

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique



Université Abderrahmane Mira  
Faculté de la Technologie



Département d'Automatique, Télécommunication et d'Electronique

## Projet de Fin d'Etudes

Pour l'obtention du diplôme de Master

Filière : Automatique

Spécialité : Automatique et informatique industrielle

### Thème

**Etude comparative des méthodes d'ajustement  
de PID pour la commande des systèmes**

**Préparé par :**

➤ **Mr. MEBARKI Louenes**

**Dirigé par :**

**Mr. HEDDAR Hocine**

**Examiné par :**

**Mr. LEHOUCHE Hocine**

**Mme. AMROUCHE Hakima**

Année universitaire : 2023/2024

---

## *Remerciement*

---

Tout d'abord, je tiens à remercier le bon Dieu le tout Puissant de m'avoir donné la force et le courage de mener à bien ce modeste travail.

Je tiens à remercier mon encadreur monsieur Mr. HEDDAR Hocine.

J'ai l'honneur de bénéficier de votre riche enseignement, merci pour votre soutien, votre aide, votre orientation et vos conseils si précieux.

Un énorme merci aux membres de jury d'avoir accepté de juger ce modeste travail.

Chaleureux remerciement à ma famille qui m'a soutenu moralement, je remercie mes parents, mon frère mes sœurs, qui mon encouragé et aidé à arriver à ce stade de ma formation.

Je tiens vivement à remercier l'ensemble du AAI « AMAZDAY ADELSAN INLMADEN »,et tous ceux et celles qui m'ont soutenu dans la réalisation de ce modeste travail.

# Sommaire

---

Sommaire.....	3
Introduction générale.....	1
Chapitre I : Commande des systèmes.....	2
I.1. Introduction.....	2
I.2. La commande PID.....	2
I.3. Correcteur proportionnel - intégral – dérivée.....	2
I.4. Commande par retour d'état.....	3
I.4.1. Structure de la loi de commande.....	3
I.4.2. Contrôlabilité.....	4
I.4.3. Placement de pôles par retour d'état :.....	4
I.4.3. Principe.....	4
I.4.4. Calcul du gain du retour d'état.....	5
I.5. Commande linéaire quadratique (LQR).....	6
I.5.1. Présentation de la méthode LQR.....	6
I.5.2. Le critère de compromis :.....	7
I.5.3. Choix des matrices de pondérations Q et R.....	7
I.5.4. Recherche du gain du retour K.....	8
I.5. Commande $H_2/H_\infty$ en utilisant les LMIs [12].....	8
I.5.1. Définition de problèmes LMIs et leurs solutions numériques.....	8
I.5.1.1 Théorème Stabilité.....	9
I.5.1.2 Théorème Région de Stabilité.....	9
I.5.1.3 Théorème Performance $H_2$ .....	9
I.5.1.4 Théorème Performance $H_\infty$ .....	9
I.5.2. Synthèse de commande optimale en utilisant les LMIs.....	10
I.6. Conclusion.....	11
Chapitre II : Méthodes de synthèse des gains PID.....	12
II.1. Introduction.....	12
II.2. Définition du contrôleur PID :.....	12
II.2.1. Types de contrôleurs.....	12
II.2.2. Principe de fonctionnement d'un régulateur PID.....	12
II.2.3. Action proportionnelle.....	13
II.2.4. Action intégral.....	13
II.2.5. Action dérivé.....	13
II.3. Différentes architectures des contrôleurs PID.....	14
II.3.1. Architecture parallèle.....	14
II.3.2. Architecture série.....	15

II.3.3. Architecture standard .....	15
II.3.4. Principale différence.....	16
II.4. Méthodes de synthèse des contrôleurs PID .....	16
II.4.1. Méthode de Ziegler-Nichols :.....	16
II.4.2. Méthode de la réponse indicielle.....	16
II.4.3. Méthode du point critique: .....	17
Chapitre III : Analyse et simulations de méthodes de conception de PID.....	18
III.1. Introduction : .....	18
III.2. Utilisation de la LQR pour la conception de PID : .....	18
PID de type 1 : .....	18
PID de type 2 : .....	20
PID de type 3 : .....	21
III.3. Calcul de PID pour des systèmes multi-variable en utilisant la LQR :.....	24
III.4. Conception de PID par l'utilisation des LMIs .....	29
III.5. Conception de PID par l'algorithme génétique :.....	33
Simulation et résultat.....	35
Plage des paramètres PID : .....	35
III.6. Conclusion :.....	39
Conclusion générale .....	40
Références bibliographiques .....	41
Résumé .....	42
Abstract .....	42

---

## *Liste des figures*

---

Figure (I-1) Commande PID .....	3
Figure (I-2) Principe du placement du pole [2].....	5
Figure (I-3) Système généralisé pour la commande $H_2/H_\infty$ en boucle fermée .....	10
Figure (II-1) Régulateur PID.....	12
Figure (II-2) Réponses des différentes actions.....	14
Figure (II-3) Architecture parallèle .....	14
Figure (II-4) Architecture série .....	15
Figure (II-5) Architecture standard .....	15
Figure (II-6) Exemple d'une réponse indicielle .....	16
Figure (III-1) Bloc diagramme du système en boucle fermée avec PID de type i.....	18
Figure (III-2) Développement du bloc diagramme en boucle fermée pour faire apparaître les états. ....	19
Figure (III-3) Conversion de la commande par PID en une commande par retour d'état. ....	19
Figure (III-5) Conversion du PID de type iii en commande par retour d'état. ....	21
Figure (III-6) Principe de la commande LQR pour les systèmes à retard .....	23
Figure (III-7) Bloc diagramme de la commande de systèmes avec délais (La fonction <code>lqr_delay</code> implémente les équations (III-12))......	24
Figure (III-8) Modèle SIMULINK utilisé pour la simulation du PID multi-variable conçu pour le système (III-24) en utilisant la LQR. ....	27
Figure (III-9) Résultats de simulation en boucle fermée du PID multi-variable conçu en utilisant la LQR et le système de l'exemple 1 avec une constante de temps du filtre du dérivateur $\tau=0.01$ sec. ....	28
Figure (III-10) Représentation en boucle fermée d'un système avec PID multi-variable.....	29
Figure (III-11) Représentation du système généralisé en boucle fermée pour la conception de la commande par retour d'état en utilisant les LMIs et les performances $H_2/H_\infty$ . ....	30
Figure (III-12) Résultats de simulation en boucle fermée du PID multi-variable conçu en utilisant les LMIs et la commande $H_\infty$ pour le système de l'exemple 1 ( $\tau_{\text{filtre}} = 0.1$ sec. ....	33
Figure III.13 Organigramme de l'algorithme génétique pour le réglage PID.....	35
Figure (III-14) Réponse du système de control PID à un échelon (G1) .....	37
Figure (III-15) Réponse du système de control PID à un échelon (G2) .....	37
Figure (III-16) Réponse du système de control PID à un échelon (G3) .....	37
Figure (III-17) Réponse du système de control PID à un échelon (G1) .....	38
Figure (III-18) Réponse du système de control PID à un échelon (G2) .....	38
Figure (III-13) Réponse du système de control PID à un échelon (G3) .....	38

---

## *Liste des tableaux*

---

<b>Tableau (II.1) :</b> Paramètres PID obtenus à partir d'une réponse indicielle (ZNt).....	17
<b>Tableau (II.2) :</b> Paramètres PID obtenus à partir du point critique (ZNf ).....	17
<b>Tableau (III.1) :</b> Différents types de PID .....	18
<b>Tableau (III.2) :</b> Réglage de paramètre de GA.....	34
<b>Tableau (III.3):</b> Plage de paramètres PID. ....	36
<b>Tableau (III.4) :</b> Les contraintes.....	36
<b>Tableau (III.5) :</b> Comparaison de performance des systèmes optimisé par ISE selon les contraintes.....	36
<b>Tableau (III.6) :</b> Comparaison de performance des systèmes optimisé par IAE selon les contraintes. ....	37

# **Introduction**

## **Générale**

# Introduction générale

---

La conception et la synthèse des régulateurs PID (Proportionnel, Intégral, Dérivé) revêtent une importance capitale dans le domaine de l'automatique et du contrôle des systèmes. Les contrôleurs PID sont omniprésents dans l'industrie en raison de leur simplicité et de leur efficacité à stabiliser une grande variété de processus. Ils répondent à plus de 90 % des besoins industriels, notamment dans les usines pétrolières et les systèmes de régulation thermique. L'importance de ce sujet réside dans la capacité des contrôleurs PID à maintenir la stabilité des systèmes en boucle fermée tout en optimisant les performances, telles que la rapidité de réponse et la minimisation des erreurs en assurant et en garantissant des réponses robustes face aux incertitudes et perturbations. [1]

L'actualité de la conception et de la synthèse des paramètres PID se manifeste par le développement continu de nouvelles méthodes d'optimisation et de régulation. Parmi ces méthodes, les approches basées sur la régulation quadratique linéaire (LQR), les inégalités matricielles linéaires (LMI) et les algorithmes génétiques (AG) offrent des alternatives prometteuses aux techniques traditionnelles de réglage PID. Ces méthodes modernes permettent de surmonter les limitations des approches classiques en offrant des solutions optimisées pour des systèmes complexes et multi-variables.

L'objectif de ce mémoire est de présenter et d'analyser trois méthodes distinctes pour la conception des paramètres PID : la méthode de régulation quadratique linéaire (LQR), les inégalités matricielles linéaires (LMI) et les algorithmes génétiques (AG). Chacune de ces méthodes sera étudiée en détail, en mettant en évidence leurs principes, leurs avantages et leurs inconvénients, ainsi que leur application pratique à travers des simulations et des études de cas.

La méthodologie suivie dans ce document inclut une revue approfondie des concepts théoriques, suivie par une application pratique de chaque méthode. Les chapitres sont organisés comme suit : le premier chapitre introduit les bases de la commande des systèmes et présente les principes fondamentaux du contrôleur PID. Le deuxième chapitre détaille les différentes architectures et méthodes de synthèse des gains PID, tandis que le troisième chapitre est dédié à l'analyse et aux simulations des méthodes LQR, LMI et AG pour la conception de PID. Chaque chapitre se termine par une conclusion synthétisant les points clés discutés.

En conclusion, ce mémoire vise à fournir une compréhension approfondie des différentes approches modernes pour la conception des paramètres PID, en mettant l'accent sur leurs applications pratiques et leurs performances comparatives.

# Chapitre I :

# Commande des systèmes

---

# Chapitre I : Commande des systèmes

---

## I.1. Introduction

Un système non linéaire est un ensemble d'équations non linéaires (telles que différentielles) qui décrivent l'évolution temporelle des variables constitutives du système sous le contrôle d'un nombre fini de variables indépendantes appelées entrées ou variables de commande, ou simplement commandes qui peuvent être choisies librement pour atteindre des objectifs spécifiques. Les points d'entrée peuvent soit être choisis avec une case ouverte, ce qui signifie qu'ils ne dépendent que du temps, soit avec une case fermée, ce qui signifie qu'ils dépendent des variables mesurées, appelées observations, qui gardent une trace de l'état du système à un moment donné. Nous allons dans ce premier chapitre, donner quelques techniques de commande des systèmes.

## I.2. La commande PID

Les contrôleurs PID répondent à plus de 90% des besoins industriels, par exemple, des milliers de contrôleurs sont installés dans les usines pétrolières. Parmi les innombrables méthodes de réglage des PID, cette section présente les méthodes les plus utilisées dans le contrôle de processus industriels. Aucune méthode de réglage n'est complète est polyvalente et il est important de comprendre que c'est la connaissance du comportement du processus qui conduit à l'application de la méthode pour obtenir des paramètres PID réglés de manière satisfaisante. [1]

*Le contrôleur peut être jugé selon les critères suivants :*

1. Le contrôleur doit être capable de maintenir la variable contrôlée à sa valeur de consigne.
2. Le système en boucle fermée doit être asymptotiquement stable et présenter des performances satisfaisantes sur une large gamme de fréquences. L'effet des interférences doit être minimax.
3. La réponse aux changements du point de consigne doit être rapide et douce.
4. Des actions de contrôle excessives doivent être évitées (la variable de contrôle  $u(t)$  ne doit pas être trop grande).

Le système de contrôle doit être robuste: il doit être insensible aux variations du procédé et aux erreurs du modèle de procédé.

## I.3. Correcteur proportionnel - intégral – dérivée

Les termes proportionnels et intégraux peuvent provoquer des dépassements de consigne et des oscillations. Pour limiter ce comportement indésirable, nous introduisons un troisième élément, le terme dérivé. Son action dépendra du signe et du taux de variation de l'erreur, et est à l'opposé de l'action proportionnelle. Au fur et à mesure que l'erreur diminue, elle devient dominante autour de la valeur souhaitée, le terme proportionnel devient moins efficace et l'intégrale évolue peu : elle ralentit alors le système, limite les dépassements et réduit le temps d'établissement.

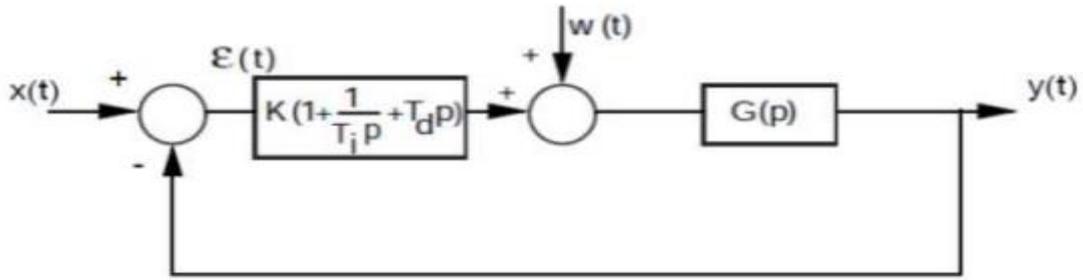


Figure (I-1) Commande PID

Le correcteur PID a pour but de combiner les effets positifs des trois corrections. La détermination des coefficients  $K_p$ ,  $K_i$ ,  $K_d$  du correcteur PID peut améliorer à la fois la précision, la stabilité et la vitesse .

Le réglage PID est généralement assez compliqué, mais les méthodes de réglage pratiques donnent de bons résultats. Il est régi par la relation suivante:

$$u(t) = k_p \cdot e(t) + k_i \int_0^t e(\tau) d\tau + k_d \frac{de(t)}{dt} \quad (\text{I-1})$$

Sa fonction de transfert est donnée par :

$$C(p) = k_p + \frac{K_i}{s} + k_d s = k_p \left( 1 + T_d \cdot s + \frac{1}{T_i \cdot s} \right) \quad (\text{I-2})$$

En général, on a les qualités suivantes du correcteur PID

- L'action proportionnelle est souvent utilisée pour la vitesse du système en boucle fermée.
- L'action intégrale est utilisée pour améliorer l'erreur en régime permanent.
- L'action différentielle améliore la stabilité

## I.4. Commande par retour d'état

### I.4.1. Structure de la loi de commande

Les équations du système en boucle fermée sont [2]:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ Y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ U(t) = e(t) - Kx(t) \end{cases} \quad (\text{I-3})$$

L'équation d'état du système en boucle fermée s'écrit :

$$\dot{x} = [Ax(t) + B[e(t) - Kx(t)]] = (A - BK)x(t) + Be(t) \quad (\text{I-4})$$

Par conséquent, la matrice d'état du système en boucle fermée vaut  $(A - BK)$ . Les dynamiques du système en boucle fermée sont donc fixées par les valeurs propres de la matrice  $(A - BK)$  ; ces valeurs propres sont les racines de l'équation caractéristique :

$$\text{Det}(sI - (A - BK)) = 0 \quad (\text{I-5})$$

### I.4.2. Contrôlabilité

Le système décrit par l'équation I-3 est dit contrôlable à  $t=t_0$  s'il est possible de construire un signal de commande sans contrainte qui transférera l'état initial à n'importe quel état final dans un intervalle fini de temps  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Si chaque état est contrôlable, alors le système est dit complètement contrôlable. La condition nécessaire et suffisante pour que le système soit complètement contrôlable, est que le rang de la matrice  $(n \times n)$  :

$$Cc = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (I-6)$$

### I.4.3. Placement de pôles par retour d'état :

Nous supposons que toutes les variables d'état sont mesurables et sont disponibles pour la rétroaction. Si le système considéré est complètement contrôlable, alors les pôles du système en boucle fermée peuvent être placés à n'importe quel endroit désiré au moyen d'un retour d'état à travers une matrice de gain approprié.

#### I.4.3. Principe

Le principe est de déterminer une commande telle que les pôles du système en boucle fermée soient convenablement placés dans le plan complexe et satisfassent des spécifications d'amortissement, et de rapidité [2].

Les pôles de la fonction de transfert étant les valeurs propres de la matrice d'état. Par conséquent, l'objectif est d'obtenir un contrôle qui modifie de manière appropriée la matrice d'état du système. C'est-à-dire imposer un comportement spécifié ou des propriétés souhaitées au système en appliquant des lois de commande qui placent les pôles du système en boucle fermée dans des positions permettant d'obtenir ces propriétés.

La détermination des pôles en boucle fermée requis est basée sur des critères de réponse transitoire et/ou de réponse en fréquence tels que la vitesse, l'amortissement ou la bande passante, et les conditions de régime permanent. En d'autres termes, il s'agit de trouver une loi de commande linéaire telle que les pôles d'un système de commande en boucle fermée avec cette loi coïncident exactement avec les racines du polynôme :

$$P(s) = s^n + P_n s^{n-1} + \dots + P_2 s + P_1 \quad (I-7)$$

La loi de commande qui satisfait l'objectif précédent est alors appelée : « commande par placement de pôles ».

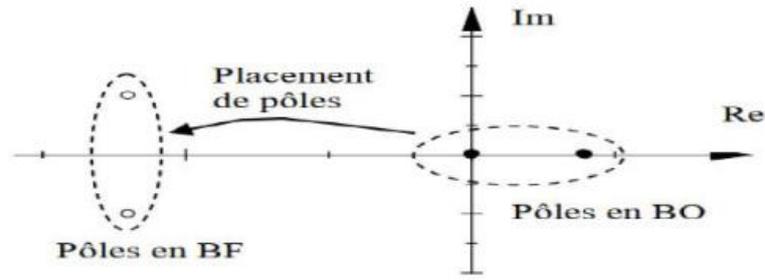


Figure (I-2) Principe du placement du pôle [2]

En d'autres termes, le principe consiste à introduire de nouveaux paramètres dans le système afin que l'on puisse contrôler les positions des pôles du système en boucle fermée. Un système de contrôle en boucle fermée d'ordre  $n$  aura une équation caractéristique d'ordre  $n$  de la forme :

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 \quad (I-8)$$

#### I.4.4. Calcul du gain du retour d'état

Le but est de calculer la matrice d'ajustement  $K$  pour imposer les pôles du système en boucle fermée. Ce problème revient à imposer un polynôme caractéristique du système. Soit  $P(s)$  le polynôme recherché de degré  $n$ .

Pour calculer la matrice de gain  $K$  nécessaire pour le placement de pôles, plusieurs méthodes existent dans la littérature. Dans ce qui suit nous exposerons trois d'entre elles.

##### a. Substitution directe

Pour les systèmes d'ordre inférieur ou égal à 3, on peut substituer le gain  $K = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n]$  directement dans le polynôme caractéristique  $|sI - [A - BK]|$

Si le comportement désiré est spécifié à travers la sélection de  $n$  valeurs propres désirées  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  alors le polynôme caractéristique désiré en boucle fermée est donné par :

$$P_{BF}(s) = (s - \mu_1) * (s - \mu_2) \dots (s - \mu_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n \quad (I-9)$$

Comme le système en boucle fermée doit avoir comme pôles ceux du polynôme désiré, l'égalité suivante doit être vérifiée :

$$|sI - [A - BK]| = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n \quad (I-10)$$

Ce qui donne comme solution les éléments du vecteur gain  $k_1, k_2 \dots k_n$ .

##### b. Forme contrôlable

Si le système est contrôlable (qui est la condition nécessaire et suffisante pour le placement des pôles), on peut définir la transformation d'état  $x = Tz$ , avec la matrice de transformation :

$$W = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_{n-2} & \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1-11)$$

$$|sI - A| = s^n + \alpha s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n \quad (1-12)$$

Alors le vecteur gain est donné par la formule :

$$K = [\alpha_n - a_n \alpha_{n-1} - a_{n-1} \dots \alpha_1 - a_1] T^{-1} \quad (\text{I-13})$$

### c. Formule d'Ackermann

La formule d'Ackermann pour la détermination de la matrice de gain K est donnée par l'équation suivante :

$$K = [0 \dots 01] C c^{-1} \varphi(A) \quad (\text{I-14})$$

Où

$$\varphi(A) = A^n + \alpha_i A^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n \quad (\text{I-15})$$

Nous venons de voir le principe de détermination des gains d'un système en boucle fermée par placement de pôles.

*Les étapes du calcul de la commande sont alors les suivantes :*

- Calcul de la matrice (A - BL).
- Calcul du polynôme caractéristique de (A - BL). Il vaut  $\det(sI - (A - BL))$ .
- Identification du polynôme caractéristique de (A-BL) avec le dénominateur de la fonction de transfert de la boucle fermée

## I.5. Commande linéaire quadratique (LQR)

La commande linéaire quadratique est expliquée comme suit : LQ ou LQR pour un "contrôleur quadratique linéaire", le système est linéaire et le coût est quadratique, le meilleur contrôle est le retour d'état de la forme :

$$u = -K \cdot x(t) \quad (\text{I-16})$$

Qui a pour but de minimiser Le critère quadratique J qui s'exprime par la formule suivante :

$$J = \int_0^{\infty} (X^T Q x + u^T R u) dt \quad (\text{I-17})$$

Où x représente le vecteur d'état, Q est une matrice de poids diagonaux d'ordre (nxn) qui garantit la pénalité du vecteur d'état pour chaque variable d'état en fonction des coefficients attribués, et R est un scalaire représentant la pénalité d'énergie d'entrée [3].

### I.5.1. Présentation de la méthode LQR

Pour contrôler U linéairement grâce à x, on utilise la loi de commande :  $U(t) = -Kx(t)$ .

Le problème est de trouver le retour d'état de régulation optimal en termes de compromis vitesse, puissance et énergie de commande. Le problème est donc de trouver la matrice de gain pour le retour d'état K. Si vous travaillez en temps fini, R changera avec le temps. Néanmoins, nous constatons que R reste essentiellement constant. Il ne change qu'au début de la servocommande, par exemple lorsqu'un avion décolle ou atterrit. Nous avons donc divisé le problème en deux parties.

- Trouvez la partie constante de K qui est utilisée pendant la majeure partie du temps d'asservissement.
- Trouver tout K correspondant à tout  $\sigma$  de la partie significative.

Cependant, cela nécessiterait beaucoup de calculs car les calculs devraient être effectués dans l'ordre inverse. Pour cette raison, lorsqu'il s'agit d'asservissement non critique, nous choisissons souvent de l'ignorer. [3]

### I.5.2. Le critère de compromis :

- Vitesse de rejet de perturbations :

$$J_x = \sum_{n=1}^{\infty} X_d^T(K) Q X_d(k) \quad (I-18)$$

- Énergie de commande:

On peut évaluer l'énergie de commande par le critère :

$$J_u = \sum_{n=1}^{\infty} U^T(K) R U(k) \quad (I-19)$$

- Critère de compromis:

$$J(x_0, k_0, u) = J_u + J_x = \sum_{n=1}^{\infty} (X_d^T(k) Q X_d(k) + U^T(k) R U(k)) \quad (I-20)$$

Où : R et Q : Sont des matrices de pondérations symétriques définies positive.  $U^T(k) R U(k) > 0, X^T(k) Q X(k) \geq 0$

Dans le cas d'un problème LTI (linéaire à temps invariant) le gain du retour statique est une constante, les matrices Q et R doivent être spécifiées : les performances de la commande dépendent fortement des valeurs numériques des coefficients de ces matrices.

L'opérateur doit choisir les matrices de pondération. Ce résultat est important du point de vue des applications, car il permet de mettre en œuvre une commande en boucle fermée. Fonction de l'état du système ; le gain de retour k est constant et ne dépend que des paramètres du système et des matrices de pondérations Q et R du critère d'optimisation.

### I.5.3. Choix des matrices de pondérations Q et R

La commande LQR permet de calculer une loi de commande linéaire optimale grâce à une fonction de cout J, que LQR minimise. Q et R sont alors les matrices de pondération de x et u de la fonction de cout. Cependant, Q doit être semi-positive et R doit être définie positive. Elles expriment les préférences de l'ingénieur pour le contrôle sur A et B. Pour commencer, on se limite à l'élaboration de matrices de pondération diagonales. Il n'existe pas de manière systématique pour les calculer car elles ne représentent que des préférences mais il existe certaines heuristiques pour se donner une valeur de départ selon la règle de Bryson. On peut ensuite affiner les matrices initiales jusqu'à un résultat satisfaisant avec la méthode de tâtonnement. [3]

$$R = \text{diag} (r_1, r_2, r_3 \dots r_m) ; Q = \text{diag} (q_1 q_2 \dots q_m) \quad (I-22a)$$

$$Q_i = \frac{1}{\text{sup}(u_i)} ; i = 1, 2 \dots n \quad (I-22b)$$

$$R_i = \frac{1}{\sup(ui)} ; i = 1, 2 \dots m \quad (I-22c)$$

#### I.5.4. Recherche du gain du retour K

Pour trouver le gain du retour K en temps infini, on applique la formule suivante :

$$K = (R + B_d^T P B_d)^{-1} B_d^T P A_d \quad (I-23)$$

P est obtenu par la résolution de l'équation de Riccati :

$$P = Q + A_d^T (P - P B_d (R + B_d^T P B_d)^{-1} B_d^T P) A_d \quad (I-24)$$

En rapportant la commande u formulée en (I.15), dans l'équation d'état, on obtient l'équation différentielle décrivant le comportement du système en boucle fermée :

$$\dot{x}(k) = (A_d - B_d K x(k)) \quad (I-25)$$

### I.5. Commande $H_2/H_\infty$ en utilisant les LMIs [12]

Durant les années 2000 des méthodes à point interne puissantes ont été développées pour résoudre des inégalités matricielles linéaires (Linear Matrix Inequalities). La disponibilité d'outils software qui permettent une représentation simple des problèmes LMIs et leur solution a emmené les chercheurs à reformuler les problèmes de commande en un problème de faisabilité de certaines LMIs ou alternativement en un problème d'optimisation d'un fonctionnel soumis à des contraintes sous forme de LMIs.

#### I.5.1. Définition de problèmes LMIs et leurs solutions numériques

Une inégalité linéaire matricielle (LMI) est une contrainte sous la forme :

$$F(x) = F_0 + F_1 x_1 + F_2 x_2 + \dots + F_n x_n < 0 \quad (I-26)$$

Où  $F_0, F_1, \dots, F_n$  sont des matrices réelles symétriques données et  $x = [x_1 \ \dots \ x_n]^T$  est un vecteur de variables réels inconnus de décisions. Le symbole  $<$  signifie que la matrice  $F(x)$  est définie négative. Cette LMI donne naissance à deux types de questions :

- Le problème de faisabilité de LMI : remonte à vérifier s'il existe des variables réels  $x_1, x_2, \dots, x_n$  tels que l'inégalité (I-26) soit vérifiée.
- Le problème d'optimisation de LMI : Remonte à minimiser le cout  $c(x) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$  en fonction des variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  et en remplissant la contrainte (I-26).

Les programmes linéaires et les programmes quadratiques classiques entre dans cette catégorie de problèmes.

Dans plusieurs problèmes de commande, les LMI apparaissent sous forme  $F(X) < 0$  où  $X$  est une matrice d'un espace à dimension fini  $\chi$  et  $F: \chi \rightarrow \mathbb{S}^m$  est une fonction affine de la forme  $F(X) = F_0 + T(X)$  avec  $F_0$  une matrice constante et  $T(X)$  est une application linéaire.

Plusieurs propriétés et performances de systèmes peuvent être exprimées en terme de LMI. Nous donnons certaines dans les théorèmes suivants :

### I.5.1.1 Théorème Stabilité

Les valeurs propres de la matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sont toutes dans  $real[s] < 0$  si et seulement si les LMIs  $A^T X + XA < 0$  et  $X > 0$  sont faisables.

Ce théorème peut être facilement établi à partir du théorème de Lyapunov.

### I.5.1.2 Théorème Région de Stabilité

Les valeurs propres de la matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sont toutes dans la région  $\left\{ s \in \mathbb{C} \mid \begin{bmatrix} I & \\ & sI \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \\ & sI \end{bmatrix} < 0 \right\}$  si et seulement si les LMIs  $\begin{bmatrix} I & \\ A & \otimes I \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} X \otimes Q & X \otimes S \\ X \otimes S^T & X \otimes R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \\ A & \otimes I \end{bmatrix} < 0$  et  $X > 0$  sont faisables.

Ici le symbole  $\otimes$  designe le produit de Kroneker.

Pour introduire les performances  $H_2$  et  $H_\infty$ , nous commençons par définir le système sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bd \\ e = Cx + Dd \end{cases} \quad (\text{I-27})$$

Ici  $d$  est vue comme une perturbation externe non désirée et  $e$  est une erreur à minimiser. Le contrôleur doit réduire l'effet de la perturbation sur l'erreur. La fonction de transfert du système est :

$$T(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (\text{I-28})$$

On définit la norme  $H_2$  du système pour le cas où  $D = 0$  (elle est infini si  $D \neq 0$ ) par :

$$\|T\|_{H_2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} T^*(j\omega)T(j\omega)d\omega = Trace\{B^T Y_o B\} = Trace\{C X_o C^T\} = \sum_{i=1}^m \int_0^\infty e_i^T(t)e_i(t)dt \quad (\text{I-29})$$

Ici  $e_i(t)$  est la réponse du système à une impulsion de Dirac appliquée à son entrée  $d_i$ .  $X_o$  et  $Y_o$  sont les Gramians de contrôlabilité et d'observabilité respectivement et sont solution des deux équations de Lyapunov suivantes :

$$\begin{aligned} AX_o + X_o A^T + BB^T &= 0 \\ A^T Y_o + Y_o A + C^T C &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I-30})$$

La norme  $H_\infty$  d'une fonction de transfert est donnée par :

$$\|T\|_{H_\infty} = \sup_{\omega} \bar{\sigma}\{T(j\omega)\} = \sup_{0 < \|d\|_{\mathcal{L}_2} < \infty} \left\{ \frac{\|e\|_{\mathcal{L}_2}}{\|d\|_{\mathcal{L}_2}} \right\} \quad (\text{I-31})$$

### I.5.1.3 Théorème Performance $H_2$

$A$  et de Hurwitz et  $\|T\|_{H_2} < \gamma$  si et seulement si  $D = 0$  et  $\exists X = X^T$  et  $W = W^T$  avec :

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA & XB \\ B^T X & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} X & C^T \\ C & W \end{bmatrix} > 0 \text{ et } trace\{W\} < \gamma \quad (\text{I-32})$$

### I.5.1.4 Théorème Performance $H_\infty$

$A$  et de Hurwitz et  $\|T\|_{H_\infty} < \gamma$  si et seulement si et  $\exists X > 0$  avec :

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ A & B \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & X \\ X & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A & B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ C & D \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\gamma^2 I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ C & D \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{I-33})$$

La dernière condition de ce théorème peut être exprimée sous une des deux formes équivalentes suivantes :

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA + C^T C & XB + C^T D \\ B^T X + D^T C & D^T D - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad \text{où (Schur)} \quad \begin{bmatrix} A^T X + XA & XB & C^T \\ B^T X & -\gamma^2 I & D^T \\ C & D & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{I-34})$$

où d'une autre façon équivalente :

$$A^T X + XA + C^T C + (XB + C^T D)(\gamma^2 I - D^T D)^{-1} B^T X + D^T C < 0 \quad \text{et} \quad (D^T D - \gamma^2 I) < 0 \quad (\text{I-35})$$

### I.5.2. Synthèse de commande optimale en utilisant les LMIs

Maintenant, on peut exposer la procédure de conception de la commande. Le système est décrit par l'équation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_0 d + Bu \\ e = C_0 x + D_0 d + Eu \\ y = Cx + Fd + 0u \end{cases} \quad (\text{I-36})$$

Ici  $u$  est l'entrée de commande du système,  $y$  sont les sorties mesurées du système et  $d$  sont des perturbations externes non désirées et  $e$  est une sortie de performance sur laquelle l'effet des perturbations doit être minimisé.

Le contrôleur est donné par l'équation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c y \\ u = C_c x_c + D_c y \end{cases} \quad (\text{I-37})$$

Le système en boucle fermée peut être représenté par le bloc diagramme de la figure suivante :

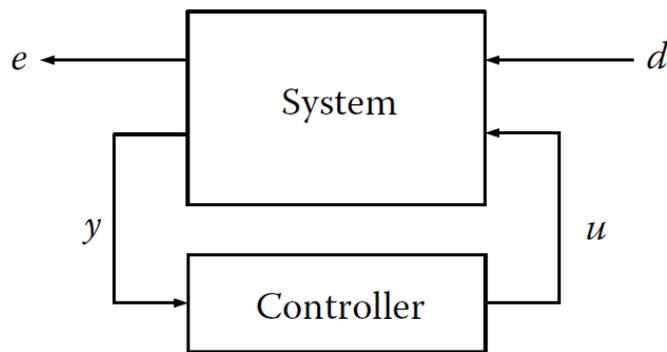


Figure (I-3) Système généralisé pour la commande  $H_2/H_\infty$  en boucle fermée

L'équation d'état du système en boucle fermée est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BD_c C & BC_c & | & B_0 + BD_c F \\ B_c C & A_c & | & B_c F \\ \hline C_0 + ED_c C & EC_c & | & D_0 + ED_c F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ d \end{bmatrix} \quad (\text{I-38})$$

Si on utilise comme performance une borne supérieure sur la norme  $H_\infty$  du système en boucle fermée et si on considère la commande par retour d'état, alors dans ce cas  $y = x$  et  $u = D_c y = D_c x$  ce qui signifie

que  $C = I$  et que le gain de retour d'état est tout simplement  $D_c$ . Ceci conduit à un système en boucle fermée décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + BD_c)x + B_0d \\ e = (C_0 + ED_c)x + D_0d \end{cases} \quad (\text{I-39})$$

selon le théorème (I.5.4.1.4) ce contrôleur stabilise le système en boucle fermée et rend  $\|(C_0 + ED_c)(sI - (A + BD_c))^{-1}B_0 + D_0\|_{H_\infty} < \gamma$  si et seulement si  $\exists X > 0$  tel que :

$$\left[ \begin{array}{cc|c} (A + BD_c)^T X + X(A + BD_c) & XB_0 & (C_0 + ED_c)^T \\ B_0^T X & -\gamma^2 I & D_0^T \\ \hline & & \\ \hline (C_0 + ED_c) & D_0 & -I \end{array} \right] < 0 \quad (\text{I-40})$$

Ceci n'est pas une LMI, mais c'est une inégalité bilinéaire en  $(D_c, X)$  qui sont ses deux inconnus et qui peut être transformée en utilisant une transformation de congruence  $(D_c, X) \rightarrow (M, Y) = (D_c X^{-1}, X^{-1})$  ce qui donne les LMI suivantes :

$$Y > 0 \text{ et } \left[ \begin{array}{cc|c} (AY + BM)^T + (AY + BM) & B_0 & (C_0 Y + EM)^T \\ B_0^T & -\gamma^2 I & D_0^T \\ \hline & & \\ \hline (C_0 Y + EM) & D_0 & -I \end{array} \right] < 0 \quad (\text{I-41})$$

Pour le calcul du gain du retour d'état optimal selon la norme  $H_\infty$ , on commence par résoudre ce problème de faisabilité pour  $Y$  et  $M$  ensuite on calcul  $X = Y^{-1}$  et  $D_c = MX$ .

## I.6. Conclusion

Ce chapitre a présenté les principales techniques de commande des systèmes, en se concentrant sur les systèmes non linéaires. Nous avons exploré la commande PID, la commande par retour d'état, et les méthodes de commande LQR et  $H_2/H_\infty$ . Chacune de ces méthodes offre des solutions efficaces pour assurer la stabilité et la performance des systèmes de contrôle. La maîtrise de ces techniques est cruciale pour la conception de contrôleurs robustes et performants dans divers contextes industriels

# Chapitre II :

## Méthodes de synthèse

### Des gains PID

# Chapitre II : Méthodes de synthèse des gains PID

## II.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous aborderons les diverses méthodes utilisées pour la synthèse des gains des régulateurs PID, essentielles dans le domaine du contrôle automatique. Les régulateurs PID (Proportionnel-Intégral-Dérivatif) sont des outils fondamentaux dans la régulation des systèmes industriels en raison de leur simplicité et de leur efficacité. Nous commençons par définir ce qu'est un régulateur PID et expliquerons les différents types de contrôleurs associés. Ensuite, nous détaillerons les principes de fonctionnement de ces régulateurs, en soulignant les actions proportionnelles, intégrales et dérivées. Enfin, nous présentons les méthodes de réglage des gains PID, y compris des techniques classiques comme la méthode de Ziegler-Nichols et des approches modernes.

## II.2. Définition du contrôleur PID :

Le régulateur PID, appelé aussi correcteur PID (proportionnel, intégrateur, dérivateur) est un système de contrôle, il est constitué d'un comparateur pour observer l'écart (erreur) entre la mesure et la consigne, et d'un correcteur dont l'algorithme permet d'obtenir une loi d'évolution de la mesure du procédé conforme au cahier des charges. En d'autres termes, Ils permettent d'effectuer un asservissement en boucle fermée du système étudié. [4]

$$e = \text{consigne} - \text{mesure} \quad (\text{II-1})$$

La figure suivante illustre le principe d'utilisation de ces régulateurs afin d'asservir les systèmes

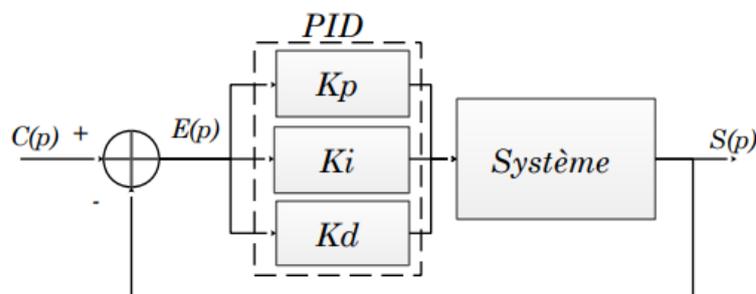


Figure (II-1) Régulateur PID

### II.2.1. Types de contrôleurs

Les régulateurs standards les plus utilisés dans l'industrie sont les régulateurs de la famille PID (proportionnel, intégral, dérivé), car ils permettent de régler à l'aide de ces trois paramètres les performances des régulations de procédés tel que : l'amortissement, le temps de réponse, le dépassement [5]. L'adaptation de ce régulateur aux différents systèmes s'effectue par le réglage de ses coefficients propres à savoir les gains des trois actions : proportionnelle, intégrale et dérivée.

### II.2.2. Principe de fonctionnement d'un régulateur PID

Un contrôleur est un algorithme de calcul qui délivre un signal de commande à partir de la différence entre la consigne et la mesure. Il agit de trois manières.

### II.2.3. Action proportionnelle.

L'action est dite proportionnelle lorsque le signal de commande est proportionnel au signal d'erreur. Elle corrige de manière instantanée, donc rapide, tout écart de la grandeur à régler, elle permet de vaincre les grandes inerties du système. Afin de rendre le système plus rapide, on augmente le gain. Cependant, cet ajustement peut provoquer l'instabilité du système. Le régulateur P est utilisé lorsqu'on désire régler un paramètre dont la précision n'est pas importante (voir figure II.2-a).

L'action proportionnelle du régulateur s'exprime soit par le gain Gr (on emploie aussi K et Kp), soit par la bande proportionnelle BP (également appelée PB, XP% et P%). Cette dernière est définie comme étant la variation, en pourcentage, à appliquer à l'entrée du régulateur pour que la sortie varie de 100 %, on a donc

$$BP\% = \frac{100}{Gr} \quad (\text{II-2})$$

L'équation de la commande u de l'action proportionnelle P est comme suit :

$$u(t) = k_p \cdot e(t) = k_p (y_c(t) - y(t)) \quad (\text{II-3})$$

Et la fonction de transfert de l'action proportionnelle P est :

$$c(p) = k_p \quad (\text{II-4})$$

### II.2.4. Action intégral.

L'action est dite intégrale lorsque le signal de commande est proportionnel à l'intégrale du signal d'erreur. Elle complète l'action proportionnelle et permet d'éliminer l'erreur résiduelle en régime permanent. Afin de rendre le système plus dynamique (diminuer le temps de réponse), on diminue l'action intégrale mais, ceci provoque l'augmentation du déphasage ce qui provoque l'instabilité en boucle fermée.

L'action intégrale est utilisée lorsqu'on désire avoir en régime permanent, une précision parfaite, en outre, elle permet de filtrer la variable à régler d'où l'utilité pour le réglage des variables bruitées figure (II.2-b).

L'équation de la commande u de l'action intégrale I est comme suit :

$$u(t) = k_i \int_0^t (y_c(\tau) - y(\tau)) d\tau = \frac{k_p}{T_i} \int_0^t (y_c(\tau) - y(\tau)) d\tau \quad (\text{II-5})$$

Et la fonction de transfert de l'action intégrale I est :

$$C(p) = \frac{k_p}{T_i p} = \frac{k_i}{p} \quad (\text{II-6})$$

### II.2.5. Action dérivé

L'action est dite dérivée lorsque le signal de commande est proportionnel à la dérivée du signal d'erreur. L'action dérivée, en compensant les inerties dues au temps mort, accélère la réponse du système et améliore la stabilité de la boucle de régulation, en permettant notamment un amortissement rapide des

Oscillations dues à l'apparition d'une perturbation ou à une variation subite de la consigne (figure II.2-c).

Dans la pratique, l'action dérivée est appliquée aux variations de la grandeur à régler seule et non de l'écart (mesure-consigne). L'action D est utilisée dans l'industrie pour le réglage des variables lentes telles que la température, elle n'est pas recommandée pour le réglage d'une variable bruitée ou trop dynamique (la pression). En dérivant un bruit, son amplitude risque de devenir plus importante que celle du signal utile.

L'équation de la commande  $u$  de l'action dérivée D est comme suit :

$$u(t) = k_d T_d \frac{de(t)}{dt} \quad (II-7)$$

Et la fonction de transfert de l'action dérivée D est :

$$C(p) = k_d \cdot T_d \cdot P \quad (II-8)$$

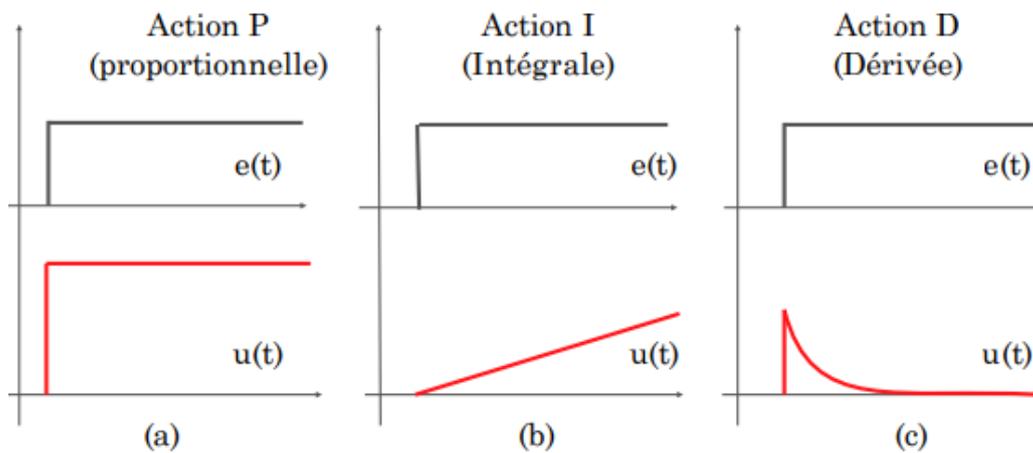


Figure (II-2) Réponses des différentes actions

### Caractéristiques du régulateur PID

Coéfficient	Temps de monté	Temps de stabilisation	Dépassement	Erreur Static
$K_p$	Diminue	Augmente	Augmente	Diminue
$K_i$	Diminue	Augmente	Augmente	Annule
$K_d$	---	Diminue	Diminue	---

## II.3. Différentes architectures des contrôleurs PID

Dans un contrôleur PID, il existe plusieurs façons d'associer les actions P, I et D, en effet, le contrôleur PID peut avoir une architecture série, parallèle ou mixte

### II.3.1. Architecture parallèle

L'architecture parallèle transforme le même signal de façon indépendante, puis somme les signaux.

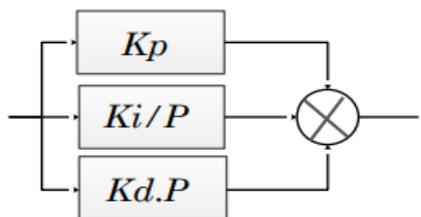


Figure (II-3) Architecture parallèle

La loi de commande est ainsi de la forme :

$$C(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\tau) d\tau + k_d \frac{de(t)}{dt} \quad (\text{II-9})$$

Soit d'après la transformée de Laplace :

$$C(p) = k_p e(p) + k_i \frac{e(p)}{p} + k_d \cdot p \cdot e(p) \quad (\text{II-10})$$

$$C_{\text{parallèle}}(p) = k_p + \frac{k_i}{p} + k_d p \quad (\text{II-11})$$

### II.3.2. Architecture série

L'architecture série applique les fonctions P, I et D en série, c'est-à-dire que le signal subit 3 transformations successives.

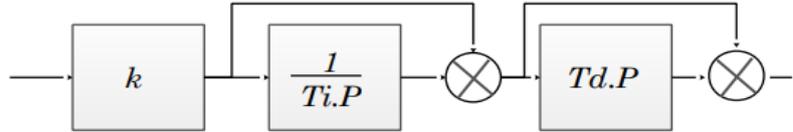


Figure (II-4) Architecture série

Soit d'après la transformée de Laplace, La loi de commande est de la forme :

$$C(p) = e(p) \left\{ K_p + \left[ K_i \frac{1}{p} \right] + [K_d \cdot p] \right\} \quad (\text{II-12})$$

$$C_{\text{Série}}(p) = K \left( 1 + \frac{1}{pT_i} \right) (1 + pT_d) \quad (\text{II-13})$$

### II.3.3. Architecture standard

L'architecture standard effectue les actions I et D en parallèle et multiplie leur somme par p.

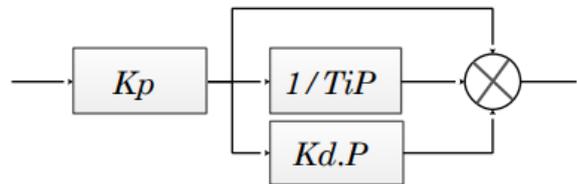


Figure (II-5) Architecture standard

Soit d'après la transformée de Laplace, La loi de commande est de la forme :

$$C(p) = k_p e(p) \cdot [1 + k_i \frac{1}{p} + k_d \cdot p] \quad (\text{II-14})$$

Cette architecture standard se rapproche beaucoup de la forme parallèle et les équations de transformation entre les deux sont évidentes. La transformation de l'architecture série en architecture standard s'obtient par les équations suivantes :

$$k_p = k \left( 1 + \frac{T_d}{T_i} \right) \quad (\text{II-15})$$

$$k_i = T_i + T_d \quad (\text{II-16})$$

$$k_d = \frac{\frac{T_d}{T_i}}{(T_i + T_d)} \quad (\text{II-17})$$

Il existe donc trois architectures différentes des mises en œuvre des régulateurs PID et ces trois architectures sont presque mathématiquement équivalentes. Dans la plupart des cas (à l'exception par exemple de  $k_i=0$ ), il existe des formules pour transformer un régulateur d'une forme vers une autre forme.

### II.3.4. Principale différence

La principale différence entre ces différentes architectures concerne l'effet des coefficients de réglage sur le comportement du contrôleur. Ainsi l'architecture parallèle permet de découpler complètement les actions proportionnelle, intégrale et dérivée entre elles. Alors que dans la forme standard, une modification sur la valeur du coefficient  $K_p$  va modifier simultanément les actions proportionnelle, intégrale et dérivée. A ce titre, certaines personnes, qui règlent des PID de manière manuelle, préfèrent l'architecture parallèle.

## II.4. Méthodes de synthèse des gains PID

Il y a plusieurs de méthodes qui permettent de calculer les paramètres du contrôleur PID, on peut citer par exemple la méthode de Ziegler-Nichols, la méthode de Cohen-Coon, la méthode de Halman..., toutes ces méthodes ont l'avantage de faciliter la démarche de synthèse du régulateur PID, cependant elles restent assez complexes par fois si le système a une dynamique complexe.

### II.4.1. Méthode de Ziegler-Nichols :

En 1942, Ziegler et Nichols [6] ont proposé deux approches heuristiques basées sur leur expérience et quelques simulations pour ajuster rapidement les paramètres des régulateurs P, PI et PID. La première méthode nécessite l'enregistrement de la réponse indicielle en boucle ouverte, alors que la deuxième demande d'amener le système bouclé à sa limite de stabilité.

### II.4.2. Méthode de la réponse indicielle

Pour obtenir les paramètres du régulateur PID, il suffit d'enregistrer la réponse indicielle du processus seul (c'est-à-dire sans le régulateur), puis de tracer la tangente au point d'inflexion de la courbe. On mesure ensuite sa pente  $p$ , le retard apparent  $L$  correspondant au point d'intersection de la tangente avec l'abscisse et le gain  $k_0=y_\infty/E$  On peut alors calculer les coefficients du régulateur choisi à l'aide du tableau 1.

Généralement, les gains  $K_p$  proposés par Ziegler-Nichols sont trop élevés et conduisent à un dépassement supérieur à 20%. Il ne faut donc pas craindre de réduire  $K_p$  d'un facteur 2 pour obtenir une réponse satisfaisante.

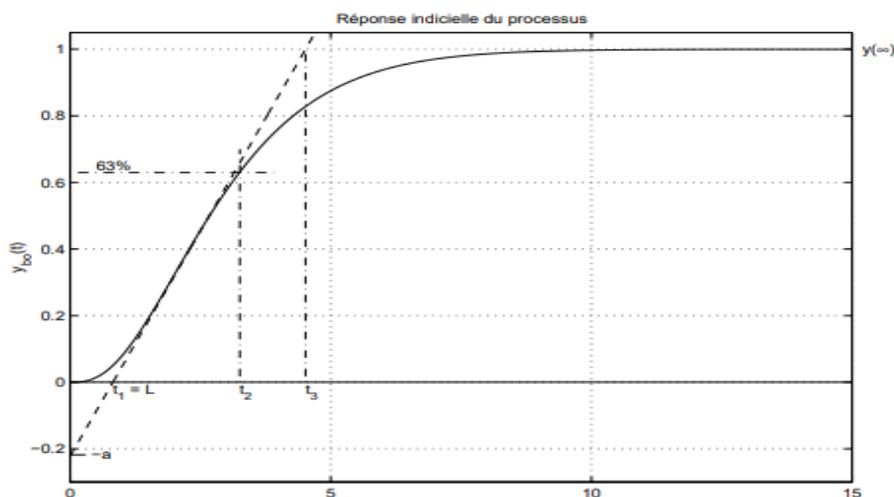


Figure (II-6) Exemple d'une réponse indicielle

**Tableau (II.1) :** Paramètres PID obtenus à partir d'une réponse indicielle (ZNt)

Type	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$1/(pLK_0) = 1/(aK_0)$		
PI	$0.9/(pLK_0) = 0.9/(aK_0)$	$3L$	
PID	$1.2/(pLK_0) = 1.2/(aK_0)$	$2L$	$0.5L$

### II.4.3. Méthode du point critique:

Cette méthode est basée sur la connaissance du point critique du processus. Expérimentalement, on boucle le processus sur un simple régulateur proportionnel dont on augmente le gain jusqu'à amener le système à osciller de manière permanente ; on se trouve ainsi à la limite de stabilité. Après avoir relevé le gain critique  $K_{cr}$  du régulateur et la période d'oscillation  $T_{cr}$  de la réponse, on peut calculer les paramètres du régulateur choisi à l'aide du tableau 2. Ici également, les valeurs proposées conduisent à un temps de montée relativement court malheureusement assorti d'un dépassement élevé. Cette situation n'étant pas toujours satisfaisante, on peut être amené à corriger les coefficients proposés et, en particulier, à diminuer le gain  $K_p$ . On notera que les paramètres  $T_i$  et  $T_d$  proposés par les deux méthodes de Ziegler-Nichols sont dans un rapport constant égal à 4. Le régulateur possède donc deux zéros confondus valant  $-1/(2T_d) = -2/T_i$ .

**Tableau (II.2) :** Paramètres PID obtenus à partir du point critique (ZNf)

Type	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0.5K_{cr}$		
PI	$0.4K_{cr}$	$0.8T_{cr}$	
PID	$0.6K_{cr}$	$0.5T_{cr}$	$0.125T_{cr}$

La méthode de Ziegler-Nichols fournit un cadre systématique pour le réglage initial des paramètres PID, basé sur les réponses observées en boucle fermée du système. Cependant, il est crucial de noter que cette méthode peut nécessiter des ajustements supplémentaires selon les caractéristiques spécifiques du système étudié, ainsi qu'une validation expérimentale pour assurer des performances optimales.

## II.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exploré les méthodes traditionnelles de réglage des paramètres PID, notamment les techniques de Ziegler-Nichols. Cette méthode, bien qu'efficaces dans de nombreux cas pratiques, présentent certaines limitations lorsqu'il s'agit de systèmes complexes ou non linéaires. Nous avons analysé les principes sous-jacents de cette méthode, ces approches fournissent des réglages initiaux rapides et relativement simples à mettre en œuvre, elles peuvent conduire à des performances sous-optimales en termes de stabilité et de robustesse. Ces observations soulignent la nécessité d'explorer des techniques plus avancées, telles que LQR, LMI et les algorithmes génétiques, pour optimiser les performances des contrôleurs PID dans des environnements plus complexes.

## Chapitre III :

# Analyse et simulations de méthodes de conception de PID

# Chapitre III : Analyse et simulations de méthodes de conception de PID.

## III.1. Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons appliquer différentes techniques de conception de PID pour les systèmes à une seule entrée comme pour les systèmes à plusieurs entrées. Nous allons utiliser différents critères de performance et différentes techniques pour les optimiser. Nous incluons aussi certaines contraintes supplémentaires pour imposer des exigences minimales à respecter. Nous allons commencer par l'utilisation de la commande linéaire quadratique pour la conception de PID. Ensuite, nous utilisons les LMIs et la commande  $H_\infty$  qui accommode de façon naturelle entre autres la stabilité, la robustesse et permet d'imposer la région des pôles en boucles fermée (degré de stabilité). A la fin nous utilisons les algorithmes génétiques qui permettent de résoudre des problèmes d'optimisation sans imposer des conditions de continuité ou de dérivabilité.

## III.2. Utilisation de la LQR pour la conception de PID :

Dans ce qui suit, nous allons exposer la méthode de conception de régulateurs PID pour les systèmes de deuxième degré avec retard en utilisant la LQR. Nous allons présenter la méthode avec certains détails car elle permet d'avoir une idée sur la procédure généralement suivies pour les problèmes similaires [8]. Au début nous considérons les systèmes sans retard ensuite nous généralisons la méthode pour les systèmes avec retard. Nous considérons des systèmes de fonctions de transfert de la forme :

$$G(s) = \frac{k}{s^2 + as + b} \quad (\text{III-1})$$

Nous allons considérer les PID de type 1, 2 et 3. Ces PID sont de la forme :

**Tableau (III.1) :** Différents types de PID

Type de PID	Fonction de transfert	Précision
PID de type 1	$H_1(s) = \frac{K_2 + \frac{K_1}{s} + K_3s}{Ts + 1}$	Garantie l'annulation de l'erreur statique (à l'échelon)
PID de type 2	$H_2(s) = \frac{K_2 + \frac{K_1}{s} + K_3s + K_4s^2}{s(Ts + 1)}$	Garantie l'annulation de l'erreur statique (à l'échelon) et l'erreur de vitesse (à la rampe)
PID de type 3	$H_2(s) = \frac{K_2 + \frac{K_1}{s} + K_3s + K_4s^2 + K_5s^3}{s^2(Ts + 1)}$	Garantie l'annulation de l'erreur statique (à l'échelon) et l'erreur de vitesse (à la rampe) ainsi que l'erreur d'accélération (à la parabole)

### PID de type 1 :

Le système en boucle fermée pour le PID de type 1 est représenté sur la figure suivante :

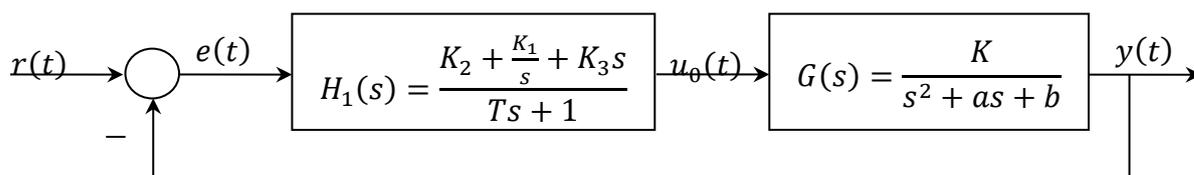


Figure (III-1) Bloc diagramme du système en boucle fermée avec PID de type i.

Pour concevoir le PID, nous allons représenter le système en boucle fermée en utilisant la réalisation d'état. Nous considérons que la référence est nulle car la conception s'intéresse au régime transitoire.

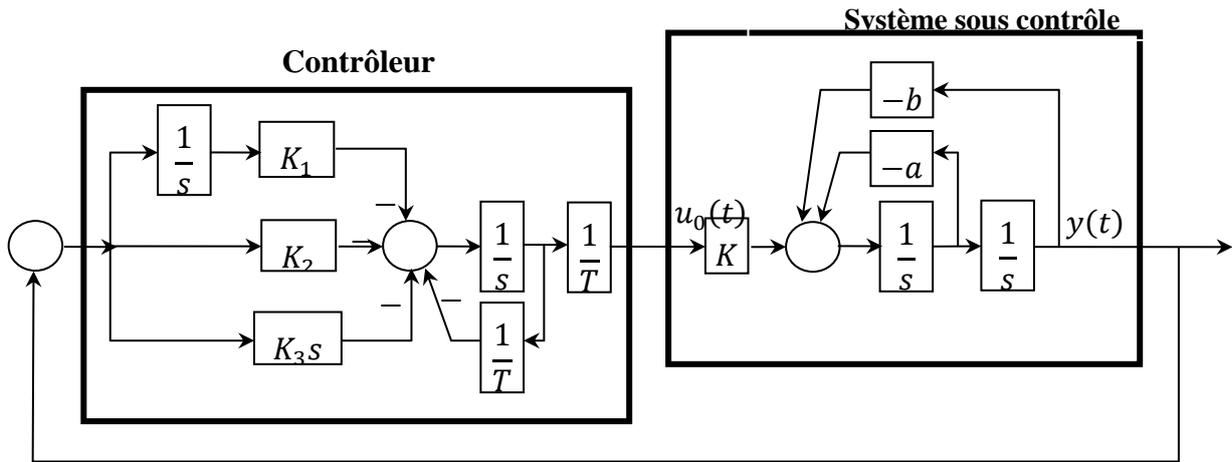


Figure (III-2) Développement du bloc diagramme en boucle fermée pour faire apparaître les états.

Pour pouvoir représenter le système en utilisant le retour d'état, nous allons modifier sa représentation sous la forme suivante :

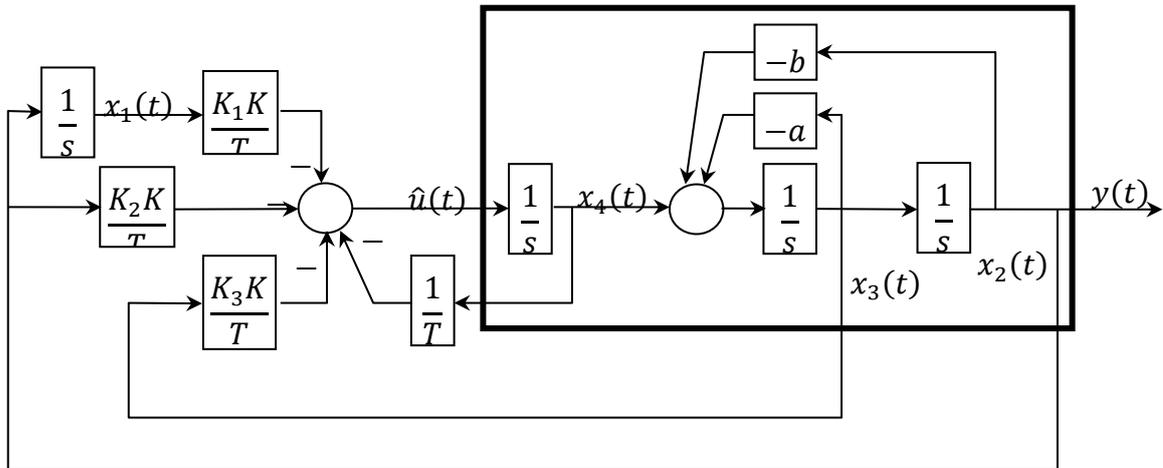


Figure (III-3) Conversion de la commande par PID en une commande par retour d'état.

A partir du bloc diagramme, nous pouvons obtenir l'équation d'état du système comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = -bx_2(t) - ax_3(t) + x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) = \hat{u}(t) \\ y(t) = x_2(t) \end{cases} \quad (\text{III-2})$$

Si on utilise la notation matricielle, nous obtenons :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -b & -a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \hat{u}(t) \\ y = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] x(t) \\ \hat{u}(t) = - \begin{bmatrix} \frac{K_1 K}{T} & \frac{K_2 K}{T} & \frac{K_3 K}{T} & \frac{1}{T} \end{bmatrix} x(t) \end{cases} \quad (\text{III-3})$$

### PID de type 2 :

Le système en boucle fermée pour le PID de type 2 est représenté sur la figure (III-4.a). Pour concevoir le PID, nous représentons le système en boucle fermée en utilisant la réalisation d'état. Nous considérons que la référence est nulle car la conception s'intéresse au régime transitoire (figure (III-4.b)).

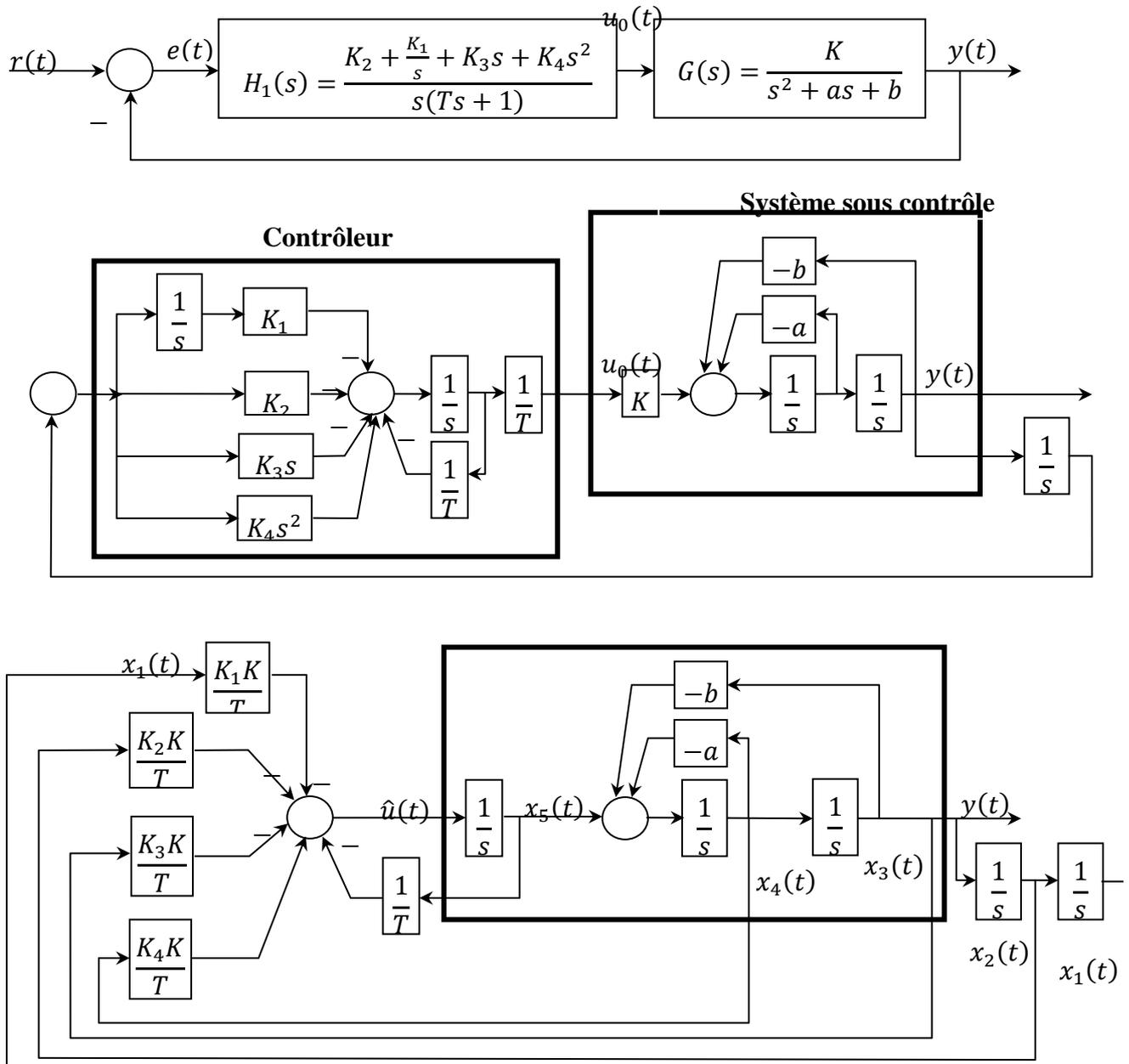


Figure (III-4) Conversion du système en boucle fermée avec PID de type ii en une commande par retour d'état.

Pour pouvoir représenter le système en boucle fermée avec le PID d type ii en utilisant le retour d'état, nous modifions sa représentation sous la forme de la figure (III-4.c).

A partir du bloc diagramme, nous pouvons obtenir l'équation d'état du système comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) = -bx_3(t) - ax_4(t) + x_5(t) \\ \dot{x}_5(t) = \hat{u}(t) \\ y(t) = x_3(t) \end{cases} \quad (\text{III-4})$$

Si on utilise la notation matricielle, nous obtenons :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -b & -a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \hat{u}(t) \\ y = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]x(t) \\ \hat{u}(t) = - \begin{bmatrix} \frac{K_1K}{T} & \frac{K_2K}{T} & \frac{K_3K}{T} & \frac{K_4K}{T} & \frac{1}{T} \end{bmatrix} x(t) \end{cases} \quad (\text{III-5})$$

Notez que pour ce cas la méthode s'étend facilement aux systèmes de troisième ordre.

### PID de type 3 :

Nous allons suivre les mêmes étapes pour le traitement du cs de PID de type iii. La figure (III-5) résume ce traitement.

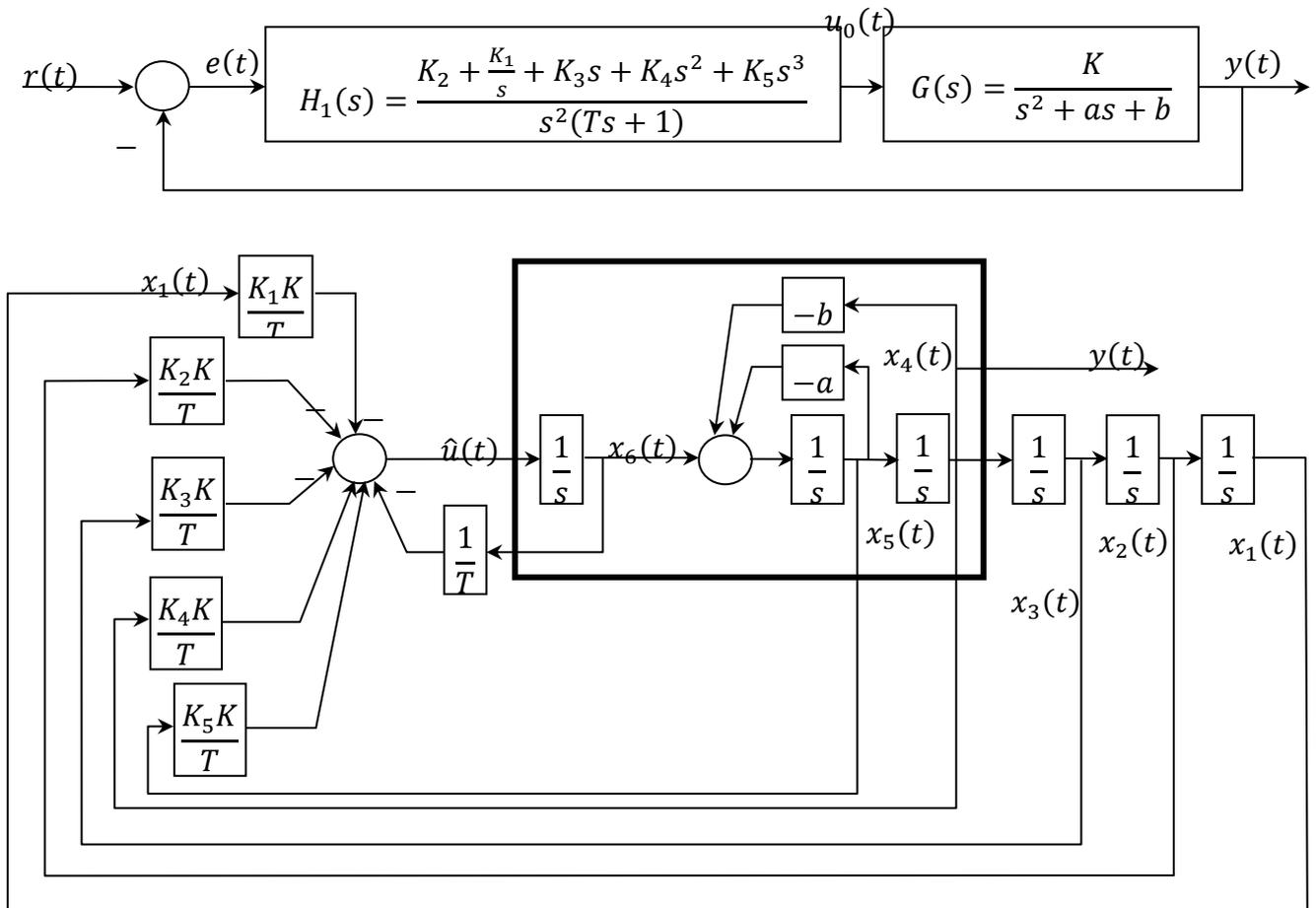


Figure (III-5) Conversion du PID de type iii en commande par retour d'état.

A partir du bloc diagramme, nous pouvons obtenir l'équation d'état du système comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) = x_5(t) \\ \dot{x}_5(t) = -bx_4(t) - ax_5(t) + x_6(t) \\ \dot{x}_6(t) = \hat{u}(t) \\ y(t) = x_4(t) \end{array} \right. \quad (\text{III-6})$$

Si on utilise la notation matricielle, nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b & -a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \hat{u}(t) \\ y = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]x(t) \\ \hat{u}(t) = - \left[ \frac{K_1K}{T} \quad \frac{K_2K}{T} \quad \frac{K_3K}{T} \quad \frac{K_4K}{T} \quad \frac{K_5K}{T} \quad \frac{1}{T} \right] x(t) \end{array} \right. \quad (\text{III-7})$$

Pour chacun des cas précédents, on applique la LQR au système modifié ensuite on tire les paramètres du PID à partir du gain de retour d'état optimal retourné par la LQR comme suit :

$$T = \frac{1}{K_{opt}(end)}; \quad [K_1 \quad K_2 \quad K_3 \quad \dots] = K_{pot}(1:(end - 1)) * \frac{T}{K} \quad (\text{III-8})$$

La technique peut être étendue aux systèmes avec retard en considérant les paramètres du PID comme variables dans le temps et en procédant comme dans [8]. Mais les expressions deviennent inutilement compliquées. Nous donnons ici seulement le principe.

L'idée est d'ignorer le retard dans la première étape de conception et calculer la commande LQR comme si le système n'a pas de retard, ensuite adapter la commande obtenue pour être utilisée pour le système avec retard. Les blocs digrammes de la figure suivante illustre ce principe.

La réalisation d'état d'un système avec retard de durée  $L$  est donnée par :  $\dot{x} = Ax(t) + Bu(t - L)$ . On cherche la commande qui minimise le coup de performance  $J = \int_0^{\infty} \{x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)\}dt$ . L'entrée de commande est causale c'est à dire  $u(t) = 0$  pour  $t < 0$ . On décompose le système en deux étages :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } 0 \leq t < L \therefore u(t - L) = 0 \therefore \dot{x}(t) = Ax(t) \\ \text{si } t \geq L \therefore \hat{u}(t) = u(t - L) \text{ et } \dot{x}(t) = Ax(t) + B\hat{u}(t) \text{ et } \hat{u}(t) = -R^{-1}B^T Px(t) \end{array} \right. \quad (\text{III-9})$$

avec  $P$  la solution de l'équation algébrique de Riccati :  $A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$ . En faisant la conversion inverse de  $\hat{u}$  vers  $u$  nous obtenons la commande :

$$u(t) = \hat{u}(t + L) = -R^{-1}B^T Px(t + L), \quad t \geq L \quad (\text{III-10})$$

Ici  $x(t + L)$  n'est pas disponible à l'instant  $t$ , mais on peut l'exprimer en fonction de  $x(L)$  par  $x(t + L) = e^{(A - BR^{-1}B^T P)((t+L)-L)}x(L) = e^{(A - BR^{-1}B^T P)t}x(L)$  et on aura :

$$\begin{cases} x(t+L) = e^{(A-BR^{-1}B^TP)t}x(L) = e^{(A-BR^{-1}B^TP)t}e^{A(L-t)}x(t) & \text{si } 0 \leq t < L \\ x(t+L) = e^{(A-BR^{-1}B^TP)t}e^{(A-BR^{-1}B^TP)(L-t)}x(t) = e^{(A-BR^{-1}B^TP)L}x(t) & \text{si } t \geq L \end{cases} \quad (\text{III-11})$$

Ceci conduit à une expression de la commande LQR à Horizon infini pour un système LTI avec retard de durée  $L$ .

$$u(t) = \begin{cases} -R^{-1}B^TPe^{(A-BR^{-1}B^TP)t}e^{A(L-t)}x(t) & \text{si } 0 \leq t < L \\ -R^{-1}B^TPe^{(A-BR^{-1}B^TP)L}x(t) & \text{si } t \geq L \end{cases} \quad (\text{III-12})$$

Cette expression doit être comparée avec celle de  $u_0(t)$  pour obtenir les paramètres du PID dans le cas de systèmes avec délai.

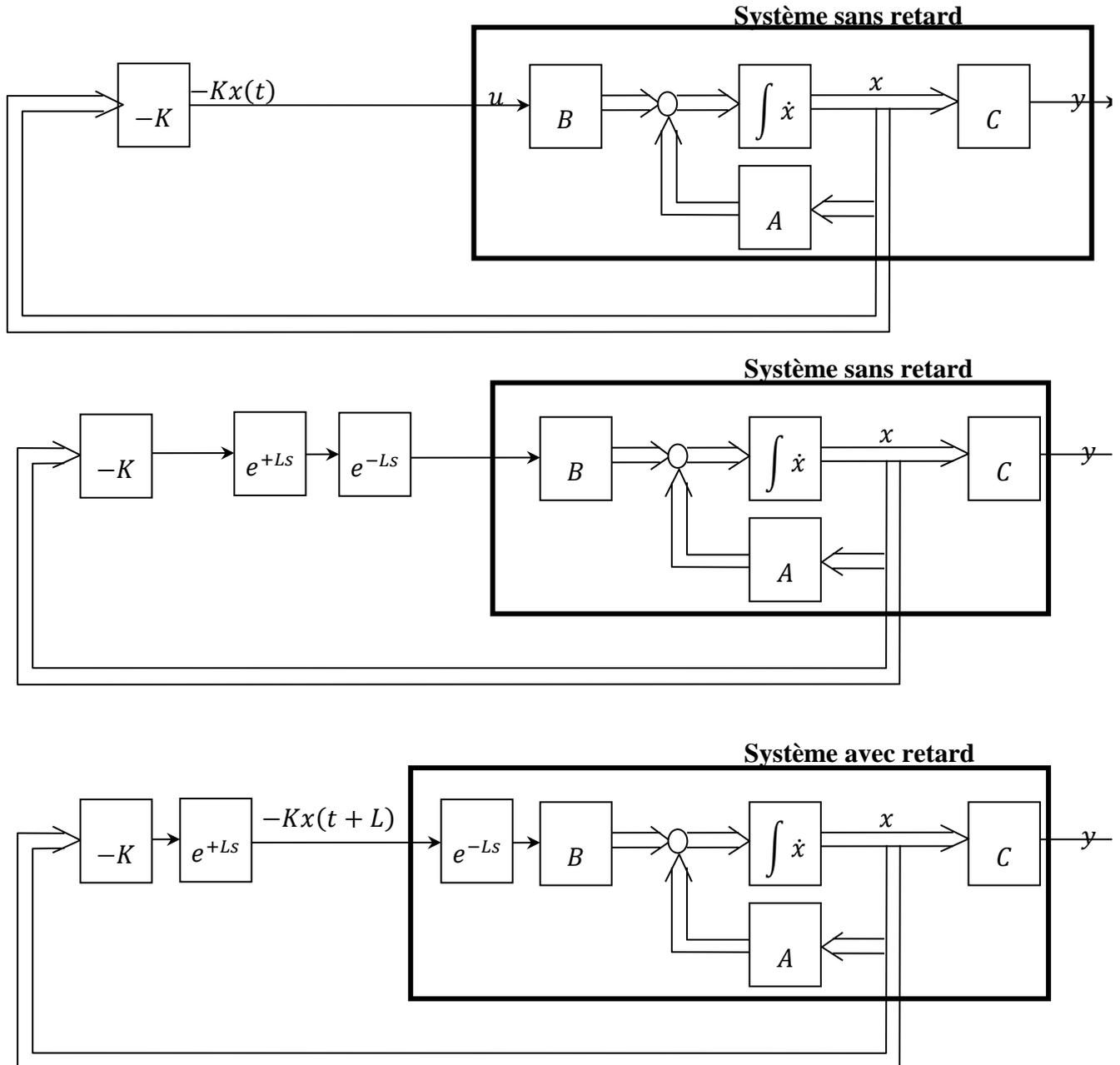


Figure (III-6) Principe de la commande LQR pour les systèmes à retard

Le système en boucle fermée avec la commande de l'équation (III-12) peut être représenté par le bloc diagramme de la figure (III-7). Il faut noter que ce bloc diagramme n'utilise pas la structure PID à cause de la complexité des expressions des gains de ce dernier pour le cas des systèmes avec retard.

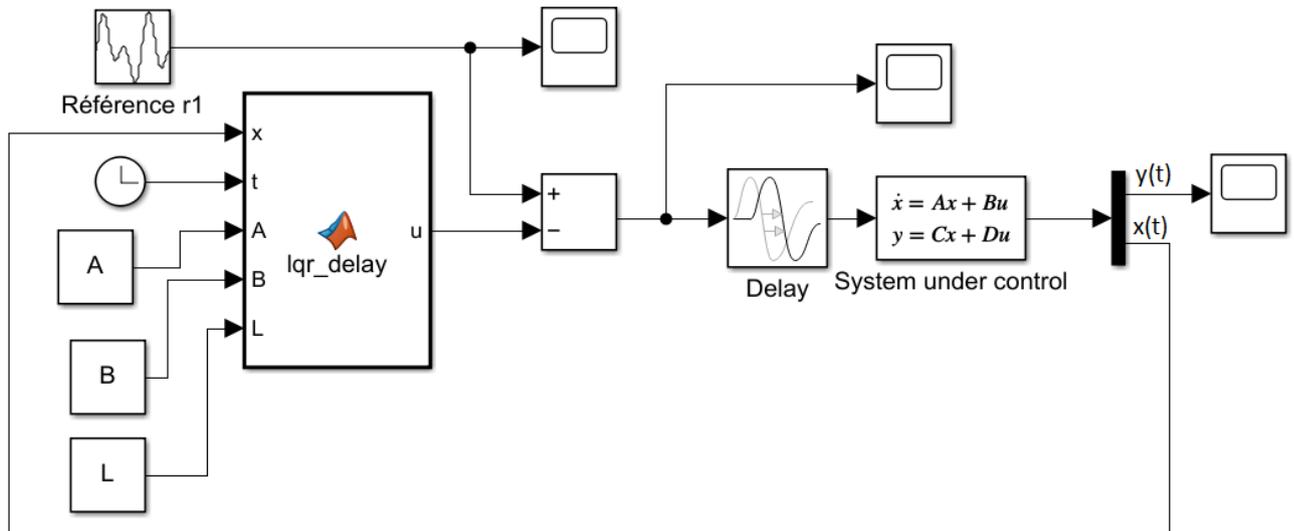


Figure (III-7) Bloc diagramme de la commande de systèmes avec délais (La fonction `lqr_delay` implémente les équations (III-12)).

Pour le cas sans retard, nous avons appliqué cette procédure pour la conception de PID de type *i* pour commander le système de fonction de transfert  $G(s) = \frac{5}{s^2 - s + 1}$ . Pour le choix des matrices  $Q, R$ , nous les avons obtenues complètement par optimisation sur le critère MITSE (Mean of the Integral of Time multiplied by the Square of the Error) pour cette exemple. La procédure générale est de choisir une forme diagonale pour ces deux matrices. Les éléments de la diagonale de chacune des deux matrices permettent de pondérer différemment les différentes entrées de commandes et les différents éléments du vecteur d'état. Le rapport entre les deux permet de concentrer la minimisation sur la commande ou sur les états ceci dépend des performances désirées et du système sous contrôle. Pour cet exemple nous avons obtenu :

$$Q = \text{diag}[698 * 10^3 \quad 308 * 10^4 \quad 130 * 10^5 \quad 16.64]; R = [10^{-6}]$$

On remarque la grande différence entre les éléments de la diagonale de la matrice  $Q$  ceci donne une idée sur la différence entre les composantes du vecteur d'état.

Les paramètres du PID que nous avons obtenue sont :

$$K_i = 34.184, \quad K_p = 123.4082, \quad K_d = 148.0824, \quad T = 2.0464 * 10^{-4}$$

Les réponses en boucle fermée sont presque instantanées avec un comportement impulsif observé au niveau de la commande au moment de l'application de l'échelon de référence.

### III.3. Calcul de PID pour des systèmes multi-variable en utilisant la LQR :

Le traitement précédent peut être généralisé pour être applicable aux cas de systèmes LTI d'ordre quelconque et même aux systèmes multi-variables si on accepte une représentation spéciale du PID pour ces systèmes (cas multi-loop) [7,9,10]. Nous commençons par développer les relations nécessaires pour l'application de la LQR. Le système est représenté par son équation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (\text{III-13})$$

La commande PID est représentée par :

$$u = -K_p y - K_i \int_0^t y dt - K_d \dot{y} \quad (\text{III-14})$$

Dans le cas général multi-variable, les gains  $K_p, K_i$  et  $K_d$  sont des matrices de dimension  $(m \times l)$  où  $l$  est le nombre de sorties et  $m$  est le nombre d'entrées du système.

Nous augmentons le vecteur d'état par un nouvel ensemble de  $l$  variables représentées par un vecteur  $z$  définie par :

$$z(t) = \int_0^t y dt \text{ avec } z(0) = 0 \quad \dot{z}(t) = y(t) = Cx \quad (\text{III-15})$$

La nouvelle équation d'état devient :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{III-16})$$

L'expression de la commande PID devient :

$$\begin{aligned} u &= -K_p y - K_i \int_0^t y dt - K_d \dot{y} = -K_p Cx - K_i z - K_d C(Ax + Bu) = -(K_p C + K_d CA)x - K_i z - K_d CBu \\ \therefore u &= -(I_m + K_d CB)^{-1} (K_p C + K_d CA)x - (I_m + K_d CB)^{-1} K_i z \end{aligned} \quad (\text{III-17})$$

La commande LQR à horizon infinie appliquée à l'équation d'état augmentée et qui minimise le cout

$J = \int_0^{+\infty} \left\{ \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + u^T R u \right\} dt$  est donnée par :

$$u = -R^{-1} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}^T P \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = -R^{-1} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = -R^{-1} B^T P_{11} x - R^{-1} B^T P_{12} z \quad (\text{III-18})$$

Ceci en partitionnant la matrice  $P$  conformément aux dimensions de la matrice  $\tilde{A}$  de la représentation d'état augmentée. Notez que la matrice  $P$  est tout simplement la solution définie positive de l'équation de Riccati suivante :

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}^T P + P \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} - P \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}^T P + Q = 0 \quad (\text{III-19})$$

En comparant les deux expressions de la commande nous obtenons :

$$\begin{cases} (I_m + K_d CB)^{-1} (K_p C + K_d CA) = R^{-1} B^T P_{11} \\ (I_m + K_d CB)^{-1} K_i = R^{-1} B^T P_{12} \end{cases} \quad (\text{III-20})$$

La première équation peut être manipulée pour obtenir une expression plus commode pour les gains  $K_p$  et  $K_d$  :

$$\begin{aligned} (K_p C + K_d CA) &= (I_m + K_d CB) R^{-1} B^T P_{11} = R^{-1} B^T P_{11} + K_d C B R^{-1} B^T P_{11} \\ \therefore K_p C + K_d CA - K_d C B R^{-1} B^T P_{11} &= R^{-1} B^T P_{11} \quad \therefore [K_p \quad K_d] \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA - C B R^{-1} B^T P_{11} \end{bmatrix}}_M = R^{-1} B^T P_{11} \end{aligned} \quad (\text{III-21})$$

Cette dernière équation permet de calculer les matrices de gains  $K_p$  et  $K_d$ . Dans le cas où la matrice  $M$  n'est pas carrée c'est à dire  $2l \neq n$ , une inverse généralisée de  $M$  peut être utilisée pour obtenir une solution approximative. Enfin le gain  $K_i$  sera calculé à partir de :

$$K_i = (I_m + K_d CB)R^{-1}B^T P_{12} \quad (\text{III-22})$$

La configuration du PID utilisée ici présente une certaine difficulté pour son implémentation car ce PID est non propre ce qui fait qu'il n'est pas réalisable. Pour surmonter ce problème, on peut rajouter un filtre passe bas strictement propre  $F = \frac{1}{\tau s + 1}$ .

La fonction de transfert de ce filtre est absorbée en premier temps dans celle du système et le nouveau système (augmenté avec le filtre) aura comme réalisation d'état :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_f \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & B \\ 0_{m \times n} & -\frac{I_m}{\tau} \end{bmatrix}}_{A_0} \begin{bmatrix} x \\ x_f \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ \frac{I_m}{\tau} \end{bmatrix}}_{B_0} u \\ y = \underbrace{[C \quad 0_{L \times m}]}_{C_0} \begin{bmatrix} x \\ x_f \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{III-23})$$

On applique la méthode de conception précédente à cette nouvelle réalisation d'état pour obtenir les paramètres du PID idéal ensuite on le multiplie par le filtre pour avoir un PID propre qu'on applique pour commander le système de départ.

**Exemple 1 :**

Nous utilisons l'exemple utilisé dans [7] pour tester la validité de cette méthode de conception et les performances du PID obtenu. Le système est représenté par sa réalisation d'état et il modélise un réacteur par lots (Batch) instable d'ordre 4 à deux entrées et deux sorties. Son équation d'état est comme suit:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1.38 & -0.2077 & 6.715 & -5.676 \\ -0.5814 & -4.29 & 0 & 0.675 \\ 1.067 & 4.273 & -6.654 & 5.893 \\ 0.048 & 4.273 & 1.343 & -2.104 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5.679 & 0 \\ 1.136 & -3.146 \\ 1.136 & 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + 0u \end{cases} \quad (\text{III-24})$$

Les valeurs propres du système sont  $\lambda \in \{1.991, 0.0635, -8.6659, -5.0566\}$ .

Pour la conception du PID, nous avons considéré un coût pour la LQR de la forme :

$$J = \int_0^{\infty} \{x^T(t)Qx(t) + \rho u^T(t)Ru(t)\} dt \quad (\text{III-25})$$

avec  $Q = \text{diag}[q_{11} \quad \dots \quad q_{nn}]$  et  $r = \text{diag}[r_{11} \quad \dots \quad r_{mm}]$  où  $q_{ii}, r_{ii}$  et sont des nombres réels à déterminer et  $\rho$  et un nombre positif fixe qui permet à l'utilisateur de décider le degré d'importance qu'il donne à la minimisation de la commande ou des états.

Les paramètres  $q_{ii}$  et  $r_{ii}$  permettent de donner un poids à chaque composante du vecteur d'état ou de la commande par rapport aux autres et de contourner les problèmes dues aux différences des unités des différentes grandeurs physiques. Dans notre programme nous avons calculé les paramètres  $q_{ii}$  et  $r_{ii}$  en utilisant l'optimisation d'un des coût "IAE, ITAE, ISE, ITSE". Ceci permet de les déterminer de façon

automatique et assez précise et de profiter aussi des propriétés de la LQR. Pour cette exemple nous avons pris  $\rho = 0.1$  et  $Q = \text{diag}[0.01 \quad 0.1075 \quad 0.1048 \quad 0.0569 \quad 0.1726 \quad 0.2872 \quad 0.3475 \quad 0.2922]$  et  $R = \text{diag}[0.01 \quad 0.01]$ .

En examinant les valeurs des  $q_{ii}$ , on voit que les rapports entre eux sont très différents ce qui rend leurs choix sans critère préalable difficiles. Les paramètres du PID multi-variable obtenu sont :

$$K_p = \begin{bmatrix} 4.8139 & 21.2502 \\ -30.7809 & -2.5543 \end{bmatrix}, K_i = \begin{bmatrix} -0.1445 & 17.0920 \\ -18.5913 & -0.1328 \end{bmatrix}, K_d = \begin{bmatrix} 0.8019 & 2.3943 \\ -4.5096 & -0.0581 \end{bmatrix}$$

Pour simuler le système en boucle fermée avec le PID obtenue, nous avons utilisé MATLAB/SIMULINK où nous avons créé le bloc diagramme de la figure suivante.

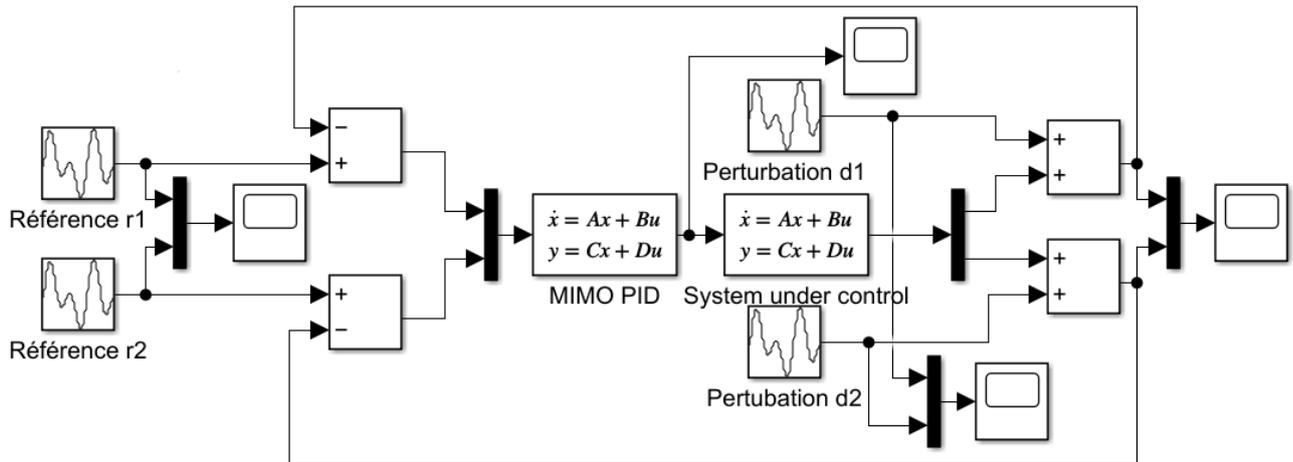
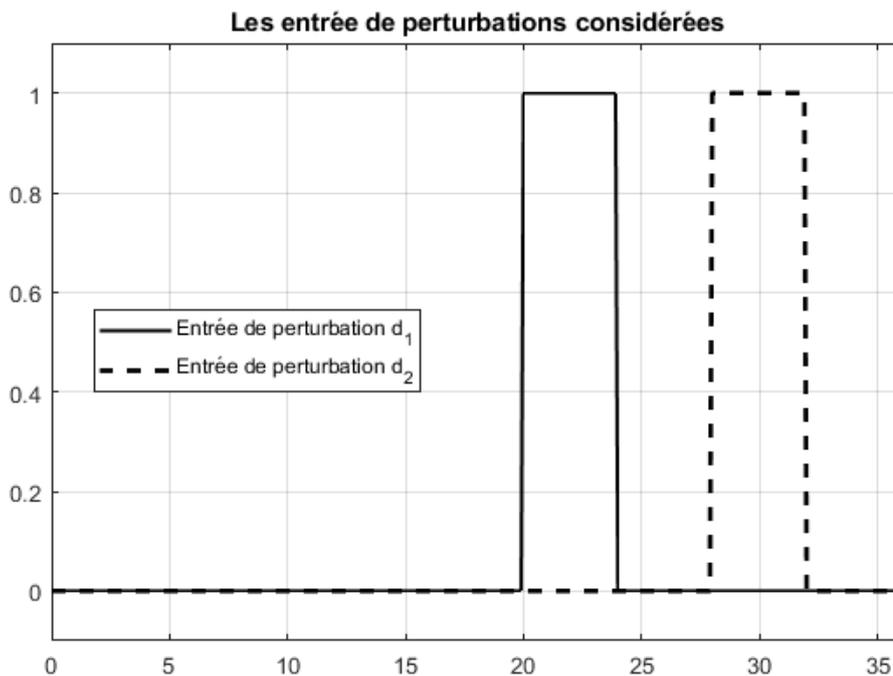


Figure (III-8) Modèle SIMULINK utilisé pour la simulation du PID multi-variable conçu pour le système (III-24) en utilisant la LQR.

Nous avons exporté les résultats de simulation à partir des blocs "scope" vers l'espace de travail "WorkSpace" pour traiter les données de résultats de simulation afin de voir l'effets des perturbations  $d_1$ ,  $d_2$  sur les sorties  $y_1, y_2$  les figures.



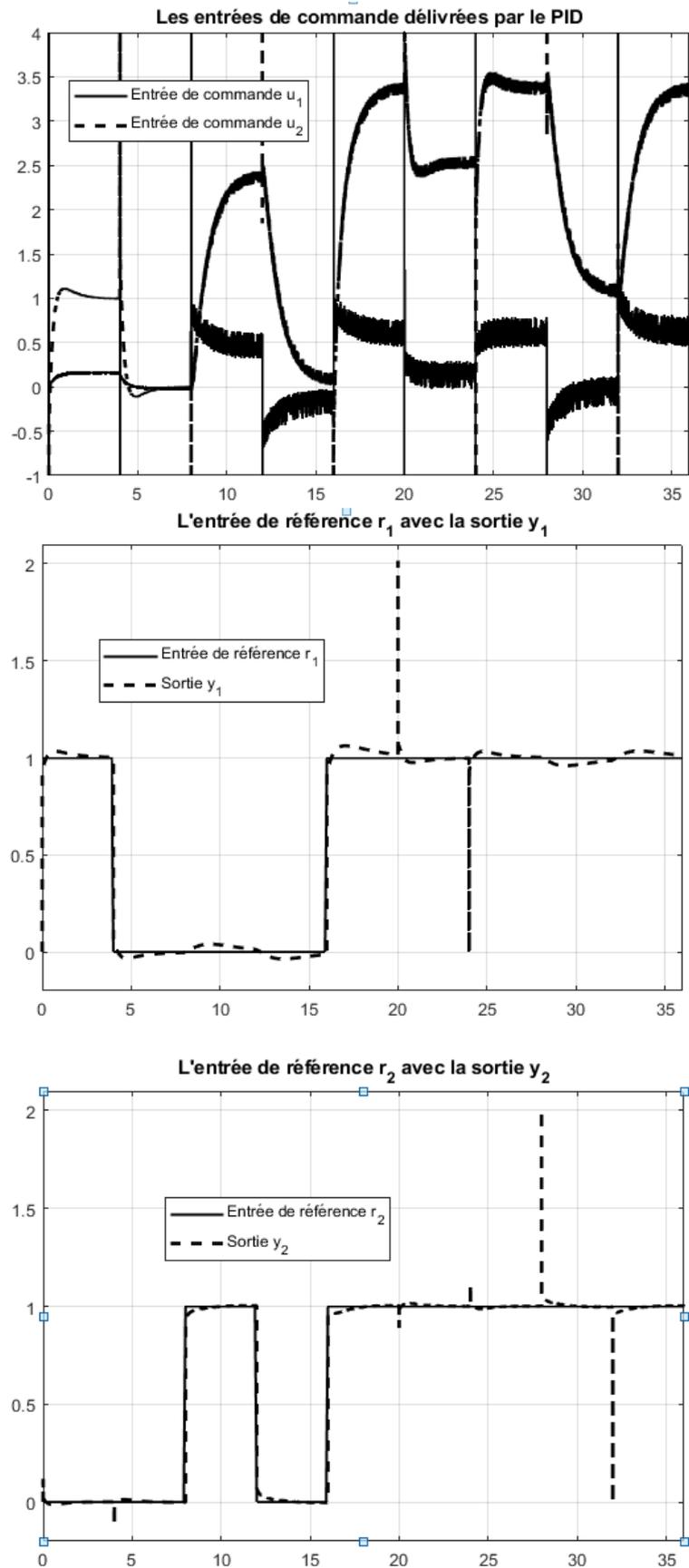


Figure (III-9) Résultats de simulation en boucle fermée du PID multi-variable conçu en utilisant la LQR et le système de l'exemple 1 avec une constante de temps du filtre du dérivateur  $\tau=0.01$ sec.

D'après les courbes de simulation, on constate que les sorties  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$  suivent de façon convenable les entrées de références correspondantes  $r_1(t)$  et  $r_2(t)$ . Les erreurs statiques tendent vers zéro et le découplage entre les deux voies  $r_1 \rightarrow y_1$  et  $r_2 \rightarrow y_2$  est acceptable. Par exemple à l'instant  $t = 8\text{sec}$  quand l'entrée  $r_2(t)$  passe à 1, la sortie  $y_2(t)$  poursuit presque immédiatement mais la sortie  $y_1$  ne réagit que d'une façon très limitée à cette variation. Pour la commande, on voit qu'elle est comprise entre  $-0.5$  et  $3.5$  qui sont des valeurs très acceptables. Le comportement impulsif aux instants de variations brusques des signaux de références et de perturbations est dû seulement à la simulation. La commande est aussi un peu oscillatoire. On constate aussi que la réjection de perturbation est accomplie de façon très acceptable.

### III.4. Conception de PID par l'utilisation des LMIs

Ici nous allons toujours exploiter la transformation du problème PID en un problème de commande par retour d'état des sections précédentes. Nous utilisons, ensuite, les LMIs pour concevoir ce retour d'état. Ceci permet d'imposer les différentes performances accommodées par les LMIs [7,10,11, 12]. Pour introduire l'idée de la méthode, nous partons du bloc diagramme du système en boucle fermée.

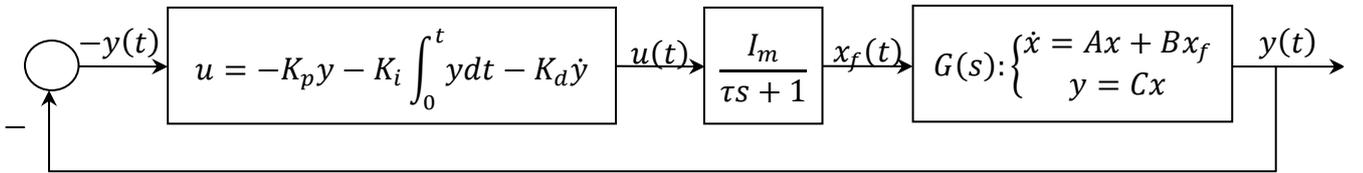


Figure (III-10) Représentation en boucle fermée d'un système avec PID multi-variable.

Dans ce bloc diagramme le vecteur  $x_f$  est le vecteur d'état (et de sortie) du filtre, le vecteur  $z$  est définie par  $z(t) = \int_0^t y dt$ ;  $z(0) = 0$ . Ainsi :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bx_f \\ y = Cx \\ \dot{x}_f = -\frac{I_m}{\tau}x_f + \frac{I_m}{\tau}u \\ \dot{z} = y = Cx \\ u = -K_p y + K_i z - K_d \dot{y} = -(K_p C + K_d CA)x - K_d CBx_f - K_i z \end{cases} \quad (\text{III-26})$$

Si nous utilisons le même traitement des sections précédentes, nous obtenons la représentation d'état suivante du système en boucle fermée :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_f \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0_{n \times L} \\ 0_{m \times n} & -\frac{I_m}{\tau} & 0_{m \times L} \\ C & 0_{L \times m} & 0_{L \times L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_f \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ \frac{I_m}{\tau} \\ 0_{L \times m} \end{bmatrix} u \\ y = [C \quad 0_{L \times m} \quad 0_{L \times L}] \begin{bmatrix} x \\ x_f \\ z \end{bmatrix} \\ u = K \begin{bmatrix} x \\ x_f \\ z \end{bmatrix} = [-(K_p C + K_d CA) \quad -K_d CB \quad -K_i] \begin{bmatrix} x \\ x_f \\ z \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{III-27})$$

Le gain de retour d'état  $K$  sera calculé en utilisant les LMIs.

Pour accommoder les performances supplémentaires qu'introduit la méthode, nous introduisons des entrées et des sorties artificielles pour permettre de les prendre en charge. Le bloc diagramme suivant représente ce changement.

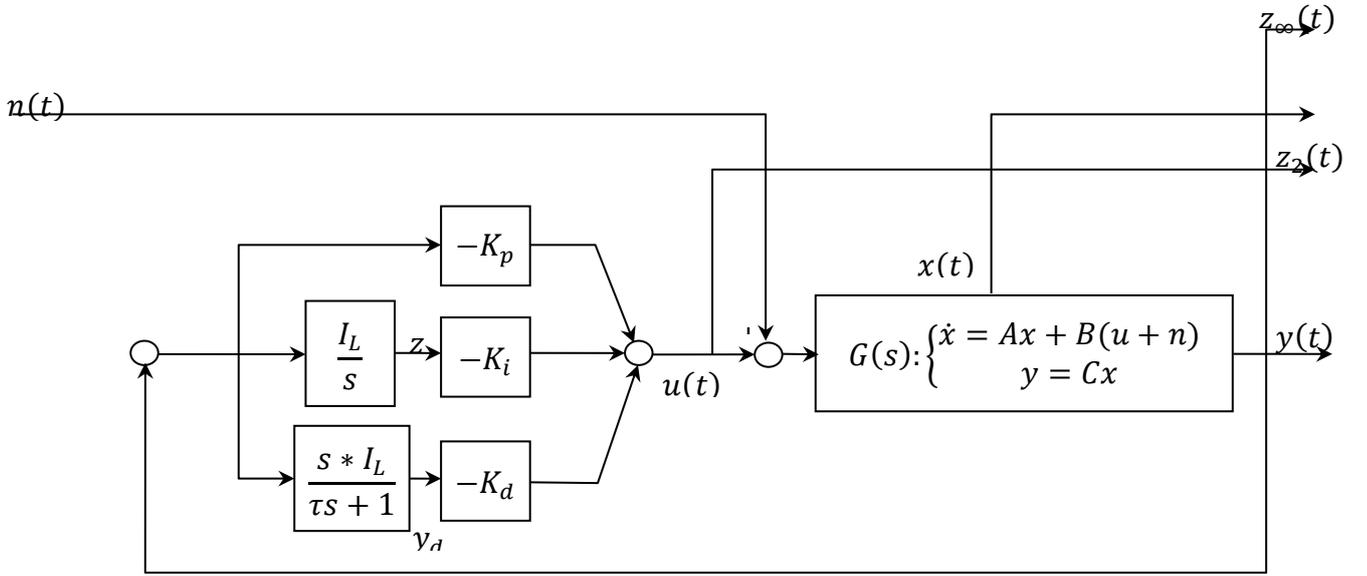


Figure (III-11) Représentation du système généralisé en boucle fermée pour la conception de la commande par retour d'état en utilisant les LMIs et les performances  $H_2/H_\infty$ .

Dans cette nouvelle représentation du PID, le filtre est utilisé seulement avec l'action dérivée pour éviter la difficulté introduite par cette dernière dans l'expression de la commande sous forme d'un retour d'état. Le bloc  $\frac{s*I_L}{\tau s+1}$  a comme état interne  $x_f$  et comme sortie  $y_d$  :

$$y_d = \frac{s*I_L}{\tau s+1} y = \frac{1}{\tau} \left\{ I_L - \frac{I_L}{\tau s+1} \right\} y = \frac{I_L}{\tau} y - \frac{1}{\tau} \frac{I_L}{\tau s+1} y = \frac{1}{\tau} y - x_f; \text{ avec } \dot{x}_f = -\frac{1}{\tau} x_f + \frac{1}{\tau} y \quad (\text{III-28})$$

L'équation d'état et des sorties du nouveau système avec les entrées et les sorties artificielles est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_f \\ \dot{z} \\ - \\ z_\infty \\ - \\ z_2 \\ - \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0_{n \times L} & 0_{n \times L} & | & B & | & B_{n \times m} \\ \frac{C}{\tau^2} & -\frac{I_L}{\tau} & 0_{L \times L} & | & 0_{L \times m} & | & 0_{L \times m} \\ C & 0_{L \times L} & 0_{L \times L} & | & 0_{L \times m} & | & 0_{L \times m} \\ - & - & - & + & - & + & - \\ C & 0_{L \times L} & 0_{L \times L} & | & 0_{L \times m} & | & 0_{L \times m} \\ - & - & - & | & - & + & - \\ I_{n \times n} & 0_{n \times L} & 0_{n \times L} & | & 0_{n \times m} & | & 0_{n \times m} \\ 0_{m \times n} & 0_{m \times L} & 0_{m \times L} & | & 0_{m \times m} & | & I_{m \times m} \\ - & - & - & + & - & + & - \\ C & 0_{L \times L} & 0_{L \times L} & | & 0_{m \times m} & | & 0_{m \times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_f \\ z \\ - \\ n \\ - \\ u \end{bmatrix} \quad (\text{III-29})$$

La commande de retour d'état est donnée par :

$$u = K \begin{bmatrix} x \\ x_f \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_p C - K_d \frac{C}{\tau} & K_d & -K_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_f \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} K_p & K_i & K_d \end{bmatrix}}_K \underbrace{\begin{bmatrix} -C & 0_{L \times L} & 0_{L \times L} \\ 0_{L \times n} & 0_{L \times L} & -I_{L \times L} \\ -\frac{C}{\tau} & I_{L \times L} & 0_{L \times L} \end{bmatrix}}_M \begin{bmatrix} x \\ x_f \\ z \end{bmatrix}$$

Les gains du PID sont liés au gain de retour d'état par l'équation suivante :

$$[K_p \quad K_i \quad K_d] = KM^\dagger = K \begin{bmatrix} -C & 0_{L \times L} & 0_{L \times L} \\ 0_{L \times n} & 0_{L \times L} & -I_{L \times L} \\ -\frac{C}{\tau} & I_{L \times L} & 0_{L \times L} \end{bmatrix}^\dagger \quad (\text{III-31})$$

Ici il faut noter que dans le cas général la matrice  $M$  n'est pas nécessairement carrée et non singulière. Ainsi, le calcul des paramètres  $K_p, K_i$  et  $K_d$  du régulateur dépend du conditionnement de la matrice  $M$ . Si cette matrice est bien conditionnée, alors le résultat sera bon. Notez aussi que la matrice  $M$  est à rang plein si la matrice  $C$  est à rang plein ce qui est généralement le cas.

Maintenant que la conception du PID est emmenée à une conception de retour d'état en utilisant les LMIs, alors on peut inclure d'autres contraintes telles que la minimisation d'un gain mixte  $H_2/H_\infty$  et l'imposition d'une région pour les valeurs propres (pôles) en boucle fermée. Pour ceci on définit une région  $\mathcal{D}_P$  de degré  $m$  comme l'ensemble de nombres complexes  $s$  qui vérifient :

$$\mathcal{D}_P = \left\{ s \in \mathbb{C} \mid \begin{bmatrix} I_m \\ sI_m \end{bmatrix}^* P \begin{bmatrix} I_m \\ sI_m \end{bmatrix} < 0 \right\} = \{s \in \mathbb{C} \mid P_{11} + P_{12}s + P_{12}^T \bar{s} + \bar{s}P_{22}s < 0\} \text{ avec } P \in \mathbb{H}^{2m} \quad (\text{III-32})$$

Avec  $\mathbb{H}^{2m}$  est l'ensemble de matrices Hermitiennes de taille  $(2m \times 2m)$ . Cette définition inclue une grande variété d'ensembles symétriques ou non par rapport à l'axe réel. Dans le cas général, les régions  $\mathcal{D}_P$  ne sont pas convexes. Par exemple pour le cas d'un cercle de rayon  $r$  et de centre  $s_0 = c_1 + c_2i$  on aura  $|s - s_0|^2 = (s - s_0)(\bar{s} - \bar{s}_0) < r^2 \quad \therefore (-r^2 + s_0\bar{s}_0 - \bar{s}_0s - s_0\bar{s} + s\bar{s}) < 0$  et la matrice  $P = \begin{bmatrix} -r^2 & -\bar{s}_0 \\ -s_0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^2 + c_2^2 - r^2 & -c_1 + c_2i \\ -c_1 - c_2i & 1 \end{bmatrix}$ .

Dans le cas où  $P \in \mathbb{S}^{2m \times 2m}$  (ensemble de matrices réelles symétriques de taille  $2m \times 2m$ ) la région est appelée une région LMI de degré  $m$ . Cette définition inclue (parmi d'autres) les demi-plans, les secteurs coniques, les bandes horizontales et verticales, les ensembles délimités par des cercles, par des ellipses, par des paraboles ou par des hyperboles. Aussi vue que toute intersection d'un nombre fini de régions LMIs et aussi une région LMI, on peut alors approximer n'importe quelle région convexe dans le plan complexe pourvu qu'elle soit symétrique par rapport à l'axe réelle. Sous certaines conditions, la définition précédente peut être réécrite sous la forme :

$$\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{C} \mid L + Ms + M^T \bar{s} < 0\} \quad (\text{III-33})$$

Avec  $L \in \mathbb{S}^{m \times m}$  et  $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . En utilisant cette expression on peut définir une grande variété de domaines simples. Nous donnons ici trois exemples :

### 1. Demi-plans $\text{Real}[s] < \alpha$ :

$$\mathcal{D}_P = \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Real}[s] < \alpha\} = \{s \in \mathbb{C} \mid (s + \bar{s}) < 2\alpha\} = \{s \in \mathbb{C} \mid (-2\alpha + s + \bar{s}) < 0\} \quad (\text{III-34})$$

Ainsi pour cette région  $L = -2\alpha$ ,  $M = 1$  et  $P = \begin{bmatrix} -2\alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

## 2. Cercles de rayon $r$ et centre l'origine :

$$\mathcal{D}_p = \{s \in \mathbb{C} \mid |s|^2 = s\bar{s} < r^2\} = \{s \in \mathbb{C} \mid s\bar{s} - r^2 < 0\} = \left\{s \in \mathbb{C} \mid \begin{bmatrix} -r^2 & s \\ \bar{s} & -1 \end{bmatrix} < 0\right\} \quad (\text{III-35})$$

$$\text{Ainsi pour cette région } L = \begin{bmatrix} -r^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } P = \begin{bmatrix} -r^2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ou } P_{11} = -r^2, P_{12} = 0; P_{22} = 1 \quad \therefore P = \begin{bmatrix} -r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

## 3. Secteurs coniques d'angle $\theta$ et centrés à l'origine :

$$\mathcal{D}_p = \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Real}[s] * \tan(\theta) < \text{Im}[s]\} = \left\{s \in \mathbb{C} \mid \frac{(s+\bar{s})}{2} \sin(\theta) - \frac{s-\bar{s}}{2i} \cos(\theta) < 0\right\} \quad (\text{III-36})$$

$$\text{La matrice } P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ 0 & 0 & -\cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) & 0 & 0 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

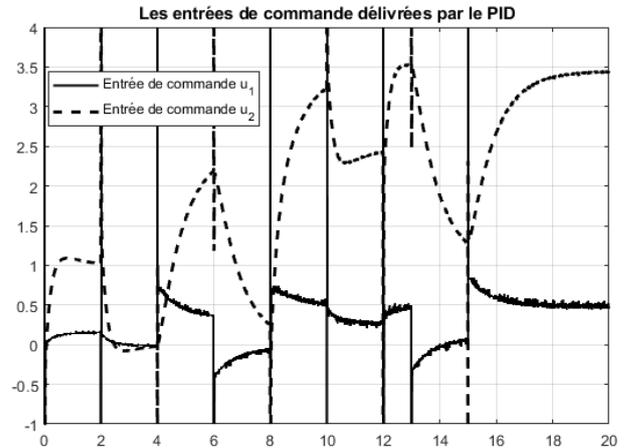
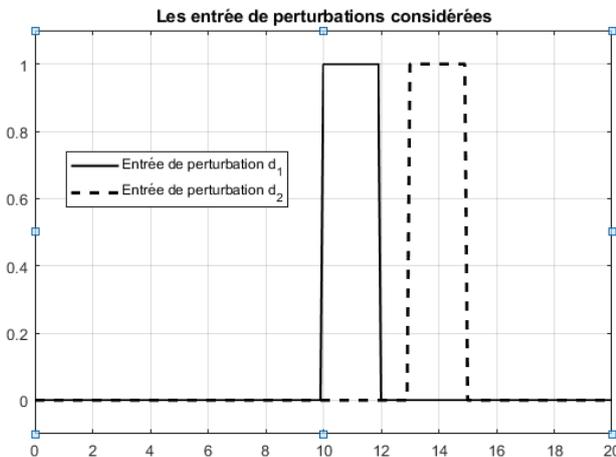
### Exemple 2 :

Dans cet exemple, nous considérons la commande du système utilisé dans l'exemple 1. Nous allons utiliser la synthèse de retour d'état en utilisant les performances  $H_\infty$  pour la conception du PID multi-variable en imposant une région dans le domaine des nombre complexes pour les valeurs propres en en boucle fermée. Le système est décrit par une réalisation d'état mais ceci n'est pas exigé dans le cas général car on peut toujours obtenir une réalisation d'état d'un système décrit par une matrice de transfert. La région que nous avons imposée pour les valeurs propres en boucle fermée est celle comprise entre les deux droites  $-12 < \text{Real}[s] < -5$  et les deux droites  $\text{Im}[s] = \pm \text{real}[s]$

Les matrices des paramètres du PID multi-variable obtenus en utilisant cette méthode sont :

$$K_p = \begin{bmatrix} 6.1184 & 5.843 \\ -7.9858 & -0.8327 \end{bmatrix}, K_i = \begin{bmatrix} 13.3637 & 96.8730 \\ -36.1857 & -30.2076 \end{bmatrix}, K_d = 10^{-5} \begin{bmatrix} -0.0785 & -0.8894 \\ 0.3218 & 0.0627 \end{bmatrix}$$

Pour simuler le système en boucle fermée avec le PID obtenue sous MATLAB/SIMULINK, nous avons utilisé le bloc diagramme de la figure (III-). Nous avons exporté les résultats de simulation à partir des blocs "scope" vers l'espace de travail "WorkSpace" pour pouvoir tracer les figures suivantes.



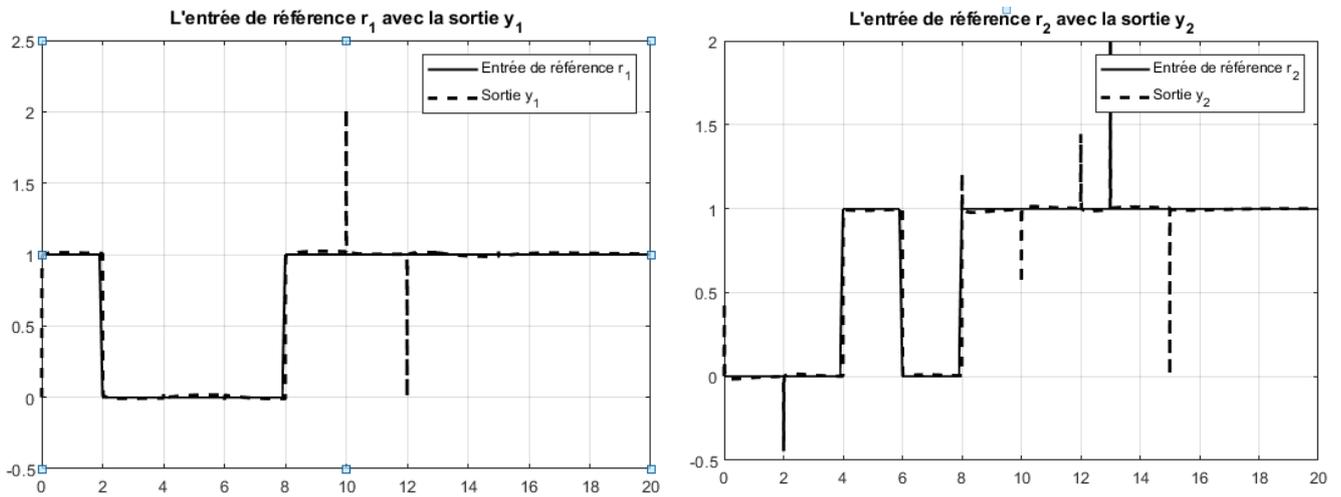


Figure (III-12) Résultats de simulation en boucle fermée du PID multi-variables conçu en utilisant les LMIs et la commande  $H_\infty$  pour le système de l'exemple 1 ( $\tau_{\text{filtre}} = 0.1 \text{ sec}$ ).

En examinant ces résultats, on constate que les sorties  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$  sont très proches de leurs références respectives  $r_1(t)$  et  $r_2(t)$  si on ignore le comportement impulsif instantané qui est dû aux variations brusques des références et des perturbations. Ceci est, bien sûr, due à la simulation seulement. On constate aussi un bon découplage entre  $r_1(t)$  et  $y_2(t)$  ainsi qu'entre  $r_2(t)$  et  $y_1(t)$ . Ce qui signifie qu'on peut commander la sortie  $y_1(t)$  uniquement à partir de la référence  $r_1(t)$  et la référence  $r_2(t)$  n'a aucun effet sur la sortie  $y_1(t)$  et vice versa. Concernant les perturbations, on constate qu'elles sont presque sans effet sur les sorties  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$ . Les commandes  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$  sont acceptables leurs valeurs sont comprises entre  $-0.5$  et  $3.5$  les impulsions instantanées aux moments des variations brusques des références et des perturbations sont seulement dues à la simulation.

### III.5. Synthèse des PID par l'algorithme génétique

Sont des méthodes d'optimisation inspirées des principes de la sélection naturelle et de l'évolution biologique. Ils appartiennent à la famille des algorithmes évolutionnaires et utilisent des mécanismes tels que la mutation, le croisement et la sélection pour trouver des solutions optimales à des problèmes complexes.

#### *Types de composants dans l'AG*

Il existe certains composants génétiques qui sont principalement utilisés dans les algorithmes génétiques pour guider le processus d'algorithme afin de donner la meilleure solution à un problème donné dont les cinq composants sont les suivants :

- **Initialisation:** Une population initiale de chromosomes (ensemble de paramètres PID) est générée aléatoirement dans les limites définies.
- **Évaluation:** Chaque chromosome est évalué en utilisant la fonction de fitness basée sur le cout.
- **Sélection :** Les chromosomes avec les meilleures valeurs de fitness sont sélectionnés pour la reproduction.

- **Croisement et mutation** : Des opérations de croisement et de mutation sont appliquées pour générer une nouvelle génération de chromosomes.
- **Itérations**: Ce processus est répété jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt soit atteint, par exemple un nombre maximum de générations ou une convergence des valeurs de fitness.

### ***Réglage de paramètre de GA***

Compte tenu des problèmes de limitations des algorithmes génétique dans l'application d'ajustement des paramètres PID (telle que la converge prématurée, la stagnation de la recherche, etc.), de nombreuses publications ont proposé des stratégies améliorées dans l'étude de l'AG pour l'ajustement des paramètres PID, cependant, la plupart d'entre eux ont ignoré le problème de calcul de la condition physique qui consomme la plus part de temps. Ce n'est qu'en réduisant le nombre de générations et en plaçant une population moyenne, on utilise un croisement uniforme et une mutation uniforme que nous pouvons améliorer fondamentalement la vitesse d'optimisation.

**Tableau (III.2) :** Réglage de paramètre de GA.

Nombre de Population	400
Nombre de Génération	100
Croisement	Uniforme
Mutation	Uniforme

### ***Fonctions objectif***

Le réglage des paramètres PID sont évalués à l'aide de l'intégrale de l'erreur quadratique (ISE) et l'intégrale absolue de l'erreur (IAE), qui deviennent en suite la fonction objective utilisée pour évaluer l'aptitude de chaque individu en GA. GA trouve de manière heuristique la valeur optimale des paramètres de contrôleur.

Les critères IAE et ISE sont utilisés pour évaluer les performances de la réponse des systèmes en intégrant l'erreur absolue, est sensible aux erreurs persistantes et donne une mesure de la performance globale du système en intégrant l'erreur au carré, met davantage l'accent sur les erreurs importantes, pénalisant sévèrement les grands écarts. [14]

$$IAE = \int_0^t |e(t)| dt \quad (III-37)$$

$$ISE = \int_0^t e^2(t) dt \quad (III-38)$$

### **Implémentation du contrôleur PID**

Dans cette étude, les fonctions de transfert utilisées pour évaluer les performances de GA sont des systèmes à ordre élevé  $G1(s)$ , système avec retard  $G2(s)$ , et système de phase non minimale  $G3(s)$ , qu'ils seront soumis à des contraintes sous l'optimisation de l'AG par les coûts ISE et IAE, qui nous permettent de visualiser la réponse de chaque système [13].

Ces systèmes sont :

$$G1(s) = \frac{25.2s^2+21.2s+3}{s^5+16.58s^4+25.41s^3+17.18s^2+11.70s+1} \quad (\text{III-39})$$

$$G2(s) = \frac{10e^{-1.0s}}{(1+8s)(1+2s)} \quad (\text{III-40})$$

$$G3(s) = \frac{1-10s}{(1+s)^3} \quad (\text{III-41})$$

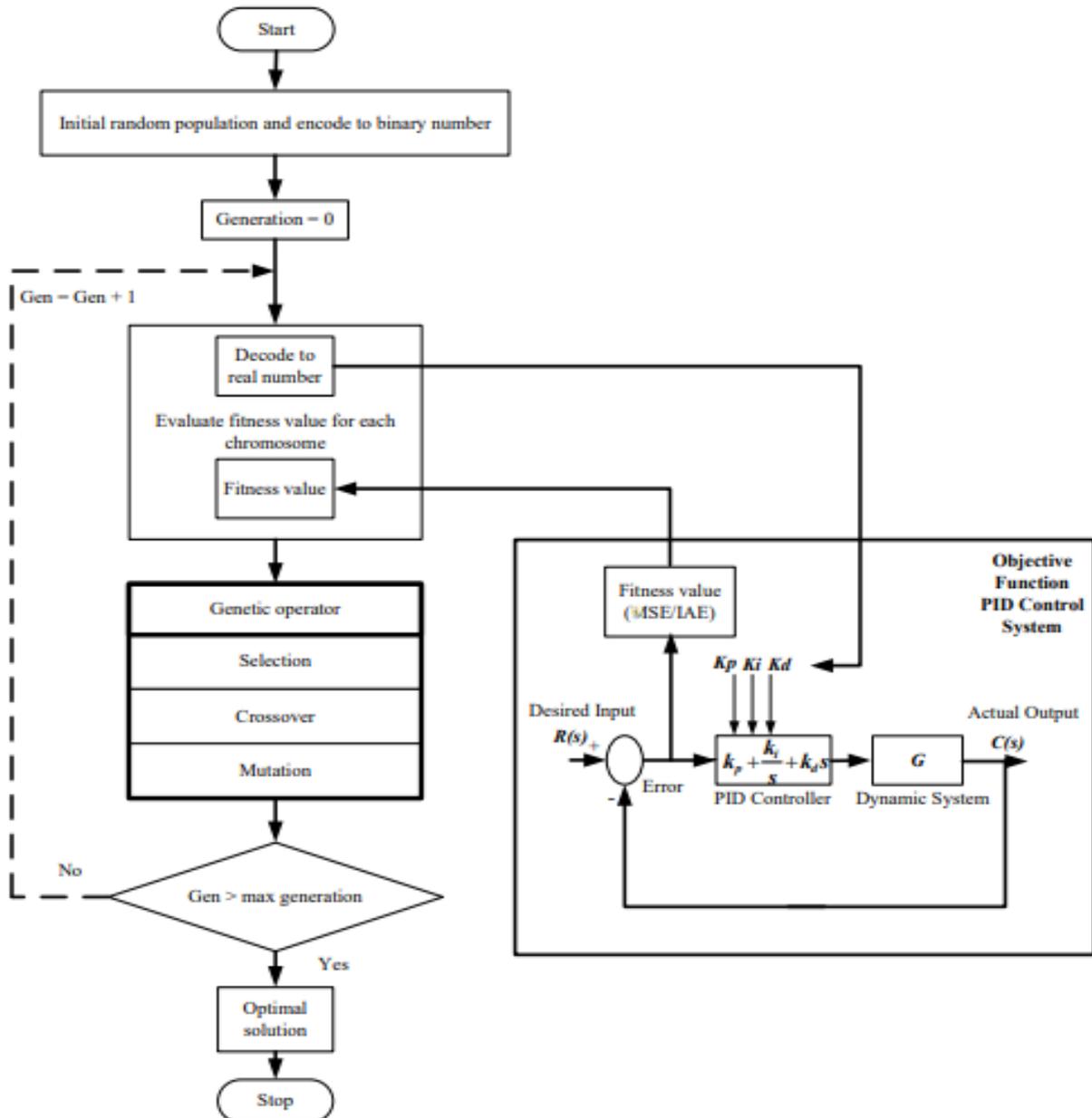


Figure III.13 Organigramme de l'algorithme génétique pour le réglage PID

## Simulation et résultat

### Plage des paramètres PID :

Ici les plages des paramètres PID de chaque système sont définies en fonction des études précédentes

[13]

**Tableau (III.3):** Plage de paramètres PID.

	G1		G2		G3	
	Min	Max	Min	Max	Min	Max
Kp	0	10	0	2.0	0	0.5
Ki	0	13	0	0.5	0	0.5
Kd	0	18	0	2.5	0	0.25

### Les contraintes

Les fonctions objectif l'intégrale de l'erreur quadratique (ISE) et l'intégrale absolue de l'erreur (IAE) seront optimisé sous les contrainte suivant :

- La commande de système u : Assure une valeur maximale de la commande de système réalisable
- Marge de phase: Assurer une marge de phase suffisante pour garantir la stabilité et éviter les oscillations.
- Marge de gain: Garantir une marge de gain adéquate pour la robustesse contre les variations du système.
- La norme  $H_{\infty}$ : Assurer et garantir la robustesse du système face aux incertitudes et perturbations.

**Tableau (III.4) :** Les contraintes.

	G1	G2	G3
U	10	10	10
MP	45	45	60
MG	6	6	6
$H_{\infty}$	1.5	2	1.5

**Tableau (III.5) :** Comparaison de performance des systèmes optimisé par ISE selon les contraintes

Contraint	G1			G2			G3		
	ISE+U	ISE+MG.MP	ISE+ $H_{\infty}$	ISE+U	ISE+MG.MP	ISE+ $H_{\infty}$	ISE+U	ISE+MG.MP	ISE+ $H_{\infty}$
ISE	0.04873	0.056549	0.057388	1.4422	1.4878	1.4878	20.1171	20.3388	21.1916
MG	$\infty$	0.09184	0.07372	1.8717	1.8220	1.65745	1.9080	1.80210	2.3089
MP	40.23	45.40	46.30	56.46	48.23	45.0	59.03	57.713	59.99
$H_{\infty}$	1.45503	1.2979	1.27455	1.8353	1.57661	1.4791	1.1886	1.14271	1.000
ST	0.62736	3.84789	3.82358	18.0686	1.65745	12.0402	35.8906	33.63614	39.6795
RT	0.07928	0.09913	0.10501	0.96259	0.9260	0.8382	19.3871	17.8656	20.1374
Kp	3.5554	1.3394	1.6402	0.56625	0.71049	0.70245	0.12636	0.12794	0.084696
Ki	10.9583	12.9835	12.9889	0.07768	0.077907	0.078686	0.04945	0.051156	0.045153
Kd	17.999	14.0359	13.3708	1.5169	1.6604	1.678	0.1354	0.14632	0.060675

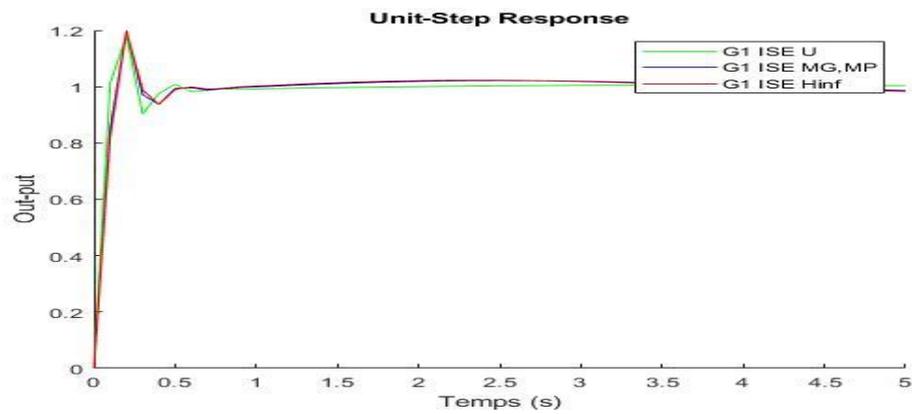


Figure (III-14) Réponse du système de control PID à un échelon (G1)

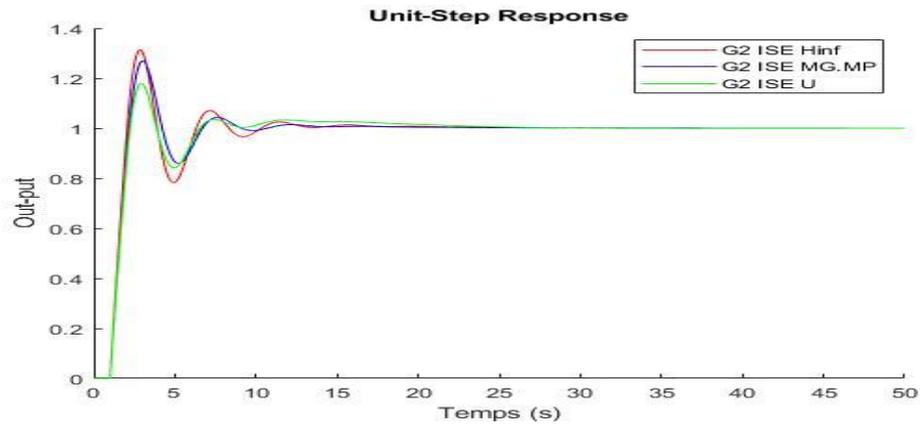


Figure (III-15) Réponse du système de control PID à un échelon (G2)

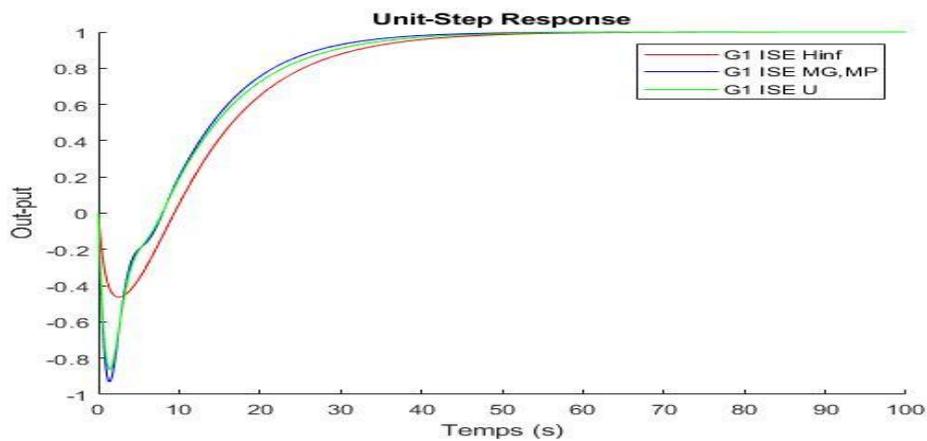


Figure (III-16) Réponse du système de control PID à un échelon (G3)

**Tableau (III.6) :** Comparaison de performance des systèmes optimisé par IAE selon les contraintes.

Contraint	G1			G2			G3		
	IAE+U	IAE+MG,MP	IAE+H $\infty$	U	IAE+MG,MP	IAE+H $\infty$	IAE+U	IAE+MG,MP	IAE+H $\infty$
IAE	0.10925	0.44034	0.31181	2.0232	2.2795	2.2792	3.582	13.5864	14.79831
MG	$\infty$	0.08497	$\infty$	2.3856	1.9297	1.9485	1.2661	1.2581	1.3550
MP	39.62	44.56	47.76	58.09	45.00	44.999	40.98	41.02	44.0460
H $\infty$	1.47667	1.32081	1.23895	1.5859	1.4176	1.4027	3.8707	3.7943	2.8243
ST	0.39725	3.81062	3.46935	7.3941	8.9180	8.95319	15.294	15.2638	10.7694
RT	0.07844	0.09271	0.11422	1.2983	0.9872	0.99811	2.0885	1.9652	3.08777
Kp	7.1578	1.137	2.8056	0.59282	0.78621	0.78648	0.2043	0.20577	0.1786
Ki	11.1595	13	12.999	0.058217	0.077584	0.077914	0.0736	0.07366	0.068745
Kd	18	14.6782	11.1154	1.1028	1.3247	1.3058	0.1564	0.1592	0.09168

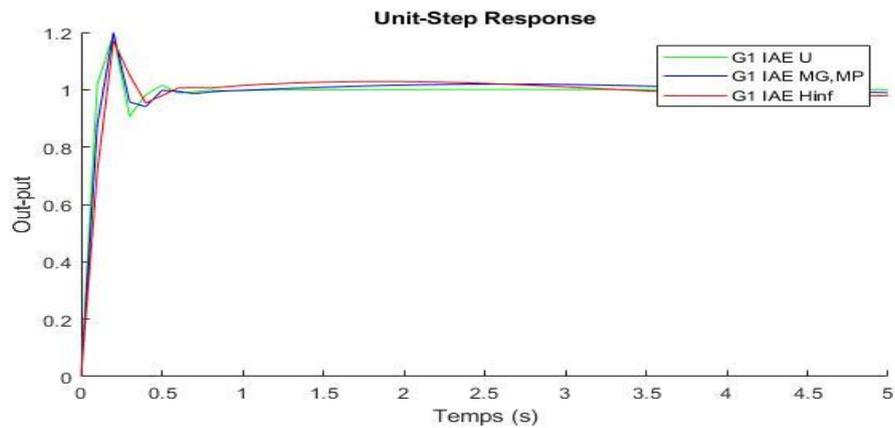


Figure (III-17) Réponse du système de control PID à un échelon (G1)

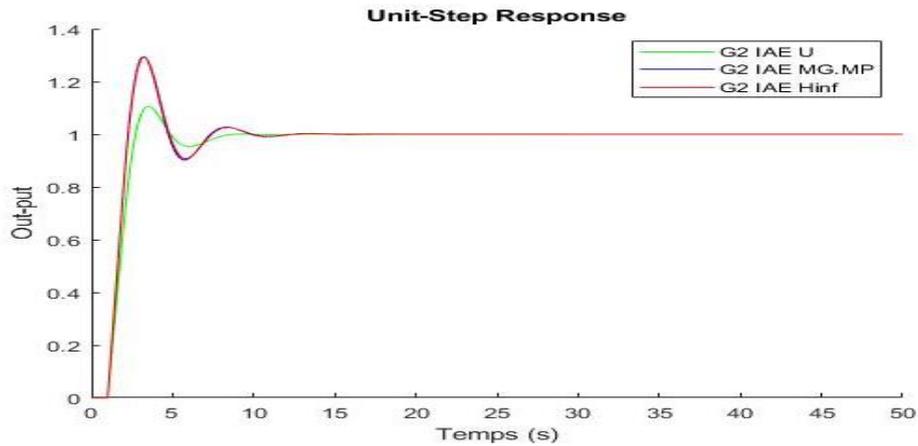


Figure (III-18) Réponse du système de control PID à un échelon (G2)

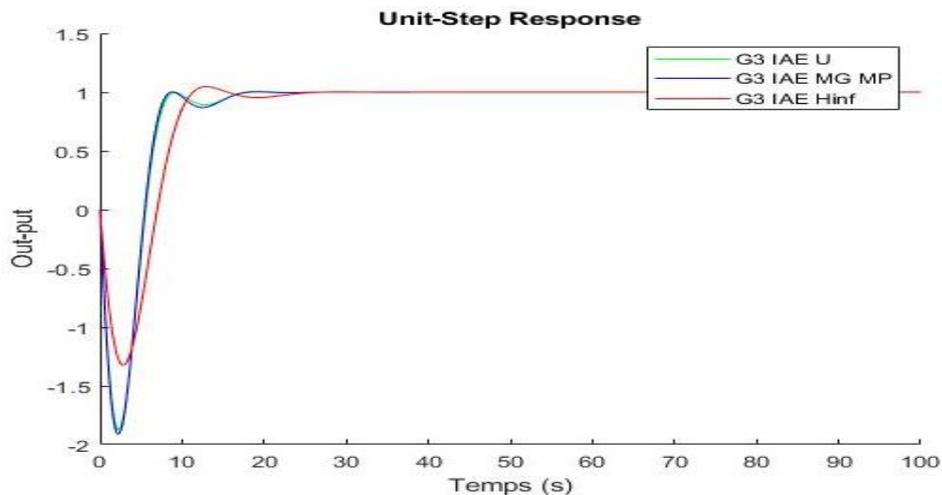


Figure (III-13) Réponse du système de control PID à un échelon (G3)

Les résultats des simulations montrent les performances des systèmes optimisés selon les critères IAE et ISE, sous contraintes d'effort de contrôle ( $u$ ), la marge de phase et la marge de gain (MP, MG) et norme infinie ( $H_\infty$ ). Évalués en termes de temps de stabilisation ( $t_s$ ), temps de monté ( $t_m$ ).

L'optimisation par IAE permet une réponse douce avec un effort de contrôle modéré et une robustesse accrue face aux perturbations. En revanche, l'optimisation par ISE montre une réponse plus rapide avec un dépassement initial marqué, mais avec une gestion efficace des erreurs. Les deux méthodes réussissent à maintenir des performances sous des perturbations, bien que les approches et les niveaux de performance varient. Les résultats illustrent ainsi comment chaque critère d'optimisation affecte les réponses du système sous différentes contraintes

### **III.6. Conclusion :**

En conclusion, ce chapitre a exploré diverses techniques de conception de régulateurs PID pour des systèmes à entrées unique et multiple, en mettant l'accent sur la performance et l'optimisation à l'aide de différentes approches telles que le Régulateur Linéaire Quadratique LQR, les Inégalités Matricielles Linéaires LMI's, et les algorithmes génétiques AG. Chaque méthode offre ses propres avantages et contraintes, permettant aux utilisateurs de choisir celle qui correspond le mieux aux spécifications du système et aux exigences de performance. L'application pratique de ces techniques a été illustrée à travers des exemples de systèmes de différentes complexités et particularités, affichant comment les paramètres du PID peuvent être ajustés pour atteindre des réponses transitoires optimales tout en assurant la stabilité et la robustesse du système en boucle fermée. Enfin, l'extension de ces méthodes aux systèmes avec retard a été évoquée, soulignant l'importance de l'adaptation appropriée des paramètres.

# Conclusion Générale

## Conclusion générale

---

En conclusion, ce mémoire a exploré en profondeur la conception et la synthèse des paramètres PID à travers trois méthodes avancées : la régulation quadratique linéaire (LQR), les inégalités matricielles linéaires (LMI) et les algorithmes génétiques (AG). Chaque méthode a été analysée en termes de principes théoriques, de mise en œuvre pratique et de performances obtenues à travers diverses simulations.

Le contrôleur PID, fondement de la régulation industrielle, a démontré son efficacité dans la stabilisation des systèmes et l'optimisation des performances. Cependant, les défis liés au réglage optimal des paramètres PID ont conduit à l'exploration des méthodes LQR, LMI et AG, qui offrent des alternatives robustes et flexibles. La méthode LQR se distingue par sa capacité à fournir des solutions optimales en minimisant une fonction coût quadratique, offrant ainsi une stabilité et une performance améliorée pour les systèmes linéaires. Les inégalités matricielles linéaires (LMI) permettent une approche plus généralisée et flexible, particulièrement adaptée aux systèmes incertains et contraints, offrant une garantie de stabilité robuste. Enfin, l'algorithme génétique (AG) se révèle être une technique puissante d'optimisation heuristique, capable de trouver des solutions optimales dans des espaces de recherche complexes et non linéaires.

Les résultats obtenus démontrent que chaque méthode présente des avantages spécifiques en fonction des caractéristiques du système à contrôler et des exigences de performance. Les simulations et études de cas ont illustré l'efficacité et les limites de chaque approche, mettant en lumière les conditions dans lesquelles elles sont les plus avantageuses.

En synthèse, ce mémoire a mis en évidence l'importance de choisir la méthode de conception des paramètres PID en fonction des spécificités du système et des objectifs de régulation. Les méthodes LQR, LMI et AG enrichissent l'arsenal des techniques de synthèse PID, offrant des solutions diversifiées et adaptées aux besoins variés des applications industrielles. La compréhension approfondie de ces méthodes et de leurs applications pratiques constitue une avancée significative dans le domaine de la régulation automatique, contribuant ainsi à l'amélioration continue des performances des systèmes industriels.

Ce travail ouvre également des perspectives pour des recherches futures, telles que l'intégration de ces méthodes avec d'autres techniques d'optimisation avancées et leur application à des systèmes plus complexes et dynamiques. L'exploration continue de ces approches innovantes promet de nouvelles améliorations dans la conception des contrôleurs PID, renforçant ainsi leur rôle crucial dans l'automatisation industrielle.

# Références Bibliographies

---

## Références bibliographiques

---

- [1] BOUTANA W, YKHELFOUNE N, « Etude comparative en simulation entre un régulateur PID et un régulateur flou », Mémoire Master, Spécialité Electronique, Université Mohammed Seddik BENYAHIA de Jijel, 2019.
- [2] TOUFIK T, « Analyse et Mémoire du Master Académique commandes d'un pendule inversé », Mémoire du Master Académique, Université Badji Mokhtar Annaba, 2020.
- [3] ISSAADI T, SAAD M, « Conception de la commande linéaire quadratique régulateur LQR 'Robustifiée' en utilisant l'optimisation H2/H $\infty$  (Appliquée à la commande d'un drone) », Master en commande des systèmes, Université UMMTO, 2014.
- [4] Dagher K , Al-Araji A. 'Design of an Adaptive PID Neural Controller for Continuous Stirred Tank Reactor based on Particle Swarm Optimization,' AlKhwarizmi Engineering Journal, Vol. 9, No. 4, P.P. 46- 53 , 2013
- [5] Boukhris M. « Regulation de vitesse d'une machine asynchrone'', Université de KasdiMerbah OURAGLA, Master en Electrotechnique ( 2014)
- [6] J.G. Ziegler, N.B. Nichols (1942): "Optimum settings for automatic controllers." Trans. ASME, 64, pp. 759-768
- [7] Zhi-Yong Feng, Huiro Guo, Jinhua She, Li Xu, « Weighted Sensitivity Design of Multivariable PID controllers via new iterative LMI-approach," Journal of Process Control n° 110, pages 24-34, 2022.
- [8] Saurabh Srivatava, Anuraag Misra, S. K. Thakur, V. S. Pandit, "An optimal PID controller via LQR for standard second order plus time delay systems," ISA transactions n° 60, pages 243-253, 2016.
- [9] S. Mukhopahyay, "PID equivalent of optimal regulator," Electronics Letters vol. 14 n°25 pages 821-822, 1978.
- [10] Feng Zheng, Qing-Guo Wang, Tong Heng Lee, "On the design of PID controllers via LMI approach," Automatica n° 38, pages 517-526, 2002.
- [11] Chong Lin, Qing-Guo Wang, Tong Heng Lee, "An improvement of on multivariable PID controller design via LMI approach," Automatica n°40, pages 519-525, 2004.
- [12] Carsten Scherer, Siep Weiland "Linear Matrix Inequalities in Control," Control Handboook, 2nd edition, pages 24-1 à 24-30, Editor William S. Levine, CRC Press 2014.
- [13] Mohd S. Saad, Hishamuddin Jamaluddin, Intan Z. M. Darus, "PID Controller Tuning Using Evolutionary Algorithms", WSEAS TRANSACTIONS on SYSTEMS and CONTROL, issue : 4, volume: 7, pages :139-149, 2012.
- [14] Feng Lin, Haidong Duan, Xiaguang Qu "PID Control Strategy for UAV Flight Control System based on Improved Genetic Algorithm Optimization", In: Chinese Control and Decision Conference (CCDC), China, pages: 92-97, 2014

# Résumé

---

Ce mémoire explore la conception et la synthèse des paramètres PID en utilisant trois méthodes avancées : la régulation linéaire quadratique (LQR), les inégalités matricielles linéaires (LMI) et l'algorithme génétique (AG). Les contrôleurs PID, essentiels dans l'industrie pour stabiliser et optimiser les systèmes, sont analysés à travers ces méthodes pour améliorer leurs performances et leur robustesse. Le mémoire commence par une introduction aux contrôleurs PID, puis détaille chaque méthode en termes de principes théoriques et de mise en œuvre pratique. Les résultats des simulations montrent que chaque approche offre des avantages spécifiques selon les caractéristiques du système à contrôler. La conclusion met en lumière l'importance de choisir la méthode adaptée pour chaque application et propose des pistes pour des recherches futures.

# Abstract

---

In this work, we explore PID design and synthesis using three advanced methods: Linear Quadratic Regulator (LQR), Linear Matrix Inequalities (LMI) and Genetic Algorithms. PID controllers, being very important in industry for stabilizing and optimizing systems behavior, are analyzed through those methods to enhance their performances and robustness. We start by introducing PID controllers and then we give details of every method in terms of theoretical principles and practical implementation. Simulation results show that every method possess specific advantages depending on the characteristics of the system under control.