

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A.MIRA-BEJAIA



Faculté des Sciences Exactes
Département de PHYSIQUE

Mémoire de fin d'étude

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

MASTER

Spécialité : **Dynamique des Fluides et Energétique**

Thème

Contribution à l'étude analytique des écoulements à surface libre : théorie linéaire

Présenté par

Walid OUABAS

et

Cherifa BOUTALEB

Soutenu le : 30/06/2024

Devant les Jury Composé de :

DJEMA	Amar	MCB	Président
DJESSAS NESSAS	Houria	MAA	Examinatrice
MEHIDI BOUAM	Nadia	Professeur	Rapporteur

Année universitaire 2023/2024

Dédicace

Du profond de mon cœur, je dédie ce travail à tous ceux qui me sont chers,
A ma chère mère

Aucune dédicace ne saurait exprimer mon respect, mon amour éternel et ma
considération pour les sacrifices que vous avez consenti pour mon instruction et mon
bien être.

A la mémoire de mon père

Ce travail est dédié à mon père, décédé tôt, qui m'a toujours poussé et motivé dans mes
études.

J'espère que, du monde qui est sien maintenant, il apprécie cet humble geste comme
preuve de reconnaissance de la part d'un fils qui a toujours prie pour le salut de son
âme.

A mes chers frères

(Rachid, Moussa, Mouhend, Karim, Youcef, Zahir)

A ma sœur

Naçira

A mes cousins et cousines spécialement pour

(Layachi, Kahina, Lydia et Ferial)

Walid OUABAS

Dédicace

Louange à dieu seul,
Ce modeste travail est dédié spécialement
A ma chère maman, ma raison de vivre, en témoignage de ma reconnaissance pour sa
patience, son amour et ses sacrifices.
A mon cher papa pour son amour et son dévouement
A vous, mes parents, je dis merci d'avoir fait de moi celle que je suis aujourd'hui.
Aucune dédicace ne pourra exprimer mes respects mes considération et ma grande admiration
pour vous, puisse ce travail vous témoigne mon affection et mon profond amour.
A mes chères sœurs Loubna et Ouidad et leurs maris Lounis et Hocine,
et à mes chers ferres Mouhaned et Arselane
A mon binôme Walid
A mes cousins et cousines
A toutes ma famille
Pour finir, a tous ceux que j'aime et m'aiment, je dédié ce mémoire.

BOUTALEB Cherifa

Remerciements

On remercie dieu le tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.

Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de Mme. MEHIDI Nadia, on la remercie pour la qualité d'encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire.

Notre remerciement s'adresse aux membres de jury Mr. DJEMA Amar le président et Mme. DJESSAS Houria l'examinatrice d'accepter de juger notre travail.

Notre remerciement s'adresse également à tout nos professeurs pour leurs générosités et la grande patience dont ils ont su faire preuve malgré leurs charges académique et professionnelles.

Sommaire

Liste des symboles et abréviations	6
Liste des figures.....	7
Introduction générale.....	8
Chapitre I :	13
Formulation générale et position de problème	
I.1 : Introduction.....	14
I.2 : Formulation de problème.....	14
I.3 : Les équations du mouvement.....	15
I.3.1 : Equation de continuité (la conservation de la masse).....	15
I.3.2 : Equation de Navier Stokes.....	15
I.3.3 : Condition aux limites.....	16
I.4 : Ecoulement de base.....	17
I.5 : Ecriture des équations du film mince sous forme adimensionnelle :.....	18
I.5.1 : Choix des échelles de référence.....	18
I.5.2 : Equation adimensionnées.....	19
I.5.3 : Condition aux limites correspondantes.....	19
I.5.4. : Définitions de quelques nombres adimensionnels.....	20
Chapitre II :	21
Modélisation du problème	
II.1 : Introduction.....	22
II.2-Equations du mouvement à l'ordre deux en ε	22
II.2.1-Condition aux limites.....	23
II.3-Elimination de la pression	23
II.4- Résolution des équations de notre problème.....	24
II.4.1 - Modèle intégral de Shkadov.....	24
II.4.1.1- Modèle à l'ordre 1 en ε	26
II.4.1.2- Modèle à l'ordre 2 en ε :.....	27
II.4.2-Modèle aux résidus pondérés	28
II.5-Conclusion.....	29
Chapitre III :	30
Etude de stabilité linéaire	
Introduction :.....	31
III.1 linéarisation des équations modèles :.....	31

III.2 Modèle intégral de Shkadov : equation linéarisée :.....	32
III.3 Modèle aux résidus pondérés de Ruyer-Quil : Equation linéarisée :.....	32
III.4 Seuil d'instabilité des modèles considérés :.....	33
III.5 Influence de l'inclinaison :.....	34
III.6 influence de la tension superficielle :.....	34
III.7 Taux d'amplification des perturbations :.....	35
III.8-conclusion.....	37
Conclusions et perspectives.....	38
Références bibliographiques.....	39
Résumé	40

Liste des symboles et abréviations

Symbole	Signification
\mathbf{G}	Accélération de la pesanteur
T	Temps
ρ	Masse volumique du fluide
μ	Viscosité dynamique du fluide
P	Pression
$U(y)$	Vitesse de l'écoulement de base
$\vec{V} = u\vec{e}_x + v\vec{e}_y$	Champ de vitesse où u et v les composantes longitudinale et transversale
γ	Coefficient de tension superficielle
\vec{n}	Vecteur unitaire normal à la surface libre
\vec{t}	Vecteur unitaire tangent à la surface libre
λ	Longueur d'onde caractéristique
$h(x, t)$	Épaisseur locale du fluide
h_0	Épaisseur du film fluide en écoulement stationnaire
Re	Nombre de Reynolds
k_a	Le nombre Kapitza
Re_c	Nombre de Reynolds critique
$\bar{\sigma}$	Tenseur des contraintes
\bar{D}	Tenseur taux de déformation
$q(x, t)$	Débit local de l'écoulement
k	Nombre d'onde
ω	Pulsation
ω_i	Taux d'amplification de l'onde
$\frac{D}{Dt}$	Dérivée particulaire
$\frac{\partial}{\partial x}$	Dérivée partielle
U_m	Vitesse moyenne
$\overrightarrow{\text{div, grad}}$	Opérateurs divergence et gradient

Liste des figures

Figure 1: Courbe de stabilité marginale représentant l'instabilité visqueuse dans le plan nombre de Reynolds et nombre d'onde.

Figure 2 : Courbe de stabilité marginale dans le plan nombre de Reynolds et nombre d'onde représentant l'instabilité interfaciale.

Figure 3 : *Instabilités de type films minces, trains d'ondes observés suites aux ruissellements d'eau de pluie. Source : C. Ancey, Cours d'hydraulique a surface libre, p238 [4].*

Figure 4 : *Trace d'un paquet d'ondes internes générées par la marée au-dessus du détroit de Gibraltar. source : RADARSAT image, SpaceDepartment, DERA, UK*

Figure 5 : *Exemples de la manifestation naturelle d'instabilités interfaciales :*

Figure I.1 : écoulement d'un film mince visqueux sur un plan incliné

Figure III.1 : *courbes de stabilité marginale comparant les seuils critique des deux modèles étudiés : Modèle de Galerkin et Modèle intégral*

Figure III.2 : *Courbes de stabilité marginale montrant l'influence de l'inclinaison du plan pour $k_a = 3000$*

Figure III.3 : *Courbes de stabilité marginale montrant l'influence de la tension superficielle ; en variant le nombre de Katitza pour une inclinaison de $\theta = 30^\circ$.*

Figure III.4 : *Taux d'amplification temporel ω_i de l'instabilité de l'interface en fonction du nombre d'onde k de la perturbation pour $R_e = 40$.*

Introduction générale

Les écoulements de films minces tombants sont rencontrés dans de nombreux domaines de l'ingénierie, allant de la géophysique à la biophysique, en passant par la nano-fluidique et la micro-fluidique. Ils interviennent également dans de nombreux processus industriels tels que les procédés de revêtement, où ces écoulements assurent une application uniforme et contrôlée des matériaux de revêtement, l'industrie alimentaire, ainsi que dans des applications dans l'industrie chimique et pétrochimique, où ils sont couramment utilisés dans les échangeurs de chaleur, les réacteurs et les colonnes de distillation. Dans toutes ces applications, les écoulements présentent une surface importante et déformable, qui peut être sujette à des instabilités se manifestant par des ondes de surface. Ces ondes apparaissent d'abord sous forme d'ondes périodiques courtes, presque sinusoïdales, et peuvent évoluer vers un état hautement irrégulier sur une longue distance et en fonction du temps. Les écoulements de films tombants ont suscité une attention considérable dans la littérature, depuis les travaux pionniers de Kapitza [1], ce qui a conduit à de nombreux développements dans la recherche expérimentale, analytique et numérique dans ce domaine. Des études de modélisation des films minces tombants dans le domaine linéaire ont été menées par Yih [2,3] et Benjamin [4], qui ont réalisé des analyses de stabilité linéaire de l'état de base. Leurs résultats ont montré que cet état de base devient instable par rapport aux grandes longueurs d'ondes.

Dans le cadre de la caractérisation des instabilités des films minces s'écoulant par gravité, plusieurs études expérimentales ont été consacrées à l'étude des instabilités des écoulements de films depuis les contributions novatrices de Kapitza [5]. On peut citer les observations expérimentales de Nosoko. [6], Alekseenko. [7], puis Liu et Gollub [8,9], et plus récemment Dietze et al. [10, 11] pour des configurations cylindriques. Ces études ont permis de mettre en évidence divers types d'instabilités.

-Une première instabilité se manifeste à grand nombre de Reynolds et à une faible inclinaison du plan incliné sous la forme d'un mode de cisaillement. Le cisaillement moyen dans le fluide joue un rôle important. Cette instabilité est principalement due à des effets visqueux. En effet, la viscosité facilite le transfert d'énergie entre l'écoulement moyen et les fluctuations grâce au travail du tenseur de Reynolds [12].

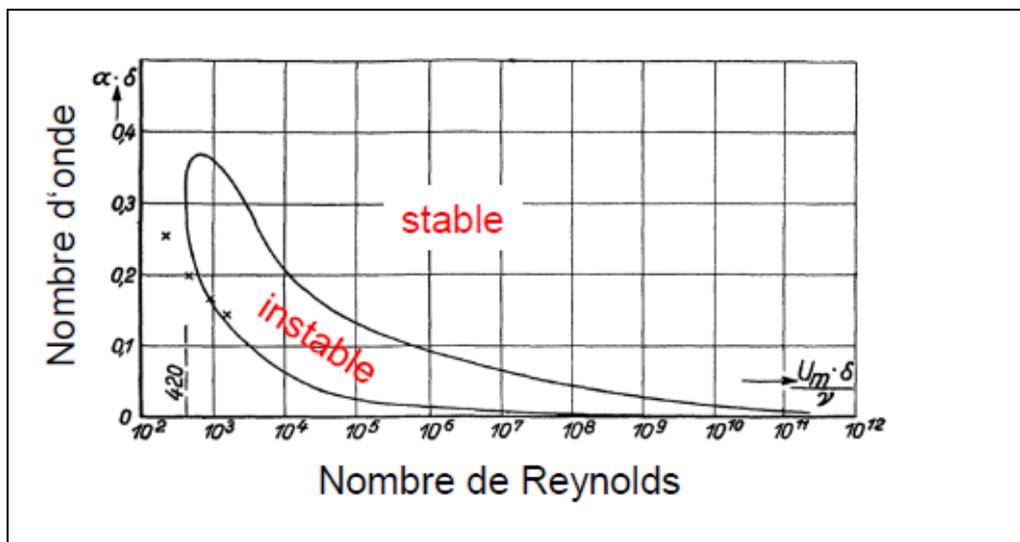


Figure 1- Courbe de stabilité marginale représentant l'instabilité visqueuse dans le plan nombre de Reynolds et nombre d'onde.

-Une deuxième instabilité de grande longueur d'onde résulte de phénomènes interfaciaux. Ce type d'instabilité survient généralement à des faibles nombres de Reynolds. -Une troisième instabilité interfaciale de courte longueur d'onde est mise en évidence. Elle apparaît lorsque les nombres de Reynolds et les débits sont faibles. Ces instabilités trouvent leur origine dans les contraintes de cisaillement engendrées par les perturbations au niveau de l'interface entre les couches de fluides. Les contraintes de cisaillement localisées à la surface libre et le transfert d'énergie entre le champ de base et le champ de perturbations contribuent à favoriser l'apparition de ces instabilités.

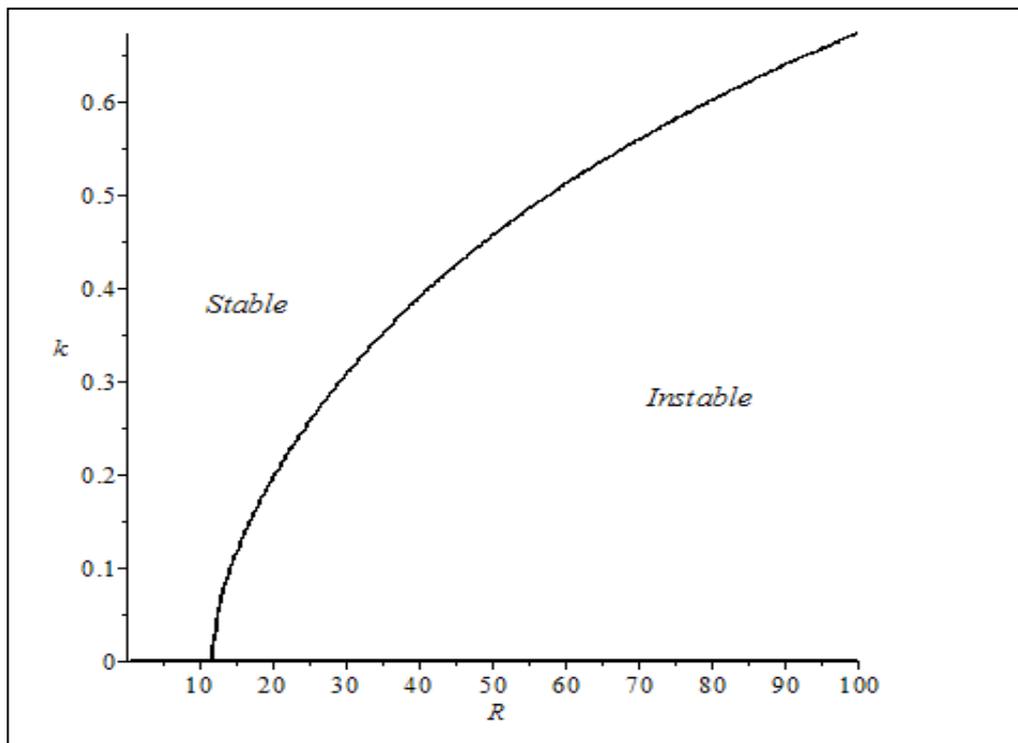


Figure2 : Courbe de stabilité marginale dans le plan nombre de Reynolds et nombre d'onde représentant l'instabilité interfaciale.



Figure 3 : *Instabilités de type films minces, trains d'ondes observés suites aux ruissellements d'eau de pluie. Source : C. Ancey, Cours d'hydraulique a surface libre, p238 [13].*

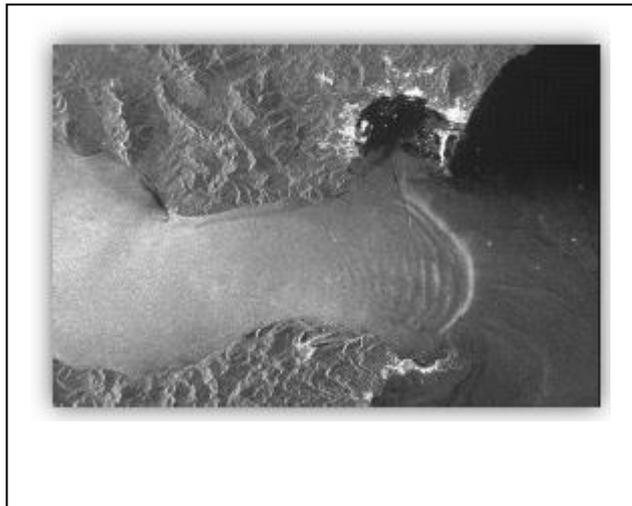


Figure 4 : *Trace d'un paquet d'ondes internes générées par la marée au-dessus du détroit de Gibraltar. source : RADARSAT image, Space Departement, DERA, UK*

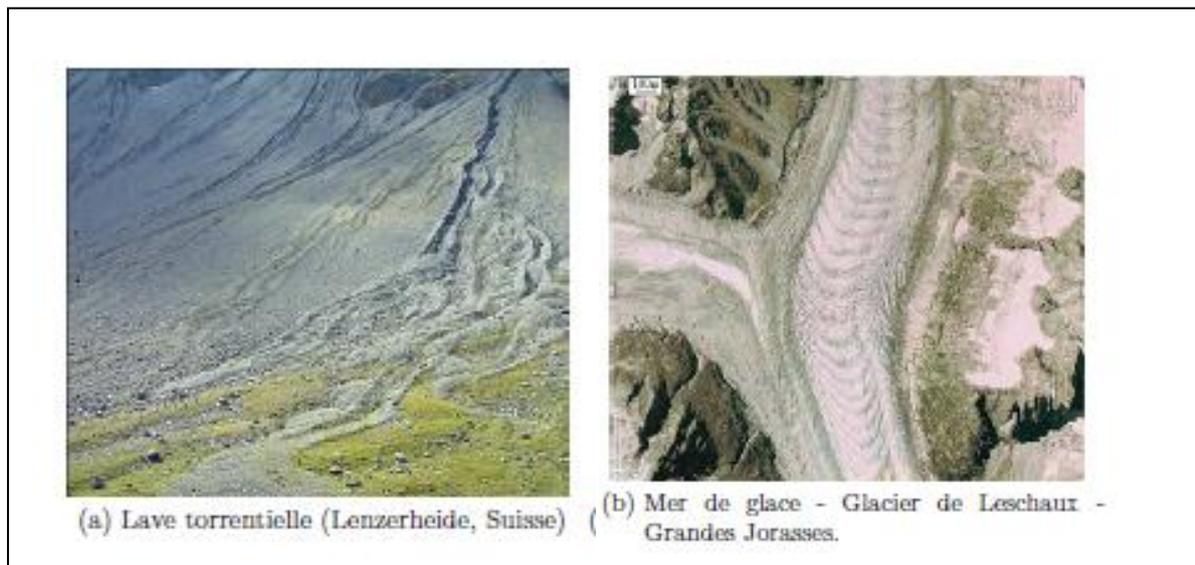


Figure 5 : Exemples de la manifestation naturelle d'instabilités interfaciales :

Benney [14] a étendu l'analyse des films tombants dans le régime non linéaire en dérivant une équation d'évolution pour l'épaisseur du film, prenant en compte l'inertie, la pression hydrostatique, les effets capillaires et les effets visqueux. Diverses modèles ont été dérivées à partir des équations de Navier-Stokes pour modéliser les écoulements de films liquides tombant sur un plan vertical ou incliné. Shkadov [15] a utilisé un profil de vitesse semi-parabolique, qui satisfait aux conditions aux limites à la paroi et à l'interface, pour dériver une méthode basée sur une approche qui combine la théorie de la couche limite avec la méthode intégrale de Kármán-Pohlhausen (Kapitza, [1]; Shkadov, [15]).

Les prédictions du modèle de Shkadov montrent un bon accord avec les expériences d'Alekseenko et al. [7], en particulier pour le cas des ondes se déplaçant rapidement en termes de vitesse et d'amplitude des ondes. D'autre part, le modèle de Shkadov ont manqué le seuil du déclenchement des instabilités de 20% par rapport au seuil d'instabilité basé sur les équations d'Orr-Sommerfeld soit $Re_c = 5/6 \cot \theta$. Du fait que les contributions inertielles apparaissent à l'ordre epsilon dans l'approche à une seule équation pour modéliser les films tombants à des nombres de Reynolds modérés à élevés le modèle de Benney est voué à l'échec dans ce domaine. Par Ruyer-Quil et Manneville [16, 17] ont proposé une nouvelle approche, étendant la théorie de la couche limite développée par Shkadov, qui a été démontrée comme étant efficace pour des nombres de Reynolds inférieurs à 300. Leur approche est donc basée sur la théorie de la couche limite combinée à une méthode aux résidus pondérés où les fonctions tests et de pondération sont soigneusement choisies.

L'objectif de cette étude est d'examiner l'instabilité de l'interface dans un écoulement de fluide visqueux sur un plan incliné, tout en appliquant un contrôle sur la paroi solide. Pour cela, un modèle basé sur la théorie de la couche limite et des résidus pondérés a été développé, conduisant à deux équations couplées pour l'épaisseur du film et du débit local, décrivant l'évolution des ondes de la surface libre avec une faible amplitude. Cette équation permet de déterminer les conditions critiques pour l'apparition des instabilités. Nous nous intéressons ensuite à une étude de stabilité linéaire du problème.

Le modèle développé permet de mettre en évidence la notion d'instabilité de grande longueur d'onde. Notons que dans ce cadre un certain nombre de travaux ont été réalisés au sein de notre laboratoire, ces travaux concernent des écoulements de fluides newtoniens et de fluides non newtoniens s'écoulant dans différentes configurations géométriques [18, 19, 20, 21].

Le premier chapitre fera l'objet d'une analyse adimensionnelle du problème d'un écoulement de film mince visqueux à frontière libre sur une paroi solide inclinée. Nous verrons qu'il existe trois paramètres de base indépendants qui apparaissent dans les équations adimensionnelles du problème, en plus de l'angle d'inclinaison θ qui tient compte des effets de la gravité, nous avons également choisi, le nombre de Reynolds R et le nombre de Weber W , qui donnent respectivement l'importance relative des effets d'inertie et de tension superficielle par rapport aux effets de viscosité.

Au chapitre 2, nous allons développer des modèles théoriques permettant de simplifier les équations du mouvement adimensionnelles et les conditions aux limites associées. La modélisation est basée sur l'hypothèse d'ondes longues et l'approche de couche limite.

Au chapitre 3, nous développons une analyse linéaire de stabilité des petites perturbations de l'écoulement de base. Ensuite on cherche les solutions sous forme de modes normaux. On examine ensuite l'effet des paramètres physiques du fluide sur les instabilités interfaciales aux grandes ondes.

Chapitre I
Formulation générale et position du
problème

I.1 - Introduction

Le chapitre sera dédié à une analyse sans dimensions de l'écoulement d'un film mince visqueux avec une frontière libre le long d'une paroi solide inclinée.

Dans ce problème la gravité sera le moteur de l'instabilité, comme on prend en considération la tension superficielle et la viscosité, et nous allons présenter la formulation mathématique du problème, où nous allons introduire les équations du mouvement ainsi que les conditions aux limites correspondantes.

I.2-Formulation du problème :

Considérons un film liquide mince s'écoulant sur un plan incliné faisant un angle θ avec l'horizontale sous l'action du champ gravitationnel g et de la tension superficielle γ . Le liquide est newtonien non miscible et incompressible, de densité ρ et de viscosité μ constantes. Un repère de référence de coordonnées cartésiennes (x, y) est adopté avec x mesurant les distances le long du plan incliné et y la distance perpendiculaire à celui-ci. L'interface perturbée entre la couche du film liquide et le gaz est notée $y = h(x, t)$, l'interface non perturbée correspondante est h_0 .

Les équations du mouvement sont les équations incompressibles de Navier-Stokes dans la région du liquide, ainsi que les conditions aux limites appropriées à travers l'interface $h(x, t)$. Si l'on considère que le champ de vitesse dans la couche liquide est $\vec{u} = (u, v)$ et la pression est notée P , les équations de quantité de mouvement et de conservation de la masse sont les suivantes

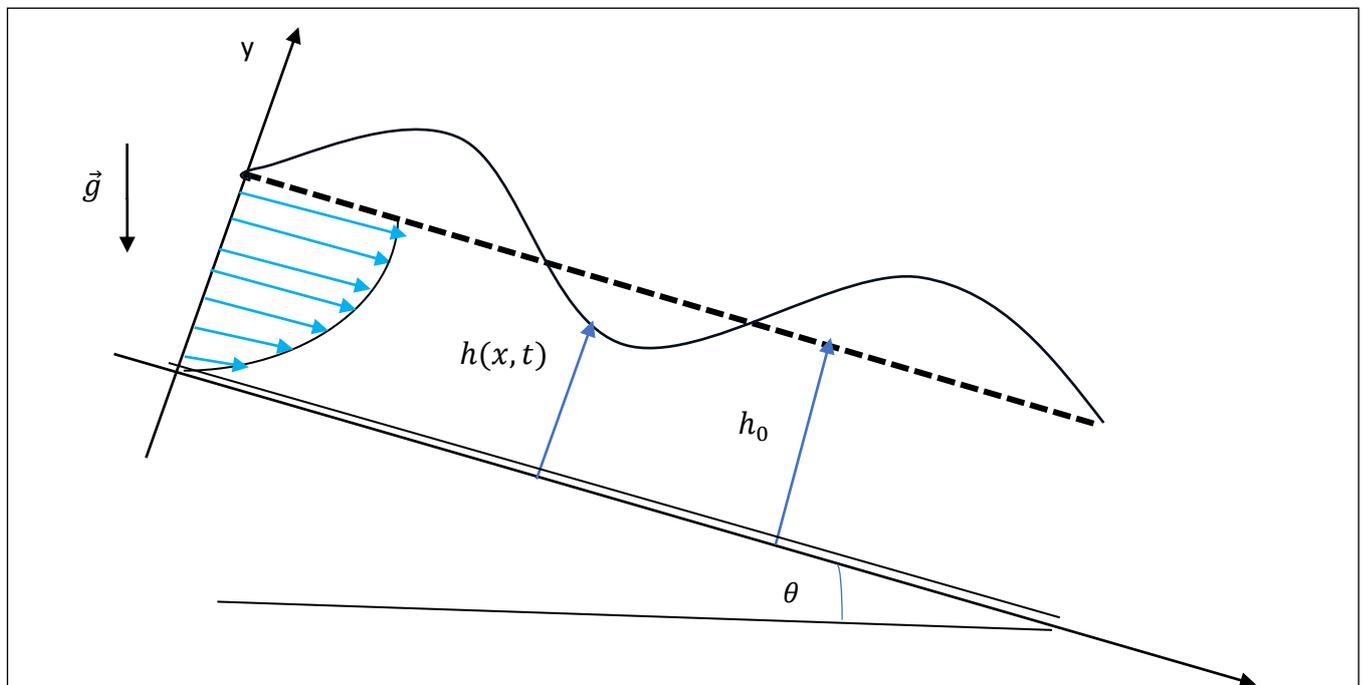


Figure I.1 : écoulement d'un film mince visqueux sur un plan incliné

I.3 - les équations du Mouvement :

Pour la résolution du problème il faut d'abord écrire les équations qui gouvernant le mouvement du fluide :

I.3.1-Equation de continuité (la conservation de la masse) :

Généralement l'équation de conservation de masse (continuité) d'un écoulement s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad (\text{I.1})$$

Comme le fluide est incompressible donc $\rho = \text{constant}$ donc $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$$\text{div}(\rho \vec{u}) = 0 \rightarrow \text{div}(\vec{u}) = 0$$

$$\text{D'autre part } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{I.2})$$

I.3.2-Equation de Navier Stokes :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v} = \text{div } \bar{\sigma} + \rho \vec{g} \quad (\text{I.3})$$

Le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ dans notre cas s'écrit:

$$\bar{\sigma} = -P \bar{I} + 2\mu \bar{D}$$

Où \bar{D} est le tenseur taux de déformation dont les éléments sont :

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

\bar{I} : représente le tenseur identité

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla} P + \mu \Delta \vec{u} + \rho \vec{g} \quad (\text{I.4})$$

La projection de l'équation précédente (I.3) suivant x et y en coordonnées cartésiennes (2D) est donnée par :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \rho g \sin(\theta) \quad (\text{I.5})$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \rho g \cos(\theta) \quad (I.6)$$

I.3.3- Conditions aux limites

Condition d'adhérence et d'imperméabilité

$$u=0 \quad \text{en} \quad y=0 \quad (I.7)$$

$$v = 0 \quad \text{en} \quad y = 0 \quad (I.8)$$

Condition cinématique

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = v \quad \text{en} \quad y = h(x, t) \quad (I.9)$$

Conditions dynamiques

$$\vec{T} \cdot \vec{n} + \sigma (\nabla \cdot \vec{n}) \vec{n} = 0 \quad \text{en} \quad y = h(x, t) \quad (I.10)$$

On peut définir le vecteur normal \vec{n} par :

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial h}{\partial x} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nous savons aussi que les vecteurs normal et tangent respectivement sont perpendiculaires, on a donc cette expression pour \vec{t} :

$$\vec{t} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\partial h}{\partial x} \end{pmatrix}$$

I.4-Écoulement de base

L'écoulement de base pourrait désigner un état ou une condition d'écoulement utilisé comme référence pour comparer d'autres états ou conditions d'écoulement.

Dans ce problème il y a une invariance par translation suivant x, l'écoulement est stationnaire :

Donc L'équation de Navier-Stokes (I.5) et (I.6) se réduit comme suit :

$$0 = +\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \rho g \sin(\theta) \quad (I.11)$$

Il y a un équilibre entre force de viscosité et force de gravité

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial y} - \rho g \cos(\theta) \quad (I.12)$$

Comme :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

D'après l'équation (I.12) et Après intégration on trouve :

$$\Rightarrow P(x, y) = \rho g \cos(\theta)(h - y) + P_0 \quad (I.13)$$

D'après l'équation (I.5) et après intégration, on trouve la solution de base de notre problème est donc :

$$U(y) = \frac{\rho g \sin(\theta)}{2\mu} \left[2 \frac{y}{h_0} - \left(\frac{y}{h_0} \right)^2 \right] \quad (I.14)$$

Le champ de vitesse d'un écoulement stationnaire d'un fluide visqueux sur un plan incliné d'angle θ , soumis aux seules forces de pesanteur, a un profil parabolique avec une vitesse maximum au niveau de la surface libre.

$$U(y) = \frac{\rho g \sin(\theta)}{2\mu} \left[2 \frac{y}{h_0} - \left(\frac{y}{h_0} \right)^2 \right]$$

$$V(y) = 0$$

$$P(x, y) = \rho g \cos(\theta)(h - y) + P_0$$

I.5- Ecriture des équations du film mince sous forme adimensionnelle :

I.5.1-Choix des échelles de référence

On se fixe comme longueur caractéristique horizontale λ suivant x , aussi la hauteur h_0 sera prise comme grandeur de référence suivant y . et U_m , la vitesse moyenne et d'après la conservation de la masse on peut déterminer la vitesse suivant y

-on définit $\frac{h_0}{\lambda} = \varepsilon$ (paramètre onde long dans la direction de l'écoulement)

$$u^* = \frac{u}{u_m} \quad , \quad x^* = \frac{x}{\lambda} \quad , \quad y^* = \frac{y}{h_0} \quad , \quad P^* = \frac{P - P_0}{\rho g h_0} \quad , \quad t^* = \frac{t u_m}{\lambda}$$

On a $U_m = \frac{1}{h_0} \int_0^{h_0} \frac{\rho g \sin \theta}{2\mu} (2h_0 y - y^2) y dy$ avec U_m c'est la vitesse moyenne

$$U_m = \frac{\rho g \sin \theta}{2\mu h_0} \left[2h_0 \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^{h_0} = \frac{\rho g \sin \theta h^2}{3\mu}$$

I.5.2-Équations adimensionnées

On a adimensionné les équation (I.2), (I.5) et (I.6) on obtient ce qui suit :

Conservation de la masse

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (I.15)$$

Equation du bilan de la quantité du mouvement suivant x

$$R_e \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + 3 + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (I.16)$$

Equation du bilan de la quantité du mouvement suivant y

$$R_e \varepsilon^3 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial y} + \varepsilon^4 + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 3 \cot \theta \quad (I.17)$$

I.5.3 Conditions aux limites correspondantes

$$u=v=0 \quad \text{en } y=0 \quad (I.18)$$

Condition normale

$$P = 2 \left(1 + \varepsilon^2 \frac{\partial h}{\partial x} \right)^{-1} \varepsilon^2 \left[\varepsilon^2 \frac{\partial h^2}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \right] \quad (I.19)$$

Condition tangentielle

$$2\varepsilon^2 \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left(1 - \varepsilon^2 \frac{\partial h^2}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \quad \text{en } y = h(x, t) \quad (I.20)$$

Condition cinématique

$$v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{en } y = h(x, t) \quad (I.21)$$

I.5.4-Définitions de quelques nombres adimensionnels :

- le nombre de Reynolds :

Le nombre de Reynolds, noté Re est un nombre sans dimension caractéristique de la transition laminaire-turbulent. Il est mis en évidence en 1883 par Osborne Reynolds.

$$Re = \frac{\rho u_m h_0}{\mu}$$

- le nombre de weber :

Le nombre de weber est un nombre sans dimension utilisé en mécanique des fluides pour caractériser l'écoulement de fluides à l'interface du système. Il représente le rapport entre les forces d'inertie et la tension Superficielle

$$we = \frac{\gamma}{\rho U_m^2 h_0}$$

- Le paramètre ε :

Le paramétré ε qui rend compte du caractère ondes longues des modes instables

$$\varepsilon = \frac{h_0}{L}$$

-Le nombre Kapitza k_a :

On introduit également le nombre de Kapitza k_a qui est le mieux adapté vu qu'il ne fait intervenir que les caractéristiques physiques (densité, viscosité, tension de surface) du fluide considéré. Il est donné par :

$$k_a = \frac{\gamma}{\rho v^{4/3} (g \sin \theta)^{1/3}}$$

Chapitre II
Modélisation du problème

II.1-Introduction

Les forces agissant sur le fluide en écoulement sont de plusieurs natures, l'écoulement subit en son sein des forces de gravité liées au poids du fluide, des forces de pression, des forces d'inertie dues à la variation de vitesse et forces de frottements causées par la viscosité. Vu que le fluide considéré est un film mince, alors les forces de tension superficielle sont également prises en comptes. L'ensemble de ces forces sont quantifiées dans les équations du mouvement à travers des nombres sans dimensions. L'un des enjeux essentiels des études sur les écoulements de films fluides est la compréhension des mécanismes d'instabilité interfaciale et la prévision du seuil d'apparition de ces instabilités.

Dans ce chapitre, nous allons explorer des modèles susceptibles de remplacer les équations de Navier-Stokes pour décrire le comportement des films fluides qui s'écoulent sur une plaque inclinée.

Nous montrons comment écrire des modèles à deux équations, sur la hauteur et le débit, à partir des équations de Navier-Stokes en utilisant des modèles intégraux couches limites. Nous étudions alors les propriétés des systèmes ainsi obtenus dans le chapitre suivant.

II.2-Equations du mouvement à l'ordre deux en ε

L'approximation de couche limite, consiste à négliger tous les termes supérieurs à l'ordre deux en ε . Ainsi l'élimination des termes d'inertie dans l'équation transversale à l'écoulement permet de déterminer une expression pour le champ de pression. Les équations de Navier-Stokes ainsi simplifiées modélisent l'écoulement de la couche de fluide.

Les équations adimensionnées sont alors données par

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II. 1})$$

$$Re \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + 3 + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (\text{II. 2})$$

$$0 = - \frac{\partial P}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 3 \cot \theta \quad (\text{II. 3})$$

II.2.1-Condition aux limites

$$U=v=0 \quad \text{en } y=0 \quad (\text{II.4})$$

$$P = -2\varepsilon^2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} + 2\varepsilon^2 \frac{\partial V}{\partial y} - \varepsilon^3 w_e \text{Re} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad \text{en } y=h(x, t) \quad (\text{II.5})$$

$$-\frac{\partial U}{\partial y} = \varepsilon^2 \left(u \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) \quad \text{en } y=h(x, t) \quad (\text{II.6})$$

$$V = \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{en } y=h(x, t) \quad (\text{II.7})$$

La condition tangentielle fait apparaitre un gradient de vitesse d'ordre deux en ε par conséquent la condition normale se simplifie et devient

$$P = -2\varepsilon^2 \frac{\partial V}{\partial y} - \varepsilon^3 w \text{Re} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

L'écoulement bidimensionnel est défini à partir de trois paramètres indépendants : Re le nombre de Reynolds, le nombre de Weber w_e et $B = 3 \cot \theta$ la pente de la surface d'écoulement du fluide

II.3-Elimination de la pression

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - 3 \cot(\theta) \rightarrow \int_{p(y)}^{P(h(x,t))} \partial P = \int_y^{h(x,t)} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - 3 \cot(\theta) \right) \partial y$$

$$P(h) - p(y) = \left(\varepsilon^2 \frac{\partial V}{\partial y} - 3 \cot(\theta) y \right) \rightarrow P(x, y, t) = P(h) - \left(\varepsilon^2 \frac{\partial V}{\partial y} - 3 \cot(\theta) y \right)$$

Après calcul donne:

$$P(x, y, t) = 3\varepsilon \cot(h - y) - \varepsilon^3 w \text{Re} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \varepsilon^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_h \right)_x \right)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 3\varepsilon \cot \frac{\partial h}{\partial x} - \varepsilon^3 w \text{Re} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} - \varepsilon^2 \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_h \right)_x \right] \quad (\text{II.8})$$

Or on a :

$$\text{Re}\varepsilon \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + 3 + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (\text{II.9})$$

Ou bien

$$R_e \varepsilon \frac{DU}{Dt} + \frac{\partial P}{\partial x} - 3 - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{II.10})$$

On remplace $\frac{\partial P}{\partial x}$ pour avoir :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \text{Re}\varepsilon \frac{DU}{Dt} + 3 \left(1 - \cot(\theta) \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \varepsilon^2 \left(2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_h \right)_x \right) + \varepsilon^3 w \text{Re} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} = 0 \quad (\text{II.11})$$

C'est l'équation de la couche limite.

Notons que ce problème il fait intervenir ces trois paramétré qui influence l'écoulement (Re, w et θ).

II.4- Résolution des équations de notre problème

Von Kármán (1921) a développé une équation intégrale en intégrant l'équation de quantité de mouvement sur toute l'épaisseur de la couche limite. L'objectif étant d'obtenir une solution approchée de la couche limite. Simultanément, Pohlhausen a proposé une solution de l'équation de Von Kármán, pour des cas particuliers, en la fermant à l'aide de profils de vitesse polynomiaux. C'est ainsi que des méthodes intégrales de couche limite se sont beaucoup développées surtout dans le cas des écoulements de films minces fluides. On peut citer les modèles développés par Kapitza, Skadov etc...

II.4.1 - Modèle intégral de Shkadov

L'équation de couche limite(II.11) intégrée sur l'épaisseur du fluide nous permet d'obtenir le modèle intégral de Shkadov. L'inconnu étant le profil de vitesse longitudinale $u(x, y, t)$ est projeter sur un profil polynomial.

On pose

$$u(x, y, t) = a_0(x, t)f(y) \quad (\text{II. 12})$$

Où $f(y)$ est une fonction test, elle satisfait les conditions aux limites

$$f(y) = \frac{y}{h(x,t)} - \frac{1}{2} \frac{y^2}{h(x,t)^2} \quad (\text{II. 13})$$

$$f(y) = 0 \quad \text{en } y = 0 ;$$

ainsi que sa dérivé en $y = h(x, t)$

$$\frac{\partial f(y)}{\partial y} = 0 \quad \text{en } y = h(x, t) \quad (\text{II. 15})$$

On définit le champ $a_0(x, t)$ en fonction du débit qui est une quantité qui possède un sens physique

$$q(x, t) = \int_0^{h(x,t)} U(x, y, t) dy$$

Ce qui donne

$$a_0 = \frac{3q(x,t)}{h(x,t)} \quad (\text{II. 17})$$

Finalement le champ de vitesse longitudinal devient

$$U(x, y, t) = a_0(x, t) \left(\frac{y}{h(x,t)} - \frac{1}{2} \frac{y^2}{h(x,t)^2} \right) \quad (\text{II. 18})$$

L'équation de continuité permet de déterminer la composante transversale de la vitesse :

$$v(x, y, t) = - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

Ensuite on va modifier la condition cinématique $v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x}$ vers une autre écriture qu'il s'appelle la condition cinématique sous forme intégrale

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad \text{En } y = h(x,t)$$

$$\int_0^h \left(\frac{\partial U}{\partial \pi} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy = \int_0^h \frac{\partial U}{\partial x} dy + \int_0^h \frac{\partial v}{\partial y} dy = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^h \frac{\partial U}{\partial x} dy + [v]_0^h = 0$$

\Rightarrow en remplace V en $y=h$ (condition cinématique) $v|_h = \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x}$

$$\Rightarrow \int_0^h \frac{\partial U}{\partial x} dy + \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial t} + \left[\int_0^h \frac{\partial U}{\partial x} dy + U \frac{\partial h}{\partial x} \right] = 0$$

En applique la règle de Leibniz $\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h F(y, x) dy$

$$\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{h(x,t)} U dy$$

Sachant que l'expression du débit s'écrit : $Q = \int_0^{h(x,t)} U(x, y, t) dy$

Donc

$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ En $y=h(x,t)$ c'est la condition cinématique sous forme intégrale

h et Q sont des champs qui ont une signification physique la hauteur du film et le débit de l'écoulement respectivement

II.4.1.1- Modèle à l'ordre 1 en ε

Equation de couche limite à l'ordre 1 en ε

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \text{Re} \varepsilon \frac{DU}{Dt} + 3 \left(1 - \cot(\theta) \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \varepsilon 3 \text{wRe} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} = 0 \quad (\text{II. 19})$$

En intégrant l'équation (II.19) sur la hauteur du film, on obtient une première équation d'évolution de l'interface qui peut être mise formellement sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial q(x,t)}{\partial t} = & h(x,t)\varepsilon^2 w_e \left(\frac{\partial^3 h(x,t)}{\partial x^3} \right) - \frac{3h(x,t)B \left(\frac{\partial h(x,t)}{\partial x} \right)}{Re} - \frac{12}{5} \frac{q(x,t) \left(\frac{\partial q(x,t)}{\partial x} \right)}{h(x,t)} + \\ & \frac{5}{6} \frac{q(x,t)^2 \left(\frac{\partial q(x,t)}{\partial x} \right)}{h(x,t)^2} + \frac{3h(x,t)}{Re} - \frac{3q(x,t)}{h(x,t)^2 Re \varepsilon} \end{aligned} \quad (\text{II. 20})$$

La condition cinématique sous forme intégrale

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (\text{II. 21})$$

La condition cinématique sous forme intégrale complète l'équation précédente et forme un modèle :

Les équations (II. 20) et (II. 21) constituent le modèle intégral à l'ordre un.

La précision du modèle de premier ordre diminue à mesure que le nombre de weber (w_e) diminue et que le nombre de Reynolds augmente, rendant ainsi nécessaire l'utilisation d'un modèle de second ordre pour décrire correctement la dynamique du film.

II.4.1.2- Modèle à l'ordre 2 en ε :

L'équation de couche limite à l'ordre 2 en ε est la suivante

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - Re \varepsilon \frac{DU}{Dt} + 3 \left(1 - \cot(\theta) \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \varepsilon^2 A \left(2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_h \right)_x \right) + \varepsilon^2 w_e Re \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} = 0$$

$$\begin{aligned} Re \varepsilon \left(\frac{\partial U(x,y,t)}{\partial t} + u \frac{\partial U(x,y,t)}{\partial x} + v \frac{\partial U(x,y,t)}{\partial y} \right) + 3 \varepsilon B \left(\frac{\partial h(x,t)}{\partial x} \right) - 3 - \frac{\partial^2 U(x,y,t)}{\partial y^2} - A \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial U}{\partial x} \right] + \\ 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - w Re \varepsilon^3 \left(\frac{\partial^3 h(x,t)}{\partial x^3} \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.24})$$

La substitution du profil de vitesse parabolique dans l'équation de couche limite puis son Intégration de cette équation sur l'épaisseur du film fluide, permet d'obtenir le modèle de Shkadov où les termes d'ordre deux d'origine visqueuse sont pris en considération.

II.4.2.-Modèle aux résidus pondérés

La méthode aux résidus pondérés est utilisée afin de déterminer une équation d'évolution de la surface libre $h(x, t)$ et du débit $q(x, t)$ de l'écoulement [11, 13]. La méthode combine à un développement en gradient du profil de l'écoulement (Ruyer-Quil et Manneville, 2000) et une méthode aux résidus pondérés. Cette méthode est utilisée dans la résolution d'équations aux dérivées partielles, elle consiste à éliminer la coordonnée y normale au plan et à formuler un modèle ne dépendant que de la position x et du temps t .

On projette le champ de vitesse suivant la direction de l'écoulement sur un ensemble de fonction test qui satisfont les conditions aux limites : adhérence à la paroi en $y = 0$;

$$\text{On pose} \quad u(x, y, t) = \sum_{k=0}^K a_k(x, t) f_k(y) \quad (\text{II.25})$$

Le champ de vitesse peut être écrit comme un développement en gradient où le champ $u_1(x, y, t)$ est considéré comme une correction du profil de vitesse parabolique $u_0(x, y, t)$.

On pose

$$u(x, y, t) = u_0(x, y, t) + \varepsilon u_1(x, y, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (\text{II.26})$$

Où $u_0(x, y, t)$ correspond à la solution à l'ordre zéro, elle à la forme de l'écoulement de base.

Les travaux antérieurs nous permettent de nous limiter à la solution à l'ordre zéro, soit

$$u(x, y, t) = u_0(x, y, t) = \frac{3q(x, t)}{h(x, t)} \left(\frac{y}{h(x, t)} - \frac{1}{2} \frac{y^2}{h(x, t)^2} \right)$$

L'élimination de la variable d'espace correspondant à la direction transversale se fait en écrivant les résidus correspondant aux fonctions poids.

La méthode utilisée dans ce travail est la méthode de Galerkin pour laquelle les fonctions tests sont les mêmes que les fonctions poids .

$$\int_0^{h(x, t)} \left[Re \varepsilon \left(\frac{\partial U(x, y, t)}{\partial t} + u \frac{\partial U(x, y, t)}{\partial x} + v \frac{\partial U(x, y, t)}{\partial y} \right) + 3\varepsilon B \left(\frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \right) - 3 - \frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial y^2} \right. \\ \left. - \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial U}{\partial x} \right] + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - w_e Re \varepsilon^3 \left(\frac{\partial^3 h(x, t)}{\partial x^3} \right) \right] f(y) dy = 0$$

Ce qui donne l'équation modèle suivante :

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{3} h(x, t) \text{ we } Ree \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} h(x, t) \right) \varepsilon^3 + \frac{1}{420} \frac{1}{h(x, t)^2} \left(\left(1386 \left(\frac{\partial}{\partial x} qI(x, t) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} h(x, \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. t \right) h(x, t) - 546 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} qI(x, t) \right) h(x, t)^2 + 693 qI(x, t) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} h(x, t) \right) h(x, t) \right. \right. \\
& \left. \left. - 1302 qI(x, t) \left(\frac{\partial}{\partial x} h(x, t) \right)^2 \right) \varepsilon^2 \right) + \frac{1}{420} \frac{1}{h(x, t)^2} \left(\left(420 B h(x, t)^3 \left(\frac{\partial}{\partial x} h(x, t) \right) \right) \right. \\
& \left. + 408 \left(\frac{\partial}{\partial x} qI(x, t) \right) h(x, t) qI(x, t) \text{ Ree} + 168 h(x, t)^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} qI(x, t) \right) \text{ Ree} \right. \\
& \left. - 216 qI(x, t)^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} h(x, t) \right) \text{ Ree} \right) \varepsilon \right) + \frac{1}{420} \frac{-420 h(x, t)^3 + 420 qI(x, t)}{h(x, t)^2} = 0
\end{aligned}$$

II.5- conclusion

En adoptant l'approche développée par Ruyer-Quil et Manneville en perfectionnant le modèle de Shkadov à l'aide d'une approche qui combine l'approximation en série de Taylor du champ de vitesses avec la méthode des résidus pondérés. Nous avons pu formuler un système d'équations d'évolution couplées pour deux variables inconnues : l'épaisseur du film h , le débit instantané local. Cela est rendu possible en appliquant l'approximation de couche limite, qui consiste à négliger les termes d'inertie du second ordre en ε dans la direction transversale de l'écoulement, cela a permis d'obtenir une expression pour la pression, qui est ensuite incorporée dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement selon x . Cette démarche nous conduit à une équation où la seule variable est la vitesse longitudinale.

Chapitre III

Etude de stabilité linéaire

Introduction

Dans toute l'étude du problème de la stabilité des écoulements de films minces visqueux, nous avons posés des hypothèses restrictives : Nous avons considéré l'écoulement laminaire et bidimensionnel (2D). Le nombre de Reynolds R_e est construit avec une vitesse moyenne U_m et une longueur caractéristique λ dans le sens de l'écoulement. Les modèles développés permettent d'explorer la dynamique linéaire de ces écoulements dans des gammes de nombre de Reynolds correspondant à un régime d'écoulement laminaire ($R_e \leq 300$). Dans ce chapitre nous allons procéder à l'étude de la stabilité linéaire de l'écoulement qui consiste dans un premier temps à linéariser les équations modèles.

III.1 linéarisation des équations modèles

On va explorer les outils mathématiques simples qui permettent de déterminer si l'équilibre d'un système est stable ou instable. La technique consiste à considérer l'évolution de petites perturbations de l'équilibre, ici la solution de Nusselt. L'hypothèse de petites perturbations nous permet d'introduire un petit paramètre pour négliger les termes non linéaires dans les équations. On obtient alors un système d'équations linéaires, plus facile à résoudre que le système initial. La croissance ou la décroissance des petites perturbations permet de déterminer si le système est stable ou instable. On note (H, Q) la perturbation de l'état de base et on pose

$$h(x, t) = 1 + H(x, t) \text{ et } q(x, t) = 1 + Q(x, t) \quad (\text{III.1})$$

En termes de modes normaux, la perturbation peut être écrite sous forme suivante :

$$H(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)} \text{ et } Q(x, t) = B e^{i(kx - \omega t)} \quad (\text{III.2})$$

Où k est le nombre d'onde réel et $\omega = \omega_r + i\omega_i$ est la pulsation complexe de l'onde. Cette approche correspond à regarder l'amplification temporelle des perturbations. Dans le cas où ω_i le taux de croissance de l'onde est négatif l'écoulement est linéairement stable, alors que si ω_i est positif l'écoulement est linéairement instable et $\omega_i = 0$ correspond à une stabilité marginale ou neutre. Dans ces conditions la résolution des systèmes (II.25) - (II.26) donnent la relation de dispersion mise sous la forme suivante :

$$D(k, \omega, R_e, w_e, B) = 0 \quad (\text{III.3})$$

Nous étudions dans cette section la stabilité temporelle de l'écoulement de base vis-à-vis d'une perturbation de nombre d'onde k_1 réel et de la pulsation ω complexe $\omega = \omega_r + i\omega_i$.

III.2 Modèle intégral de Shkadov : équation linéarisée

Modèle de Shkadov

Equations linéarisées :

$$-\frac{1}{3} w Ree \varepsilon^3 \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} H(x, t) \right) + \left(-\frac{7}{6} \frac{\partial^2}{\partial x^2} Q(x, t) + \frac{3}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} H(x, t) \right) \varepsilon^2 + \left(B \left(\frac{\partial}{\partial x} H(x, t) \right) + \frac{4}{5} \left(\frac{\partial}{\partial x} Q(x, t) \right) Ree + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial}{\partial t} Q(x, t) \right) Ree - \frac{2}{5} \left(\frac{\partial}{\partial x} H(x, t) \right) Ree \right) \varepsilon - 3 H(x, t) + Q(x, t) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} Q(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} H(x, t) = 0$$

On pose les perturbations proportionnelles à $\exp^{i(kx-\omega t)}$

Le determinant est

$$10 Ree \varepsilon^3 k^4 we + 45 I \varepsilon^2 k^3 - 35 I \varepsilon^2 k^2 \omega + 30 B \varepsilon k^2 - 12 Ree \varepsilon k^2 + 24 Ree \varepsilon k \omega - 10 Ree \varepsilon \omega^2 + 90 I k - 30 I \omega = 0$$

III.3 Modèle aux résidus pondérés de Ruyer-Quil : Equation linéarisée

Modèle aux résidus pondérés

Equations linéarisées :

$$-\frac{1}{3} we Ree \varepsilon^3 \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} H(x, t) \right) + \left(-\frac{13}{10} \frac{\partial^2}{\partial x^2} Q(x, t) + \frac{33}{20} \frac{\partial^2}{\partial x^2} H(x, t) \right) \varepsilon^2 + \left(B \left(\frac{\partial}{\partial x} H(x, t) \right) + \frac{2}{5} \left(\frac{\partial}{\partial t} Q(x, t) \right) Ree + \frac{34}{35} \left(\frac{\partial}{\partial x} Q(x, t) \right) Ree - \frac{18}{35} \left(\frac{\partial}{\partial x} H(x, t) \right) Ree \right) \varepsilon - 3 H(x, t) + Q(x, t) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} Q(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} H(x, t) = 0$$

Déterminant

$$10 Ree \varepsilon^3 k^4 we + 45 I \varepsilon^2 k^3 - 35 I \varepsilon^2 k^2 \omega + 30 B \varepsilon k^2 - 12 Ree \varepsilon k^2 + 24 Ree \varepsilon k \omega - 10 Ree \varepsilon \omega^2 + 90 I k - 30 I \omega = 0$$

$$10 Ree \tilde{k}^4 we + 30 B \tilde{k}^2 - 12 Ree \tilde{k}^2 + 24 Ree \tilde{k} \tilde{w} \tilde{r} + 35 \tilde{k}^2 \tilde{w} \tilde{i} - 10 Ree \tilde{k} \tilde{w} \tilde{i} + 30 \tilde{w} \tilde{i} = 0$$

$$24 Ree \tilde{k} \tilde{w} \tilde{i} - 20 Ree \tilde{w} \tilde{i} \tilde{w} \tilde{r} + 45 \tilde{k}^3 - 35 \tilde{k}^2 \tilde{w} \tilde{r} + 90 \tilde{k} - 30 \tilde{w} \tilde{r} = 0$$

Stabilité marginale

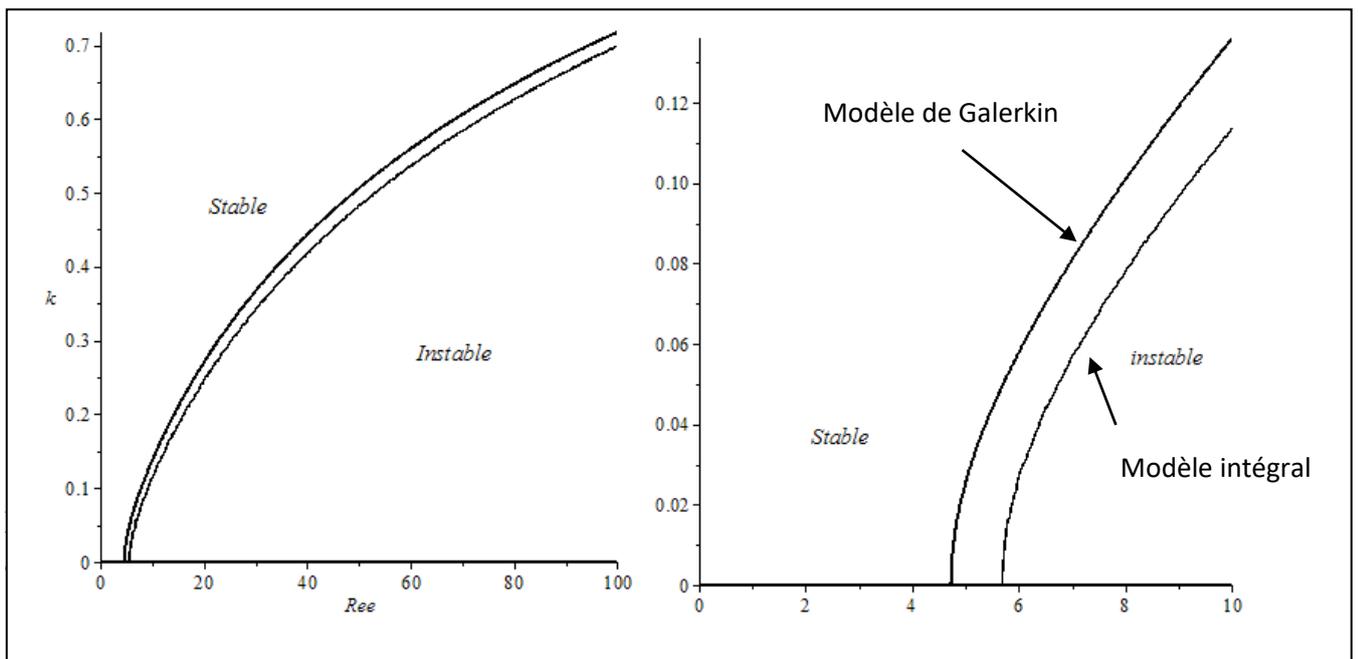
$$2450 Re \tilde{k}^6 \tilde{w} + 4200 Re \tilde{k}^4 \tilde{w} + 7350 B \tilde{k}^4 + 570 Re \tilde{k}^4 + 1800 Re \tilde{k}^2 \tilde{w} + 12600 B \tilde{k}^2 + 360 Re \tilde{k}^2 + 5400 B - 5400 Re = 0$$

Taux d'amplification

$$\begin{aligned} &800 Re \tilde{k}^3 \tilde{k}^4 \tilde{w} + 2800 Re \tilde{k}^2 \tilde{k}^6 \tilde{w} + 2450 Re \tilde{k}^8 \tilde{w} \\ &+ 2400 Re \tilde{k}^2 \tilde{k}^4 \tilde{w} + 4200 Re \tilde{k}^6 \tilde{w} + 2400 B Re \tilde{k}^2 \tilde{w} \\ &+ 8400 B Re \tilde{k}^4 \tilde{w} + 7350 B \tilde{k}^6 + 192 Re \tilde{k}^3 \tilde{k}^2 \tilde{w} + 800 Re \tilde{k}^3 \tilde{w} \\ &+ 672 Re \tilde{k}^2 \tilde{k}^4 \tilde{w} + 5600 Re \tilde{k}^2 \tilde{k}^2 \tilde{w} + 570 Re \tilde{k}^6 + 12250 Re \tilde{k}^4 \tilde{w} \\ &+ 8575 \tilde{k}^6 \tilde{w} + 1800 Re \tilde{k}^4 \tilde{w} + 7200 B Re \tilde{k}^2 \tilde{w} + 12600 B \tilde{k}^4 \\ &+ 576 Re \tilde{k}^2 \tilde{k}^2 \tilde{w} + 4800 Re \tilde{k}^2 \tilde{w} + 360 Re \tilde{k}^4 + 21000 Re \tilde{k}^2 \tilde{w} \\ &+ 22050 \tilde{k}^4 \tilde{w} + 5400 B \tilde{k}^2 - 5400 Re \tilde{k}^2 + 9000 Re \tilde{w} + 18900 \tilde{k}^2 \tilde{w} \\ &+ 5400 \tilde{w} = 0 \end{aligned}$$

III.4 Seuil d'instabilité des modèles considérés

Les figures III.1, III.2 et III.3 montrent l'influence des paramètres de l'écoulement sur la déstabilisation de l'interface. Cette influence est mise en évidence à travers le tracé du taux d'amplification en fonction du nombre d'onde. Les régions où $\omega_i > 0$ correspondent à un écoulement instable et celle où $\omega_i < 0$ correspondent à un écoulement stable. Remarquons que les courbes représentées sur ces figures sont obtenues analytiquement. Avec le modèle de Galerkin, on obtient un Reynolds critique $Re_{ec} = \frac{5}{6} \cot \theta$, tandis que le modèle intégral donne un Reynolds critique $Re_{ec} = \cot \theta$.



III.5 influence de l'inclinaison

La figure III.2 présente des courbes de stabilité marginale pour différentes valeurs de l'angle d'inclinaison θ . Les figures montrent qu'une petite inclinaison déstabilise plus l'écoulement et dans le cas d'un plan le Reynolds critique a une valeur nulle.

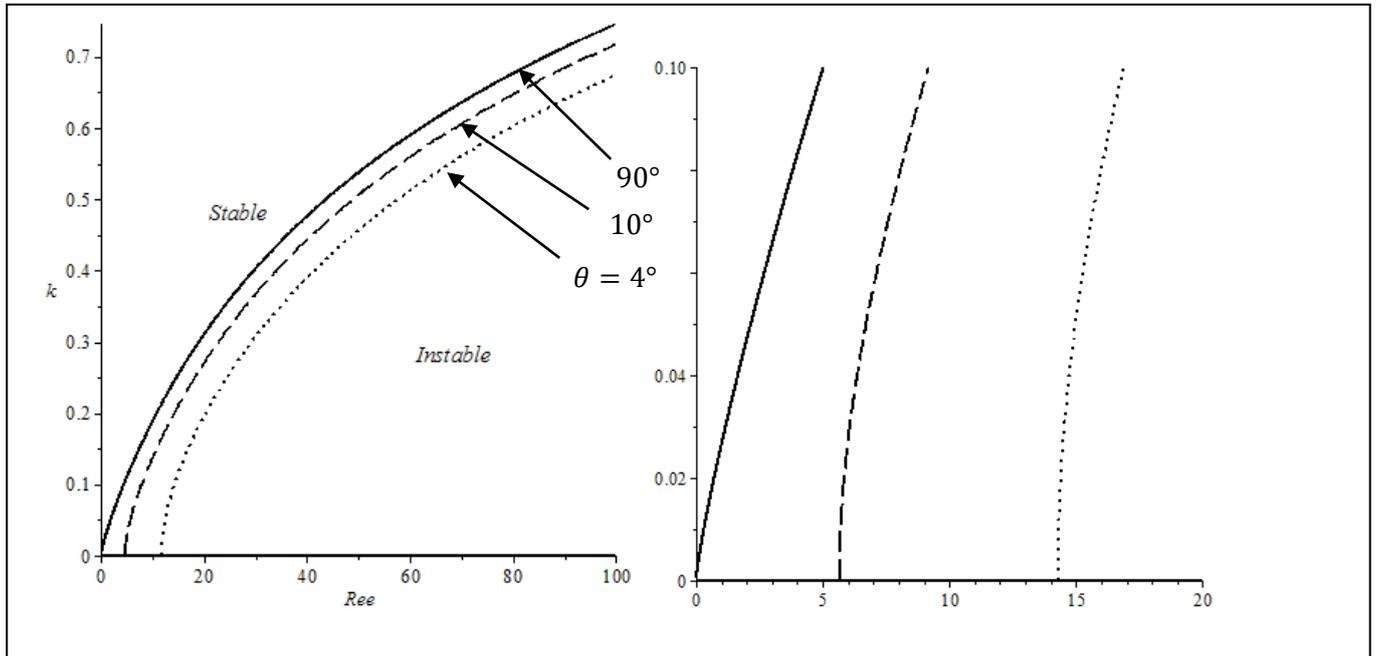


Figure III.2 : Courbes de stabilité marginale montrant l'influence de l'inclinaison du plan pour $k_a = 3000$

III.6-influence de la tension superficielle

La figure III.3 présente des courbes de stabilité marginale dans le plan du nombre de Reynolds, et nombre d'onde. Ces résultats montrent que l'augmentation de la tension superficielle augmente la zone stable, par conséquent, on peut conclure au fait que la tension superficielle joue un rôle stabilisant dans le cas de l'écoulement d'un film mince. Notons que ce résultat est conforme à ceux de la littérature. La variation de la tension superficielle n'a aucune influence sur le nombre de Reynolds critique. A $k = 0$, toutes les courbes commencent au même nombre de Reynolds critique.

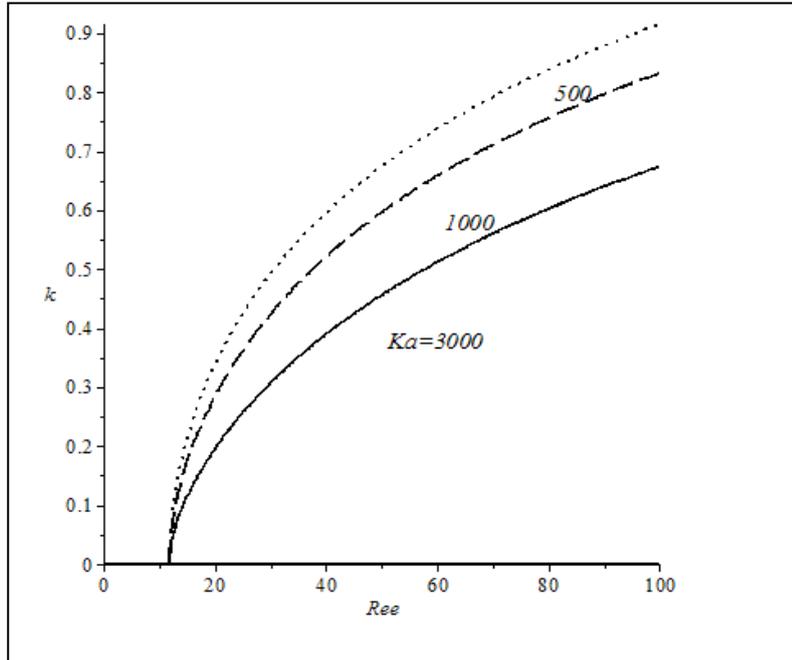


Figure III.3 : Courbes de stabilité marginale montrant l'influence de la tension superficielle ; en variant le nombre de Katiza pour une inclinaison de $\theta = 30^\circ$.

III.7 Taux d'amplification des perturbations

Dans la gamme des paramètres représentés sur la figure III.4 nous avons représenté les taux d'amplification fonction du nombre d'onde des modes instables. Sur la figure III.4 (a) plus en augmente la valeur de la tension superficielle plus le taux d'amplification maximum diminue pour les petites perturbations de l'écoulement de base. Le nombre d'onde pour lequel le taux d'amplification est maximum augmente quand on diminue la tension superficielle. Sur la figure 3.4 (b) le taux d'amplification maximum augmente quand on augmente l'inclinaison. Notant que le nombre d'onde critique correspondant change très peu.

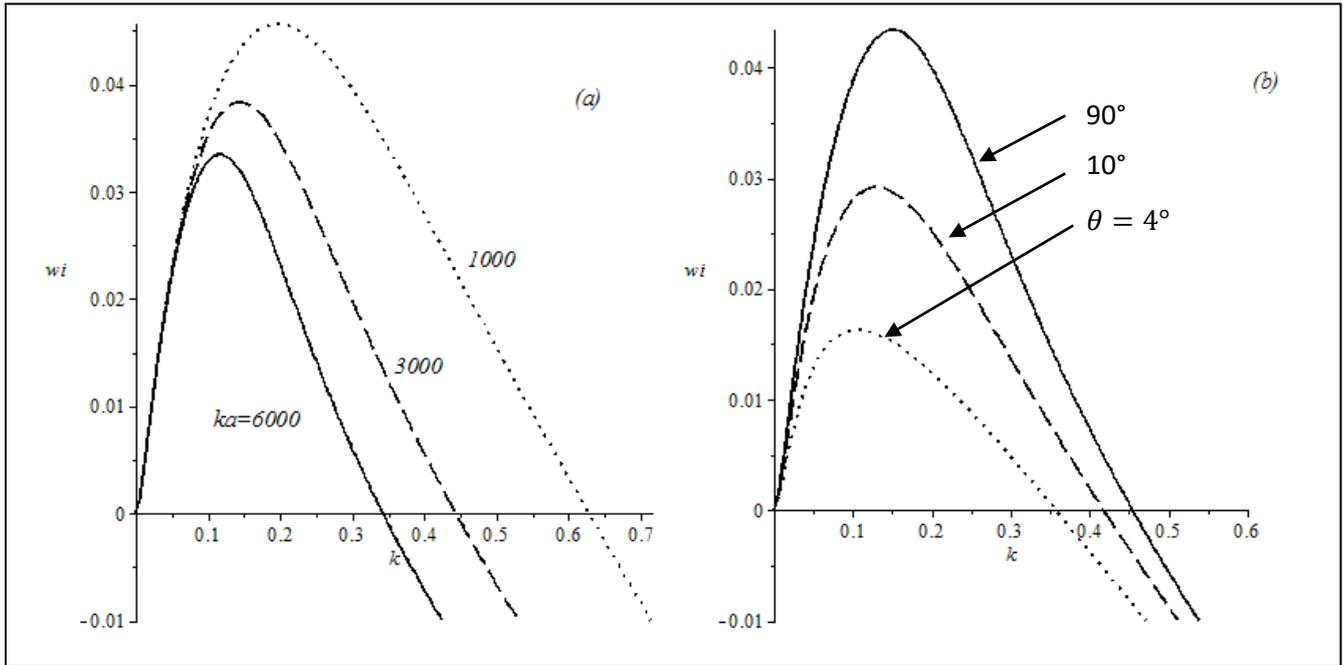


Figure III.4 : Taux d'amplification temporel ω_i de l'instabilité de l'interface en fonction du nombre d'onde k de la perturbation pour $Re = 40$.

III.8-conclusion

Dans ce chapitre, nous avons soumis l'écoulement à de petites perturbations, puis nous avons effectué une analyse de la stabilité linéaire, ce qui nous a permis de déterminer des courbes de stabilité marginale en posant $\omega_i = 0$ ainsi que le taux d'amplification en fonction de nombre d'ondes k et les courbes de la stabilité qui montrent l'influence des paramètres de l'écoulement sur la déstabilisation de la surface libre.

Conclusions et perspectives

Au cours de la réalisation de ce mémoire, nous avons dans un premier temps posé le problème d'un film mince s'écoulant sur une paroi solide inclinée en termes d'équations régissant le mouvement du fluide. Ces équations sont les équations de Navier-Stokes incompressibles, elles s'obtiennent à partir des équations de conservation de la quantité de mouvement et de la conservation de la masse.

En raison des effets combinés des forces de viscosité, de gravité, de tension superficielle et des forces d'inerties, nous avons fait un choix de grandeurs de références afin de rendre toutes les équations du problème sans dimension. Ce travail d' dimensionnement, nous permet de simplifier les équations dans le cadre de l'hypothèse de film mince et nous permet de déterminer les nombres sans dimension pertinents. Les nombres sans dimension obtenus permettent d'évaluer l'importance relative de tous les effets physiques qui rentre en jeux dans le problème.

Nous avons ensuite développé deux modèles analytiques basé sur une méthode intégral cela nous a permis d'explorer l'instabilité de la surface libre qui est une instabilité de grande longueur d'onde. Les modèles développés se présentent sous forme de deux équations aux dérivées partielles où les inconnues sont la hauteur de la surface libre $h(x, t)$ et le débit $q(x, t)$.

En particulier nous avons développé une étude de stabilité linéaire et nous avons mis en évidence les seuils de déclenchement des instabilités. Nous avons notamment retrouvé les résultats de la littérature à savoir le modèle intégral de Galerkin reproduit de manière exacte le Reynolds critique qui est $Re_c = 5/6 \cot \theta$. Nous avons ensuite exploré l'influence des paramètres sans dimension sur ces instabilités à travers la disponibilité d'une relation de dispersion analytique.

Références bibliographiques

- [1] P.L. Kapitza, S.P. Kapitza, Wave flow of thin layers of viscous fluid, *Zh. Ekper. Teor. Fiz.* 19 (1949) 105.
- [2] C. S. Yih, Stability of parallel laminar flow with a free surface. In *Proceedings of the 2nd US congress on applied mechanics*, ASME (1955) pp. 623–628.
- [3] C.S. Yih, stability of liquid flow down an inclined plane, *Phys. Fluids* 6 (1963) 321–330.
- [4] T.B. Benjamin, Wave formation in laminar flow down an inclined plane, *J. Fluid Mech.* 2 (1957) 554–574.
- [5] P.L. Kapitza. Wave flow of thin layers of a viscous fluid : I. Free flow. Dans *Collected papers of P.L. Kapitza (1965)*, pages 662–689. Pergamon (Oxford), 1948.
- [6] T. Nosoko, P. N., Yoshimura, T. Nagata, and K. Oyakawa, Characteristics of Two-Dimensional Waves on a Falling Liquid Film. *Chemical Engineering Science* 51, 5 (1996), 725–732.
- [7] Alekseenko, S. V., Nakoryakov, V. Y., and Pokusaev, B. G. Wave Formation on a Vertical Falling Liquid Film. *AIChE Journal* 31, 9 (1985), 1446–1460.
- [8] J. Liu, J.D. Paul, J.P. Gollub, Measurements of the primary instability of film flow, *J. Fluid Mech.* 250 (1993) 69–101.
- [9] Liu, J., and Gollub, J. P. Solitary wave dynamics of film flows. *Physics of Fluids* 6, 5 (1994), 1702–1712.
- [10] Dietze, G. F., Leefken, A., and Kneer, R. Investigation of the backflow phenomenon in falling liquid films. *Journal of Fluid Mechanics* 595 (Jan. 2008), 435–459.
- [11] Dietze, G. F., Al-Sibai, F., and Kneer, R. Experimental study of flow separation in laminar falling liquid films. *Journal of Fluid Mechanics* 637 (Sept. 2009), 73–104.
- [12] P. Huerre and M. Rossi. Hydrodynamic instabilities in open flows. In C. Godrèche and P. Manneville, editors, *Hydrodynamic and Nonlinear Instabilities*, pages 81–294. Cambridge University Press, 1998.
- [13] ac-nancy-metz.fr/physique/ancien_site/PHYS/Term/Mecaflu/Poly-mecaflu.htm
- [14] D.J. Benney, Long waves on liquid films, *J. Math. Phys.* 45 (1966) 150–155.
- [15] V.Y. Shkadov, Wave conditions in the flow of thin layer of a viscous liquid under the action of gravity, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Zhidk. Gaza* 1 (1967) 43–51.
- [16] C. Ruyer-Quil, P. Manneville, Improved modeling of flows down inclined planes, *Eur. Phys. J. B* 15 (2000) 357–369.

- [17] C. Ruyer-Quil, P. Manneville, Further accuracy and convergence results on the modeling of flows down inclined planes by weighted residual approximations, *Phys. Fluids* 14 (2002) 170–183
- [18] M. Amaouche, N. Mehidi, N. Amatusse, An accurate modeling of thin film flows down an incline for inertia dominated regimes, *European Journal of Mechanics B/Fluids* 24 (2005) 49–70.
- [19] N. Amatusse, H. Ait Abderrahmane, N. Mehidi, Traveling waves on a falling weakly viscoelastic fluid film, *Int. J. Embed. Syst.* 54 (2012) 27–41.
- [20] M. Amaouche, A. Djema, H. Ait Abderrahmane, Film flow for power-law fluids: Modeling and linear stability, *European Journal of Mechanics B/Fluids* 34 (2012) 70–84.
- [21] M. Amaouche, N. Mehidi, N. Amatusse, Linear stability of a two-layer flow down an inclined channel: a second order weighted residual approach, *Phys. Fluids* 19 (2007) 1–14.

Résumé

Dans ce travail, nous considérons un écoulement par gravité d'un film mince de fluide visqueux dont le mouvement s'effectue sur une paroi rigide inclinée. L'objectif du problème est de développer un modèle basé sur combinaison d'une expansion des ondes longues et d'une approximation d'équations de types couche limite valables jusqu'au deuxième ordre dans le rapport épaisseur du fluide h_0 et longueur d'onde λ ($\varepsilon = h_0/\lambda \ll 1$). La moyenne de ces équations sur l'épaisseur du film nous permet d'obtenir un système basé sur deux équations couplées pour l'épaisseur local du fluide et du débit local appelé modèle. Une étude de stabilité linéaire basée sur les modes normaux de ce modèle est mise en œuvre afin de décrire le processus de génération des ondes qui sont liées à la perturbation de la surface libre, afin de caractériser sa stabilité.

Mots clés: Ecoulements laminaires, fluide visqueux, film mince, ondes interfaciales, stabilité linéaire.

Summary

In this work, we consider a gravity-driven flow of a thin film of viscous fluid moving along an inclined rigid wall. The objective of the problem is to develop a model based on a combination of long-wave expansion and an approximation of boundary layer equations, valid up to second order in the fluid thickness-to-wavelength ratio ($\varepsilon \ll 1$). Averaging these equations over the film thickness yields a system of two coupled equations for the local fluid thickness and local flow rate, referred to as the model. A linear stability analysis based on normal modes of this model is implemented to describe the wave generation process related to free surface perturbations and characterize its stability.

Keywords: Laminar flows, viscous fluid, thin film, interfacial waves, linear stability.

ملخص

الهدف بمائل صلب جدار على حركته تحدث الذي اللزج السائل من رقيقة لطبقة الجاذبية التدفق بدراسة قمنا، العمل هذا في الصالحة الحدودية الطبقة نوع معادلات وتقريب الطويلة الموجات تمدد من مزيج على يعتمد نموذج تطوير هو المشكلة من على المعادلات هذه متوسط حساب إن ($\varepsilon = h_0/\lambda \ll 1$) الموجي والطول h_0 المانع سمك نسبة في الثانية الدرجة حتى يسمى المحلي التدفق ومعدل المحلي السائل لسمك مقترنتين معادلتين على يعتمد نظام على بالحصول لنا يسمح الفيلم سمك المرتبطة الموجات توليد عملية لوصف النموذج لهذا العادية الأنماط على بالاعتماد الخطي الثبات دراسة تنفيذ تم. النموذج ثباته لتوصيف وذلك، الحر السطح باضطراب

الخطي الثبات، البيئية الموجات، الرقيقة الأغشية، اللزج الموائع، الصفحي الجريان: **المفتاحية الكلمات**