint_C \left(\frac{df}{dz} \right)^2 dz \quad (\text{III.57})$$

III.6. Transformation conforme

La transformation conforme permet de résoudre l'écoulement autour d'une forme complexe à partir de l'écoulement connu d'une forme simple.

Au plan complexe (x, y) dans lequel est décrit l'écoulement connu, on va faire correspondre un plan complexe (ξ, η) dans lequel sera décrit l'écoulement inconnu, avec deux variables

complexes $z = x + iy$ et $\zeta = \xi + i\eta$. On dit que $\zeta(z)$ est une transformation conforme, c'est-à-dire qu'il n'existe qu'une image de z dans ζ :

$$z = x + iy \rightarrow f(\zeta) = \xi + i\eta \quad (\text{III.58})$$

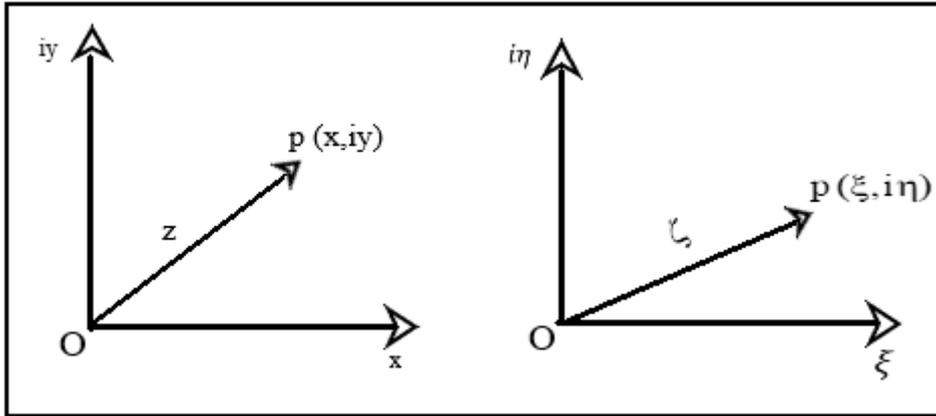


Figure III.10: Transformation conforme[1].

On peut montrer que, s'il existe une fonction du potentiel complexe f dans le plan z , alors il en existe également une dans le plan des images ζ . Si l'on note $z(\zeta)$ la transformation inverse (également conforme), on a alors :

$$f(z) = f(z(\zeta)) = g(\zeta) \quad (\text{III.59})$$

$$= \phi(x, y) + i\psi(x, y) = g(\zeta) = \phi(\xi, \eta) + i\psi(\xi, \eta) \quad (\text{III.60})$$

$$\text{Où } \begin{cases} \phi(\xi, \eta) = \text{potentiel des vitesses dans le plan } \zeta \\ \psi(\xi, \eta) = \text{fonction de courant dans le plan } \zeta \end{cases}$$

Pour l'écoulement stationnaire en particulier, on peut dire que l'écoulement autour d'un corps dans le plan z équivaut à l'écoulement autour d'un autre corps dans le plan ζ .

La démarche est la suivante : on détermine l'écoulement autour d'un profil d'ail quelconque en transformation ce dernier en un cylindre circulaire. On obtient des lors la vitesse complexe dans le plan ζ comme suit :

$$w_\zeta = g'(\zeta) = \frac{df}{dz} \frac{dz}{d\zeta} = \frac{w(z)}{\zeta'(z)} \quad (\text{III.61})$$

La circulation n'est pas changée par la transformation.

Dans notre étude on va s'intéresser à la transformation de Joukovski pour définir un profil de Joukovski, Joukovski a étendu cette transformation pour inclure l'épaisseur d'un profil ainsi que sa cambrure, le plan original z devient le plan transformation ζ est définie par :

$$\zeta(z) = z + \frac{a^2}{z} \quad (\text{III.62})$$

$$\begin{aligned}
 &= x + iy + \frac{a^2}{x + iy} = x + iy + a^2 \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \\
 &= x \left(1 + \frac{a^2}{x^2 + y^2} \right) + iy \left(1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2} \right)
 \end{aligned}
 \tag{III.63}$$

a : constante réelle.

$$\text{Par identification} \Rightarrow \begin{cases} \xi = x \left(1 + \frac{a^2}{x^2 + y^2} \right) \\ \eta = y \left(1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2} \right) \end{cases}
 \tag{III.64}$$

III.6.1. Transformation d'un cercle en un plan

Appliquons la transformation de Joukovski à un écoulement autour d'un cylindre avec cette fois $r = a$, $\xi = 2a$ et $\eta = 0$, θ varie de 0 à π et le point P (dans le plan ζ) se déplace de $(+2a)$ à $(-2a)$. La corde de ligne droite a la valeur $4a$. Calculons la vitesse complexe dans le plan ζ d'après l'équation suivante :

$$w_\zeta = \frac{w(z)}{\zeta'(z)}$$

$$\text{Où : } \zeta'(z) = 1 - \frac{a^2}{z^2}
 \tag{III.65}$$

Dans le cas du cylindre sans circulation, l'équation du potentiel complexe correspond à :

$$f_0(z) = V_0 \left(z + \frac{a^2}{z} \right)
 \tag{III.66}$$

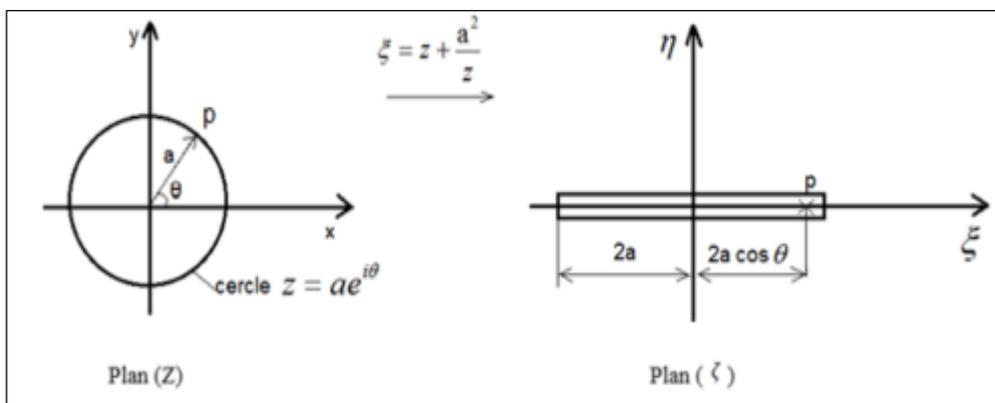


Figure III.11: transformation d'un cercle en un plan [1].

Pour étudier l'écoulement autour d'une plaque plane placée à un angle d'incidence α , on utilise l'expression suivante :

$$f(z) = V_0 \left(ze^{-i\alpha} + \frac{a^2}{z} e^{i\alpha} \right) \quad (\text{III.67})$$

À la surface du cylindre $z = a e^{i\theta}$, on a alors :

$$w(z) = V_0 (e^{-i\alpha} - e^{i\alpha-2i\theta}) \quad (\text{III.68})$$

$$w_\zeta = (e^{-i\alpha} - e^{i\alpha-2i\theta}) \frac{V_0}{1 - e^{-2i\theta}} \quad (\text{III.69})$$

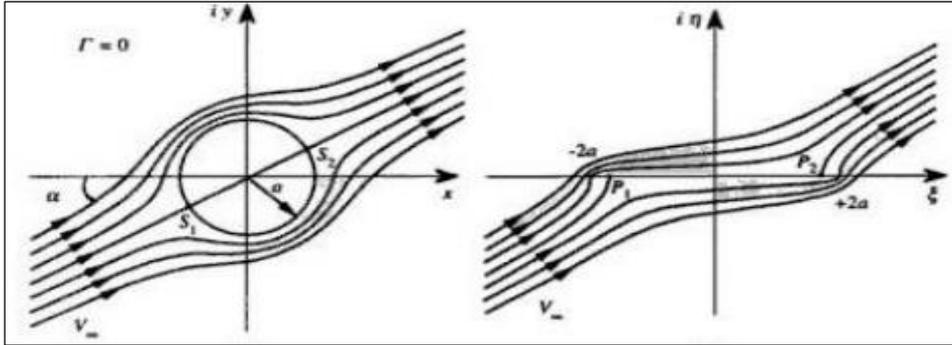


Figure III.12: Ecoulement autour d'une plaque plane placée à un angle d'incidence [1].
En faisant appel à l'identité :

$$\frac{1}{1 - e^{-2i\theta}} = \frac{1 - e^{2i\theta}}{4 \sin^2 \theta} \quad (\text{III.70})$$

Et à la relation trigonométrique élémentaire, on a :

$$w_\zeta = \frac{V_0}{2 \sin^2 \theta} [\cos \alpha - \cos(\alpha - 2\theta)] \quad (\text{III.71})$$

Si on utilise la relation :

$$\cos \alpha - \cos(\alpha - 2\theta) = 2 \sin^2 \theta \cos \alpha - 2 \sin \alpha \sin \theta \cos \theta \quad (\text{III.72})$$

Donc la vitesse complexe devient :

$$w_\zeta(\zeta) = V_0 \cos \alpha + \frac{V_0}{2 \sin \theta} [-2 \sin \alpha \cos \theta] \quad (\text{III.73})$$

$$\text{Avec : } \Rightarrow \begin{cases} \xi = 2a \cos \theta \\ \eta = 0 \end{cases} \quad (\text{III.74})$$

III.6.2. Transformation d'un cercle en une ellipse

Considérons le cylindre d'équation $z = r e^{i\theta}$ et appliquons la transformation de Joukowski avec $0 \leq a \leq r$:

$$\zeta = z + \frac{a^2}{z} = r e^{i\theta} + \frac{a^2}{r} e^{-i\theta} = r \cos \theta + r i \sin \theta + \frac{a^2}{r} \cos \theta - \frac{a^2}{r} i \sin \theta$$

$$= \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta + i \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta \tag{III.75}$$

$$\text{Par identification} \Rightarrow \begin{cases} \xi = \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta \\ \eta = \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 \theta = \frac{\xi^2}{\left(r + \frac{a^2}{r} \right)^2} \\ \sin^2 \theta = \frac{\eta^2}{\left(r - \frac{a^2}{r} \right)^2} \end{cases} \tag{III.76}$$

Et on obtient l'équation de l'ellipse :

$$\frac{\xi^2}{\left(r + \frac{a^2}{r} \right)^2} + \frac{\eta^2}{\left(r - \frac{a^2}{r} \right)^2} = 1 \tag{III.77}$$

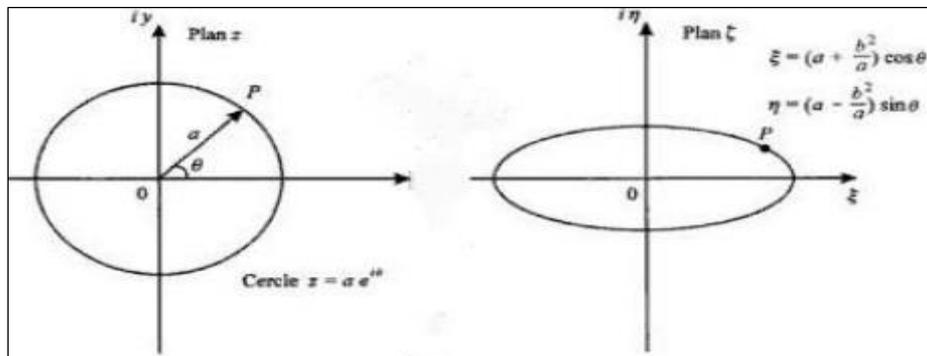


Figure III.13: transformation d'un cercle en une ellipse [1].

III.6.3. Transformation d'un cercle en un profil symétrique

Le centre du cercle est décalé de $x = x_0, y = 0$;

Donc $a = R + x_0$, avec la condition de base $R \geq a$ impose ici : $x_0 < 0$

En positionnant le centre du cercle sur l'axe des x négatifs on réalise un profil symétrique d'épaisseur finie, avec, sur l'axe OX , un bord d'attaque arrondi du côté $X < 0$, et un bord de fuite pointu du côté $X > 0$.

Cette épaisseur augmente lorsqu'on éloigne le centre du cercle de l'origine (x_0 est grand).

On obtient un profil d'épaisseur non nulle et de cambrure nulle.

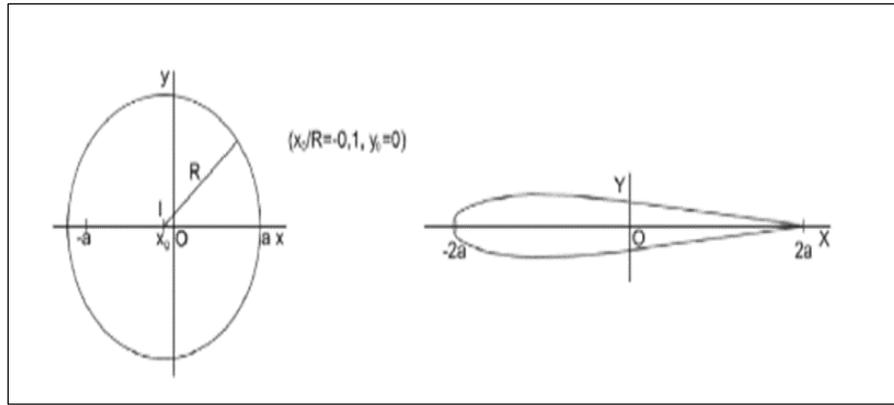


Figure III.14: Transformation d'un cercle en un profil symétrique [10].

III.6.4. Transformation d'un cercle en un arc

Le centre du cercle est décalé de $x = 0, y = y_0$; avec $y_0 > 0$ ou < 0 ; alors $a^2 = R^2 - y_0^2$:

La transformation donne un arc de cercle $(-2a, +2a)$, de cambrure $2y_0$.

En effet, pour $x = 0, y = y_0 + R$, on obtient : $X = 0, Y = y_0 + R - \frac{(R^2 - y_0^2)}{(y_0 + R)} = 2y_0$

Selon que $y_0 > 0$ ou < 0 , on obtient sur l'axe des Y un effet de cambrure vers le haut, du côté $Y > 0$, ou vers le bas, du côté $Y < 0$, effet d'autant plus important que le centre du cercle est éloigné de l'origine, c'est-à-dire que $|y_0|$ est grand.

On obtient un profil d'épaisseur nulle et de cambrure non nulle.

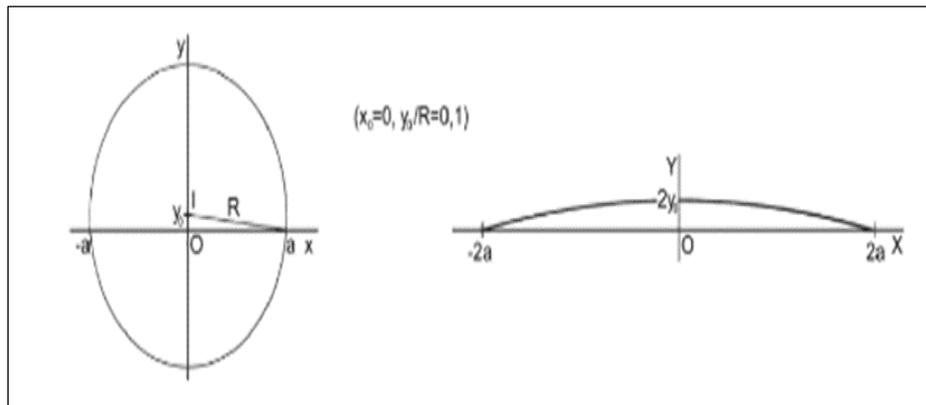


Figure III.15: Transformation d'un cercle en un arc [10].

III.6.5. Transformation d'un cercle en un profil cambré

Enfin, le centre du cercle est décalé à la fois de $x = x_0 < 0$ et de $y = y_0 > 0$, d'où

$$R^2 = (a - x_0)^2 + y_0^2 :$$

La transformation engendre un profil asymétrique caractéristique d'une aile d'avion.

On obtient ainsi un profil d'épaisseur non nulle et de cambrure non nulle, avec un bord d'attaque arrondi sur OX , du côté $X < 0$, et un bord de fuite pointu sur OX , du côté $X > 0$.

Là encore, La cambrure est vers le haut ou vers le bas, selon $y_0 > 0$ ou < 0 .

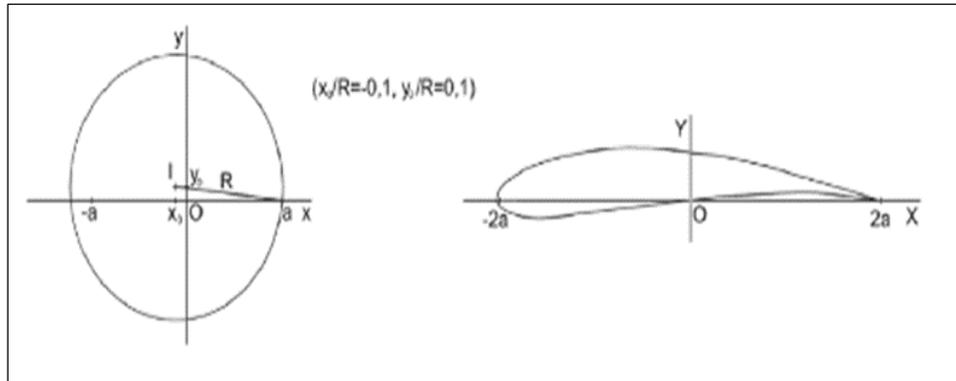


Figure III.16: Transformation d'un cercle en profil cambré [10].

III.7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons démontré l'utilité des transformations conformes pour analyser et déterminer les écoulements autour d'obstacles présentant des géométries complexes, en utilisant comme point de départ un écoulement simple tel que celui généré par un cercle sans ou avec circulation.

Chapitre IV

Modélisation d'un profil Joukovski et détermination analytique de ses caractéristiques aérodynamiques

Modélisation d'un profil Joukovski et détermination analytique de ses caractéristiques aérodynamiques

IV.1. Introduction

Ce chapitre se concentre sur l'analyse d'un profil aérodynamique courbé en utilisant la transformation de Joukovski. Les objectifs de cette analyse sont de déterminer les coefficients de portance, de traînée et de pression, ainsi que les vitesses complexes résultantes de l'écoulement potentiel autour de ce profil.

IV.2. Transformation de Joukovski

Cette transformation permet de transformer un simple cercle en un profil aérodynamique, les paramètres du cercle qui jouent un rôle important dans la forme de l'aile, sont le centre du cercle O' et le rayon R .

Il est clair que l'épaisseur tend vers zéro lorsque (R/a) diminue vers l'unité [22].

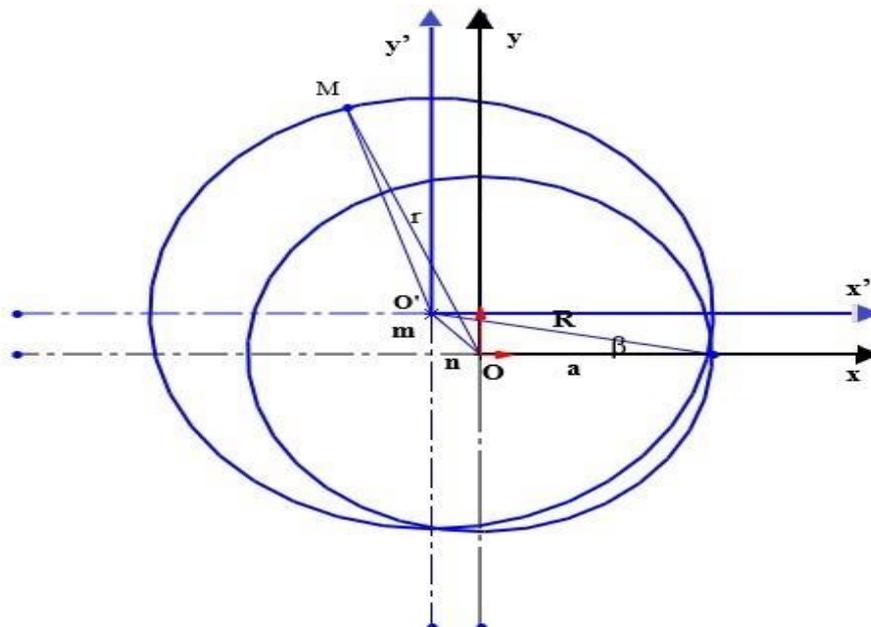


Figure IV.1: cercle générateur d'un profil cambré.

Nous déplaçons le centre O du cercle, vers un point du deuxième quadrant O' de n selon Ox et de m selon Oy. Pour cela on définit deux plans mathématiques : xOy et XOY ; le premier le plan du cercle, le second celui du profil d'ail que ne deviendra claire plus tard.

La transformation de Joukovski fait correspondre à un point de coordonnées x et y du plan xOy un point de coordonnées X et Y du plan XOY.

En définissant les nombres complexes :

$$Z = X + iY \quad (IV.1)$$

$$z = x + iy \quad (IV.2)$$

La fonction de transformation de Joukovski est définie par :

$$Z = F(z) = z + \frac{a^2}{z} \quad (IV.3)$$

IV.3. Équations paramétriques du cercle générateur

D'après l'équation (IV.3) on a :

$$\begin{aligned} Z = z + \frac{a^2}{z} &= re^{i\theta} + \frac{a^2}{r}e^{-i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{a^2}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) \\ &= \left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta \\ &= X + iY \end{aligned} \quad (IV.4)$$

$$\text{Par identification} \Rightarrow \begin{cases} X = \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)r \cos\theta \\ Y = \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)r \sin\theta \end{cases} \quad (IV.5)$$

Pour tout point de M sur le cercle, on a :

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad r \text{ étant la longueur du vecteur OM.}$$

$$R^2 = (x - n)^2 + (y - m)^2, \quad R \text{ étant la longueur du vecteur O'M.}$$

Par identification de l'équation trigonométrique et l'équation du cercle de centre O' on obtient les composantes suivantes

$$\begin{cases} \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \\ \left(\frac{x-n}{R}\right)^2 + \left(\frac{y-m}{R}\right)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{x-n}{R} \\ \sin\theta = \frac{y-m}{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = n + R \cos\theta \\ y = m + R \sin\theta \end{cases} \quad (IV.6)$$

On a l'expression vectorielle de r avec la relation de Chasles

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \quad \text{C'est-à-dire : } z = z_{O'} + z_M$$

$$\text{Avec : } \Rightarrow \begin{cases} z_{O'} = n + im \\ z_M = R e^{i\theta} = R(\cos \theta + i \sin \theta) \end{cases} \quad (\text{IV.7})$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } z &= n + im + R(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= (n + R \cos \theta) + i(m + R \sin \theta) \\ &= x + iy \end{aligned} \quad (\text{IV.8})$$

$$\text{Par identification : } \Rightarrow \begin{cases} x = n + R \cos \theta \\ y = m + R \sin \theta \end{cases} \quad (\text{IV.9})$$

$$\text{On a : } \begin{cases} \cos \beta = \frac{a+n}{R} \simeq 1 \Rightarrow R = a+n \\ \tan \beta \simeq \beta = \frac{m}{a+n} \Rightarrow m = (a+n)\beta \end{cases} \quad (\text{IV.10})$$

On remplace la relation (IV.10) dans (IV.9) :

$$\begin{cases} x = n + (a+n) \cos \theta \\ y = (a+n)\beta + (a+n) \sin \theta \end{cases} \quad (\text{IV.11})$$

D'après l'équation du cercle de centre O et la relation (IV.9) :

$$\begin{aligned} r^2 &= (n + R \cos \theta)^2 + (m + R \sin \theta)^2 \\ &= [n^2 + R^2 \cos^2 \theta + 2nR \cos \theta] + [m^2 + R^2 \sin^2 \theta + 2mR \sin \theta] \end{aligned}$$

Avec les relations (IV.10) et l'équation trigonométrique devient :

$$r^2 = 2n^2 + a^2 + 2an + \beta^2 (n^2 + a^2 + 2an) + 2(n^2 \cos \theta + an \cos \theta) + 2(n^2 + a^2 + 2an)\beta \sin \theta$$

On pose : $\frac{n}{a} = \varepsilon \Rightarrow n = \varepsilon a$ où : $\varepsilon \ll 1$

$$\begin{aligned} r^2 &= a^2 \varepsilon^2 (2 + \beta^2 + 2 \cos \theta + 2\beta \sin \theta) + 2a^2 \varepsilon (1 + \beta^2 + 2\beta \sin \theta + \cos \theta) + a^2 + \beta^2 a^2 + 2a^2 \beta \sin \theta \\ \frac{a^2}{r^2} &= \frac{1}{\varepsilon^2 (2 + \beta^2 + 2 \cos \theta + 2\beta \sin \theta) + 2\varepsilon (1 + \beta^2 + 2\beta \sin \theta + \cos \theta) + 1 + \beta^2 + 2\beta \sin \theta} \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

Développement limité par rapport à ε :

$$f(b) = f(a) + (a-b)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) \quad (\text{IV.13})$$

$$f(\varepsilon) = f(0) + \varepsilon f'(0) + k(\varepsilon^2)$$

$$f(0) = \frac{1}{1 + \beta^2 + 2\beta \sin \theta} \quad \text{et} \quad f'(0) = \frac{-2(1 + \beta^2 + 2\beta \sin \theta + \cos \theta)}{(1 + \beta^2 + 2\beta \sin \theta)^2}$$

$$\text{Avec : } f(\varepsilon) = \frac{a^2}{r^2} = \frac{1}{1 + \beta^2 + 2\beta \sin \theta} - \varepsilon \frac{2(1 + \beta^2 + 2\beta \sin \theta + \cos \theta)}{(1 + \beta^2 + 2\beta \sin \theta)^2} + k(\varepsilon^2) \quad (\text{IV.14})$$

Développement limité par rapport à β :

$$g(\beta) = g(0) + \beta g'(0) + h(\beta^2)$$

$$g'(\beta) = \frac{-(2\beta + 2 \sin \theta)}{(1 + \beta^2 + 2\beta \sin \theta)^2} - \frac{2\varepsilon(1 + \beta^2 + 2\beta \sin \theta + \cos \theta)}{(1 + \beta^2 + 2\beta \sin \theta)}$$

$$\text{On pose : } S(\varepsilon\beta) = -\frac{2\varepsilon(1 + \beta^2 + 2\beta \sin \theta + \cos \theta)}{(1 + \beta^2 + 2\beta \sin \theta)}$$

$$g'(0) = -2 \sin \theta + S(\varepsilon\beta) \quad \text{et} \quad g(0) = 1 - 2\varepsilon(1 + \cos \theta)$$

$$\text{Donc : } g(\beta) = \frac{a^2}{r^2} = 1 - 2\varepsilon(1 + \cos \theta) - 2\beta \sin \theta + S(\varepsilon\beta) + h(\beta^2)$$

$$\frac{a^2}{r^2} = 1 - 2\varepsilon(1 + \cos \theta) - 2\beta \sin \theta \quad (\text{IV.15})$$

$$\text{On remplace (IV.11) dans (IV.5) : } \begin{cases} X = [n + (n + a) \cos \theta] \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \\ Y = [(n + a)(\beta + \sin \theta)] \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \end{cases} \quad (\text{IV.16})$$

Calcul de composante X et Y du plan Z :

$$\begin{aligned} X &= [n + (n + a) \cos \theta] \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \\ &= [\varepsilon a + (\varepsilon a + a) \cos \theta] [1 + [1 - 2\varepsilon(1 + \cos \theta) - 2\beta \sin \theta]] \\ &= a[\varepsilon(1 + \cos \theta) + \cos \theta] [2 - 2\varepsilon(1 + \cos \theta) - 2\beta \sin \theta] \\ &= 2a[\varepsilon(1 + \cos \theta) + \cos \theta] [1 - \varepsilon(1 + \cos \theta) - \beta \sin \theta] \end{aligned}$$

$$\text{On pose : } \varepsilon^* = \varepsilon(1 + \cos \theta)$$

$$\begin{aligned}
X &= 2a \left[\varepsilon^* + \cos \theta \right] \left[1 - \varepsilon^* - \beta \sin \theta \right] \\
&= 2a \left[-\varepsilon^{*2} + \varepsilon^* (1 - \beta \sin \theta - \cos \theta) + \cos \theta (1 - \beta \sin \theta) \right] \quad (IV.17)
\end{aligned}$$

Développement limité par rapport à ε^* :

$$D(\varepsilon^*) = D(0) + \varepsilon^* D'(0) + d(\varepsilon^{*2})$$

$$D(0) = 2a \left[\cos \theta (1 - \beta \sin \theta) \right] \quad \text{et} \quad D'(0) = 2a (1 - \beta \sin \theta - \cos \theta)$$

$$D(\varepsilon^*) = X = 2a \left[\cos \theta (1 - \beta \sin \theta) \right] + \varepsilon^* 2a (1 - \beta \sin \theta - \cos \theta) + d(\varepsilon^{*2})$$

$$\text{On pose : } T(\varepsilon^* \beta) = -2a \varepsilon^* \beta \sin \theta$$

$$\begin{aligned}
X &= 2a \left[\varepsilon^* (1 - \cos \theta) + \cos \theta (1 - \beta \sin \theta) \right] + d(\varepsilon^{*2}) + T(\varepsilon^* \beta) \\
&= 2a \varepsilon (1 + \cos \theta) (1 - \cos \theta) + 2a \cos \theta (1 - \beta \sin \theta)
\end{aligned}$$

$$\text{On a : } (1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta) = \sin^2 \theta$$

$$\text{Ce qui implique : } X = 2a \varepsilon \sin^2 \theta + 2a \cos \theta (1 - \beta \sin \theta) \quad (IV.18)$$

$$\begin{aligned}
Y &= \left[(n + a)(\beta + \sin \theta) \right] \left[1 - \frac{a^2}{r^2} \right] \\
&= \left[(\varepsilon a + a)(\beta + \sin \theta) \right] \left[1 - (1 - 2\beta \sin \theta - 2\varepsilon(1 + \cos \theta)) \right] \\
&= 2a \left[\varepsilon^2 (\beta + \sin \theta + \beta \cos \theta + \sin \theta \cos \theta) + \varepsilon (\beta^2 \sin \theta + \beta \sin^2 \theta + \beta + \sin \theta + \beta \cos \theta + \sin \theta \cos \theta) + \beta^2 \sin \theta + \beta \sin^2 \theta \right]
\end{aligned}$$

Développement limite par rapport à ε :

$$P(\varepsilon) = P(0) + \varepsilon P'(0) + J(\varepsilon^2)$$

$$p(0) = 2a \left[\beta^2 \sin \theta + \beta \sin^2 \theta \right] \quad \text{et} \quad p'(0) = 2a \left[\beta^2 \sin \theta + \beta \sin^2 \theta + \beta + \sin \theta + \beta \cos \theta + \sin \theta \cos \theta \right]$$

$$P(\varepsilon) = Y = 2a \left[(\beta^2 \sin \theta + \beta \sin^2 \theta) + \varepsilon (\sin \theta + \cos \theta \sin \theta) \right] + 2a \varepsilon (\beta^2 \sin \theta + \beta \sin \theta + \beta + \beta \cos \theta) + J(\varepsilon^2)$$

$$\text{On pose : } G(\varepsilon \beta) = 2a \varepsilon (\beta^2 \sin \theta + \beta \sin \theta + \beta + \beta \cos \theta)$$

$$Y = 2a \left[(\beta^2 \sin \theta + \beta \sin^2 \theta) + \varepsilon (\sin \theta + \cos \theta \sin \theta) \right] + J(\varepsilon^2) + G(\varepsilon \beta)$$

$$Y = 2a \left[(\beta^2 \sin \theta + \beta \sin^2 \theta) + \varepsilon (\sin \theta + \cos \theta \sin \theta) \right] \quad (IV.19)$$

Développement par rapport à β :

$$H(\beta) = H(0) + \beta H'(0) + U(\beta^2)$$

$$H(0) = 2a \varepsilon \sin \theta (1 + \cos \theta) \quad \text{et} \quad H'(0) = 2a \sin^2 \theta$$

$$H(\beta) = Y = 2a \varepsilon \sin \theta (1 + \cos \theta) + \beta 2a \sin^2 \theta + U(\beta^2)$$

$$\text{Ce qui implique : } Y = 2a \varepsilon \sin \theta (1 + \cos \theta) + \beta 2a \sin^2 \theta \quad (\text{IV.20})$$

$$\text{Le système devient : } \Rightarrow \begin{cases} X = 2a\varepsilon \sin^2 \theta + 2a \cos \theta (1 - \beta \sin \theta) \\ Y = 2a \varepsilon \sin \theta (1 + \cos \theta) + \beta 2a \sin^2 \theta \end{cases} \quad (\text{IV.21})$$

IV.3.1. Calcul des paramètres du profil de Joukovski

En utilisant les relations établies précédemment, il est possible de sélectionner l'un des deux ensembles des paramètres suivants :

Le premier ensemble est composé de R, n et m, tel que décrit précédemment, et permet de déduire les valeurs de β , a et ε .

Le deuxième ensemble est constitué de R, a et β , et permet de déduire les valeurs de n, m et ε .

Un profil Joukovski est formé en déplaçant un cercle de rayon 1, de $n = -0.08$ et $m = 0.05$.

$$\text{Les valeurs trouvées : } \Rightarrow \begin{cases} \beta = \sin^{-1} \left(\frac{m}{R} \right) = 0,05002086 \text{ (rad)} \\ \varepsilon = \frac{n}{a} = -0,08699595 \\ a = \left(\frac{m}{\tan \beta} \right) - |n| = 0,91958304 \end{cases}$$

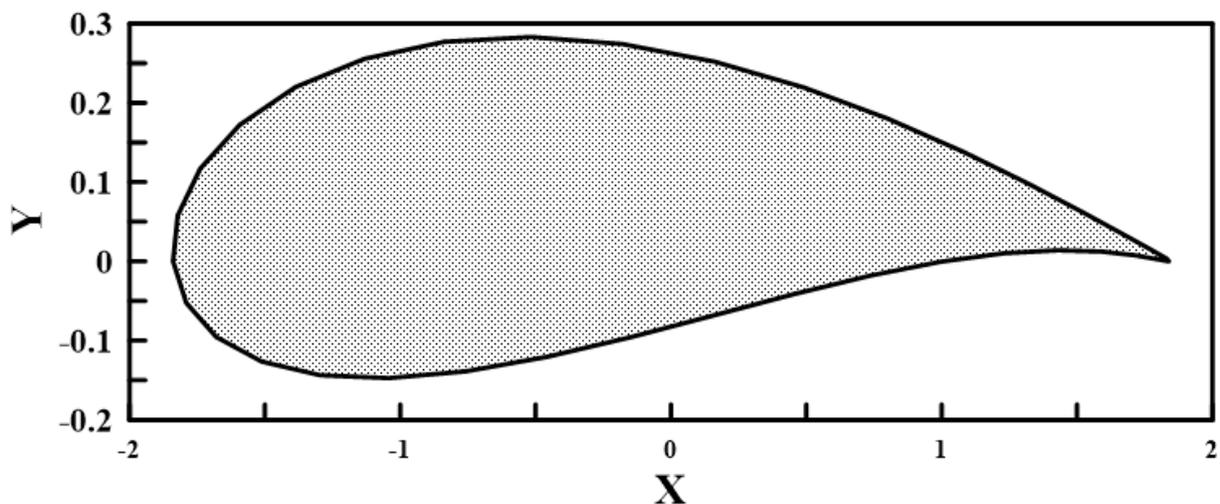


Figure IV.2: représentation graphique profil cambré (profil de Joukovski).

Remarque :

Remarquons d'abord qu'en général, le profil de Joukovski est généré à l'aide de la méthode analytique. Et le rapport $\frac{R}{a} = 1.08 > 1$, il est indiqué que l'épaisseur ne tend pas vers zéro, ce

qui suggère une amélioration de l'aérodynamique du profil. Il est important de noter que cette observation a été faite en utilisant la méthode analytique adoptée dans cette étude.

IV.4. Condition de kutta-Joukovski

On utilise dans la condition de kutta-Joukovski qui impose que la vitesse est nulle au bord de fuite.

$$f(z) = V_0 \left(z + \frac{R^2}{z} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z \quad (IV.22)$$

Pour : $z = z e^{-i\alpha}$

$$f(z) = V_0 \left(z e^{-i\alpha} + \frac{R^2}{z} e^{i\alpha} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} (\ln z - i\alpha) \quad (IV.23)$$

$$W = \frac{df}{dz} = V_0 \left(e^{-i\alpha} - \frac{R^2}{z^2} e^{i\alpha} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi z} \quad (IV.24)$$

Pour obtenir l'écoulement autour du cylindre circulaire, nous appliquons la transformation :

$$z = z_0 e^{i\alpha} + o' \Rightarrow z - o' = z_0 e^{i\alpha}$$

$$W(z) = \frac{df}{dz} = V_0 \left(e^{-i\alpha} - \frac{a^2}{(z - o')^2} e^{i\alpha} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi(z - o')} \quad (IV.25)$$

En utilisant l'angle β et le vecteur $(z - o')$ s'écrit :

$$z - o' = R e^{-i\beta}$$

$$W(z) = V_0 \left(e^{-i\alpha} - \frac{R^2}{R^2} e^{2i\beta} e^{i\alpha} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi R e^{-i\beta}} \quad (IV.26)$$

Où : $z = b_f$, La vitesse au point du bord de fuite doit être égale à zéro, donc :

$$W(b_f) = V_0 (e^{-i\alpha} - e^{2i\beta} e^{i\alpha}) - i \frac{\Gamma}{2\pi R e^{-i\beta}} = 0 \quad (IV.27)$$

Implique que :

$$\Gamma = -4\pi V_0 R \sin(\alpha + \beta) \quad (IV.28)$$

Le calcul analytique repose principalement sur la résolution l'équation de l'écoulement potentiel autour d'un profil.

On déduit le potentiel complexe correspondant :

$$f(z) = V_0 \left((z - o') e^{-i\alpha} + \frac{R^2}{(z - o') e^{-i\alpha}} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \left((z - o') e^{-i\alpha} \right) \quad (\text{IV.29})$$

La forme de la vitesse complexe :

$$\frac{df}{dz} = V_0 \left(e^{-i\alpha} - \frac{R^2}{(z - o')^2} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi(z - o')} \quad (\text{IV.30})$$

En posant $z - o' = R e^{i\theta}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= V_0 \left(e^{-i\alpha} - \frac{R^2}{R^2 e^{2i\theta}} e^{i\alpha} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi R e^{i\theta}} \\ \frac{df}{dz} &= V_0 (e^{-i\alpha} - e^{i\alpha} e^{-2i\theta}) - i \frac{\Gamma}{2\pi R} e^{-i\theta} \end{aligned} \quad (\text{IV.31})$$

$$\text{Et on a : } \frac{dZ}{dz} = \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) \quad (\text{IV.32})$$

$$\text{Avec : } \Rightarrow \begin{cases} z \approx (z - o') \\ R = a(1 + \varepsilon) \end{cases}$$

$$\frac{dZ}{dz} = 1 - \frac{a^2}{(z - o')^2} = 1 - \frac{a^2}{(R e^{i\theta})^2} = 1 - \frac{a^2}{a^2(1 + \varepsilon)^2} e^{-2i\theta} \approx 1 - e^{-2i\theta}$$

Ce implique que :

$$\frac{dZ}{dz} \approx 1 - e^{-2i\theta} \quad (\text{IV.33})$$

IV.5. Détermination des efforts aérodynamique

En utilisant la relation de Blasius :

$$F = i \frac{\rho}{2} \oint \left(\frac{dF}{dZ} \right)^2 dZ \quad (\text{IV.34})$$

En appliquant la transformation conforme : $\frac{dF}{dZ} = \frac{df}{dz} \frac{dz}{dZ}$

$$F = i \frac{\rho}{2} \oint \left(\frac{df}{dz} \frac{dz}{dZ} \right)^2 dZ \quad (\text{IV.35})$$

$$\left(\frac{df}{dz}\right)^2 = \left(V_0(e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}e^{-2i\theta}) - i\frac{\Gamma}{2\pi R}e^{-i\theta}\right)^2 = (A - B)^2 \quad (\text{IV.36})$$

$$\text{On pose : } \left(\frac{df}{dz}\right)^2 = (A^2 + B^2 - 2AB) \quad (\text{IV.37})$$

$$\text{Où : } \Rightarrow \begin{cases} A^2 = V_0^2 e^{-2i\alpha} (1 + e^{4i(\alpha-\theta)} - 2e^{2i(\alpha-\theta)}) \\ B^2 = -4V_0^2 e^{-2i\theta} \sin^2(\alpha + \beta) \\ 2AB = -4iV_0^2 \sin(\alpha + \beta) e^{-i\theta} e^{-i\alpha} (1 - e^{2i(\alpha-\beta)}) \end{cases} \quad (\text{IV.38})$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{df}{dz}\right)^2 &= V_0^2 e^{-2i\alpha} (1 - 2e^{2i(\alpha-\theta)} + e^{4i(\alpha-\theta)}) - 4V_0^2 e^{-2i\theta} \sin^2(\alpha + \beta) \\ &\quad + 4iV_0^2 \sin(\alpha + \beta) e^{-i\theta} e^{-i\alpha} (1 - e^{2i(\alpha-\beta)}) \\ \left(\frac{dZ}{dz}\right)^2 &= \left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) \end{aligned} \right. \quad (\text{IV.39})$$

On remplace les équations (IV.39) dans (IV.35) on aura :

$$F = F_x - iF_z = i\frac{\rho}{2} \oint \left(\frac{(A^2 + B^2 - 2AB)}{\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right)^2} \right) \left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) \text{Rie}^{i\theta} d\theta \quad (\text{IV.40})$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} \frac{dZ}{dz} = \left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) \Rightarrow dZ = \left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) dz \Rightarrow dZ = \left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) \text{Rie}^{i\theta} d\theta \\ z = \text{Re}^{i\theta} \Rightarrow dz = d(\text{Re}^{i\theta}) = \text{Rie}^{i\theta} d\theta \end{cases} \quad (\text{IV.41})$$

$$F = F_x - iF_z = -\frac{\rho R}{2} \oint \left(\frac{(A^2 + B^2 - 2AB)}{\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right)} \right) e^{i\theta} d\theta \quad (\text{IV.42})$$

On remplace l'équation (IV.33) dans (IV.42) :

$$F = -\frac{\rho R}{2} \oint \left[\frac{(A^2 + B^2 + 2AB)}{(1 - e^{-2i\theta})} e^{i\theta} \right] d\theta$$

$$F = -\frac{\rho R}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{A^2}{(1 - e^{-2i\theta})} + \frac{B^2}{(1 - e^{-2i\theta})} - \frac{2AB}{(1 - e^{-2i\theta})} \right] e^{i\theta} d\theta \quad (\text{IV.43})$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= \oint \frac{A^2}{(1-e^{-2i\theta})} e^{i\theta} d\theta \\
&= \oint \frac{V_0^2 (e^{-2i\alpha} - 2e^{-2i\theta} + e^{2i\alpha} e^{-4i\theta}) e^{i\theta}}{(1-e^{-2i\theta})} d\theta
\end{aligned} \tag{IV.44}$$

$$A_1 = 0$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \oint \frac{B^2}{(1-e^{-2i\theta})} e^{i\theta} d\theta \\
&= -V_0^2 \sin^2(\alpha + \beta) \oint \frac{e^{-i\theta}}{1-e^{-2i\theta}} d\theta
\end{aligned} \tag{IV.45}$$

$$A_2 = 0$$

$$\begin{aligned}
A_3 &= -\oint \frac{2AB}{(1-e^{-2i\theta})} e^{i\theta} d\theta \\
&= 4iV_0^2 \sin(\alpha + \beta) \left[e^{-i\alpha} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1-e^{-2i\theta}} d\theta - e^{i\alpha} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-2i\theta}}{1-e^{-2i\theta}} d\theta \right] \\
&= 4iV_0^2 \sin(\alpha + \beta) \left[\left[e^{-i\alpha} \frac{\ln(1-e^{-2i\theta})}{2i} \right]_0^{2\pi} - e^{i\alpha} \left[\frac{\ln(1-e^{-2i\theta})}{2i} - \theta \right]_0^{2\pi} \right] \\
&= 4iV_0^2 e^{i\alpha} \sin(\alpha + \beta) [\theta]_0^{2\pi} \\
A_3 &= 8iV_0^2 \pi \sin(\alpha + \beta) e^{i\alpha}
\end{aligned} \tag{IV.46}$$

$$\begin{aligned}
F_x - iF_z &= -\rho R 4i \pi V_0^2 \sin(\alpha + \beta) e^{i\alpha} \\
&= [4\pi\rho V_0^2 R \sin(\alpha + \beta) \sin \alpha] - i [4\pi\rho V_0^2 R \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha]
\end{aligned} \tag{IV.47}$$

$$\text{Par identification : } \Rightarrow \begin{cases} F_x = 4\pi\rho V_0^2 R \sin(\alpha + \beta) \sin \alpha \\ F_z = 4\pi\rho V_0^2 R \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha \end{cases} \tag{IV.48}$$

IV.5.1. Calcul des coefficients de portance et de traînée

$$\text{Ils sont définis par : } \begin{cases} C_x = \frac{F_x}{\frac{1}{2} \rho V_0^2 S} \\ C_z = \frac{F_z}{\frac{1}{2} \rho V_0^2 S} \end{cases} \tag{IV.49}$$

Ou la surface : $S = 4a$

On remplace (IV.48) dans (IV.49) on obtient :

$$C_x = \frac{4\pi\rho V_0^2 R \sin(\alpha + \beta) \sin \alpha}{\frac{1}{2}\rho V_0^2 4a} = 2\pi \frac{R}{a} \sin(\alpha + \beta) \sin \alpha$$

$$C_x = 2\pi(1 + \varepsilon) \sin(\alpha + \beta) \sin \alpha \quad (\text{IV.50})$$

$$C_z = \frac{4\pi\rho V_0^2 R \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha}{\frac{1}{2}\rho V_0^2 4a} = 2\pi \frac{R}{a} \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha$$

$$C_z = 2\pi(1 + \varepsilon) \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha \quad (\text{IV.51})$$

IV.5.2. Variation du coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence

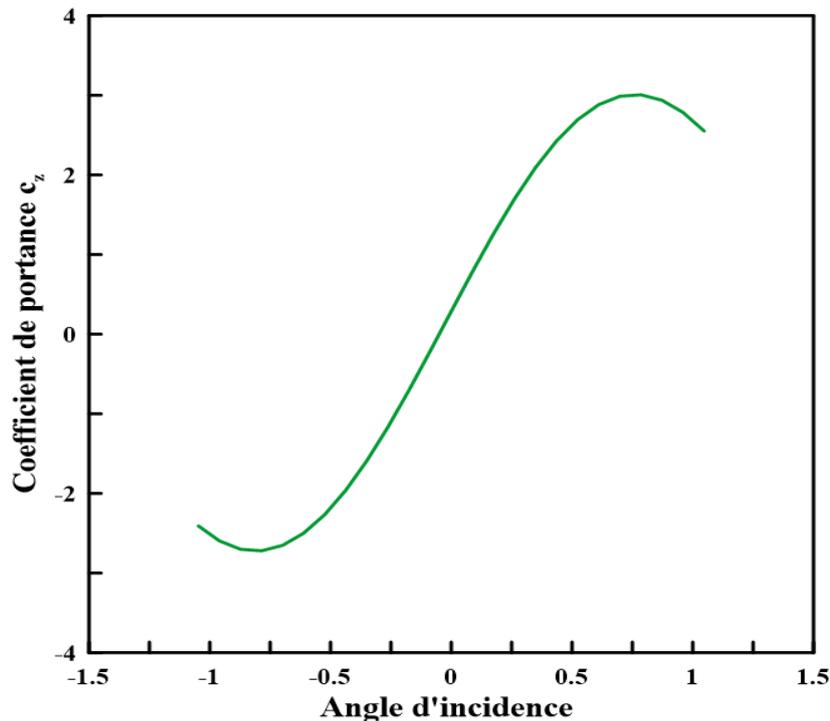


Figure IV.3: Coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence [rad].

Remarque :

Le coefficient de portance évolue de manière linéaire en fonction de l'angle d'incidence $-0.5 \leq \alpha \leq 0.5$, Il est intéressant de noter qu'une portance est présente même lorsque l'angle d'incidence est nul. Cette portance est attribuable à la forme du profil, plus spécifiquement à sa courbure. Par conséquent, on peut affirmer que plus le profil est courbé, plus la portance est significative.

IV.5.3. Variation du coefficient de traînée en fonction de l'angle d'incidence

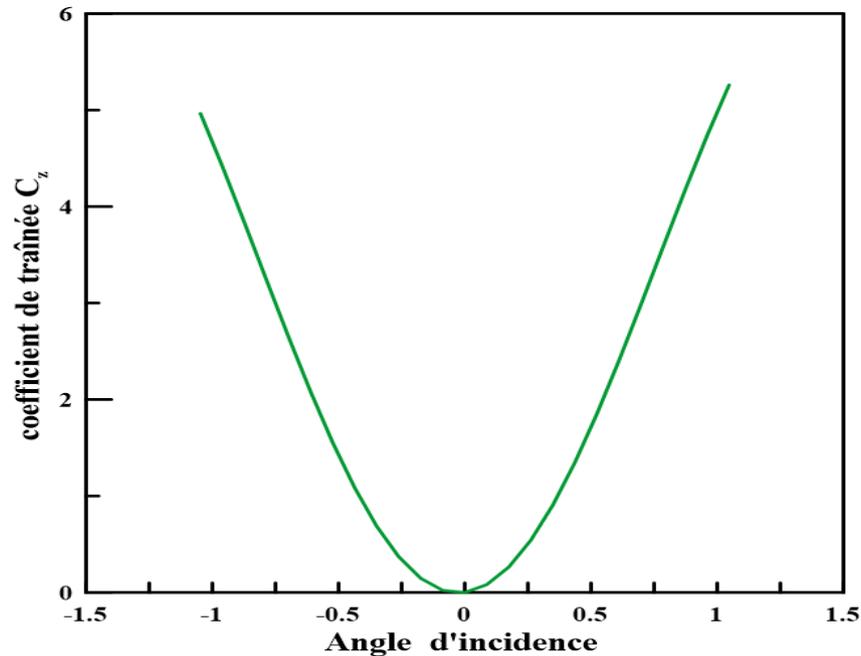


Figure IV. 4 : Coefficient de traînée en fonction de l'angle d'incidence [rad]

Remarque :

On constate que le coefficient de traînée augmente avec l'angle d'incidence jusqu'à un certain point, puis diminue légèrement avant de remonter à des angles d'incidence plus élevés. Cela est dû à l'augmentation de la résistance de l'air sur l'aile lorsque l'angle d'attaque est plus élevé.

IV.6. Distribution du champ de vitesse sur le profil

Les profils de vitesse et pression présentés sont calculés à partir d'un logiciel de simulation JAVAFOIL qui permet d'analyser et de prédire les performances des ailes d'avions en simulant l'écoulement de l'air et en calculant les coefficients aérodynamiques, sachant que nous avons utilisé notre profil qui est calculée à partir des coordonnées X et Y de l'équation (IV.21) en pourcentage de la corde.

La vitesse et la pression d'un profil est calculée en supposant que l'aile est immobile et que l'air se déplace autour d'elle. Cette méthode est considérée comme la représentation la plus fidèle de la réalité : l'aile est toujours en l'air. Ce raisonnement de bon sens est utilisé dans l'étude des profils en soufflerie.

IV.6.1. Distribution du champ de vitesse

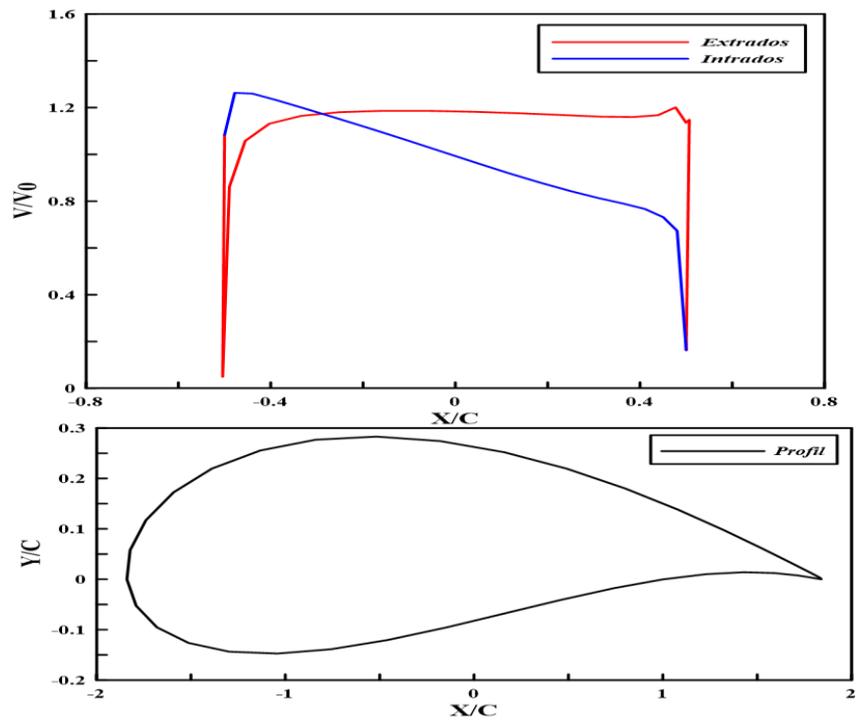


Figure IV.4.a: Distribution de la vitesse sur le profil à $\alpha = -5^\circ$.

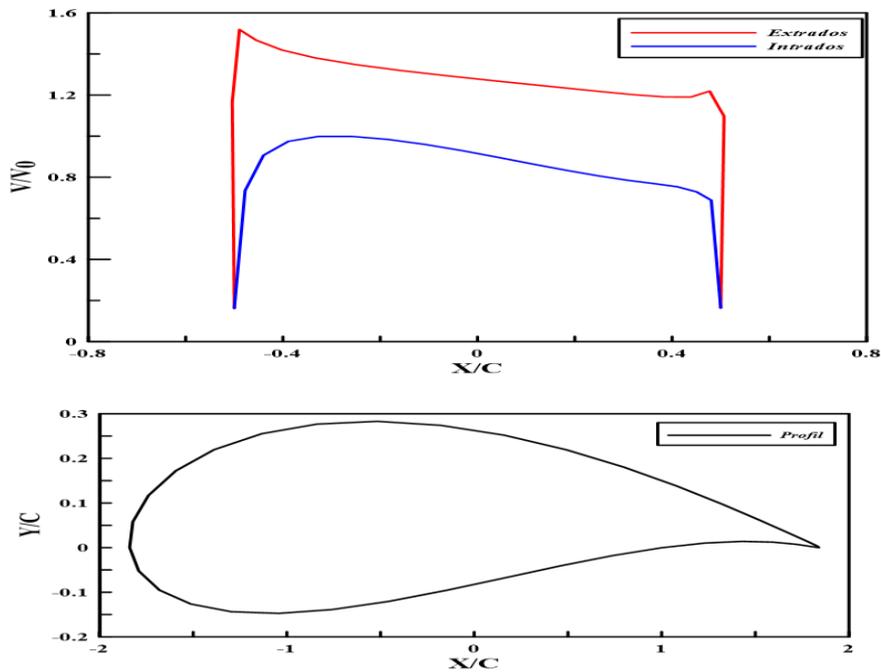


Figure IV.4.b: Distribution de la vitesse sur le profil à $\alpha = 0^\circ$.

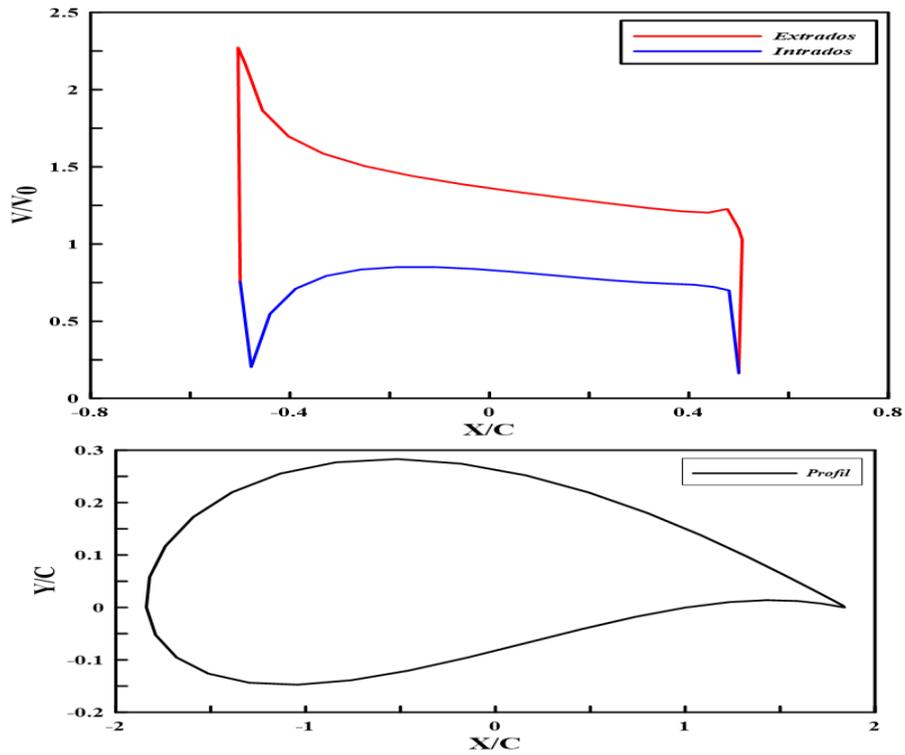


Figure IV.4.c: Distribution de la vitesse sur le profil à $\alpha = 5^\circ$.

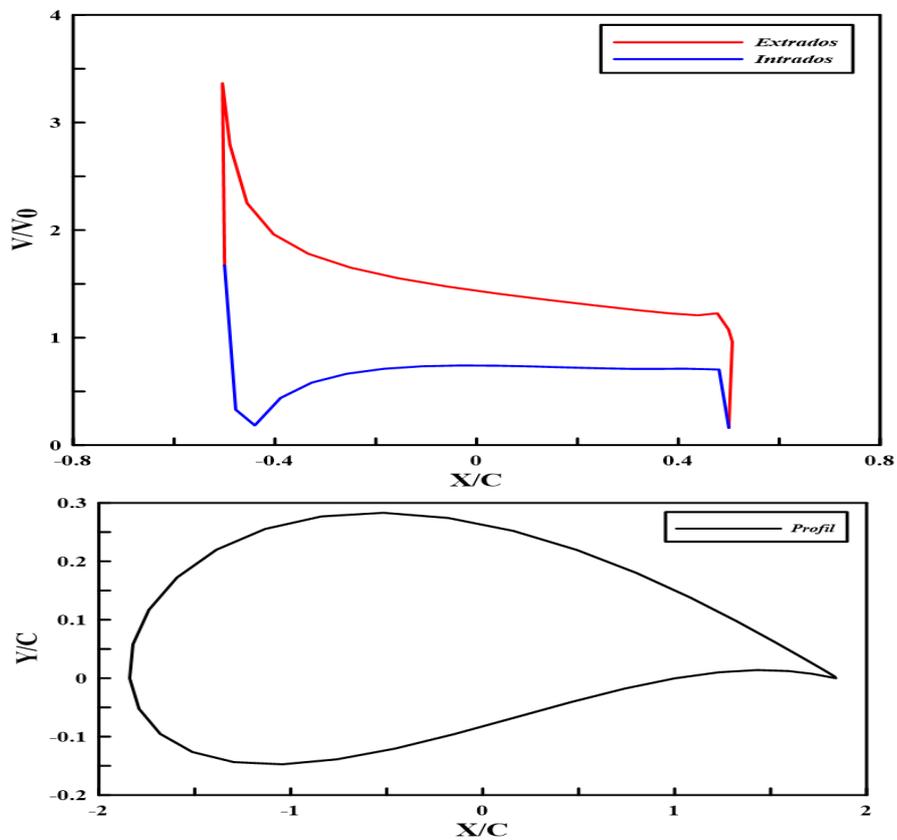


Figure IV.4.d: Distribution de la vitesse sur le profil à $\alpha = 10^\circ$.

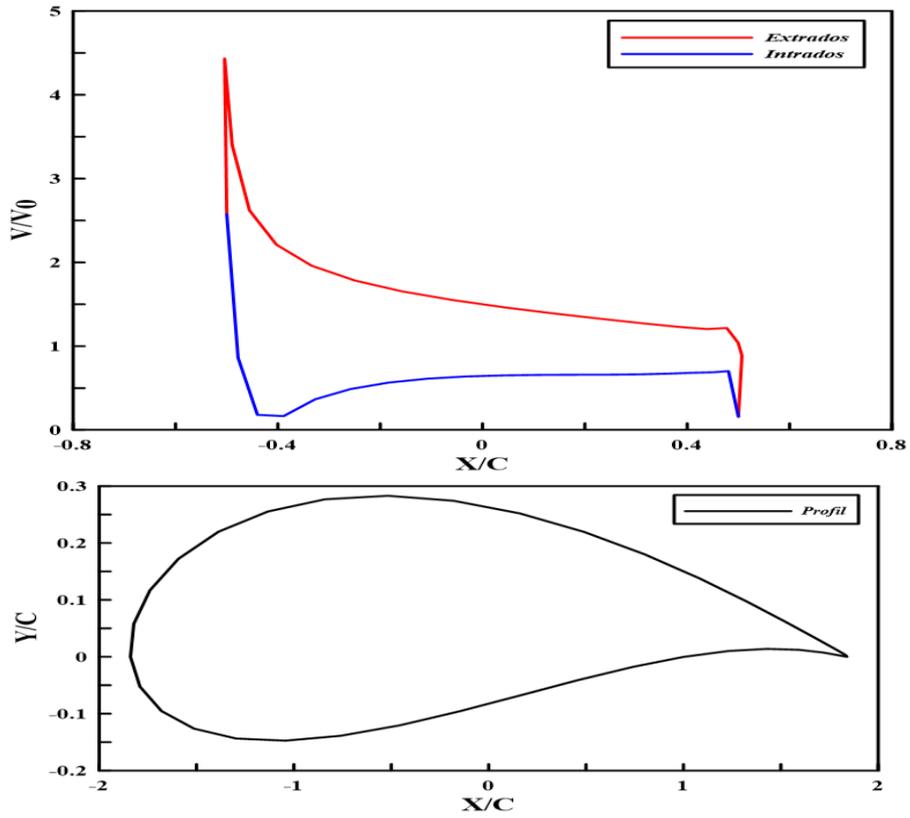


Figure IV.4.e: Distribution de la vitesse sur le profil à $\alpha = 15^\circ$.

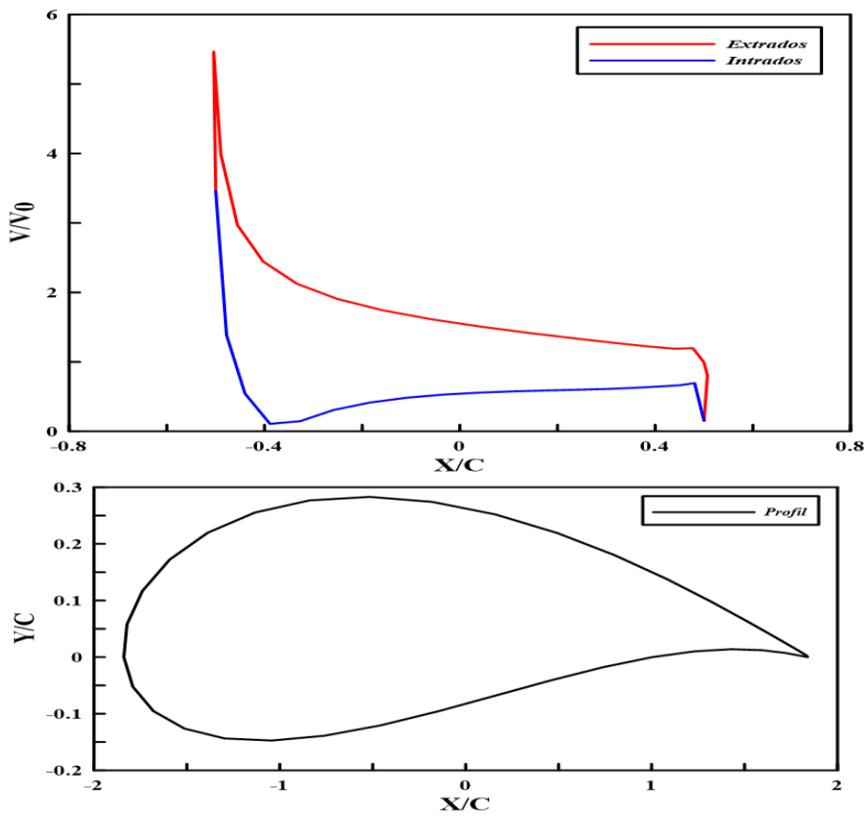


Figure IV.4.f: Distribution de la vitesse sur le profil à $\alpha = 20^\circ$.

Discussion :

Les illustrations (IV.4.a) à (IV.4.f) représentent la distribution de la vitesse sur les surfaces supérieure (extrados) et inférieure (intrados) du profil pour différentes valeurs de l'angle d'incidence.

Dans la figure (IV.4.a) avec un angle d'incidence négatif $\alpha = -5^\circ$, la vitesse augmente sur l'intrados tandis qu'elle diminue sur l'extrados.

La différence de vitesse entre l'extrados et l'intrados dans la figure (IV.4.b) avec un angle d'incidence de 0° est faible.

On observe que l'augmentation de l'angle d'attaque entraîne une modification de la répartition de la vitesse dans les figures (IV.4.c) à (IV.4.f) avec les angles 5° , 10° , 15° et 20° . La vitesse augmente sur la surface supérieure et diminue sur la surface inférieure, avec un déplacement du point de stagnation.

Dans la région la plus importante près du bord d'attaque, $-0.5 \leq X/C \leq -0.3$, cette différence de vitesse Entre l'extrados et l'intrados génère la plus grande portance.

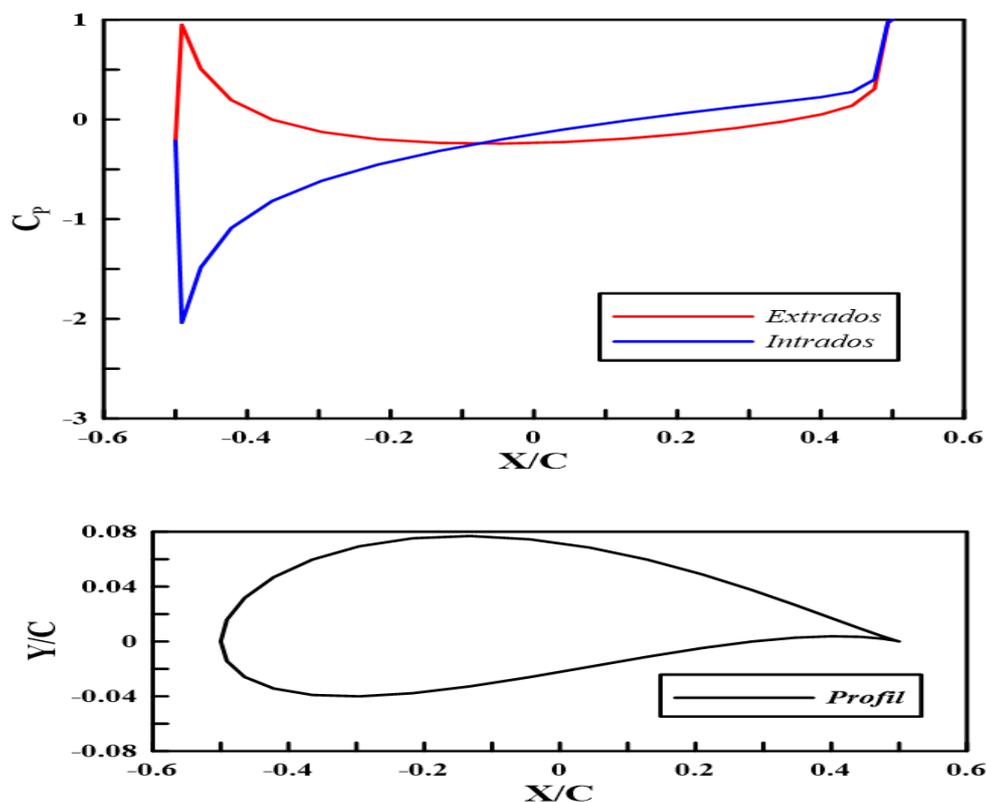
IV.6.2. Distribution du coefficient de pression

Figure IV.5.a: Distribution du coefficient de pression sur le profil à $\alpha = -5$.

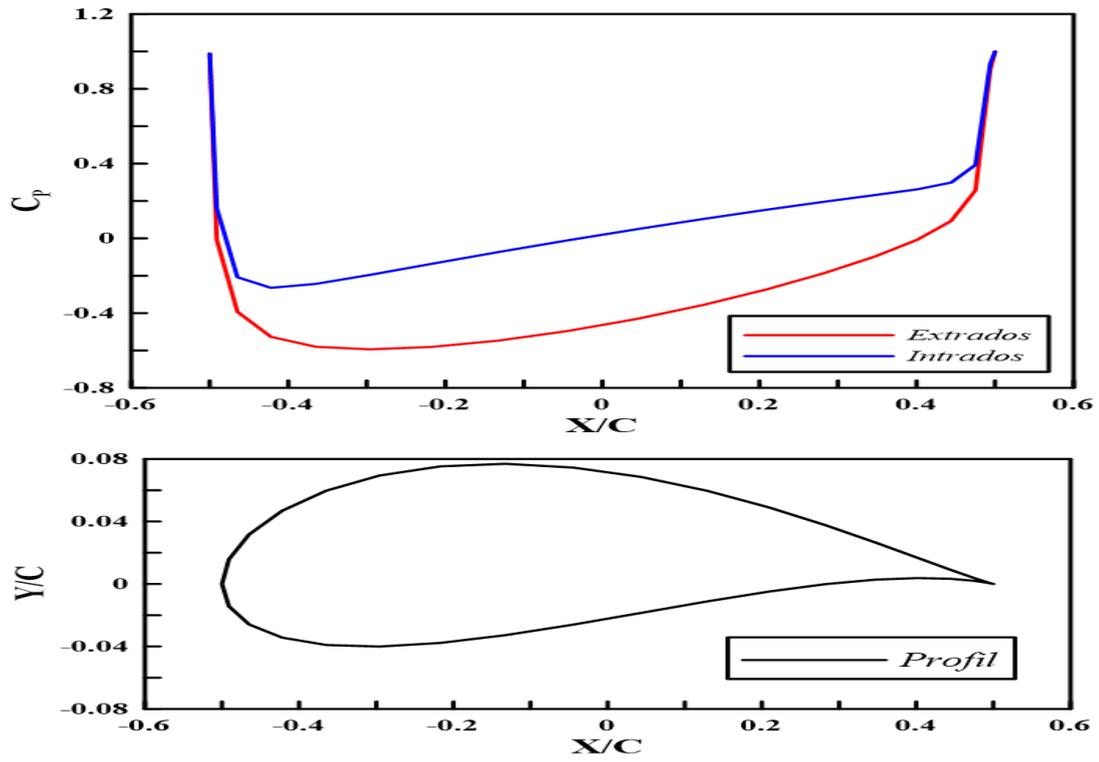


Figure IV.5.b: Distribution du coefficient de pression sur le profil à $\alpha=0^\circ$.

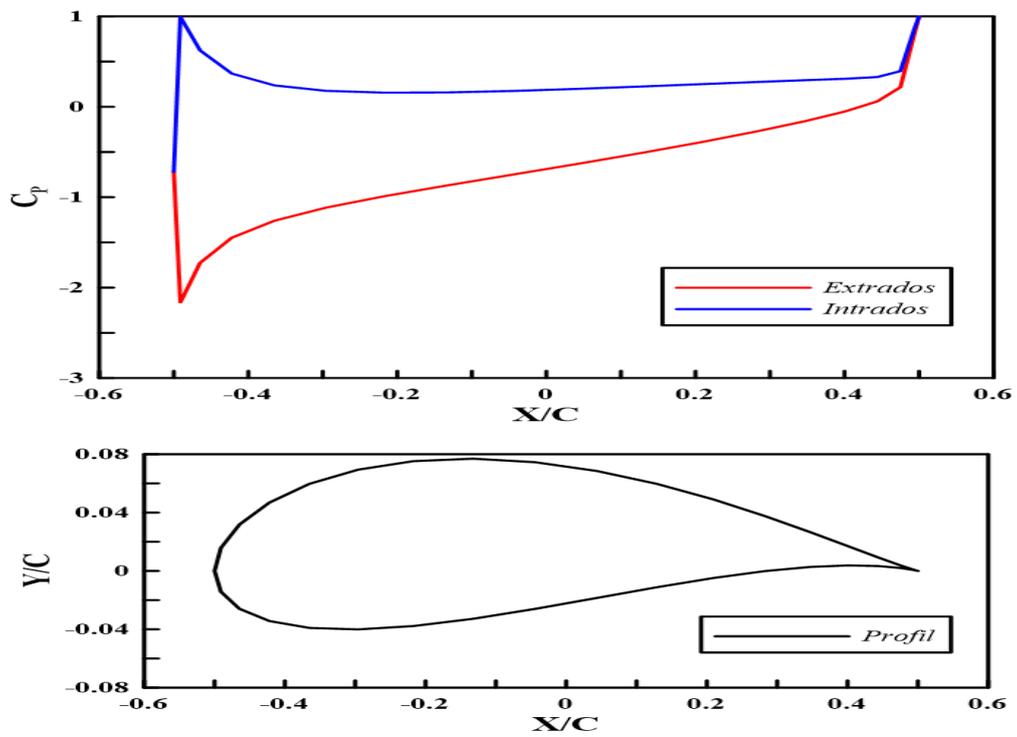


Figure IV.5.c: Distribution du coefficient de pression sur le profil à $\alpha=5^\circ$.

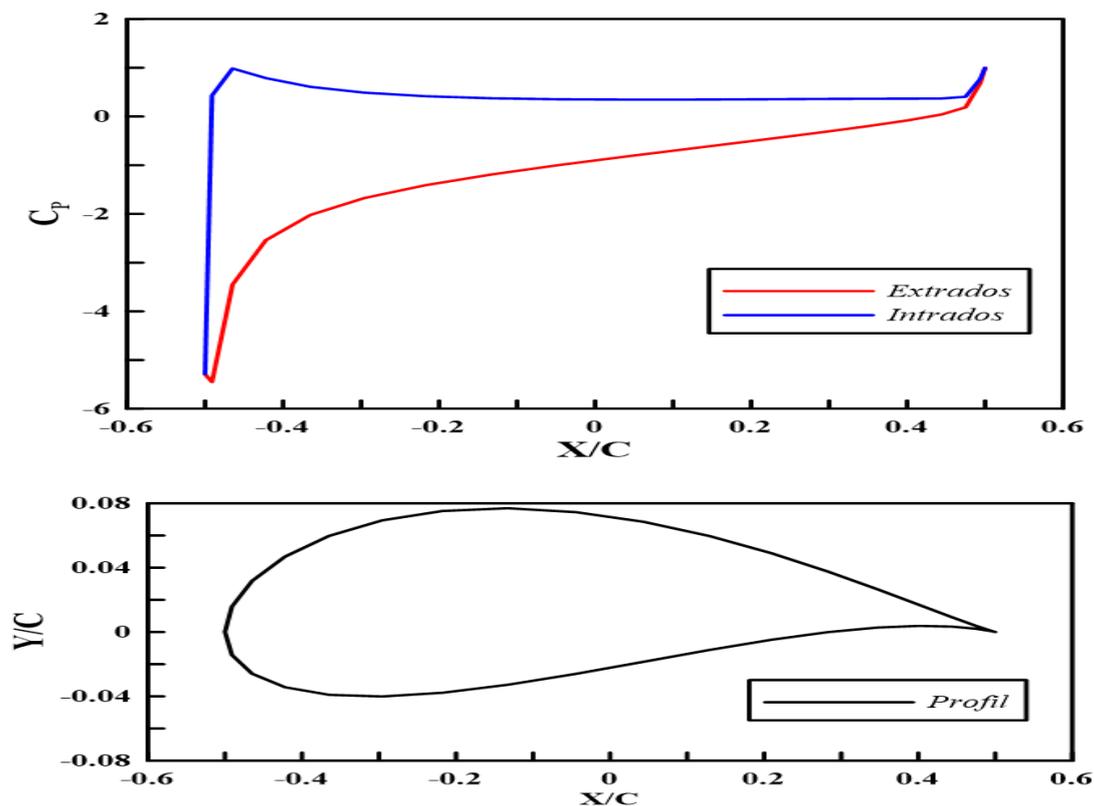


Figure IV.5.d: Distribution du coefficient de pression sur le profil à $\alpha= 10^\circ$.

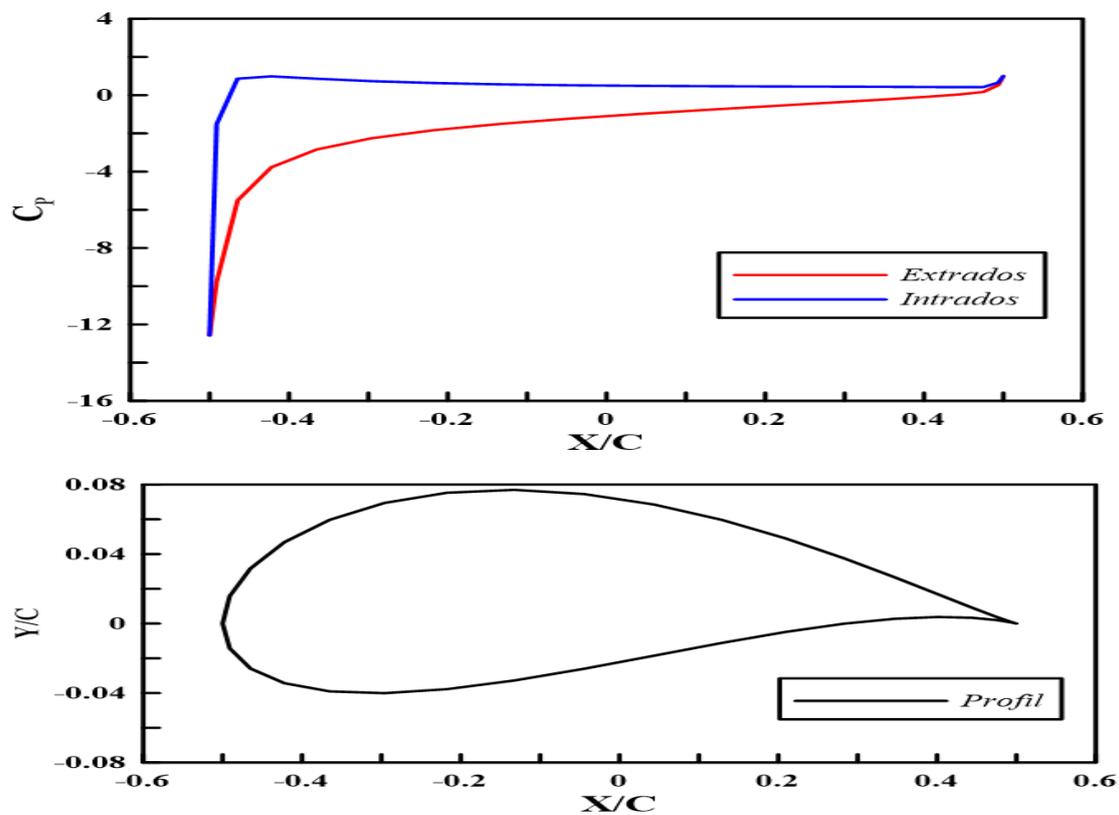


Figure IV.5.e: Distribution du coefficient de pression sur le profil à $\alpha= 15^\circ$.

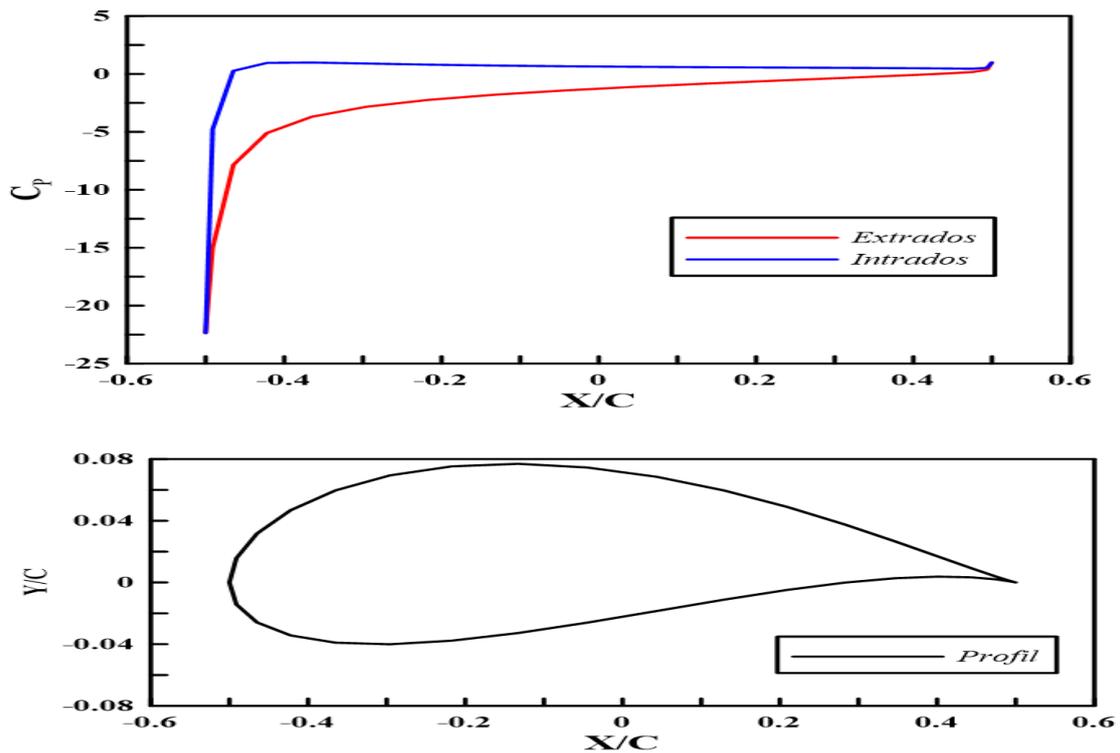


Figure IV.5.f: Distribution du coefficient de pression sur le profil à $\alpha = 20^\circ$.

Discussion

Les illustrations (IV.5.a) à (IV.5.f) représentent la distribution de la pression sur les surfaces supérieure (extrados) et inférieure (intrados) du profil pour différentes valeurs de l'angle d'incidence.

Dans la figure (IV.5.a) avec un angle d'incidence négatif $\alpha = -5^\circ$, On peut observer que la pression est plus élevée sur l'extrados que sur l'intrados.

Pour $\alpha = 0^\circ$ figure (IV.5.b) la distribution de pression sur le profil est symétrique par rapport à la ligne de courbure.

Les Figures (IV.5.c), (IV.5.d), (IV.5.e) et (IV.5.f) montrent respectivement la courbe de distribution du coefficient de pression sur le profil à $\alpha = 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$ et 20° .

En général, la pression est plus élevée sur la partie inférieure (intrados) que la partie supérieure (extrados).

À des angles d'attaque plus élevés, la distribution de pression peut devenir plus asymétrique, avec une zone de faible pression plus importante sur la partie supérieure du profil.

IV.7. Conclusion

Ce chapitre fournit une base théorique solide pour la modélisation de profils aérodynamiques cambrés et une compréhension approfondie de leur performance aérodynamique.

Conclusion Générale

Conclusion générale

En conclusion, ce mémoire de fin d'étude a examiné en profondeur le sujet de l'étude théorique d'un profil aérodynamique (cambré).

Nous avons exploré des généralités sur l'aérodynamique, ainsi que l'écoulement d'un fluide parfait et incompressible autour d'un profil d'aile, Nous nous appuyons sur la théorie des écoulements potentiels et utilisons une transformation conforme, en l'occurrence la transformation de Joukovski.

Dans notre cas d'étude nous avons modélisé un profil aérodynamique cambré et montré comment on passe mathématiquement à l'aide de la transformation Joukovski d'un simple cercle à un profil d'aile. Grâce à notre travail, nous avons réussi à obtenir un profil plus précis et doté d'une forme d'avantage optimisée sur le plan aérodynamique.

Une fois que nous avons identifié ce profil, nous avons entrepris le calcul des caractéristiques aérodynamiques qui lui sont associées.

Les équations dérivées ont permis de tracer les courbes représentant la distribution du champ de vitesse ainsi que la distribution du coefficient de pression autour de ce profil.

De plus, ce projet nous a offert une opportunité précieuse d'acquérir et d'approfondir nos connaissances en aérodynamique, ainsi que de développer une certaine maîtrise des méthodes de calcul analytique.

Références Bibliographiques

Référence bibliographique

- [1]. INO Paraschiviou, Livre aérodynamique subsonique, aérodynamique subsonique édition de l'école polytechnique de Montréal.1998.
- [2]. CURT Lawson, Colonel,USMC (Ret) ,a bit of aerodynamic history.
- [3]. BLANCHE akbari, Department of Applied Sciences, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran, The Basic Fundamental Concepts and the Law of Conservation in Aerodynamics, RRJPAP| Volume 11| Issue 1 |March, 2023.
- [4]. NASA Glenn Research Center. (s.d.). Beginner's Guide to Aeronautics: Four Forces on an Airplane.
- [5]. JOHN anderson, Fundamentals-of-aerodynamics, Sixth Edition, 2017.
- [6]. Simulation aérodynamique d'une aile d'avion par solidworks, Mémoire fin d'étude, Centre Universitaire El-wancharissi de Tissemsilt, 2020.
- [7]. FRANCESCA negrello, Flaps biomimetici per l'ottimizzazione aerodinamica di ali, Tesi di Laurea (thèse), Università degli Studi di Genova Facoltà di Ingegneria, 2009/2010.
- [8]. Cours complet mécanique du vol aérodynamique L2, I.M.A Institut de Maintenance Aéronautique Rue Marcel Issartier 33700 MERIGNAC. FEVRIER 2007.pdf.
- [9]. Thé Compagnie, KDnd). Modeliser une aile en 3D.
- [10]. JEAN pierre, livre Comment font les avions pour voler ou... l'importance de la portance, Notions théoriques et expérimentales de base sur l'aérodynamique des avions, édition connaissance et savoir 2016.
- [11]. FOUROU abdallah ABDALLAH - KADI mouhammed tahar - NEFTIA abdelmadji, Etude numérique du mouvement d'un vortex derrière un aéronef, Université Echahid Hamma Lakhdar d'El-Oued, mémoire fin d'étude, 2019/2020.
- [12]. SEFA ST AUBAN, "Mécanique du vol," 1996.
- [13]. DORI khalaf, PATRICK hanna et JAD el harouni, TPE : En quoi le profil de l'aile d'un avion et son angle d'attaque influencent-ils la portance de l'avion ?
- [14]. M. LECUREUR, cours AERODYNAMIQUE ET MECANIQUE DU VOL, Collège P. MATRAJA, BIA, 2016/2017.
- [15]. Pilote Pro, [Aérodynamique #4] Décrochage et hypersustentation, de 2 :12 min jusqu'à 2 :42, 25 mars 2020.

- [16]. Etude de l'écoulement transsonique autour d'un obstacle, Mémoire fin d'étude 2012, université de batna.
- [17]. Manuel du brevet d'initiation aéronautique, Version 4.0 Edition 2021.
- [18]. Etude numérique du mouvement d'un vortex derrière un aéronef, Mémoire fin d'étude Université Echahid Hamma Lakhdar d'El-Oued 2019-2020.
- [19]. A. MA.LDANT et C. SALOMON, Livre Aérodynamique et mécanique du vol.
- [20]. Connaissance d'avion du BIA au C.A.E.A.
- [21]. BOUSSAFEUR Kaci, Simulation numérique de l'écoulement d'un fluide réel incompressible autour d'un profil d'aile, Mémoire fin d'étude, 2011/2012.
- [22]. GHRISTOPHER E.brennen, An Internet Book on Fluid Dynamics, Joukovski Airfoils, California institute of technology, Last updated 4/9/2004.

Résumé

Ce mémoire de fin d'étude se concentre sur l'étude théorique d'un profil aérodynamique cambré, explore les généralités sur l'aérodynamique et la théorie des écoulements potentiels et la transformation conforme de Joukovski, il présente les résultats d'une étude basée sur une modélisation mathématique qui permet de former le profil Joukovski et définir les calculs des caractéristiques aérodynamiques qui associé ce profil, Logiciel de simulation offre une distribution du champ de vitesse et le coefficient de pression, constitue une contribution importante à la compréhension et à l'amélioration des performances aérodynamiques.

Mots clés : Etude théorique (1), Profil aérodynamique (2), Ecoulements potentiels (3), Transformation conforme de Joukovski (4), Modélisation mathématique (5).

Abstract

This final dissertation focuses on the theoretical study of an arched aerodynamic profile, exploring the generalities on aerodynamics and the theory of potential flows and the conformal transformation of Zhukovsky, it presents the results of a study based on a mathematical model that makes it possible to form the Joukovski profile and define the calculations of the aerodynamic characteristics associated with this profile, Simulation software offers a speed field distribution and pressure coefficient, is an important contribution to understanding and improving aerodynamic performance.

Keywords: Theoretical study (1), Aérodynamical profile (2), Potential flows (3), Joukovski conformal transformation (4), Mathematical modeling (5).

Résumé

Ce mémoire de fin d'étude se concentre sur l'étude théorique d'un profil aérodynamique cambré, explore les généralités sur l'aérodynamique et la théorie des écoulements potentiels et la transformation conforme de Joukovski, il présente les résultats d'une étude basée sur une modélisation mathématique qui permet de former le profil Joukovski et définir les calculs des caractéristiques aérodynamiques qui associé ce profil, Logiciel de simulation offre une distribution du champ de vitesse et le coefficient de pression, constitue une contribution importante à la compréhension et à l'amélioration des performances aérodynamiques.

Mots clés : Etude théorique (1), Profil aérodynamique (2), Ecoulements potentiels (3), Transformation conforme de Joukovski (4), Modélisation mathématique (5).

Abstract

This final dissertation focuses on the theoretical study of an arched aerodynamic profile, exploring the generalities on aerodynamics and the theory of potential flows and the conformal transformation of Zhukovsky, it presents the results of a study based on a mathematical model that makes it possible to form the Joukovski profile and define the calculations of the aerodynamic characteristics associated with this profile, Simulation software offers a speed field distribution and pressure coefficient, is an important contribution to understanding and improving aerodynamic performance.

Keywords: Theoretical study (1), Aérodynamic profile (2), Potential flows (3), Joukovski conforal transformation (4), Mathematicl modeling (5).