

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A.MIRA-BEJAIA



Faculté des Sciences Exactes
Département Mathématiques
Laboratoire de Mathématiques appliquées

THÈSE
EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE
DOCTORAT

Domaine : Mathématique et Informatique

Filière : Mathématique

Spécialité : Analyse

Présenté par
BEDJGUELEL Chabane

Thème

Etude numérique et théorique de la dynamique des populations

Soutenu le 12/10/2024

Devant le Jury composé de :

Nom et Prénom

Grade

Mme MOHDEB Nadia	Professeur	Univ. de Bejaia	Président
Mr FARHI Bakir	Professeur	ENSM. Alger	Rapporteur
Mr GHAROUT Hacene	M.C.B	Univ. de Bejaia	Co-Rapporteur
Mr OUKACHA Brahim	Professeur	Univ. de Tizi ousou	Examineur
Mme ZEROUATI Halima	Professeur	Univ. de Bejaia	Examineur

Année Universitaire : 2023/2024

Remerciements

Au terme de ce travail, je voudrais exprimer ma profonde gratitude à **Allah**, qui m'a donné la force et le courage nécessaires pour mener à bien cette thèse.

Je tiens également à remercier sincèrement mon directeur de thèse, Monsieur **FA-RHI Bakir** professeur à l'université de Bejaia, pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant de superviser ce travail. Mes remerciements chaleureux vont également à mon co-encadrant, Monsieur **GHAROUT Hacene**, Maître de Conférences de Classe B, pour son aide précieuse et son soutien tout au long de ces années de travail.

Je souhaite également exprimer ma gratitude au Professeur **MOHDEB Nadia** professeur à l'université de Bejaia, qui a accepté l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Mes remerciements vont également au Professeur **OUKACHA Brahim**, Professeur à l'Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, et au Professeur **ZEROUATI Halima**, Professeur à l'Université de Béjaïa, pour avoir accepté d'évaluer ce travail.

Enfin, je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué à la rédaction de cette thèse.

Table des matières

Introduction Générale	7
1 Généralités sur les systèmes dynamiques	11
1.1 Systèmes dynamiques	11
1.1.1 Singularités	13
1.1.2 Point fixe	13
1.1.3 Point périodique	14
1.1.4 Nature des singularités	14
1.2 Stabilité	15
1.2.1 Système linéarisé	17
1.2.2 Stabilité globale	19
1.2.3 Le diagramme cobweb	20
1.3 Bifurcation	21
1.3.1 Types de bifurcations	22
1.3.2 Bifurcation locale	23
1.3.3 Bifurcation Fold	23
1.3.4 Bifurcation Flip	23
1.3.5 Bifurcations globales	25
1.3.6 Bifurcation homocline	25
1.3.7 Attracteur	27
1.3.8 Attracteur régulier	27
1.3.9 Les exposants de Liapunov	28

1.4	Chaos	30
1.4.1	Dédoublément de période vers le chaos	32
1.4.2	Cycles 2^2 -périodiques	34
1.4.3	Fenêtres Périodiques	36
1.5	Conclusion	37
2	Analyse dynamique du modèle de Weibull	39
2.1	Introduction	39
2.2	Résultats préliminaires	40
2.3	Point fixe de la fonction de Weibull	42
2.4	Stabilité des points fixes	46
2.5	Fonction d'Allee	55
2.5.1	Région chaotique	56
2.5.2	Semi-stabilité chaotique	57
2.5.3	Région d'extinction essentielle	59
2.6	Conclusion	61
3	Etude dynamique du modèle de Beverton-Holt généralisé	63
3.1	Introduction	63
3.2	Résultats préliminaires	65
3.3	Bifurcation de la fonction f	67
3.3.1	Bifurcation de fold	67
3.3.2	Bifurcation de flip	67
3.4	Stabilité des points fixes	68
3.5	Repulsif SBR	75
3.6	L'influence de γ sur la stabilisation, l'extinction et l'abondance de la population	78
3.6.1	Extinction totale	80
3.6.2	L'influence de γ sur l'abondance de la population.	81
3.7	Conclusion	83

Conclusion générale	85
Bibliographie	89

Table des figures

1.1.1 Les points 2-périodiques de $f(x) = 3.45x(1 - x)$	15
1.2.1 Le diagramme cobweb du système dynamique $f(x) = 2.9x(1 - x)$	21
1.3.1 Le diagramme cobweb du système dynamique $f(x) = 3.4x(1 - x)$	22
1.3.2 Le diagramme cobweb du système dynamique $f(x) = 3.4495x(1 - x)$	22
1.3.3 Le diagramme cobweb du système dynamique $f(x) = 4x(1 - x)$	23
1.3.4 Le digramme de bifurcation du model logistique en faisant variant le taux de croissance r comme paramètre de bifurcation.	25
1.3.5 Les solutions de la fonction logistique avec taux de croissance $r = 3.8$	28
1.4.1 Exposant de Lyapunov de l'application logistique en fonction du taux de croissance r	34
1.4.2 L'apparition d'un cycle périodique de période 4. Un échange de stabilité se produit à $r = 1$ entre $x_1 = 0$ et $x_2 = \frac{r-1}{r}$	35
1.4.3 Apparition de la suite $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ de droite à gauche.	37
1.4.4 L'apparition des périodes impaires.	37
2.3.1 Le graphe de la fonction W de Lambert est composé de deux branches : la branche principale W_0 (en bleu) et la branche secondaire W_1 (en rouge).	46
2.4.1 Le graphe de f lorsque $r = 2$, $q = 0.5$ et $p = 1.5$ montre que l'orbite de x_0 convergent vers le seul point fixe positif.	49
2.4.2 Le graphe de f lorsque $r = 2$, $q = 0.5$ et $p = 1.5$ montre que pour tout point initial dans \mathbb{R}_+ , on se rapproche du point fixe positif. Cela illustre le résultat obtenu dans la Proposition 2.3.	49

2.4.3 Le graphe de f pour $p = 3, q = 0.5$, et $r = 1.58$ représente f avec un unique point fixe, où toutes les orbites convergent vers zéro.	50
2.4.4 Le graphe de f lorsque $p = 3, q = 0.5$, et $r = 1.6$ correspond à f avec un point fixe; toutes les orbites dans $\mathbb{R}_+ \setminus [x_f, x_f^*]$ convergent vers le point fixe zéro, et toutes les orbites dans l'intervalle $[x_f, x_f^*]$ convergent vers le point fixe x_f	53
2.4.5 Le graphe de f lorsque $p = 3, q = 0.5$, et $r = 3.3$ illustre le résultat obtenu dans la Proposition 2.4 lorsque f admet trois points fixes.	53
2.4.6 Le graphe de f lorsque $p = 1, q = 1$, et $r = 2$ montre que le seul point fixe est asymptotiquement stable.	55
2.4.7 La stabilité globale du point fixe trivial	55
2.5.1 La sensibilité aux conditions initiales des orbites de f lorsque $p = 3, q = 1$, et $r = 3.5$ et $x_0 = 0.55$	58
2.5.2 L'apparition d'orbites de différents ordres de f lorsque $p = 3$ et $q = 0.5$ en fonction de r	58
2.5.3 Dynamique chaotique de f sur $[x_f, f(c)]$ dans la région de semi-stabilité chaotique	59
2.6.1 Le graphe de f lorsque $f^2(c) < x_f$ $p = 3, q = 0.5, r = 3.3$ montre que pour tout point initial x_0 situé dans l'intervalle $]a, b[$, son orbite se rapproche du point fixe zéro.	62
3.2.1 Le graphe de f pour $(r = 2, \delta = 0.5)$ et $(m = 4)$ montre en vert la fonction f avec un effet Allee ($\gamma = 2 > 1$), et en bleu et rouge la fonction f sans effet Allee.	66
3.4.1 Convergence de toute les orbites du modèle classique de Beverton-Holt vers le point fixe positif.	70
3.4.2 Le graphe de f lorsque $(\gamma = 2)$ et $(\delta = 2, m = 5)$ présente différentes situations : la couleur verte correspond à f ayant un point fixe (région d'extinction), la couleur rouge correspond à f ayant deux points fixes et la couleur bleue correspond à f ayant trois points fixes.	73

3.4.3 Le graphe de f lorsque $(m = \gamma)$, $(\delta = 0.5)$ avec différentes valeurs des paramètres r et γ	75
3.4.4 Le modèle de Beverton-Holt avec croissance compensatoire.	75
3.5.1 Θ est la courbe de bifurcation de l'effet Allee, en couleur bleue la courbe de bifurcation fold et en couleur rouge la courbe de bifurcation flip.	78
3.5.2 Le graphe de f lorsque la première orbite homocline critique se produit au point fixe d'Allee, c'est-à-dire, $f^2(c) = x_1$	78
3.5.3 Le graphe de f lorsque $f^2(c) > x_1$	79
3.5.4 Le graphe de f lorsque $f^2(c) < x_1$	79
3.6.1 Position relative des graphes de $f_1(x) = rx^{\gamma-1}$ et $f_2(x) = 1 + \delta x^m$ lorsque l'équation $f_1(x) = f_2(x)$ admet deux solutions positives.	83
3.6.2 Graphe $r = \Phi_{\delta,m}(\gamma)$ pour les transitions entre survie et extinction pour l'équation (3.1).	83

Introduction Générale

La théorie des systèmes dynamiques constitue l'une des branches cruciales des mathématiques, introduite par Newton vers 1665. Elle propose des modèles mathématiques pour des systèmes en évolution dans le temps, suivant des règles généralement exprimées sous la forme d'équations différentielles ou d'équations de différence. Ces équations peuvent engendrer un système dynamique au comportement extrêmement complexe, dit étrange ou chaotique. Selon Newton, le monde est régi par des règles, lorsque ces règles sont suffisamment simples, les résultats sont prévisibles. Cependant, avec une observation minutieuse des conditions initiales et une puissance de calcul toujours croissante, ce caractère apparemment aléatoire finirait par s'estomper. Les travaux de Poincaré à la fin des années 1800 et de Cartwright dans les années 1930 ont éclipsé ce rêve, bien que seule une poignée de mathématiciens aient pris conscience de l'importance de la prévisibilité [25, 52].

Aujourd'hui, le rêve newtonien d'un monde entièrement prévisible est révolu. Nous réalisons qu'il existe des systèmes dynamiques très simples - un pendule, par exemple, qui est littéralement une horloge newtonienne - dont nous pouvons connaître les règles. Poincaré a élaboré des méthodes géométriques pour analyser les propriétés qualitatives globales. Il avait constaté que des conditions initiales similaires peuvent conduire à des trajectoires très différentes, rapidement, rendant ainsi toute prévision à long terme impossible [25, 79, 4].

On attribue à Lord Robert McCredie May la création du nouveau domaine de la dynamique chaotique en biologie. En 1976, il a publié son article le plus populaire, intitulé "Modèles mathématiques simples avec une dynamique très compliquée", dans la revue Nature, dans lequel il démontre que les équations de différence non linéaires du premier

ordre peuvent présenter une gamme étonnante de comportements dynamiques, allant de points fixes stables mettant en évidence l'existence du chaos [50].

Depuis ce travail pionnier, les équations aux différences font aujourd'hui l'objet d'études approfondies et d'applications dans divers domaines. C'est un sujet fascinant qui a donné lieu à des phénomènes totalement inattendus. Les modèles d'équations aux différences s'avèrent également utiles dans le domaine biomédical, en l'occurrence dans la recherche sur les maladies infectieuses [38], la croissance du cancer [18], le vieillissement [44], la prolifération cellulaire et la génétique [34, 66], et en écologie [38].

Les équations aux différences sont générées par des fonctions unidimensionnelles ou multidimensionnelles. La forme générale est donnée par l'équation

$$x_{n+1} = f(x_n), \tag{0.0.1}$$

où f peut-être non linéaire.

En biologie des populations, x_n peut représenter la taille d'une population à la génération n . Le mot "population" est à prendre ici au sens large. Il peut aussi bien s'agir d'une population humaine, animale, des victimes d'une épidémie, d'un ensemble de molécules, de particules, etc. L'équation (0.0.1) modélise un système de population simple à reproduction saisonnière dont les générations ne se chevauchent pas (par exemple, les ravageurs des vergers et les insectes des zones tempérées). Elle indique simplement que la taille x_{n+1} d'une population à la génération $n + 1$ est liée à la taille x_n de la population de la génération précédente par la fonction f . En épidémiologie, x_n représente la fraction de la population au moment n .

D'autre part, la disparition de certaines espèces d'arbres, de plantes, de mammifères et même de tumeurs est l'un des problèmes les plus importants qui menacent la survie de l'humanité. En fait, l'extinction des espèces en général est un sujet de recherche majeur dans les domaines de l'écologie et de la biologie, en relation avec ce que l'on appelle l'effet Allee. Ce phénomène dynamique d'une importance fondamentale a été décrit pour la première fois par Allee en 1931 [2].

Dans [73], une distinction est établie entre les effets Allee associés aux composants et les effets Allee démographiques, comme également souligné dans [37]. Dans le cadre de

cette étude, nous adoptons le concept d'effet Allee démographique, se traduisant par une diminution du taux de croissance par habitant à de faibles tailles de population. À cet égard, les taux de croissance par habitant surpassent le taux de croissance de la population au moment initial.

Il convient de noter l'existence de nombreux modèles théoriques capables de rendre compte de l'effet Allee. Certains de ces modèles intègrent l'effet Allee en modifiant le taux de croissance par habitant à l'aide d'un terme devenant négatif lorsque la densité de population est inférieure à un seuil spécifique, et positif autrement. Ce phénomène est communément appelé l'effet Allee multiplicatif, comme illustré dans des travaux tels que [42, 62, 64, 67].

D'autres modèles ajoutent un terme de prédation provoquant l'effet Allee, appelé réponse fonctionnelle de type II de Holling [23, 37].

Motivés par l'intérêt et la pertinence de l'étude des modèles de croissance et du phénomène d'extinction, nous analysons, dans cette thèse, la dynamique chaotique de deux modèles de croissance avec effet Allee. Ce qui distingue ces deux modèles, c'est leur capacité à intégrer naturellement l'effet Allee sans avoir besoin d'une réponse fonctionnelle spécifique ou d'un effet Allee multiplicatif, ce qui constitue un avantage considérable. Il est important de souligner que la famille des modèles qui intègrent naturellement un effet Allee est encore limitée et inclue notamment la famille reconnue des modèles quadratiques (également connus sous le nom de modèles logistiques itératifs), ainsi que des modèles tels que les équations de Beverton-Holt et de Ricker [61, 65, 45, 46, 26].

Le plan de la thèse est le suivant :

Dans le premier chapitre, nous rappelons les notions fondamentales sur les systèmes dynamiques discrets, y compris la singularité, le portrait de phase, la stabilité des singularités, les bifurcations et le chaos. Nous présentons également les théorèmes importants utilisés dans cette étude.

Dans le chapitre suivant, nous étudions l'existence et la stabilité de points fixes en fonction de différents paramètres du modèle de Weibull. Nous montrons l'existence d'un point fixe positif présentant un attracteur global. Nous constatons l'existence de l'effet

Allee pour certaines valeurs des paramètres. Les conditions nécessaires pour que le modèle appartienne à la classe des fonctions d'Allee sont établies.

Le chapitre trois est consacré à l'étude d'un nouveau modèle de Beverton-Holt à quatre paramètres. Nous montrons que ce modèle intègre naturellement l'effet Allee, de manière similaire au modèle de Weibull. Nous examinons ensuite les conditions de stabilité des points fixes en fonction des différents paramètres, avec une illustration de certaines bifurcations (en l'occurrence Fold, Flip,...). Nous terminons ce chapitre par la détermination de l'impact de l'effet Allee sur la dynamique des populations. Nous étudions également le rôle du paramètre Allee dans la stabilisation ou la déstabilisation des populations.

Nous terminons par une conclusion générale et quelques perspectives de recherche.

Généralités sur les systèmes dynamiques

Dans ce chapitre, nous introduisons certaines notions essentielles qui seront utilisées tout au long du document pour clarifier notre domaine d'étude. Ces notions comprennent les systèmes itératifs, les singularités, la stabilité et les bifurcations.

1.1 Systèmes dynamiques

La dynamique est un concept concis qui se réfère à l'analyse des processus en évolution temporelle. Le système d'équations correspondant qui décrit cette évolution est appelé système dynamique. La plupart des systèmes dynamiques sont modélisés sous forme d'équations différentielles d'ordre 1 :

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.1.1)$$

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.1.2)$$

L'équation (1.1.1) est dite autonome car f est indépendante du temps, tandis que (1.1.2) est dite non autonome. Ce type d'équation est caractérisé par une variation continue du temps.

Il existe également des systèmes qui peuvent être représentés par des équations aux différences :

$$x_{n+1} = f(x_n, n), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.1.3)$$

et

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (1.1.4)$$

La fonction f est appelée transformation ponctuelle ou récurrence, car elle transforme le point x_n de \mathbb{R}^n en un autre point x_{n+1} , où n est un entier naturel.

Les x_n sont appelées variables d'état. L'espace \mathbb{R}^n est appelé espace d'état ou espace de phase, où n est la dimension du système.

Une solution de l'équation (1.1.4) est représentée par une suite de points x_n , pour $n = 0, 1, 2, \dots$, où x_0 est appelée condition initiale. Tous ces points forment une trajectoire de phase discrète ou une orbite, décrivant l'évolution de la solution au cours de ses itérations.

Lorsque la fonction f est continûment différentiable et a une unique fonction inverse sur son domaine de définition, l'équation (1.1.4) est appelée difféomorphisme. Si f ne possède pas d'inverse unique, (1.1.4) est appelée un endomorphisme.

L'itération x_{n+p} , avec $p \geq 1$, est appelée le conséquent de rang p de x_n , c'est-à-dire : $x_{n+p} = f^p(x_n)$, x_n est un antécédent de rang p de x_{n+p} , noté $x_n = f^{-p}(x_{n+p})$. Lorsque f est un endomorphisme, un même point peut avoir plusieurs antécédents de rang un ou aucun.

- En génétique : x_n exprime la fréquence d'un gène au temps n .
- En épidémiologie : x_n représente la proportion de la population infectée au temps n .
- En économie, x_n représente le prix unitaire à l'instant n d'une certaine marchandise.
- Dans les sciences sociales, notamment dans l'étude de la propagation des rumeurs : x_n désigne la proportion de personnes au courant de la rumeur.

La théorie des systèmes dynamiques est basée sur les résultats de Poincaré (1878-1900), Liapounov (1893), Birkhoff (1908-1944), ainsi que sur ceux concernant les équations aux différences, les itérations et les récurrences obtenus à la fin du 19ème siècle et au début du 20ème siècle grâce aux travaux de Koenig, Lemeray, Lattès et Hadamard [25, 79]. Au cours

des vingt dernières années, le développement de la théorie des systèmes dynamiques a été amplifié par l'utilisation croissante des ordinateurs, ouvrant de nouvelles perspectives et approfondissant les analyses de phénomènes complexes. L'étude des récurrences présente un double intérêt en ce sens qu'elle permet de modéliser des systèmes d'information discrets tout en ouvrant la voie à l'exploration des équations différentielles ordinaires. Cette dualité offre une approche multiple qui peut être appliquée à la fois à la représentation de systèmes discrets et à l'analyse d'équations différentielles, contribuant ainsi à une compréhension plus profonde des phénomènes dynamiques sous-jacents [52, 53].

1.1.1 Singularités

On présente ici deux singularités simples de grande importance.

1.1.2 Point fixe

Il décrit de manière simple un système qui atteint un état de repos ou état stationnaire du système.

Définition 1.1. [3] x_p est dit un point fixe de l'équation (1.1.4) s'il est invariant par l'application f , c'est-à-dire,

$$x_p = f(x_p). \quad (1.1.5)$$

- Comme en temps continu, un point fixe est encore appelé un point d'équilibre, ou point stationnaire, et parfois point critique.
- Dans le plan, il représente l'intersection de la courbe de la fonction d'équation $y = f(x)$ avec la première bissectrice.

Remarque 1.1. L'équation (1.1.4) peut admettre zéro, un ou plusieurs points fixes.

En dynamique des populations, un point fixe est une solution de l'équation (1.1.1) où la taille de la population ne change pas.

Le point fixe zéro représente l'extinction de la population, tandis qu'un point fixe positif représente la survie de la population.

1.1.3 Point périodique

La notion de périodicité est l'une des notions importantes dans le domaine des systèmes dynamiques. Cette importance découle du fait que de nombreux phénomènes physiques ou biologiques possèdent certains schémas qui se répètent. Ces modèles produisent des cycles (ou cycles périodiques), un cycle étant considéré comme l'orbite d'un point périodique.

Définition 1.2. [3] Un point périodique de période $n > 1$ de l'équation aux différences (1.1.4) est une solution à valeurs réelles x_i satisfaisant :

$$\begin{cases} x_i = f^n(x_i), \\ x_i \neq f^k(x_i), 1 \leq k < n \quad (n \text{ et } k \text{ entiers}). \end{cases} \quad (1.1.6)$$

Par conséquent, un point est périodique de période n s'il est un point fixe de f^n , c'est-à-dire s'il s'agit d'un point fixe de

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad (1.1.7)$$

avec $g = f^n = f \circ \dots \circ f$.

L'ensemble de n points, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, est dit un cycle d'ordre n (ou une orbite périodique d'ordre n ou encore un n -cycle).

Graphiquement, un point périodique de période n est la coordonnée x du point où le graphe de f^n rencontre la diagonale $y = x$.

La figure 1.1.1 représente le graphe de f^2 , où f est la fonction logistique, qui montre qu'il y a quatre points fixes pour f^2 , dont deux sont des points fixes de f . Par conséquent, les deux autres points fixes de f^2 forment un 2-cycle.

1.1.4 Nature des singularités

Nous introduisons la notion de multiplicateur pour déterminer la nature de ces singularités (points fixes et cycles).

Lorsque la dimension de la récurrence est $m = 1$, le multiplicateur d'un point fixe x_p est

$$S = f'(x_p) \quad (1.1.8)$$

et le multiplicateur d'un cycle d'ordre n , formé des $x_{p_1}, x_{p_2}, x_{p_3}, \dots, x_{p_n}$, est

$$S = \prod_{i=1}^n f'(x_{p_i}). \quad (1.1.9)$$

Les multiplicateurs d'un cycle d'ordre n , $\{x_{p_1}, x_{p_2}, x_{p_3}, \dots, x_{p_n}\}$, sont les valeurs propres de la matrice jacobienne de $f(x_p)$ ou de $f^n(x_{p_i})$, $i = 1, \dots, n$.

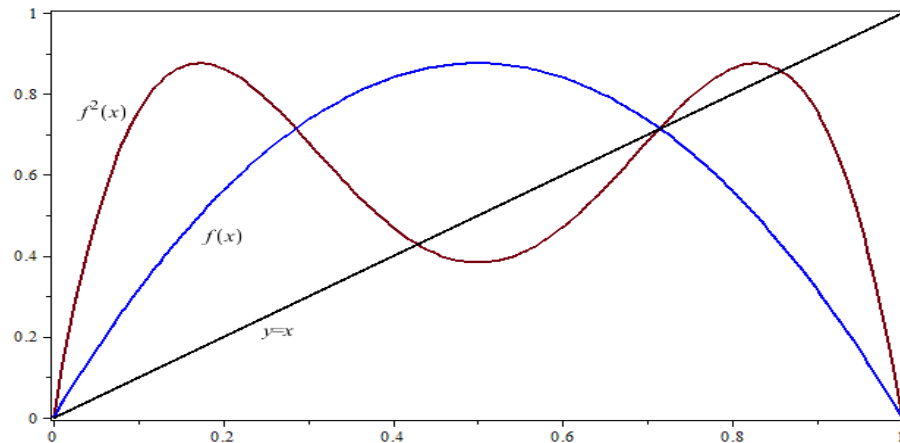


FIGURE 1.1.1 – Les points 2-périodiques de $f(x) = 3.45x(1 - x)$.

1.2 Stabilité

Un des principaux objectifs de la théorie des systèmes dynamiques est d'étudier le comportement des orbites au voisinage des points fixes, c'est-à-dire le comportement des solutions d'un système dynamique. Ce type de recherche est appelé théorie de la stabilité. Nous commençons par l'introduction des concepts de base de la stabilité.

Définition 1.3. [3] Un point fixe x_p est localement stable si, $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$, tel que

$$\text{si } \|x - x_p\| < \eta \implies \|f(x) - f(x_p)\| < \varepsilon.$$

Si x_p n'est pas stable, on dit qu'il est instable. Le point fixe x_p est localement attractif s'il existe $\gamma > 0$ tel que pour tous les x tels que $\|x - x_p\| < \gamma$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_p.$$

Le point fixe x_p est localement asymptotiquement stable s'il est localement stable et localement attractif.

- En écologie des populations, la théorie de la stabilité est utilisée pour étudier la dynamique des populations et la stabilité des écosystèmes. Elle vise à examiner comment les variations dans les tailles de populations interagissent et si ces variations sont stables au fil du temps.
- En épidémiologie, la théorie de la stabilité est utilisée pour étudier la propagation des maladies au sein d'une population. On cherche à déterminer si une maladie va s'éteindre rapidement ou si elle deviendra endémique, en fonction des interactions entre les individus.

Définition 1.4. Soit x_p un point fixe du système (1.1.4). Alors, le bassin d'attraction (ou l'ensemble stable) $W^s(x_p)$ de x_p est défini par

$$W^s(x_p) = \left\{ x : \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_p \right\}. \quad (1.2.1)$$

En d'autres termes, $W^s(x_p)$ comprend tous les points qui sont asymptotiquement stables par rapport à x_p .

Définition 1.5. On appelle $W_{\text{loc}}^u(x_p)$ l'ensemble instable local ou variété instable locale (c'est-à-dire dans U) de x_p , l'ensemble des points de U ayant une séquence d'antécédents successifs dans U , qui converge vers x_p .

$$W_{\text{loc}}^u(x_p) = \left\{ x \in U : x_{-m} \in f^{-m}(x) \rightarrow x_p \text{ et } \forall m \in \mathbb{N}, x_m \in U \right\}.$$

Remarque 1.2. Lorsque $x \in \mathbb{R}^n$, les variétés stables locales W_{loc}^s et instables locales W_{loc}^u sont appelées globale, et on les note respectivement par W^s et W^u .

$$W^s(x_p) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(W_{\text{loc}}^s(x_p)).$$

$$W^u(x_p) = \bigcup_{n \geq 0} f^n(W_{\text{loc}}^u(x_p)).$$

1.2.1 Systèmes linéarisés

Dans cette section, on donne les conditions de stabilité des points fixes lorsque f est unidimensionnelle. Pour étudier la stabilité locale d'un système dynamique, on commence par identifier les points fixes, puis on applique des techniques de linéarisation pour déterminer le comportement des solutions. Supposons que l'équation aux différences (1.1.4) ait un point fixe x_p . On translate le point fixe vers l'origine et on définit une nouvelle variable

$$u_n = x_n - x_p, \quad (1.2.2)$$

alors u_{n+1} satisfait

$$u_{n+1} = x_{n+1} - x_p = f(x_n) - x_p = f(u_n + x_p) - f(x_p) = g(u_n), \quad (1.2.3)$$

avec $g(u_n) = f(u_n + x_p) - f(x_p)$.

Le point fixe x_p dans le système original a été translaté à zéro dans le nouveau système. Notons que zéro est un point fixe de g si x_p est un point fixe de f . De plus, zéro est un point fixe localement asymptotiquement stable ou instable de g si x_p est un point fixe localement asymptotiquement stable, respectivement instable de f . Pour trouver les conditions de stabilité asymptotique locale de x_p , nous supposons que f'' est continue sur un intervalle I contenant x_p . Ensuite, nous appliquons le théorème de Taylor avec reste de Young. Il vient,

$$f(x) = f(x_p) + f'(x_p)(x - x_p) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_p)^2 \quad (1.2.4)$$

pour certains $\xi \in I$.

Pour $(x - x_p)$ suffisamment petit, l'approximation linéaire suivante

$$f(x_n) - x_p \approx f'(x_p)(x_n - x_p) \quad \text{ou} \quad u_{n+1} = f'(x_p)u_n. \quad (1.2.5)$$

Cette dernière approximation est appelée approximation linéaire de l'équation de différence (1.1.4) au point fixe x_p :

$$u_{n+1} = f'_{x_p} u_n \quad (1.2.6)$$

Si x_0 est suffisamment proche de x , alors la dynamique de u_n est déterminée par l'équation linéarisée (1.2.6).

La valeur de $f'(x)$ détermine si x_p est localement asymptotiquement stable ou instable.

- Si $|f'(x_p)| > 1$, alors u_n ne s'approchera pas de 0 (et x_n ne s'approchera pas de x_p).
- Si $|f'(x_p)| < 1$, alors u_n s'approche de 0 (et x_n s'approche de x_p).

On a une convergence exponentielle si $0 < f'(x_p) < 1$, et convergence oscillatoire si $-1 < f'(x_p) < 0$. Ainsi, nous avons le théorème suivant :

Théorème 1.1. [25] Soit $f : I \rightarrow I$ une fonction de classe C^1 sur I , avec $I \subset \mathbb{R}$ et x_p un point fixe de f . Alors x_p est localement asymptotiquement stable si

$$|f'(x_p)| < 1, \quad (1.2.7)$$

et instable si

$$|f'(x_p)| > 1. \quad (1.2.8)$$

Définition 1.6. [25] Un point fixe de (1.1.4) est dit hyperbolique si $|f'(x_p)| \neq 1$. Dans le cas contraire, il est dit non hyperbolique.

Remarque 1.3. Le critère de stabilité du théorème 1.1 peut être appliqué aux points périodiques de période m . Dans ce cas, la fonction f^m est utilisée au lieu de f .

Corollaire 1.1. [25] Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un cycle d'ordre n . Alors le cycle est localement asymptotiquement stable si

$$|f'(x_1)f'(x_2)\dots f'(x_n)| < 1. \quad (1.2.9)$$

Remarque 1.4. Pour les points fixes non hyperboliques, il est clair que les termes d'ordre supérieur, qui n'apparaissent pas dans l'approximation linéaire, sont importants pour déterminer la stabilité locale. Dans les cas où $f'(x_p) = 1$ ou $f'(x_p) = -1$, il existe des résultats qui montrent la stabilité ou l'instabilité locale de x_p . Ces résultats nécessitent la dérivée du troisième ordre et la dérivée de Schwarz [25].

Définition 1.7. [3] La dérivée de Schwarz d'une fonction f est notée $(Sf)(x)$ et est définie comme suit :

$$(Sf)(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2.$$

La formulation originale de la dérivée de Schwarz (Sf) a été réalisée par le mathématicien allemand Hermann Schwarz (1843-1911), qui a apporté de nombreuses contributions aux mathématiques, notamment dans le domaine de la théorie des fonctions complexes. Schwarz a montré que pour une application conforme f , la dérivée de Schwarz $Sf(x) = 0$ pour tout $x \in I$ si et seulement si f est une transformation linéaire fractionnaire (c'est-à-dire $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$). Singer [72] a été le premier à étudier la dynamique des applications unidimensionnelles avec une dérivée de Schwarz négative. La motivation pour étudier ces cartes était double : les cartes à dérivée de Schwarzian négative donnent lieu à un principe de minimum qui a de fortes implications dynamiques. Cette condition assure un bon comportement dynamique de ces modèles : continuité et monotonie de l'entropie topologique, ordre dans la succession des bifurcations, existence d'une limite supérieure au nombre de bifurcations stables, et de nombreux modèles à une seule espèce ont une dérivée de Schwarzian négative [62].

Dans notre travail, nous nous intéresserons à deux modèles qui vérifient cette propriété :

Théorème 1.2. [3] *Supposons que $f'(x_p) = 1$, où x_p est un point fixe de (1.1.4) et f''' est continue sur un intervalle ouvert contenant x_p .*

- (i) *Si $Sf(x_p) > 0$, alors x_p est instable.*
- (ii) *Si $Sf(x_p) < 0$, alors x_p est localement asymptotiquement stable.*

1.2.2 Stabilité globale

La stabilité globale d'un point fixe enlève la restriction sur l'état initial du point fixe. Dans la stabilité asymptotique globale, les solutions s'approchent du point fixe pour toutes les conditions initiales. Cependant, comme notre application s'applique à des systèmes biologiques, nous ne considérons que des conditions initiales positives.

Définition 1.8. [3] Soit x_p un point fixe de (1.1.4), avec $f : [0, a[\rightarrow [0, a[$, $0 < a \leq \infty$. Alors x_p est dit globalement attractif si pour toute condition initiale

$$x_0 \in [0, a[, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_p.$$

x_p est dit globalement asymptotiquement stable s'il est globalement attractif et localement stable.

Théorème 1.3. [3] *Supposons que f de l'équation (1.1.4) vérifie les conditions suivantes :*

- (i) f est une fonction continue sur $[0, a[$, avec $a \leq +\infty$.
- (ii) $f([0, a[\rightarrow [0, a[$, avec $a \leq +\infty$, et $0 < f(x) < x$ pour tout $x \in [0, a[$.

Alors, l'origine est globalement asymptotiquement stable.

Pour le point fixe positif, nous avons besoin de quelques hypothèses supplémentaires.

Supposons que :

- (iii) $f(0) = 0$, $f(x_p) = x_p$.
- (iv) $f(x) > x$ si $0 < x < x_p$.
- (v) $f(x) < x$ si $x_p < x < a$.
- (vi) Si f admet un maximum au point c dans $[0, x]$, alors f est décroissante pour $x > c$.

Le théorème suivant énonce les conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité asymptotique globale d'un point fixe positif x_p . Ce théorème a été formulé par Cull en 1981 [20].

Théorème 1.4. [3] *L'équation de différence (1.1.4) vérifie les hypothèses (i)-(vi) pour un point fixe positif globalement asymptotiquement stable si et seulement si f ne possède pas de point périodique de période 2.*

1.2.3 Le diagramme cobweb

Une des méthodes d'itération graphique pour déterminer la stabilité des points fixes est le diagramme cobweb. Sur le plan x - y , nous dessinons le diagramme cobweb de la courbe $y = f(x)$ et de la diagonale $y = x$ sur le même graphe. Nous commençons par un point initial x_0 . Ensuite, nous nous déplaçons verticalement jusqu'à ce que nous atteignons le graphe de f au point $(x_0, f(x_0))$. En déplaçant horizontalement, nous rencontrons la ligne $y = x$ au point $(f(x_0), f(x_0))$. Ceci détermine $f(x_0)$ sur l'axe des x . Pour trouver $f^2(x_0)$, nous nous déplaçons à nouveau verticalement jusqu'à ce que nous rencontrons le graphe

de f au point $(f(x_0), f(x_0))$. En poursuivant horizontalement, nous rencontrons la ligne $y = x$ au point $(f(x_0), f^2(x_0))$. En continuant ce processus, nous pouvons évaluer tous les points de l'orbite de x_0 , à savoir l'ensemble $\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0), \dots\}$.

Le diagramme de cobweb de l'application logistique $f(x) = rx(1 - x)$ montre que l'orbite de x_0 converge vers un point fixe lorsque $r = 2.9$, comme illustré dans la figure 1.2.1 . Lorsque $r = 3.4$, l'orbite de 0.1 converge vers un cycle d'ordre deux, comme indiqué dans la figure 1.3.1 . Lorsque $r = 3.4495$, l'orbite de 0.1 converge vers un cycle d'ordre 4, comme illustré dans la figure 1.3.2 , et pour $r = 4$, elle décrit un comportement chaotique du système dynamique, comme le montre la figure 1.3.3 .

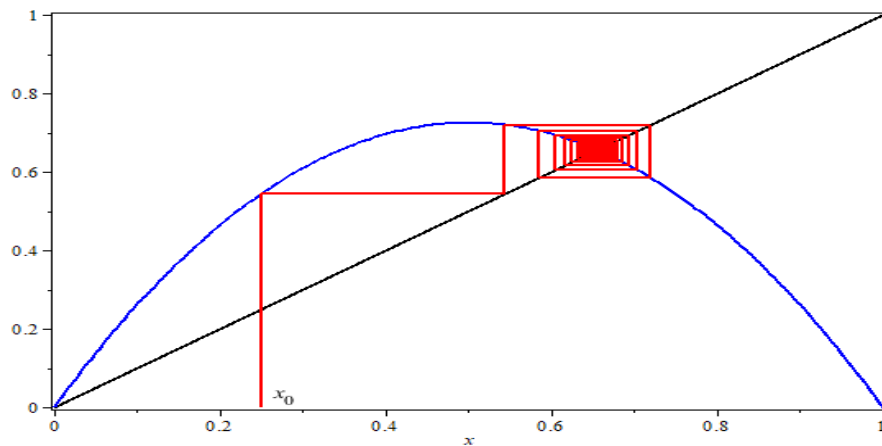


FIGURE 1.2.1 – Le diagramme cobweb du système dynamique $f(x) = 2.9x(1 - x)$.

1.3 Bifurcations

Le terme "bifurcation", introduit par Henri Poincaré au début du 20^e siècle, est utilisé de manière générale pour décrire toute modification qualitative du comportement d'un système dynamique en réponse à la variation d'un de ses paramètres. Plus précisément, lorsque un système dépend d'un paramètre μ (qu'il soit scalaire ou vectoriel), son comportement peut changer de manière qualitative lorsque le paramètre varie. Si un tel changement se produit, on parle de bifurcation.

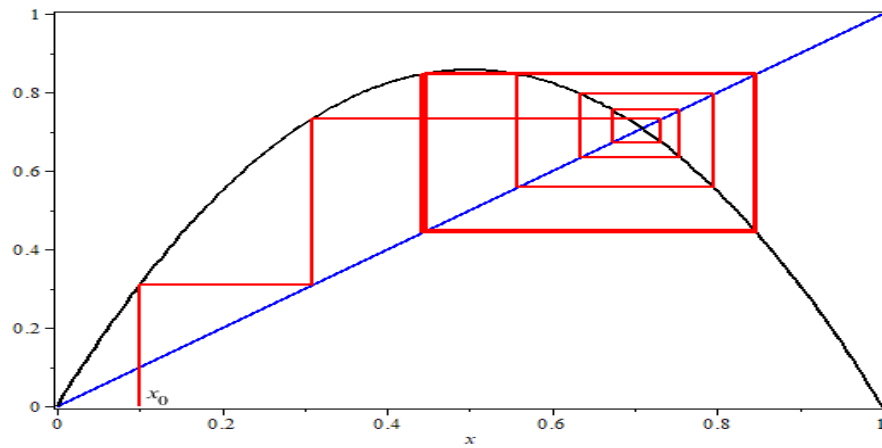


FIGURE 1.3.1 – Le diagramme cobweb du système dynamique $f(x) = 3.4x(1 - x)$.

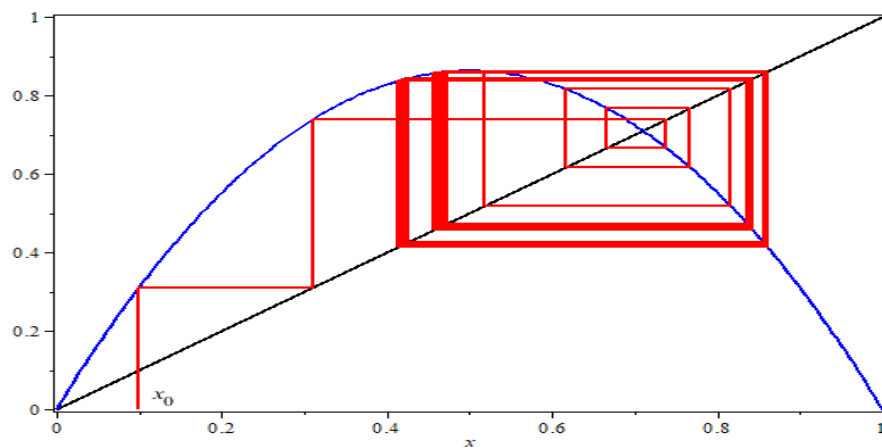


FIGURE 1.3.2 – Le diagramme cobweb du système dynamique $f(x) = 3.4495x(1 - x)$.

1.3.1 Types de bifurcations

Il existe divers types de bifurcations en fonction des propriétés des secondes dérivées de la famille de fonctions f . Chacune de ces bifurcations est définie par une forme normale, qui représente l'équation générale caractéristique de ce type de bifurcation [39, 24, 79]. Parmi les différentes bifurcations observées dans les systèmes dynamiques discrets, on peut citer [39] :

1.3.2 Bifurcation locale

La bifurcation locale est une modification du comportement du système au voisinage d'un point fixe, d'une orbite périodique ou d'autres ensembles invariants.

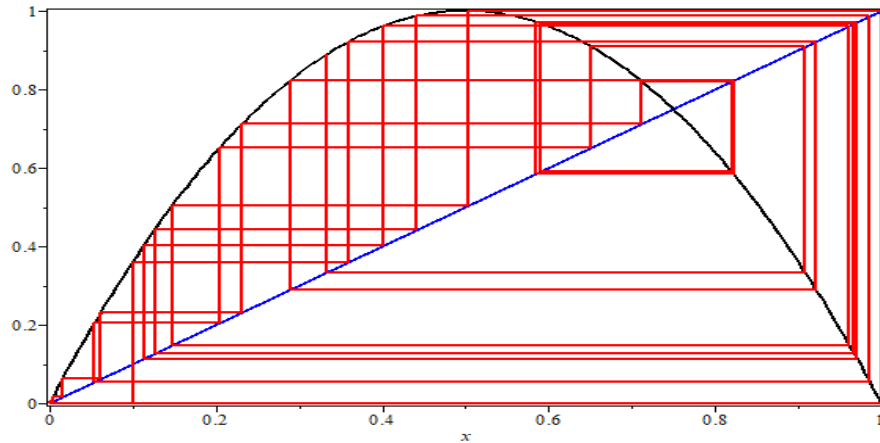


FIGURE 1.3.3 – Le diagramme cobweb du système dynamique $f(x) = 4x(1 - x)$.

1.3.3 Bifurcation Fold

Lorsque les multiplicateurs prennent des valeurs réelles et qu'un d'entre eux dépasse la valeur critique de $+1$, cela conduit à la naissance de deux points fixes ou cycles d'ordre k . L'un de ces points fixes est stable, tandis que l'autre est instable. Pour la transformation d'ordre, cette bifurcation est illustrée dans le schéma ci-dessous.

$$\Phi \longleftrightarrow^{S=1} A^k (\text{respectivement } N_I^k) + R^k. \quad (1.3.1)$$

ϕ : signifie l'absence de cycles.

A^k : désigne un point fixe ou cycle d'ordre k attractif.

R^k : désigne un point fixe ou cycle d'ordre k répulsif.

1.3.4 Bifurcation Flip

Cette bifurcation se produit lorsque l'un des multiplicateurs s associés au cycle d'ordre k traverse -1 . Lorsque le multiplicateur prend la valeur $S = -1$, un point fixe (cycle)

d'ordre k change de stabilité et donne naissance à un cycle d'ordre deux (cycle d'ordre $2k$) de même stabilité que le cycle d'origine.

Pour la transformation d'ordre 1, cette bifurcation est représentée par le schéma ci-dessous.

$$\Phi \xleftrightarrow{S=1} A^k + R^{2k}. \quad (1.3.2)$$

ϕ : signifie l'absence de cycles.

A^k : désigne un point fixe ou cycle d'ordre k attractif.

R^k : désigne un point fixe ou cycle d'ordre k répulsif.

Définition 1.9. La codimension d'une bifurcation désigne le nombre de paramètres qui doivent être modifiés pour que la bifurcation se produise. La bifurcation fold est une bifurcation locale de codimension 1.

Diagramme de bifurcation Le diagramme de bifurcation représente les points d'état stationnaire du système en fonction du paramètre de contrôle (ou bifurcation). Les graphes qui détaillent ces bifurcations sont naturellement désignés sous le nom de diagrammes de bifurcation. En général, on sélectionne une variable d'état et on trace la valeur limite de celle-ci par rapport à un unique paramètre de contrôle. Un diagramme de bifurcation synthétise l'information sur l'espace d'état, permettant de visualiser la variation en fonction du paramètre. Il offre la possibilité d'observer la transition d'un état stationnaire vers le chaos.

La figure 1.3.4 illustre le comportement des orbites de la fonction logistique en faisant varier le paramètre r entre $[0, 4]$. Ce diagramme de bifurcation est généré sur ordinateur par la répétition de la procédure suivante :

- Choisir une valeur de r en commençant par $r = 0$.
- Choisir x_0 au hasard dans $[0, 1]$.
- Calculer l'orbite de $x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots$.
- Ignorer les 100 premières itérations et tracer l'orbite commençant par l'itération 101.
- Incrémenter r .

Après 100 itérations, les points tracés tendent vers un point fixe ou un cycle d'ordre n ou un attracteur étrange. La représentation du diagramme de bifurcation permet de voir la naissance, l'évolution et la disparition des points d'attraction [39].

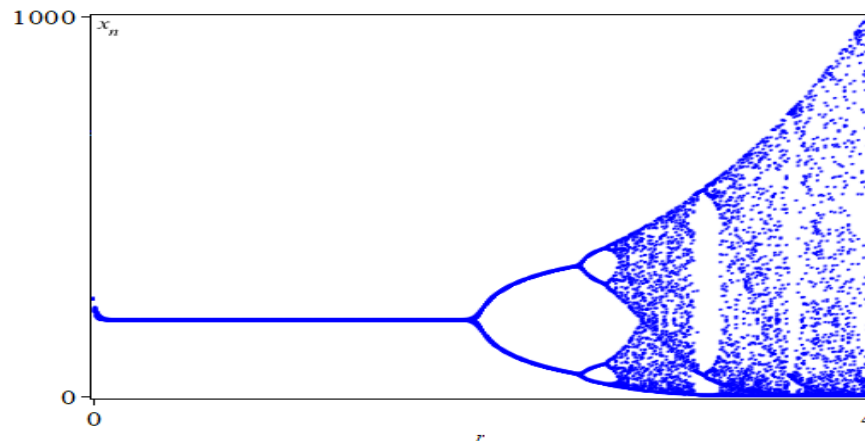


FIGURE 1.3.4 – Le digramme de bifurcation du model logistique en faisant variant le taux de croissance r comme paramètre de bifurcation.

1.3.5 Bifurcations globales

Les bifurcations globales sont associées à des changement qualitatifs dans le comportement global du système et ne peuvent pas être déduites d'une analyse locale. Contrairement aux bifurcations locales, les bifurcations globales ne sont pas détectées après une linéarisation du système [79, 39]. Les bifurcations globales se produisent lorsque deux trajectoires entrent en collision.

1.3.6 Bifurcation homocline

Une bifurcation homocline est un changement qualitatif dans le comportement d'un système dynamique, caractérisé par la rencontre entre une orbite périodique et un point selle, conduisant à la formation d'une trajectoire homocline au point de bifurcation.

Définition 1.10. Soit x_q un point homocline à un point fixe répulsif x_p de f , et appartenant à un voisinage U de x_p . On appelle orbite homocline $O_h(x_q)$ associée à x_q , un ensemble constitué des itérés successifs de x_q , et d'une suite infinie d'antécédents successifs obtenus par la transformation locale inverse f^{-1} de T dans U :

$$O_h(x_q) = \{\dots, x_q^{-n}, \dots, x_q^{-2}, x_q^{-1}, x_q, f(x_q), f^2(x_q), \dots, f^n(x_q), \dots\},$$

où $x_{q_n} = f^n(x_q) \rightarrow x_p$, et $x_{q_{-n}} = f^{-n}(x_q) \rightarrow x_p$.

Remarque 1.5. L'écriture $f^n(x_q) \rightarrow x_p$ signifie que $f^n(x_q)$ tend vers x_p lorsque n tend vers ∞ .

Définition 1.11. [29] On dit qu'un point fixe x_p de $f : X \rightarrow X$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ est en expansion si f est continue en x_p et s'il existe un voisinage U de x_p tel que pour tout $x \in U \setminus \{x_p\}$ il existe un entier n_x pour lequel $f^{n_x} x \notin U$ (c'est-à-dire que la trajectoire de x quitte U en un nombre finie d'iteration) et un inverse local f^{-1} satisfait

$$\bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(U) = \{x_p\}. \quad (1.3.3)$$

Définition 1.12. [29] Soit x_p un point fixe en expansion de $f : X \rightarrow X$. Le point x_p est appelé répulsif snap-back s'il existe un point $x_0 \in U \setminus \{x_p\}$ tel que $f^m(x_0) = x_p$ pour un entier m approprié. L'orbite donnée par

$$\{x_p \leftarrow \dots f^{-n}(x_0), \dots, f^{-1}(x_0), x_0, x_1, \dots, x_m = x_p\} \quad (1.3.4)$$

l'orbite homocline correspondante, où $x_i = f^i(x_0)$.

Théorème 1.5. [29] Soit f une fonction non inversible, continue par morceaux. Soit x_p un point fixe en expansion de f et O_{or} une orbite homocline non critique de x_p . Alors, dans tout voisinage de x_p , il existe un ensemble de Cantor invariant K sur lequel f est chaotique au sens de Li et Yorke et de Devaney.

Remarque 1.6. 1. La caractérisation des bifurcations homoclines indépendamment de la régularité de la fonction f aux points homoclines, c'est-à-dire sans intervenir la dérivée ou la matrice jacobienne de f en x_p .

2. Une condition suffisante pour que le point fixe x_p soit en expansion est que toutes les valeurs propres de $Jf(x_p)$ soient plus grandes que 1 en module, car l'inverse local se comporte comme une contraction (voir [36]). Plus précisément, un point x_q est appelé un point homocline de x_p (ou homocline de x_p) s'il existe un entier j tel que $f^j(x_q) = x_p$, et s'il est possible de trouver une séquence de préimages de x_q qui tend vers x_p .

1.3.7 Attracteur

La région de l'espace des phases vers laquelle convergent les trajectoires d'un système dynamique est désignée sous le nom d'attracteur. Ces attracteurs sont particulièrement importants pour caractériser l'évolution à long terme des systèmes dynamiques, car ils se présentent sous des formes géométriques spécifiques.

Définition 1.13. [24] Une sous-partie A d'un système dynamique discret, est appelée attracteur si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. A est fermée.
2. A est positivement invariante.
3. A est attractive, c'est-à-dire, il existe un voisinage ouvert U de A tel que
 - (a) U est positivement invariant.
 - (b) U est attiré par A .

1.3.8 Attracteur régulier

Définition 1.14. Les attracteurs réguliers décrivent l'évolution des systèmes non chaotiques. Il existe trois types d'attracteurs réguliers.

1. Le point fixe : il s'agit de l'attracteur le plus simple, où le système évolue vers un état de repos, représenté par un point fixe.
2. Le cycle limite périodique : dans ce cas, la trajectoire de phase peut se refermer sur elle-même, entraînant une évolution temporelle cyclique avec des oscillations permanentes.

3. Le cycle limite pseudo-périodique : c'est presque un cas particulier du précédent. Ici, la trajectoire de phase ne se referme pas sur elle-même, mais s'enroule autour d'une variété de dimension deux, comme un tore par exemple.

1.3.9 Exposants de Liapunov

La sensibilité aux conditions initiales est l'un des critères nécessaires pour démontrer qu'une solution à une équation aux différences présente un comportement chaotique. L'équation logistique discrète, dont les solutions sont représentées sur le graphe de la figure 1.3.5, présente une dynamique chaotique lorsque $r = 3,8$.

La fonction f montre une sensibilité particulière aux conditions initiales, ce qui se traduit par une divergence exponentielle des solutions, même si elles sont initialement proches les unes des autres. Cette propriété est mesurée par le signe de l'exposant dit de Liapunov. Une des définitions du chaos pour $x_{n+1} = f(x_n)$, où $f : I \rightarrow I$, impose que les solutions sont bornées et qu'il existe un exposant de Liapunov positif pour chaque point $x_0 \in I$, qui n'est pas éventuellement périodique [4]. D'autres définitions du chaos nécessitent des conditions supplémentaires sur f [25]. Tout d'abord, nous donnons une définition précise de la sensibilité aux conditions initiales. Ensuite, nous définissons ce que l'on peut entendre par un exposant de Liapunov.

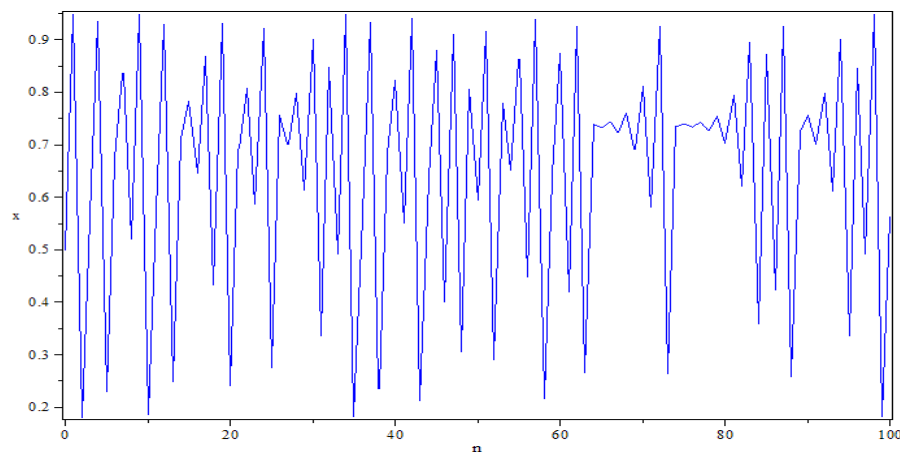


FIGURE 1.3.5 – Les solutions de la fonction logistique avec taux de croissance $r = 3.8$.

Définition 1.15. [25] soit $f : I \rightarrow I$. Alors la fonction f est sensible au condition initiale x_0 s'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $\epsilon > 0$, ils existent y_0 et un entier k tel que

$$|x_0 - y_0| < \epsilon \text{ et } |f^k(x_0) - f^k(y_0)| > \delta.$$

La fonction f est dite sensible aux conditions initiales sur son domaine de définition I si f est sensible aux conditions initiales pour chaque $x \in I$. Ensuite, nous définissons ce que l'on appelle un exposant de Liapunov au point x_0 . La définition d'un exposant de Liapunov offre une méthode de calcul de la sensibilité aux conditions initiales sans appliquer directement la définition.

Notons $\lambda(x_0)$ l'exposant de Liapunov en un point x_0 . La définition d'un exposant de Liapunov dépend de la condition initiale x_0 . Il mesure l'étirement exponentiel des points proches au cours des itérations successives. Pour deux points x_0 et $x_0 + \epsilon$ et les itérations de la fonction f , l'exposant de Liapunov $\lambda(x_0)$ est approximativement de

$$\epsilon e^{n\lambda(x_0)} \approx f^n(x_0 + \epsilon) - f^n(x_0) \quad (1.3.5)$$

lorsque ϵ est petit et n est très grand. En divisant par ϵ et en faisant tendre ϵ vers 0, on obtient

$$\epsilon e^{n\lambda(x_0)} \approx \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f^n(x_0 + \epsilon) - f^n(x_0)}{\epsilon} = \left. \frac{df^n}{dx} \right|_{x=x_0}. \quad (1.3.6)$$

En prenant le logarithme des deux côtés, puis en divisant par n , et en faisant tendre n vers l'infini, l'équation (1.3.6) devient

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n}{dx} \right|_{x=x_0}. \quad (1.3.7)$$

Par conséquent, il est clair, d'après la dérivation précédente, que lorsque $\lambda(x_0) > 0$, les n points du domaine ne restent pas proches de x_0 car $\frac{df^n}{dx} = f'(x_0)f'(x_1)\dots f'(x_{n-1})$ et

$$\ln |f'(x_0)f'(x_1)\dots f'(x_{n-1})| = \sum_{k=0}^{n-1} \ln |(f'(x_k))|, \quad (1.3.8)$$

on peut définir plus simplement l'exposant de Liapunov en termes de f' .

Définition 1.16. [25] L'exposant de Liapunov à x_0 de l'équation aux différences (1.1.4) est noté $\lambda(x_0)$ et est défini comme suit

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n}{dx} \right|_{x=x_0}. \quad (1.3.9)$$

Si $\lambda(x_0)$ est indépendant de x_0 , alors $\lambda(x_0)$ est simplement noté λ et se réfère à l'exposant de Liapunov de f . Il existe une sensibilité aux conditions initiales si $\lambda(x_0) > 0$ pour toutes les conditions initiales x_0 dans le domaine de définition de f .

Remarque 1.7. Cette définition peut être étendue à une dimension supérieure de l'espace des phases. Pour un espace de dimension finie p , il existe p exposants de Liapunov. Chacun mesure le taux de divergence le long d'un des axes du système. Ils sont définis à partir de la matrice jacobienne de la fonction f au point x_0 et de ses valeurs propres.

Vous trouverez dans [56] une intéressante explication de l'exposant de Liapunov dans le contexte d'une application biologique.

La figure 1.4.1 représente les exposants de Liapunov de l'équation logistique discrète pour des valeurs de r sur l'intervalle $[3.57, 3.99]$ lorsque $x_0 = \frac{1}{2}$. Les exposants de Liapunov sont positifs pour de nombreuses valeurs de $r > 3.57$.

1.4 Chaos

L'étude des systèmes chaotiques, sous leur forme actuelle, a pour origine Henri Poincaré, ainsi que des théoriciens de l'ergodicité tels que Birkhoff [10] et Von Neuman [55] dans les années 1930. Le terme chaos a été popularisé par l'article de Li et Yorke intitulé "La période trois implique le chaos" [43]. Les exemples de systèmes chaotiques sont nombreux et englobent des phénomènes tels que l'écoulement turbulent des fluides, la dynamique des populations, les irrégularités du rythme cardiaque, la physique des plasmas, les systèmes économiques, les prévisions météorologiques, etc. Ce qui caractérise ces systèmes, c'est leur grande sensibilité aux conditions initiales. Autrement dit, de petites variations dans les valeurs initiales, qu'elles soient dues à des erreurs de mesure ou à du

bruit, se propagent de manière exponentielle, transformant le système calculé de manière significative par rapport à la prédiction initiale [25].

Définition 1.17. [24] Soit I un intervalle dans \mathbb{R} . Alors, un ensemble A est dit dense dans I si, pour tout $x \in I$, tout intervalle ouvert contenant x doit intersecter A . En d'autres termes, pour chaque $\delta > 0$, l'intervalle ouvert $J =]x - \delta, x + \delta[$ contient un point de A .

Définition 1.18. [24] Soit f une application sur un intervalle I (ou \mathbb{R}). Alors, f est dite topologiquement transitive si, pour toute paire d'intervalles ouverts non vides J_1 et J_2 dans I , il existe un entier positif k tel que $f^k(J_1) \cap J_2 = \emptyset$.

De manière équivalente, on peut remplacer les intervalles J_1 et J_2 par des sous-ensembles ouverts U_1 et U_2 de I . Notez qu'un ensemble ouvert est simplement l'union d'intervalles ouverts.

Intuitivement, sous l'action d'une application transitive, un point dans I se promène partout dans I , et son orbite peut se rapprocher autant que souhaité de n'importe quel autre point dans I . Dans de nombreux cas, il est plus facile d'utiliser le critère suivant pour prouver que l'application donnée est transitive.

Théorème 1.6. [24] Si l'application $f : I \rightarrow I$ sur l'intervalle I a une orbite dense, alors elle est topologiquement transitive. La réciproque est vraie si I est un intervalle fermé.

Nous définissons le chaos selon le sens de Devany. [24].

Définition 1.19. Une application $f : I \rightarrow I$, où I est un intervalle, est dite chaotique si :

1. f est transitive.
2. L'ensemble des points périodiques est dense dans I .
3. f a une dépendance sensible aux conditions initiales.

Remarque 1.8. Récemment, Banks et al. [8] ont montré que les conditions 1 et 2 dans la Définition 1.19 impliquent la Condition 3 de dépendance sensible aux conditions initiales. Cependant, aucune autre paire de conditions n'implique la troisième voir [25].

1.4.1 Dédoublément de période vers le chaos

La route vers le chaos la plus récente a été explorée par Grossmann et Thomae en 1977, ainsi que par Feigenbaum, Couleutt et Tresser en 1978. Ils ont considéré une simple équation de différence utilisée par les biologistes pour décrire la dynamique d'une population dont le nombre varie avec le temps. Ils ont découvert qu'en variant un paramètre externe, l'état du système oscille entre des valeurs stables (points fixes) dont le nombre augmente pour certaines valeurs distinctes du paramètre externe. Ceci se poursuit jusqu'au moment où le nombre de points fixes devient infini pour une valeur finie et précise du paramètre externe, c'est à ce moment-là que le système devient chaotique. Feigenbaum [27] a démontré dans un travail remarquable que ces résultats ne sont pas restreints à ce modèle spécifique, mais sont universels, et peuvent être vérifiés pour une grande variété de systèmes biologiques, chimiques ou physiques [25, 79].

Considérons la fonction logistique $f(x) = rx(1 - x)$ avec $x \in [0, 1]$. Une analyse dynamique de f montre que f admet deux points fixes $x_1^* = 0$ et $x_2^* = \frac{r-1}{r}$.

Nous allons maintenant étudier la stabilité de chaque point fixe séparément. On a $f'(x_1^*) = r$. Par conséquent, d'après le théorème 1.1, on conclut :

- Si $0 < r < 1$, alors x_1^* est asymptotiquement stable.
- Si $r > 1$, alors x_1^* est instable.

Le point fixe $x_2^* = \frac{r-1}{r}$: clairement, x_2^* se situe dans l'intervalle $]0, 1]$ si $r > 1$. De plus,

$$f\left(\frac{r-1}{r}\right) = r - 2\frac{r(r-1)}{r} = 2 - r.$$

Ainsi, selon le théorème 1.1, x_2^* est asymptotiquement stable si $|2 - r| < 1$. En résolvant cette inégalité pour r , nous obtenons $1 < r < 3$ comme les valeurs de r pour lesquelles x_2^* est asymptotiquement stable. Lorsque $r = 3$, nous avons $f(x_2^*) = f\left(\frac{2}{3}\right) = -1$, et x_2^* est donc non-hyperbolique. Dans ce cas, nous devons calculer la dérivée de Schwarz : $Sf(x_2^*) = -54 < 0$. Par conséquent, selon le théorème 1.2, le point fixe $x_2^* = \frac{2}{3}$ est asymptotiquement stable. De plus, selon le théorème 1.1, le point fixe x_2^* est instable pour $r > 3$. Nous résumons maintenant nos conclusions :

- Si $1 < r < 3$, alors x_2^* est asymptotiquement stable.

– Si $r > 3$, alors x_2^* est instable.

Pour trouver les cycles 2-périodiques, nous résolvons l'équation $f^2(x) = x$, c'est-à-dire

$$r^2x(1-x)[1-rx(1-x)] - x = 0. \quad (1.4.1)$$

En éliminant les points fixes 0 et $\frac{r-1}{r}$, en divisant le côté gauche de l'équation 1.4.1 par $x(x - \frac{r-1}{r})$, on obtient

$$r^2x^2 - r(r+1)x + (r+1) = 0. \quad (1.4.2)$$

En résolvant cette équation, nous obtenons

$$x_1 = \frac{(1+r) - \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r} \quad (1.4.3)$$

et

$$x_2 = \frac{(1+r) + \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}. \quad (1.4.4)$$

Il est clair que x_1 et x_2 sont définis uniquement si $r > 3$. Ensuite, nous étudions la stabilité de ce cycle d'ordre 2. Selon le corollaire 1.1, ce cycle 2-périodique est asymptotiquement stable si

$$|f(x_1) - f(x_2)| < 1 \quad (1.4.5)$$

ou

$$-1 < r^2(1-2x_1)(1-2x_2) < 1. \quad (1.4.6)$$

En résolvant cette inégalité, on obtient :

$$-1 < r^2 \left(1 - \frac{1}{(1+r) - \sqrt{r^2 - 2r - 3}} \right) \left(1 - \frac{1}{(1+r) + \sqrt{r^2 - 2r - 3}} \right) < 1.$$

En simplifiant, on trouve :

$$1 < -r^2 + 2r + 4 < 1.$$

La résolution des deux dernières inégalités donne l'intervalle : $3 < r < 1 + \sqrt{6}$ pour la stabilité asymptotique. Lorsque $r = 1 + \sqrt{6}$, on obtient $f(x_1) - f(x_2) = -1$. Dans ce cas, nous devons appliquer le théorème 1.2 à f^2 pour déterminer la stabilité des points périodiques x_1 et x_2 de f . Après quelques calculs, nous concluons que $Sf(x_1) < 0$ et $Sf(x_2) < 0$, ce qui implique que le cycle $\{x_1, x_2\}$ est asymptotiquement stable. De plus, le cycle périodique $\{x_1, x_2\}$ est instable pour $r > 1 + \sqrt{6}$.

En résumé :

- Si $3 < r < 1 + \sqrt{6}$, alors le cycle 2-périodique $\{x_1, x_2\}$ est asymptotiquement stable.
- Si $r > 1 + \sqrt{6}$, le cycle 2-périodique $\{x_1, x_2\}$ est instable.

Ainsi, le point fixe positif est asymptotiquement stable pour $1 < r \leq 3$, où il perd sa stabilité après $r_1 = 3$. Pour $r > r_1$, un cycle 2-périodique asymptotiquement stable apparaît, mais il perd sa stabilité après un second nombre $r_2 = 1 + \sqrt{6} \approx 3.44949$.

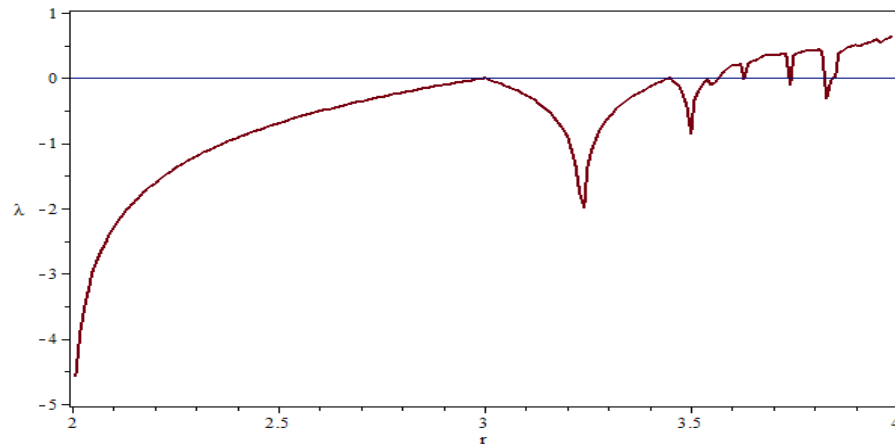


FIGURE 1.4.1 – Exposant de Lyapunov de l’application logistique en fonction du taux de croissance r .

1.4.2 Cycles 2²-périodiques

La recherche de cycles d’ordre 4 peut être bénéfique si l’on parvient à résoudre l’équation suivante $f^4(x) = x$. Cela implique de résoudre une équation du douzième degré, ce qui n’est généralement pas possible. Nous nous tournons donc vers une analyse graphique ou numérique pour nous aider à trouver les cycles d’ordre 4 (voir Figure 1.4.2). Il s’avère qu’il existe un cycle d’ordre 2².

Lorsque $r > 1 + \sqrt{6}$, le système présente un cycle d’ordre 2² qui est asymptotiquement stable pour $1 + \sqrt{6} < r \leq 3.54409$. Ce cycle d’ordre 2² perd sa stabilité lorsque $r > 3.54409$. Encore une fois, Le scénario se répète : lorsque $r > r_3$, le cycle de 2² bifurque en un cycle d’ordre 2³ asymptotiquement stable.

Le cycle se poursuit. Ce processus de double bifurcation se prolonge indéfiniment et produit une séquence $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$. Le Tableau 1.4.2 jette un éclairage sur certaines configu-

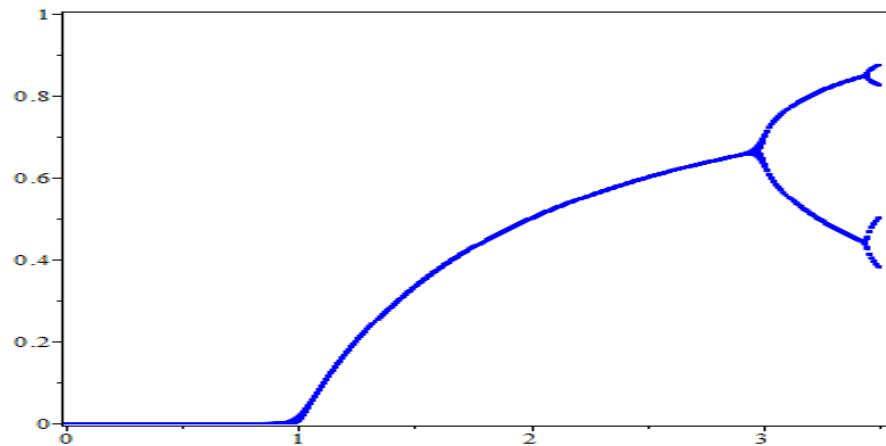


FIGURE 1.4.2 – L'apparition d'un cycle périodique de période 4. Un échange de stabilité se produit à $r = 1$ entre $x_1 = 0$ et $x_2 = \frac{r-1}{r}$.

n	r_n	$r_n - r_{n-1}$
1	3	-
2	3.449489 ...	0.449489 ...
3	3.544090 ...	0.094601 ...
4	3.564407 ...	0.020317 ...
5	3.568759 ...	0.0043521 ...
6	3.569692 ...	0.00093219 ...
7	3.569891 ...	0.00019964 ...

TABLE 1.1 – Description de la séquence μ_n

rations remarquables : à partir du Tableau 1.4.2, nous faisons les observations suivantes (qui peuvent être démontrées, au moins numériquement) :

1. La suite r_n semble converger vers un nombre spécifique, $r_\infty \approx 3.570$.
2. L'écart $(r_n - r_{n-1})$ entre les valeurs successives de r_i devient de plus en plus étroit, finalement approchant zéro.
3. Le rapport $\frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n}$ approche une constante appelée le nombre de Feigenbaum δ , nommé d'après son découvreur, Mitchell Feigenbaum [27]. En fait,

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} \approx 4.669201609. \quad (1.4.7)$$

Feigenbaum a découvert que le nombre δ est universel et ne dépend pas de la famille de transformations en discussion ; il est le même pour une grande classe de transformations, appelées transformations unimodales.

La formule (1.4.7) peut être utilisée pour générer la suite r_n avec une bonne précision. Nous posons $\delta = \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n}$ et résolvons pour r_{n+1} . Ainsi, nous obtenons

$$r_{n+1} = r_n + \frac{r_n - r_{n-1}}{\delta}. \quad (1.4.8)$$

Par exemple, en prenant $r_1 = 3$ et $r_2 = 1 + \sqrt{6}$ (dans le Tableau 1.4.2), alors avec la formule (1.4.8) nous obtenons $r_3 \approx 3.54575671$, qui est une bonne approximation de r_3 réellement observé dans le Tableau 1.4.2.

Au-delà de r_∞ tournons maintenant notre attention vers les valeurs de paramètre $r > r_\infty$. La situation ici est bien plus compliquée que dans la région de doublement de période $1 < r \leq r_\infty$ (où seuls des cycles stables apparaissent dans le diagramme de bifurcation).

La meilleure façon d'expliquer la dynamique de l'orbite de x_0 est de partir de $r = 4$ et de marcher en arrière jusqu'à r_∞ . Pour $r = 4$, nous ne voyons qu'une seule bande couvrant tout l'intervalle $[0, 1]$ (voir Figure 1.4.3). Cette bande se rétrécit lentement en diminuant le r et elle bifurque en deux parties à la valeur de $r = \lambda_1$ et en quatre parties à $r = \lambda_2$.

La division se poursuit indéfiniment, où à λ_k , nous aurons 2^k bandes. Cette suite décroissante λ_n converge vers $\lambda_\infty = r_\infty$. De plus, le quotient

$$\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \text{ tend vers le nombre de Feigenbaum } \delta \approx 4.6692$$

.

1.4.3 Fenêtres Périodiques

La plus grande fenêtre du diagramme de bifurcation apparaît pour des valeurs de r comprises entre 3.828 et 3.857, elle correspond à une fenêtre périodique de période 3. Un cycle asymptotiquement stable de période 3 apparaît d'abord à

$r = 1 + \sqrt{8} \approx 3.828$, puis le phénomène de doublement de période prend le relais. Ce cycle périodique de période 3 perd ensuite sa stabilité et donne naissance à un cycle

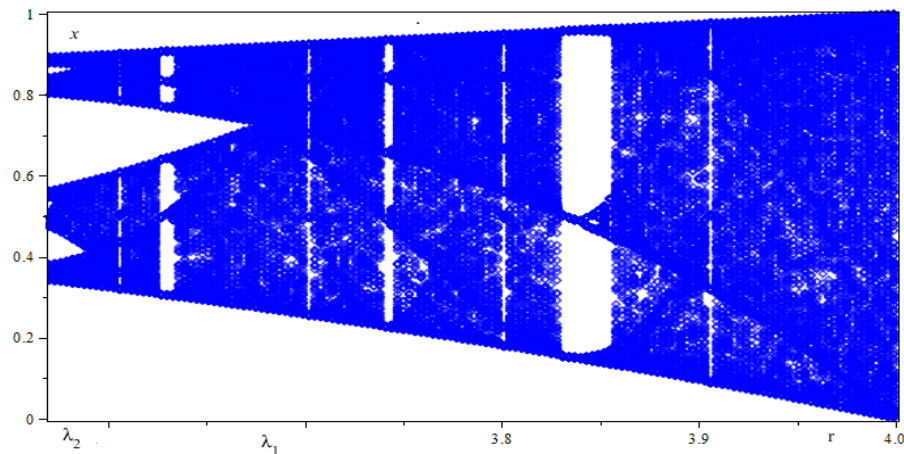


FIGURE 1.4.3 – Apparition de la suite $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ de droite à gauche.

asymptotiquement stable de période 6. Le doublement de période se poursuit jusqu'à $r \approx 3.8415\dots$ (correspond à r_∞ dans la première partie du diagramme), après nous entrons dans une région de dynamique compliquée. Des fenêtres de tous les périodes impairs apparaissent à gauche de la fenêtre de période 3 (voir Figure 1.4.4).

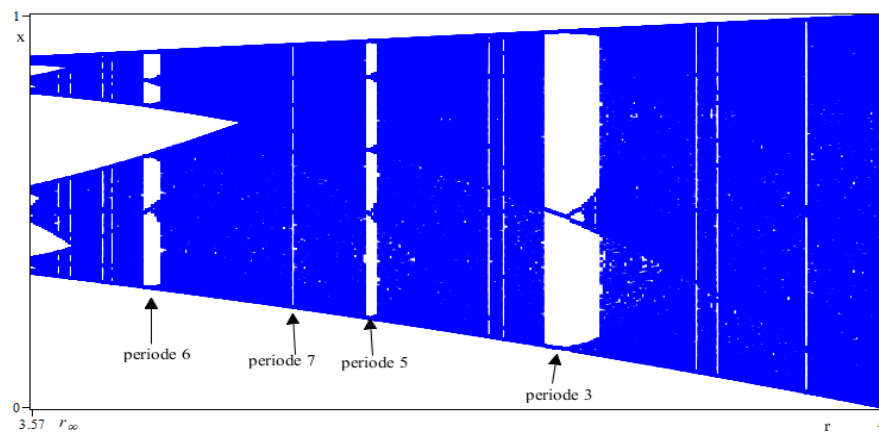


FIGURE 1.4.4 – L'apparition des périodes impaires.

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, les concepts de base des systèmes dynamiques discrets unidimensionnels sont introduits, en abordant les différentes singularités, leur stabilité et les prin-

cipales structures de bifurcation. Le concept de chaos est également présenté, en mettant en évidence les conditions et les mécanismes qui conduisent à son émergence.

Analyse dynamique du modèle de Weibull

2.1 Introduction

Depuis les travaux fondateurs de Verhulst [76] et de Pearl et Reed [57], la modélisation de la croissance des populations a connu diverses contributions visant à proposer d'autres formes fonctionnelles alternatives, $f(x)$, tout en préservant la forme sigmoïde et la propriété asymptotique de la courbe logistique de Verhulst. Plusieurs chercheurs ont apporté des avancées notables, explorant des modèles tels que l'équation de Richards en botanique [59], l'équation hyper-logistique de Blumberg [11], ainsi que la généralisation proposée par Turner et ses collaborateurs, nommée équation logistique générique [74, 75].

Le modèle de Weibull se distingue en tant que modèle présentant une courbe similaire à celle de la logistique. Il est défini par la fonction de Weibull

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ f(x) &= rx^{p-1}e^{-qx^p}, \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

avec r, p, q comme des paramètres positifs. Lorsque $p > 1$, la fonction de Weibull est une fonction unimodale et généralise plusieurs modèles exponentiels qui sont observés dans divers domaines scientifiques. Ces types de modèles exponentiels sont appliqués dans plusieurs domaines. En particulier, en radioactivité, la décroissance du nombre d'atomes

radioactifs suit une loi exponentielle due à la désintégration radioactive [28]. En biologie, la phase initiale du développement d'un organisme ou d'un organe est souvent décrite par une loi exponentielle, également connue sous le nom de phase exponentielle du développement. En médecine, l'élimination d'un médicament suit une loi exponentielle, comparable à l'émigration d'une population de molécules à travers une membrane, introduisant ainsi un autre type de modèle [54].

Le modèle de Weibull prend différentes formes en fonction de la valeur des paramètres. Lorsque $q = 0$ et $p > 1$, on obtient le modèle de Cushing [19]. Pour $p = 1$, il se réduit au modèle exponentiel. Quand $p > 2$, il se généralise au modèle Gamma [45]. Lorsque, $1 < p < 2$ donne lieu à une courbe compensatoire, évoquant le modèle γ -Ricker [61, 46].

En dehors des sciences biologiques et médicales, le modèle de Weibull trouve une application étendue en ingénierie. Il est utilisé pour analyser la durée de vie des systèmes mécatroniques [51], mesurer la durée de vie des composants électroniques [40], et estimer la quantité théorique d'énergie éolienne sur un site donné [15, 1]. Notre objectif dans cette étude est d'approfondir l'analyse de la dynamique de la fonction de Weibull définie par l'équation (2.1.1). Notre premier résultat est une liste de plusieurs propriétés fondamentales de la fonction de Weibull f .

2.2 Résultats préliminaires

Proposition 2.1. *Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction de Weibull définie par la formule (2.1.1), alors on a :*

- (i) *f est continue pour $p > 1$, et $f(x) > 0$ pour tout $x > 0$.*
- (ii) *Si $p > 1$, alors f est unimodale, avec un point critique unique $c = \sqrt[pq]{\frac{p-1}{pq}}$, où f atteint son maximum global. En conséquence, toutes les solutions de (2.1.1) sont bornées par $f(c)$.*
- (iii) *$f(x) > x, \forall x \in \mathbb{R}_+, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.*
- (iv) *Si $p = 1$, alors f est strictement décroissante, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = r$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.*
- (v) *La dérivée de Schwarz de f est négative pour tous les $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{c\}$ et $2 < p < 3$.*

Preuve. La preuve des propriétés (i-iv) est élémentaire et simple. Nous ne détaillerons que la propriété v.

En calculant la dérivée de Schwarz de la fonction f , nous obtenons

$$Sf(x) = \frac{-p(x)}{x^2 (qx^p - p + 1)^2}, \quad \forall x \neq c \quad (2.2.1)$$

où

$$p(x) = p^3 q^4 x^{4p+4} (p^2 - p^3) q^3 x^{3p} + (7p^3 - 12p^2 + 5p) q^2 x^{2p} + 2(-p^3 + 5p^2 - 5p + 1) q x^p + p^3 - 4p^2 + 5p - 2.$$

Étant donné que $p^3 - 4p^2 + 5p - 2 > 0$ pour tout $p > 0$, posons $u = qx^p$. Nous obtenons alors l'inégalité suivante :

$$p(u) > u (p^3 u^3 + 4(p^2 - p^3) u^2 + (7p^3 - 12p^2 + 5p) u - 2(p - 1)(p^2 - 4p + 1)).$$

Introduisons la fonction

$$q(u) = p^3 u^3 + 4(p^2 - p^3) u^2 + (7p^3 - 12p^2 + 5p) u - 2(p - 1)(p^2 - 4p + 1),$$

et montrons que $q(u) > 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}_+$. Pour ce faire, étudions les variations de q .

La dérivée de q par rapport à u est donnée par

$$q'(u) = 3p^3 u^2 + 8(4p^2 - 4)u + 7p^3 - 12p^2 + 5p.$$

Calculons le discriminant :

$$\Delta = 4p^4(-5p^2 + 4p + 1) < 0, \quad \forall p > 1.$$

Ainsi,

$$q'(u) > 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}_+ \text{ et } p > 1.$$

De plus,

$$q(0) = -2p^3 + 10p^2 - 10p + 2 > 0, \quad \forall 2 < p \leq 3.$$

Finalement, on peut affirmer que $p(u) > 0$, ce qui implique que $Sf(x) < 0$ pour tout $2 < p \leq 3$. ■

2.3 Point fixe de la fonction de Weibull

Dans cette section, nous étudions les points fixes positifs de la fonction de Weibull définie par l'équation (2.1.1).

Nous ne nous intéressons qu'aux valeurs réelles avec $x \in \mathbb{R}_+$ et les paramètres r, p, q sous les conditions suivantes :

$$\Omega_0 = \{(r, p, q) \in \mathbb{R}^3 : r, p, q > 0 \text{ et } p \geq 1\}. \quad (2.3.1)$$

Les points fixes de f (c'est-à-dire les racines de l'équation $f(x) = x$) satisfont $x = 0$ ou $rx^{p-2}e^{-qx^p} - 1 = 0$.

À $x = 0$ (le point fixe trivial), la dérivée de la fonction de Weibull est discontinue et vérifie :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \infty, & \text{si } 1 < p < 2, \\ \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = r, & \text{si } p = 2, \\ \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0, & \text{si } p > 2. \end{cases} \quad (2.3.2)$$

Il est clair que $x = 0$ est toujours un point fixe de f . Dans la proposition suivante, nous étudions les points fixes non triviaux. L'existence et le nombre de points fixes dépendent toujours du paramètre p . Les points fixes sont implicitement exprimés en termes de la fonction W de Lambert.

Rappelons que la fonction W de Lambert est définie comme l'inverse multivalué de la fonction $w \rightarrow we^w$. Ainsi, nous avons pour tout nombre complexe z et w :

$$z = we^w, \text{ c'est-à-dire, } w = W(z).$$

Pour $x, y \in \mathbb{R}$, l'équation $ye^y = x$ ne peut être résolue en y que si $x > -\frac{1}{e}$. Précisément, pour $x \geq 0$, on a une solution unique $y = W_0(x)$, et pour $-\frac{1}{e} < x < 0$, on a deux solutions $y = W_0(x)$ et $y = W_{-1}(x)$ (voir figure 2.3.1).

La fonction W de Lambert est associée à la fonction logarithmique et intervient dans de nombreux modèles en sciences naturelles, y compris une diversité inattendue de problèmes en physique, en biologie, en écologie et en sciences de la vie [41]. Pour plus de détails et d'applications sur la fonction W de Lambert, voir par exemple, [16], [22], [69] et les références qui s'y rapportent.

Dans ce qui suit, nous utiliserons les expressions suivantes $X(r, p, q)$ ($r, p, q > 0$) pour désigner l'expression : $X(r, p, q) = \frac{pq}{2-p} r^{\frac{p}{2-p}}$, x_f le plus petit point fixe positif et x_s le plus grand point fixe positif.

Proposition 2.2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction de Weibull, définie par l'équation (2.1.1) dans l'espace des paramètres Ω_0 .

1. Si $1 < p < 2$, alors f admet un point fixe non nul, donné par :

$$x_f = \sqrt[p]{\frac{2-p}{pq} W_0(X(r, p, q))}. \quad (2.3.3)$$

2. Si $p > 2$, alors le nombre de points fixes de f dépend des valeurs des paramètres r .

On a précisément :

(i) Si $X(r, p, q) > -\frac{1}{e}$, alors f admet deux points fixes positifs donnés par

$$x_f = \sqrt[p]{\frac{2-p}{pq} W_{-1}(X(r, p, q))}, \quad x_s = \sqrt[p]{\frac{2-p}{pq} W_0(X(r, p, q))}.$$

(ii) Si $X(r, p, q) = -\frac{1}{e}$, alors f admet un point fixe positif donné par

$$x_f = \sqrt[p]{\frac{2-p}{pq} W_{-1}(X(r, p, q))}.$$

(iii) Si $X(r, p, q) < -\frac{1}{e}$, alors f n'admet aucun point fixe positif.

Preuve. Pour $x > 0$, l'équation du point fixe $f(x) = x$ correspond à :

$$rx^{p-1}e^{-qx^p} = x, \quad (2.3.4)$$

ce qui nous permet d'obtenir

$$xe^{\frac{q}{2-p}x^p} = r^{\frac{1}{2-p}}. \quad (2.3.5)$$

En élevant les deux côtés à la puissance p et en multipliant par $\frac{pq}{2-p}$, nous obtenons l'équation suivante :

$$ye^y = z,$$

où $y = \frac{pq}{2-p}x^p$ et $z = \frac{pq}{2-p}r^{\frac{p}{2-p}}$. Comme la solution de cette dernière équation est $y = W(z) = W\left(\frac{pq}{2-p}r^{\frac{p}{2-p}}\right)$, nous obtenons finalement :

$$x = \sqrt[p]{\frac{2-p}{pq} W\left(\frac{pq}{2-p}r^{\frac{p}{2-p}}\right)}. \quad (2.3.6)$$

- Si $1 < p < 2$, nous avons $X(r, p, q) > 0$, alors l'équation possède une seule solution

$$x_f = \sqrt[p]{\frac{2-p}{pq} W_0(X(r, p, q))}. \quad (2.3.7)$$

- Si $p > 2$, nous avons $X(r, p, q) < 0$, dans ce cas, nous distinguons trois cas.

Le premier cas, si $X(r, p, q) > -\frac{1}{e}$, alors l'équation admet deux solutions

$$x_f = \sqrt[p]{\frac{2-p}{pq} W_{-1}(X(r, p, q))} \text{ et } x_s = \sqrt[p]{\frac{2-p}{pq} W_0(X(r, p, q))}. \quad (2.3.8)$$

Le deuxième cas, si $X(r, p, q) = -\frac{1}{e}$, l'équation admet une seule solution

$$x_f = \sqrt[p]{\frac{2-p}{pq} W_{-1}(X(r, p, q))}.$$

Dans le troisième cas, si $X(r, p, q) < -\frac{1}{e}$, l'équation n'admet pas de solution. ■

Corollaire 2.1. *Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ la fonction de Weibull, définie par l'équation (2.1.1). Alors, l'ensemble*

$$S_0 = \left\{ (r, p, q) \in \Omega_0 : X(r, p, q) = -\frac{1}{e}, p > 2 \right\} \quad (2.3.9)$$

constitue une surface de bifurcation fold par rapport au point fixe $x = \sqrt[p]{\frac{p-1}{pq}}$.

Preuve. En général, la bifurcation fold associée à un cycle d'ordre n est déterminée par un point $x \in [0, +\infty[$ d'un cycle d'ordre n de f , satisfaisant les équations suivantes :

$$\begin{cases} f^n(x, r, p, q) = x, \\ \frac{\partial f^n(x, r, p, q)}{\partial x} = 1. \end{cases} \quad (2.3.10)$$

Il existe donc une solution $\Phi(n)$ telle que la bifurcation de fold associée à un cycle d'ordre n soit donnée par

$$r = \phi_n(x, p, q). \quad (2.3.11)$$

En particulier, pour $n = 1$, l'équation (2.3.11) définit une surface S_0 dans l'espace des paramètres Ω_0 , qui correspond à la bifurcation fold de f pour les points fixes non nuls, définie par

$$\begin{cases} f(x; r, p, q) = x, \\ \frac{\partial f(x, r, p, q)}{\partial x} = 1. \end{cases} \quad (2.3.12)$$

La bifurcation fold obtenue est

$$r = \phi(x; p, q) = \sqrt[p]{\left(\frac{p-2}{pq}\right)^{2-p}} e^{p-2}, \quad (2.3.13)$$

associée au point fixe

$$x = \sqrt[p]{\frac{p-2}{pq}}. \quad (2.3.14)$$

D'autre part, on sait que la fonction W de Lambert admet une valeur double lorsque $x = -\frac{1}{e}$. De plus, selon Proposition 2.2, il s'ensuit que l'apparition des deux points nuls x_f et x_s est définie par :

$$X(r, p, q) = -\frac{1}{e}.$$

En tenant compte de la définition de Ω_0 , le résultat de l'équation a un sens uniquement pour $p > 2$. Dans ce cas, on peut écrire $W(X(r, p, q)) = W(-\frac{1}{e}) = -1$. En tenant compte du résultat de la Proposition 2.2, le point fixe non hyperbolique de cette bifurcation est donné par

$$x = \sqrt[p]{\frac{p-2}{pq}}.$$

Par conséquent, à partir de l'équation (2.3.13), on peut conclure que $W(-\frac{1}{e}) = -1$ définit une bifurcation fold relative au point fixe $x = \sqrt[p]{\frac{p-2}{pq}}$. ■

Remarque 2.1. Lorsque $p > 2$, la comparaison entre $X(r, p, q)$ et r est équivalente à la comparaison entre r et $\Phi(x; p, q)$, où $\Phi(x; p, q) = \sqrt[p]{\left(\frac{p-2}{pq}\right)^{2-p}} e^{p-2}$.

Une analyse graphique de la fonction $f_1(x) = rx^{p-2}e^{-qx^p}$ montre que la fonction de Weibull a un unique point fixe positif pour $r = \Phi(x; p, q)$, deux points fixes positifs pour $r > \Phi(x; p, q)$, et aucun point fixe positif lorsque $r < \Phi(x; p, q)$.

En effet, la fonction f_1 est dérivable et possède un unique point critique, $c = \sqrt[p]{\frac{p-2}{pq}}$. Elle est strictement croissante sur $[0, c[$ et strictement décroissante sur $]c, +\infty[$.

De plus, lorsque x tend vers 0 ou $+\infty$, f_1 tend vers 0. Ainsi, le point critique c représente un maximum pour f_1 .

La condition $f_1(c) < 1$ est équivalente à $r < \phi(x; p, q)$ et implique que f_1 ne peut jamais atteindre la valeur 1. Par conséquent, $x = 0$ est le seul point fixe de f .

Si $f_1(c) = 1$, alors f_1 atteint la valeur 1 une seule fois, indiquant que la fonction de Weibull

a un unique point fixe positif.

Pour $r > \phi(x; p, q)$, la condition $f_1(c) > 1$ implique que f_1 atteint la valeur 1 deux fois, démontrant ainsi que la fonction de Weibull possède deux points fixes positifs.

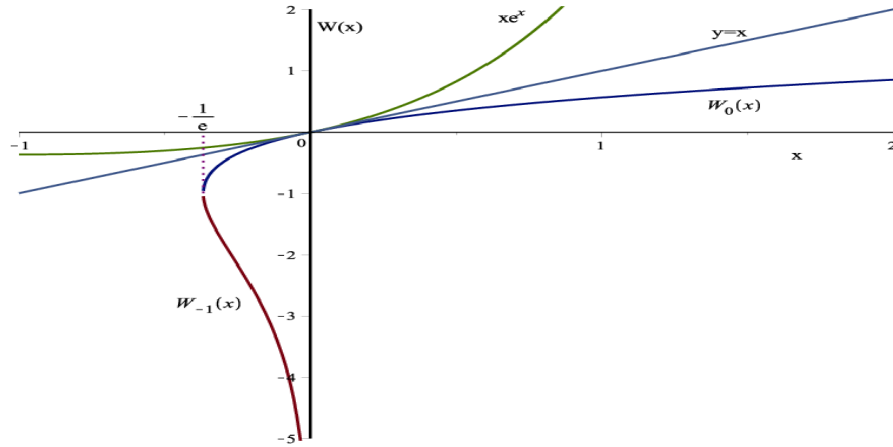


FIGURE 2.3.1 – Le graphe de la fonction W de Lambert est composé de deux branches : la branche principale W_0 (en bleu) et la branche secondaire W_{-1} (en rouge).

2.4 Stabilité des points fixes

Proposition 2.3. Soit $p \in]1, 2[$. La fonction de Weibull possède alors un point fixe positif :

$$x_f = \sqrt[p]{\frac{2-p}{pq} W_0(X(r, p, q))}.$$

Ce point fixe est globalement asymptotiquement stable si et seulement si $r < r^*$, avec

$$r^* = e^{\sqrt[p]{q^{p-2}}}.$$

Preuve. Pour $p \in]1, 2[$, d'après la Proposition 2.2, f possède un unique point fixe positif $x_f = \sqrt[p]{\frac{2-p}{pq} W_0(X(r, p, q))}$. Rappelons que l'équation du point fixe à un point fixe positif x_f satisfait la condition suivante :

$$rx^{p-2}e^{-qx^p} = 1 \Leftrightarrow rx^{p-2} = e^{qx^p}. \quad (2.4.1)$$

D'autre part, considérons l'expression de la première dérivée de la fonction Weibull :

$$f'(x) = rx^{p-2}e^{-qx^p} (p - 1 - pqx^p). \quad (2.4.2)$$

D'après (2.4.1) et (2.4.2), on obtient

$$f'(x) = p - 1 - pqx^p,$$

et donc $f''(x) = -p^2qx^{p-1} < 0$ pour tout $x > 0$. Grâce à la monotonie de f' , nous constatons que $f'(x_f) < f'(c) = 0$. Ce qui montre que $f'(x_f) < 1$.

Pour montrer que x_f est stable, il suffit de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} f(x_f) = x_f, \\ f'(x_f) > -1. \end{cases} \quad (2.4.3)$$

Cela est équivalent à

$$\begin{cases} r = x_f^{2-p}e^{qx_f^p}, \\ x_f < \sqrt[p]{\frac{1}{q}}. \end{cases} \quad (2.4.4)$$

Comme la fonction $\Psi(x) = x^{2-p}e^{qx^p}$ est croissante pour tout $p \in]1, 2[$, alors

$\Psi(x_f) < \Psi(\sqrt[p]{\frac{1}{q}})$, c'est-à-dire $r < \Psi(\sqrt[p]{\frac{1}{q}}) = r^*$ (voir Figure 2.4.2).

Pour prouver que x_f est attractif, nous utilisons le Théorème 1.4 et nous montrons que l'équation $f^2(x) = x$ n'a pas de solution positive autre que x_f .

On a

$$f^2(x) = x \iff rf(x)^{p-1} = xe^{qf(x)^p} \iff f(x) = \left(\frac{xe^{qf(x)^p}}{r} \right)^{\frac{1}{p-1}} = g(x) \quad (2.4.5)$$

Pour cela il suffit de montrer que g est croissante et convexe sur $[0, +\infty[$. Supposons que cette affirmation soit vraie ; alors, puisque $f'(0+) = \infty$ et $g'(0) = 0$, l'équation $f(x) = g(x)$ a au moins une solution positive. Notons x_{int} le premier point d'intersection. Remarquons que $g'(x_{int}) > f'(x_{int})$, g' est croissante et positive sur $]x_{int}, +\infty[$, et f' est décroissante sur $]x_{int}, c[$ et négative dans $]c, +\infty[$. Ainsi,

$$g'(x) > f'(x), \forall x > x_{int},$$

ce qui garantit que des intersections supplémentaires ne sont pas possibles.

Montrons maintenant que g est croissante : en effet, on a

$$g'(x) = \left(\frac{xqf(x)^{p-1}pf'(x) + 1}{r(p-1)x} \right) \left(\frac{xe^{qf(x)^p}}{r} \right)^{\frac{1}{p-1}} \quad (2.4.6)$$

Pour prouver que $g'(x) > 0$ pour tout $x > 0$, il suffit de prouver que $pqx f^{p-1}(x)f'(x) > 0$ pour tout $x > 0$. En effet, on a

$$pqx f^{p-1}(x)f'(x) = pq \left(rx^{p-1}e^{-qx^p} \right)^{p-1} rx^{p-1}e^{-qx^p} (qx^p p + p - 1) > 0, \forall p \in]1, 2[.$$

g est convexe : puisque

$$g(x) = \left(\frac{1}{r} \right)^{\frac{1}{p-1}} \left(xe^{qf(x)^p} \right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Il suffit de prouver que $g_1''(x) > 0$ pour tout $x > 0$, où $g_1(x) = \left(xe^{qf(x)^p} \right)^{\frac{1}{p-1}}$. Après quelques calculs, on obtient l'expression suivante :

$$g_1''(x) = \frac{\left(xe^{q(rx^{p-1}e^{-x^p})^p} \right)^{\frac{1}{p-1}}}{x^2(p-1)^2} L(x). \quad (2.4.7)$$

où

$$L(x) = L_1(x) \left((rx^{p-1}e^{-x^p})^p \right)^2 + L_2(x) (rx^{p-1}e^{-x^p})^p + 2 - p, \quad (2.4.8)$$

avec

$$L_1(x) = p^2 q^2 (px^p - p + 1)^2, \quad (2.4.9)$$

$$L_2(x) = q \left(p^4 (p-1)x^2 + (2p^4 + 3p^3 - 3p)x + p^4 - 3p^3 + 2p^2 + 3p - 3 \right) \quad (2.4.10)$$

Il est facile de vérifier que $L_i(x) > 0$ pour tout $p \in]1, 2[$, $x > 0$, et $i = 1, 2$. ■

Exemple 2.1. Dans cet exemple, prenons les valeurs suivantes des paramètres : $r = 2$, $q = 0.5$, $p = 1.5$. Le modèle admet un seul point fixe positif, $x_p = 1.155365161$. Dans ce cas, on a $r^* = 1.259921050e > r = 2$. Ainsi, le seul point fixe positif est globalement asymptotiquement stable, comme illustré dans la figure 2.4.1, avec une condition initiale de $x_0 = 0.5$. Le diagramme de cobweb correspondant est illustré dans la figure 2.4.2.

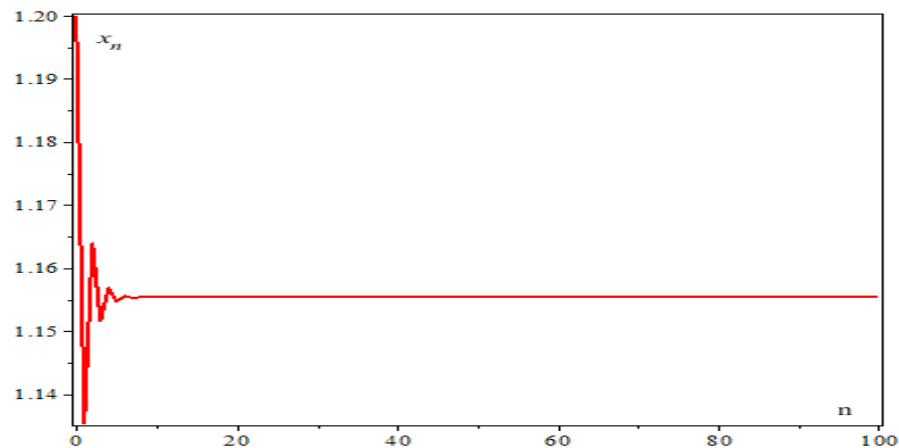


FIGURE 2.4.1 – Le graphe de f lorsque $r = 2$, $q = 0.5$ et $p = 1.5$ montre que l'orbite de x_0 converge vers le seul point fixe positif.

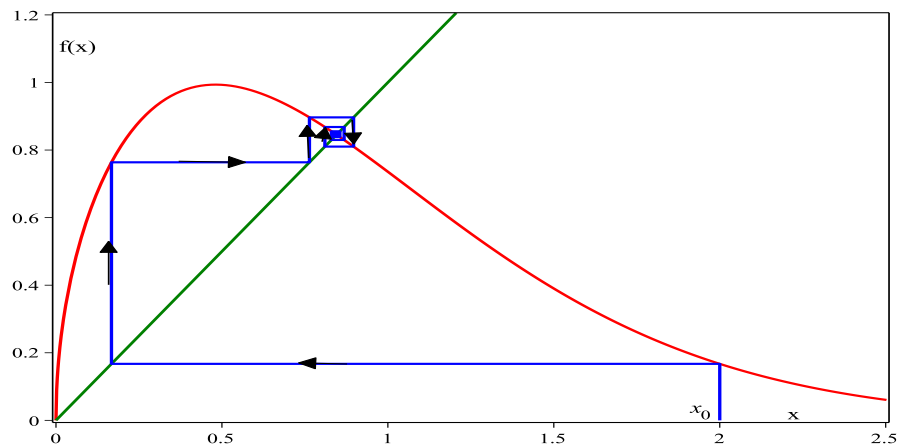


FIGURE 2.4.2 – Le graphe de f lorsque $r = 2$, $q = 0.5$ et $p = 1.5$ montre que pour tout point initial dans \mathbb{R}_+ , on se rapproche du point fixe positif. Cela illustre le résultat obtenu dans la Proposition 2.3.

Proposition 2.4. *Si $p > 2$, alors le nombre et la stabilité des points fixes de f dépendent des valeurs de $X(r, p, q)$. On a précisément :*

1. *Si $X(r, p, q) < -\frac{1}{e}$, alors f admet un seul point fixe $x = 0$ qui représente un attracteur global, c'est-à-dire,*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

2. Si $X(r, p, q) = -\frac{1}{e}$, alors f admet exactement deux points fixes, le point fixe trivial $x = 0$ et $x_f = \sqrt[p]{\frac{2-p}{pq} W_{-1}(X(r, p, q))}$. Le point 0 est stable avec un bassin d'attraction $[0, x_f[$, et vérifie que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}_+ \setminus [x_f, x_f^*],$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = x_f, \forall x \in [x_f, x_f^*].$$

3. Si $X(r, p, q) > -\frac{1}{e}$, alors f a trois points fixes : $x = 0$, x_s sont asymptotiquement stables, et x_f est instable. De plus, le bassin d'attraction de x_s est $]x_f, x_f^*]$, et le bassin d'attraction de 0 est $]0, x_f[$.

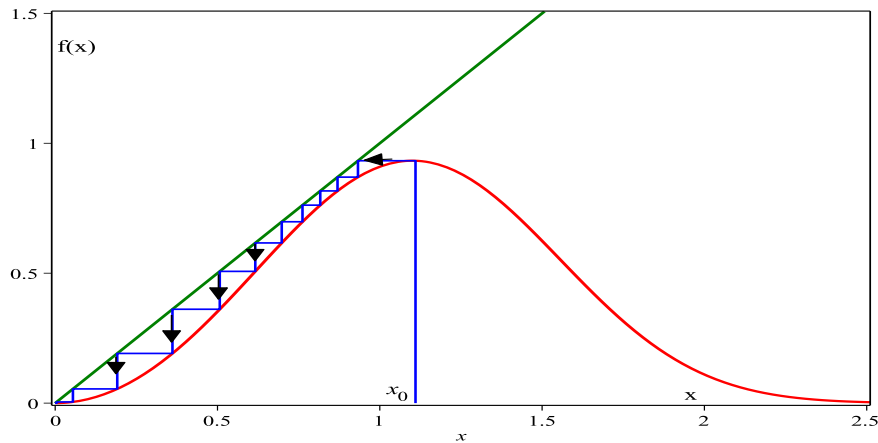


FIGURE 2.4.3 – Le graphe de f pour $p = 3$, $q = 0.5$, et $r = 1.58$ représente f avec un unique point fixe, où toutes les orbites convergent vers zéro.

Preuve. Soit $p > 2$ et $X(r, p, q) < -\frac{1}{e}$. D'après la Proposition 2.2, la fonction Weibull f possède un unique point fixe, $x = 0$. Selon l'équation (2.3.2), le point fixe trivial est stable.

De plus, nous avons $f(x) < x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ (voir Figure 2.4.3).

Ainsi, la suite $f^n(x)$ est décroissante et minorée par 0. Puisque f est continue, la suite $f^n(x)$ converge vers l'unique point fixe $x = 0$. Par conséquent, on conclut que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+. \quad (2.4.11)$$

Si $p > 2$ et $X(r, p, q) = -\frac{1}{e}$, d'après la Proposition 2.2, f possède deux points fixes, $x = 0$ et x_f . D'après l'unimodalité et la monotonie de la fonction f , nous déduisons l'inégalité suivante :

$0 < x_f < c < x_f^*$, $f'(x) > 0$, $\forall x \in [0, x_f[$ et $f'(x) < 0$, $\forall x \in [x_f^*, +\infty[$ (voir Figure 2.4.4). Cela signifie que $f(x) > x_f$ pour tout $x \in [x_f, x_f^*]$. Ainsi, $f^n(x)$ est une suite décroissante qui converge vers l'attracteur $x = 0$ pour tout $x \in [0, +\infty[\setminus [x_f, x_f^*]$.

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \setminus [x_f, x_f^*]. \quad (2.4.12)$$

Soit $x \in [x_f, x_f^*]$, d'après la monotonie et l'unimodalité de f , nous avons :

$$x_f < c < x_f^*, f'(x) > 0, \quad \forall x \in [x_f, c[\text{ et } f'(x) < 0, \quad \forall x \in [c, x_f^*[$$

De plus,

$$x_f < f(x) < f(c), \quad \forall x \in [x_f, x_f^*]. \quad (2.4.13)$$

Cela implique que x_f est le seul point fixe dans l'intervalle $[x_f, x_f^*]$.

Comme $f(x) < x$, pour tout $x \in [x_f, x_f^*]$, nous en déduisons que $f^n(x)$ est une suite décroissante et minorée par x_f . La continuité de la fonction f implique que la suite $f^n(x)$ converge vers le seul point fixe x_f .

Ainsi, nous concluons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = x_f, \quad \forall x \in [x_f, x_f^*]. \quad (2.4.14)$$

Rappelons que l'équation du point fixe non trivial $f(x) = x$ correspond à :

$$rx^{p-1}e^{-qx^p} = x.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \setminus [x_f, x_f^*]. \quad (2.4.15)$$

Soit $x \in [x_f, x_f^*]$, d'après la monotonie et l'unimodalité de f , nous avons :

$$x_f < c < x_f^*, f'(x) > 0, \quad \forall x \in [x_f, c[\text{ et } f'(x) < 0, \quad \forall x \in [c, x_f^*[$$

De plus,

$$x_f < f(x) < f(c), \quad \forall x \in [x_f, x_f^*]. \quad (2.4.16)$$

Cela implique que x_f est le seul point fixe dans l'intervalle $[x_f, x_f^*]$.

Comme $f(x) < x$ pour tout $x \in [x_f, x_f^*]$, nous en déduisons que $f^n(x)$ est une suite décroissante et minorée par x_f . La continuité de la fonction f implique que la suite $f^n(x)$ converge vers le seul point fixe x_f .

Ainsi, nous concluons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = x_f, \quad \forall x \in [x_f, x_f^*]. \quad (2.4.17)$$

Nous rappelons que l'équation du point fixe non trivial $f(x) = x$ correspond à :

$$rx^{p-1}e^{-qx^p} = x.$$

Pour $x > 0$, l'équation du point fixe devient $rx^{p-2}e^{-qx^p} = 1$. Posons $h(x) = rx^{p-2}$ et $g(x) = e^{qx^p}$. L'équation a un unique point fixe positif si et seulement si le point fixe satisfait le système suivant :

$$\begin{cases} g(x) = h(x), \\ g'(x) = h'(x). \end{cases} \quad (2.4.18)$$

Cela est équivalent à

$$\begin{cases} rx^{p-2} = e^{qx^p}, \\ r(p-2)x^{p-3} = pqx^{p-1}e^{qx^p}. \end{cases} \quad (2.4.19)$$

La résolution du système (2.4.19) donne

$$\begin{cases} x^* = \sqrt[p]{\frac{p-2}{pq}}, \\ r_1 = \sqrt[p]{\left(\frac{p-2}{pq}\right)^{2-p}} e^{p-2}. \end{cases} \quad (2.4.20)$$

Ainsi, nous concluons l'inégalité suivante :

$$f'(x_f) = p - 1 - pqx_f^p > p - 1 - pqx^{*p} = 1 > p - 1 - pqx_s^p = f'(x_s). \quad (2.4.21)$$

D'après l'équation (2.4.19), nous obtenons

$$r < r^* = e^{\sqrt[p]{q^{p-2}}}. \quad (2.4.22)$$

D'où, le premier point fixe x_f est instable et le deuxième point fixe x_s est stable si $f(x_s) > -1$. Selon l'équation (2.4.22), cette dernière condition est vérifiée (voir Figure 2.4.5). ■

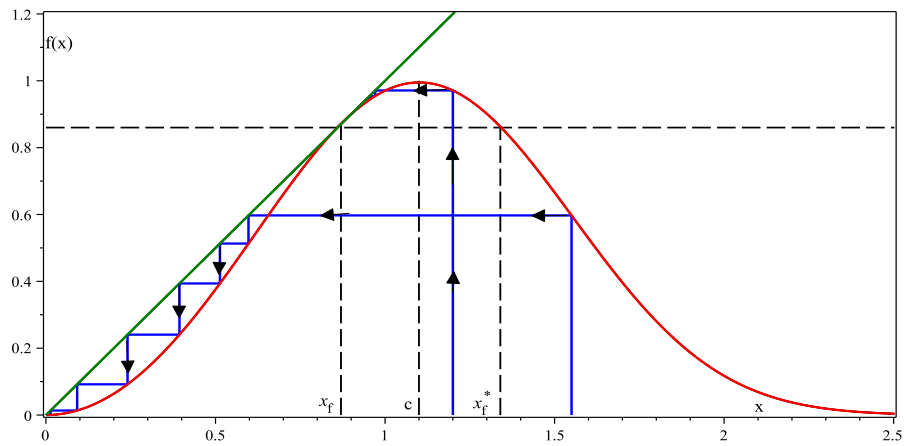


FIGURE 2.4.4 – Le graphe de f lorsque $p = 3$, $q = 0.5$, et $r = 1.6$ correspond à f avec un point fixe; toutes les orbites dans $\mathbb{R}_+ \setminus [x_f, x_f^*]$ convergent vers le point fixe zéro, et toutes les orbites dans l'intervalle $[x_f, x_f^*]$ convergent vers le point fixe x_f .

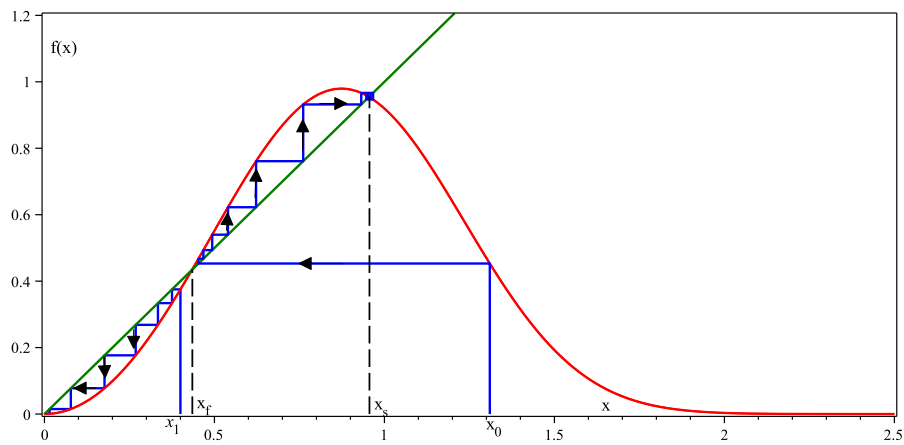


FIGURE 2.4.5 – Le graphe de f lorsque $p = 3$, $q = 0.5$, et $r = 3.3$ illustre le résultat obtenu dans la Proposition 2.4 lorsque f admet trois points fixes.

Exemple 2.2. On prend dans cet exemple les valeurs suivantes des paramètres :

$r = 1.58, q = 0.5, p = 3$. Le modèle admet un seul point fixe, $x_p = 0$, dans ce cas où $X(r, p, q) = -0.3802944594 < -\frac{1}{e}$. Ainsi, le point fixe zéro est globalement asymptotiquement stable, comme illustré dans la figure 2.4.7, avec une condition initiale de $x_0 = 0.2$.

Remarque 2.2. Dans le deuxième cas où $X(r, p, q) = -\frac{1}{e}$, cela correspond à la région de semi-stabilité. Si le taux de croissance de la population par habitant est strictement

inférieur à un pour toutes les densités, sauf pour une densité de population, la dynamique est semi-stable [70].

Corollaire 2.2. *Si $p = 1$, alors la fonction de Weibull admet un seul point fixe positif donné par $W(qr)$, qui est stable pour r, q dans $\Lambda_{r,q}$ avec*

$$\Lambda_{r,q} = \{r, q \in \mathbb{R}_+ : W(qr) > \ln(r) + \ln(q)\}. \quad (2.4.23)$$

Si $p = 2$, alors l'existence et la stabilité des points fixes de la fonction de Weibull dépendent du paramètre r .

1. *pour $0 < r < 1$, le point fixe trivial $x = 0$ est stable, tandis que si $r > 1$, il est instable.*
2. *Pour $1 < r < e$, le second point fixe $x = \sqrt{\frac{\log(r)}{q}}$, qui correspond au cas $r > 1$, est stable, et si $r > e$, il est instable.*

Preuve. Soit $p = 1$ et considérons l'équation du point fixe $f(x) = x$, ce qui signifie que $re^{-qx} = x$, ce qui est équivalent à $qxe^{qx} = qr$. Donc, $x = W(qr)$. Montrons maintenant la stabilité du point fixe. Nous savons que la dérivée de f au point fixe est donnée par $f'(W(qr)) = -rqe^{-W(qr)}$. Il est clair que $f'(-W(qr)) < 1$. Pour démontrer la stabilité du point fixe, nous devons simplement vérifier que $f'(-W(qr)) > -1$. Supposons que $-rqe^{-W(qr)} > -1$, c'est-à-dire,

$$W(qr) > \ln(r) + \ln(q) \text{ (voir Figure 2.4.6)}.$$

Pour $p = 2$, nous avons

$$f(x) = x \text{ est équivalent à } \begin{cases} x = 0, \\ \text{ou} \\ x = \sqrt{\frac{\log(r)}{q}} \text{ pour } r \geq 1. \end{cases}$$

Pour prouver la stabilité du point fixe, il suffit d'étudier la première dérivée de f aux points fixes. ■

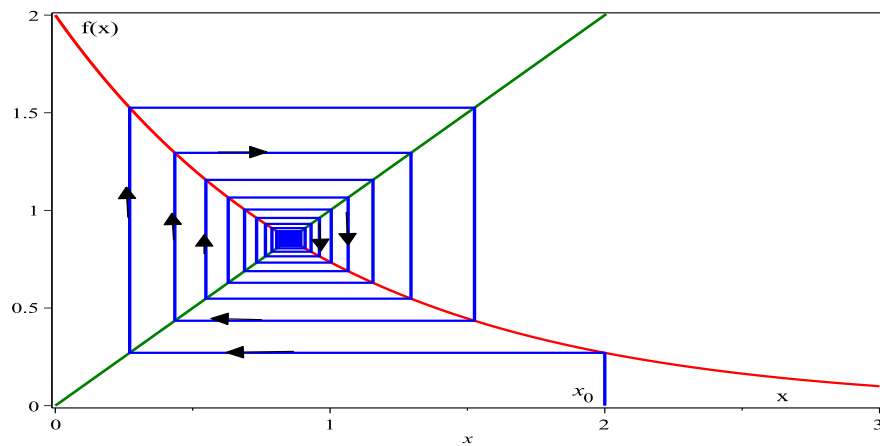


FIGURE 2.4.6 – Le graphe de f lorsque $p = 1$, $q = 1$, et $r = 2$ montre que le seul point fixe est asymptotiquement stable.

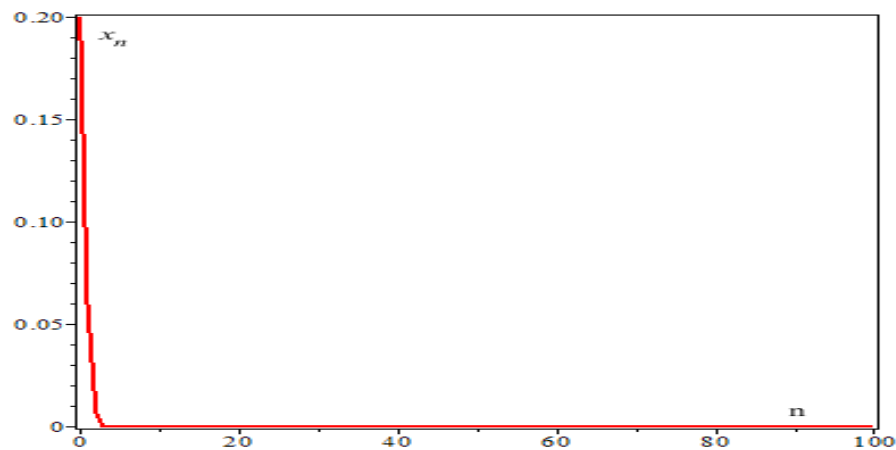


FIGURE 2.4.7 – La stabilité globale du point fixe trivial

2.5 Fonction d'Allee

En 1996, Gyllenberg, Osipov et Söderbacka [33] ont étudié une catégorie générale de fonctions qu'ils ont nommées fonctions ou cartes d'Allee. Il s'agit de fonctions unimodales pour lesquelles l'extinction est inévitable à des densités trop élevées ou trop faibles. Les auteurs ont observé que, sous certaines conditions, les fonctions d'Allee présentent une dynamique chaotique sur un ensemble répulsif. Schreiber a exploré une classe particulière de fonctions d'Allee caractérisée par une dérivée de Schwarz négative. Il a démontré que les modèles logistiques, de Ricker et de Beverton-Holt appartiennent à cette classe [68]. Dans

cette section, nous établissons les conditions pour que la fonction de Weibull appartienne à la classe des fonctions d'Allee définies dans les références [61] et [65]. Nous commençons par définir les fonctions d'Allee.

Définition 2.1. [68] Une fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction d'Allee si elle admet trois points fixes : $x = 0$, x_1 , et x_2 , où $x = 0$ et x_2 sont asymptotiquement stables mais x_1 est instable et satisfait les conditions suivantes :

- (i) $0 < x_1 < c < x_2 < +\infty$, où c est le seul point critique de f .
- (ii) Pour tout $x \in [0, x_1[\cup]x_2, +\infty[$, nous avons $f(x) < x$.
- (iii) Pour tout $x \in]x_1, x_2[$, nous avons $f(x) > x$.

Remarque 2.3. En tenant compte de la Proposition 2.2 et de la Remarque 2.1, nous pouvons affirmer que la fonction de Weibull est une fonction d'Allee lorsque $p > 2$ et $\phi(x, p, q) < r < r^*$. Ensuite, nous définissons

$$\Gamma_0 = \{r, p, q, \in \mathbb{R}_+ : p > 2 \text{ et } \phi(x, p, q) < r < r^*\}.$$

Cet ensemble est celui sur lequel f présente une fonction d'Allee.

2.5.1 Région chaotique

La région chaotique se présente lorsque la taille maximale d'une population en croissance est inférieure à la densité critique, c'est-à-dire, $f(c) < x_f^*$. La population peut persister indéfiniment avec des densités bornées loin de zéro, à condition que la taille initiale de la population soit intermédiaire [70].

Définition 2.2. [68] Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction de Weibull dans l'espace des paramètres Γ_0 . La région chaotique, désignée par R_{chao} , est définie comme suit :

$$R_{chao} = \{(r, p, q) \in \Gamma_0 : f^2(c) > x_f\};$$

où x_f est le plus petit point fixe et $c = \sqrt[p]{\frac{p-1}{pq}}$ est le point critique de f .

Dans cette région chaotique de l'espace des paramètres, l'évolution de la taille de la population est a priori imprévisible.

La région chaotique est délimitée ci-dessous par la valeur d'accumulation des courbes de bifurcation flip du cycle d'ordre 2^n et bornée en dessus par la courbe de semi-stabilité chaotique.

Dans la région chaotique, les itérations de la fonction de Weibull $f(x)$ engendrent une diversité d'orbites, présentant des motifs de comportement chaotique (voir figure 2.5.2).

Exemple 2.3. On prend dans cet exemple les valeurs suivantes des paramètres : $r = 3.5$, $q = 1$, $p = 3$. Le modèle admet trois points fixes qui sont $x = 0$, $x_1 = 0.2929915887$ et $x_s = 1.106221899$. Dans ce cas, on a $c = 0.8735804647$ et $f^2(c) = 0.4992972942 > x_1$. Pour une condition initiale $x_0 = 1.5 \in [x_1, f(c)]$, l'orbite de x_0 présente une sensibilité aux conditions initiales comme le montre la figure 2.5.1.

2.5.2 Semi-stabilité chaotique

La semi-stabilité chaotique est définie lorsque la condition suivante est vérifiée : $f^2(c) = x_f$. Cela signifie que la croissance maximale de la population est égale à la densité critique, comme expliqué en détail dans la référence [68]. Les paramètres satisfaisant cette condition définissent la courbe de semi-stabilité chaotique dans le plan des paramètres (ϕ, p, q) . Cette courbe représente une bifurcation marquant la transition entre la région chaotique et la région d'extinction essentielle, comme l'indiquent les références [70, 62]. Dans [68], il est montré, pour des modèles similaires, que l'intervalle $[x_f, f(c)]$ est invariant, formant un domaine de dynamique chaotique dont le complément réside dans le bassin d'attraction de l'origine. Sur la courbe de semi-stabilité chaotique, le comportement dynamique des fonctions d'Allee f , restreintes à $[x_f, f(c)]$, est chaotique.

Exemple 2.4. Pour les valeurs des paramètres $r = 3.5, q = 1, p = 3$, le modèle admet trois points fixes : $x = 0, x_f = 0.2929915887$, et $x_s = 1.106221899$. Dans ce cas, on a $c = 0.9735804647$, $f(c) = 1.5$, et $f^2(c) = 0.2929915887$. Pour une condition initiale $x_0 = 0.5$ appartenant à $[x_f, f(c)]$, le comportement de l'orbite de x_0 est imprévisible, comme illustré dans la figure 2.5.3.

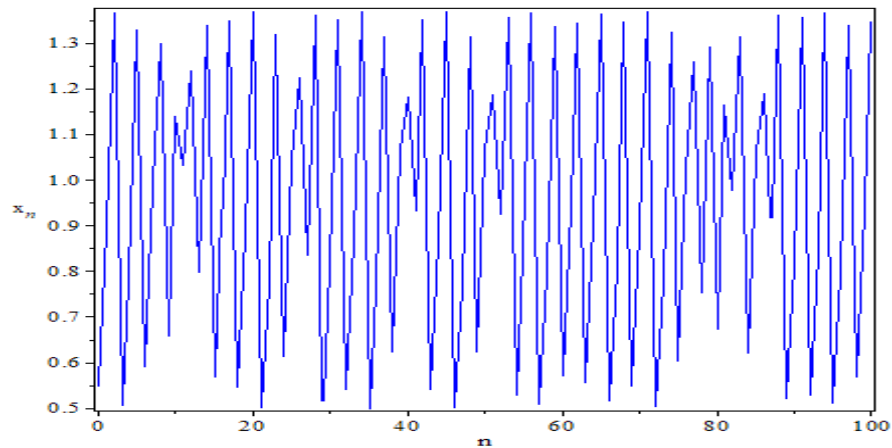


FIGURE 2.5.1 – La sensibilité aux conditions initiales des orbites de f lorsque $p = 3$, $q = 1$, et $r = 3.5$ et $x_0 = 0.55$

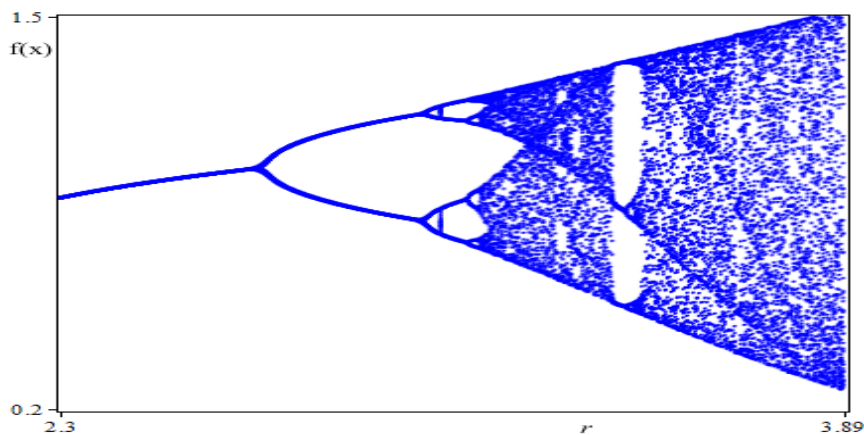


FIGURE 2.5.2 – L'apparition d'orbites de différents ordres de f lorsque $p = 3$ et $q = 0.5$ en fonction de r

Remarque 2.4. Dans le cas où f est défini sur un intervalle fermé borné et qu'il n'y a pas d'effet Allee, la courbe de semi-stabilité chaotique n'est pas définie. Dans de tels cas, il n'y a pas de région d'extinction essentielle. Après la région chaotique, il y aura une région non admissible [63]. La courbe de semi-stabilité chaotique coïncide avec la courbe fullshift définie dans [62].

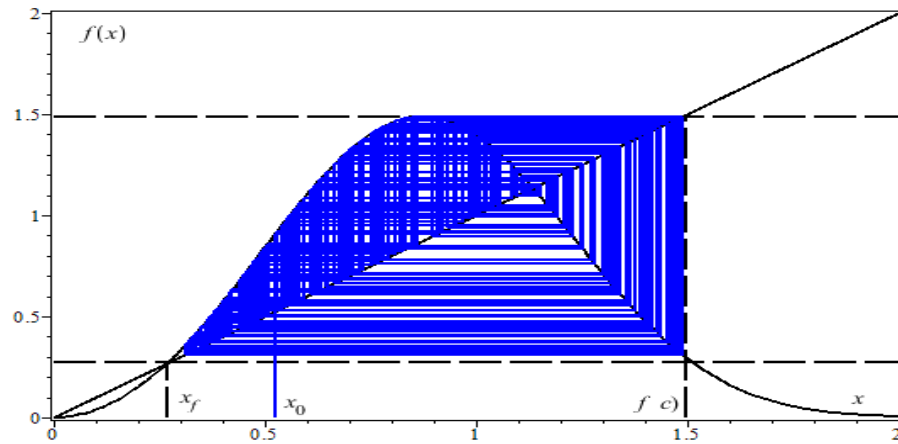


FIGURE 2.5.3 – Dynamique chaotique de f sur $[x_f, f(c)]$ dans la région de semi-stabilité chaotique

2.5.3 Région d'extinction essentielle

La région d'extinction essentielle apparaît lorsque la croissance maximale de la taille de la population dépasse la densité critique, et que les populations sont quasiment condamnées à l'extinction, ou lorsque la croissance maximale de la taille de la population excède celle de l'effet Allee. Cela signifie que si une population, initialement à la densité c , tombe en dessous de x_f à la génération suivante, l'extinction se produit pour presque toutes les densités de population initiales. Autrement dit, pour une condition initiale choisie de manière aléatoire, les paramètres satisfaisant cette condition définissent la région d'extinction essentielle dans le plan des paramètres (ϕ, p, q) .

Dans [68], le résultat qui suivent caractérise cette extinction en temps fini pour un sous-ensemble de toutes les densités initiales. Notons que, dans [70], un résultat général est démontré pour des modèles similaires pour presque toutes les densités initiales de population.

Définition 2.3. [68] Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction de Weibull dans l'espace des paramètres Γ_0 . La région de l'effet Allee, désignée par R_{ess} , est définie comme suit :

$$R_{ess} = \{(r, p, q) \in \Gamma_0 : f^2(c) < x_f\};$$

$$R_{ess} = \{(r, p, q) \in \Gamma_0 : r (rc^{p-1}e^{-qc^p})^{p-1} e^{-q(rc^{p-1}e^{-qc^p})^p} + \frac{p-2}{pq} W_{-1}(X(r, p, q)) < 0\}. \quad (2.5.1)$$

où x_f est le petit point fixe et $c = \sqrt[pq]{\frac{p-1}{pq}}$ est le point critique de f .

Remarque 2.5. L'hypothèse de la dérivée schwartzienne négative est nécessaire pour garantir que presque toutes les densités initiales disparaissent. Sans cette condition, la seule certitude est que les densités initiales proches de c conduisent à l'extinction, et que d'autres densités initiales peuvent conduire à des points périodiques stables. Le travail de Gyllenberg et al. [33] suggère que l'ensemble des densités initiales ne conduisant pas à l'extinction définit un attracteur chaotique. Par conséquent, l'extinction peut être précédée de transitoires chaotiques à long terme.

Proposition 2.5. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction de Weibull dans l'espace des paramètres Γ_0 . Considérons les valeurs

$$a = \max\{f^{-1}(x_f^*)\} \text{ et } b = \min\{f^{-1}(x_f^*)\}$$

telles que $I =]a, b[\subset]x_f, x_f^*[$. Si $(r, p, q) \in R_{ess}$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = 0, \forall x \in I$.

Preuve. Soit $(r, p, q) \in R_{ess}$, alors $f^2(c) < x_f$. Remarquons que cette dernière inégalité est équivalente à $f(c) > x_f^*$, où $x_f^* = \max\{f^{-1}(x_f)\}$.

En utilisant l'unimodalité de f , nous déduisons l'inégalité suivante :

$$x_f < a < c < b < x_f^*, \text{ (voir Figure 2.6.1).}$$

Autrement dit, grâce à la monotonie de f , nous avons

$$f'(x) > 0, \forall x \in [0, c[\text{ et } f'(x) < 0, \forall x \in]c, +\infty[.$$

En tenant compte de la condition (iii) de la Définition 2.1, il en résulte que :

$$f(x) > x, \forall x \in]a, b[.$$

De plus, nous avons

$$x_f^* < f(x). \quad (2.5.2)$$

D'après la monotonie de f , il vient que :

$$0 < f^2(x) < x_f, \quad \forall x \in]a, b[. \quad (2.5.3)$$

Dans cette région, $(]0, x_f[)$, $f^n(x)$ est une suite monotone décroissante qui est délimitée en dessous par 0. Par continuité de f , nous en déduisons que la suite $f^n(x)$ converge vers

$\inf_{x \in \mathbb{R}^+} \{f^n(x)\} = 0$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f^n(x) = 0, \quad \forall x \in]a, b[, \quad (\text{voir Figure 2.6.1}). \quad (2.5.4)$$

■

2.6 Conclusion

Une analyse de la dynamique de la fonction de Weibull est effectuée, dans laquelle les points fixes non nuls sont implicitement exprimés en termes de la fonction W de Lambert. Premièrement, pour $p \in]0, 1]$, nous avons prouvé l'existence d'un point fixe positif x_f , qui présente un attracteur global dans l'espace des paramètres Ω_0 . Cela exclut toute possibilité de comportement périodique ou chaotique. En revanche, lorsque $p > 1$ et $r > \Phi(x; p, q)$, le point fixe $x = 0$ devient asymptotiquement stable, introduisant ainsi l'effet Allee. La dynamique du modèle peut alors être divisée en plusieurs scénarios généraux : extinction (si 0 est le seul point fixe), semi-stabilité (lorsque le point fixe d'extinction coexiste avec un point fixe positif semi-stable x_f) et bistabilité (lorsque le point fixe d'extinction coexiste avec le point fixe instable x_f et l'apparition d'un second point fixe stable x_s). Dans le cas de la bistabilité, les densités de population initiales inférieures au point fixe d'Allee x_f sont vouées à l'extinction, tandis que les densités de population plus élevées persistent et convergent vers le plus grand point fixe positif x_s . L'extinction essentielle se produit précisément lorsque p est dans l'intervalle $]2, 3]$.

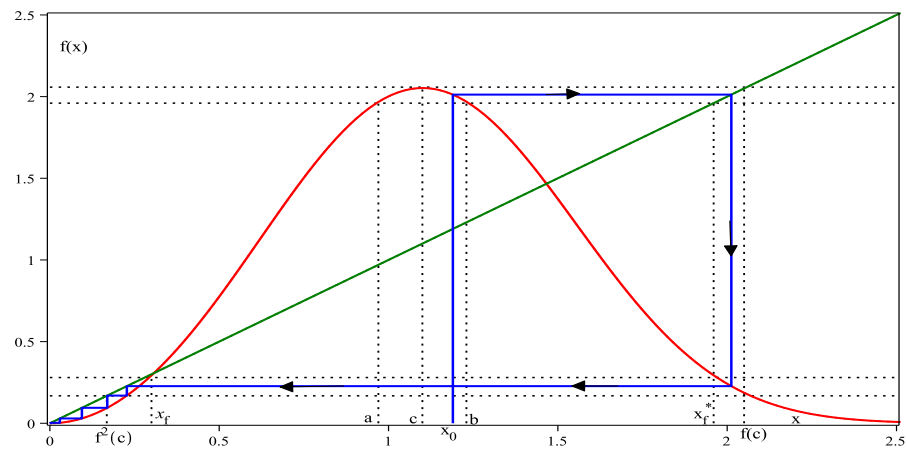


FIGURE 2.6.1 – Le graphe de f lorsque $f^2(c) < x_f$ $p = 3, q = 0.5, r = 3.3$ montre que pour tout point initial x_0 situé dans l'intervalle $]a, b[$, son orbite se rapproche du point fixe zéro.

Etude dynamique du modèle de Beverton-Holt généralisé

3.1 Introduction

Les modèles de population à temps discret sont généralement utilisés pour décrire les cycles de vie de nombreux organismes, notamment les poissons, les oiseaux, les insectes, les mammifères ainsi que les plantes [38]. Les modèles stock-recrutement occupent une place centrale dans l'écologie théorique, en particulier en ce qui concerne les populations de poissons [46]. Ainsi, la dynamique interannuelle est régie par une équation de différence d'ordre 1 : $x_{n+1} = f(x_n)$. La fonction f englobe divers paramètres qui, généralement (au moins phénoménologiquement), présentent une signification biologique, tels que le taux de croissance, la capacité de charge, la probabilité de survie, et bien d'autres.

La recherche d'une bonne courbe stock-recrutement pour analyser la dynamique de la population d'une espèce donnée a été l'un des principaux défis de la recherche. Il existe différentes formes de dépendance à la densité, correspondant à différentes caractéristiques de la fonction de production f . La dépendance à la densité est compensatoire si la survie diminue lorsque l'abondance de la population augmente. Elle se présente par $f'(x) > 0$ et $F'(x) = \left(\frac{f(x)}{x}\right)' < 0$. Parmi les fonctions compensatoires les plus connues, on trouve la

fonction de Beverton-holt [9]. Le modèle de Cushing [19] présente également une croissance compensatoire. La dépendance à la densité est surcompensatoire si $F'(x) < 0$ mais $f'(x) < 0$ après une valeur critique de la taille de la population. Ce qui signifie que non seulement la production par habitant mais aussi le recrutement net peuvent diminuer avec l'augmentation de la densité. La fonction quadratique et le modèle de Ricker sont des exemples bien connus de courbes de surcompensation [60]. La troisième dépendance est dite dépensatoire (ou présente des effets d'Allee) si la production de la population à un petit augmente avec l'abondance du frai, ce qui est représenté par la condition $F'(x) > 0$. Les modèles avec effets Allee présentent une caractéristique importante lorsque les niveaux de reproduction restent faibles, le nombre de recrues n'est pas suffisant pour remplacer le stock de reproducteurs et, par conséquent, la population est amenée à l'extinction.

L'effet Allee porte le nom de Warder-C-Allee [2], popularisé par les travaux de F. Courchamp [17], et fait référence à la capacité réduite ou au déclin de la croissance d'une population en raison de sa faible taille ou densité. Autrement dit, lorsque les densités de population sont faibles, il est difficile de trouver des partenaires et les taux de natalité diminuent, ce qui peut entraîner l'extinction de la population. Cela se produit dans les modèles lorsqu'il existe un certain seuil en dessous duquel l'extinction de la population se produit [38]. Ce seuil est appelé le "point fixe d'Allee". Dans la littérature sur les systèmes dynamiques, une fonction représentant l'effet Allee doit avoir trois points d'équilibre ou points fixes : un point fixe trivial qui est asymptotiquement stable, un point fixe positif instable appelé point seuil, et un point positif plus grand qui est asymptotiquement stable [3].

De nombreux auteurs dans le domaine des systèmes dynamiques s'intéressent aux modèles de population avec le phénomène d'Allee, en utilisant diverses approches et applications. Par exemple, J. A. Walter [78] et S. Elaydi et al. [26], utilisent des cartes triangulaires de dimensions supérieures pour explorer des modèles hiérarchiques à plusieurs espèces et des modèles de compétition Ricker à trois espèces. F. Bozkurt et al. [13] a établi un modèle logistique d'ordre fractionnaire de la croissance tumorale.

Dans ce travail, nous nous intéressons à un nouveau modèle de Beverton-Holt [47] avec

quatre paramètres réels défini par la relation suivante,

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad \text{avec} \quad f(x) = \frac{rx^\gamma}{1 + \delta x^m}, \quad (3.1.1)$$

où r, γ, δ, m sont des paramètres réels positifs, et f est appelée la fonction de production ou la relation stock-recrutement. Le modèle exprimé par l'Équation (3.1) représente une généralisation de l'équation de Beverton-Holt étudiée par E. Liz [46], ainsi que le modèle de Maynard Smith et Slatki [48], et le modèle de Cushing [19]. En raison de son importance cruciale dans l'étude de l'évolution des populations, plusieurs chercheurs se penchent sur ce type de fonctions récurrentes ou unimodales. Ce modèle est capable de montrer les trois formes différentes de dépendance de la densité.

L'objectif principal est d'étudier la dynamique de ce type de fonction unimodale avec quatre paramètres dans l'espace des paramètres R_0 :

$$R_0 = \{(r, \gamma, \delta, m) \in \mathbb{R}^4 : r, \alpha, \delta, m > 0 \text{ et } m > \gamma\},$$

où $x \in [0, +\infty[$, et la condition $m > \gamma$ assure l'unimodalité de la fonction f . Les propriétés de cette fonction seront énoncées et étudiées dans ce qui suit :

3.2 Résultats préliminaires

Propriétés 3.1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction définie par l'équation (3.1), alors les propriétés suivantes sont vérifiées :

- (A₁) f est continue sur $[0, +\infty[$ et $f(0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
- (A₂) f possède un unique point critique $c = \sqrt[m]{\frac{\gamma}{\delta(m-\gamma)}}$ qui représente un maximum global de f .
- (A₃) La dérivée $f'(x)$ est non nulle pour tout $x \in [0, +\infty[\setminus \{c\}$, $f'(c) = 0$, et $f''(c) < 0$.
- (A₄) La fonction f est de classe $C^3([0, +\infty[\setminus \{c\})$.

Proposition 3.1. La dérivée de Schwarz Sf est négative pour tout $x \in [0, +\infty[\setminus \{c\}$, $m > 1 + \gamma$ et $\gamma > 1$.

Preuve. En calculant la dérivée de Schwarz, on obtient :

$$Sf(x) = \frac{-q(x)}{x^2 (\delta (m - \gamma) x^m - \gamma)^2} \quad (3.2.1)$$

avec

$$q(x) = \delta^2 (m - \gamma + 1) (m - \gamma - 1) (m - \gamma)^2 x^{2m} + 2\gamma\delta (m - \gamma) (m^2 + m\gamma - \gamma^2 + 1) x^{m+\gamma^4-\gamma^2}.$$

Posons $X = \delta x^m$ et $q(X) = a_1 X^2 + a_2 X + a_3$ avec

$$a_1 = \delta^2 (m - \gamma + 1) (m - \gamma - 1) (m - \gamma)^2, \quad (3.2.2)$$

$$a_2 = 2\gamma\delta (m - \gamma) (m^2 + m\gamma - \gamma^2 + 1), \quad (3.2.3)$$

$$a_3 = \gamma^4 - \gamma^2. \quad (3.2.4)$$

On remarque que $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, et $a_3 > 0$. Donc

$$q(X) > 0, \forall X > 0, \text{ et } m > \gamma + 1 \text{ et } \gamma > 1.$$

Par conséquent, $Sf(x) < 0$, $\forall \gamma > 1$ et $m > \gamma + 1$. ■

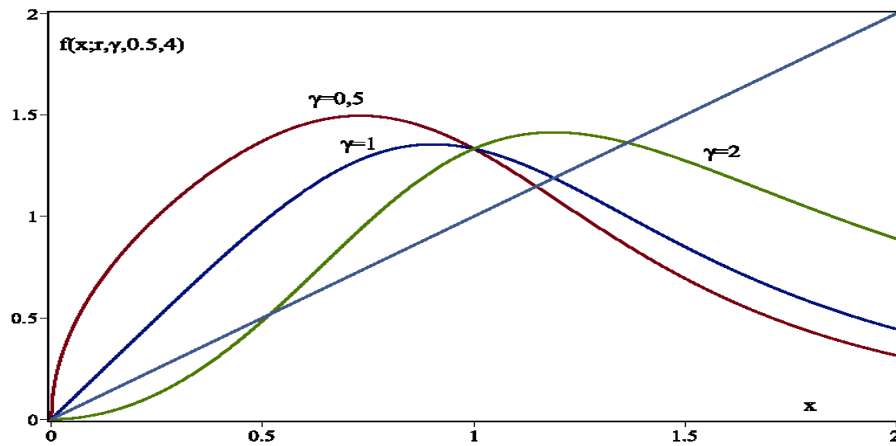


FIGURE 3.2.1 – Le graphe de f pour $(r = 2, \delta = 0.5)$ et $(m = 4)$ montre en vert la fonction f avec un effet Allee ($\gamma = 2 > 1$), et en bleu et rouge la fonction f sans effet Allee.

3.3 Bifurcation de la fonction f

Dans cette section, nous déterminons les équations des courbes de bifurcation fold et flip respectivement. Ces courbes sont essentielles pour étudier la stabilité du modèle proposé dans l'espace des paramètres R_0 . Nous considérons r comme le paramètre de bifurcation dans le plan des paramètres (γ, δ, m) .

3.3.1 Bifurcation de fold

La courbe de bifurcation fold, associée à la fonction f , est obtenue en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} f(x) = x, \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x} = 1. \end{cases} \quad (3.3.1)$$

Ceci est équivalent à

$$\begin{cases} \frac{rx^\gamma}{1+\delta x^m} = x, \\ \frac{rx^{\gamma-1}(\gamma+\delta x^m(\gamma-m))}{(1+\delta x^m)^2} = 1. \end{cases} \quad (3.3.2)$$

Ainsi, il existe une solution Φ pour laquelle l'équation de la courbe de bifurcation fold se présente sous la forme :

$$r = \Phi(x; \gamma, \delta, m) = \frac{m}{m - \gamma + 1} \left(\frac{\gamma - 1}{\delta(m + 1 - \gamma)} \right)^{\frac{1-\gamma}{m}}, \quad (3.3.3)$$

avec $x = \sqrt[m]{\frac{\gamma-1}{\delta(m+1-\gamma)}}$.

3.3.2 Bifurcation de flip

La courbe de bifurcation flip est obtenue en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} f(x) = x, \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x} = -1. \end{cases} \quad (3.3.4)$$

Cela est équivalent à

$$\begin{cases} \frac{rx^\gamma}{1+\delta x^m} = x, \\ \frac{rx^{\gamma-1}(\gamma+\delta x^m(\gamma-m))}{(1+\delta x^m)^2} = -1. \end{cases} \quad (3.3.5)$$

Donc, il existe une solution Ψ pour laquelle l'équation de la courbe de bifurcation flip se présente sous la forme :

$$r = \Psi(x; \gamma, \delta, m) = \frac{m}{m - \gamma - 1} \left(\frac{\gamma + 1}{\delta(m - \gamma - 1)} \right)^{\frac{1-\gamma}{m}}, \quad (3.3.6)$$

avec $x = \sqrt[m]{\frac{\gamma+1}{\delta(m-\gamma-1)}}$ et $m > \gamma + 1$.

3.4 Stabilité des points fixes

Proposition 3.2. *Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction définie par l'équation (3.1), et $\Psi(x; \gamma, \delta, m)$ la courbe de bifurcation flip. Si $0 < \gamma < 1$ et $m > \gamma + 1$, alors f possède deux points fixes : le point fixe trivial $x = 0$ et x_1 . De plus, $x = 0$ est instable et x_1 est stable si et seulement si $r < \Psi(x; \gamma, \delta, m)$.*

Preuve. Considérons $x \geq 0$ et l'équation du point fixe $f(x) = x$ correspond à :

$$\frac{rx^\gamma}{1 + \delta x^m} = x.$$

Il est évident que $x = 0$ est toujours un point fixe de f pour tous (r, γ, δ, m) appartenant à R_0 . Lorsque $x > 0$, l'équation du point fixe se simplifie en

$$\frac{rx^{\gamma-1}}{1 + \delta x^m} = 1. \quad (3.4.1)$$

En posant $h(x) = rx^{\gamma-1}$ et $g(x) = 1 + \delta x^m$, étudions les solutions de l'équation

$$h(x) = g(x). \quad (3.4.2)$$

Nous observons que h est décroissante, $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$. De même, g est croissante, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ et elle atteint son minimum à 1 en $x = 0$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons conclure que l'équation (3.4.2) possède une unique solution notée x_1 , correspondant au point fixe de f .

De plus la dérivée de f vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \infty, \text{ si } 0 < \gamma < 1, \\ \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = r, \text{ si } \gamma = 1, \\ \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0, \text{ si } \gamma > 1. \end{array} \right. \quad (3.4.3)$$

Donc, $x = 0$ est instable.

Analysons maintenant la stabilité de x_1 . Lorsque $0 < \gamma < 1$, la fonction f est strictement décroissante dans l'intervalle $]c, +\infty[$. De plus, étant donné que x_1 appartient à cet intervalle, on peut conclure que $f'(x_1) < f'(c) = 0$, ce qui implique $f'(x_1) < 1$.

Ainsi, pour montrer que x_1 est stable, il suffit de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} f(x_1) = x_1, \\ f'(x_1) > -1. \end{cases} \quad (3.4.4)$$

Ceci est équivalent à

$$\begin{cases} r = x_1^{1-\gamma}(1 + \delta x_1^m), \\ x_1 < \sqrt[m]{\frac{\gamma+1}{\delta(m-\gamma-1)}}. \end{cases} \quad (3.4.5)$$

Étant donné que la fonction $\Psi(x) = x^{1-\gamma}(1 + \delta x^m)$ est croissante lorsque $\gamma < 1$, nous concluons que

$$\Psi(x_1) < \Psi\left(\sqrt[m]{\frac{\gamma+1}{\delta(m-\gamma-1)}}\right), \quad (3.4.6)$$

ce qui équivaut à

$$r < \Psi\left(\sqrt[m]{\frac{\gamma+1}{\delta(m-\gamma-1)}}\right) = \Psi(x, \gamma, \delta, m). \quad (3.4.7)$$

■

Remarque 3.1. Si $\gamma = 1$ et $m = 1$, le modèle correspond au modèle classique de Beverton-Holt, et sa dynamique est caractérisée par une convergence monotone de tous les points fixes positifs, soit vers le point fixe d'extinction (si $r < 1$), soit vers un attracteur positif (si $r > 1$) comme illustré dans la figure 3.4.1 .

Proposition 3.3. Soit $\gamma > 1$, $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction définie par l'équation (3.1) et $\Phi(x; \gamma, \delta, m)$ l'équation de la courbe de bifurcation fold. Alors :

- (i) Si $r < \Phi(x; \gamma, \delta, m)$, alors f admet un unique point fixe $x = 0$.
- (ii) Si $r = \Phi(x; \gamma, \delta, m)$, alors f admet deux points fixes $x = 0$ et x_1 .
- (iii) Si $r > \Phi(x; \gamma, \delta, m)$, alors f admet trois points fixes $x = 0, x_1$ et x_2 ,
où $0 < x_1 < x_2$.

Preuve. Considérons $f_1(x) = \frac{rx^{\gamma-1}}{1+\delta x^m}$, f_1 une fonction dérivable ayant un unique point critique $c = \sqrt[m]{\frac{\gamma-1}{\delta(m-\gamma+1)}}$. L'analyse de la monotonie de f_1 montre qu'elle est strictement croissante sur $[0, c[$ et strictement décroissante sur $]c, +\infty[$. De plus, notons que

$\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0$, ce qui implique que le point critique c correspond à un maximum de f_1 .

Ainsi, si $f_1(c; r, \gamma, \delta, m) > 1$, cela équivaut à $r < \phi(x; \gamma, \delta, m)$. En conséquence, la fonction f_1 ne peut pas atteindre la valeur 1, ce qui montre que l'équation (3.4.2) ne peut pas avoir de solution positive. Par conséquent, $x = 0$ est le seul point fixe de f .

Pour $r = \phi(x; \gamma, \delta, m)$, cette condition correspond à $f_1(c) = 1$. Dans ce cas, f_1 atteint la valeur 1 exactement une fois, ce qui signifie que la fonction f possède deux points fixes, $x = 0$ et x_1 . La preuve de (iii) peut être formulée de manière similaire. ■

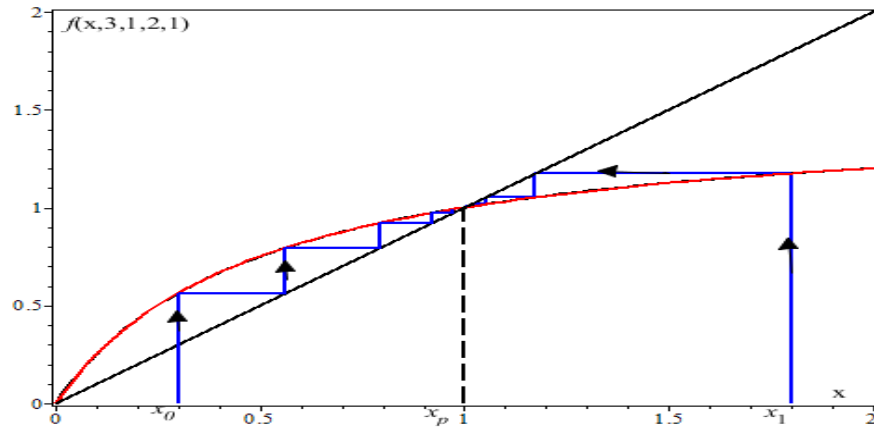


FIGURE 3.4.1 – Convergence de toutes les orbites du modèle classique de Beverton-Holt vers le point fixe positif.

Proposition 3.4. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction définie par l'équation (3.1), $\Phi(x; \gamma, \delta, m)$, $\Psi(x; \gamma, \delta, m)$ les courbes de bifurcations fold et flip (respectivement) et x_1, x_2 les points fixes définis dans la Proposition (3.3), alors

(I) Si $\gamma > 1$, et $r < \Phi(x; \gamma, \delta, m)$, alors le point fixe $x = 0$ est stable et vérifie :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

(II) Si $\gamma > 1$, et $r = \Phi(x; \gamma, \delta, m)$, alors le point fixe $x = 0$ est stable et il vérifie :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \setminus [x_1, x_1^*],$$

et, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = x_1, \quad \forall x \in [x_1, x_1^*],$$

avec $x_1^* = f^{-1}(x_1)$.

(III) Si $\gamma > 1$ et $m > \gamma + 1$, alors le point fixe $x = 0$ est stable, le point fixe x_1 est instable et le point fixe x_2 est stable si et seulement si

$$\phi(x; \gamma, \delta, m) < r < \psi(x; \gamma, \delta, m).$$

Preuve. Supposons que $\gamma > 1$ et $r < \phi(x; \gamma, \delta, m)$. Selon la Proposition 3.3, La fonction f a un point fixe $x = 0$, et de l'équation (3.4.3) on conclut que $x = 0$ est un point fixe stable. Dans ce cas, nous avons $f(x) < x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. La suite $f^n(x)$ est décroissante et minorée par 0. Par la continuité de f , il en résulte que la suite $f^n(x)$ converge vers le seul point fixe $x = 0$, qui présente un attracteur global. Ainsi, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \text{ (voir figure 3.4.2)}.$$

Si $\gamma > 1$ et $r = \Phi(x; \gamma, \delta, m)$, selon la Proposition 3.3, f admet deux points fixes $x = 0$ et x_1 . D'après l'Équation (3.4.3), $x = 0$ est stable.

En tenant compte des propriétés de la fonction f exactement (A_3) et (A_4) , nous concluons l'inégalité suivante :

$$0 < x_1 < x_2 < x_1^*, f'(x) > 0, \quad \forall x \in [0, x_1[\text{ et } f'(x) < 0, \quad \forall x \in [x_1^*, +\infty[.$$

Cela signifie que $f(x) > x_1, \forall x \in [x_1, x_1^*]$.

Par conséquent, $f^n(x)$ est une suite décroissante qui converge vers l'attracteur $x = 0$ pour tout $x \in [0, +\infty[\setminus [x_1, x_1^*]$. Ainsi, x_1 est le seul point fixe dans l'intervalle $[x_1, x_1^*]$.

Comme $f(x; r, \gamma, \delta, m) < x$ pour tout $x \in [x_1, x_1^*]$, on en déduit $f^n(x)$ est une suite décroissante et bornée, minorée par x_1 .

La continuité de la fonction f induit la convergence de la suite $f^n(x)$ vers le seul point fixe $x = x_1$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = x_1$ pour tout $x \in [x_1, x_1^*]$. Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \setminus [x_1, x_1^*].$$

Soit $x \in [x_1, x_1^*]$, d'après la monotonie et de l'unimodalité de f , on a :

$$x_1 < c < x_1^* \text{ et } f'(x) > 0, \forall x \in [x_1, c[\text{ et } f'(x) < 0, \forall x \in [c, x_1^*[.$$

De plus,

$$x_1 < f(x) < f(c), \forall x \in [x_1, x_1^*].$$

Par conséquent, x_1 est le seul point fixe dans l'intervalle $[x_1, x_1^*]$.

Comme $f(x) < x, \forall x \in [x_1, x_1^*]$, on conclut que $f^n(x)$, est une suite décroissante monotone et bornée en dessous de x_1 . La continuité de la fonction f implique que la suite $f^n(x)$ converge vers le seul point fixe $x = x_1$.

$$\text{Ainsi, } \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = x_1, \forall x \in [x_1, x_1^*].$$

Pour $\gamma > 1$ et $\Phi(x; \gamma, \delta, m) < r < \Psi(x; \gamma, \delta, m)$, d'après la Proposition 3.3, la fonction f admet trois points fixes : $x = 0, x_1$ et x_2 tels que $0 < x_1 < x_2$.

Considérons maintenant le résultat obtenu dans le deuxième cas , c'est-à-dire, après la bifurcation fold et avant la bifurcation flip. Le point fixe x_1 se bifurque et donne naissance à deux points fixes (notés x_1 et x_2) tels que $x_1 < c < x_2 < x_1^*$, avec $x_1^* = \max f^{-1}(x_1)$. Lorsque $r < \Phi(x; \gamma, \delta, m)$ et d'après la Proposition 3.3, la fonction f n'admet qu'un seul point fixe, ce qui contredit l'existence de trois points fixes. D'autre part, si $r > \Psi(x; \gamma, \delta, m)$, en tenant compte de l'équation (3.3.6), on observe l'apparition d'une nouvelle bifurcation, c'est-à-dire la bifurcation flip où le point fixe x_2 devient instable, génère un nouveau cycle attracteur de période 2. Ce nouveau cycle contredirait l'hypothèse. ■

Remarque 3.2. (i) Pour $\gamma > 1$, nous avons démontré que si $r < \Phi(x; \gamma, \delta, m)$, la fonction f admet un unique point fixe $x = 0$ qui constitue un attracteur global. Cette situation correspond à une région d'extinction (voir Figure 3.4.2).

- Si $r = \Phi(x; \gamma, \delta, m)$, la fonction f possède deux points fixes $x = 0$ et x_1 . Dans ce cas, le point fixe trivial $x = 0$ est stable et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = x_1$ pour tout $x \in [x_1, x_1^*]$. Le point fixe x_1 est attractif à droite, mais répulsif à gauche (voir Figure 2.3.1) et n'est pas en expansion.

- Si $r > \Phi(x; \gamma, \delta, m)$, la fonction f admet trois points fixes $x = 0$, le point fixe d'Allee x_1 et x_2 , tels que le point fixe trivial $x = 0$ est stable, le point fixe d'Allee x_1 est instable et la stabilité du point fixe x_2 dépend de l'existence de la bifurcation flip. Dans ce cas, le point fixe d'Allee x_1 est en expansion.

(ii) Le cas où $m = 1$ a été étudié dans [46].

(iii) Pour $\gamma = m$, la fonction f est strictement croissante mais non unimodale, et elle ne vérifie pas les propriétés $(A_1) - (A_4)$.

En fonction des valeurs du paramètre γ , elle peut avoir au plus trois points fixes.

En effet, une simple étude des variations de f montre qu'elle possède exactement deux points fixes pour $\gamma < 1$ et elle admet au moins un point fixe (le point fixe trivial $x = 0$) et au plus trois points fixes pour $\gamma > 1$ (voir Figure 2.4.2).

(iv) Lorsque $\gamma > m$ et $\gamma > 1$, la fonction f croît de manière exponentielle, les populations au-dessus de l'équilibre positif croissent indéfiniment, comme dans le modèle de Cushing (voir Figure 3.4.4).

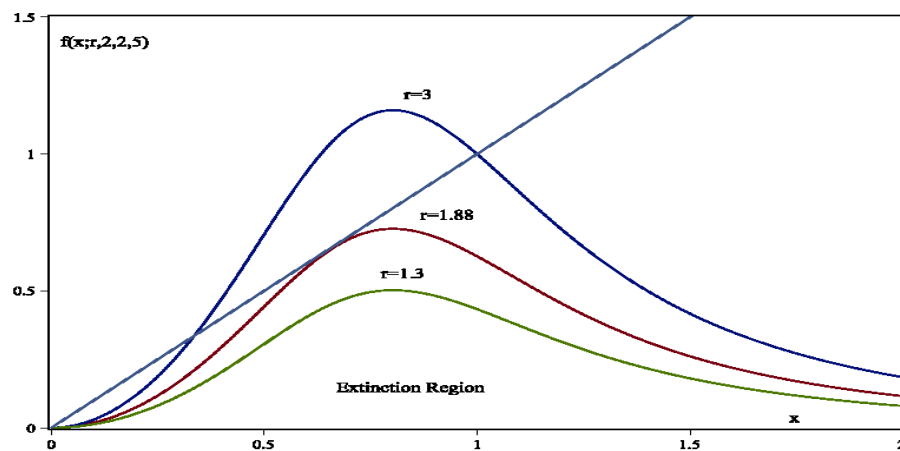


FIGURE 3.4.2 – Le graphe de f lorsque $(\gamma = 2)$ et $(\delta = 2, m = 5)$ présente différentes situations : la couleur verte correspond à f ayant un point fixe (région d'extinction), la couleur rouge correspond à f ayant deux points fixes et la couleur bleue correspond à f ayant trois points fixes.

Définition 3.1. [68] Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ définie par l'équation (3.1) avec effet Allee dans l'espace des paramètres R_0 .

La surface de semi-stabilité chaotique notée par S_{ch} est définie comme suit :

$$S_{ch} = \{(r, \gamma, \delta, m) \in \Sigma_0 : f^2(c) = x_1, \gamma > 1, r > \Phi(x; \gamma, \delta, m)\}, \quad (3.4.8)$$

avec x_1 est le point fixe d'Allee, $c = \sqrt[m]{\frac{\gamma}{\delta(m-\gamma)}}$ est le point critique de f .

Remarque 3.3. Nous déduisons quelques remarques à partir de la nature et de la stabilité des points fixes de f , établis dans la proposition 3.4, et 3.2 :

- La dérivée de f est une fonction discontinue pour des valeurs proche de 0.
- Le paramètre $\gamma = 1$ représente un changement dans le comportement de bifurcation dans un voisinage du point fixe $x = 0$ de f . Par conséquent, l'ensemble défini par :

$$\Theta = \{(r, \gamma, \delta, m) \in R_0 : \gamma = \nu(r, \delta, m) = 1\} \quad (3.4.9)$$

est une surface de bifurcation qui caractérise la stabilité du point fixe $x = 0$ et l'on constate que le nombre de points fixes de f dans l'ensemble Θ dépend de la variation du paramètre r .

D'après la Proposition 3.2 et la Proposition 3.4, ((i) et (ii)), pour $0 < \gamma < 1$, il n'y a que deux points fixes ($x = 0$ et $x = x_1$). Dans ce cas, le point fixe $x = 0$ est toujours instable. Pour $\gamma > 1$, il y a plus d'un point fixe de f , en fonction de la variation du paramètre r ($0 < x_1 < x_2$).

Dans ce cas, le point fixe $x = 0$ est toujours stable, et le point fixe x_1 est toujours instable. Le diagramme de la figure 3.5.1 illustre la remarque précédente, où O^s est l'origine stable, O^u est l'origine instable, FP^s est un point fixe stable et FP^u est un point fixe instable.

Définition 3.2. [62] Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction définie par l'équation (3.1), satisfaisant aux propriétés $(A_1) - (A_4)$ et $r = \phi(x; \gamma, \delta, m)$, la bifurcation de l'effet Allee se présente par

$$\Theta = \{(r, \gamma, \delta, m) \in R_0 : \gamma = \nu(r; \delta, m) = 1\} \quad (3.4.10)$$

qui se schématise de la manière suivante :

$$O^s \leftrightarrow O^u + FP^s, 0 < r < 1$$

$$O^u + FP^u + FP^s \leftrightarrow O^u + FP^s, 1 < r < \Phi(r; m, \gamma, \delta).$$

$$O^u + FP^u + FP^u \leftrightarrow O^u + FP^u, r > \Phi(r; m, \gamma, \delta).$$

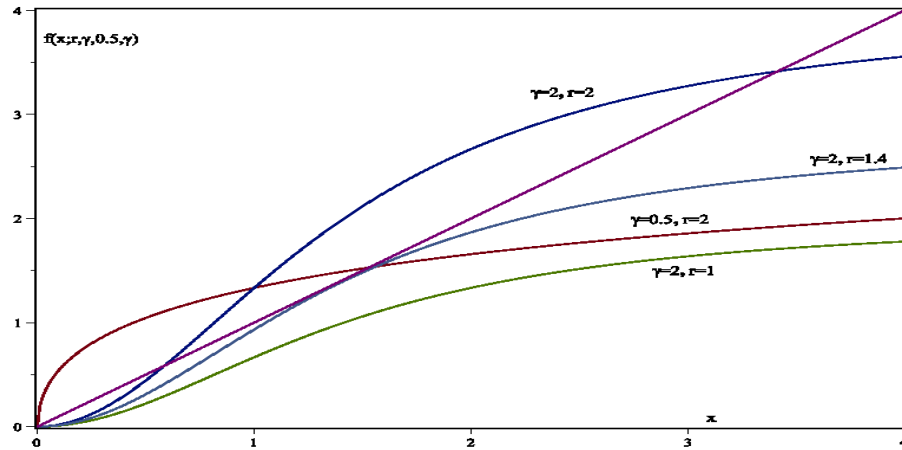


FIGURE 3.4.3 – Le graphe de f lorsque $(m = \gamma)$, $(\delta = 0.5)$ avec différentes valeurs des paramètres r et γ .

Remarque 3.4. Ce type de bifurcation a été introduit dans les travaux de J.L.Rocha pour d'autres classes de fonction d'Allee unidimensionnelle [61, 65].

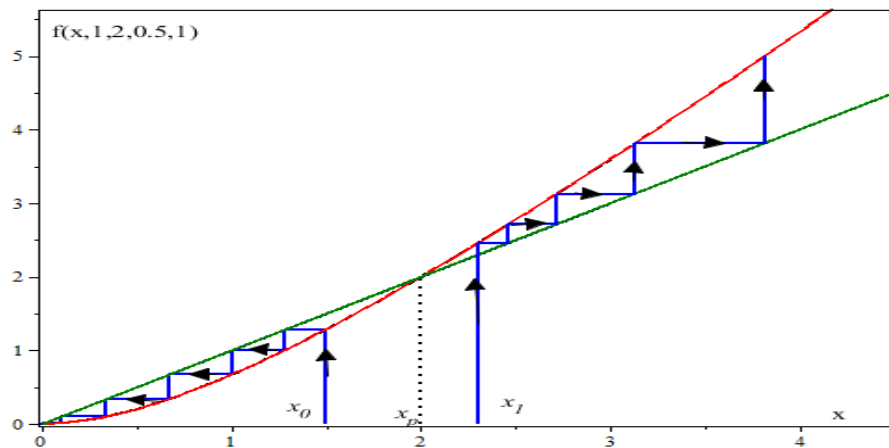


FIGURE 3.4.4 – Le modèle de Beverton-Holt avec croissance compensatoire.

3.5 Repulsif SBR

Cette sous-section présente la relation entre le point fixe d'Allee et l'orbite homocline. Nous rappelons qu'une trajectoire ou orbite homocline d'un point fixe est celle qui tend

vers ce point dans le processus direct et dans certains processus inverses. Lorsque l'orbite homocline est associée au point fixe en expansion, le point fixe est appelé un répulsif SBR [29].

Proposition 3.5. *Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction définie par l'équation (3.1) avec effet Allee. Le point fixe d'Allee x_1 satisfait l'équation (3.4.8) si et seulement si x_1 est un répulsif SBR de f .*

Preuve. Supposons que x_1 satisfait l'équation (3.4.8), c'est-à-dire que

$$f^2(c) = x_1 \text{ pour tout } \gamma > 1 \text{ et } r > \Phi(x, \gamma, \delta, m).$$

Soit c le point critique défini dans les Propriétés 3.1. Alors, une orbite homocline critique se produit en ce point (voir Figure 3.5.2). D'après la Remarque 3.2, nous pouvons conclure que le point fixe x_1 est en expansion.

De plus, la fonction f vérifie les conditions $(A_1) - (A_4)$ données dans les Propriétés 3.1, donc nous avons :

$$0 < x_1 < c < x_2 \text{ et } x_1 < c < x_1^*, \text{ où } x_1^* = \max f^{-1}(x_1).$$

Cela signifie que $x_1^* \in [f^2(c), f(c)]$ et que x_f est un répulsif de retour rapide (SBR) de f . Pour démontrer la condition suffisante, nous raisonnons par contraposée. Supposons que x_1 ne satisfait pas l'équation (3.4.8), alors deux cas peuvent se présenter :

$$f^2(c) < x_1 \text{ ou } f^2(c) > x_1, \text{ c'est-à-dire } f(c) > x_1^* \text{ ou } f(c) < x_1^*.$$

Dans le premier cas, c'est-à-dire si $f(c) > x_1^*$, en vertu de la monotonie de f , on a $x_f^* \in [c, f(c)]$ et $0 < f(x) < x_f$ pour tout $x \in]x_f^*, f(c)[$ (voir Figure 3.5.3).

De plus, pour tout $x \in [0, x_f]$, nous avons $f'(x) > 0$ et $f(x) < x$.

Cela montre que le point fixe trivial $x = 0$ est le seul point fixe dans $]x_1^*, +\infty[$.

Par conséquent, la séquence $f^n(x)$ est décroissante sur $]x_1^*, +\infty[$ et converge vers 0.

Ainsi, x_1 ne peut pas être un répulsif SBR de f .

Dans le deuxième cas, c'est-à-dire si $f(c) < x_1^*$, alors selon la monotonie et l'unimodalité de f , nous avons $x_1^* \notin [f^2(c), f(c)]$ ainsi que les inégalités suivantes :

$$0 < x_1 < c < f^2(c) < f(c) < x_1^* \text{ (voir Figure 3.5.4).}$$

De plus, f est décroissante sur $[c, +\infty[$. En particulier, pour $x \in [f(c), x_2^*[$, nous avons

$$f'(x) < 0.$$

En tenant compte de la Proposition 3.3, et en fonction de la variation du paramètre r , la fonction f peut présenter différents comportements dynamiques en occurrence la stabilité du point fixe x_2 et la bifurcation de doublement de période (voir [68]).

Pour tout $x \in]f(c), x_f^*[$, nous en concluons que x_f n'est pas un répulsif SBR de f .

Si $x \in [x_1^*, +\infty[$, alors f vérifie l'inégalité suivante :

$$0 < f(x) < x_1.$$

De plus, nous avons $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [0, x_1[$, ce qui montre que le point fixe trivial $x = 0$ est le seul point fixe dans l'intervalle $]x_1^*, +\infty[$ et par suite $f^n(x)$ est une suite décroissante qui converge vers l'origine sur cette intervalle.

Par conséquent, l'origine est attractif, c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = 0, \forall x \in]x_1^*, +\infty[.$$

Ainsi, x_1 n'est pas un répulsif SBR de f . ■

Remarque 3.5. À partir de la Définition 3.1 et de la Proposition 3.5, nous avons établi qu'il existe des valeurs de paramètres $(r, \gamma, \delta, m) \in \Sigma_0$ telles que le point fixe d'Allee $x = x_1$ devienne un répulsif SBR, et qu'il existe une orbite homocline critique à $x = x_1$ ou associée au point critique $x = c$, définie comme suit :

$$O(c) = \{\dots, f^{-j}(c), \dots, c, f(c), f^2(c) = x_1\},$$

avec

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f^{-j}(c) = x_1,$$

où les antécédents de $x = c$ sont pris avec l'inverse local f^{-1} . Ainsi, il y a fusion du point critique $x = c$ de f dans le point fixe répulsif d'Allee $x = x_1$. Les orbites homoclines critiques désignent des bifurcations homoclines, qui sont des bifurcations globales.

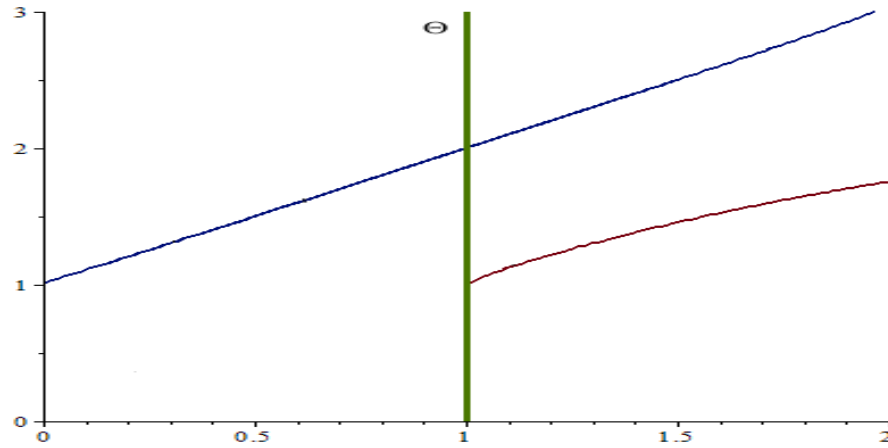


FIGURE 3.5.1 – Θ est la courbe de bifurcation de l'effet Allee, en couleur bleue la courbe de bifurcation fold et en couleur rouge la courbe de bifurcation flip.

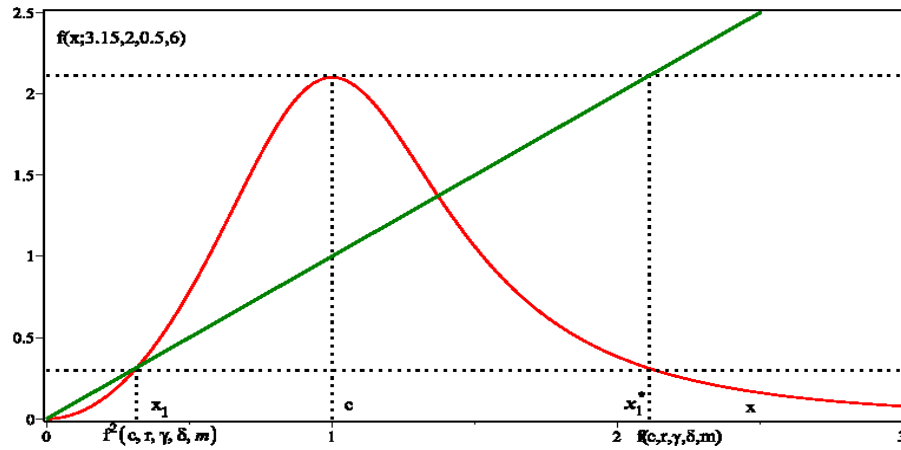


FIGURE 3.5.2 – Le graphe de f lorsque la première orbite homocline critique se produit au point fixe d'Allee, c'est-à-dire, $f^2(c) = x_1$.

3.6 L'influence de γ sur la stabilisation, l'extinction et l'abondance de la population

Dans cette section, on considère γ le paramètre de bifurcation et on étudie son rôle dans la stabilisation ou la distabilisation de la population, l'extinction de la population ainsi que l'augmentation ou la diminution de la population.

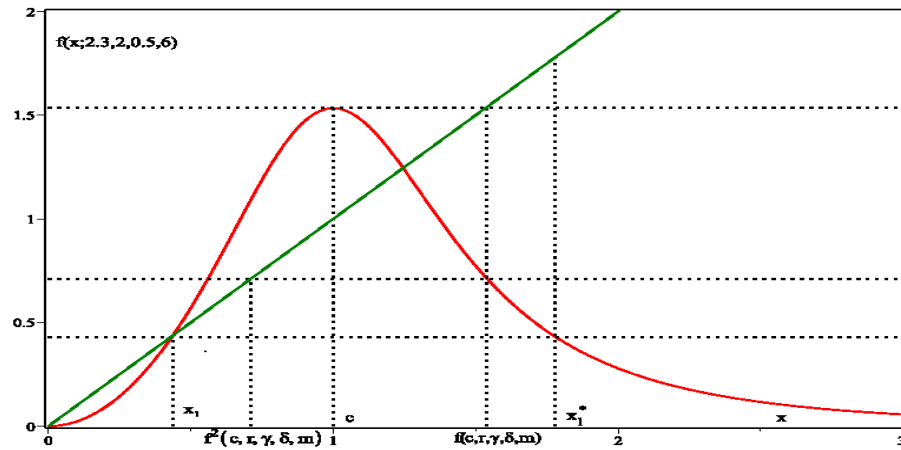


FIGURE 3.5.3 – Le graphe de f lorsque $f^2(c) > x_1$.

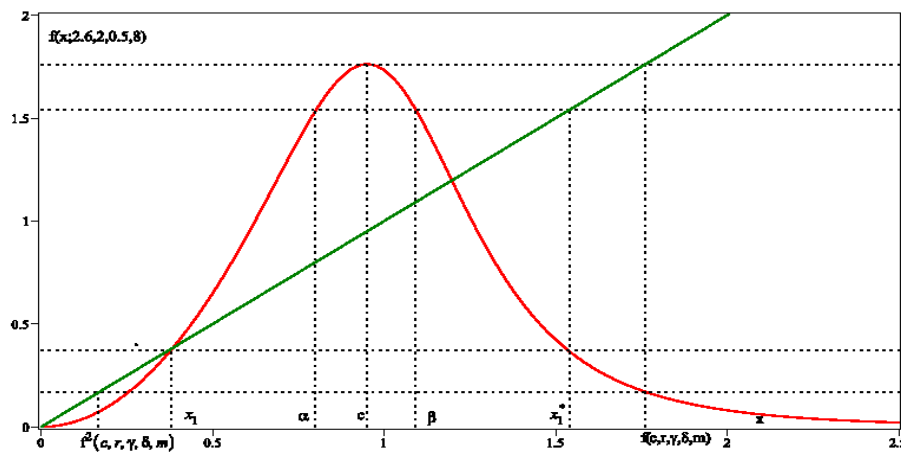


FIGURE 3.5.4 – Le graphe de f lorsque $f^2(c) < x_1$.

Proposition 3.6. Soit x_p l'unique point fixe positif de l'équation aux différences (3.1) si $\gamma \leq 1$, ou le plus grand point fixe positif si $\gamma > 1$ et $r > \Phi(x; \gamma, \delta, m)$. Alors :

1. Si $m < \frac{5}{2}$ alors l'augmentation de γ est stabilisante si $\gamma < \gamma_1$, et destabilisante si $\gamma > \gamma_1$.
2. Si $m \geq \frac{5}{2}$ alors l'augmentation de γ produit deux changements de stabilité (d'abord stabilise puis destabilise). Lorsque $\delta < \zeta(\tilde{\gamma})$, et lorsque $\delta > \zeta(\tilde{\gamma})$, l'augmentation de γ est destabilisante, où, pour chaque valeur fixe de δ , $\tilde{\gamma}$ peut être calculé comme la racine unique de l'équation

$$\zeta(x) = \delta. \tag{3.6.1}$$

$$\text{avec } \zeta(x) = \frac{x+1}{m-x-1} e^{-2\frac{m}{(x+1)(m-x-1)}}.$$

Preuve. Le point fixe est asymptotiquement stable si $r < \Psi_{\delta,m}(\gamma)$. On remarque que $\Psi_{\delta,m}(0) = \frac{m}{m-1} \sqrt[m]{\frac{1}{\delta(m-1)}}$ et que $\lim_{\gamma \rightarrow m+1} \Psi_{\delta,m}(\gamma) = \frac{m\delta}{m+2}$.

De plus, la fonction $\Psi_{\delta,m}$ est dérivable, et sa dérivée $\Psi'_{\delta,m}(\gamma) = 0$ si et seulement si

$$\frac{x+1}{m-x-1} e^{-2\frac{m}{(x+1)(m-x-1)}} = \delta. \quad (3.6.2)$$

Introduisons $\zeta(x) = \frac{x+1}{m-x-1} e^{-2\frac{m}{(x+1)(m-x-1)}}$. Une analyse des variations de $\zeta(x)$ montre qu'elle est strictement décroissante si $m < \frac{5}{2}$ et unimodale avec un maximum global en $\tilde{\gamma}$ dans le cas contraire. Distinguons ces cas : lorsque $m < \frac{5}{2}$, l'équation (3.6) a une solution unique notée γ_1 si et seulement si

$$\delta^2 < \frac{1}{(m-1)} e^{-2\frac{m}{m-1}}. \quad (3.6.3)$$

Sur l'intervalle $[0, \gamma_1[$, l'augmentation de γ est stabilisante alors que sur $[\gamma_1, +\infty[$, elle est déstabilisante. Lorsque l'inégalité (3.6.3) est inversée, dans ce dernier cas,

$\Psi(x) > 0$, $\forall \gamma \in \mathbb{R}_+$, ce qui rend l'augmentation de γ stabilisante.

Si $m \geq \frac{5}{2}$, l'équation (3.6) admet 0, 1 ou 2 solutions notées γ_1, γ_2 . Si $\delta > \zeta(\tilde{\gamma})$, il n'y a pas de solution à (3.6) et $\Psi(x) > 0$. Lorsque $\delta < \zeta(\tilde{\gamma})$, l'équation admet deux solutions notées γ_1, γ_2 . Sur $]\gamma_1, \gamma_2[$, $\psi(\gamma) < 0$, ce qui indique une déstabilisation. Sur $]-\infty, \gamma_1[\cup]\gamma_2, +\infty[$, $\Psi(\gamma) > 0$, ce qui démontre une stabilisation du point fixe. ■

3.6.1 Extinction totale

On dit qu'il y a extinction totale de la population régie par (3.1) si 0 est un attracteur global, c'est-à-dire si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ à partir de n'importe quelle condition initiale $x_0 > 0$. Les limites de l'extinction totale sont définies par 3.3.3 si $\gamma > 1$, et par conséquent, la diminution de r conduit à l'extinction. Le résultat ci-dessous présente les effets d'extinction/survie du paramètre γ pour l'équation (3.1).

Proposition 3.7. *Les propriétés suivantes sont vérifiées pour l'équation (3.1) :*

1. *Si $r < 1 + \delta$, alors une augmentation de γ produit deux points de transition d'extinction/survie à certaines valeurs critiques $\gamma_1 < \gamma_2$. De plus, $\gamma_1 = 1$ si $r \leq 1$, et $\gamma_1 > 1$ si $1 < r < 1 + \delta$.*

2. Si $r \geq 1 + \delta$, alors la population régie par (3.1) ne présente pas d'extinction totale pour aucune valeur de γ .

Preuve. La preuve suit une démarche similaire à celle de la Proposition 3.6, en utilisant la fonction $\Phi_{\delta,m}$ qui définit la limite d'extinction :

$$\Phi_{\delta,m}(x) = \frac{m}{m-x+1} \left(\frac{x-1}{\delta(m-x+1)} \right)^{\frac{1-x}{m}}.$$

Dans ce cas, $\Phi_{\delta,m}$ est unimodale, avec un maximum global $\Phi_{\delta,m}\left(\frac{\delta m + \delta + 1}{1 + \delta}\right) = 1 + \delta$. De plus, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \Phi_{\delta,m}(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi_{\delta,m}(x) = 0$.

- Si $r < 1 + \delta$, $\gamma_1 = 1$ si $r < 1$ et $\gamma_2 > 1$ si $r > 1$, alors il y a deux de transition d'extinction/survie.
- Si $r > 1 + \delta$, alors le système ne présente pas d'extinction totale pour toutes les valeurs de $\gamma > 0$. Voir figure 3.6.2 .

■

3.6.2 L'influence de γ sur l'abondance de la population.

Dans cette sous-section, nous étudions la réponse de l'abondance de la population à une variation de γ . Nous ne nous intéressons qu'au point fixe positif stable, noté $x_p(\gamma)$.

Théorème 3.1. Fixons $r > 0$, $\delta > 0$ et $m > 0$. Notons $x_p(\gamma)$ le point fixe stable de (3.1) lorsqu'il existe et définissons $\gamma^* = \frac{\delta m + \delta + 1}{\delta + 1}$. On a alors les cas suivants :

- (i) Si $r > 1 + \delta$, alors $x_p(\gamma)$ existe pour tout $\gamma \in]0, +\infty[$, et $x_p(\gamma)$ est une fonction croissante de γ .
- (ii) Si $r = 1 + \delta$, alors $x_p(\gamma)$ existe pour tout $\gamma \in [0, +\infty[\cap \{\gamma^*\}$, $x_p(\gamma) = 1$ pour $\gamma < \gamma^*$, et $x_p(\gamma)$ est une fonction croissante de γ pour $\gamma > \gamma^*$. Pour $\gamma = \gamma^*$, le point fixe positif est semi-stable.

Preuve. Fixons les paramètres r , δ , et m , puis faisons varier le paramètre γ dans la formule de Φ . Alors,

$$\Phi_{m,\delta}(\gamma) = \frac{m}{m-\gamma+1} \left(\frac{\gamma-1}{\delta(m+1-\gamma)} \right)^{\frac{1-\gamma}{m}}. \quad (3.6.4)$$

Une analyse des variations de $\Phi_{m,\delta}$ montre qu'elle est unimodale avec un maximum global $\Phi_{m,\delta}(\gamma^*) = \delta + 1$, $\Phi_{m,\delta}(1^+) = 1$.

Rappelons que l'équation qui définit un point fixe positif de (3.1) satisfait

$$rx_p^{\gamma-1} - 1 - \delta x_p^m = 0. \quad (3.6.5)$$

Fixons $m > 0$ et $\delta > 0$ et définissons

$$F(x_p, \gamma) = rx_p^{\gamma-1} - 1 - \delta x_p^m, \quad \text{avec } x_p > 0 \text{ et } \gamma > 0. \quad (3.6.6)$$

Par le théorème des fonctions implicites, l'équation $F(x_p, \gamma) = 0$ définit une fonction $x_p = x_p(\gamma)$ si

$$\frac{\partial x_p}{\partial \gamma} = \frac{\partial F}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial x_p}{\partial F} = \frac{rx_p^{\gamma-1} \ln(x_p)x_p}{-r(\gamma-1)x_p^{\gamma-1} + \delta x_p^m m} = \frac{(1 + \delta x_p^m) \ln(x_p)x_p}{1 - \gamma + \delta x_p^m(m - \gamma + 1)} \neq 0. \quad (3.6.7)$$

Nous montrons d'abord que le dénominateur est toujours positif.

En effet, si $\gamma < 1$ alors

$$1 - \gamma + \delta x_p^m(m + 1 - \gamma) > 0. \quad (3.6.8)$$

Si $\gamma > 1$ alors $x_p > x^*$ avec x^* le point fixe défini dans l'équation (3.3.3) alors

$$1 - \gamma + \delta x_p^m(m + 1 - \gamma) > 1 - \gamma + \delta x_*^m(m + 1 - \gamma) = 0. \quad (3.6.9)$$

Par conséquent, le signe de $\frac{\partial x_p}{\partial \gamma}$ dépend de la valeur de x_p , donc $\frac{\partial x_p}{\partial \gamma} > 0$ si $x_p > 1$ et $\frac{\partial x_p}{\partial \gamma} < 0$ si $x_p < 1$.

Si $\gamma < 1$, alors $f(x) > x$ lorsque $x < x_p$, et $f(x) < x$ lorsque $x > x_p$.

Ainsi, $\gamma > 1 \iff f(1) > 1 \iff r > 1 + \delta$, et $x_p < 1 \iff f(1) < 1 \iff r < 1 + \delta$.

Pour $\gamma > 1$, les positions relatives de f_1 et f_2 assurent également que $x_p > 1$ si $r > 1 + \delta$ voir la figure 3.6.1. Donc, x_p est une fonction croissante de γ pour tout $\gamma > 0$.

Si $r = 1 + \delta$, alors $x = 1$ est un point fixe de l'équation (3.1) pour tous les $\gamma > 0$.

De plus, $x_p = 1$ est le plus grand point fixe positif si $\gamma \leq \gamma^*$; pour $\gamma \leq \gamma^*$, $x = 1$ est instable, et le plus grand point fixe positif est $x_p > 1$.

Ainsi, $x_p(\gamma)$ est une fonction croissante de γ dans $]\gamma^*, +\infty[$. ■

Remarque 3.6. Pour $r < 1 + \delta$, il n'y a pas de points fixes positifs, ce qui conduit à l'extinction de la population.

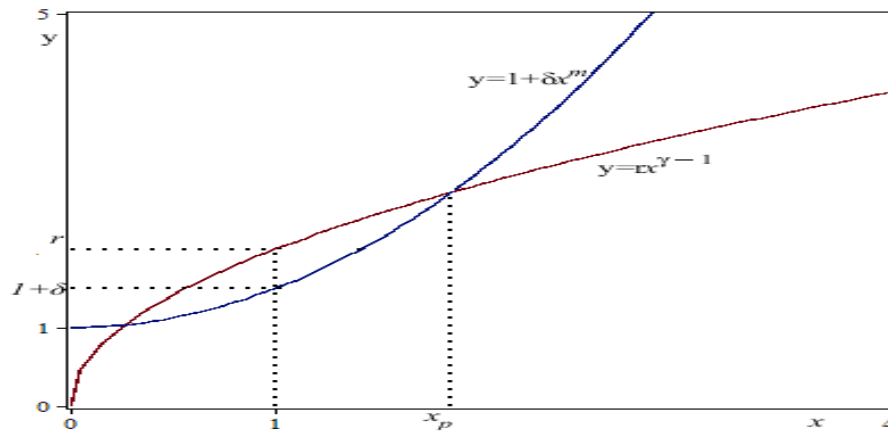


FIGURE 3.6.1 – Position relative des graphes de $f_1(x) = rx^{\gamma-1}$ et $f_2(x) = 1 + \delta x^m$ lorsque l'équation $f_1(x) = f_2(x)$ admet deux solutions positives.

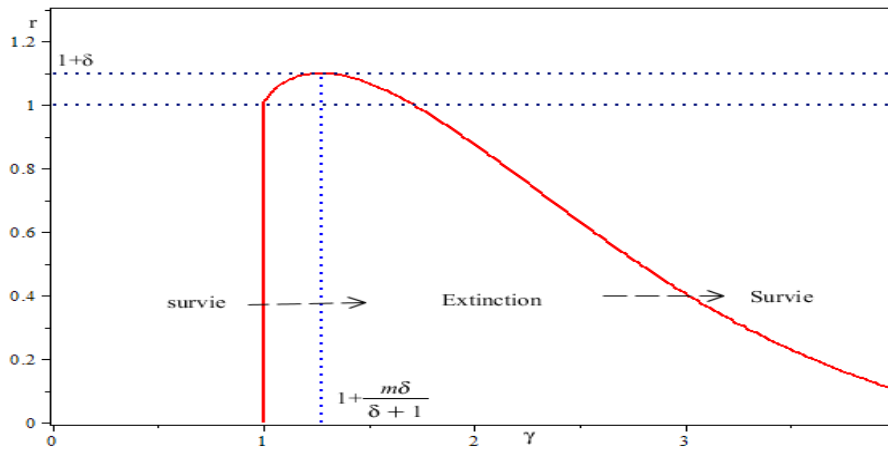


FIGURE 3.6.2 – Graphe $r = \Phi_{\delta,m}(\gamma)$ pour les transitions entre survie et extinction pour l'équation (3.1).

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, une analyse dynamique a été réalisée pour un nouveau modèle de Beverton-Holt. La principale caractéristique de ce modèle est sa flexibilité en présentant une croissance compensatoire, surcompensatoire ou depensatoire. Les conditions d'existence et de stabilité des points fixes en utilisant les courbes de bifurcation Fold et Flip

dans l'espace des paramètres R_0 , l'effet Allee pour $\gamma > 1$, ont été étudiés. De même, la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un répulsif SBR a été illustrée.

Conclusion générale

L'objectif assigné à cette thèse est l'étude dynamique de deux modèles unidimensionnels, l'un dépendant de trois paramètres et l'autre de quatre. Ces modèles sont des fonctions unimodales et présentent naturellement des effets Allee dans des espaces de paramètres spécifiques.

Dans un premier temps, nous avons étudié la dynamique du modèle de Weibull dans l'espace des paramètres Ω_0 . Une analyse des conditions d'existence et de stabilité des points fixes a été effectuée. Nous avons montré qu'un point fixe positif globalement stable existe lorsque l'effet Allee est absent. Lorsque l'effet Allee est présent, le modèle appartient à la classe des fonctions d'Allee, ce qui enrichit sa dynamique. Le modèle de Weibull fait partie de la classe des fonctions d'Allee avec une dérivée de Schwarz négative, conduisant à différents types de dynamiques (extinction, semi-stabilité et semi-stabilité chaotique). Des phénomènes de dynamique chaotique et d'extinction essentielle sont observés dans le modèle, et des exemples numériques de portraits de phase sont illustrés.

Ensuite, nous avons étudié le modèle de Beverton-Holt avec quatre paramètres dans l'espace R_0 . Les conditions d'existence et de stabilité des points fixes ont été mises en évidence, ainsi que leur zone de stabilité délimitée par les courbes de bifurcations Fold et Flip dans le cas de la présence ou de l'absence de l'effet Allee. Nous avons observé l'existence d'une bifurcation globale caractérisée par la naissance d'un répulsif SBR associé au point fixe d'Allee. Nous avons également étudié le rôle du paramètre γ d'Allee dans la stabilisation ou la déstabilisation de la dynamique des populations, sa capacité à favoriser ou à prévenir l'extinction des populations, ainsi que son impact sur la taille des populations.

Comme perspectives de recherche :

1. Déterminer dans quelles conditions la stabilité asymptotique implique la stabilité globale dans le cas unidimensionnel.
2. Étendre l'étude des modèles généralisés à la deuxième dimension et étudier la présence d'attracteurs de type Hénon.
3. Améliorer le modèle de Weibull à l'aide des développements de Taylor de la fonction de Lambert.
4. Étudier numériquement la bifurcation de big-bang des deux modèles étudiés.

Liste des contributions

Dans le cadre de cette thèse, nous avons réalisé les contributions scientifiques suivantes :

1. Articles en rapport avec la thèse :

- (a) C.BEDJGUELE AND H. GHAROUT AND B.FARHI , *Dynamical analysis of the Weibull model* , Mathematica - Volume 65 (88), No. 2 , 184-196.
- (b) C.BEDJGUELEL AND H. GHAROUT AND B.FARHI , *Dynamical analysis of the modified Beverton-Holt model*, journal of interdisciplinarily of mathematics (Accepté pour publication).

2. Communications :

- (a) C.BEDJGUELEL AND H.GHAROUT, *New class of unimodal functions* , Fourth Edition of the International Conference on Research in Applied Mathematics and Computer Science ICRAMCS'2022', 24-26 Mars 2022, Maroc.
- (b) C.BEDJGUELEL AND H.GHAROUT, *Dynamics study of the modified Beverton model*, The Second National Conference on Mathematics and its Applications (2nd SNCMA 2022, 17-18 Septembre 2022, Algérie.
- (c) C.BEDJGUELEL AND H.GHAROUT, *One-dimensional dynamic systems with Allee effect* , National Conference on Mathematics and Applications NCMA2022, 29 –30 November 2022, Algérie.
- (d) C.BEDJGUELEL AND H.GHAROUT, *Bifurcation and stability analysis of a discrete-time model with Double Allee effect*, International Conference on Contempo-

rary Mathematics and its Applications 'ICCMA 2023', 26-27 November 2023,
Algérie.

Bibliographie

- [1] D. Afungchui, C. E. Aban, *Analysis of wind regimes for energy estimation in Bamenda, of the North West Region of Cameroon, based on the Weibull distribution, Journal of Renewable Energies*, **17(3)**(2014), 137–147.
- [2] W. C. Allee, *Animal Aggregations*, University of Chicago Press, Chicago, 1931.
- [3] L. J. S. Allen, *An Introduction to Mathematical Biology*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 2007.
- [4] K. T. Alligood, T. D. Sauer, J. A. Yorke, *Chaos : An Introduction to Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [5] T. L. Anderson, *Fracture Mechanics-Fundamentals and Applications*, 3rd Edition, Taylor and Francis Ed, 2005.
- [6] C.Bedjguelel,H, Gharout, F. Farhi,*Dynamics analysis of the Weibull model*, *Mathematica*, **65(88)**(2)(2023), 184–196.
- [7] C.Bedjguelel,H, Gharout, F. Farhi,*Dynamics analysis of the modified Beverton- Holt model*, *Journal of Interdisciplinary Mathematics*, **27(6)** (2024), 1257–1271.
- [8] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, P. Stacey, On Devaney’s definition of chaos, *Am. Math. Month.* **99(4)** (1992), 332–334.
- [9] R.Beverton,S., Holt, *On the dynamics of exploited fish populations*, *Fisheries Investigations*, Ser 2, **19** (1957) , 1-533.
- [10] G. D.Birkhoff *Collected Mathematical Papers*, Dover Publication, New York, 1968.
- [11] A. A. Blumberg *Logistic growth rate functions*, *J. Theor. Biol.*, **21** (1968), 42–44.

- [12] M. Bohner, S. Streipert, S., *Optimal harvesting policy for the Beverton–Holt model*, Mathematical Biosciences and Engineering, **13**(4) (2016), 673-695.
- [13] F. Bozkurt, A. Yousef, *Flip bifurcation and stability analysis of a fractional-order population dynamics with Allee effect*, J. Interdiscip. Math. **22**(6) (2019), 1009–1029.
- [14] Q. Brandon, T. Ueta, D. Fournier-Prunaret, T. Kousaka, *Numerical bifurcation analysis framework for autonomous piecewise-smooth dynamical systems*, Chaos, Solitons and Fractals, **42**(2009) 187-201.
- [15] M. Burlando, F. Castino, C.F, Ratto, *A procedure for wind power estimation : an application to the Bonifacio area*, Proceedings In Vento, Milan, Italy, 2002, 15–18.
- [16] R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. H. Jeffrey, D. E. Knuth , *On the Lambert W function*, Advances in Computational Mathematics, **5**(1)(1996), 329-359.
- [17] F. Courchamp, L. Berec, J. Gascoigne, *Allee Effects in Ecology and Conservation*, Oxford University, 2008.
- [18] S. S. Cross, D. W. K. Cotton, *Chaos and antichaos in pathology*, Human Pathol., **25**(1994), 630–637.
- [19] D. Cushing, *The dependence of recruitment on parent stock in different groups of fishes*, J.Conseil, **33** (1971), 340-362.
- [20] P. Cull, *Local and global stability for population models*, Biological Cybernetics, **54** (1986), 141-149.
- [21] H. Dang-Vu, C. Delcarte, *Bifurcations et Chaos, Paris, Ellipses*, 2000.
- [22] T. P. Dance, *A brief look into the Lambert W function*, Applied Mathematics, **4**(6) (2013), 887-892.
- [23] B. Dennis, *Allee effects : Population growth, critical density and the chance of extinction*, Natural Resource Modeling, **3** (1989), 481-538.
- [24] R. L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, Addison-Wesley, Redwood City, CA, 2003.
- [25] S. N. Elaydi, *Discrete Chaos*, Chapman Hall/CRC, Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.2000.

- [26] S. Elaydi, E. Kwessi, G. Livadiotis, *Hierarchical competition models with the Allee effect III : Multispecies*, *J. Biol. Dyn.*, **12** (2018), 271–287.
- [27] M. Feigenbaum, *Quantitative universality for a class of nonlinear transformations*, *Journal of Statistical Physics*, **19** (1978), 25-52.
- [28] J. P. Francoise, Bertrandias, J.-P., *Mathématiques pour les sciences de la nature et de la vie*, Collection Grenoble Sciences, Press Univ. Grenoble, 1990.
- [29] L. Gardini, I. Sushko, V. Avrutin, M. Schanz, *Critical homoclinic orbits lead to snap-back repellers*, *Chaos Solitons and Fractals*, **44** (2011), 433–449.
- [30] H.Gharout, N. Akroune, A.K. Taha, *Chaotic Dynamics of Three-dimensionnel Endomorphism*, *Journal of Siberian Federal University, Mathematics and physics*, *12(1)*(2019),36-50.
- [31] H.Gharout, *Transformation ponctuelle de type polynomiale de dimension trois*. These de doctorat, Département des Mathématiques, Université de Bejaia, Algérie, Décembre 2018.
- [32] J. Guckenheimer, P. Holmes, *Nonlinear Oscillators, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, *Applied Mathematical Sciences*, Springer-Verlag, 1983.
- [33] M. Gyllenberg, A. V. Osipov, G. Söderbacka, , *Bifurcation analysis of a metapopulation model with sources and sinks*, *Journal of Nonlinear Science*, **6**(1996), 329–366.
- [34] P. A. Hall, D. A. Levinson, *Assessment of cell proliferation in histological material*, *J. Clin. Pathology*, **43** (1990), 184–192.
- [35] E. Hille, *Lectures on Ordinary Differential Equations*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1968.
- [36] M. Hirsch, S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, New York : Academic Press, 1974.
- [37] A. M. Kramer , B. Dennis, A. M. Liebhold, J. M. Drake, *The evidence for Allee effects*, *Popul.Ecol.*, **51** (2009), 341–354.
- [38] M. Kot, *Elements of Mathematical Ecology*, Cambridge University Press, New York, 2001.

- [39] Y. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag New York, 2004.
- [40] R. Lesobre, *Modelisation et optimisation de la maintenance et de la surveillance des systemes multi-composants : Applications a la maintenance et a la conception de vehicules industriels. Ph.D. Thesis, Ecole Doctorale Electronique, Electrotechnique, Automatique et Traitement du Signal (EEATS), France, 2015.*
- [41] J. Lehtonen, *The Lambert W function in ecological and evolutionary models*, *Methods in Ecology and Evolution*, **7** (2016), 1110-1118.
- [42] M. A. Lewis, P. Kareiva, *Allee dynamics and the spread of invading organisms*, *Theoretical Population Biology*, **43** (1993), 141-158.
- [43] T. Y. Li, J. A. Yorke, , *Period three implies chaos*, *Am. Math. Month.*, **82**, (1975), 985–992.
- [44] L.A. Lipsitz, A.L. Goldberger, *Loss of ‘complexity’ and aging. Potential applications of fractals and chaos theory to senescence*, *JAMA*, **267** (1992), 1806–1809.
- [45] E. Liz, *A global picture of the gamma-Ricker map : a flexible discrete-time model with factors of positive and negative density dependence*, *Bulletin of Mathematical Biology*, **80** (2018), 417–434 .
- [46] E. Liz., *A new flexible discrete-time model for stable populations*, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **23**, (2018) 2487–2498.
- [47] E. Liz., S.Buedo-Fernandez, *A new formula to get sharp global stability criteria for one dimensional discrete-time models*, *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, published online, (2019), 1-12.
- [48] J. Maynard Smith, M. Slatkin, *The stability of predator-prey systems*, *Ecology*, **54**, 1973, 384–391.
- [49] J. Maynard Smith, *Models in Ecology*, Cambridge University Press, 1974.
- [50] J. May, *Simple mathematical models with very complicated dynamics*, *Nature*, **261**(5560) (1976), 459-467.

- [51] A. G. Mihalache, *Modelisation et evaluation de la fiabilite des systemes mecatroniques : application sur systeme embarque*, Ph.D. Thesis, Institut des Sciences et Techniques de l'Ingenieur d'Angers, France, 2007.
- [52] C. Mira, *Détermination Pratique du Domaine de Stabilité d'un Point d'Équilibre d'une Récurrence Non-linéaire du Deuxième Ordre à Variables Réelles*, C. R. Acad. Sc. Paris, T. 261, Groupe 2, (1964), 5314-5317.
- [53] C. Mira, *Chaotic Dynamics*, World Scientific, Singapore, 1987.
- [54] J. Murray, *Mathematical Biology*, Springer, 1989.
- [55] J. V. Neumann, *The character of the equation*, Recent Theories of Turbulence (1949), in *Collected Works*, ed. A.H. Taub, Oxford : Pergamon Press, 1963.
- [56] L. F. Olsen, H. Degn, *Chaos in biological systems*, *Quarterly Review of Biophysics*, **18** (1985), 165-225.
- [57] R. Pearl, L. J. Reed, *On the rate of growth of the population of United States since 1790 and its mathematical representation*, *Proceedings National Academy of Sciences USA*, G, **275**, 1920.
- [58] T. J. Quinn, R. B. Deriso, *Quantitative Fish Dynamics*, Oxford University Press, New York, 1999.
- [59] F. J. Richards, *A Flexible Growth Function for Empirical Use*, *Journal of Experimental Botany*, **10(29)** (1959), 290-300.
- [60] W. E. Ricker, *Stock and recruitment*, *J. Fish. Res. Board Canada*, **11** (1954), 559-623.
- [61] J. L. Rocha, A. K. Taha, *Allee effect bifurcation in generalized logistic maps*, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **29** (2019), 1-19.
- [62] J. L. Rocha, S. Aleixo,, *Dynamical analysis in growth models : Blumberg's equation*, *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B*, **18** (2013), 783-795.
- [63] J. L. Rocha, D. Fournier-Prunaret, A. K. Taha, *Big bang bifurcations and Allee effect in Blumberg's dynamics*, *Nonlinear Dynamics*, **77** (2014), 1749-1771.

- [64] J. L. Rocha, A. K. Taha, D. Fournier-Prunaret, *Big bang bifurcation analysis and Allee effect in generic growth functions*, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **26** (2016), 1650108,1–20.
- [65] J. L. Rocha, A. K. Taha, *Bifurcation analysis of the γ - Ricker population model using the Lambert W function*, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **30(7)** (2020), 2050108.
- [66] J. Roughgarden, *Theory of Population Genetics and Evolutionary Ecology*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1996.
- [67] B. Saha, A. R. Bhowmick, J. Chattopadhyay, S. Bhattacharya, *On the evidence of an Allee effect in herring populations and consequences for population survival : A model-based study*, *Ecological Modelling*, **250** (2013), 72-80.
- [68] S. Schreiber, *Chaos and population disappearances in simple ecological models*, *Journal of Mathematical Biology*, **42**, (2001), 239–260.
- [69] T.C. Scott, G. Fee, J. Grotendorst, *Asymptotic series of generalized Lambert W function*, *ACM Communications in Computer Algebra*, **47(3)** (2013), 75-83.
- [70] S. Schreiber, *Allee effects, extinctions, and chaotic transients in simple population models*, *Theoretical Population Biology*, **64** (2003), 201–209.
- [71] J. G. Shepherd, *A versatile new stock-recruitment relationship for fisheries, and the construction of sustainable yield resources*, *Journal du Conseil International pour l'Exploration de la Mer*, **40** (1982), 67–75.
- [72] D. Singer, *Stable orbits and bifurcation of maps of the interval*, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **35** (1978), 260-267.
- [73] P. A. Stephens, W. J. Sutherland, R. P. Freckleton, *What is the Allee effect*, *Oikos*, **87** (1999), 185-190.
- [74] M.E. Turner, B. Bradley, K. Kirk, K. Pruitt, *A generalization of the logistic law of growth*, *Biometrics*, **25** (1969), 577-580.
- [75] M.E. Turner, E. Bradley, K. Kirk, K. Pruitt, *A Theory of Growth*, *Mathematical Biosciences*, **29** (1976), 367-373.

- [76] P. F. Verhulst, *Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement*, *Correspondance Mathématique et Physique*, **10** (1838), 113.
- [77] W. Waloddi, *A statistical distribution function of wide applicability*, *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, **73** (1951), 405-413.
- [78] J. A. Walter, K. L. Grayson, D. M. Johnson, *Variation in Allee effects : Evidence, unknowns, and directions forward*, *Population Ecology*, **59** (2017), 99–107.
- [79] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag : New York, 1990.

Résumé

L'objectif de cette thèse est une étude de la dynamique des modèles unidimensionnels avec effet Allee, représentés par des équations aux différences. Plus spécifiquement, elle se concentre sur l'étude de la stabilité et le bassin d'attraction pour les points fixes des deux modèles. Cette étude s'appuie sur la théorie des bifurcations. Une analyse exhaustive des conditions d'existence et de stabilité des points fixes a été faite. Le rôle du paramètre Allee en tant que paramètre de bifurcation et son influence sur la dynamique des modèles est analysé. .

Mots clés : fonction unimodale, point fixe, stabilité, bifurcation ,effet Allee, chaos.

Abstract

The aim of this thesis is to study the dynamics of one-dimensional models with the Allee effect, represented by difference equations. More specifically, it focuses on the study of the stability and the basin of attraction for the fixed points of the two models. This study is based on bifurcation theory. An exhaustive analysis of the conditions for the existence and stability of equilibria has been carried out. A study of the role of the Allee parameter as a bifurcation parameter and its impact on the dynamics of the models is carried out.

Key words : unimodal function , fixed point, stability, bifurcation, Allee effect, chaos.

المُلخَص

الهدف من هذه الأطروحة هو دراسة ديناميكيات التّماذج أحادية البعد مع تأثير ألي، ممثلة بمعادلات الفرق. و تركز بشكل أكثر تحديدا على دراسة الإستقرار و حوض الجذب للنقاط الثابتة . تعتمد هذه الدراسة على نظرية التّشعب. و قد تمّ إجراء تحليل شامل لشروط وجود و ثبات الإترزين. أجريت دراسات لدور الوسيط ألي كوسيط تشعب و تأثيره على دينميكيات التّموذجين. **كلمات المفتاح :** دالة أحادية النمط، الإستقرار، تشعبات، النقط الثابتة، تأثير ألي، الفوضى.

