

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDERRAHMANE MIRA BEJAIA
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MASTER

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Energétique

Par :

SOUALMI YANIS

AYADI SALIM

Thème

**Effet de rayonnement thermique sur un écoulement thermique mixte
instationnaire sur une surface d'étirement dans un milieu poreux**

Soutenu le 19/06/2023 devant le jury composé de :

Mr. DJ. SADAOUI

Président

Mr. H. ALI AGHA

Rapporteur

Mr. N. BOUTALBI

Examineur

Année Universitaire 2022-2023

Remerciements

Avant tout, nous remercions le bon dieu pour le courage et la santé qu'il nous a donnée tout au long de la réalisation de notre mémoire

Nos remerciements vont également à nos chers parents pour leur amour inconditionnel, leurs sacrifices, leurs encouragements tout au long de notre parcours universitaire.

*Le grand merci à notre encadreur **Mr ALI AGHA** pour avoir accepté de nous encadrer, pour ses précieux conseils, pour son esprit d'ouverture et sa disponibilité. Grâce à lui, notre travail s'est déroulé.*

Ainsi nos remerciements s'adressent également à tous ceux et celles qui ont contribué de près ou de loin pour l'accomplissement de ce modeste travail.

Nous remercions aussi l'ensemble des enseignants de département de Génie Mécanique, qui ont contribué à notre formation

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

*A mes chers parents avec tous mes sincères sentiments de respect ,
d'amour , de gratitude et de reconnaissance pour tous leurs sacrifices déployés
pour m'élever dignement et assurer mon éducation dans les meilleures
conditions, pour leur tendresse, leur soutien moral tout au long de ma vie.*

A la mémoire de ma grand-mère (yemma aicha)

A mon cher frère et ma chère sœur

A tout ma famille

A tous mes amis qui je rencontré tout au longue de ma vie

Salim

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail accompagné d'un profond amour à :

A mes chers parents, avec une profonde admiration et gratitude. Vous qui avez choisi le chemin de l'amour inconditionnel, vous méritez toute ma reconnaissance.

A mes chers frères et à mes chères sœurs.

A tous mes chers amis.

A toute ma famille A tous ceux qui sèment le bonheur dans mon chemin

Yanis

Sommaire

Remerciements	i
Dédicaces	ii
Dédicaces	iii
Sommaire	iv
Liste des figures	vi
Liste des tableaux	vii
NOMENCLATURE	viii
Introduction Générale.....	1
Généralité sur les milieux poreux, transfert de chaleur et les couches limites	
I.1. Introduction	2
I.2. Caractérisation d'un milieu poreux	2
I.2.1 Définition	2
I.2.2 Type d'un milieu poreux	3
I.2.3 Différents pores	4
I.2.4 Volume élémentaire représentatif (V.E.R).....	4
I.2.5 Propriétés du milieu poreux	5
I.2.6 Modèle d'écoulement dans les milieux poreux	8
I.3. Transfert de chaleur dans un milieu poreux	10
I.3.1 Equation d'énergie	10
I.4. Transfert de chaleur.....	11
I.4.1 Convection	11
I.4.2 Rayonnement.....	14
I.4.3 Conduction	14
I.5. Concept de la Couche limite	14
I.5.1 Couche limite dynamique.....	14
I.5.2 Couche limite thermique	15
I.5.3 Paramètre caractéristique de la couche limite	15
I.6. Equation fondamentale.....	16
I.6.1 Equation de continuité.....	16

I.6.2	Equation de Navier – Stokes	16
I.7.	Equation de Prandtl (équation de la couche limite)	17
I.8.	Etat de l’art	17
I.9.	Conclusion.....	20
Problématique et modélisation mathématique		
II.1	Introduction	21
II.2	Présentation de problème	21
II.3	Hypothèses simplification	22
II.4	Equation de conservations.....	22
II.4.1	Condition aux limites	23
II.5	Formulation adimensionnelle	23
II.5.1	Changement de variable :	23
II.5.2	Equation adimensionnelles.....	23
II.5.3	Condition aux limites	24
II.6	Caractérisation de nombre de Nusselt et le coefficient de frottement.....	24
II.7	Conclusion.....	25
Résultats et discussions		
III.1	Introduction	26
III.2	Méthode numérique.....	26
III.2.1	Syntaxe de bvp4c sur Matlab	27
III.3	Validation du code	28
III.4	Résultats et discussions	28
III.4.1	Profil de vitesse adimensionnelle.....	28
III.4.2	Profil de température adimensionnelle :	30
III.5	Variation de nombre de Nusselt	32
III.6	Variation de coefficient de frottement	33
III.7	Conclusion.....	34
Conclusion Générale		35
Références Bibliographiques.....		37
Annexe A.....		39
A.1	Introduction	39
A.2	Problème de valeur aux limites	39
A.3	Méthode numérique.....	40
Résumé		44
Abstract.....		44

Liste des figures

Figure I.1 : Exemple d'un milieu poreux	2
Figure I.2: Milieux poreux non consolidé.....	3
Figure I.3 : Milieux poreux consolidé.....	3
Figure I.4 : schéma illustrant les différents volumes accessible ou non accessible lors du passage de fluide.	4
Figure I.5 : Volume élémentaire représentatif	4
Figure I.6 : Différent types de porosité.	6
Figure I.7: Schéma de l'expérience de Darcy.	8
Figure I.8 : Transfert de chaleur par convection forcée.	12
Figure I.9: Transfert de chaleur par convection naturelle	12
Figure I.10 : Transfert de chaleur par convection combinée ou mixte.....	13
Figure I.11 : Couche limite dynamique et thermique.....	15
Figure I.12 : Géométrie de problème de [8].....	18
Figure II.1 : Géométrie de problème étudié.....	21
Figure III.1 : Comparaison des résultats entre les résultats de la présente étude et les résultats rapportés la référence [21].....	28
Figure III.2 : Variation de profil de vitesse avec η pour M variable.....	29
Figure III.3 : Variable de profil de vitesse avec η pour N Variable.....	29
Figure III.4 : Variation de profil de vitesse avec η pour Pr variable.....	30
Figure III.5 : Variation de profil de vitesse avec η pour M variable.....	31
Figure III.6 : Variable de profil de Température avec η pour N variable.	31
Figure III. 7 : Variation de profil de température avec η pour Pr variable.....	32

Liste des tableaux

Tableau I.1 : Porosité de quelques matériaux.....	6
Tableau I.2 : Perméabilités de quelques matériaux.....	8
Tableau III.1 : Valeur de Nusselt pour Pr, M, N variable.....	32
Tableau III.2 : Valeur de Nusselt pour Pr, D, λ variable.....	33
Tableau III.3 : Valeur de coefficient de frottement pour Pr, M, N variable.....	33
Tableau III.4 : Valeur de coefficient de frottement pour Pr, D, λ variable	34

NOMENCLATURE

Symboles	Définition	Unité (SI)
C_p	Chaleur spécifique à pression constant	$J\ kg^{-1}\ K^{-1}$
C_f	Coefficient de frottement	-
D	Nombre de Darcy	-
f	Fonction de flux adimensionnelle	-
f'	Vitesse adimensionnelle	-
Gr	Nombre de Grashof	-
g	Accélération de pesanteur	$m.s^{-2}$
K	Perméabilité	m^2
K^*	Coefficient d'absorption	-
k	Conductivité thermique	$W.m^{-1}.K^{-1}$
M	Paramètre de temps	-
N	Paramètre de rayonnement	-
Nu	Nombre de Nusselt	-
Pr	Nombre de Prandtl	-
p, q	Variable	-
q_r	Flux radiatif	W
Re	Nombre de Reynolds	-
t	Temps	s
T	Température	K
T_w	Température de la paroi de la surface	K
T_∞	Température de flux libre	K
U_w	Vitesse de la paroi de la surface	$m.s^{-1}$
U_∞	Vitesse de flux libre	$m.s^{-1}$
u, v	Les composants de vitesse dans les composant x et y	$m.s^{-1}$
C	constante avec la dimension température	-

Symboles	Définition	Unité (SI)
grecs		
β	coefficient volumétrique de dilatation thermique	K^{-1}
η	variable de similitude	-
μ	viscosité dynamique	$Kg.m^{-1}.s^{-1}$
ν	viscosité cinématique	$m^2.s^{-1}$
λ	paramètre de convection mixte adimensionnel	-
ρ	Masse volumique	$Kg.m^{-3}$
σ	Constante de Stefan-Boltzmann	$W.m^{-2}.K^{-4}$
θ	Température adimensionnelle	-
θ', θ''	les dérivées du premier ordre et du second ordre	-
δ_D	Épaisseur de la couche limite dynamique	m
δ_t	Épaisseur de la couche limite thermique	m
ε	porosité	-
Ψ	Fonction de courant	-
α	constante avec la dimension temps ⁻¹ ou $\alpha > 0$	-

Abréviations

IVP	Problème valeur initial
BVP	Problème valeur limite

Indices

w	paroi
∞	infini

Introduction Générale

Introduction Générale

Dans la nature aussi bien dans l'industrie les écoulements de fluide de transfert de chaleur à travers un milieu poreux sont souvent rencontrés. Ce phénomène revêt une importance considérable dans nombreux domaine scientifique et technologiques tels que l'ingénierie des réservoirs pétroliers, le stockage des déchets radioactifs, le séchage thermique, c'est pour cela dans les dernières années des nombreuses recherches ont été réalisées sur ce phénomène.

Dans ce contexte le transfert de chaleur par rayonnement sur un écoulement mixte instationnaire sur une surface d'étirement en milieu poreux est un sujet d'intérêt majeur. Récemment, il y a eu des études sur ce thème (Elbashbeshy et Bazid 2006) ont présenté une solution pour la quantité de mouvement instable et le flux de transfert de chaleur dont le mouvement est causé uniquement par l'étirement linéaire d'une surface d'étirement horizontale. Nous on va faire une étude pour analyse les effets de rayonnement thermique sur le comportement thermique d'un écoulement en convection mixte de couche limite en régime instationnaire sur une surface d'étirement verticale dans un milieu poreux Darccen.

Ce mémoire est structuré de la façon suivant :

Dans le premier chapitre nous avons donnée quelque notion fondamentale relatives au milieu poreux, et au transfert thermique (convection, rayonnement, conduction), par la suit nous avons parlé sur la couche limite

Le second chapitre concerne la formulation mathématique de problème posé, les hypothèses simplificatrices. Nous établissons les équations de conservation de masse, de quantité de mouvement, et de conservation d'énergie, et les conditions aux limites. Puis nous définissons les grandeurs adimensionnelles caractérisant le modèle de ce travail.

Dans le troisième chapitre, nous présentons la méthode numérique de résolution les équations différentielles obtenues dans le 2ème chapitre sur le logiciel Matlab. Nous avons opté pour la méthode des différences finies. On a aussi présenté les résultats numériques obtenus, les résultats consistent à présente la distribution des vitesses, les températures, le nombre de Nusselt local et le coefficient de frottement, aussi l'influence des paramètres de contrôle sur ces dernière.

Enfin nous avons terminés par une conclusion générale résumant les principaux résultats obtenus durant cette étude. et une annexe dans laquelle on a fait une description sur La résolution du problème des valeurs aux limites pour les équations différentielles ordinaires dans Matlab avec bvp4c.

Chapitre I : Généralité sur les milieux poreux, Transfert de chaleur et les couches limite

Généralité sur les milieux poreux, transfert de chaleur et les couches limites

I.1. Introduction

Dans les dernières années les scientifiques ont intéressé sur l'étude des écoulements et de transfert de chaleur dans les milieux poreux.

Dans ce chapitre nous donnons des notions fondamentales sur les milieux poreux et le transfert thermique (convection et rayonnement, conduction), notamment les caractéristiques géométriques et les différents modes d'écoulement dans les milieux poreux. Ainsi quelques notions sur les couches limites.

I.2. Caractérisation d'un milieu poreux

I.2.1 Définition

Un milieu poreux est un matériau solide qui contient des vides, ou pores, qui peuvent communiquer entre eux et contenir une ou plusieurs phases fluides, telles que des gaz ou des liquides. Ces fluides peuvent s'écouler à travers les pores et éventuellement échanger de l'énergie ou de la matière avec le solide de la matrice [1].comme le montre La figure suivante.

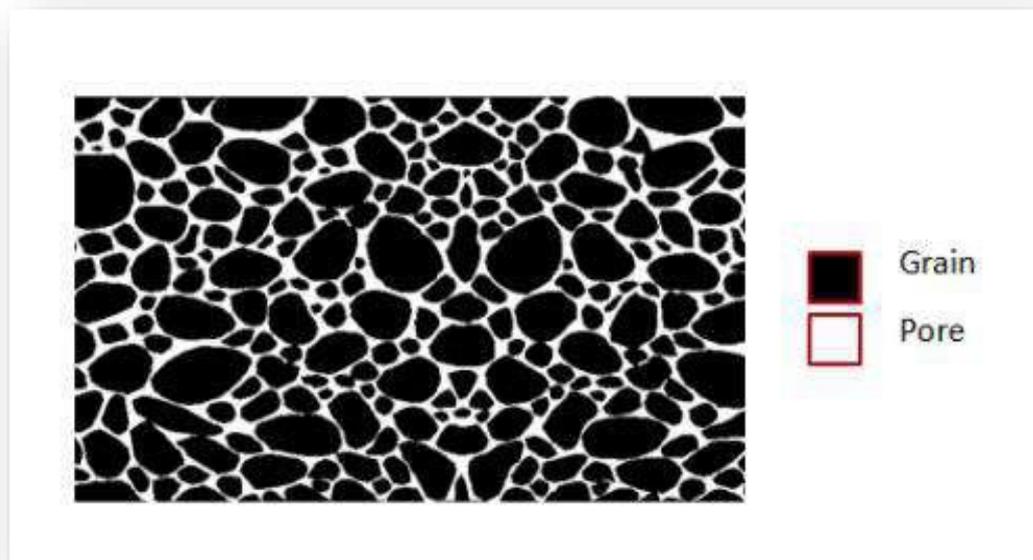


Figure I. 1 : exemple d'un milieu poreux.

I.2.2 Type d'un milieu poreux

a. Milieux poreux non consolidé

Le milieu poreux non consolidé se compose de grains ou de fibres qui ne sont pas liés entre eux [1], tels que du gravier, du sable, des billes en verre ou en acier, du limon et divers autres matériaux. La figure suivante illustre un exemple d'un milieu poreux non consolidé [1].

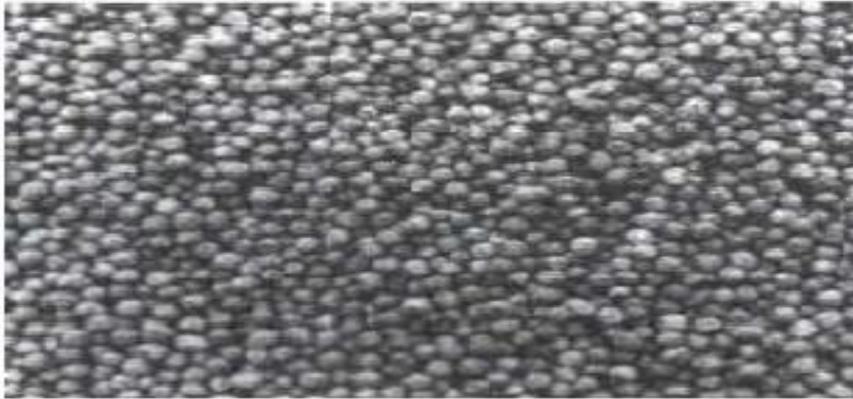


Figure I. 2 : Milieux poreux non consolidé.

b. Milieux poreux consolidé

Le milieu poreux consolidé se compose de grains cimentés [1], tels que la roche calcaire, le grès, les argiles, le bois, les céramiques, les poudres frittées et les tissus végétaux et animaux. La figure suivante illustre un exemple d'un milieu poreux consolidé [1].



Figure I. 3 : Milieux poreux consolidé.

I.2.3 Différents pores

On distingue quatre formes de pores qu'on peut retrouver dans un milieu poreux, cité dans la figure suivante [2] :

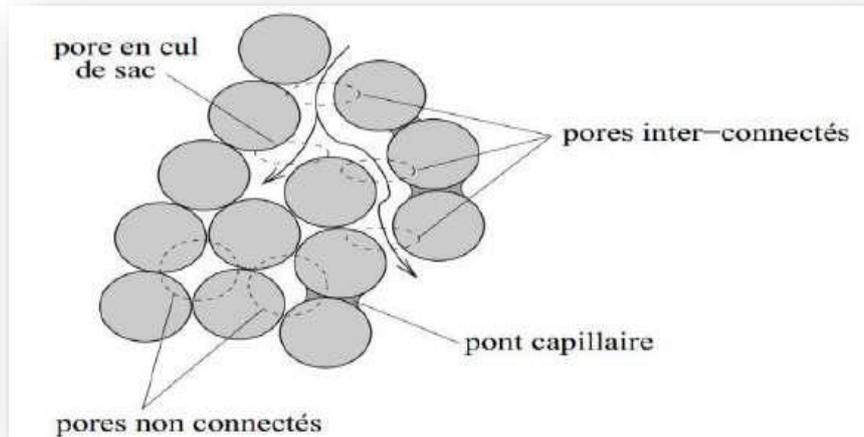


Figure I. 4: schéma illustrant les différents volumes accessible ou non accessible lors du passage de fluide.

I.2.4 Volume élémentaire représentatif (V.E.R)

Lorsqu'on examine les écoulements en milieu poreux, on observe deux échelles distinctes pour décrire les phénomènes qui se produisent. La première échelle est microscopique et correspond aux dimensions des pores. Cette échelle est difficile à manipuler car les conditions et les limites précises sont souvent inconnues. La seconde échelle est macroscopique et concerne les variations significatives des grandeurs moyennées sur un volume de milieu poreux appelé Volume Élémentaire Représentatif (VER). Cette échelle est plus facile à appréhender que celle des pores et est associée à la dimension géométrique du milieu poreux [4]. La figure suivante illustre le volume élémentaire représentatif [3].

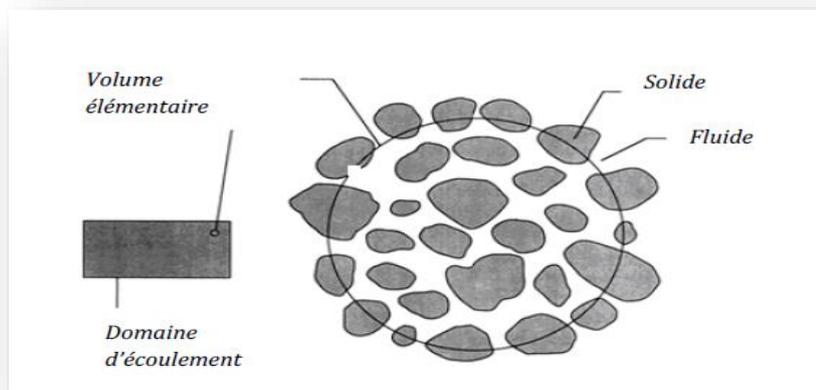


Figure I. 5 : Volume élémentaire représentatif.

I.2.5 Propriétés du milieu poreux

Le milieu poreux est composé de particules solides, appelées grains, qui sont espacées les unes des autres pour former des vides, ou pores. Pour décrire ce milieu, on prend en compte les propriétés géométriques des grains et des pores, ainsi que leur capacité à laisser passer des fluides [6]. Ainsi, nous allons définir les termes suivants : porosité et perméabilité.

a. Porosité

La porosité est une grandeur physique qui mesure les capacités d'écoulement et de rétention d'un substrat poreux. Elle est définie comme la fraction du volume des pores (espaces vides) V_p par rapport au volume total du milieu poreux V_t , notée ε [3]. On peut l'exprimer mathématiquement comme suit :

$$\varepsilon = \frac{V_p}{V_t} = 1 - \frac{V_s}{V_t} \quad (\text{I.1})$$

Où V_s est le volume des particules solides.

- **Porosité totale**

Qui tient compte des cavités occluses au sein du solide (pores fermés) :

$$\varepsilon_t = \frac{\text{volume de l'échantillon}}{\text{volume des pores}} \quad (\text{I.2})$$

Cette notion est reliée à la masse volumique apparente de l'échantillon et à la masse volumique de matériau constitutif (grandeurs souvent manipulées dans de nombreuses applications) par l'espace poreux connecté à travers lequel s'effectue l'écoulement des fluides [6].

- **Porosité accessible**

La porosité peut prendre différentes formes, telles que la porosité d'interstice (par exemple pour la mousse), la porosité de fissure (par exemple pour le granite) ou la porosité de Karst (par exemple pour le calcaire, la dolomie ou les évaporites). Elle dépend de la dimension, de la forme et de l'arrangement des grains constituant le milieu poreux [3].

$$\varepsilon = \frac{\text{volume des pores accessible}}{\text{volume de l'échantillon}} \quad (\text{I.3})$$

La figure suivant représente les deux types de porosité.

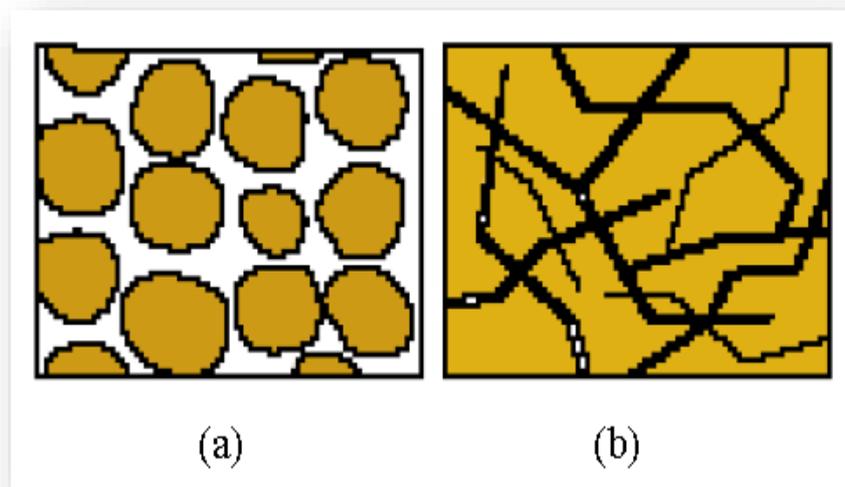


Figure I. 6 : Différents types de porosité.

On trouve dans le tableau suivant des mesures expérimentales sur la porosité de quelque matériau [3].

Matériaux	Porosité
Matériau mousseux	0.98
Fibre de verre	0.88 – 0.93
Fil à tisser	0.68 – 0.76
Grains de silice	0.65
Poudre d'ardoise noire	0.57 – 0.66
Cuir	0.56 – 0.59
Catalyseur	0.45
Granulé de pierres	0.44 – 0.45
Terre	0.43 – 0.54
Sable	0.37 – 0.50
Poudre de silice	0.37 – 0.94
Sphère bien empilée	0.36 – 0.43
Filtre de cigarettes	0.17 – 0.49
Briques	0.12 – 0.34
Poudre de cuivre	0.09 – 0.34
Pierre à chaud. Dolomite	00.04 – 0.10
Houille	0.02 – 0.07

Tableau I. 1 : Porosité de quelques matériaux.

b. Perméabilité

La perméabilité est une grandeur statistique qui mesure la facilité avec laquelle un fluide peut s'écouler à travers les pores d'un milieu poreux. Elle est représentée par la lettre K dans l'équation de Darcy. Selon la porosité et la géométrie de la matrice solide, différents types de perméabilité peuvent être distingués, tels que la perméabilité spécifique (ou absolue) mesurée

avec un seul fluide, comme la perméabilité à l'eau ou à l'air, et la perméabilité effective mesurée avec deux fluides. Le rapport entre ces deux derniers types de perméabilité est appelé la perméabilité relative [3]. Notre étude sur les transferts dans un milieu poreux se concentre uniquement sur la perméabilité spécifique.

Par exemple dans le modèle de Darcy la perméabilité est donnée :

$$K = - \frac{\mu_f U_D}{\frac{dp}{dx}} \quad (\text{I.4})$$

μ_f : Viscosité dynamique du fluide.

U_D : Vitesse de darcy.

$\frac{dp}{dx}$: Gradient de pression.

La perméabilité mesure la facilité d'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux sous l'influence d'un gradient de pression et dépend uniquement de la porosité et de la géométrie de la matrice solide. La relation de Kozeny-Carmen (1937) [8], permet d'estimer la perméabilité K d'un milieu poreux non consolidé constitué d'éléments identiques de géométrie simple.

$$K = \frac{d_p^2 \varepsilon^3}{36C_0 (1-\varepsilon)^2} \quad (\text{I.5})$$

La constante C_0 , dont la valeur se situe entre 3,6 et 5, dépend de la géométrie des grains. Pour les grains sphériques, C_0 vaut 4,8 et dans ce cas, d représente le diamètre de la sphère, et d désigne une dimension caractéristique des éléments constituant la matrice poreuse (diamètre pour des billes, arrête pour des cubes...)

Pour améliorer l'estimation de la perméabilité, Ergun a proposé une équation similaire à celle de Kozney-Carmen. Cette équation permet de mesurer la perméabilité spécifique d'un écoulement soumis à un gradient de Pression en fonction du diamètre moyen des grains [8], (En supposant qu'ils sont sphériques).

$$K = \frac{d^2 \varepsilon^3}{150(1-\varepsilon)^2} \quad (\text{I.6})$$

En identifiant les variables, on obtient la valeur $C_0 = 4.16$ pour l'équation de Kozney-Carman. Cependant, en raison de la complexité et du grand nombre de paramètres associés à cette équation, il n'existe pas de solution unique et simple. Le tableau suivant représente la Perméabilités de quelques matériaux [8]. On trouve dans le tableau suivant des mesures expérimentales sur la perméabilité de quelque matériau.

Matrice	Perméabilité
Brique	$10^{-15} - 2.2 \times 10^{-13}$
Pierre à chaud, Dolomite	$2.0 \times 10^{-15} - 4.5 \times 10^{-14}$
Cuir	$9.5 \times 10^{-14} - 1.2 \times 10^{-13}$
Poudre d'ardoise noire	$4.9 \times 10^{-14} - 1.2 \times 10^{-13}$
Terre	$2.9 \times 10^{-13} - 1.4 \times 1.4^{-11}$
Fibres de verre	$2.4 \times 10^{-11} - 5.1 \times 10^{-11}$
Sable	$2.0 \times 10^{-11} - 1.8 \times 10^{-10}$
Cheveux artificiels	$8.3 \times 10^{-10} - 1.2 \times 10^{-9}$
Plaque de liège	$3.3 \times 10^{-10} - 1.5 \times 10^{-9}$
Fils à tisser	$3.8 \times 10^{-9} - 1.0 \times 10^{-8}$
Cigarette	1.1×10^{-9}

Tableau I. 2 : Perméabilités de quelques matériaux.

I.2.6 Modèle d'écoulement dans les milieux poreux

Le modèle d'écoulement d'un milieu poreux repose sur l'utilisation d'un modèle continu qui se fonde sur le concept de volume élémentaire représentatif. Ce modèle est largement utilisé pour décrire de manière précise le bilan de quantité de mouvement d'un fluide visqueux de type Newtonien dans un milieu poreux [9]. On le connaît sous le nom de modèle Darcy-Brinkman-Forchheimer.

a. Equation de Darcy

La première étude sur l'écoulement en milieux poreux a été publiée par Darcy dans son ouvrage intitulé "Les fontaines de la ville de Dijon". À partir d'expérimentations, il a démontré que la vitesse d'écoulement est directement proportionnelle au gradient de la pression motrice ($P_m = P + \rho g z$) entre l'entrée et la sortie [3]. Cette équation est illustrée dans la figure ci-dessous.

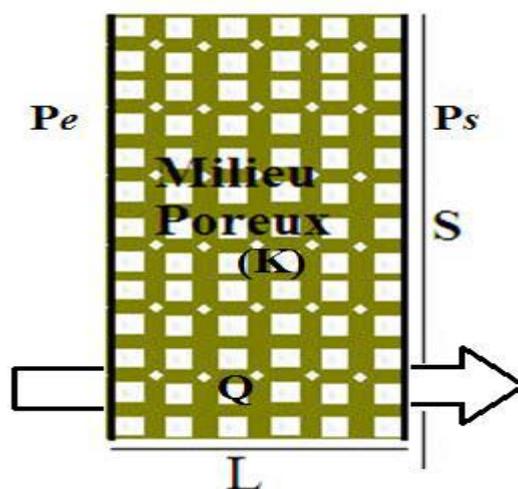


Figure I. 7: Schéma de l'expérience de Darcy.

En général, la loi de Darcy décrit l'écoulement moyen dans un milieu poreux. Cette loi, établie à partir d'écoulements unidirectionnels sur des colonnes de sables, a mis en évidence la proportionnalité du gradient de pression appliqué et le débit d'eau traversant la colonne de sable. Depuis, les sciences hydrogéologiques sont basées sur la loi de Darcy même pour les écoulements multidirectionnels [8]. Elle s'écrit :

$$\vec{\nabla}P = -\frac{\mu}{K}\vec{V}_{fil} \quad (I.7)$$

Ou \vec{V}_{fil} vitesse d'infiltration, μ et la viscosité dynamique de fluide, K et la perméabilité du milieu poreux et $\vec{\nabla}P$ le gradient de pression appliqué.

L'équation fait appel au tenseur perméabilité K , qui caractérise la perméabilité du milieu et ne dépend que de la géométrie de la matrice poreuse. Cette grandeur est très variable selon les milieux et ne peut généralement être mesurée que par des expérimentations. Pour les milieux granulaires isotropes [8].

b. Loi de Darcy-Forchheimer

Lorsque la vitesse de filtration est élevée, la relation entre la vitesse et la loi de Darcy n'est plus linéaire et nécessite une correction. Celle-ci est obtenue en ajoutant un terme inertiel non linéaire de second ordre qui tient compte des effets macroscopiques. Ce modèle est appelé modèle de Darcy-Forchheimer [10] et peut être formulé de manière générale comme suit.

$$\vec{\nabla}P = \rho_f \vec{g} - \frac{\mu_f}{K}\vec{V}_{fil} - \frac{\rho_f C_f}{\sqrt{K}}|\vec{V}_{fil}|\vec{V}_{fil} \quad (I.8)$$

Il existe une région de transition, définie par le nombre de Reynolds des pores, située entre 1 et 10. Lorsque le nombre de Reynolds est inférieur à 1, l'écoulement est lent et le modèle de Darcy est suffisant pour décrire avec précision le phénomène, où les forces de pression sont prépondérantes. Au-delà de 10, les forces d'inertie sont dominantes, et le modèle de Darcy ne peut plus être utilisé. Entre ces deux valeurs, se situe la zone de transition où les deux modèles coexistent simultanément [10].

c. Modèle de Darcy-Brinkman

Lorsque la perméabilité et la porosité atteignent des valeurs élevées, les effets de la viscosité et de la friction sur les surfaces solides deviennent significatifs. Ainsi, le modèle de Darcy-Brinkman, dérivé du modèle de Stokes qui décrit les forces visqueuses autour d'une sphère [10], peut être formulé sous une forme générale.

$$\bar{\nabla} p = -\frac{\mu}{K} \bar{\nabla} \cdot \bar{V}_{fil} + \mu_{eff} \nabla^2 \bar{V}_{fil} + \rho \bar{g} \quad (I.9)$$

μ_{eff} : Viscosité effective du milieu poreux.

d. Modèle général

Afin de prendre en compte tous les effets mentionnés précédemment, les termes de Brinkman et de Forchheimer sont ajoutés à l'équation de Darcy. Cette formulation conduit au modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer. L'équation vectorielle qui décrit la conservation de la quantité de mouvement à travers un milieu poreux peut ainsi être obtenue [10].

$$\underbrace{\frac{\rho_f}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{V}}{\partial T}}_a + \underbrace{\frac{\rho_f}{\varepsilon} (\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V}}_b = -\bar{\nabla} p + \underbrace{\rho \bar{g}}_c - \underbrace{\frac{\mu}{K} \bar{V}}_d + \underbrace{\frac{C_f \rho_f}{\sqrt{K}} |\bar{V}| \bar{V}}_e + \underbrace{\mu_{eff} \nabla^2 \bar{V}}_f \quad (I.10)$$

\bar{V} : Une quantité moyennée à travers un Volume élémentaire.

(a) : Forces inertielles macroscopiques.

(b) : Gradient de pression.

(c) : forces de volumes.

(d) : Terme de Darcy.

(e) : Terme de forchheimer (Forces inertielles microscopique)

(f) : Terme visqueux de Brinkman.

I.3. Transfert de chaleur dans un milieu poreux

I.3.1 Equation d'énergie

Afin de déduire l'équation d'énergie du premier principe de la thermodynamique pour un milieu poreux, on utilise des simplifications et des approximations pour simplifier la complexité et la forme du milieu poreux. En outre, on suppose que les pores du milieu poreux sont interconnectés [11].

$$(\rho c)_{eff} \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho c_p)_f \bar{V} \cdot \bar{\nabla} T = K_{eff} \bar{\nabla}^2 T \quad (I.11)$$

$$(\rho c)_{eff} = (1 - \varepsilon)(\rho c)_s + \varepsilon(\rho c_p)_f \quad (I.12)$$

$$K_{eff} = (1 - \varepsilon)k_s + \varepsilon k_f \quad (I.13)$$

I.4. Transfert de chaleur

Le transfert de chaleur est un phénomène essentiel dans les domaines de la science technologique, des conceptions techniques et de l'industrie, qui trouve des applications très variées dans de nombreux aspects de la vie. Une meilleure compréhension de ce phénomène peut offrir de nombreux avantages. En effet, les applications incluent non seulement des aspects industriels tels que les générateurs de puissance, les réacteurs, les turbines, les échangeurs de chaleur et autres dispositifs de conversion d'énergie, mais également des aspects naturels tels que les courants atmosphériques et océaniques, le transfert de chaleur biologique et le transfert thermique dans les atmosphères stellaires.

L'étude du transfert de chaleur, qui peut se produire selon trois modes distincts (convection, conduction et rayonnement), repose sur les principes de la thermodynamique.

Le premier principe du transfert de chaleur énonce la loi de conservation de l'énergie, qui stipule que l'énergie ne peut être ni créée ni détruite, mais seulement transformée d'une forme à une autre.

Le deuxième principe établit que la chaleur se déplace naturellement d'une source à haute température (chaude) vers une source à basse température (froide) [12].

I.4.1 Convection

Le transfert de chaleur par convection se produit principalement dans les fluides, tels que les liquides et les gaz, en mouvement. Ce phénomène correspond au transfert de chaleur d'un point à un autre à l'intérieur du fluide par le déplacement des particules de ce dernier [12].

Le mode de transfert de chaleur par convection se compose de deux mécanismes distincts. En plus du transfert d'énergie dû au mouvement moléculaire aléatoire (diffusion), l'énergie est également transférée par le mouvement global ou macroscopique du fluide. Ce mouvement de fluide est associé au fait qu'un grand nombre de molécules se déplacent collectivement ou en agrégats à tout moment. Un tel mouvement, en présence d'un gradient de température, contribue au transfert de chaleur [13].

a. Convection forcée

La convection forcée se produit lorsqu'un fluide est mis en mouvement à l'aide d'un dispositif mécanique tel qu'un ventilateur ou une pompe, indépendamment des sources thermiques dans le système physique. Bien que le fluide échange de la chaleur, son mouvement est peu affecté par les différences de température [12]. Dans ce type de convection, le nombre de Reynolds régit le comportement de l'écoulement.

L'application du théorème de Buckingham à un problème de convection forcée fait apparaître trois groupements ou nombres sans dimension en relation sous la forme suivante.

$$\text{Nombre de Reynolds } Re = \frac{VL_c}{\nu} \quad (\text{I.14})$$

$$\text{Nombre de Prandtl } Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (\text{I.15})$$

En façon générale le nombre de Nusselt $Nu = f(Re, Pr)$.

La figure suivante illustre le transfert par convection forcée [12].

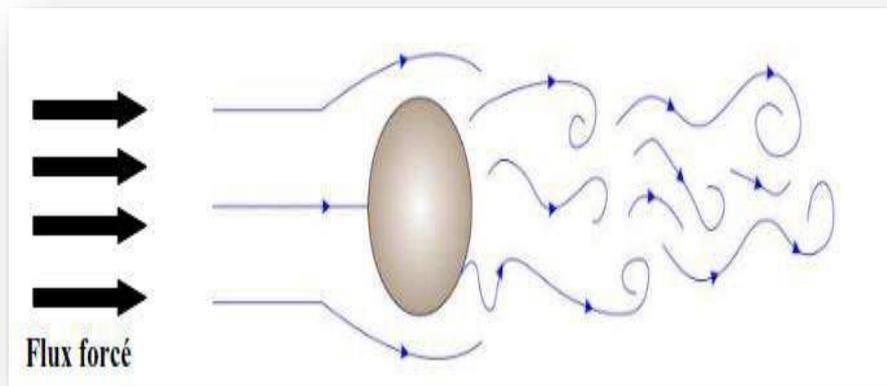


Figure I. 8 : Transfert de chaleur par convection forcée.

b. Convection naturelle

Le transfert de chaleur par convection est composé de deux processus de base. En l'absence d'un flux extérieur, le mouvement de l'écoulement se produit naturellement en raison de la différence de densité due à une variation de température ou de concentration dans un champ de force tel que la gravité. Ce processus est appelé convection naturelle ou convection libre. Les différences de densité créent des effets de flottabilité qui génèrent le flux. Par exemple, un objet chauffé et refroidi dans l'air ambiant génère un tel flux dans la zone qui l'entoure [12].

Le nombre de Grashof caractérise la convection naturelle du type où plus le nombre n'est élevé, plus l'effet de convection naturelle est important.

$$Gr = \frac{g \beta (T_w - T_\infty) L_c^3}{\nu^2} \quad (\text{I.16})$$

En façon générale le nombre de Nusselt $Nu = f(Gr, Pr)$

La figure suivante illustre le transfert par convection naturelle [1].

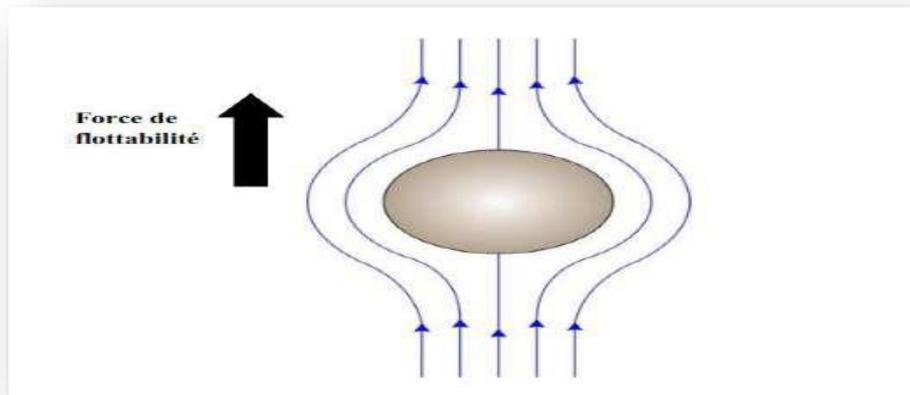


Figure I. 9 : Transfert de chaleur par convection naturelle.

c. Convection mixte

Il peut arriver que les mécanismes responsables de la convection naturelle et forcée coexistent et aient une influence similaire sur le processus de transport. Ce phénomène est appelé "convection mixte" ou "convection combinée", car il implique à la fois la convection forcée et la convection naturelle. Un exemple de ce régime de convection est observé lors du refroidissement des composants électroniques dans un ordinateur, où les composants réchauffent l'air ambiant et provoquent un écoulement de convection libre qui peut endommager les autres composants. Les systèmes de ventilation sont conçus pour refroidir les composants en produisant un flux d'air froid. Selon leur efficacité, les systèmes de ventilation peuvent produire de la convection mixte, naturelle ou forcée [12]. La figure suivante illustre le transfert combiné entre forcée et naturelle [12].

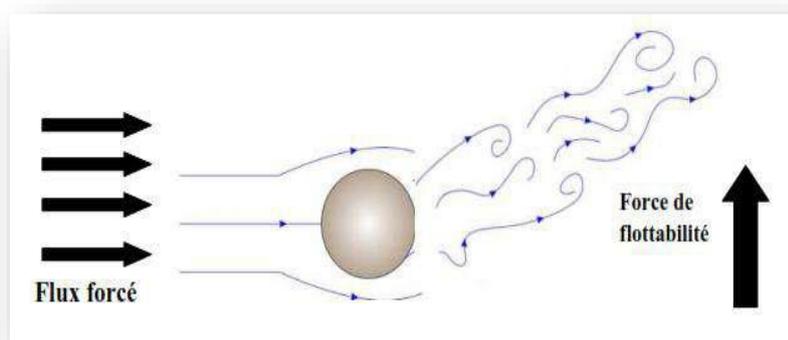


Figure I. 10 : Transfert de chaleur par convection mixte.

I.4.2 Rayonnement

Malgré l'absence de support solide, liquide ou gazeux au-delà de l'atmosphère terrestre, la Chaleur du soleil parvient à atteindre notre planète par le biais du rayonnement, un mode de transfert correspondant à un flux d'ondes électromagnétiques émises par tout corps, quelle que soit sa température. Plus la température est élevée, plus le rayonnement électromagnétique est important. Tout comme pour la conduction, les interactions entre atomes et molécules génèrent ou absorbent ce rayonnement, entraînant une diminution ou une augmentation de leur énergie. Le rayonnement n'affecte que les milieux transparents (gaz, verre, vide) ou semi-opaques (gaz + fumées de CO₂, gaz + vapeur d'eau) [14] en raison de sa nature.

I.4.3 Conduction

À la mention du mot conduction, nous devrions immédiatement évoquer des concepts d'activité atomique et moléculaire, car ce sont les processus à ces niveaux qui soutiennent cette mode transfert de chaleur. La conduction peut être considérée comme le transfert d'énergie des particules les plus énergétiques vers les particules les moins énergétiques d'un corps, en raison des interactions entre les particules [13]. Dans les fluides (liquides et gaz) ce transport d'énergie résulte au niveau microscopique.

I.5. Concept de la Couche limite

L'étude des écoulements près des parois est cruciale pour évaluer les échanges thermiques par convection entre un solide et le fluide qui l'enveloppe. Imaginons un fluide en écoulement le long d'une surface S . À distance de la surface, le fluide présente une vitesse moyenne V_m et une température moyenne T_m . Toutefois, près de la surface, la température du fluide est pratiquement identique à celle de la surface, tandis que la vitesse du fluide est pratiquement nulle. Les diagrammes de la vitesse et de la température dans la direction y , perpendiculaire à la surface, permettent de définir une couche de fluide appelée "couche limite" [15].

La couche limite est un concept clé pour comprendre la convection thermique et dynamique entre une surface et un fluide en mouvement [5].

I.5.1 Couche limite dynamique

Des forces de frottement sont présentes dans cette couche, ce qui ralentit le mouvement du fluide près de la paroi où sa vitesse est de zéro [16].

I.5.2 Couche limite thermique

Lorsqu'un fluide dont la température est T_e coule sur une paroi à une température T_P , des transferts thermiques ont lieu. Les particules du fluide sont chauffées ou refroidies au contact de la paroi [16], créant ainsi un gradient thermique.

La figure suivante illustre les couches limite dynamique et thermique [16].

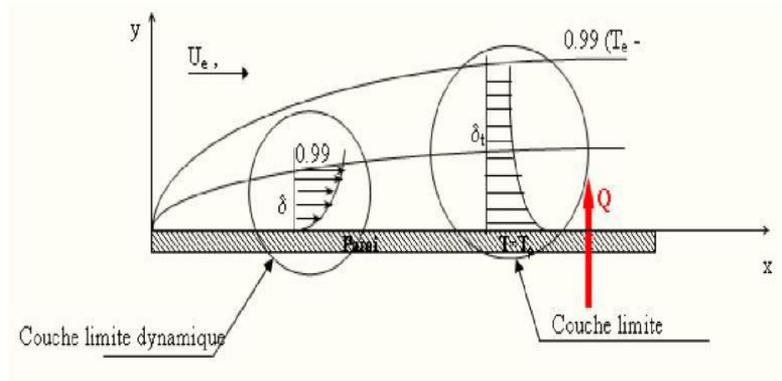


Figure I. 11: Couche limite dynamique et thermique.

I.5.3 Paramètre caractéristique de la couche limite

a. Epaisseur de la couche limite δ

L'épaisseur de la couche limite δ est conventionnellement définie comme la distance à la paroi [17] telle que :

$$\frac{u}{u_\infty} = 0.99 \quad (\text{I.17})$$

b. Epaisseur de couche limite thermique δ_T

L'épaisseur thermique δ_T de la couche limite est définie conventionnellement comme le rapport de la différence entre la température du fluide sur la frontière de la couche limite $T_{\delta T}$ et sa valeur T_w à la paroi, rapportée à la différence entre la température T_∞ loin de la paroi et T_w .

$$\frac{T_{\delta T} - T_w}{T_\infty - T_w} = 0.99 \quad (\text{I.18})$$

c. La force de frottement

La contrainte de cisaillement pariétale est en relation avec la force de frottement [18].

$$\tau_p = \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} \quad (\text{I.19})$$

d. Coefficient de frottement

En normalisant la contrainte de cisaillement pariétale avec la pression dynamique, on peut obtenir un coefficient sans dimension appelé coefficient de frottement local [18].

$$c_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2} \quad (\text{I.20})$$

I.6. Equation fondamentale

Si l'on considère un fluide Newtonien en écoulement bidimensionnel, incompressible et permanent, les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement (aussi connues sous le nom d'équations de Navier-Stokes) peuvent être exprimées de la manière suivante.

I.6.1 Equation de continuité

L'équation de continuité énonce le principe de conservation de la masse. Elle stipule que la quantité de masse qui entre et sort d'un volume donné doit être égale à la variation de la densité par unité de temps, pour une même unité de volume. Autrement dit, la somme de toutes les masses entrantes et sortantes par unité de temps doit être égale au changement de masse dû au changement de densité par unité de temps, cela donne :

$$\text{div}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{I.21})$$

I.6.2 Equation de Navier – Stokes

Les équations de Navier-Stokes ont pour origine le principe de conservation de la quantité de mouvement.

Pour un fluide newtonien et incompressible on a :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{f} + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{v} \quad (\text{I.22})$$

Où : $\nu = \frac{\mu}{\rho}$

\vec{f} : désigne la résultante des forces massiques s'exerçant dans le fluide ($N \cdot kg^{-1}$)

I.7. Equation de Prandtl (équation de la couche limite)

Prandtl a démontré que certaines variables des équations de Navier-Stokes sont négligeables dans la couche limite en comparant leurs ordres de grandeur. En particulier, la vitesse normale à la paroi est inférieure à la vitesse tangentielle et la variation de la vitesse le long de la paroi est nettement plus faible que la variation dans la direction normale. Ces équations de Navier-Stokes simplifiées modélisent l'écoulement du fluide dans la couche limite et sont communément appelées "équations de Prandtl". Pour un écoulement permanent bidimensionnel incompressible [19], elles s'écrivent de la manière suivante.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{I.23})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} \quad (\text{I.24})$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (\text{I.25})$$

Où T_{xy} est la contrainte de cisaillement. Elle vaut $T_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ pour un écoulement laminaire.

I.8. Etat de l'art

G.Salazar [2], a fait une l'étude pour modéliser le séchage des milieux poreux déformables saturés (solide-liquide). La modélisation tient compte à la fois de la nature du produit et de ses conditions initiales. L'originalité du modèle proposé réside dans le fait qu'il prend en compte le gradient de pression du liquide. Par la loi de Darcy, La résolution numérique du modèle est effectuée à l'aide de la méthode des éléments finis, considérant le milieu à grandes déformations et effectuant la transformation spatiale "Euler-Lagrange". Les résultats numériques sont validés avec un gel d'alumine dans différentes conditions de séchage. Une étude de sensibilité démontre forte influence de la perméabilité et des propriétés rhéologiques sur le processus de séchage et déformation du matériau

B. Ouattara [4], a réalisé une étude analytique et numérique sur l'effet de la conductivité thermique et de l'épaisseur des parois, la géométrie considère une cellule horizontale de grande extension longitudinale remplie d'un milieu poreux saturé par un mélange binaire délimité par deux parois de même épaisseur et de même conductivité thermique. Les surfaces extérieures de ces parois sont soumises à un flux de chaleur constant. les paramètres critiques associés à la

transition entre la solution d'équilibre et l'écoulement convectif monocellulaire sont $Racs = 12(1 + 2d\delta) / [1 + \psi(2Le d\delta + Le + 1)]$ et $kcs = 0$ représentant respectivement le nombre de Rayleigh critique et le nombre d'onde critique avec : Le le nombre de Lewis, δ le rapport de l'épaisseur des parois sur l'épaisseur de la couche poreuse et d le rapport de leur conductivité thermique respective, et les résultats analytiques et numériques obtenus sont en bon accord.

R Younsi [8] : dans cette thèse l'auteur a étudié numériquement, les transferts de chaleur et de masse par convection naturelle en milieux fluides et poreux ont été étudiés numériquement. Les parois verticales sont soumises à des températures et concentrations constantes, tandis que les parois horizontales sont adiabatiques et imperméables. Le phénomène de la convection thermosoudable est régi par les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie et de la concentration. Le milieu poreux est modélisé suivant le modèle général de Darcy – Brinkman – Forchheimer. L'écoulement convectif est régi par différents paramètres de contrôle, à savoir le nombre de Rayleigh (Ra), le rapport des forces de volume (N), le nombre de Prandtl (Pr), le nombre de Lewis (Le), le nombre de Darcy (Da) et la porosité ϵ de la matrice poreuse. La méthode des volumes de contrôle a été employée pour résoudre les équations de base en milieu fluide et poreux.

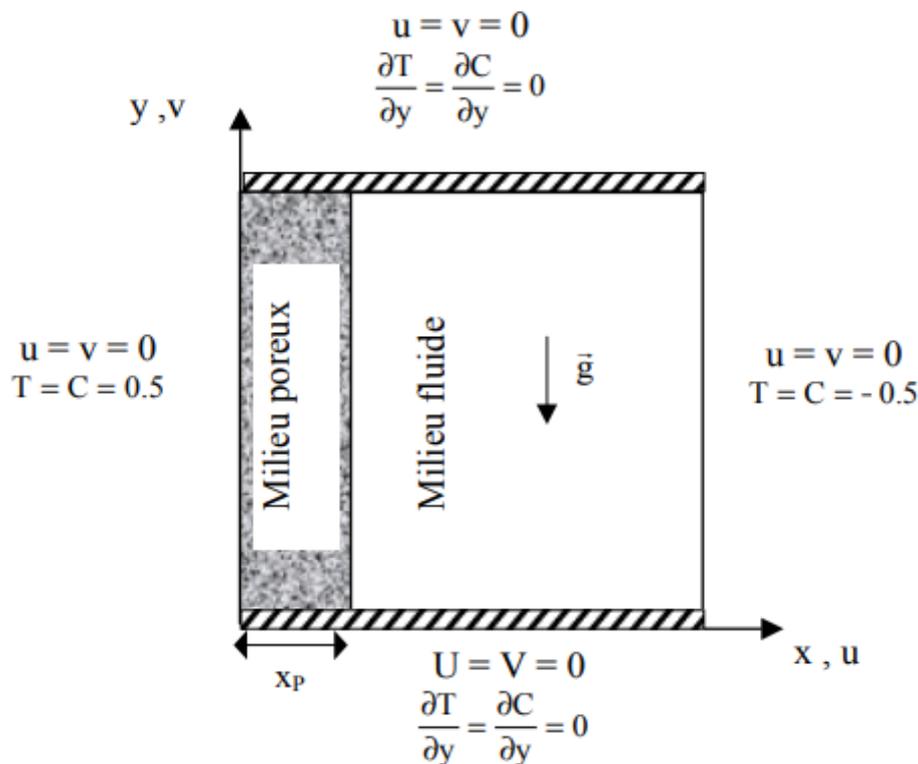


Figure I. 12 : Géométrie de problème de [8].

Mme. S. F. Zohra [12] : Cette thèse a pour objet l'étude du transfert de chaleur conjugué et couplé au transfert de masse d'un fluide Newtonien. Le travail est axé sur un cylindre vertical creux et est conduit numériquement. Le phénomène du couplage de convection-conduction est traduit par les équations de la conservation de continuité, de la quantité de mouvement, de l'énergie et de la concentration, couplées entre elles et en relation avec des transferts pariétaux via une interface. Différents paramètres de contrôle interviennent, notamment celui du transfert thermique conjugué p . Le paramètre du champ magnétique M , le paramètre de la réaction chimique K et le paramètre de la génération de chaleur Q sont aussi présents dans la formulation. Le problème ainsi envisagé est résolu numériquement, à l'aide de la méthode des différences finies, exprimée par une discrétisation de Runge-Kutta implicite. Les principaux résultats obtenus ont permis de mettre en évidence l'influence du transfert conjugué en rapport de son impact, de l'effet de différents paramètres de contrôle notamment sur les profils de vitesse, la distribution de température et de la concentration.

Dewitt et Incropera [13], « Fundamentals of Heat and Mass Transfer » : est un livre de référence qui traite des principes fondamentaux de la thermodynamique de transfert de chaleur et de masse. Dans cette référence, on peut trouver un chapitre entier consacré aux écoulements externes où les auteurs détaillent la théorie de la couche limite dynamique et thermique sur une plaque plane horizontale à l'aide de laquelle les équations de mouvement et d'énergie peuvent être simplifiées puis résolues pour avoir la distribution de la vitesse et de la température. Cela nous permet de déduire l'équation "la plus fameuse dans le domaine du transfert de chaleur" exprimant le nombre de Nusselt en fonction du nombre de Reynolds et du nombre de Prandtl et servant de référence pour presque tous les travaux réalisés depuis:

$$Nu = 0.664 Re^{0.5} Pr^{0.33} \quad \text{Laminaire}$$

$$Nu = 0.0293 Re^{0.8} Pr^{0.33} \quad \text{Turbulent}$$

T. Benyamma, A. Baci [16], Dans ce travail, les auteurs ont effectué une étude de la couche limite dynamique laminaire d'un fluide incompressible sur une plaque horizontale avec aspiration ou refoulement. Pour cela nous avons simplifié puis résolu numériquement les équations de Prandtl avec la méthode des différences finies en utilisant les schémas de Keller-box et d'Euler. L'analyse montre que l'épaisseur de la couche limite et également le profil de la vitesse sont affectés par le paramètre " λ ". Les résultats obtenus montrent que l'aspiration a un effet similaire à celui d'un gradient de pression favorable; le refoulement a un effet similaire à

celui d'un gradient de pression adverse; et qu'une séparation de la couche limite se produit pour $\lambda < -0.863$.

I.9. Conclusion

Dans Ce chapitre, nous avons présenté les principales caractéristiques qui se rapportent aux milieux poreux. Nous avons évoqué les notions de base du transfert de chaleur (rayonnement et convection mixte) et la couche limite. Nous avons présenté en dernier les équations régissant le problème de l'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux et les équations de Navier-Stokes ainsi que les équations des couches limite.

Chapitre II
Problématique
Et modélisation
mathématique

Problématique et modélisation mathématique

II.1 Introduction

Dans le présent chapitre, nous présentons le problème physique, et les hypothèses simplificatrices. Ainsi que les équations qui nous permettront de modéliser le problème étudié (équation de Navier-Stokes et la couche limite). Ensuite nous posons les conditions aux limites sous forme adimensionnelle.

Finalement, nous introduisons les principales grandeurs dynamiques et thermiques.

II.2 Présentation de problème

Le Domain d'étude considéré dans ce travail, est un écoulement bidimensionnel laminaire et instationnaire de la couche limite de convection mixte d'un liquide visqueux incompressible à travers une plaque plan vertical semi infini noyée dans un milieu poreux comme montre le schéma ci-dessous la figure (II.1) s'étirant avec vitesse u_w et la température à la plaque est supposé constant T_w , l'axe des x est direct long de la surface d'étirement et orienté suivant le sens de l'écoulement, l'axe des y lui est perpendiculaire à la plaque, u et v sont les composantes de vitesse dans les directions x et y .

Avec g est l'accélération de pesanteur. Dans ce cas il apparaîtra deux couches limites thermique, dynamique qui sont respectivement δ_T, δ_D .

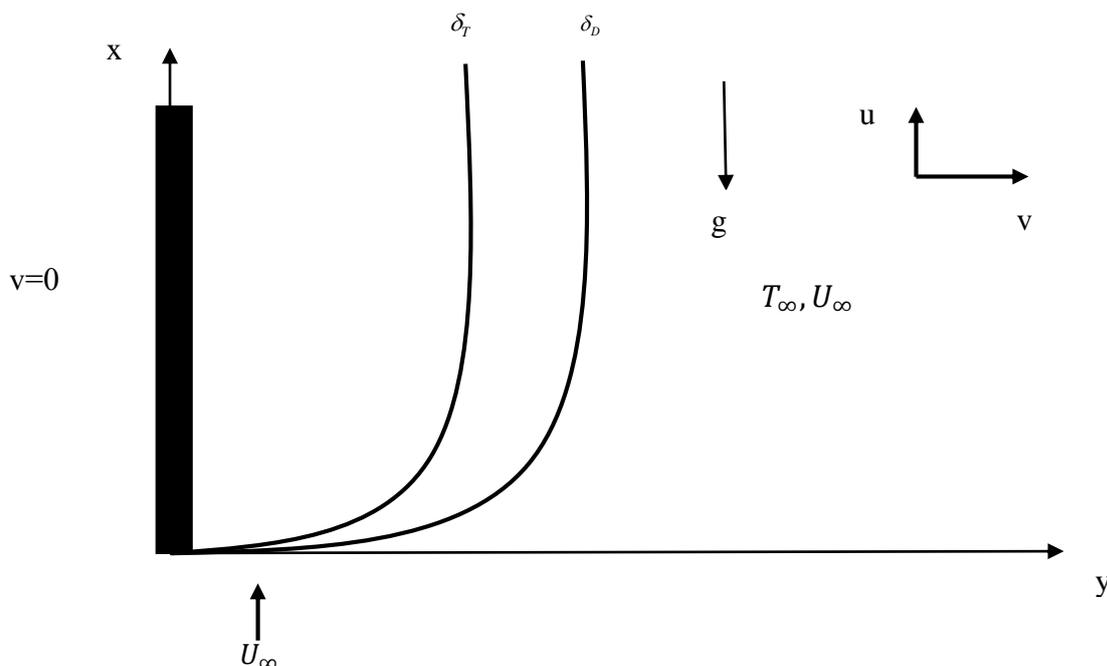


Figure II. 1 : Géométrie de problème étudié.

II.3 Hypothèses simplification

La modélisation du système étudié est basée sur hypothèses suivantes.

- ✓ Ecoulement laminaire et bidimensionnel (x, y).
- ✓ Régime instationnaire $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$
- ✓ Le fluide étudié est newtonien $(\rho, \mu) = cst$ est incompressible.
- ✓ Les Transfert par rayonnement ne sont pas négligeables.
- ✓ Le milieu poreux est isotrope et homogène.
- ✓ L'approximation de boussinesq est supposé validée.
- ✓ Les approximations de couche limite :

$$v \ll u \quad \frac{\partial v}{\partial x} \ll \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \ll \frac{\partial u}{\partial y} \quad \frac{\partial T}{\partial x} \ll \frac{\partial T}{\partial y}$$

II.4 Equation de conservations

Compte tenu des hypothèses citées précédemment, les équations régissant le phénomène s'écrivent :

- **Equation de continuité**

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.1})$$

- **Equation de quantité de mouvement**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g \beta (T - T_\infty) - \frac{\nu}{K} u \quad (\text{II.2})$$

- **Equation d'énergie**

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho C_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho C_p} \frac{\partial q_r}{\partial y} \quad (\text{II.3})$$

En utilisant l'approximation de Rosseland, on obtient le flux de chaleur radiatif

$$q_r = -\frac{4\sigma}{3k^*} \frac{\partial T^4}{\partial y} \quad \text{et la constant de Stefan-Boltzmann, nous supposons que la différence}$$

de température à l'intérieur de l'écoulement est telle que T^4 peut être étendu dans une série de Taylor. En développant T^4 autour de T_∞ et en négligeant les ordres supérieurs, nous obtenons

$$T^4 = 4T_\infty^3 T - 3T_\infty^4$$

Donc l'équation d'énergie s'écrit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \left(\frac{k}{\rho C_p} + \frac{16\sigma T_\infty^3}{3\rho C_p k^*} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (\text{II.4})$$

II.4.1 Condition aux limites

$$\text{À } y = 0; \quad u = u_w = \frac{cx}{1-\alpha t}; \quad v = 0; \quad T = T_w$$

$$\text{À } y \rightarrow \infty; \quad u = 0; \quad T = T_\infty;$$

II.5 Formulation adimensionnelle

Pour résoudre le problème il est préférable d'utiliser l'adimensionnement des variables qui nous permettent d'avoir des informations généralisées à une variété des problèmes ayant les mêmes grandeurs de coefficient de similitudes, et réduire le nombre de paramètres d'un problème. Pour faire apparaître les paramètres de contrôle du problème, il est nécessaire d'introduire les grandeurs de référence.

II.5.1 Changement de variable :

- La fonction de courant définie par : $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ et $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ (II.5)

- La variation de similitude définie par : $\eta = \left(\frac{C}{\nu(1-\alpha t)} \right)^{\frac{1}{2}} y$ (II.6)

- La variation de température définie par : $T = T_\infty + T_0 \frac{cx}{2\nu} (1-\alpha t)^{-2} \theta(\eta)$ (II.7)

- Les variables adimensionnelles ψ, θ définie par :

$$\psi = \left(\frac{\nu C}{1-\alpha t} \right)^{\frac{1}{2}} x f(\eta) \quad ; \quad \theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} \quad (\text{II.8})$$

II.5.2 Equation adimensionnelles

✓ **Equation de quantité de mouvement**

$$M \left(\frac{\eta}{2} f'' + f' \right) + f'^2 - ff'' = f''' + \lambda \theta - \frac{1}{D} f' \quad (\text{II.9})$$

✓ **Equation de l'énergie**

$$\frac{M}{2} (\eta \theta' + 4\theta) + f' \theta - f \theta'' = \frac{1}{\text{Pr}} \left(1 + \frac{4}{3N} \right) \theta'' \quad (\text{II.10})$$

II.5.3 Condition aux limites

$$\text{\AA } \eta = 0; f(0) = 0; f' = 1; \theta = 1 \quad (\text{II.11})$$

$$\text{\AA } \eta \rightarrow \infty; f' = 0; \theta = 0$$

Avec :

$$\checkmark \text{ Paramètre de rayonnement : } N = \frac{\kappa k^*}{4\sigma T_\infty^3} \quad (\text{II.12})$$

$$\checkmark \text{ Paramètre de convection mixte : } \lambda = \frac{Cr_x}{\text{Re}_x^2} = \frac{g\beta T_0}{2\nu c} \quad (\text{II.13})$$

$$\checkmark \text{ Nombre de Grashof : } Gr = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)x^3}{\nu^3} \quad (\text{II.14})$$

$$\checkmark \text{ Nombre de Reynolds : } \text{Re}_x = \frac{U_w x}{\nu} \quad (\text{II.15})$$

$$\checkmark \text{ Nombre de Darcy : } D = Da_x \text{Re}_x = \frac{K_1 C}{\nu} \text{ et } Da_x = \frac{K_1(1-\alpha t)}{X^2} \quad (\text{II.16})$$

$$\checkmark \text{ Paramètre de temps : } M = \frac{\alpha}{C} \quad (\text{II.17})$$

$$\checkmark \text{ Nombre de Prandtl : } \text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} \quad (\text{II.18})$$

II.6 Caractérisation de nombre de Nusselt et le coefficient de frottement

Le nombre de Nusselt est un nombre adimensionnel utilisé pour caractériser le transfert thermique entre un fluide et une paroi (transfert convectif), défini par :

$$Nu_x = \frac{x(q_w)}{k(T_w - T_\infty)} \quad (\text{II.19})$$

$$\text{La densité thermique : } q_w = -k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (\text{II.20})$$

De l'équation (II.19) et (II.20) on obtient :

$$\frac{Nu_x}{\text{Re}_x^2} = -\theta'(0) \quad (\text{II.21})$$

Le coefficient de frottement est un paramètre caractéristique sans dimension de la couche limite défini par :

$$C_f = \frac{2\tau_w}{\rho U_w^2} \quad (\text{II.22})$$

La contrainte de cisaillement : $\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}$ (II.23)

De l'équation (II.22) et (II.23)

$$\text{Re} \frac{1}{x} C_f = 2f''(0) \quad (\text{II.24})$$

II.7 Conclusion

Dans ce chapitre, les équations adimensionnelles ont été mises en forme durant la résolution de notre problème physique, à l'aide de changement de variable et des conditions limites associées. Ces équations sont difficiles à résoudre analytiquement pour cela nous utilisons une résolution numérique ce que nous allons faire dans le prochain chapitre.

Chapitre III
Résultats et discussions

Résultats et discussions

III.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons établi les équations de base régissant le problème étudié. Dans ce chapitre nous décrivons la méthode numérique utilisée pour résoudre ces équations et consacré à la présentation des résultats obtenus après avoir programmé les équations différentielles ordinaires sur le logiciel Matlab. Il existe plusieurs méthodes pour résoudre ces équations, dans notre cas nous avons porté notre choix sur la méthode de différences finies

III.2 Méthode numérique

Le domaine de l'analyse numérique où les applications sont les plus nombreuses est celui de la résolution des équations différentielle. Cela vient du fait que toute modélisation mathématique d'un, ou de plusieurs phénomènes physiques, est décrite par une, ou un système d'équations différentielle. Vu que la majorité, pour ne pas dire la totalité des phénomènes physiques ne sont pas linéaires, il n'existe pas de solutions analytiques pour ces problèmes. Nous sommes obligés de chercher des solutions approchées de la solution exacte (analytique). La, où les solutions de ces équations sont déduites par une approche numérique adéquate.

Dans notre étude nous utilisons la méthode des différences finis qui fait partie des outils de mathématiques appliquées. Un algorithme discret mathématique permettant de rechercher une solution approchée d'une équation différentielle ordinaire (EDO) sur un domaine compact avec conditions aux bords et/ou dans l'intérieur du compact.

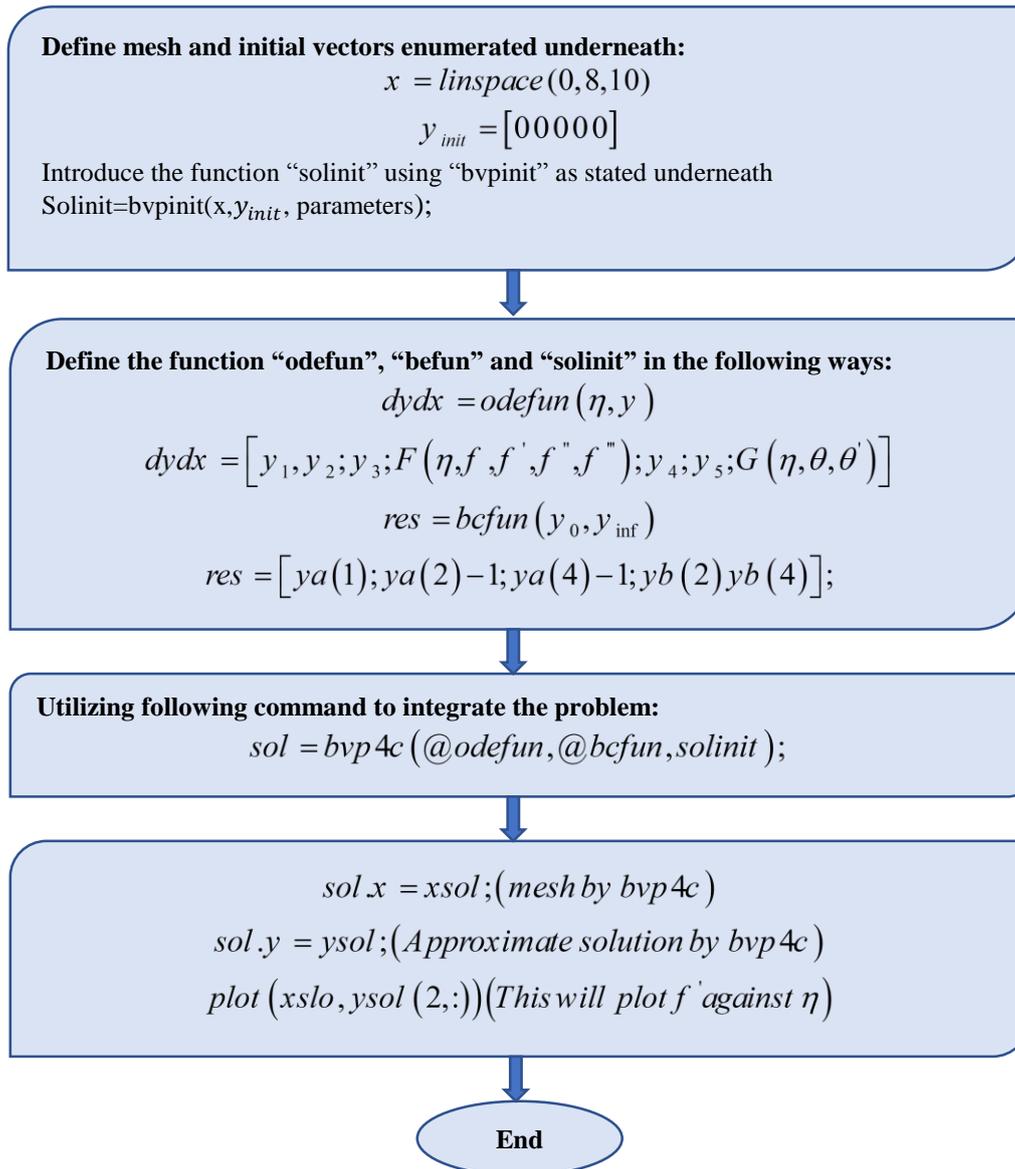
L'ensemble des équations différentielles ordinaires couplées (II.9) et (II.10) est fortement non linéaire et ne peut être résolu analytiquement, avec les conditions aux limites (II.11), ils forment un problème aux limites à deux points qui peut être résolu pour certaines valeurs des paramètres régissant. La méthode des différences finies qui implémente la formule de Lobatto de troisième degré, fournit une solution continue de manière uniforme dans l'intervalle d'intégration.

Le solveur `bvp4c` créé sous MATLAB détermine une solution numérique en résolvant un système d'équations algébriques résultant avec les conditions aux limites, l'utilisateur doit fournir les points de maillage initial ainsi qu'une approximation initiale de la solution, les régions de l'écoulement sont contrôlées par des paramètres [20], à savoir N , λ , M , Pr , D .

III.2.1 Syntaxe de bvp4c sur Matlab

Syntaxe de bvp4c sur Matlab bvp4c Résoudre des problèmes aux limites pour les équations différentielles ordinaires

La syntaxe de cette méthode est:

$$sol = bvp4c (@odefun, @bcfun, solinit, options)$$


III.3 Validation du code

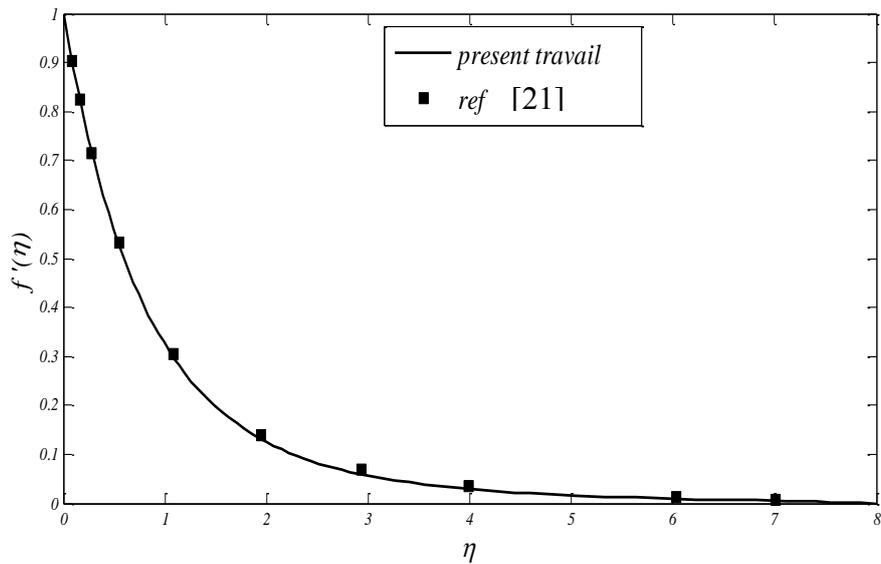


Figure III. 1 : Comparaison des résultats entre les résultats de la présente étude et les résultats rapportés à la référence [21].

Afin de vérifier l'exactitude de méthode utilisée, les résultats de présent travail correspondent sont comparés au celle obtenus par la référence [23] (figure III.1), il ressort de cette figure que les résultats de présent travail sont tout à fait compatible avec celle rapportée par le travail cité.

III.4 Résultats et discussions

Dans cette partie on a réalisé une étude paramétrique selon la méthode décrit précédemment, un ensemble des résultats graphique a été obtenu pour la vitesse adimensionnelle $f'(\eta)$, et la température adimensionnelle $\theta(\eta)$, Cela pour plusieurs conditions de nombre adimensionnels, paramètre de temps, paramètre de rayonnement, nombre de Prandtl

III.4.1 Profil de vitesse adimensionnelle

La variation de la distribution de la vitesse adimensionnelle suivant la variation de similarité η et présentée respectivement sur les figures (III.2) à (III.4) pour quelques ensemble de valeurs de M , N , Pr .

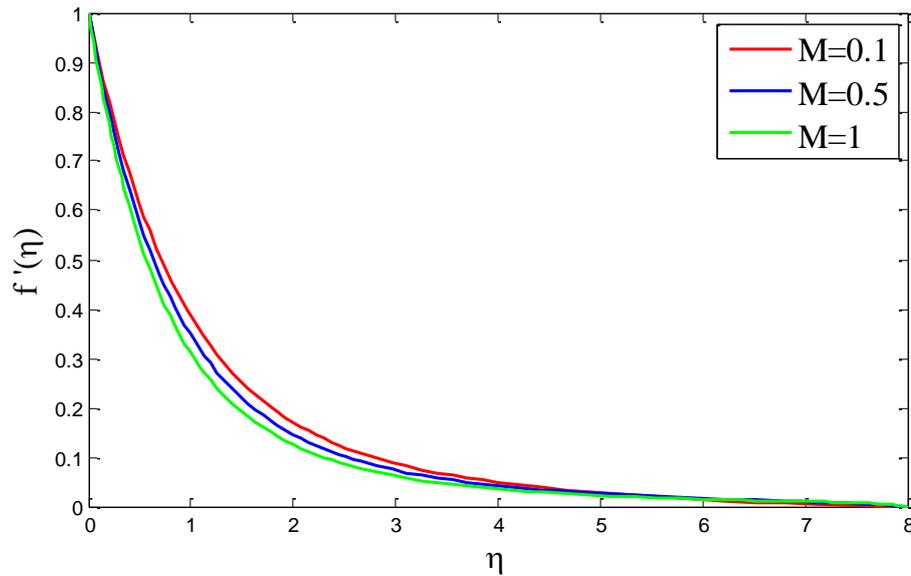


Figure III. 2: Variation de profil de vitesse avec η pour M variable.

($\lambda=0.1$, $D=10$, $Pr=0.5$, $N=1$)

(Figure III.2) : Dans cette Figure, les profils de vitesse sont représenté pour différents de valeur M . est on remarque que la vitesse diminue avec l'augmentation de paramètre de temps M . Il résulte de cette figure que l'épaisseur de la couche limite dynamique diminue lorsque les valeurs M augment.

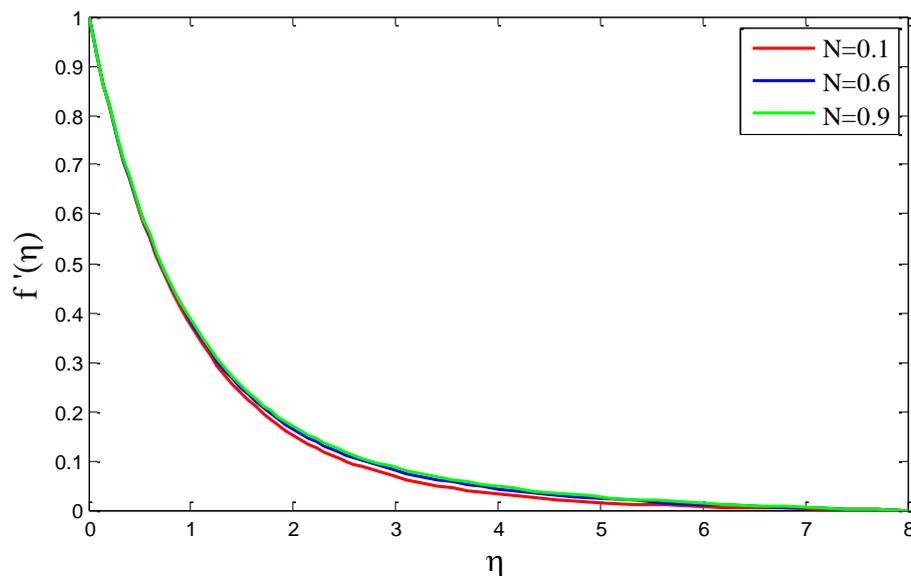


Figure III. 3: Variable de profil de vitesse avec η pour N Variable.

($\lambda=0.1$, $D=10$, $Pr=0.5$, $M=0.1$)

Figure(III.3) : Dans cette figure, les profils de vitesse sont représentés pour différentes de valeur N. On remarque que la vitesse augmente mais avec un écarte très léger donc on peut dire que le rayonnement N na pas vraiment influencé sur la vitesse de l'écoulement.

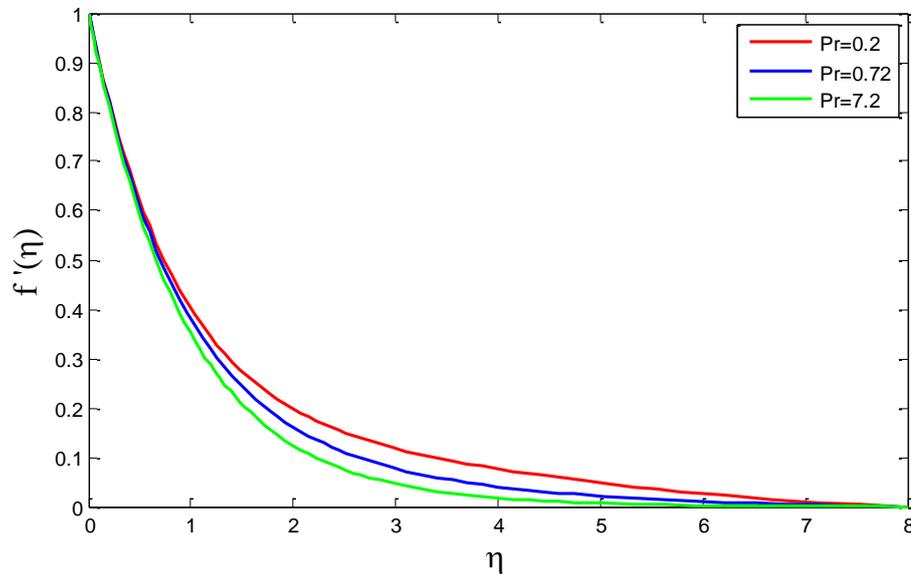


Figure III. 4: Variation de profil de vitesse avec η pour Pr variable.

($\lambda=0.1$, $D=10$, $M=0.1$, $N=1$)

Figure III.4 : Dans cette figure, les profils de vitesse sont représenté pour déférentes de valeur Pr. On remarque que la vitesse diminue avec l'augmentation de paramètre de Prandtl Pr. Il résulte de cette figure que l'épaisseur de la couche limite dynamique diminue lorsque les valeurs Pr augment.

III.4.2 Profil de température adimenssionnelle :

La variation de la distribution de la température adimenssionnelle suivant la variable de similarité est représentée respectivement sur les figures (III.5) (III.6) (III.7) pour quelques ensembles de valeurs de M, N, Pr.

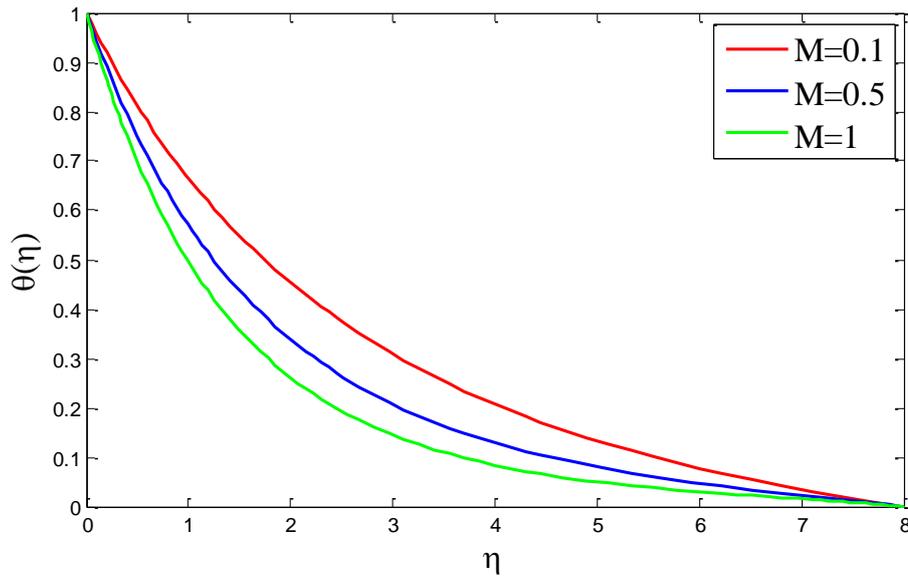


Figure III. 5: Variation de profil de vitesse avec η pour M variable.

$$(\lambda=0.1, D=10, Pr=0.5, N=1)$$

Figure III.5 : cette figure représente les profils de température pour différentes valeurs de M , on voit que θ diminue avec l'augmentation de paramètre de temps M . On remarque une diminution significative de de température avec l'augmentation de M çà vu dire que le taux de transfert de chaleur augmente avec l'augmentation de paramètre de régime variable M .

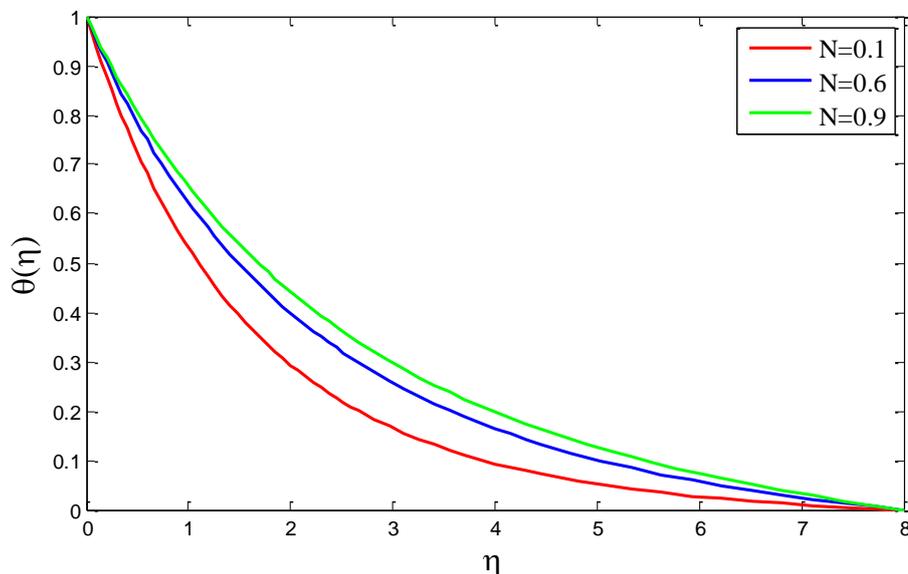


Figure III. 6: Variable de profil de Température avec η pour N variable.

$$(\lambda=0.1, Pr=0.5, D=10, M=0.1)$$

figurIII.6 : cette figure représente les profils de température pour différentes valeurs de N , on remarque que la température augmente à mesure que le rayonnement thermique augmente,

ceci est en accord avec le fait physique que l'épaisseur de la couche limite thermique augmente avec l'augmentation du paramètre de rayonnement N .

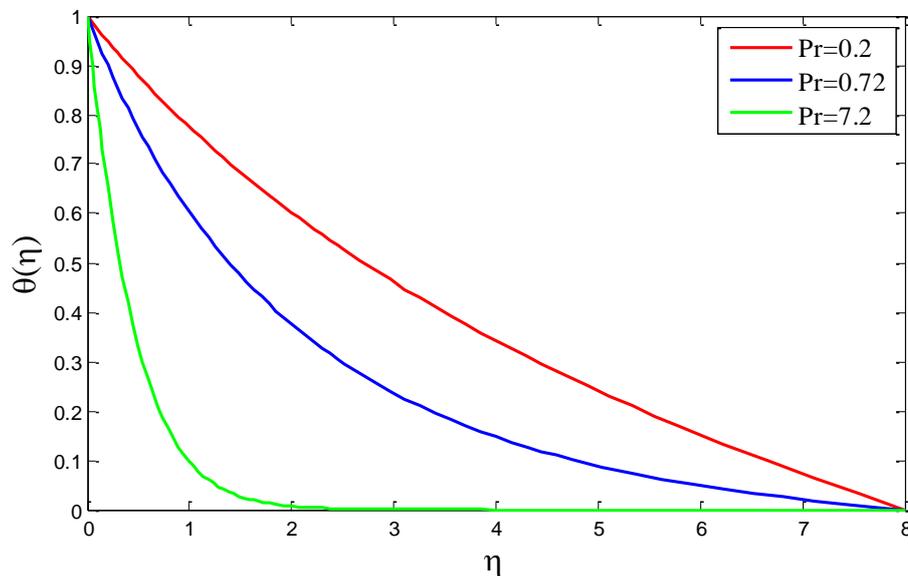


Figure III. 7: Variation de profil de température avec η pour Pr variable.

($\lambda=0.1$, $D=10$, $M=0.1$, $N=1$)

Figure (III.7) : Cette figure représente les profils de température pour différentes valeurs de Pr , on remarque que la température diminue à mesure que le nombre de Prandtl augmente et se traduit par une diminution de la couche limite thermique quand le nombre de Prandtl est élevé ($Pr=7.2$ eau).

III.5 Variation de nombre de Nusselt

Les variations du nombre de Nusselt sont influencées par les différentes valeurs du paramètre de convection mixte (λ), nombre de Darcy (D), nombre de Prandtl (Pr), paramètre de temps (M), paramètre de rayonnement (N).

Les résultats sont illustrés dans les tableaux (III3), (III4).

M	N	$\lambda=0.5$, $D=10$	
		N_u	
		$Pr=0.72$	$Pr=7.2$
0.1	0.5	1.4290	0.3971
0.5		1.1187	0.3278
1		0.9194	0.2765
0.5	0.1	0.9088	0.2679
	0.5	1.1187	0.3278
	1	1.3410	0.3912

Tableau III. 1 : Valeur de Nusselt pour Pr , M , N variable.

Tableau III.1 : Montre que le nombre de Nusselt diminue avec l'augmentation de paramètre de temps(M), par contre il augmente avec l'augmentation de paramètre de rayonnement(N), aussi en voit que le nombre de Nusselt à $Pr=0.72$ est plus grands à $Pr=7.2$.

D	λ	N=1, M=0.1	
		N_u	
		$Pr=0.72$	$Pr=7.2$
10	0.5	1.7247	0.4766
50		1.7082	0.4748
100		1.7059	0.4746
50	0.1	1.8403	0.4789
	0.5	1.7082	0.4748
	1	1.6142	0.4702

Tableau III. 2 : Valeur de Nusselt pour Pr, D, λ variable.

Tableau III.2 : Montre que le nombre de Nusselt diminue légèrement avec l'augmentation de nombre de darcy (D), même cas avec l'augmentation de paramètre de convection mixte (λ) le nombre de Nusselt toujours diminue, aussi en voit que le nombre de Nusselt à $Pr=0.72$ est plus grands à $Pr=7.2$.

III.6 Variation de coefficient de frottement

Les variations de coefficient de frottement sont influencées par les différents valeurs du paramétré de convection mixte (λ), nombre de Darcy (D), nombre de Prandtl (Pr), paramètre de temps (M), paramètre de rayonnement (N).

Les résultats sont illustrés dans les tableaux (III3), (III4)

M	N	$\lambda=0.5, D=10$	
		C_f	
		$Pr=0.72$	$Pr=7.2$
0.1	0.5	-2.5076	-2.0858
0.5		-2.0534	-1.818
1		-1.7268	-1.5864
0.5	0.1	-2.0068	-1.7918
	0.5	-2.0534	-1.818
	1	-2.0946	-1.8442

Tableau III. 3 : Valeur de coefficient de frottement pour Pr, M, N variable

Tableau III.3 : Montre que coefficient de frottement augmente avec l'augmentation de paramètre de temps(M), par contre il diminue avec l'augmentation de paramètre de

rayonnement(N), aussi en voit que le coefficient de frottement à $P_r=7.2$ est plus grands à $P_r=0.72$.

D	λ	N=1, M=0.1	
		C_f	
		$P_r=0.72$	$P_r=7.2$
10	0.5	-2.587	-2.127
50		-2.7342	-2.2164
100		-2.754	-2.2284
50	0.1	-2.053	-1.97
	0.5	-2.7342	-2.2164
	1	-4.315	-2.614

Tableau III. 4 : Valeur de coefficient de frottement pour Pr , D , λ variable

Tableau III.4 : Montre que coefficient de frottement diminue légèrement avec l'augmentation de nombre de (D), même cas avec l'augmentation de paramètre de convection mixte (λ) le coefficient de frottement toujours diminue, aussi en voit que le coefficient de frottement à $P_r=7.2$ est plus grands à $P_r=0.72$

III.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présente des résultats numériques d'écoulements de couche limite instationnaire et de de transfert de chaleur sur une surface d'étirement perméable noyée dans un milieu poreux en tant compte de rayonnement thermique, les équations différentielles représentantes le problème physique ont étaient transformées en donnée numérique en utilisant la méthode des différences finie. Les résultats numérique sont affichés par des illustrations graphique des profile de vitesse et de température, on a évalué aussi la variation de Nusselt et de coefficient de frottement, ces résultats dépendent de paramètre de conviction mixte λ , paramètre de rayonnement N , paramètre de temps M , nombre de Prandtl Pr , nombre de Darcy D .

Conclusion Générale

Conclusion Générale

Dans ce mémoire l'objectif est d'étudier les effets de rayonnement thermique sur le transfert de chaleur sur un écoulement laminaire et instationnaire de convection mixte et de couche limite sur une surface d'éirement vertical dans milieu poreux.

Au cours de ce travail, nous avons donné des notions fondamentales sur le milieu poreux, transfert de chaleur, et la couche limite. En suite nous avons essayé de comprendre le phénomène étudié par les différentes équations qui le régissent tels que les équations de conservation de masse, de quantité de mouvements et de l'énergie, on a utilisé les transformations par similarité pour ces équations pour obtenir les équations différentielles ordinaire. La méthode des différences finis a été choisie pour la résolution de ces équations sur Matlab.

Ce travail a montré l'influence de 5 paramétré de contrôle sur les profils de vitesse et de température, et le nombre de Nusselt, et le coefficient de frottement.

Les principaux résultats numériques obtenus dans ce travail sont les suivantes :

- La vitesse diminue avec l'augmentation de paramètre de temps M et le nombre de Prandtl Pr .
- La vitesse augmente avec l'augmentation de paramètre de rayonnement N . mais avec un écart léger, presque l'influence de de rayonnement est négligeable
- La température diminue avec l'augmentation de paramètre de temps M et le nombre de Prandtl Pr .
- La température augmente avec l'augmentation de paramètre de rayonnement N .
- l'épaisseur de la couche limite dynamique diminue lorsque les valeurs M et Pr augmentent et augmente lorsque les valeurs de N augmente.
- L'épaisseur de la couche limite thermique diminue quand le nombre de Prandtl est élevé ($Pr=7.2$ eau).
- Pour les valeurs fixes de paramètre de convection λ et le nombre de darcy D , le nombre de Nusselt diminue avec l'augmentation de paramètre de temps M , mais il augmente avec l'augmentation de paramètre de rayonnement N , le nombre de Nusselt à $P_r=0.72$ est plus grands à $P_r=7.2$.
- Pour les valeurs fixes des paramètres de rayonnement N et de temps M , le nombre de Nusselt diminue légèrement avec l'augmentation de paramètre de convection mixte λ et le nombre de Darcy D , le nombre de Nusselt à $P_r=0.72$ est plus grands à $P_r=7.2$.

- Pour les valeurs fixes de paramètre de convection λ et le nombre de darcy D , le coefficient de frottement augmente légèrement avec l'augmentation de paramètre de temps M , mais il diminue avec l'augmentation de paramètre de rayonnement N , le coefficient de frottement à $P_r=7.2$ est plus grands à $P_r=0.72$.
- Pour les valeurs fixes des paramètres de rayonnement N et de temps M , le coefficient de frottement diminue légèrement avec l'augmentation de paramètre de convection mixte λ et le nombre de Darcy D , le coefficient de frottement à $P_r=7.2$ est plus grands à $P_r=0.72$.

Références Bibliographiques

Références Bibliographiques

- [1] **R. E. Collins** « Flow of fluids through porous materials » Reinhold, New York., 1961.
- [2] **G. Salazar** Modélisation du séchage d'un milieu poreux saturé déformable : prise en compte de la pression du liquide, thèse de doctorant, école nationale supérieure D'arts et métiers (2006).
- [3] **H. Mahdaoui**, Etude numérique des transferts de masse et de chaleur dans un canal contenant un matériau poreux de section carré, thèse de doctorant, Université de perpignan ; Université de Carthage (Tunisie), 2018.Français.
- [4] **B. Ouattara**, pris en compte des caractéristique thermo-physiques des parois dans le processus de séparation des constituants d'un mélange binaire ou d'un nano fluide par diffusion thermo-gravitationnelle en milieu poreux, thèse doctorant, Université de Toulouse, 2012.
- [5] **H. Ali agha**, Transfert naturels et complexes en milieu poreux non Darceen, thèse doctorant, Université Yahya Farès de Médéa, (2015).
- [6] **O. Saoul**, simulation du Transfer de solutés réactifs en milieu poreux hétérogènes, thèse doctorant, Université Mentouri, Constantine,(2017).
- [7] **S.Bories, A.Mojtabi, M. Prat, M.Quintard** (10 / 10 / 2008). Transferts de chaleur dans les milieux poreux- Conduction, Convection et rayonnement. Techniques de l'ingénieur, BE 8 250, 28.
- [8] **R. Younsi**. Simulation numérique du transfert de chaleur et de masse en milieu fluides et poreux. Sciences de la Terre, thèse doctorant, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, 2002. Français.
- [9] **B. Faouzia**, contribution à l'étude de transfert de masse et de chaleur dans un canal poreux, thèse doctorant, Université mentouri – Constantine, (2008).
- [10] **N. Koulal**, mémoire master « simulation numérique des échanges thermique par convection forcée dans un canal rempli d'un milieu poreux » Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, (2011).
- [11] **D.A. Nield, A. Bejan**, Convection in porous media, 2nd ed, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [12] **S. Fatma Zohra**, Transfert thermique conjugués et transitoires application pour cylindre vertical creux, thèse doctorant, Université Yahya ferés de Médéa.

- [13] **T. L. Bergman, A. S. Lavine, F. P. Incropera, D. P. Dewitt.** Fundamentals of heat and mass transfer. 7^{ème} edition. John Wiley & Sons (2011)
- [14] **P. Marty,** cour de transfert thermique Université de Joseph Fourier, Grenoble, Edition 2012-2013.
- [15] **T. Ouksel,** cour de transfert thermique, Université de Larbi Ben M'hidi Oum bouaghi, Appliquées Ain Beida, Edition 2020 – 2021.
- [16] **T. Benyamma, A. Baci.** Influence de l'effet thermique sur les caractéristiques de la couche limite laminaire sur une paroi lisse. Mémoire de master. Université Biskra, (2017-2018).
- [17] **L. Billon.** Génération et adaptation de maillage volume-couche limite dynamique pour les écoulements turbulents autour de géométries complexe. Thèse de doctorat. Université de Paris, (2016).
- [18] **M. Rechache, M. A. Ben azzouz.** Réalisation d'un logiciel pédagogique d'analyse d'écoulement potentiel subsonique autour. Mémoire de master. Université de Blida (2011).
- [19] **CH. Bayeux.** Méthode intégrale pour la couche limite tridimensionnelle Applications au givrage. Thèse de doctorat. Université de Toulouse, (2017).
- [20] **A. Haddad, O. Chaouch** Mémoire PFE « Ecoulement convectif naturel d'un nano fluide devant une plaque verticale avec un flux surfacique imposé » université Abderrahmane mira Bejaia, spécialité : génie mécanique, filière : énergétique 2020.
- [21] **S. Mukhopadhyay.** Effect of thermal radiation on unsteady mixed convection flow and heat transfer over a porous stretching surface in porous medium. Department of Mathematics, M.U.C. Women's College, Burdwan, WB 713 104, India.

ANNEXES

Annexe A Résolution de problème des valeurs aux limites pour les équations différentielles ordinaires dans Matlab avec bvp4c.

A.1 Introduction

Les équations différentielles ordinaires décrivent des phénomènes qui évoluent continuellement. Elles sont utilisées comme modèles dans les domaines des mathématiques, des sciences et de l'ingénierie. Un système d'équation différentielle a généralement plusieurs solutions possibles. Dans la plupart des cas, une solution d'intérêt est déterminée en valeurs de tous ses composants à un seul point $x=a$, ce qui constitue un problème de valeur initiale (IVP). Cependant, dans de nombreuses applications d'une solution est déterminée d'une manière plus complexe. Un problème de valeur limite (BVP) spécifie les valeurs ou des équations pour composants de la solution à plus d'un x .

Contrairement de IVP, un problème de valeur limite ne peut être avoir une solution, ou peut avoir un nombre fini, ou peut avoir une infinité. De ce fait, les programmes de résolution de BVP, les utilisateurs doivent fournir une estimation de la solution souhaitée. Souvent, il existe des paramètres qui doivent être déterminés de telle sorte que le BVP a une solution. Encore une fois il pourrait y avoir plus d'une possibilité, afin que les programmes nécessitent une estimation pour les paramètres souhaités. Singularités dans les coefficients et les problèmes posés sur des intervalles infinis ne sont pas inhabituelles.

Cette annexe présente la formulation, la résolution et le traçage de la solution d'un BVP avec le programme bvp4c Matlab. Son objectif est de rendre la résolution d'un problème type d'un BVP aussi facile que possible. BVPs sont beaucoup plus difficiles à résoudre que IVP et tout solveur peut échouer, même avec de bonnes estimations pour la solution et des paramètres inconnus. bvp4c est un solveur efficace, mais la méthode sous-jacente et l'environnement de calcul ne sont pas appropriés pour de grandes précisions, ni pour des problèmes avec très brusques changements de leurs solutions.

A.2 Problème de valeur aux limites

Si la fonction f est régulière sur l'intervalle $[a,b]$, le problème de valeur initiale $y' = f(x, y)$ avec $y(a)$ donnée, possède une solution unique. Les Problèmes de valeur aux limites à deux points sont illustrés par l'équation.

$$y'' + y = 0 \tag{A.1}$$

Avec des conditions aux limites suivant : $y(a) = A$, $y(b) = B$. Un moyen important d'analyser ces problèmes est de considérer une famille de solutions de IVP.

Soit $y(x, s)$, la solution de l'équation (1) avec les valeurs initiales $y(a) = A$ et $y'(a) = s$. Chaque $y(x, s)$, s'étend à $x = b$, et nous demandons, pour quelles valeurs de S , $y(b, s) = B$?

S'il existe une solution S pour cette équation algébrique, la valeur $y(x, s)$, correspondant constitue une solution de l'équation différentielle qui satisfait les deux conditions aux limites. En utilisant la linéarité, nous pouvons trier les possibilités facilement.

Soit $u(x)$ la solution définie par $y(a) = A$, $y'(a) = 0$ et $v(x)$ la solution définie par $y(a) = 0$, $y'(a) = 1$. La linéarité implique que $y(x, s) = u(x) + sv(x)$, et la condition à la limite $B = y(b, s) = u(b) + sv(b)$, s'élève à une équation algébrique linéaire qui définit la pente initiale inconnue s . Les faits familiers de l'existence et l'unicité de solutions d'équations algébriques linéaires nous disent alors qu'il y a soit une solution exactement à la BVP, ou il y a des valeurs limites B pour lesquels il n'existe aucune solution et d'autres pour lesquels il existe une infinité de solutions.

A.3 Méthode numérique

L'approche théorique de la BVP mentionnée dans le deuxième paragraphe repose sur la solution d'IVP pour Odes et la solution des équations algébriques non linéaires. Étant donné qu'il existe des programmes efficaces pour les deux tâches, il est naturel de les combiner dans un programme pour la solution du BVP. Cette approche est appelée méthode de tir (shooting method). Parce qu'il apparaît avant si droit d'utiliser des outils numériques de qualité pour la solution du BVP par des techniques de tirs, il est peut sembler surprenant que `bvp4c` ne soit pas un code de technique de tirs. La difficulté de base avec cette méthode est qu'une parfaitement agréable BVP peut nécessiter l'intégration des IVP qui sont instables. C'est, la solution d'un BVP peut être insensible aux changements de valeurs limites, mais les solutions de l'IVP de méthode de tir sont sensibles aux changements dans les valeurs initiales. Voici l'exemple

$$y'' - 100y = 0 \tag{A.2}$$

Avec $y(0) = 1, y(1) = B$ fait le point. Le titre implique la solution $y(x, s) = \cos 10x + 0.1s \sinh 10x$ de l'IVP avec valeur initial $y(0) = 1, y'(0) = s$. De toute évidence, ce qui peut être aussi grande $0.1 \sinh 10 \approx 1101$. Un petit calcul montre que la pente

qui conduit à la satisfaction de la condition à la limite à $x = 1$ et $s = 10(B - \cosh 10) / \sinh 10$ puis que, pour la solution de la BVP, $|\partial y / \partial B| = |\sinh 10| \leq 1$. Evidemment, les solutions de l'IVP sont beaucoup plus sensibles aux variations de la pente initiale de la solution s , alors que la solution du BVP est à des changements dans la valeur limite B . si l'IVP n'est pas trop instable, le tir peut être très efficace. IVP instables peuvent causer un code de tirs à l'échec parce que l'intégration "explose" avant d'atteindre la fin de l'intervalle. Plus souvent, cependant, l'IVP atteint solveur la fin, mais est incapable de calculer un résultat précis là-bas et de ce fait, le solveur de l'équation non linéaire est incapable de trouver des valeurs initiales précises. Une variété de techniques sont utilisées pour améliorer la prise de vue, mais quand l'IVP sont très instables, prise de vue est tout simplement pas une approche naturelle pour résoudre BVP.

bvp4c met une méthode de collection pour la solution du BVP de la forme

$$y' = f(x, y, p), \quad a \leq x \leq b \quad (\text{A.3})$$

Avec de non-linéarité générale, deux points conditions aux limites

$$g(y(a), y(b), p) = 0 \quad (\text{A.4})$$

Ici p est un vecteur de paramètres inconnus. Pour plus de simplicité, il est supprimé dans les expressions qui suivent. La solution d'approximation $s(x)$ est une fonction continue qu'est un polynôme cubique sur chaque sous-intervalle $[x_n, x_{n+1}]$ d'une maille

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$$

Il satisfait les conditions aux limites

$$g(s(a), s(b)) = 0 \quad (\text{A.5})$$

Et qu'il satisfait aux équations différentielles (de col locatives) aux deux extrémités et le point médian de chaque sous-intervalle

$$S'(x_n) = f(x_n, s(x_n)) \quad (\text{A.6})$$

$$s'((x_n + x_{n+1})/2) = f((x_n + x_{n+1})/2, s((x_n + x_{n+1})/2)) \quad (\text{A.7})$$

$$s'(x_{n+1}) = f(x_{n+1}, s(x_{n+1})) \quad (\text{A.8})$$

Ces conditions conduisent à un système d'équations algébrique non linéaire pour les coefficients définissant $s(x)$. A la différence de la technique de tir, la solution $y(x)$ est évaluée sur tout l'intervalle $[a, b]$ et les conditions aux limites sont prises en compte à tous les moments. Les équations algébriques non linéaire sont résolues de manière itérative par linéarisation, si cette approche s'appuie sur les solveurs d'équations linéaires de Matlab plutôt

que ces codes IVP .la méthode de base de bvp4c, que l'on appelle la méthode de Simpson, est bien connue et se trouve dans un certain nombre de codes .il peut être démontré que les hypothèses modestes, $s(x)$ est une approximation de quatrième ordre a une solution isolée $y(x)$, c'est-à-dire, $\|y(x) - s(x)\| \leq Ch^4$. Ici, h est la valeur maximale de la taille de pas $h_n = x_{n+1} - x_n$ et C est une constante. Parce que ce n'est pas vrai de certaines méthodes de collocation populaires, nous insistons sur le fait important que cette borne est vraie pour tout x dans $[a, b]$. après $s(x)$ est calculé sur un maillage avec bvp4c, il peut être évalué à peu de frais à tout x , ou un ensemble de x , dans $[a, b]$ avec la fonction bvpval.

Parce que BVPs peuvent avoir plus d'une solution, les codes de BVP obligent les utilisateurs à fournir une estimation pour la solution souhaitée. L'estimation comprend une estimation d'un maillage initial révèle que le comportement de la solution souhaitée. Les codes ensuite adapté le maillage de manière à obtenir une solution numérique exacte avec un nombre réduit de points de maillage. Venir avec suffisamment bonne supposition est souvent la partie la plus difficile de résoudre un BVP. bvp4c adopte une approche inhabituelle pour le contrôle d'erreur qui lui permet de traiter avec suppositions pauvres. La continuité de $s(x)$ sur $[a, b]$ et collocation aux extrémités de chaque sous-intervalle implique que $s(x)$ a également une dérivée continue sur $[a, b]$. Pour une telle approximation, le résidu $r(x)$ dans l'équation différentielle est définie par :

$$r(x) = s'(x) - f(x, s(x)) \quad (\text{A.9})$$

Autrement dit, cela dit que $s(x)$ est la solution exacte d'ODEs perturbés.

$$s'(x) = f(x, s(x) + r(x)) \quad (\text{A.10})$$

De même, le résidu dans les conditions aux limites est $g(s(a), s(b))$.

bvp4c contrôle les tailles de ces résidus. Si les résidus sont uniformément petite, $s(x)$ est une bonne solution dans le sens que cet est la solution exacte d'un problème proche de celui fourni au solveur. En outre, pour un problème relativement bien conditionné, les petits résidus impliquent que $s(x)$ est proche de $y(x)$, même quand h n'est pas assez petit pour que le quatrième ordre de convergence est évident. Les codes de techniques de tir peuvent également être décrites comme contrôlant la taille de ces résidus : à chaque étape, un code d'IVP contrôle l'erreur locale, ce qui équivaut à contrôler la taille du résidu d'un prolongement continu approprié de formule utilisé, et le résolveur d'équations non linéaires est utilisé pour trouver des

valeurs initiales pour lesquelles le résiduel dans les conditions aux limites est faible. Suppression résiduelle a des vertus importantes : résidus sont bien définis, peu importe à quel point la solution approchée, et les résidus peuvent être évaluée importe où simplement en évaluation $f(x, s(x))$ ou $g(s(a), s(b))$. `bvp4c` est basée sur des algorithmes qui sont plausibles, même lorsque le maillage initial est très faible, mais fournir des résultats corrects que h tends vers 0. Ils exploitent des propriétés très intéressantes de la méthode de Simpson. BVPs se posent dans les formes les plus diverses. À peu près tout BVP peuvent être formulées pour solution avec `bvp4c`. La première étape consiste à écrire l'ODE comme un système de premières équations différentielles d'ordre.

C'est une tâche familière, car elle doit également être faite pour IVP solveur de Matlab. L'idée de base est d'introduire de nouvelles variables, une pour chaque variable dans le problème d'origine et l'autre pour chacun de ses dérivés à un de moins que le dérivé le plus élevé apparaisse. Le procédé est illustré dans. C'est tout ce qui est nécessaire pour résoudre un IVP, mais BVP peut être beaucoup plus compliqué : Comme nous l'avons déjà vu, contrairement IVP, problèmes aux limites n'ont pas nécessairement une solution, et quand ils le font, la solution n'est pas nécessairement unique.

En effet, BVP implique généralement des valeurs de paramètres pour lesquels le problème a une solution. En outre, les singularités de toutes sortes ne sont pas du tout inhabituelles.

Résumé

Dans ce travail, nous avons mené une étude numérique d'un écoulement de convection mixte, laminaire et instationnaire devant une plaque plan vertical sous l'influence de rayonnement. Les équations différentielles ordinaires régissant le phénomène physique sont résolues à l'aide de la méthode de différence fini. Les résultats obtenus dans cette étude montrent que les profils de vitesse et de température dans les couches limites dépendent des paramètres de temps M , et de rayonnement N , et le nombre de Prandtl Pr . En plus on a vu aussi l'influence des paramètres de contrôle du système sur la variation de Nusselt, et de coefficient de frottement.

Mots clés : milieu poreux, transfert de chaleur, rayonnement, différence fini, couche limite

Abstract

In this work, we conducted a numerical study of a mixed, laminar and unsteady convection flow in front of a vertical plane plate under the influence of radiation. The ordinary differential equations governing the physical phenomenon are solved using the finite difference method. The results obtained in this study show that the velocity and temperature profiles in the boundary layers depend on the parameters of time M , and radiation N , and the Prandtl number Pr . In addition, the influence of the control parameters of the system on the variation of Nusselt, and the coefficient of friction has been seen.

Keywords: porous medium, heat transfer, radiation, finite difference, boundary layer.