

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abderrahmane MIRA-BEJAIA



Faculté de Technologies

Département de Génie civil

Mémoire de fin de Cycle

En vue de l'obtention du diplôme de Master En Génie civil

Option : Structures

Thème :

*L'intitule du mémoire : Utilisation des éléments infinis
dans la résolution des problèmes élastostatique et
élastodynamique des domaines non bornés*

Réalisé par :

 M^{elle} Djenoune Rima

 M^{elle} Hammadi Yousra

Encadré par :

Mr Bourouba Abdelhalim

Année Universitaire : 2022-2023

Dédicace

Je ne peux commencer sans évoquer le nom de dieu le tout puissant

Qui m'a donné.

Je dédie ce modeste travail aux êtres qui me sont les plus chères.

A mon très chère père Nacir, symbole de courage, la plus belle marque de reconnaissance que je puisse leur offrir est ma réussite.

A ma très chère mère maguedouda, l'être la plus noble à sacrifier les plus belles années de sa vie pour me voir réussir.

Ainsi mes frères et sœur, {Azzedine, Islam, Katiba et Malika} pour leur amour, leurs conseils, leurs présence ainsi que leurs soutiens inconditionnelle. Sans oublier mes grands-parents {djadidowadi, nana Wardiya et nana lwiza}. Ainsi mes très chers tantes {Kahina et silya}, et enfin mes chères petites nièces {Amina et Eline} que cette dédicace, vous rappelle combien vous êtes aimées et combien vous êtes importantes pour moi, et a toute ma grande famille.

A mes chers amis {Mekran, khalissa, yousra, Nabila, Lilia, Céline}.

Et enfin, à ma binôme précieux yousra.

Ryma

Dédicaces

A ma très chère mère

*Quoi que je fasse ou que je dise, je ne saurai point te remercier comme il se doit.
Ton affection me couvrir, ta bienveillance me guide et ta présence à mes côtés a
toujours été ma source de force pour affronter les différents obstacles.*

A mon très cher père

Tu as toujours été à mes côtés pour me soutenir et m'encourager.

Que ce travail traduit ma gratitude et mon affection.

A mon très cher frère Fouad et mes belles sœurs Nouria, Wafa et Radia

A tous ceux que j'aime

A tous ceux qui m'aiment

A tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin

*Et enfin, à ma binôme et amie Ryma, que malgré les circonstances
de cette année on a pu réaliser travail.*

Yousra

Remerciements

Nous remercions le bon dieu le tout puissant de nous avoir donné la force nécessaire et la patience qui nous a permis de mener à bien ce modeste travail.

Nous tenons à exprimer notre gratitude et nos remerciements les plus sincères à notre enseignant et promoteur Mr BouRouBa Abdelhalim, pour sa sympathie, sa disponibilité, ses conseils et son aide durant tout au long de ce travail.

Nous remercions également les membres de jury d'avoir consacré de leur temps pour l'évaluation de notre modeste travail.

Toutes nos reconnaissances sont destinées à tous nos enseignants, tout au long de

Notre carrière.

Enfin, nos chaleureux remerciements s'adressent à nos familles et amis (es) pour

Leurs soutiens et patience.

Table des matières

Table des matières	i
Liste des figures	iii
Liste des tableaux	v
Introduction générale	1
Chapitre 1	
Recherche Bibliographique sur les techniques de modélisations des domaines non bornés	3
1.1 Introduction	3
1.2 Eléments absorbants	3
1.2.1 Eléments absorbant par des forces d’amortissement	4
1.2.2 Eléments absorbants par des forces de raideur	7
1.3 Couches absorbantes parfaitement adaptées (PML)	8
1.3.1 PML unidimensionnel en élastodynamique	9
1.3.2 PML bi et tridimensionnels en élastodynamique	11
1.4 Méthode des éléments de frontières (BEM)	13
1.4.1 Principe de BEM en élastodynamique	13
1.5 Conclusion	15
Chapitre 2	
Eléments infinis classiques	16
2.1 Introduction	16
2.2 Eléments infinis selon l’approche directe	16
2.3 Eléments infinis selon l’approche inverse	20
2.4 Conclusion	21
Chapitre 3	
Eléments infinis périodiques	23
3.1 Introduction	23
3.2 Propagation d’ondes en milieux infinis	23
3.3 Eléments infinis périodiques selon l’approche directe	25
3.3.1 Intégration des éléments infinis périodiques de l’approche directe	27
3.4 Eléments infinis périodiques selon l’approche inverse	28
3.4.1 Cas de trois dimensions (3D)	28
3.4.2 Cas de deux dimensions (2D)	29
3.5 Conclusion	30
Chapitre 4	
Discrétisation par éléments finis et éléments infinis	31
4.1 Introduction	31

4.2	Formulation mathématique du problème.....	31
4.3	Discrétisation du domaine par éléments finis et éléments infinis	36
4.4	Conclusion	38
Chapitre 5		
	Application des infinis aux problèmes d'élasticité	39
5.1	Introduction.....	39
5.2	Applications en élastostatique.....	40
5.2.1	Problème de Kirsch (tunnel profond).....	40
5.2.2	Problème de Flamant.....	42
5.2.3	Problème de Boussinesq.....	44
5.2.4	Problème de semelle filante souple	46
5.2.5	Problème de semelle circulaire souple	47
5.3	Applications en élastodynamique.....	49
5.3.1	Semelle filante.....	50
5.3.2	Semelle circulaire.....	52
5.4	Conclusion	54
	Conclusion générale	55
	Bibliographie.....	56

Liste des figures

Figure 1-1: Equilibre d'un domaine élémentaire sous l'effet de contrainte axiale	4
Figure 1-2 : problème d'un plan semi infini ;	6
Figure 1-3: Problème unidimensionnel ;	9
Figure 2-1: Approche directe - élément infini dans la direction horizontale ; (a) : Coordonnées physique ; (b) : Coordonnées de référence	16
Figure 2-2: Fonctions de forme d'un élément infini linéique quadratique ;	18
Figure 2-3: Transformation géométrique de Zienkiewicz d'un élément infini unidimensionnel ;	20
Figure 2-4 : transformation de géométrie- élément infini Q4 dans la direction horizontale ;	21
Figure 3-1: Fonctions de forme d'un élément infini linéique quadratique ;	26
Figure 4-1: Domaine semi infini.	31
Figure 5-1 : Tunnel profond (Problème de Kirsch).....	40
Figure 5-2: Problème de Kirsch ; maillage utilis ;	41
Figure 5-3 : Problème de Kirsch : déplacement radial pour $L=10$ m et $L=30$ m ;	41
Figure 5-4: Problème de Flamant (plan semi-infini).....	42
Figure 5-5: Problème de Flamant (maillage utilisé).....	43
Figure 5-6 : Problème de Flamant : Tassement sur la surface libre ($y = 0$) pour $L = 15$ m et $L = 30$ m.....	43
Figure 5-7: Problème de Flamant : tassement sur l'axe de symétrie ($x = 0$) pour $L = 15$ m et $L = 30$ m.....	44
Figure 5-8 : Problème de Boussinesq (espace semi-infini)	44
Figure 5-9 : Problème de Boussinesq: t Tassement sur la surface libre ($z = 0$) pour $L =$ 10 m et $L = 20$ m	45
Figure 5-10 : Problème de Boussinesq : tassement sur l'axe de symétrie ($r = 0$) pour $L = 10$ m et $L = 20$ m	45
Figure 5-11: semelle filante souple (massif soumis à une pression uniforme).....	46
Figure 5-12: semelle filante souple ; Tassements relatifs sur la surface ($y = 0$) ;	47
Figure 5-13: Semelle circulaire souple	47
Figure 5-14: semelle circulaire souple ; Tassements sur la de symétrie z ($r = 0$) ;	48
Figure 5-15 : Géométrie du domaine semi infini et les différents chargements	49
Figure 5-16 : semelle filante ; Déplacement vertical sous charge triangulaire ;	50
Figure 5-17: semelle filante ; Déplacement vertical sous charge constante ;	51

figure 5-18 : semelle filante ; Déplacement vertical sous charge sinusoïdale $\omega = 5 \text{ rad/sec}$;
.....51
Figure 5-19 : semelle circulaire ; Déplacement vertical sous charge triangulaire ;.....52
Figure 5-20 : semelle filante ; Déplacement vertical sous charge constante ;.....53
Figure 5-21 : semelle filante ; Déplacement vertical sous charge sinusoïdale $\omega = 5 \text{ rad/sec}$;
.....53

Liste des tableaux

Tableau 2-1: Fonction de transformation géométrique d'un élément infini Q4 et leurs dérivées.21

Introduction générale

Dans de nombreuses disciplines de l'ingénierie, on rencontre plusieurs problèmes qui font intervenir des domaines non bornés. Particulièrement en génie civil, les domaines ouverts ou non bornés sont souvent rencontrés en géotechnique et/ou lors de l'investigation des effets d'interaction entre les structures et le sol qui les supporte. Dans certains cas, le domaine d'étude présente des irrégularités géométriques et/ou des comportements complexes, alors, le recours à la méthode des éléments finis devient indispensable.

Par ailleurs, les éléments finis sont mal adaptés aux domaines non bornés. En effet, pour une modélisation efficace de ce genre de problèmes est importante pour aboutir à des résultats satisfaisants car le traitement des conditions aux limites de troncatures doivent tenir compte des effets de dissipation de l'énergie et d'éviter toutes réflexions parasites pouvant compromettre la précision des résultats. A cet effet, afin de remédier à ce problème, la technique classique utilisée consiste à tronquer le domaine géométrique à des distances très éloignées. Cependant, une telle analyse conduit à des simulations numériques de plus en plus lourdes qui mènent à une augmentation significative dans le temps de calculs et d'espaces de mémoires. De plus les conditions aux limites à l'infini ne peuvent pas être rigoureusement satisfaisantes et notamment quand il s'agit du phénomène de propagations d'ondes.

A cet effet, ils existent plusieurs travaux de recherche, qui ont été effectués, en proposant de divers techniques et approches développées dans le but d'améliorer les modèles d'éléments finis traitant des domaines non bornés. Ces techniques sont utilisées conjointement avec les éléments finis en discrétisant le champ proche du domaine par des éléments finis et le champ lointain représenté par l'une des approches suivantes : l'utilisation des éléments infinis [18, 19, 21, 27, 35, 36, 37], des éléments de frontières [13, 38, 39, 40], des éléments absorbants [1, 2, 11, 25, 26, 32, 40, 41], des couches parfaitement adaptées (PML) [5, 6, 42, 43] ou l'une des procédures purement numériques comme celles proposées par Wolf et Song [39, 44, 45].

Toutefois, le succès de la méthode des éléments finis dans la résolution des problèmes à domaines finis, et la nécessité de traiter des domaines non bornés, ont conduit au développement des éléments infinis à base des éléments finis [12,15,28]. Selon le processus de développement de ces éléments infinis, on peut les classer en deux types [19, 20, 21, 22,

23, 24] : éléments infinis selon l'approche directe par l'utilisation des fonctions de formes décroissantes et les éléments infinis selon l'approche inverse (indirecte) par l'utilisation des fonctions de transformations géométriques ascendantes. Aussi, on peut les classer en éléments infinis classiques si le chargement est statique ou éléments infinis périodiques si le chargement est dynamique oscillatoire [19, 29, 30].

Dans ce travail, on s'intéressera à l'utilisation des éléments infinis en élastostatique et en élastodynamique des domaines à non bornés présentant un comportement élastique linéaire. Ainsi, nous allons mettre en œuvre les éléments infinis classiques, issus de l'approche directe, dans la prise en compte du champ lointain des domaines supposés non bornés. De se fait, nous allons étudier la performance de ces éléments infinis en élastostatique et en élastodynamique. En élastostatique, nous allons traiter les problèmes classiques rencontrés en élasticité, à savoir le problème de Kirsch qu'on peut assimiler à un tunnel profond traité en déformations planes, le problème de Flamant traité en déformations et en contraintes planes, le problème de Boussinesq traité en axisymétrie, ainsi qu'une semelle filante et une semelle circulaire. Les résultats obtenus seront comparés à des solutions analytiques existantes dans la littérature. En élastodynamique, on a sélectionné d'étudier une semelle filante qui est traitée en déformations planes et une semelle circulaire traitée en axisymétrie, qui seront soumises aux différents chargements dynamiques (sinusoïdal, triangulaire et constant). Malheureusement dans cette partie, nous ne disposons pas de solutions analytiques auxquelles comparer les résultats numériques, et donc, on va effectuer une étude de convergence en fonction du positionnement de la limite de troncatures.

Ce mémoire est organisé en cinq chapitres distincts. Dans le premier, on a donné un aperçu sur les différentes techniques de modélisation des domaines non bornés à savoir les éléments absorbants, les couches absorbantes parfaitement adaptées PML et les éléments de frontières. Dans le deuxième chapitre, on a exposé la formulation mathématique des éléments infinis classiques selon les deux approches directe et inverse. Le troisième chapitre est consacré aux éléments infinis périodiques. Le quatrième chapitre est consacré à la formulation en éléments finis et à l'insertion des éléments infinis dans la discrétisation spatiale des domaines semi-infinis. Le cinquième chapitre est consacré aux applications, et aux tests de performance des éléments infinis. Et enfin on termine avec la conclusion générale.

Chapitre 1

Recherche Bibliographique sur les techniques de modélisations des domaines non bornés

1.1 Introduction

Plusieurs techniques et approches ont été développées et proposées dans le but d'améliorer les modèles d'éléments finis traitant de domaines infinis ou semi-infinis. Ce chapitre décrit trois façons de tenir compte de la nature ouverte du domaine géométrique étudié. La première technique consiste à imposer des forces d'amortissement et des forces de raideur sur la limite artificielle, de sorte à absorber l'énergie des ondes sortantes du domaine d'étude et d'éviter toutes réflexions parasites pouvant compromettre les résultats recherchés. Une deuxième technique consiste à introduire une couche absorbante (PML) parfaitement adaptée, permettant aux ondes de traverser cette couche sans réflexion. Une troisième méthode consiste à discrétiser le domaine tronqué par l'utilisation des éléments de frontière (BEM) qui permettent de satisfaire automatiquement la radiation par le judicieux des solutions fondamentales.

1.2 Eléments absorbants

En élasticité des milieux non bornés, la discrétisation spatiale avec des éléments finis nécessite une troncature du domaine d'étude à des distances finies. Vient ensuite le problème de l'introduction d'une limite artificielle pour simuler le fait que l'étendue réelle de la propagation des ondes est infinie. Une méthode possible consiste à imposer des forces d'amortissement et de raideur aux frontières artificielles pour absorber l'énergie des ondes sortant du champ d'étude et éviter les réflexions parasites pouvant affecter les résultats recherchés.

1.2.1 Eléments absorbant par des forces d'amortissement

Pour déterminer les conditions de radiation à imposer sur la limite de troncature, on considère une onde plane se propageant dans la direction x . L'équilibre dynamique d'un domaine élémentaire (figure 1.1) sous l'effet d'une force axiale (figure 1.1) est :

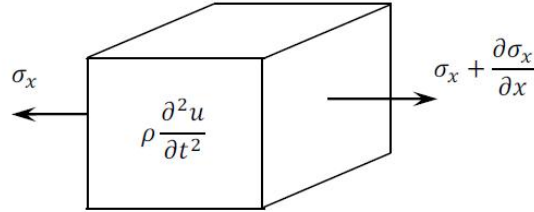


Figure 1-1: Equilibre d'un domaine élémentaire sous l'effet de contrainte axiale

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

Où ρ et u sont respectivement la masse volumique et les déplacements. σ_x représente la contrainte axiale dans le sens x . D'après la loi de Hooke, on a :

$$\sigma_x = k \varepsilon_x = k \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.2)$$

En substituant l'expression (1.2) dans (1.1) on aura l'équation aux dérivées partielle suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - V_p^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1.3)$$

Où V_p désigne la célérité des ondes de compression dans le matériau, qui est :

$$V_p = \sqrt{\frac{k}{\rho}} \quad (1.4)$$

Avec k représente le module de compressibilité du matériau qui est fonction du module d'Yong E et du coefficient de poisson ν :

$$k = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (1.5)$$

Pour un domaine de dimension fini, l'équation (1.3) admet comme solution :

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) \quad (1.6)$$

Avec :

$$\begin{cases} u_1(x, t) = U_1 \left[\sin \left(\omega t - \frac{\omega x}{V_p} \right) + \cos \left(\omega t - \frac{\omega x}{V_p} \right) \right] \\ u_2(x, t) = U_2 \left[\sin \left(\omega t + \frac{\omega x}{V_p} \right) + \cos \left(\omega t + \frac{\omega x}{V_p} \right) \right] \end{cases} \quad (1.7)$$

Où $U_1(x, t)$ l'onde propageant dans le sens positif de x et $U_2(x, t)$ l'onde réfléchie. Par contre si le domaine est infini, le système ne permet que les ondes propageant dans le sens positif (vers l'infini) et la contribution des ondes réfléchies est nulle. Dans ce cas, l'équation (1.3) admet comme solution :

$$u(x, t) = u_1(x, t) = U_1 \left[\sin \left(\omega t - \frac{\omega x}{V_p} \right) + \cos \left(\omega t - \frac{\omega x}{V_p} \right) \right] \quad (1.8)$$

Pour garantir ce mode de propagation, il faut imposer une contrainte axiale sur la frontière du domaine pour annuler l'onde réfléchie. D'après l'expression (1.2), la contrainte relatif au déplacement $u_2(x, t)$ de l'onde réfléchie est donnée par :

$$\sigma_x(x, t) = k \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x} \quad (1.9)$$

Avec :

$$\frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x} = \frac{U_2 \omega}{V_p} \left[\cos \left(\omega t + \frac{\omega x}{V_p} \right) - \sin \left(\omega t + \frac{\omega x}{V_p} \right) \right] \quad (1.10)$$

est la vitesse d'un point matériel du milieu de propagation est la dérivée du déplacement par rapport au temps, soit :

$$\dot{u}_2(x, t) = \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} = U_2 \omega \left[\cos \left(\omega t + \frac{\omega x}{V_p} \right) - \sin \left(\omega t + \frac{\omega x}{V_p} \right) \right] \quad (1.11)$$

La comparaison entre les expressions (1.10) et (1.11) nous permet d'écrire l'égalité suivante :

$$\frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x} = \frac{\dot{u}_2(x, t)}{V_p} \quad (1.12)$$

Pour annuler la contribution de l'onde réfléchie $u_2(x, t)$, on doit annuler la contrainte relative à cette onde. Pour cela, on impose sur la limite de troncature une contrainte :

$$\sigma(x, t) = -\rho V_P \dot{u}_2(x, t) = -c_P \dot{u}_2(x, t) \quad (1.14)$$

La relation (1.14) est similaire à une force de dissipation (amortissement) $F = C\dot{u}(x, t)$ avec une constante de dissipation $c_P = \rho V_P$ par unité de surface [1,2]. La relation (1.14) satisfait la condition de radiation des ondes de compression P à la limite de troncature du domaine.

On suit le même raisonnement, on obtient de la même manière une expression équivalente pour les ondes de cisaillement S se propageant parallèlement à la limite de troncature du domaine. La constante d'amortissement dans ce cas est donnée par [1,2] :

$$c_S = \rho V_S \quad (1.15)$$

Où V_S désigne la vitesse de propagation d'onde de cisaillement qui s'exprime par :

$$V_S = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (1.16)$$

Avec G le module de cisaillement du matériau :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (1.17)$$

La figure suivante montre un problème d'un plan semi-infini qui est traité par les éléments absorbants.

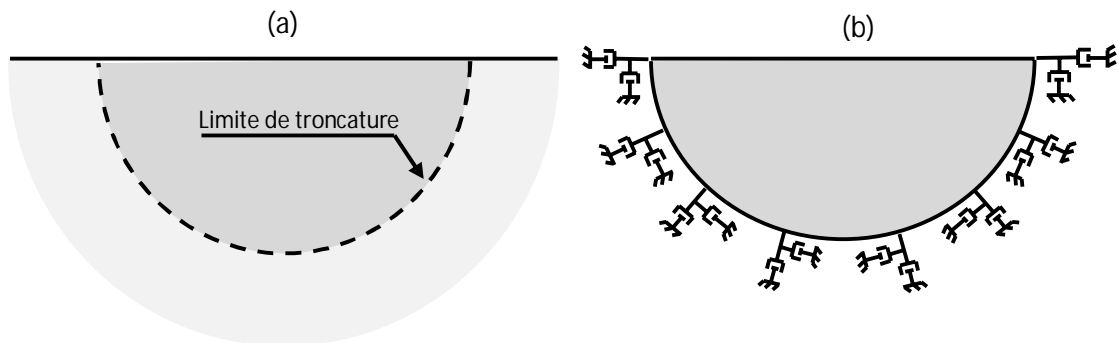


Figure 1-2 : problème d'un plan semi infini ;
 (a) : Domaine semi infini ; (b) : Domain fini avec des éléments absorbants

1.2.2 Eléments absorbants par des forces de raideur

Jusqu'à présent, nous avons vu que la condition de radiation est prise en compte par des forces d'amortissement. Par ailleurs, il est possible d'améliorer ces conditions en introduisant des ressorts en conjonction avec ces amortisseurs à la limite de troncature. Les caractéristiques de ces ressorts dépendent essentiellement des propriétés mécaniques du matériau et de la géométrie du domaine [3].

Dans ce cas, le concept est d'exploiter les solutions analytiques, en contraintes σ_{ij} et en déplacements u_i , de Kelvin pour un espace infini, de Boussinesq pour un espace semi-infini et de Flamant pour les problèmes en déformations planes. L'idée est d'imposer sur la limite de troncature des constantes de raideur calculées à base des solutions analytiques citées précédemment. Par exemple, en coordonnées sphériques, si la limite de troncature est effectuée à une distance $r = R$, ces constantes de raideur sont données par :

$$\begin{cases} k_{rr}(R, \theta, \varphi) = \frac{-\sigma_{rr}(R, \theta, \varphi)}{u_r(R, \theta, \varphi)} \\ k_{r\theta}(R, \theta, \varphi) = \frac{-\sigma_{r\theta}(R, \theta, \varphi)}{u_\theta(R, \theta, \varphi)} \\ k_{r\varphi}(R, \theta, \varphi) = \frac{-\sigma_{r\varphi}(R, \theta, \varphi)}{u_\varphi(R, \theta, \varphi)} \end{cases} \quad (1.18)$$

Et en coordonnées cylindrique, si le domaine est tronqué à une distance radiale $r = R$ et de hauteur $z = h$, on obtient pour $r = R$:

$$\begin{cases} k_{rr}(R, \theta, z) = \frac{-\sigma_{rr}(R, \theta, z)}{u_r(R, \theta, z)} \\ k_{r\theta}(R, \theta, z) = \frac{-\sigma_{r\theta}(R, \theta, z)}{u_\theta(R, \theta, z)} \\ k_{rz}(R, \theta, z) = \frac{-\sigma_{rz}(R, \theta, z)}{u_z(R, \theta, z)} \end{cases} \quad (1.19)$$

Et pour $z = h$:

$$\begin{cases} k_{zz}(r, \theta, h) = \frac{-\sigma_{zz}(r, \theta, h)}{u_z(r, \theta, h)} \\ k_{zr}(r, \theta, h) = \frac{-\sigma_{zr}(r, \theta, h)}{u_r(r, \theta, h)} \\ k_{z\theta}(r, \theta, h) = \frac{-\sigma_{z\theta}(r, \theta, h)}{u_\theta(r, \theta, h)} \end{cases} \quad (1.20)$$

Et en coordonnées cartésiennes, si le domaine est tronqué à une distance $x = a_x$, $y = a_y$ et $z = a_z$, on obtient pour $x = a_x$:

$$\begin{cases} k_{xx}(a_x, y, z) = \frac{-\sigma_{xx}(a_x, y, z)}{u_x(a_x, y, z)} \\ k_{xy}(a_x, y, z) = \frac{-\sigma_{xy}(a_x, y, z)}{u_y(a_x, y, z)} \\ k_{xz}(a_x, y, z) = \frac{-\sigma_{xz}(a_x, y, z)}{u_z(a_x, y, z)} \end{cases} \quad (1.21)$$

Et pour $y = a_y$:

$$\begin{cases} k_{yy}(x, a_y, z) = \frac{-\sigma_{yy}(x, a_y, z)}{u_y(x, a_y, z)} \\ k_{yx}(x, a_y, z) = \frac{-\sigma_{yx}(x, a_y, z)}{u_x(x, a_y, z)} \\ k_{yz}(x, a_y, z) = \frac{-\sigma_{yz}(x, a_y, z)}{u_z(x, a_y, z)} \end{cases} \quad (1.22)$$

Et enfin pour $z = a_z$:

$$\begin{cases} k_{zz}(x, y, a_z) = \frac{-\sigma_{zz}(x, y, a_z)}{u_z(x, y, a_z)} \\ k_{zx}(x, y, a_z) = \frac{-\sigma_{zx}(x, y, a_z)}{u_x(x, y, a_z)} \\ k_{zy}(x, y, a_z) = \frac{-\sigma_{zy}(x, y, a_z)}{u_y(x, y, a_z)} \end{cases} \quad (1.23)$$

1.3 Couches absorbantes parfaitement adaptées (PML)

La méthode des couches absorbantes parfaitement adaptés, dont leur nom en anglais *Perfectly Matched Layers (PML)*, est une alternative à d'autres techniques de prise en compte des conditions de radiations des domaines non bornés. Ce sont des couches, à épaisseur finie, qui entourent la frontière du domaine d'étude afin de forcer les ondes à s'amortir en parcourant une distance donnée dans le domaine absorbant [4].

Les PML jouent ainsi le rôle d'une condition aux limites absorbantes. L'idée est de remplacer la frontière absorbante par une couche absorbante, de largeur finie, imposée sur la frontière de troncature artificielle du domaine d'étude, et qui possède la propriété d'absorber presque

parfaitement toutes les ondes sortant du domaine d'étude sans générer aucune réflexion parasite [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]. Le concept de PML a été introduit pour la première fois par Bérenger en 1994 pour résoudre les équations de Maxwell en électromagnétique cité par [5, 6, 8]. Leurs première utilisations en élastodynamique été dans les travaux Hastings et ses collaborateurs en 1996 cité par [7, 11]. Depuis, elles ont été reformulées plusieurs fois pour résoudre d'autres équations d'ondes. Les PML deviennent maintenant une technique abondamment utilisée pour simuler la condition aux limites de radiations des ondes, que ce soit électromagnétique, en acoustique ou encore en élastodynamique [7].

1.3.1 PML unidimensionnel en élastodynamique

On considère une barre semi-infinie, de forces de volume négligeables, de module d'Yong E , de section A et de masse volumique ρ (Fig. 1.4a). Pour résoudre ce problème avec la PML, on tronque la barre à une distance finie L ($\Omega = x \in [0, L]$), ensuite, on introduit à la limite de troncature une couche fictive de longueur finie L_P ($\Omega_{PML} = \tilde{x} \in [L, L + L_P]$). La partie fictive de la barre est la couche absorbante parfaitement adaptée (PML) sur laquelle la variable spatiale \tilde{x} est complexe (Figure 1.3b).

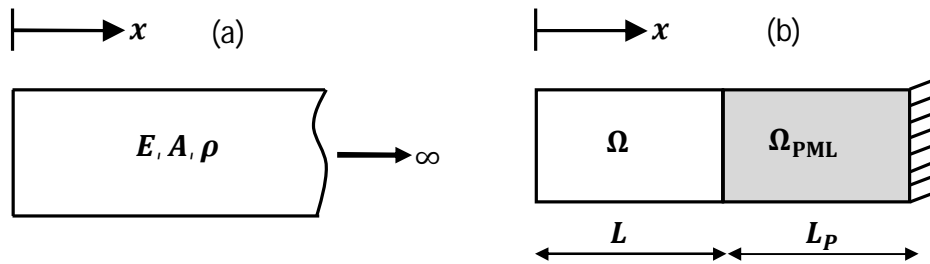


Figure 1-3: Problème unidimensionnel ;
(a) : Barre semi-infinie ; (b) : barre finie avec couche absorbante parfaitement adaptée (PML).

L'équation de mouvement qui régit la partie Ω réelle de la barra est donnée dans le domaine fréquentiel par :

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + k^2 \tilde{u} = 0 \quad (1.24)$$

Avec \tilde{u} le champ de déplacements dans le domaine des fréquences, $k = \omega \sqrt{\rho/E}$ le nombre et ω la pulsation d'excitation.

Dans la partie fictive Ω_{PML} , le passage de la variable réelle x à la variable complexe \tilde{x} est assuré par le changement de variable suivant [5, 6, 7, 8] :

$$\tilde{x} = \int_0^x \lambda(s) ds \quad (1.25)$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\frac{d\tilde{x}}{dx} = \lambda(x) \implies \frac{d}{d\tilde{x}} = \frac{1}{\lambda(x)} \frac{d}{dx} \quad (1.26)$$

Avec λ une fonction continue non nulle permettant l'extension de x en coordonnées complexes \tilde{x} . La fonction λ doit être choisie de tel sort à assurer la compatibilité des déplacements à l'interface entre le domaine réel et le domaine imaginaire de la PML. De plus, un choix judicieux de λ , permet une atténuation spatiale des ondes entrantes dans la PML. Cette seconde caractéristique donne aux PML l'aspect d'un amortisseur géométrique ou un absorbant. Soit :

$$\lambda(x) = 1 - i \frac{1}{k} f(x) \quad (1.27)$$

Avec

$$F(x) = \int_0^x f(s) ds \quad (1.28)$$

Où k le nombre d'onde, f un polynôme de degré m qui doit être choisi judicieusement pour assurer le rôle d'une fonction d'atténuation et qui dépend de la taille du domaine de la PML. Qui est donnée ici par :

$$f(x) = f_0 \left(\frac{x}{L_P} \right)^m \implies F(x) = \frac{f_0 L_P}{(m+1)} \left(\frac{x}{L_P} \right)^{m+1} \quad (1.29)$$

Et $f_0 = f(0)$ un paramètre positif permettant de contrôler l'atténuation des ondes. D'après les expressions (1.25) à (1.28), on obtient la variable complexe \tilde{x} :

$$\tilde{x} = x - i \frac{1}{k} F(x) \quad (1.30)$$

Et l'équation (1.24) qui régit la partie fictive de la barre devient :

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + k^2 \tilde{u} = 0 \quad (1.31)$$

D'après (1.26), on peut écrire (1.31) sous :

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{(\lambda(x))^2 \partial x^2} + k^2 \tilde{u} = 0 \quad (1.32)$$

Après avoir déterminé tous les paramètres qui définissent la PML, on établit la jonction entre le domaine réel Ω de la barre et le domaine imaginaire PML Ω_{PML} avec :

$$\lambda(x) = 1 - i \frac{1}{k} f(x - L) \quad (1.33)$$

Et la variable spatiale \tilde{x} par :

$$\tilde{x} = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, L] \\ x - i \frac{1}{k} F(x - L) & \text{si } x \in [L, L + L_P] \end{cases} \quad (1.34)$$

Et l'équation qui régit les deux domaines Ω et Ω_{PML} :

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + k^2 \tilde{u} = 0 \quad (1.35)$$

1.3.2 PML bi et tridimensionnels en élastodynamique

Dans cette section, nous allons généraliser le concept pour les problèmes bi et tridimensionnel. Pour cela, on considère un milieu infini supposé élastique, homogène et isotrope de module d'Yong E , du coefficient de Poisson ν et de masse volumique ρ , et dans lequel les forces de volume sont négligées. L'équilibre des forces dans le domaine des fréquences s'exprime par :

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} = -\omega^2 \rho \tilde{u}_i \quad (1.36)$$

Avec \tilde{u}_i et $\tilde{\sigma}_{ij}$ sont respectivement vecteur des déplacements et le tenseur de contraintes exprimés dans le domaine des fréquences. De plus, on a :

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \tilde{\epsilon}_{kl} \\ \tilde{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \end{cases} \quad (1.37)$$

Avec C_{ijkl} la matrice d'élasticité et $\tilde{\epsilon}_{kl}$ le tenseur de déformations infinitésimales dans le domaine des fréquences. Pour définir une couche parfaitement adaptée dans le cas bi et tridimensionnel, on procède de la même manière comme dans le cas unidimensionnel.

L'extension des coordonnées x_i en coordonnées complexes \tilde{x}_i est donnée par le changement de variable suivant [5, 6, 7, 8]:

$$\tilde{x}_j = \int_0^{x_j} \lambda_j(s) ds \quad (1.38)$$

Ce qui donne :

$$\frac{d}{d\tilde{x}_j} = \frac{1}{\lambda_j(x_j)} \frac{d}{dx_j} \quad (1.39)$$

Avec la fonction de changement de variables $\lambda_i(x_i)$:

$$\lambda_j(x_j) = 1 - i \frac{f_j(x_j)}{k_s} \quad (1.40)$$

$k_s = \omega \sqrt{\rho 2(1 + \nu)/E}$ est le nombre d'onde de cisaillement S. Les variables complexes \tilde{x}_i sont alors :

$$\tilde{x}_j = x_j - i \frac{F_j(x_j)}{k_s} \quad (1.41)$$

Et

$$F_j(x_j) = \int_0^{x_j} f_j(s) ds \quad (1.42)$$

On tient compte de (1.38) et (1.39), on obtient l'équation d'équilibre des forces pour un milieu absorbant parfaitement adapté PML :

$$\frac{1}{\lambda_j(x_j)} \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} = -\omega^2 \rho \tilde{u}_i \quad (1.43)$$

Avec :

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}\tilde{\epsilon}_{kl} \\ \tilde{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_j(x_j)}\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\lambda_i(x_i)}\frac{\partial\tilde{u}_j}{\partial x_i}\right) \end{cases} \quad (1.44)$$

Il est à noter que l'efficacité des couches absorbantes parfaitement adaptées PML dépend de la taille de la couche absorbante L_p et le degré m du polynôme de la fonction d'atténuation f . Plus L_p et m augmentent plus l'amplitude des ondes réfléchies diminue. Ces deux paramètres permettent donc de contrôler la décroissance de l'amplitude des ondes réfléchies en augmentant soit m soit L_p ou bien les deux en même temps.

1.4 Méthode des éléments de frontières (BEM)

La Méthode des éléments de frontières BEM repose sur la discrétisation des équations intégrales de frontières. L'étude de ces dernières a commencé il y a plus d'un siècle, mais le développement de la méthode des éléments de frontières en tant qu'outil de résolution numérique est toutefois postérieur à celui des éléments finis. Les premiers travaux ont été proposés durant les années 60 par Rizzo en 1967 qui a exploité la forte analogie entre la théorie du potentiel et celles de l'élasticité, et par Cruse en 1969 qui a fait l'extension de cette méthode aux problèmes tridimensionnels cité par [12, 13]. Par la suite, un très grand nombre de recherches ont été suivies sur cette méthode. A l'heure actuelle, la BEM est appliquée dans beaucoup de domaines de la physique et de la mécanique. L'un des points forts de la méthode des éléments de frontières est la possibilité de traiter des domaines infinis ou semi-infinis sans avoir à tronquer artificiellement le domaine d'étude et cela par un choix judicieux des fonctions élémentaires qui possèdent automatiquement le caractère de la condition de radiation à l'infini. Cité par [12, 13, 14, 15, 16].

1.4.1 Principe de BEM en élastodynamique

Nous considérons un domaine matériel Ω , de frontière Γ avec une normale unitaire extérieure n . Le domaine est supposé élastique linéaire, de module d'Young E , de coefficient de Poisson ν et de masse volumique ρ . En domaine fréquentiel, l'équilibre dynamique est posé mathématiquement sous :

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + b_i = -\omega^2\rho u_i & |\Omega & a \\ u_i = u_i^D & |\Gamma_D & b \\ T_i = \sigma_{ij}n_j = T_i^N & |\Gamma_N & c \end{cases} \quad (1.45)$$

Avec :

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \end{cases} \quad (1.46)$$

Où σ_{ij} le tenseur de contraintes, ε_{kl} le tenseur de déformations et C_{ijkl} le tenseur d'élasticité. u_i^D et T_i^N sont respectivement les conditions aux limites de Dirichlet (déplacement u_i^D) et de Newman (vecteur de contraintes T_i^N) sur les frontières Γ_D et Γ_N .

D'après les références [15, 17], la formulation de (1.45a) en équations intégrales de frontières est sous la forme :

$$\alpha(x)u_i(x) + \int_{\Gamma} [h_{ij}(x, \xi, \omega)u_j(\xi) - g_{ij}(x, \xi, \omega)T_j(\xi)] d\Gamma = 0 \quad (1.47)$$

avec $u_i(x)$ la solution (déplacement) au point x sous l'effet d'une source appliquée au point ξ . α un paramètre qui dépend de la position du point x sur lequel on cherche la solution. Pour un problème 2D :

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \Omega \\ 1 & \text{si } x \in \Omega \\ \frac{\theta}{2\pi} & \text{si } x \in \Gamma \end{cases} \quad (1.48)$$

Avec θ l'angle intérieur en x de la frontière Γ . L'expression (1.47) peut être écrite sous la forme du système suivant :

$$H_{ij}u_j = G_{ij}T_j \quad (1.49)$$

Avec :

$$H_{ij} = \int_{\Gamma} h_{ij}(x, \xi, \omega) d\Gamma + \frac{\theta}{2\pi} \delta_{ij} \quad ; \quad G_{ij} = \int_{\Gamma} g_{ij}(x, \xi, \omega) d\Gamma \quad (1.50)$$

Avec δ_{ij} le symbole de Kronecker. L'un des points essentiels de la BEM est de trouver la solution fondamentale de l'expression (1.45a) qui correspond aux déplacements $g_{ij}(x, \xi, \omega)$ et vecteurs de contraintes $h_{ij}(x, \xi, \omega)$, au niveau du point x , sous l'effet de l'impulsion de Dirac appliquée au point ξ d'un domaine infini. Pour un problème élastodynamique bidimensionnel, cette solution, en domaine fréquentiels, est donnée par [15, 17, 18] :

$$\begin{cases} g_{ij}(x, \xi, \omega) = \frac{1}{2\pi\mu} [A\delta_{ij} + Br_i r_j] \\ h_{ij}(x, \xi, \omega) = \frac{1}{2\pi} \left[C \left(\delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial n} + r_j n_i \right) + D \left(r_i n_j - 2r_i r_j \frac{\partial r}{\partial n} \right) + Fr_i r_j \frac{\partial r}{\partial n} + Kr_i n_j \right] \end{cases} \quad (1.51)$$

Avec r la distance radiale entre le point source ξ et le point considéré x :

$$r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2} \quad ; \quad r_{,i} = \frac{x_i - \xi_i}{r} \quad (1.52)$$

Et :

$$\begin{aligned} A &= K_0(z_2) + \frac{1}{z_2} \left[K_1(z_2) - \frac{c_s}{c_p} K_1(z_1) \right] \quad ; \quad D = -2 \frac{B}{r} \\ B &= K_2(z_2) - \left(\frac{c_s}{c_p} \right)^2 K_2(z_1) \quad ; \quad F = -2 \frac{\partial B}{\partial r} \\ C &= \frac{\partial A}{\partial r} - \frac{B}{r} \quad ; \quad K = \left[\left(\frac{c_p}{c_s} \right)^2 - 2 \right] \left(\frac{\partial A}{\partial r} - \frac{B}{r} - \frac{\partial B}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (1.53)$$

Avec $z_1 = i\omega r/c_p$, $z_2 = i\omega r/c_s$ et c_p et c_s sont respectivement la célérité des ondes P et S . K_0 , K_1 et K_2 sont des fonctions modifiées de Bessel du seconde espèce qui sont respectivement d'ordres 0, 1 et 2.

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté les grandes lignes de trois méthodes de modélisation des domaines non bornés. Pour les éléments absorbant en dynamique, des forces d'amortissement seules ou en conjonction avec des forces de raideur, peuvent être imposées sur la limite de troncature. Par contre en statique, seules les forces de raideur qui peuvent être imposées.

Concernant les PML, leur efficacité dépend essentiellement de la taille de la couche absorbante L_p et du degré m du polynôme de la fonction d'atténuation f . En effet, plus L_p et m augmentent plus l'amplitude des ondes réfléchies diminue. Ces deux paramètres permettent donc de contrôler la décroissance de l'amplitude des ondes réfléchies en augmentant soit m soit L_p ou bien les deux en même temps.

Concernant l'utilisation des éléments de frontières (BEM), la difficulté réside dans le calcul des solutions fondamentales qui dépendent de plusieurs paramètres à savoir la dimension du problème traité (1D, 2D ou 3D), du type de sollicitations (dynamique ou statique) et la nature des sollicitation (temporel ou fréquentiel).

Chapitre 2

Eléments infinis classiques

2.1 Introduction

Le succès de la méthode des éléments finis, et la nécessité de traiter des domaines non bornés, ont conduits au développement des éléments infinis à base des éléments finis [12,15,28]. En effet, l'utilisation des éléments infinis est un alternatif à d'autres technique de prise en compte des conditions aux limites des domaines infinis ou semi-infinis.

Par ailleurs, selon le processus de développement des éléments infinis, on peut les classer en deux types [19, 20, 21, 22, 23, 24] : éléments infinis selon l'approche directe par l'utilisation des fonctions de formes décroissantes et les éléments infinis selon l'approche inverse (indirecte) par l'utilisation des fonctions de transformations géométriques ascendantes.

2.2 Eléments infinis selon l'approche directe

L'idée de base de cette approche consiste en l'extension du domaine de définition de l'élément fini naturel et l'élément de référence jusqu'à l'infini dans la direction considérée (figure 2.1). Les fonctions de forme complète de l'élément infini sont alors la conjonction des fonctions de formes d'un élément fini ordinaire avec des fonctions décroissantes.

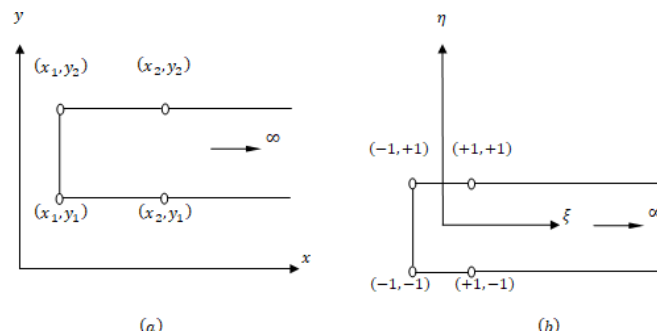


Figure 2-1: Approche directe - élément infini dans la direction horizontale ; (a) : Coordonnées physique ; (b) : Coordonnées de référence

Chaque fonction d'interpolation V_i associée au nœud i d'un élément infini s'obtient par la multiplication de la fonction de forme N_i d'un élément fini de base, par une fonction f_i qui décroît asymptotiquement vers zéro à l'infini. Les nouvelles fonctions de formes V_i s'écrivent alors [19, 25]:

$$V_i(\xi, \eta) = N_i(\xi, \eta) f_i(\xi, \eta) \quad (2.1)$$

Dans le cas du domaine s'étendant à l'infini dans la direction horizontale, les fonctions décroissantes de type exponentiel sont sélectionnées de telle sorte à représenter exactement le comportement de la solution en champ lointain, s'atténuant exponentiellement vers zéro à l'infini. Pour chaque nœud i dans l'élément de référence, ces fonctions ont pour expression :

$$f_i(\xi, \eta) = e^{-\frac{(\xi_i - \xi)}{L}} \quad (2.2)$$

et pour une décroissance dans les deux directions de ξ et de η , l'expression devient :

$$f_i(\xi, \eta) = e^{-\left[\frac{(\xi_i - \xi) + (\eta_i - \eta)}{L}\right]} \quad (2.3)$$

Dans cette équation, l'inclusion de ξ_i et de η_i assure que les fonctions de décroissance et par la suite les fonctions d'interpolation prennent des valeurs unitaires aux nœuds pour lesquels elles sont définies (figure 2.2). Le ξ représente la coordonnée horizontale locale et L un paramètre introduit pour contrôler la sévérité de la décroissance. La figure 2.2 montre clairement les allures des fonctions de forme V_i d'un élément infini linéique quadratique ainsi que leur forme de décroissance f_i .

Pour insérer l'approche directe dans un programme de calcul en éléments finis, les modifications nécessaires consistent essentiellement à l'intégration numérique et à l'évaluation de nouvelles fonctions de forme et de leurs dérivées. Les points et les poids d'intégration numérique sont calculés selon la méthode de Gauss-Laguerre, puis modifiés pour l'intervalle $[-1, +\infty[$. La matrice Jacobienne ainsi que le maillage d'éléments finis initial du domaine restent inchangés.

Les expressions des fonctions de formes pour un élément infini dans le sens ξ s'écrivent alors :

$$V_i(\xi, \eta) = N_i(\xi, \eta) e^{-\frac{(\xi_i - \xi)}{L}} \quad (2.4)$$

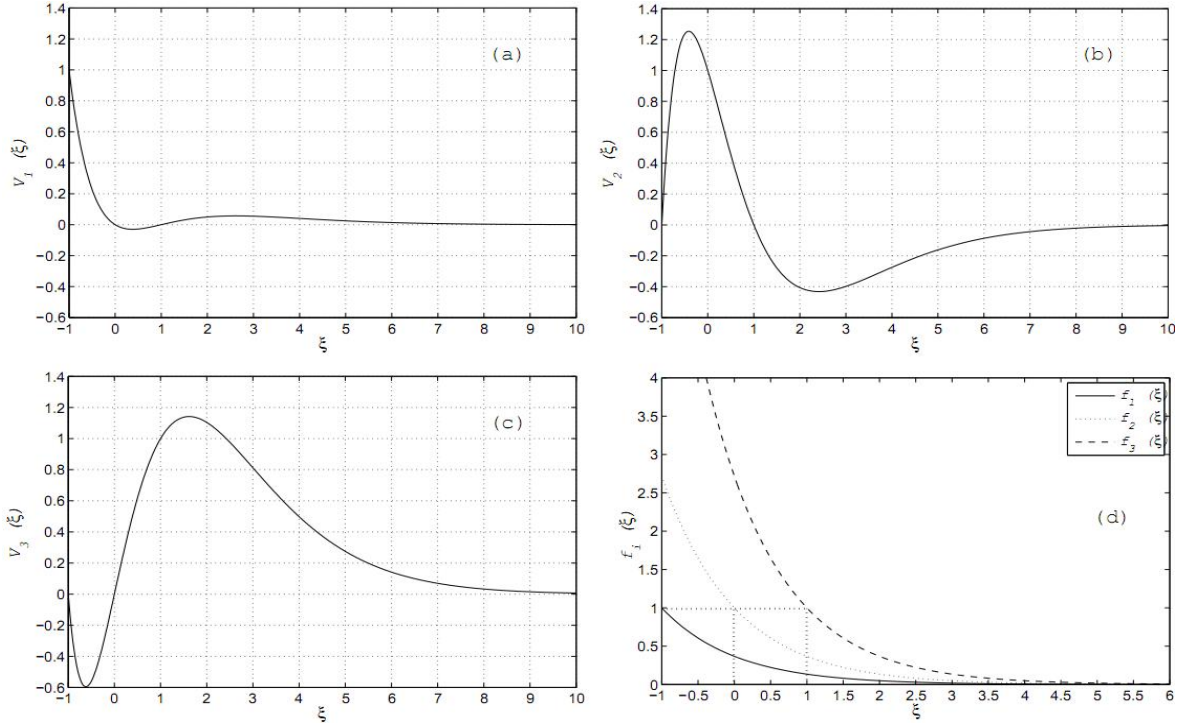


Figure 2-2: Fonctions de forme d'un élément infini linéique quadratique ;
 (a): Fonction de forme \$V_1\$; (b):Fonction de forme \$V_2\$; (c): Fonction de forme \$V_3\$; Fonction de décroissance \$f_i\$;

Et leurs dérivées dans le sens \$\xi\$:

$$\frac{\partial V_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \left[\frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \frac{N_i}{L} \right] e^{\frac{(\xi_i - \xi)}{L}} \quad (2.5)$$

Et leurs dérivées dans le sens \$\eta\$:

$$\frac{\partial V_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial \eta} e^{\frac{(\xi_i - \xi)}{L}} \quad (2.6)$$

Dans le cas de problèmes présentant un comportement du type \$l/r\$, où \$l\$ est une longueur constante spécifique au problème et \$r\$ est un rayon assez grand pour être infini, il est naturel de chercher un élément infini dont le comportement est essentiellement dominé par la même forme de comportement. Ceci peut être réalisé par l'utilisation des fonctions décroissantes du type puissance, qui assurent une tendance en \$1/r\$ quand \$\xi\$ tend vers l'infini. Pour une décroissance seulement dans la direction \$\xi\$, ces fonctions ont pour expression [19, 23, 26] :

$$f_i(\xi, \eta) = \left[\frac{\xi_i - \xi_0}{\xi - \xi_0} \right]^n \quad (2.7)$$

Avec ξ_0 est un point origine quelconque appelé pôle. Ce point doit être en dehors de l'élément ; dans la face opposée à celle s'étendant à l'infini. Si la décroissance est dans la direction positive de ξ , ξ_0 doit être inférieur -1, sinon il doit être supérieur à 1 pour éviter des singularités à l'intérieur de l'élément [19, 27].

Le paramètre de sévérité n , contrôlant la décroissance en puissance, doit être supérieur au plus grand ordre des polynômes en ξ , intervenant dans les fonctions de forme standard N . Ceci permet d'assurer quand ξ augmente, les fonctions de forme complètes V_i tendent vers $1/\xi$, qui est le comportement attendu du problème posé. Il n'existe aucune règle à suivre pour déterminer n , encore, seule l'expérimentation permet de porter un jugement. Cependant, il est clair que si n est trop petit, alors d'une part, les conditions d'application de l'identité de Green pourraient être non respectées, et d'autre part les fonctions de forme complètes V_i deviennent ascendantes. S'il est trop grand, d'importantes propriétés physiques du problème peuvent être mal représentées et même omises [19, 22, 23].

La décroissance peut être généralisée pour les deux directions :

$$f_{i(\xi,\eta)} = \left[\frac{\xi_i - \xi_0}{\xi - \xi_0} \right]^n \left[\frac{\eta_i - \eta_0}{\eta - \eta_0} \right]^m \quad (2.8)$$

Les paramètres n et m ne sont pas nécessairement des entiers et peuvent être égaux, ce qui est généralement supposé pour simplifier l'étude paramétrique [19]

Les expressions des fonctions de forme complètes pour un élément infini dans la direction ξ sont :

$$V_i(\xi, \eta) = N_i(\xi, \eta) \left[\frac{\xi_i - \xi_0}{\xi - \xi_0} \right]^n \quad (2.9)$$

Et leur dérivée

$$\frac{\partial V_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \left[\frac{\xi_i - \xi_0}{\xi - \xi_0} \right]^n ; \quad \frac{\partial V_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \left[\frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \frac{nN_i}{\xi - \xi_0} \right] \left[\frac{\xi_i - \xi_0}{\xi - \xi_0} \right]^n \quad (2.10)$$

2.3 Eléments infinis selon l'approche inverse

Dans cette approche, le domaine de définition de l'élément infini est transformé en un domaine fini à l'aide des fonctions de transformations géométriques ascendantes, avec une singularité aux nœuds limites de l'élément de référence, de telle sorte à projeter les nœuds physiques de l'élément réel correspondants à l'infini.

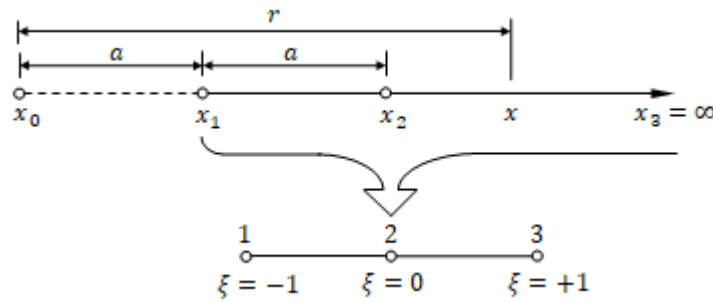


Figure 2-3: Transformation géométrique de Zienkiewicz d'un élément infini unidimensionnel ;

L'idée de base est de considérer un élément unidimensionnel quadratique de la figure 2.3 s'étendant du point x_1 à x_3 qui se trouve à l'infini, en passant par le point x_2 . Une telle transformation peut s'exprimer par :

$$x = R_1(\xi) x_1 + R_2(\xi) x_2 \quad (2.11)$$

Avec ξ la coordonnée locale de l'élément de référence, R_1 et R_2 les fonctions de transformations géométriques de Zienkiewicz qui sont données par [19, 28]:

$$R_1(\xi) = \frac{-2\xi}{1 - \xi} \quad ; \quad R_2(\xi) = \frac{1 + \xi}{1 - \xi} \quad (2.12)$$

Les transformations (2.12) nous permettent d'avoir $x = x_1$ quand $\xi = -1$, $x = x_2$ quand $\xi = 0$ et $x = +\infty$ quand $\xi = +1$.

Une transformation géométrique entre le domaine fini et le domaine infini étant parfaitement établie. On peut démontrer facilement que la transformation du polynôme d'interpolation P du domaine fini ξ en domaine infini x est sous la forme :

$$P(x) = \beta_0 + \frac{\beta_1}{x} + \frac{\beta_2}{x^2} + \frac{\beta_3}{x^3} + \dots \quad (2.13)$$

Avec β_i des coefficients quelconques déterminés par la résolution du système (2.13).

L'expression (2.13) est la solution de plusieurs problèmes extérieurs, et présente l'avantage de modéliser le comportement du champ lointain, en utilisant directement les polynômes ordinaires d'élément finis avec l'intégration numérique standard de Gauss-Legendre. Le seul changement requis pour modifier un programme de calcul en éléments finis dans le but d'intégrer des éléments infinis, consiste en un nouveau calcul de la matrice Jacobienne avec les dérivées des fonctions de transformation géométrique R_1 au lieu de celles des fonctions de forme N_i . La nouvelle expression de la matrice Jacobienne est alors :

$$[J] = \begin{bmatrix} R_{,\xi} \\ R_{,\eta} \end{bmatrix} [X \ Y] \quad (2.14)$$

Tableau 2-1: Fonction de transformation géométrique d'un élément infini Q4 et leurs dérivées.

nœud	1	2	3	4
ξ	-1	+1	+1	-1
η	-1	-1	+1	+1
R	$(1 - \eta)/(1 - \xi)$	-	-	$(1 + \eta)/(1 - \xi)$
$R_{,\xi}$	$(1 - \eta)/(1 - \xi)^2$	-	-	$(1 + \eta)/(1 - \xi)^2$
$R_{,\eta}$	$-1/(1 - \xi)$	-	-	$+1/(1 - \xi)$

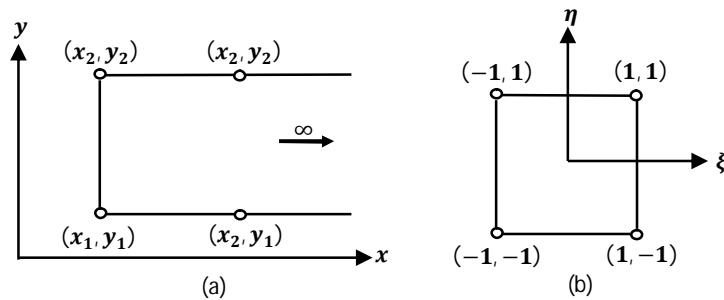


Figure 2-4 : transformation de géométrie- élément infini Q4 dans la direction horizontale ; (a) : élément réel ; (b) : élément de référence

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté les grandes lignes de construction des éléments infinis classiques selon les deux approches directe par l'utilisation des fonctions décroissantes et inverse par l'utilisation des transformations géométriques ascendantes. On a vu dans l'approche directe, qu'elle nous permet de contrôler la vitesse de décroissance, par les

paramètres de sévérité à savoir L dans les fonctions décroissantes de type exponentiel et le degré n et/ou m dans les fonctions de type puissance. Par contre, dans l'approche inverse, cette possibilité ne s'offre pas. Il est aussi nécessaire de noter, qu'il existe une large gamme d'éléments infinis que se soit par l'approche directe ou inverse qui sont cités dans les travaux de Abdel-fettah [21], Nenning [29] et Chongbin Zhao [30].

Chapitre 3

Eléments infinis périodiques

3.1 Introduction

Les premiers éléments infinis périodiques ont été développés par Bettess et Zienkiewicz en 1975 juste après le développement des premiers types d'éléments infinis classique de l'approche directe cité par [19, 29], Ces éléments ont été conçues dans le but de traités des problèmes extérieurs, gouvernés par l'équation d'Helmholtz (3.2) ci-après.

3.2 Propagation d'ondes en milieux infinis

Le phénomène de propagation d'ondes intervient dans plusieurs domaines de l'ingénierie notamment dans électromagnétiques, l'acoustiques, électrodynamique,... etc. Son expression est donnée par :

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1)$$

Dans le domaine des temps et

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad (3.2)$$

Dans le domaine des fréquences, d'où u est le champ de variable, $k = \omega/c$ est la longueur d'ondes en fonction de la vitesse de propagation d'ondes c , et la pulsation d'excitation ω .

Dans le cas où la propagation d'onde est dans le sens x , la solution générale de l'équation (3.1) qui a été donnée par Alembert sous la forme [31]:

$$u = u_1(x - ct) + u_2(x + ct) \quad (3.3)$$

L'équation (3.3) représente une somme de deux ondes u_1 et u_2 . La première se propage dans la direction positive et la seconde réfléchié voyageant dans la direction négative. Si le domaine s'étend à l'infini dans la direction de x , alors il doit être tronqué à une certaine limite fictive. Afin de supprimer la contribution de l'onde réfléchié, c'est adire à satisfaire les relations suivantes :

$$u_2(x + ct) = 0 \quad (3.4)$$

$$u = u_1(x - ct) \quad (3.5)$$

La dérivation de (3.5) par rapport au temps et par rapport à la normale n nous donne le système suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -cu_1' \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} = u_1' \quad (3.7)$$

La substitution de l'équation (3.7) dans (3.6) nous permet d'avoir :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.8)$$

Dans les domaines des temps, et

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{i\omega}{c} u \quad (3.9)$$

Dans les domaines des fréquences, avec $i = \sqrt{-1}$. L'expression (3.8) ou (3.9) est appelée la condition de Sommerfeld [19, 28] qui a été présentée pour la première fois en 1949, sous forme d'une limite qui tend vers zéro quand la distance entre la source et le point considère tend vers l'infini. L'expression de cette limite dans le domaine des temps s'écrit par :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0 \quad (3.10)$$

Où r est la distance radiale entre la source et le point considéré $n = 1, 2$ ou 3 selon la dimension du domaine traité 1D, 2D ou 3D. Dans le domaine des fréquences, l'expression (3.10) devient :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{i\omega}{c} u \right) = 0 \quad (3.11)$$

Afin de satisfaire les conditions de Sommerfeld (3.10) et (3.11), Bettess et Zienkiewicz [19, 28] ont eu l'idée d'introduire, dans les éléments infinis classiques des deux approches, des fonctions qui tiennent compte de la propagation d'ondes.

3.3 Eléments infinis périodiques selon l'approche directe

Dans le cas de l'approche directe, la différence entre les éléments infinis classique et les éléments infinis périodique est dans les fonctions de formes utilisée dans les quelles on a ajouté l'expression e^{ikr} , avec r la distance radiale entre le nœud i et le point considéré [19, 29, 30]. L'idée de base de cette approche est de multiplier les fonctions de formes V_i d'un élément infini classique par une fonction périodique permettant de tenir compte de la propagation d'ondes. Les expressions complètes des fonctions de formes sont alors donnée par :

$$P_i(\xi, \eta) = V_i(\xi, \eta) e^{ikr} \quad (3.12)$$

Avec :

$$V_i(\xi, \eta) = N_i(\xi, \eta) f_i(\xi, \eta) \quad (3.13)$$

les fonction de forme d'un élément infini classique selon l'approche directe.

Pour une direction infini suivant ξ , les dérivées des fonctions de formes P_i sont donnée par :

$$\frac{\partial P_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} f_i e^{ikr} + N_i \frac{\partial f_i}{\partial \xi} e^{ikr} + N_i f_i ik \frac{\partial r}{\partial \xi} e^{ikr} \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial \eta} f_i e^{ikr} \quad (3.15)$$

Pour un choix des fonctions décroissantes f_i est de type exponentiel, l'expression (3.12) devient pour une seule direction infinie ξ :

$$P_i(\xi, \eta) = N_i(\xi, \eta) e^{\frac{(\xi_i - \xi)}{L}} e^{ikr} \quad (3.16)$$

Pour les directions infinies ξ et η :

$$P_i(\xi, \eta) = N_i(\xi, \eta) e^{\frac{(\xi_i - \xi + \eta_i - \eta)}{L}} e^{ikr} \quad (3.17)$$

Dans le cas où les fonctions décroissantes f_i sont de type puissance, alors, l'expression (3.12) devient :

$$P_i(\xi, \eta) = N_i(\xi, \eta) \left[\frac{\xi_i - \xi_0}{\xi - \xi_0} \right]^n e^{ikr} \quad (3.18)$$

pour une direction infinie suivant ξ . Dans les deux directions infinies ξ et η , on obtient :

$$P_i(\xi, \eta) = N_i(\xi, \eta) \left(\frac{\xi_i - \xi_0}{\xi - \xi_0} \right)^n \left(\frac{\eta_i - \eta_0}{\eta - \eta_0} \right)^m e^{ikr} \quad (3.19)$$

Afin d'illustrer le comportement des fonctions de forme d'un élément infini périodique, on a tracé, sur la figure 3.1, la variation des fonctions de formes P_i et V_i d'un élément linéique quadratique pour $L = 1$ et $k = 15$.

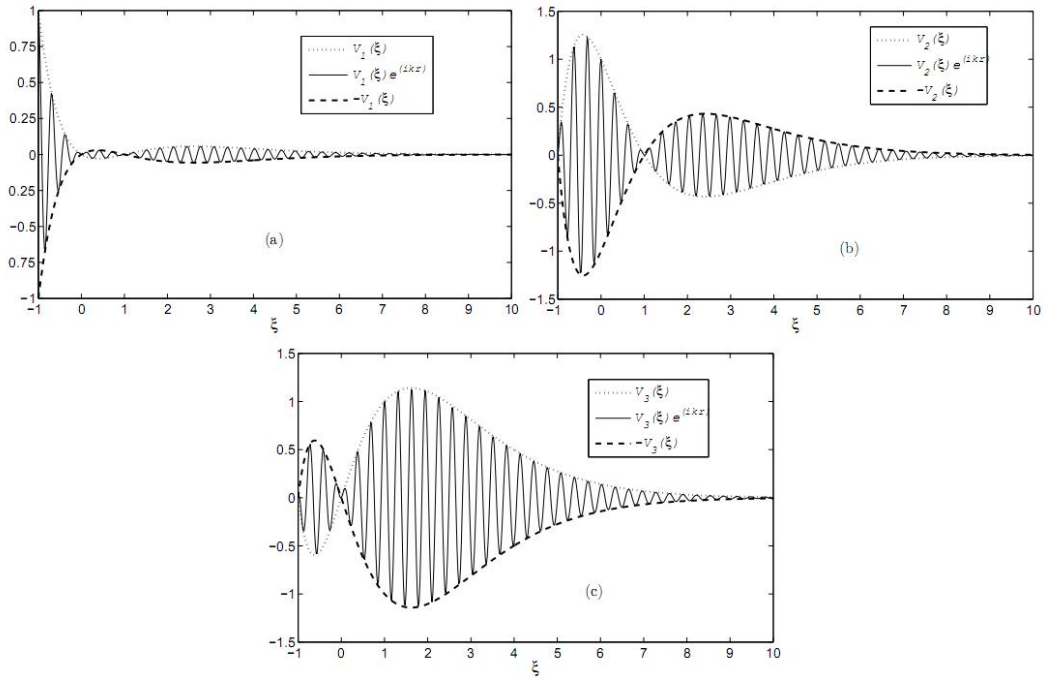


Figure 3-1: Fonctions de forme d'un élément infini linéique quadratique ;
 (a) : P_1 et V_1 ; (b) : P_2 et V_2 ; (c) : P_3 et V_3 .

3.3.1 Intégration des éléments infinis périodiques de l'approche directe

Pour l'intégration des éléments infinis périodique, les fonctions de formes des éléments infinis périodiques de l'approche directe contiennent des termes faisant intervenir la propagation d'ondes. Et pour le calcul des matrices élémentaires de ces éléments, on doit faire appelle a l'intégration numérique de Newton Cotes qui permet d'évaluer des intégrales de forme :

$$\int_0^{\infty} f(x) e^{-\alpha x} e^{i\beta x} dx \quad (3.20)$$

Qu'on peut mettre sous forme

$$\int_0^{\infty} f(x) e^{(-\alpha+i\beta)x} dx \quad (3.21)$$

Avec α une constante qui dépend de la vitesse de décroissance, et la constante β dépend du nombre d'ondes k qui est généralement $\beta = 2k$. Dans la formule (3.20), les bornes d'intégration sont de 0 à l'infini, alors dans notre cas sont de -1 à l'infini, ce qui requière un changement de variable adéquat :

$$\beta x = \frac{\pi}{4} (2j + 1) \quad j = 0, 1, 2, \dots, n \quad (3.22)$$

Avec n le nombre de point d'intégration.

Dans la fonction (3.21), $f(x)$ peut être écrite sous la forme d'une combinaison linéaire suivante :

$$\sum_{i=1}^n P_i L_i(x) \quad (3.23)$$

Avec L_i un polynôme de Lagrange qui est donnée par :

$$L_i(x) = \prod_{i \neq j} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (3.24)$$

On remplace la fonction (3.23) dans (3.21), on obtient l'égalité (3.25) suivante qu'on peut résoudre numériquement par l'intégration de Newton-Cote :

$$\int_0^{\infty} f(x) e^{(-\alpha+i\beta)x} dx = \sum_{i=1}^n P_i \int_0^{\infty} L_i e^{(-\alpha+i\beta)x} dx \quad (3.25)$$

3.4 Eléments infinis périodiques selon l'approche inverse

Cette approche est basée sur la transformation de Zienkiewicz (selon approche inverse) dans laquelle la décroissance de l'amplitude des ondes est sous la forme $1/r$ (BettessP 1992, NanningM 2010, ZhaoC 2009), quand peut écrire sous forme :

$$r = \frac{A}{1-\xi} \quad (3.26)$$

La seule différence entre ces éléments et les éléments infinis classiques de l'approche inverse est dans les fonctions de formes qui sont multipliées par un terme tenant compte de la propagation d'ondes qui dépend de la dimension du problème (2D, 3D).

3.4.1 Cas de trois dimensions (3D)

Dans le cas tridimensionnels, la propagation d'ondes dans les domaines infinis est dominée par le terme e^{ikr}/r . Les fonctions de formes N complètes sont obtenues par la multiplication des fonctions de formes des éléments infinis N par e^{ikr} :

$$p(\xi, \eta) = N(\xi, \eta) e^{ikr} \quad (3.27)$$

On remplace (3.26) dans (3.27), on obtient :

$$p(\xi, \eta) = N(\xi, \eta) e^{\frac{ikA}{1-\xi}} \quad (3.28)$$

Pour assurer la continuité du champ de variables entre les éléments finis et les éléments infinis, $p(\xi, \eta)$ doit être égale à l'unité quand $\xi = -1$. Pour cela, on multiplie l'équation (3.28) par $e^{-\frac{ikA}{2}}$. Alors on aura :

$$p(\xi, \eta) = N(\xi, \eta) e^{\frac{ikA}{1-\xi}} e^{-\frac{ikA}{2}} \quad (3.29)$$

Qu'on peut mettre sous cette forme :

$$p(\xi, \eta) = CN(\xi, \eta) e^{\frac{ikA}{1-\xi}} \quad (3.30)$$

Et leur dérivée sera comme suite :

$$\frac{\partial p(\xi, \eta)}{\partial \xi} = C e^{\frac{ikA}{1-\xi}} \left(\frac{\partial N}{\partial \xi} + N ikA \frac{1}{1-\xi^2} \right) \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial p(\xi, \eta)}{\partial \eta} = C \frac{\partial p}{\partial \eta} e^{\frac{ikA}{1-\xi}} \quad (3.32)$$

3.4.2 Cas de deux dimensions (2D)

En bidimensionnels, la solution de l'équation de Helmholtz dans un domaine infinis dépend de la fonction de Hankel $H^0(kr)$ d'ordre zéro [19, 29, 30]. Pour des valeurs de r très grandes, la fonction de Hankel tend vers $e^{(ikr/\sqrt{r})}$ et dans ce cas les fonctions de formes sont données par :

$$p(\xi, \eta) = N(\xi, \eta) \sqrt{r} e^{ikr} \quad (3.33)$$

On remplace (3.26) dans (3.33) et pour assurer la continuité du champ de variable, on multiplie l'équation (3.33) par $\left(\frac{2}{A}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{ikA}{2}}$, on obtient :

$$p(\xi, \eta) = N_i(\xi, \eta) \left(\frac{2}{A}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{ikA}{2}} e^{\frac{ikA}{1-\xi}} \quad (3.34)$$

Qu'on peut mettre sous cette forme :

$$p(\xi, \eta) = DN(\xi, \eta) e^{\frac{ikA}{1-\xi}} \quad (3.35)$$

Ses dérivées seront :

$$\frac{\partial p_i}{\partial \xi} = D \left[\frac{\partial N}{\partial \xi} \left(\frac{A}{1-\xi}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{N}{2} \left(\frac{1}{(1-\xi)^3}\right)^{\frac{1}{2}} + N ikA \left(\frac{A}{1-\xi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-\xi)^2} \right] \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial p(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial N}{\partial \eta} \left(\frac{A}{1-\xi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{ikA}{1-\xi}} \quad (3.37)$$

3.5 Conclusion

La différence entre les éléments infinis classiques et les éléments infinis périodiques est dans les fonctions de forme de ces derniers qui contiennent des termes tenant compte de propagation d'ondes. L'utilisation des éléments infinis périodiques demande des techniques d'intégrations numériques très avancées.

Chapitre 4

Discrétisation par éléments finis et éléments infinis

4.1 Introduction

L'analyse des problèmes d'ingénierie nous amènent à développer des modèles mathématiques qui s'appuient sur des hypothèses simplificatrices pour aboutir à des équations différentielles auxquelles sont ajoutées des conditions aux limites. La méthode numérique la plus utilisée pour résoudre ces problèmes est celle des éléments finis, car elle offre la possibilité de développer un programme de calcul qui peut résoudre avec peu de modification plusieurs types de problèmes. Dans ce chapitre, nous allons mettre en équations le problème mathématique d'un domaine semi-infini, sous chargement dynamique, dont lequel le matériau est supposé élastique linéaire.

4.2 Formulation mathématique du problème

On considère un domaine semi-infini, constitué d'un matériau à comportement élastique linéaire, de module d'Young E , de coefficient de Poisson ν et de masse volumique ρ . Sur la figure suivante (Figure 4.1), on a illustré le problème en question.

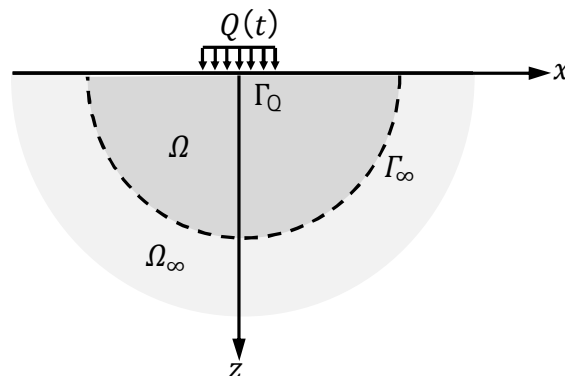


Figure 4-1: Domaine semi infini.

Le problème mathématique de la figure 3.1 peut être posé sous :

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i & |\Omega & (4.1a) \\ T_i = \sigma_{ij} n_j = -Q(t) & |\Gamma_Q & (4.1b) \\ \lim_{r \rightarrow \infty} u_i = 0 & & (4.1c) \end{cases}$$

avec σ_{ij} le tenseur de contraintes, T_i le vecteur de contraintes, f_i la force de volume, u_i le champ de déplacements, $Q(t)$ le chargement dynamique, Γ_Q la frontière sur laquelle le chargement Q est appliqué, Ω le champ proche du domaine d'étude et $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ la distance radiale. Avec :

σ_{ij}	:	Le tenseur de contraintes ;
T_i	:	Le vecteur de contraintes ;
n_j	:	Le vecteur unitaire normal à une frontière donnée ;
f_i	:	Le vecteur de forces de volume ;
u_i	:	Le vecteur ou champ de déplacements ;
\ddot{u}_i	:	Le vecteur d'accélération ;
$Q(t)$:	Le chargement dynamique ;
Ω	:	Le champ proche du domaine d'étude ;
Γ_Q	:	La frontière à laquelle le chargement Q est appliqué ;
$r = \sqrt{x^2 + z^2}$:	La distance radiale ;

La loi de comportement de l'élasticité linéaire, isotrope, en petites déformations, permet d'écrire les contraintes en fonction des déformations sous la forme suivante :

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (4.2)$$

Où D_{ijkl} désigne le tenseur d'élasticité qui est d'ordre quatre. Les expressions des déformations en fonction des déplacements u sont données par :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4.3)$$

Vu la symétrie des tenseurs et dans le but d'alléger les écritures, la notation vectorielle est souvent adoptée en élasticité plane. Alors, le tenseur des contraintes en élasticité plane s'écrit par :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

et le tenseur des déformations par :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_x \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

Et le vecteur des déplacements par :

$$u = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_z \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

La relation entre les déformations et les déplacements devient alors :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_z \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

Qui peut se mettre sous la forme condensée suivante :

$$\varepsilon = Su \quad (4.8)$$

En tenant compte de (4.8), l'expression (4.2) devient :

$$\sigma = D\varepsilon = DSu \quad (4.9)$$

Avec :

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & 0 \\ d_2 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Les expressions des constantes d_1 et d_2 dans le cas d'un problème en contraintes planes sont données par :

$$d_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad ; \quad d_2 = \nu d_1 \quad (4.11)$$

Et dans le cas d'un problème en déformations planes par :

$$d_1 = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad ; \quad d_2 = \frac{\nu d_1}{(1 - \nu)} \quad (4.12)$$

L'expression de la constante d_3 est donnée dans les deux cas par :

$$d_3 = \frac{1}{2}(d_1 - d_2) \quad (4.13)$$

Le problème variationnel associé à l'équation d'équilibre (4.1a) s'obtient en adoptant la formulation de type Galerkin pour une fonction poids $w = \delta u$. La forme forte s'écrit :

$$\int_{\Omega} \delta u_i \sigma_{ij,j} d\Omega + \int_{\Omega} \delta u_i f_i d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_i \rho \ddot{u}_i d\Omega = 0 \quad (4.14)$$

A l'aide du théorème de divergence, le premier terme de (4.14) est donné par l'expression suivante :

$$\int_{\Omega} \delta u_i \sigma_{ij,j} d\Omega = \int_{\Gamma} \delta u_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega} \underbrace{\delta u_{i,j}}_{\delta \varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\Omega \quad (4.15)$$

On remplace (4.15) dans (4.14), on obtient la forme intégrale faible suivante :

$$- \int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Gamma} \delta u_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma + \int_{\Omega} \delta u_i f_i d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_i \rho \ddot{u}_i d\Omega = 0 \quad (4.16)$$

ou encore sous forme vectorielle suivante :

$$- \int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \sigma d\Omega + \int_{\Gamma} \delta u \sigma n d\Gamma + \int_{\Omega} \delta u f d\Omega - \int_{\Omega} \delta u \rho \ddot{u} d\Omega = 0 \quad (4.17)$$

Si on tient compte de (4.8) et (4.9), l'expression (4.17) devient :

$$- \int_{\Omega} \delta (Su)^T D S u d\Omega + \int_{\Gamma} \delta u \sigma n d\Gamma + \int_{\Omega} \delta u f d\Omega - \int_{\Omega} \delta u \rho \ddot{u} d\Omega = 0 \quad (4.18)$$

Le système (4.18) est l'expression des travaux virtuels des corps homogènes et isotropes, ayant un comportement bidimensionnel élastique linéaire. La forme sous intégrale faible de l'expression (4.18) nous permet d'introduire les conditions aux limites.

Sur la surface Γ_Q où s'effectue le chargement dynamique $Q(t)$ dans le sens z , la condition est donnée par :

$$T_i = \sigma_{ij}n_j = Q(t) \quad (4.19)$$

Sur la limite de troncature Γ_∞ , une condition radiative doit être introduite de tel sort à reproduire le déplacement à l'infini. Dans le chapitre 2, nous avons vu qu'on peut introduire des éléments absorbants issus des forces d'amortissement. Ainsi, pour la radiation des ondes de compression P , une forçement d'amortissement de constante c_p doit être introduite, avec :

$$c_p = \rho V_P = \rho \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}} \quad (4.20)$$

Et pour la radiation des ondes de cisaillement S , une forçement d'amortissement de constante c_s doit être introduite, avec :

$$c_s = \rho V_S = \rho \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} \quad (4.21)$$

De ce fait, l'équilibre des contraintes sur la limite de troncature Γ_∞ s'exprime par :

$$T = \sigma n = -c_p \dot{u}_n - c_s \dot{u}_t = -c_p \dot{u} n - c_s \dot{u} n_t \quad (4.22)$$

Où \dot{u}_n et \dot{u}_t désignent respectivement les projections des vitesses des particules solides sur la normale n et la tangente n_t par rapport à la limite de troncature Γ_∞ .

Comme les conditions aux limites sont définies, il nous reste qu'à les introduire dans l'expression (4.18), d'où, on obtient :

$$\int_{\Omega} \delta(Su)^T DSud\Omega + \int_{\Gamma_\infty} \delta u (c_p \dot{u}_n + c_s \dot{u}_t) d\Gamma + \int_{\Omega} \delta u \rho \ddot{u} d\Omega = \int_{\Gamma_Q} \delta u Q(t) d\Gamma \quad (4.23)$$

4.3 Discrétisation du domaine par éléments finis et éléments infinis

Afin de discrétiser le domaine géométrique par des éléments finis, le champs des déplacements u est approximé par :

$$u = NU \quad (4.24)$$

Et l'opérateur de perturbations par :

$$\delta u = \delta U^T N^T \quad (4.25)$$

La substitution de (4.24) et (4.25) dans (4.23), nous donne :

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} B^T D B d\Omega \right) U + \left(c_p \int_{\Gamma_{\infty}} N^T n N d\Gamma + c_s \int_{\Gamma_{\infty}} N^T n_t N d\Gamma \right) \dot{U} \\ + \left(\rho \int_{\Omega} N^T N d\Omega \right) \ddot{U} = \int_{\Gamma_Q} N^T Q(t) d\Gamma \end{aligned} \quad (4.26)$$

Ou sous la forme matricielle suivante :

$$[K]\{U\} + [C_{\infty}]\{\dot{U}\} + [M]\{\ddot{U}\} = \{F\} \quad (4.27)$$

Dans lesquels M , C_{∞} et K représentent respectivement les matrices masse, amortissement et rigidité. Les expressions de ces matrices ainsi que le vecteur de chargement s'obtiennent par analogie entre la relation (4.26) et (4.27). Donc, l'expression de la matrice rigidité est donnée par :

$$[K] = \int_{\Omega} B^T D B d\Omega = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^T}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N^T}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial N^T}{\partial z} & \frac{\partial N^T}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & 0 \\ d_2 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N}{\partial z} \\ \frac{\partial N}{\partial z} & \frac{\partial N}{\partial x} \end{bmatrix} d\Omega \quad (4.28)$$

et la matrice masse est :

$$[M] = \rho \int_{\Omega} N^T N d\Omega = \rho \int_{\Omega} \begin{bmatrix} N^T N & 0 \\ 0 & N^T N \end{bmatrix} d\Omega \quad (4.29)$$

Cette expression telle qu'elle est obtenue en (4.29) est appelée matrice masse cohérente ou répartie. Cependant, elle peut être exprimée sous forme concentrée ou diagonale (ZienkiewiczOC 2000) par :

$$[M] = \rho \int_{\Omega} NId\Omega = \rho \int_{\Omega} \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} d\Omega \quad (4.30)$$

En ce qui concerne le vecteur de chargement F, il s'obtient par :

$$\{F\} = \int_{\Gamma_Q} N^T Q_z d\Gamma = \int_{\Gamma_Q} Q \begin{bmatrix} N^T & 0 \\ 0 & N^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} d\Gamma \quad (4.31)$$

Pour la matrice d'amortissement, son expression est donnée par :

$$[C_{\infty}] = [C_P] + [C_S] \quad (4.32)$$

Avec :

$$\begin{aligned} [C_P] &= \int_{\Gamma_{\infty}} N^T c_P n N d\Gamma = \int_{\Gamma_{\infty}} c_P \begin{bmatrix} N^T N & 0 \\ 0 & N^T N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \end{bmatrix} d\Gamma \\ [C_S] &= \int_{\Gamma_{\infty}} N^T c_S n_t N d\Gamma = \int_{\Gamma_{\infty}} c_S \begin{bmatrix} N^T N & 0 \\ 0 & N^T N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{t1} & 0 \\ 0 & n_{t2} \end{bmatrix} d\Gamma \end{aligned} \quad (4.33)$$

L'amortissement de la relation (3.32) est le résultat de la discrétisation de la condition de radiation à la limite de troncature, qui est connu sous le nom d'amortissement géométrique ou radiatif [13, 19, 28, 32, 33]. Par ailleurs, on peut aussi tenir compte de l'amortissement visqueux du milieu, en appliquant le concept d'amortissement de Rayleigh qui est exprimé sous forme d'une combinaison linéaire de la matrice masse M et de la matrice de rigidité K [33]:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (4.34)$$

α et β sont des coefficients satisfaisant la condition d'orthogonalité de C dans la base modale. Ils peuvent être déterminés à partir de l'analyse modale du système, en prenant la pulsation propre ω_1 du premier mode et une pulsation ω_n du mode supérieur [33]:

$$\alpha = \frac{2\xi}{\omega_1 + \omega_n} \omega_1 \omega_n \quad ; \quad \beta = \frac{2\xi}{\omega_1 + \omega_n} \quad (4.35)$$

Avec ξ le taux d'amortissement critique. Donc, l'amortissement total du système est :

$$[C_t] = [C_\infty] + [C] \quad (4.36)$$

Il est à noter que lorsque la configuration géométrique non bornée du domaine infini ou semi-infini est considérée par l'utilisation des éléments infinis, l'amortissement géométrique C_∞ disparaît de la formulation. Dans ce cas, la radiation s'effectue par des matrices masse et rigidité obtenues par des éléments infinis et qui s'expriment par :

$$[K_\infty] = \int_{\Omega_\infty} B^T D B d\Omega = \int_{\Omega_\infty} \begin{bmatrix} \frac{\partial P^T}{\partial x} & 0 & \frac{\partial P^T}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial P^T}{\partial z} & \frac{\partial P^T}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & 0 \\ d_2 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} & \frac{\partial P}{\partial x} \end{bmatrix} d\Omega \quad (4.37)$$

Pour la matrice de rigidité, et :

$$[M_\infty] = \rho \int_{\Omega_\infty} P^T P d\Omega = \rho \int_{\Omega_\infty} \begin{bmatrix} P^T P & 0 \\ 0 & P^T P \end{bmatrix} d\Omega \quad (4.38)$$

Pour la matrice masse.

Dans ce cas, les matrices masse et rigidité totales du système sont respectivement :

$$[M_t] = [M] + [M_\infty] \quad ; \quad [K_t] = [K] + [K_\infty] \quad (4.39)$$

4.4 Conclusion

En dynamique, la prise en compte du champ lointain du domaine par des éléments infinis, conduit à des matrices masse M_∞ et rigidité K_∞ qui interviennent dans l'analyse des vibrations libre du système. Par contre, si le champ lointain est considéré par les éléments absorbants, cela conduit à une matrice d'amortissement géométrique C_∞ qui n'influe pas sur l'analyse des vibrations libre.

Chapitre 5

Application des infinis aux problèmes d'élasticité

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons mettre en œuvre les éléments infinis classiques, issus de l'approche directe, dans la prise en compte du champ lointain des domaines supposés élastiques non bornés. De se fait, deux modèles numériques MEF et MEF-EI sont élaborés. Dans le modèle MEF, le domaine est discrétisé uniquement par des éléments finis, sur lequel les déplacements des nœuds de la limite de troncature sont bloqués. Par contre, dans le modèle MEF-EI, le champ proche du domaine est représenté par des éléments finis, et le champ lointain est représenté par des éléments infinis. Le type d'éléments finis et/ou infinis utilisés dans la discrétisation sont des quadrilatéraux à quatre nœuds Q_4 .

Ainsi, nous allons étudier la performance de ces éléments infinis en élastostatique et en élastodynamique. En élastostatique, nous allons traiter les problèmes classiques rencontrés en élasticité, à savoir le problème de Kirsch qu'on peut assimiler à un tunnel profond traité en déformations planes, le problème de Flamant traité en déformations et en contraintes planes, le problème de Boussinesq traité en axisymétrie, ainsi qu'une semelle filante et une semelle circulaire. Les résultats obtenus seront comparés à des solutions analytiques existantes dans la littérature.

En élastodynamique, on a sélectionné d'étudier une semelle filante qui est traitée en déformations planes et une semelle circulaire traitée en axisymétrie, qui seront soumises aux différents chargements dynamiques (sinusoïdal, triangulaire et constant). Malheureusement dans cette partie, nous ne disposons pas de solutions analytiques auxquelles comparer les résultats numériques, et donc, on va effectuer une étude de convergence en fonction du positionnement de la limite de troncatures.

5.2 Applications en élastostatique

5.2.1 Problème de Kirsch (tunnel profond)

Comme nous l'avons déjà signalé, le problème de Kirsch peut être assimilé à un tunnel très profond avec l'hypothèse d'une cavité dans un milieu infini (figure 5.1) et qu'on peut traiter en déformations planes. Pour un matériau élastique linéaire, de module d'Young E et du coefficient de Poisson ν , Kirsch [34] a donné le champ de déplacement radial U_r en un point M en fonction de coordonnées polaires par :

$$U_r = \sigma_0 \left(\frac{1 + \nu}{E} \right) \frac{R^2}{r} \quad (5.1)$$

Avec R le rayon de la cavité, r est la coordonnée radiale et σ_0 une contrainte tangentielle appliquée uniformément sur la paroi de la cavité.

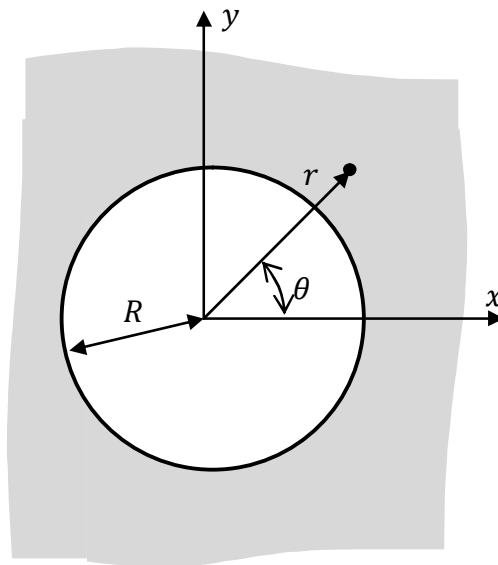


Figure 5-1 : Tunnel profond (Problème de Kirsch)

Le test numérique concernant ce problème, on a pris les caractéristiques suivantes :

$$R = 5 \text{ m} \quad ; \quad E = 10^7 \text{ Pa} \quad ; \quad \nu = 0.3 \quad ; \quad \sigma_0 = 2 \text{ KPa}$$

Dans les modèles numériques, on a tronqué le domaine à une distance de 10 m et puis à 30 m du centre de la cavité. Le maillage utilisé est illustré sur la figure 5.2. Les

déplacements obtenus par MEF et MEF-EI ainsi que leurs comparaisons à la solution analytique sont illustrés sur la figure 5.3.

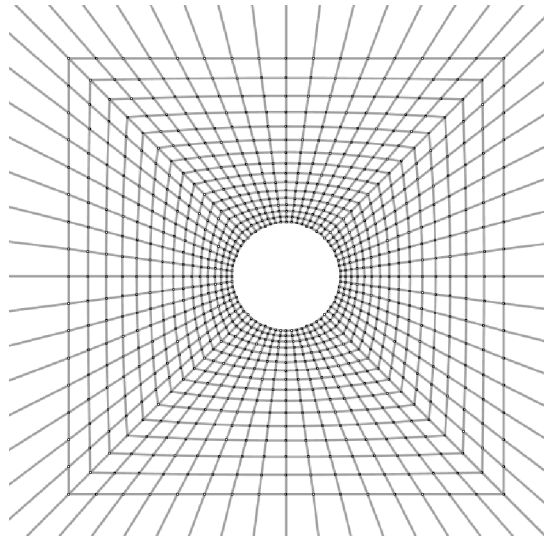


Figure 5-2: Problème de Kirsch ; maillage utilisé ;

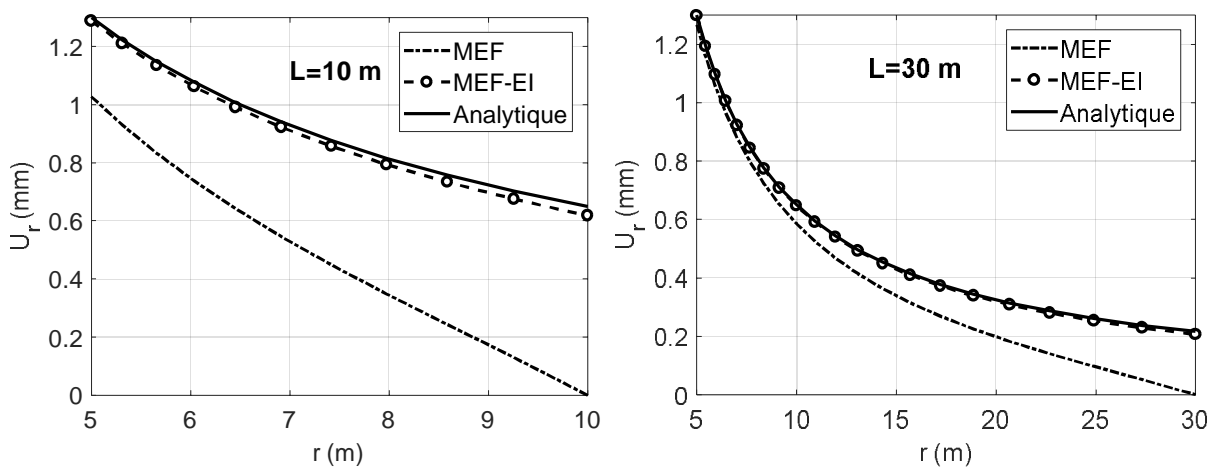


Figure 5-3 : Problème de Kirsch : déplacement radial pour $L=10\text{ m}$ et $L=30\text{ m}$;

D'après les figures 5.3, les résultats numériques du modèle MEF-EI sont très proches de la solution analytique de Kirsch que ce soit pour une limite de troncature positionnée à $L = 10\text{ m}$ ou à $L = 30\text{ m}$. Par contre, ceux du modèle MEF, on remarque une nette divergence avec la solution analytique. Cela, montre bien que l'utilisation des éléments infinis a amélioré considérablement le modèle numérique MEF-EI qui ont conduit à des résultats très proches de ceux de la solution analytique.

5.2.2 Problème de Flamant

Dans ce problème, Flamant a donné une solution analytique en contraintes et en déplacements, pour un demi-plan ou demi-espace infini soumis à une force q constante, répartie sur une ligne et agissant normalement au bord (voir la figure 5.4).

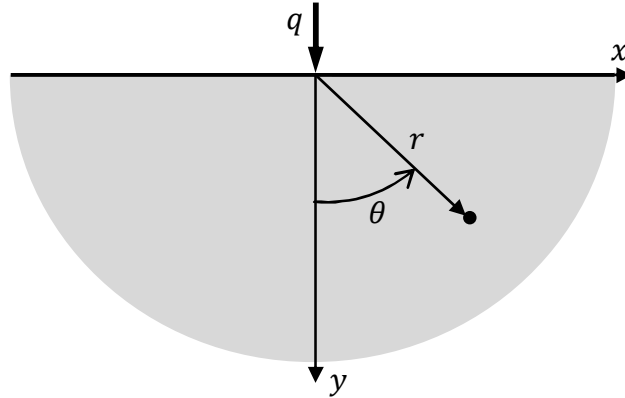


Figure 5-4: Problème de Flamant (plan semi-infini)

La solution de Flamant en déplacements est donnée en fonction des coordonnées polaires (r, θ) en contraintes plane par [46,47] :

$$\begin{cases} U_r = \frac{q}{\pi E} \left[2 \ln\left(\frac{d}{r}\right) \cos(\theta) - (1 - \nu) \theta \sin(\theta) \right] \\ U_\theta = \frac{-q}{\pi E} \left[2 \ln\left(\frac{d}{r}\right) \sin(\theta) + (1 - \nu) \theta \cos(\theta) - (1 + \nu) \sin(\theta) \right] \end{cases} \quad (5.2)$$

Et en déformations planes par :

$$\begin{cases} U_r = \frac{q(1 + \nu)}{\pi E} \left[2 (1 - \nu) \ln\left(\frac{d}{r}\right) \cos(\theta) - (1 - 2\nu) \theta \sin(\theta) \right] \\ U_\theta = \frac{-q(1 + \nu)}{\pi E} \left[2 (1 - \nu) \ln\left(\frac{d}{r}\right) \sin(\theta) + (1 - 2\nu) \theta \cos(\theta) - \sin(\theta) \right] \end{cases} \quad (5.3)$$

Dans les expressions (5.2) et (5.3), le paramètre d est la distance en profondeur sur laquelle les déplacements sont supposés nuls. Dans notre cas, ce paramètre est estimé à quatre fois la taille du domaine.

Dans ce test, le problème est traité en déformations planes avec les caractéristiques suivantes :

$$E = 10^7 \text{ Pa} \quad ; \quad \nu = 0.3 \quad ; \quad q = 100 \text{ KN/m}$$

Cet fois-ci, on a tronqué le domaine à une distance de 15 m et puis à 30 m du point d'application de la force q . Le maillage utilisé est illustré sur la figure 5.5. Les déplacements obtenus par MEF et MEF-EI ainsi que leurs comparaisons aux solutions analytiques de l'expression 5.3 sont illustrés sur la figure 5.6 et 5.7.

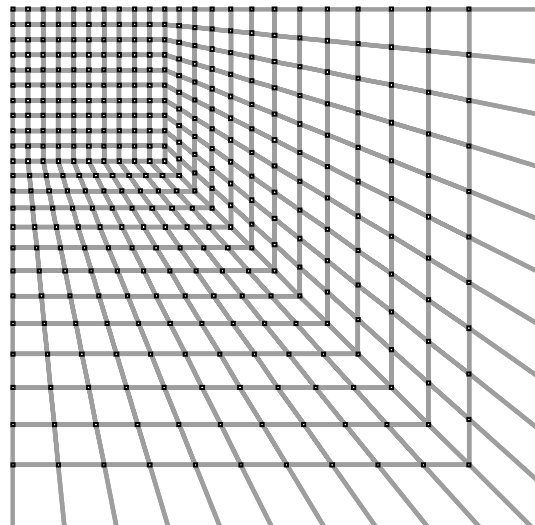


Figure 5-5: Problème de Flamant (maillage utilisé)

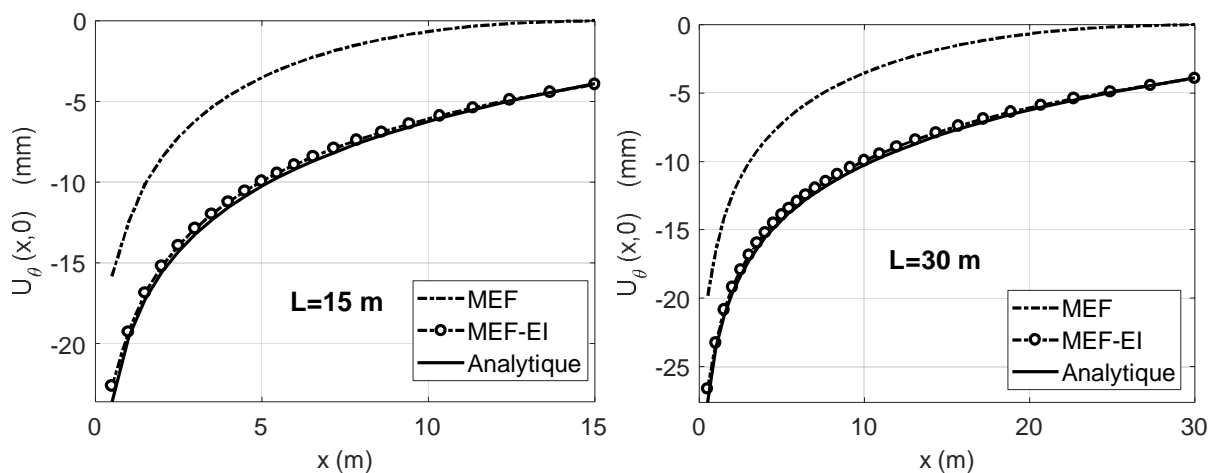


Figure 5-6 : Problème de Flamant : Tassement sur la surface libre ($y = 0$) pour $L = 15 \text{ m}$ et $L = 30 \text{ m}$

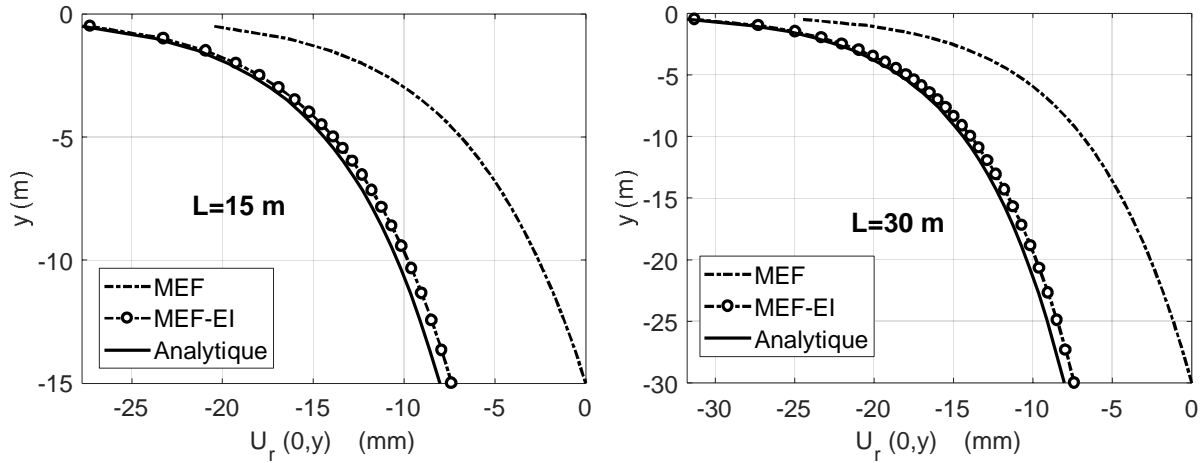


Figure 5-7: Problème de Flamant : tassement sur l'axe de symétrie ($x = 0$) pour $L = 15$ m et $L = 30$ m

Une fois de plus, les figures 5.6 et 5.7 montrent clairement que les résultats obtenus par le modèle MEF-EI sont très proches des résultats analytiques de Flamant. Contrairement à ceux du modèle MEF ou la limite de troncature n'a subi aucun traitement spécifique excepté les déplacements nuls imposés.

5.2.3 Problème de Boussinesq

Pour un espace semi-infini soumis à une charge ponctuelle normale au plan qui le limite (voir la figure 5.8), Boussinesq a donné le champ de déplacements en axisymétrie par [46,47] :

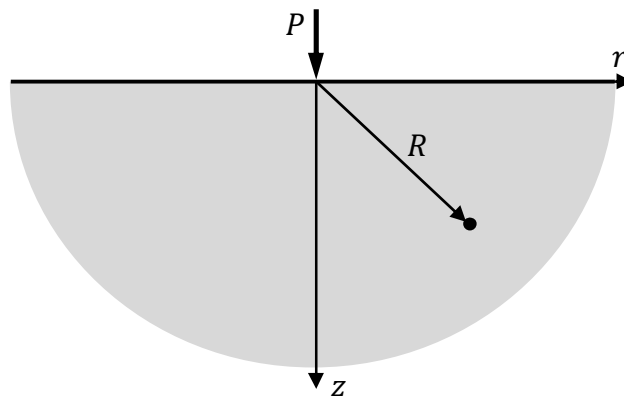


Figure 5-8 : Problème de Boussinesq (espace semi-infini)

$$\begin{cases} U_r = \frac{P}{4\pi\mu} \left(\frac{rz}{R^3} - \frac{r(1-2\nu)}{R(R+z)} \right) \\ U_z = \frac{P}{4\pi\mu} \left(\frac{z^2}{R^3} + \frac{2(1-\nu)}{R} \right) \end{cases} \quad (5.4)$$

Avec μ le coefficient de Lamé qui est égal au module de cisaillement ($\mu = G$). Dans ce cas, le problème est traité en axisymétrie, avec les caractéristiques suivantes :

$$E = 10^7 \text{ Pa} \quad ; \quad \nu = 0.3 \quad ; \quad P = 100 \text{ KN}$$

Dans ce cas, le domaine est tronqué à une distance de 10 m et puis à 20 m du point d'application de la force P , et aussi, le même maillage de la figure 5.5 est adopté. Les déplacements obtenus sont rapportés sur les figures 5.9 et 5.10 .

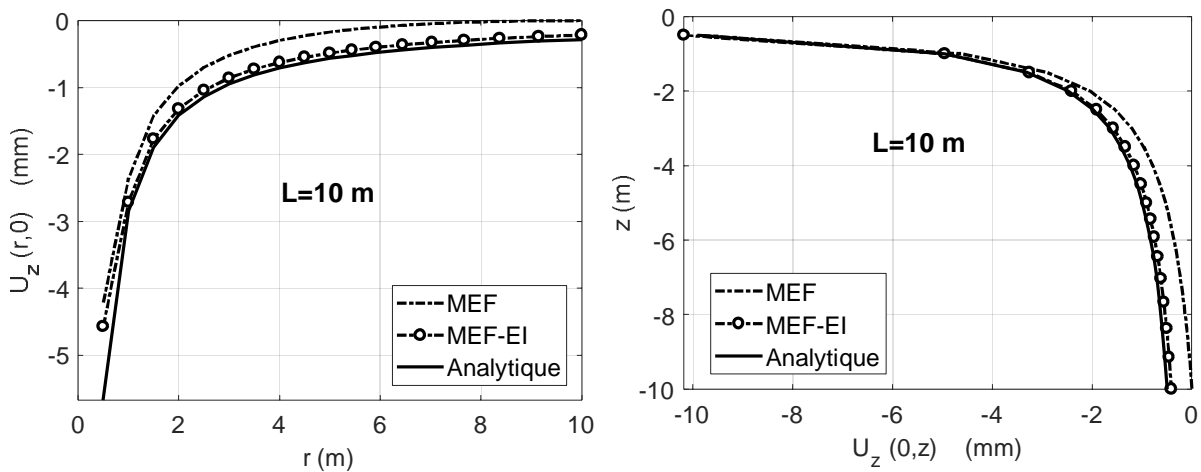


Figure 5-9 : Problème de Boussinesq: t Tassement sur la surface libre ($z = 0$) pour $L = 10\text{ m}$ et $L = 20\text{ m}$

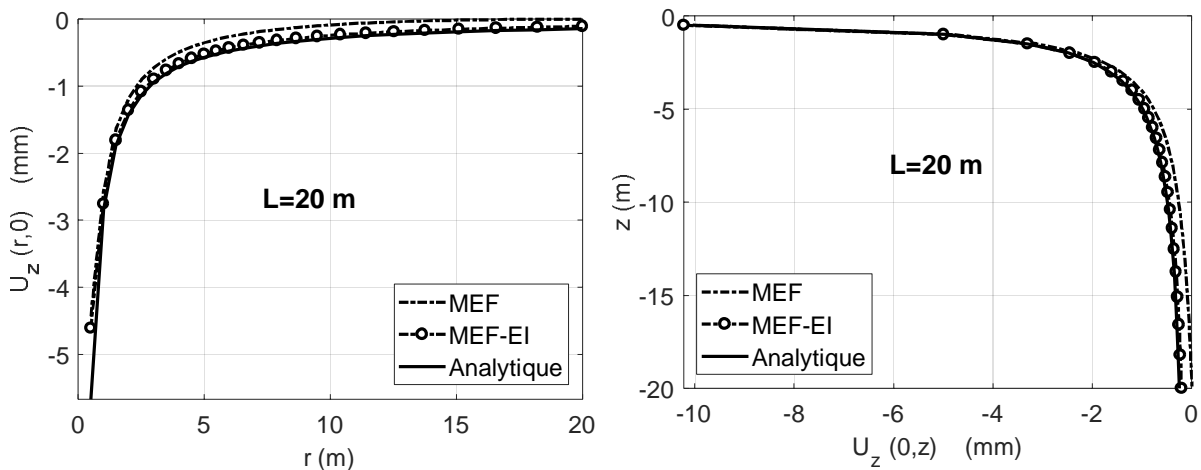


Figure 5-10 : Problème de Boussinesq : tassement sur l'axe de symétrie ($r = 0$) pour $L = 10\text{ m}$ et $L = 20\text{ m}$

De même, les figures montrent clairement que les tassements obtenus par MEF-EI sont pratiquement identiques à ceux de la solution analytique.

5.2.4 Problème de semelle filante souple

Dans cet exemple, on considère un massif semi-infini soumis à une charge appliquée sur une semelle filante de largeur $2b$. La semelle est considérée comme souple et la répartition du chargement q est uniforme (Figure 5.11).

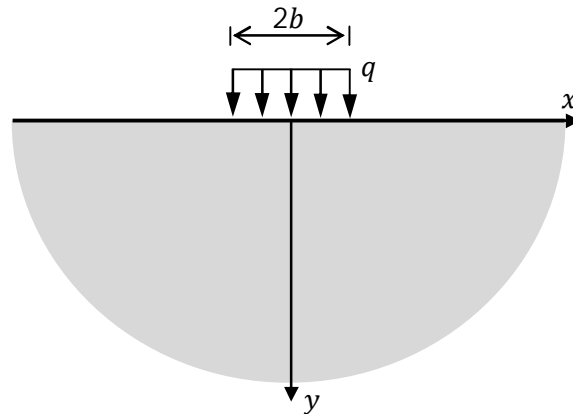


Figure 5-11: semelle filante souple (massif soumis à une pression uniforme)

L'extension de la solution de Flamant à ce problème, conduit à une solution analytique citée par [48] et qui représente le déplacement vertical relatif entre un point situé sur la surface et le centre de la fondation :

$$U_{rel} = U(x, 0) - U(0, 0)$$

$$U_{rel} = \frac{2q(1 - \nu^2)}{\pi E} [(x - b) \ln(|x - b|) - (x + b) \ln(|x + b|) + 2b \ln(b)] \quad (5.5)$$

Dans ce cas, le problème est traité en déformations planes, avec les caractéristiques suivantes :

$$E = 10^7 \text{ Pa} \quad ; \quad \nu = 0.3 \quad ; \quad q = 10 \text{ KPa} \quad ; \quad b = 2.5 \text{ m}$$

Dans ce cas, le domaine est tronqué à une distance de 10 m et puis à 30 m du centre de la fondation, et aussi, le même maillage de la figure 5.5 est adopté. Les déplacements relatifs obtenus sont rapportés sur la figure 5.12.

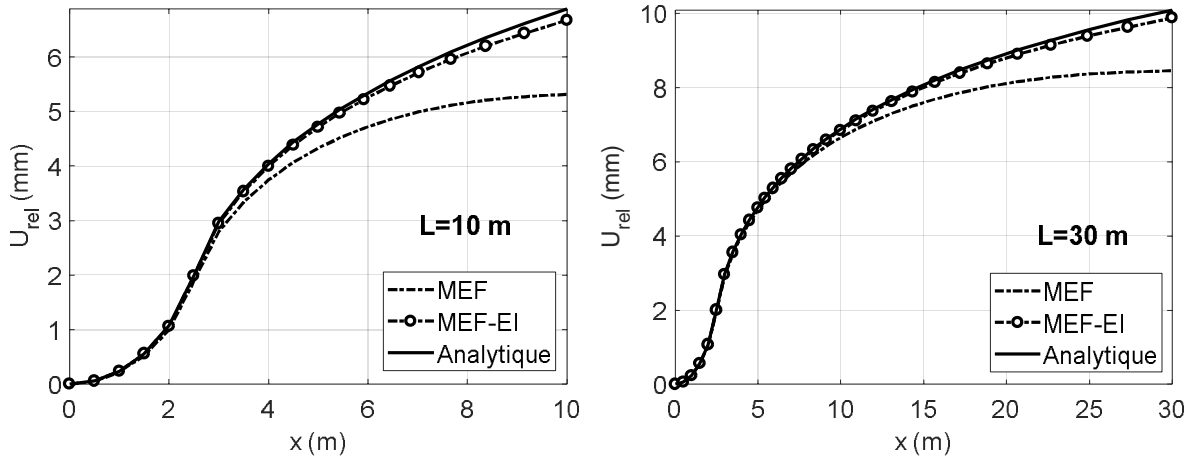


Figure 5-12: semelle filante souple ; Tassements relatifs sur la surface ($y = 0$) ;

La figure 5.12 montre clairement que les résultats obtenus par le modèle MEF-EI sont plus proches à la solution analytique par rapport au modèle MEF.

5.2.5 Problème de semelle circulaire souple

Dans cet exemple, on considère un espace semi-infini soumis à une charge appliquée sur une semelle circulaire de rayon a . La semelle est considérée comme souple et la répartition du chargement q est uniforme.

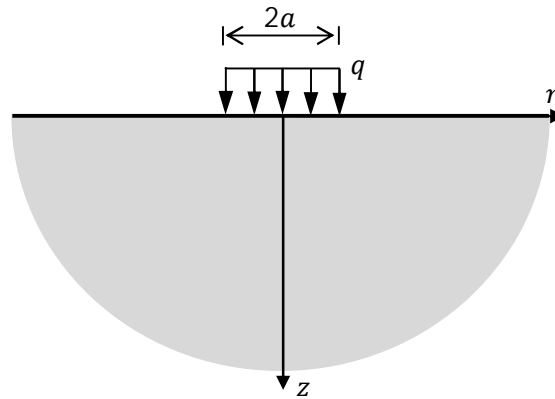


Figure 5-13: Semelle circulaire souple

L'extension de la solution de Boussinesq à ce problème, conduit à une solution analytique citée par [47] et qui représente le déplacement vertical sur l'axe de symétrie z ($r = 0$):

$$U_z(0, z) = \frac{q}{2\mu} \left[2(1 - \nu) \left(\sqrt{a^2 + z^2} - z \right) - \frac{z^2 - z\sqrt{a^2 + z^2}}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right] \quad (5.6)$$

Avec μ le coefficient de Lamé qui est égal au module de cisaillement ($\mu = G$). Dans ce cas, le problème est traité en axisymétrie, avec les caractéristiques suivantes :

$$E = 10^7 \text{ Pa} \quad ; \quad \nu = 0.3 \quad ; \quad q = 100 \text{ KPa} \quad ; \quad a = 2.5 \text{ m}$$

Le domaine est tronqué à une distance de 15 m et puis à 30 m du centre de la fondation, et ainsi, le même maillage de la figure 5.5 est adopté. Les tassements sur l'axe de symétrie z obtenus sont rapportés sur la figure 5.14 suivante.

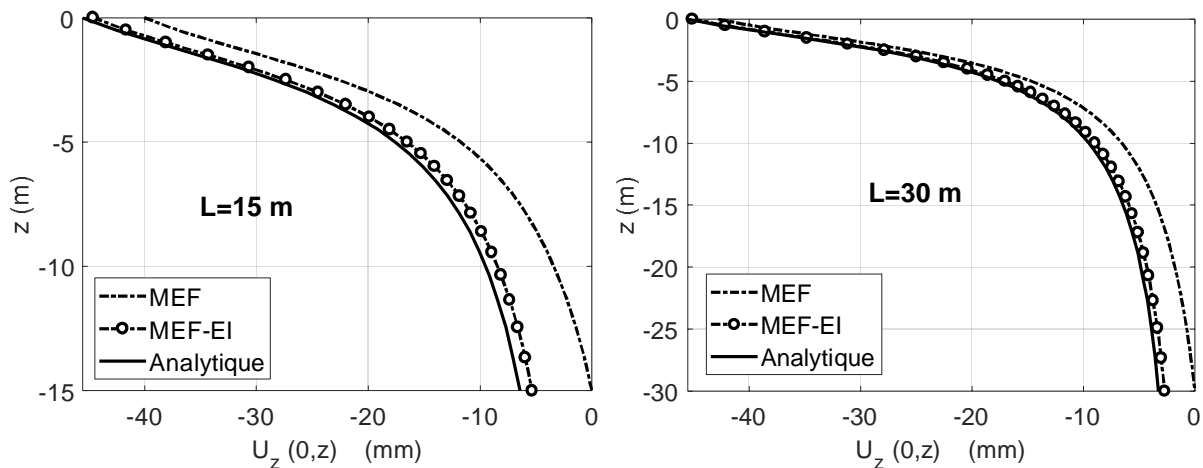


Figure 5-14: semelle circulaire souple ; Tassements sur la de symétrie z ($r = 0$) ;

D'après la figure 5.14, les résultats numériques du modèle MEF-EI sont proches de la solution analytique que ce soit pour une limite de troncature positionnée à $L = 15$ m ou à $L = 30$ m. Par contre, ceux du modèle MEF, on remarque une divergence avec la solution analytique. Cela, montre bien que l'utilisation des éléments infinis peut améliorer considérablement les problèmes traitant ce genre de problèmes.

Jusqu'ici, on a traité des problèmes classiques d'élastostatique que ce-soit en élasticité plane ou en élasticité axisymétrique. Les résultats obtenus montrent que l'utilisation des éléments infinis dans la discrétisation des champs lointains des domaines non bornés apporte énormément aux modèles numériques traitant ce genre de problème. De plus, ces éléments permettent de réduire la taille du domaine d'étude ainsi que le maillage, en économisant ainsi l'espace de mémoire et le temps de calcul tout en conservant la qualité de la solution recherché.

5.3 Applications en élastodynamique

Afin de tester la performance des éléments infinis en élastodynamique, on propose d'étudier deux semelles souples. Une semelle filante, de largeur $2b = 5\text{ m}$, traité en déformations planes, et une semelle circulaire, de rayon $a = 2.5\text{ m}$, traité en axisymétrie. Ces deux semelles seront soumises aux différents chargements $q(t)$ de forme triangulaire, constante et sinusoïdale ($\omega = 5\text{ rad/sec}$) en fonctions du temps. La géométrie du domaine ainsi que les différents chargements sont illustrés sur les figures 5.15. Pour le calcul des déplacements, on a utilisé la méthode d'intégration directe pas à pas avec accélérations moyennes constantes. Pour l'amortissement matériel, on a prit un tau $\xi = 5\%$ avec le concept d'amortissement de Rayleigh de l'expression 4.34. Pour les propriétés du milieu, on a fixé le module d'Yong $E = 10\text{ MPa}$, le coefficient de Poisson $\nu = 0.3$ et la masse volumique $\rho = 2000\text{ kg/m}^3$. Comme point d'observation de l'histoire de la réponse en déplacements, on choisit le centre de la fondation (point A). Pour les différents modèles utilisés (MEF, MEF_EI), on a tracé l'histoire de la réponse du point A pour les positions de la limite de troncature $L = 20\text{ m}$ et $L = 60\text{ m}$. De plus, pour l'étude de convergence de la solution, on a tracé la variation des déplacements maximaux en fonction de la position de la limite de troncature.

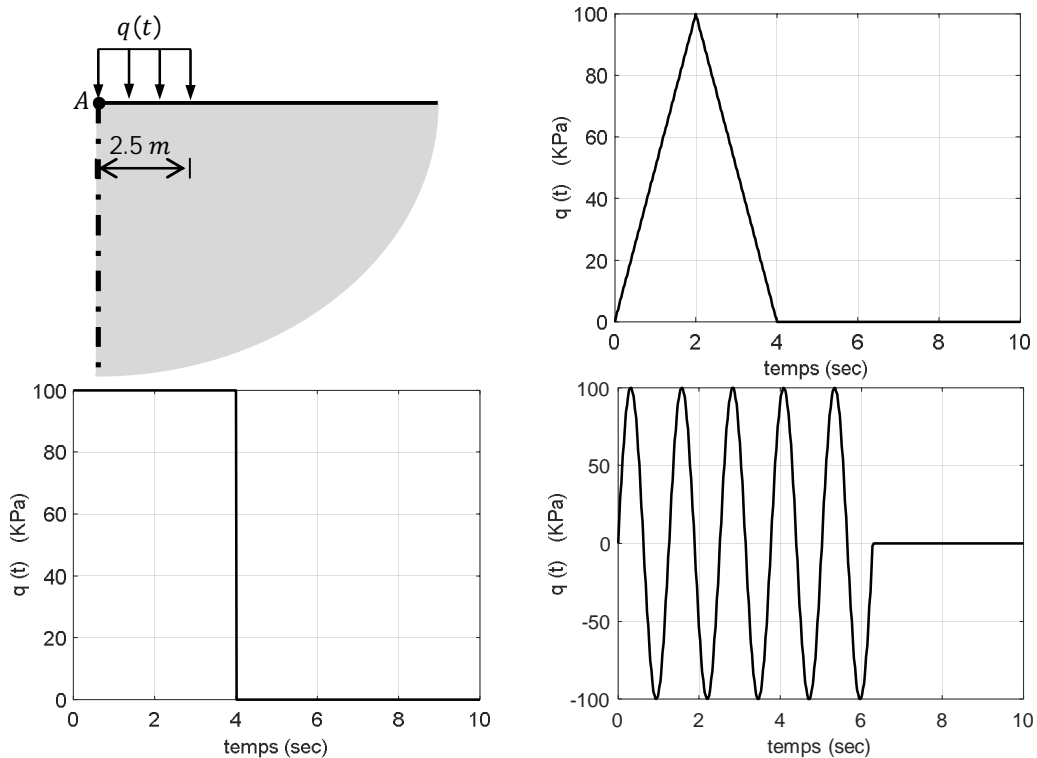


Figure 5-15 : Géométrie du domaine semi infini et les différents chargements

5.3.1 Semelle filante

Les figures 5.16, 5.17 et 5.18 montrent l'histoire de la réponse en déplacements des deux positions de la limite de troncature $L = 20\text{ m}$ et $L = 60\text{ m}$ ainsi les déplacements verticaux maximaux en fonction de la taille du domaine.

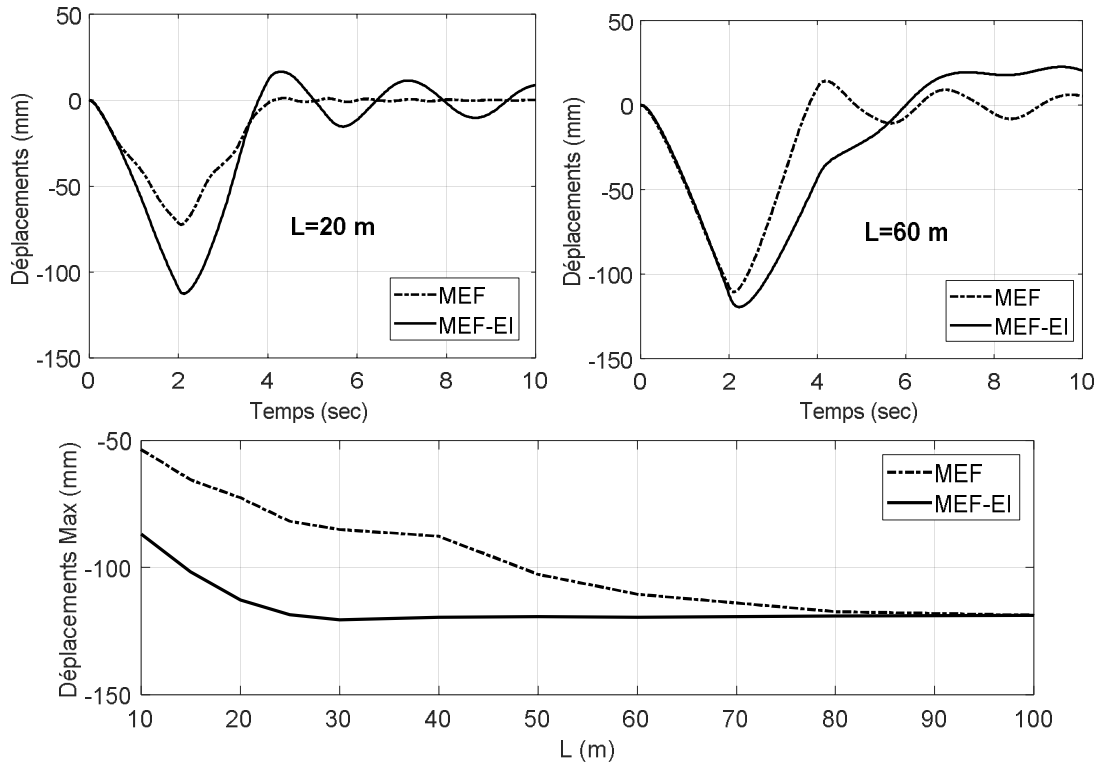


Figure 5-16 : semelle filante ; Déplacement vertical sous charge triangulaire ;

Sous chargement triangulaire, on remarque sur les figures 5.16, que durant les quatre premières secondes qui correspondent à la durée d'application de la charge, l'histoire de la réponse suit la forme du chargement. Au-delà de cet instant, la réponse suit un mouvement oscillatoire. Pour ce type de chargement, on constate aussi que les déplacements obtenus par le modèle MEF-EI sont plus importants par rapport à ceux du modèle MEF et cela semble logique, car dans le modèle MEF, les déplacements de la limite de troncature sont empêchés. L'étude de convergence montre aussi que les déplacements verticaux maximaux obtenus par MEF-EI se stabilisent à partir d'une position de la limite de troncature $L = 30\text{ m}$, contrairement à ceux du modèle MEF qui à nécessité une position au-delà de $L = 80\text{ m}$.

De même pour le chargement constant, on observe aussi les mêmes constats sur les figures 5.17 de ceux du chargement triangulaire des figures 5.16.

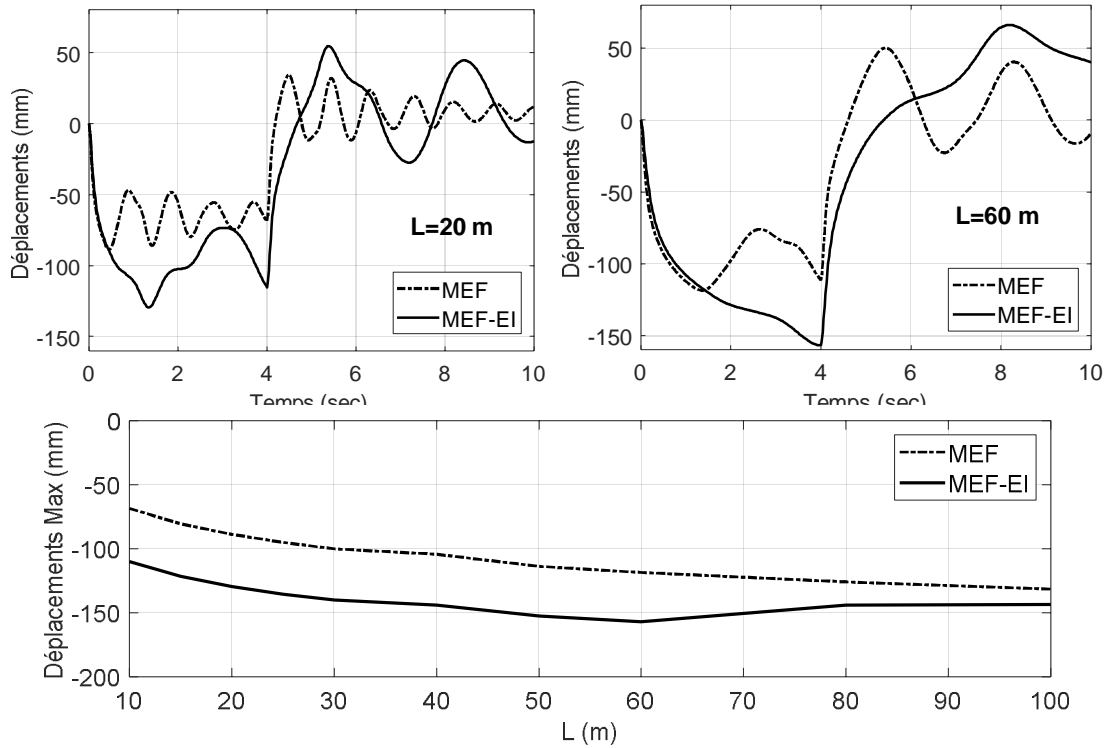


Figure 5-17: semelle filante ; Déplacement vertical sous charge constante ;

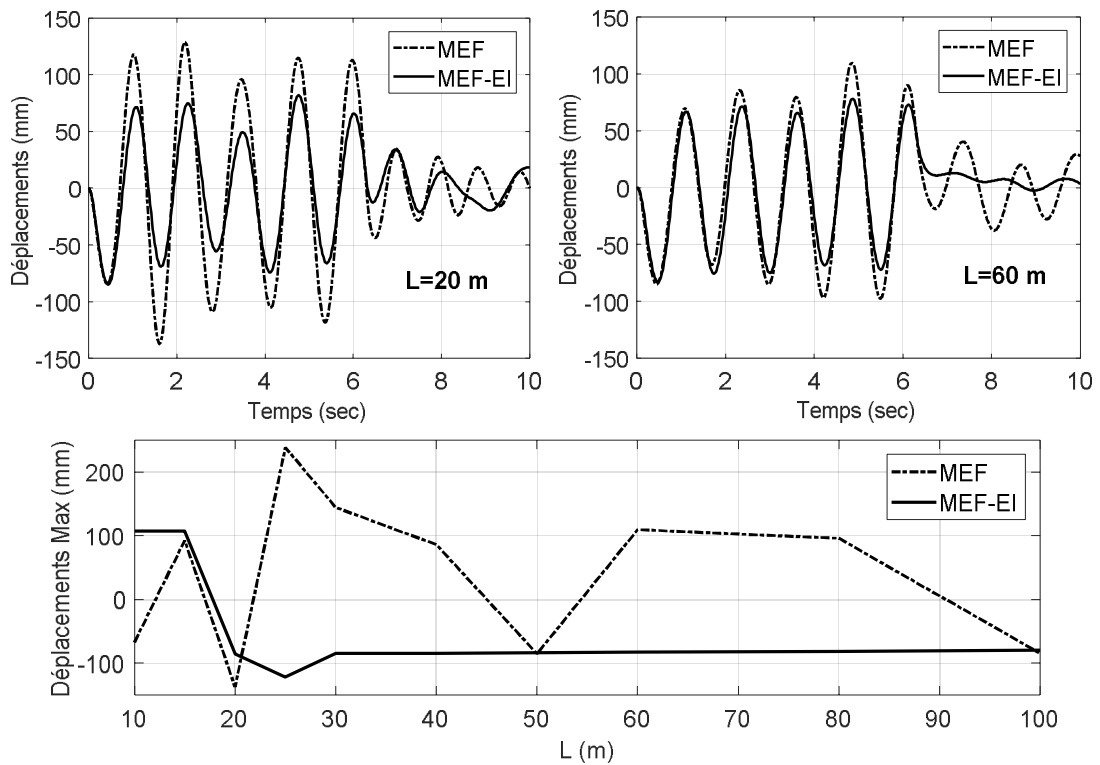


figure 5-18 : semelle filante ; Déplacement vertical sous charge sinusoïdale ($\omega = 5 \text{ rad/sec}$) ;

Sous chargement sinusoïdal ($\omega = 5 \text{ rad/sec}$), on constate sur les figures 5.18 que pour le modèle MEF les déplacements obtenus sont plus importants par rapport à ceux du modèle MEF-EI et cela est dû à l'encastrement de la limite de troncature qui génère des réflexions d'ondes et qui amplifient à leur tour la solution. Quant à l'étude de la convergence de la solution, dans ce cas de chargement est délicat car la solution présente un mouvement oscillatoire, et la réponse dynamique dépend essentiellement de la fréquence d'excitation. Plus la taille du domaine augmente, plus la fréquence propre du modèle change et plus le risque de résonance est grand. De plus, pour les déplacements verticaux maximaux, on constate qu'il se stabilise à partir de $L = 30 \text{ m}$ contrairement au modèle MEF.

5.3.2 Semelle circulaire

Dans cet exemple, on refait le mêmes teste précédents mais pou une semelle circulaire. Comme on l'a signalé précédemment, le problème est traité en axisymétrie. Les résultats obtenus sous les différents chargements, sont illustrés sur les figures 5.19, 5.20 et 5.21.

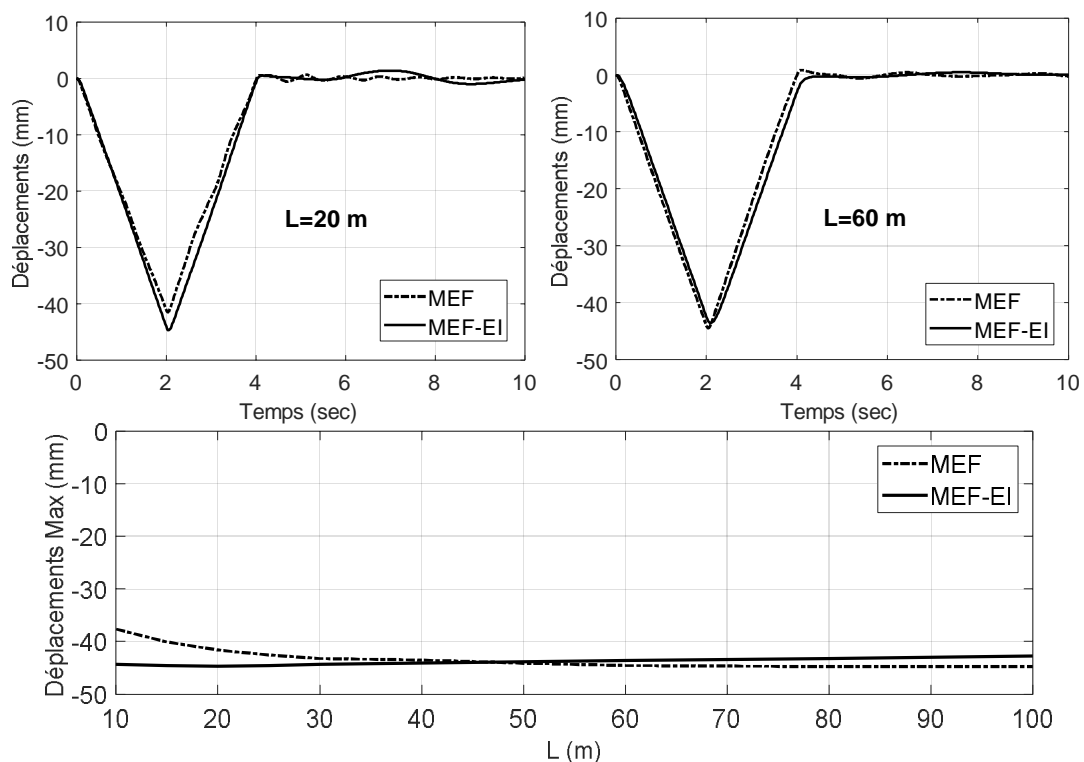


Figure 5-19 : semelle circulaire ; Déplacement vertical sous charge triangulaire ;

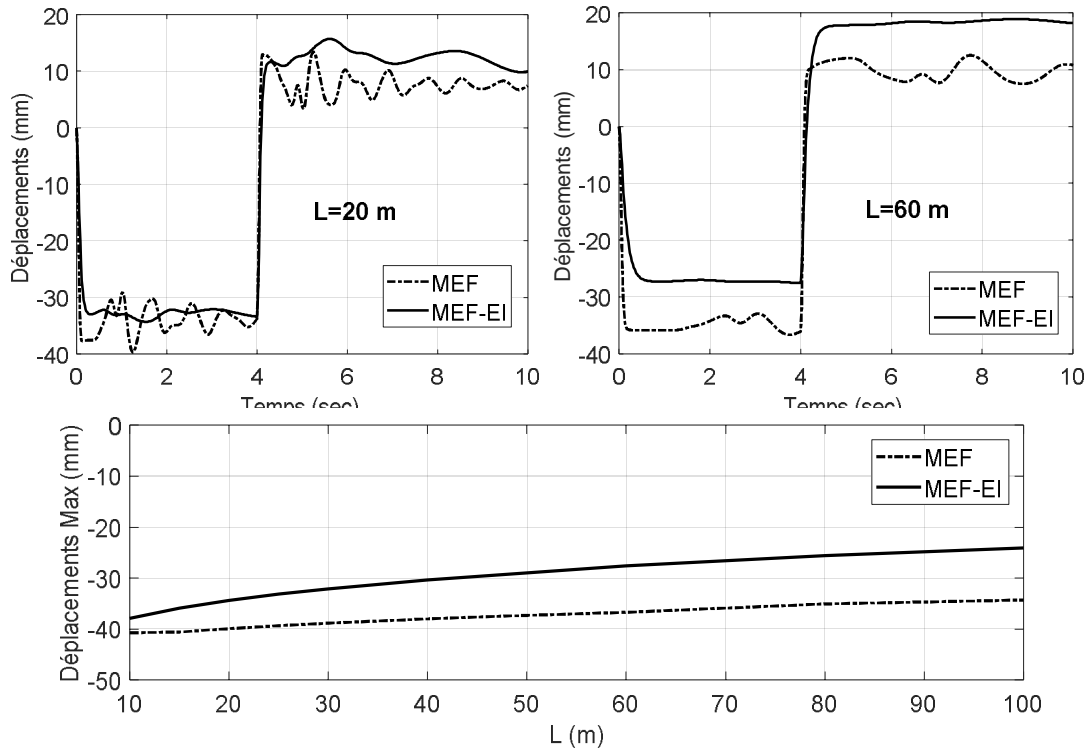


Figure 5-20 : semelle filante ; Déplacement vertical sous charge constante ;

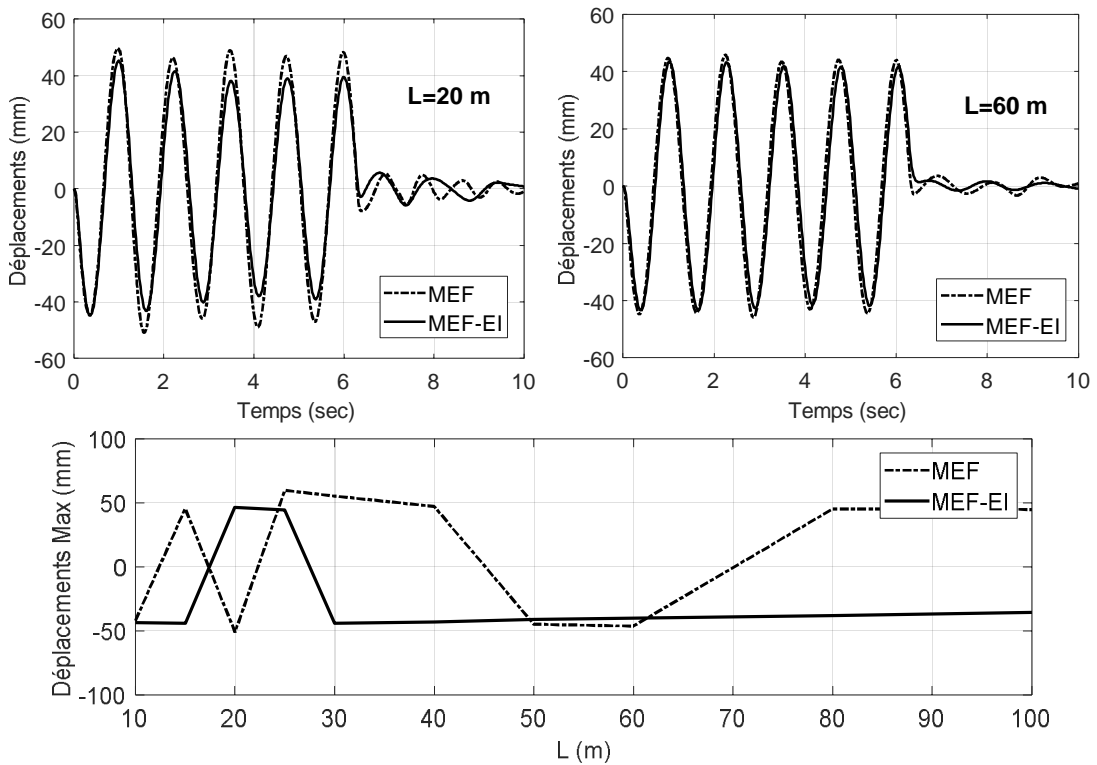


Figure 5-21 : semelle filante ; Déplacement vertical sous charge sinusoïdale ($\omega = 5$ rad/sec) ;

Même pour ce type de fondation, on constate aussi que pour le modèle MEF-EI fournis des déplacements maximaux qui ont tendance à se stabiliser même pour des tailles de domaine très réduites, contrairement au modèle MEF qui nécessite des positions de la limite de troncature très éloignées de l'origine afin d'obtenir des résultats satisfaisants. Cela montre bien que l'utilisation des éléments infinis, dans la prise en compte de la partie non bornée des domaines, améliore considérablement la solution recherchée.

5.4 Conclusion

Les testes qu'on a effectué que ce-soit en statique et/ou en dynamique, les résultats obtenus montrent bien que l'utilisation des éléments infinis dans la discrétisation des champs lointains des domaines non bornés apporte énormément aux modèles numériques traitant ce genre de problème. De plus, ces éléments permettent de réduire la taille du domaine d'étude ainsi que le maillage, en économisant ainsi l'espace de mémoire et le temps de calcul tout en conservant la qualité de la solution recherché. Par contre, La technique classique d'encastrement de la limite de troncature nécessite des tailles de domaines et de maillage très grande afin d'obtenir des résultats satisfaisant mais au détriment de calculs lourds et des espaces de mémoire très grands.

Conclusion générale

Ce travail a fait l'objet de notre mémoire de fin de cycle dont le thème est l'utilisation des éléments infinis dans la résolution des problèmes élastostatique et l'élastodynamique des domaines non bornés. Ainsi, en élastostatique, nous avons traité quelques problèmes classiques d'élasticité à savoir le problème de Kirsch, de Flamant, de Boussinesq, semelle filante et semelle circulaire. Les résultats obtenus sont comparés aux solutions analytiques existantes dans la littérature. En dynamique, nous avons traité une semelle filante et une semelle circulaire sous chargement sinusoïdal, triangulaire et constant ainsi que l'étude de convergence en fonction de la taille du domaine. Les éléments infinis utilisés dans les tests effectués sont des éléments infinis classiques issus de l'approche directe avec fonction de décroissance de type exponentiel. En effectuant ce travail, les points essentiels qu'on peut tirer comme conclusion sont :

L'utilisation des éléments infinis permet d'une part d'accélérer la convergence de la solution recherchée et d'autre part, de positionner la limite de troncature à des distances très proches de l'origine. Cela permet des gains importants d'espace de mémoire et de temps de calculs en réduisant les tailles de maillages tout en gardant la précision des résultats.

En dynamique, la discrétisation par éléments infinis conduit à des matrices masse et rigidité. Cela signifie que ces éléments interviennent même dans l'analyse des vibrations libres du problème traité.

En dynamique, pour certains types de chargements, comme par exemple dans le cas de chargement triangulaire ou constant, les éléments infinis classiques utilisés fournissent des résultats satisfaisants. Par contre, dans le cas de chargements vibratoires, il est préférable d'utiliser des éléments infinis périodiques car ces éléments contiennent des termes qui tiennent compte de la propagation d'ondes.

Bibliographie

- [1] Livaoglu, R. & Dogangun, A. « *Effet of foundation embedment on seismic behavior of elevated tanks considering fluid-structure-soil interaction* », *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 27(2007) 855-863.
- [2] Wilson, E. « *Three dimensional static and dynamic analysis of structures ; A physical approach with emphasis on earthquake engineering* », Computer and Structures, Inc, 2001.
- [3] Enrique Luco, J. « *Approximate external boundaries for truncated models of unbounded media* », Proceedings third UJNR workshop on soil-structure interaction, march 2004, California, USA.
- [4] Zafati E., Brun M., Djeran-Maigre I., « *Couche parfaitement adaptée hybride multi-pas de temps pour les problèmes de propagation d'ondes dans les milieux infinis* », 22^{ème} *Congrès Français de Mécanique, Lyon, 22-24 Aout 2015, France.*
- [5] Basu, U. & Chopra, A.K. « *Perfectly matched layers for elastic waves and applications to earthquake analysis of dams* », 16th ASCE Engineering mechanics conference, Washington, July 2003.
- [6] Basu, U. & Chopra, A.K. « *Perfectly matched layers for transient elastodynamics of unbounded domains* », *International journal for numerical methods in engineering*, 2004, 59(8) :1039-1074.
- [7] Fauqueux S., *Eléments finis spectraux et couches absorbantes parfaitement adaptées pour la propagation d'ondes élastiques en régime transitoire*, Thèse de Doctorat, Université Paris IX Daphne, 2003
- [8] Fotini E.M., Vlais K.K., « *Absorbing boundary conditions and perfect matched layer models for plane soil-structure interaction problems* », *5th GRACM International congress on computational mechanics*, Limassol, 29june-1 july , 2005
- [9] Livaoglu, R. & Dogangun, A. « *Effet of foundation embedment on seismic behavior of elevated tanks considering fluid-structure-soil interaction* », *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 27(2007) 855-863.

- [10] Reheman O., Shiojiri H., «Application of PML to analysis of nonlinear soil-structure-fluid interaction problem using mixed element», *Int Nat Jour of Geomat*, Vol. 4, n° 2, 2013, p. 505-510.
- [11] Enrique Luco, J. « *Approximate external boundaries for truncated models of unbounded media* », Proceedings third UJNR workshop on soil-structure interaction, march 2004, California, USA.
- [12] Fauqueux S., *Éléments finis spectraux et couches absorbantes parfaitement adaptées pour la propagation d'ondes élastiques en régime transitoire*, Thèse de Doctorat, Université Paris IX Daphne, 2003
- [13] Nguyen, K.V. « *Etude des effets de site dus aux conditions topographiques et géotechniques par une méthode hybride éléments finis/éléments frontières* », Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, France, 2005.
- [14] Nguyen M. T., *Contribution à la formulation symétrique du couplage equation intégrale – éléments finis. Application à la géotechnique*, Thèse de doctorat, Université Paris est, 2010.
- [15] Bonnet, M., *Equations intégrales et éléments de frontières*, Eyrolles, Paris, 1995.
- [16] Bonnet G., Coorfdir A., Nguyen M. T., «On the solution of exterior plane problems by the boundary element method : A physical point of view», *Engineering Analysis with boundary elements*, N° 38, 2014, p 40-48.
- [17] KatsiKadelis J. T., *Boundary element : Theory and Application*, Elsevier science 2002.
- [18] Karpurapu, G.R & Bathurst, R.J. « *Comparatve analysis of some geomechanics problems using finite and infinite element meyhods* », *Computers and Geotechnics* 5, (1988), 269-284.
- [19] Betess .P. « *infinitelements* »PenshawPress, 1992.
- [20] Seghir,A « *contribution à la modélisation numérique de la réponse sismique des ouvrages avec interaction sol-structure et interaction fluide-structure* » thèse de doctorat, université paris- Est et université A. Mira de Bejaia, 2011.
- [21] Abdel-fattah, T.T., Hodlhod, H. A and Akl, A.Y. « *A novel formulation of infinitelements for staticanalysis* »
- [22] Adjissa K., Izem Y., *calcul des tassements instantanés et différés des sols sous fondations par couplage éléments finis-infinis*, Mémoire d'ingénieur, Université A. Mira de Bejaia, 2006.

- [23] Bourouba, A. « Traitement des conditions aux limites de troncatures des milieux non bornés en dynamique des structures » Mémoire de magister. département de génie civil, université de A. Mira de Bejaia 2008.
- [24] Liu, G.R and Quek, S.S. « the finite element method : A Practical course », Butterworth-Heinemann.
- [25] Mesquita, E. & Pavanello, R. « Numerical methods for the dynamics of unbounded domains », Comp. Appl. Math, Vol. 24, N. 1, 1-26, 2005.
- [26] Nguyen, V.H. « comportement dynamique de structure non linéaires soumises à des charges mobiles », thèse de doctorale, école Nationale des ponts et chaussées, France, 2002.
- [27] Seghir, A. « Investigation des effets d'interaction sismique fluide-structure par couplage éléments finis-infinis », Thèse de magister, Ecole Nationale Polytechnique, Alger, 1999.
- [28] Zienkiewicz, O.M. and Taylor, R.L. « the finite element method, volume 1 : the basis » Butterworth-Heinemann, 5th edition, 2000.
- [29] Nanning M., Infinite elements for elasto-poroelastodynamics, Verlag der technischen universität Graz, 2010.
- [30] Zhao C. Dynamic and transient infinite elements, Theory and geophysical, geotechnical and geoenvironmental application. Springer Verlag, Berlin 2009
- [31] Imbert D., Propagation d'ondes acoustiques dans une suspension de grains mobiles immergés : couplage de modèles discret et continu par la méthode des domaines fictifs, Thèse de doctorat, Université de Rennes 1, 2013.
- [32] Pecker, A. « Dynamique des structures et des ouvrages », Site Internet : http://www.enpc.fr/formation/ecole_virt/coursPecker.
- [33] Filiatrault, A. « Eléments de génie parasismique et de calcul dynamique des structures », Edition de l'école polytechnique de Montréal, 1996.
- [34] Mestat Philippe. « Maillages d'éléments finis pour les ouvrages de géotechnique: Conseils et recommandations », Bulletin des laboratoires des ponts et chaussées - 212-PP. 39-64, Novembre-Décembre 1997.
- [35] Sitharam, T.G. & Vijay Kumar, I.V. « Non-linear analysis of geomechanical problems using coupled finite and infinite elements », Geotechnical and Geological engineering, 16, 129-149, 1998.

- [36] Viladkar, M.N., Noorzaei, J. & Godbole, P.N. « *Behaviour of infinite elements in an elasto-plastic domain* », *Computers & structures*, vol. 51, N. 4, pp. 337-342, 1994.
- [37] Yun, C.B., Kim, D.K. & Kim, J.M. « *Analytical frequency-dependent infinite elements for soil-structure interaction analysis in two-dimensional medium* », *Engineering Structures* 22 (2000) 258-271.
- [38] Cetin, M & Mengi, Y. « *Transmitting boundary conditions suitable for analysis of dam-reservoir interaction and wave load problems* », *Applied Mathematical Modelling*, 27(2003) 451-470.
- [39] Khani, M.H.B.M. « *Dynamic soil-structure interaction analysis using the scaled boundary finite-element method* », Phd thesis, The University of New South Wales Sydney, Australia, 2007.
- [40] Weber, B. « *Rational transmitting boundaries for time-domain analysis of dam-reservoir interaction* », D thesis, Swiss Federal Institute of Technology (ETH), Zurich, 1994. Diss. 10673.
- [41] Sharan, S.K. « *A non reflecting boundary in fluid-structure interaction* », *Computer & Structure*, vol 26, N° 5, pp : 841-846, 1987.
- [42] Komatitsch, D. & Tromp, J. « *A perfectly matched layer absorbing boundary condition for the second-order seismic wave equation* », *Geophysical journal international*, (2003) 154, 146-153.
- [43] Michou, F.E. & Koumoussis, V.K. « *Absorbing boundary conditions and perfect matched layer models for plane soil-structure interaction problems* », 5th GRAM international congress on computational mechanics, Limassol, 29 June-1 July, 2005.
- [44] Wolf, J.P. « *The scaled boundary finite element method* », John Wiley & Sons, Chichester, England, 2003.
- [45] Wolf, J.P. & Song, C. « *Finite-element modelling of unbounded media* », John Wiley & Sons, Chichester, England, 1996.
- [46] Frey, F, *Analyse des structures et Milieux continus, Vol 3 : Mécanique des solides*, Press Polytechnique et universitaires romandes, 1998.
- [47] Davis .R .O & Selvadurai .A .O S, *Elasticity and Geomechanics*, Cambridge University Press, USA, 1996.
- [48] Nguen M. T, *Contribution à la formulation symétrique du couplage équations intégrales – éléments finis. Application à la géotechnique. Thèse de Doctorat, université paris- Est, France, 2010.*