République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane Mira - Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques
Option : Analyse Mathématique

Thème

Méthodes variationnelles et topologiques de résolution de problèmes elliptiques

Réalisé par :

M$^{\text{lle}}$ Brahmi Khadidja

µ devant le jury composé de :

Président : Mr Bouhmila Fatah	M.C. A	U. A.Mira Béjaïa.
Rapporteur : Mme Medjbar Sonia	M.C.B	U. A.Mira Béjaïa.
Examinatrice : Mme Bechir Halima	Professeur	U. A. Mira Béjaïa

Année Universitaire : 2023/2024

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et sincère remerciement à mon encadrante **Mme. Medjbar Sonia** pour le sujet intéressant qu'elle m'a proposé. Je la remercie encore pour son aide, sa patience, ses conseils, ses encouragements, sa grande disponibilité et son ouverture d'esprit qui m'ont aidé à mener à bien ce travail. Sans ses idées et son expertise, réaliser ce modeste travail n'aurait pas été possible.

J'exprime mes sincères remerciements à **Mr. Bouhmila Fatah**, pour m'avoir fait le grand honneur de présider ce jury de mémoire.

Je souhaite remercier **Mme. Bechir Halima**, pour avoir accepté d'être mon examinatrice. Son expertise et ses précieux commentaires ont grandement enrichi ce travail.

Mes remerciements ne seraient pas complets si je ne remerciais pas tous les professeurs de mathématiques et tous ceux qui m'ont enseigné tout au long de mon parcours universitaire.

Enfin, je remercie toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

Dédicace

Je tiens à dédier ce humble travail à :

À ma tendre mère **Saida** et mon très cher père **Akli**

De m'avoir donné la force et le courage de mener

à bien ce modeste travail.

À mes sœurs : **Wissam**, **Imane**, **Cherifa**

À mon frère : **Adem**

À mes meilleurs amis :

Dilya, **Bouzid**, **Yasmine**, **Hanane**, **Meriem** , **Liza**

Tout ceux qui m'aiment et que j'aime

Résumé

Les équations aux dérivées partielles de types elliptiques ont été soigneusement étudiées durant le vingtième siècle. Ces études ont été surtout menées par Courant et Hilbert et ses co-auteurs et d'autres chercheurs et savants comme Dirichlet, Neumann et J.L. Lions. Un grand nombre d'articles ont été publiés dans ce domaine et plusieurs livres ont vu le jour. Dans ce travail, nous allons nous intéresser aux différentes méthodes de résolution à l'instar des méthodes variationnelles et monotones.

Notations

E	Espace vectoriel normé.
$\|\cdot\|$	La norme.
$(\cdot,\cdot)$	Le produit scalaire.
Ω	Un ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$.
$\partial\Omega$	L'ensemble fermé de Ω.
lim	La limite.
$\hookrightarrow$	L'injection canonique.
V, W	Espaces de Banach séparables,réflexifs.
$\to$	La convergence forte.
$\rightharpoonup$	La convergence faible.
$L^p(\Omega)$	L'espace des fonctions mesurables u sur Ω vérifiant $\int_\Omega \|u\|^p \, dx < \infty$.
$C^\infty(\Omega)$	L'ensemble de toutes les fonctions indéfiniment dérivables.
$C_0^\infty(\Omega)$	L'ensemble des fonctions $u \in C^\infty(\Omega)$ à support compact.
$L^2(\Omega)$	L'espace des fonctions de carré intégrable.
H	L'espace de Hilbert.
H'	L'espace dual de H.
l	Une fonctionnelle linéaire.
A	Un opérateur linéaire.
$\mathrm{D}(A)$	Le domaine de définition de A.
$\overline{\mathrm{D}(A)}$	L'adhérence de D(A).
A^*	L'adjoint de A.
$\mathrm{D}(A^*)$	Le domaine de définition de A*.
$\overline{A}$	La fermeture de A.
$D^k u$	La dérivée généralisée.
$W_m^l(\Omega)$	L'espace des fonctions $u \in L^m(\Omega)$, tel que $D^k u \in L^m(\Omega)$; où $\|k\| \leq l$.
$a(.,.)$	Une forme bilinéaire.
$l(.)$	Une forme linéaire.
X	Un espace de Banach.
X^*	L'espace dual de X.
Δu	L'opérateur Laplacien.
∇u	Le gradient de u.
$\langle .,. \rangle$	Le crochet de dualité.
$\mathcal{C}(\Omega)$	L'ensemble de toutes les fonctions continues.
$p.p.$	presque partout.
$div(u)$	divergence de u.
p'	exposant conjugué de p, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Table des matières

Introduction générale

Introduction

Les équations aux dérivées partielles de type elliptique ont fait l'objet de nombreuses études approfondies au cours du vingtième siècle. Ces recherches ont été menées principalement par des mathématiciens de renom tels que Courant, Hilbert[3], Dirichlet, Neumann et J.L.Lions, donnant lieu à une littérature abondante dans ce domaine.

Ce travail décrit quelques outils et méthodes pour l'étude des équations aux dérivées partielles de types elliptiques. Ces outils sont utilisés pour obtenir des résultats d'existence et d'unicité.

Dans le premier chapitre, nous commençons par rappeler quelques concepts fondamentaux de l'analyse fonctionnelle. Ces rappels sont essentiels pour comprendre les espaces de Sobolev et les inégalités importantes qui serviront de base à nos développements ultérieurs. Nous explorons également le concept du degré topologique, offrant ainsi un cadre théorique solide pour nos investigations.

Le deuxième chapitre est dédié à l'étude des méthodes variationnelles pour la résolution des équations aux dérivées partielles elliptiques, tant dans le cadre linéaire que non linéaire. Nous examinons en détail le lemme de Lax-Milgram, élément central de la méthode variationnelle, et nous illustrons son application à divers problèmes linéaires elliptiques. De plus, nous abordons les extensions de cette méthode aux problèmes non linéaires, explorant ainsi de nouvelles avenues pour la résolution des équations elliptiques complexes.

Dans le troisième chapitre, nous nous tournons vers les méthodes monotonnes pour l'étude des équations elliptiques. Ces méthodes offrent une approche alternative pour la résolution des problèmes aux limites, en exploitant les propriétés de monotonicité des opérateurs associés aux équations elliptiques. Nous explorons les conditions d'existence et d'unicité des solutions dans ce contexte, offrant ainsi un éclairage complémentaire sur la résolution des équations elliptiques.

Enfin, dans le quatrième chapitre, nous mettons en œuvre les outils et les méthodes développés précédemment pour étudier des applications concrètes des équations aux dérivées partielles elliptiques. Nous explorons divers exemples et cas d'étude, démontrant ainsi la puissance et la versatilité des approches analytiques présentées dans ce mémoire.

En combinant des rappels théoriques, des méthodes variées et des applications concrètes, ce mémoire vise à offrir une présentation complète de l'étude des équations aux dérivées partielles elliptiques, tout en soulignant leur importance et leur pertinence dans le domaine des mathématiques appliquées et de la physique.

CHAPITRE I Préliminaire

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notions et résultats utilisés tout au long de ce mémoire.

I Rappel d'analyse fonctionnelle

I.1 Espaces normés et espaces de Banach

Un espace vectoriel linéaire E est dit espace normé si pour chaque élément $u \in E$ il existe un nombre réel noté par $\|u\|_E$ (norme de u) vérifiant les axiomes :

1. $\|u\|_E \geq 0$; $\|u\|_E = 0$ si et seulement si $u = 0$.
2. $\|\alpha u\|_E = |\alpha| \| u\|_E$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
3. $\|u + v\|_E \leq \|u\|_E + \|v\|_E$ (inégalité triangulaire).

Dans cet espace, on introduit la métrique $\rho(u, v) = \|u - v\|_E$ (distance entre u et v).

La convergence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E vers u dans la norme de E (convergence forte) est définie par

$$\|u_n - u\|_E \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0; \quad u_n \to u.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite suite de Cauchy si

$$\|u_p - u_q\|_E \underset{p,q\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \forall\varepsilon > 0; \exists N_\varepsilon; \forall p > N_\varepsilon; \forall q > N_\varepsilon : \|u_p - u_q\| < \varepsilon.$$

Si pour toute suite de Cauchy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ il existe un élément u dans E, on dit que E est complet.

Si $\|u_n - u\|_E \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on dit que E est un espace de Banach.

I.2 Espaces de Hilbert

Définition I.1.1. Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire qui est complet pour la norme associée.

Dans un espace de Hilbert, on définit un produit scalaire $(u, v)_H$ où $u, v \in H$, c'est un nombre réel qui vérifie les axiomes :

1. $(u, v)_H = (v, u)_H$.
2. $(\alpha u, v)_H = \alpha(u, v)_H$.

3. $(u+v,w)_H = (u,w)_H + (v,w)_H$.
4. $(u,u)_H \geq 0$; $(u,u)_H = 0$ si et seulement si $u = 0$.

Dans un espace de Hilbert complexe, le produit scalaire est un nombre complexe vérifiant les axiomes (b), (c) et (d), mais (a) est sous la forme

$$(u,v)_H = \overline{(v,u)_H}.$$

Dans H, on prend comme norme

$$\|u\|_H = \sqrt{(u,u)_H} \quad \text{(i.e.)} \quad \|u\|_H^2 = (u,u)_H.$$

Pour chaque u et $v \in H$, on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|(u,v)_H| \leq \|u\|_H \|v\|_H.$$

En plus de la convergence forte dans H, on considère aussi la convergence faible de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de H, on dit qu'elle converge faiblement vers u si

$$(u_n - u, v)_H \to 0 \text{ quand } n \to 1; \quad \forall v \in H \quad (u_n \to u).$$

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers u, alors elle converge faiblement vers u. L'inverse n'est pas vrai en général. Cependant, si $u_n \rightharpoonup u$ et $\|u_n\| \to \|u\|$, alors dans ce cas $u_n \to u$.

I.3 Généralités et quelques notions de base

Topologie faible

Définition I.1.2. Soient X un espace de Banach et X' son dual topologique. On appelle topologie faible sur X et que l'on note $\sigma(X,X')$, la topologie la moins fine, c'est-à-dire celle qui a le moins d'ouverts possibles, qui rend continues toutes les formes linéaires sur X, c'est-à-dire tous les éléments de X'

Définition I.1.3. Si $x_n \to x$ dans $\sigma(X,X')$, on notera $x_n \rightharpoonup x$ et on dira que x_n converge faiblement vers x dans X.
Si $x_n \to x$ dans $\sigma(X,X')$, on notera $x_n \rightharpoonup x$ et on dira que x_n converge faiblement vers x dans X.

Définition I.1.4. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X. Alors

$$x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow \langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle, \forall f \in X'.$$

Définition I.1.5. Soient X et Y deux espaces de Banach et $A : X \to Y$ un opérateur. Soit $x_\infty \in X$. On dit que A est

- Fortement continu au point $x_\infty \in X$ si

$$x_n \to x_\infty \text{ dans } X \Rightarrow Ax_n \to Ax_\infty \text{ dans } Y.$$

- Faiblement continu au point $x_\infty \in X$ si

$$x_n \rightharpoonup x_\infty \text{ dans } X \rightharpoonup Ax_n \to Ax_\infty \text{ dans } Y.$$

- Fortement (respectivement, faiblement) continu sur X s'il est fortement (respectivement, faiblement) continu en tout point de X.

Proposition I.1.1. Soient X un espace de Banach et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X. On a

1. Si $x_n \to x$ alors $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(X, X')$.
2. Si $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(X, X')$ alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et

$$\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

3. Si $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(X, X')$ et $f_n \to f$ dans X', alors $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Topologie $*$-faible

Soient X un espace de Banach, X' son dual muni de la norme

$$\|f\|_{X'} = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle f, x\rangle|,$$

et X'' son bidual topologique muni de la norme

$$\|\phi\|_{X''} = \sup_{f\in X', \|f\|_{X'}\leq 1} |\langle \phi, f\rangle|.$$

On a une injection canonique $J : X \to X''$. En effet, tout élément $x \in X$ définit un élément $J_x \in X''$ par

$$\langle J_x, f\rangle_{X'',X'} = \langle f, x\rangle_{X',X} \quad \forall x \in X, \forall f \in X'.$$

J_x est une forme linéaire continue sur X' puisque

$$|\langle J_x, f\rangle| = |\langle f, x\rangle| \leq \|x\|_X \|f\|_{X'}.$$

On a $\|J_x\|_{X''} = \|x\|_X, \forall x \in X$. En effet,

$$\|J_x\| = \sup_{\|f\|_{X'}\leq 1} |\langle J_x, f\rangle| = \sup_{\|f\|_{X'}\leq 1} |\langle f, x\rangle| = \|x\|.$$

On a $J(X) \subset X''$, ainsi on définit une nouvelle topologie.

Définition I.1.6. On désigne par la topologie $*$-faible notée $\sigma(X', X)$ la topologie la moins fine sur X' rendant continues les formes linéaires

$$f \mapsto \langle f, x\rangle, \forall x \in X.$$

Proposition I.1.2. Soit X un espace de Banach, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de X', alors f_n converge vers f pour la topologie $*$-faible si et seulement si

$$\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle, \forall x \in X.$$

Espaces réflexifs

Soient X un espace de Banach et $J : X \to X''$ l'injection canonique de X dans X'' définie par :

$$\langle Jx, f\rangle_{X'',X'} = \langle f, x\rangle_{X',X}, \quad \forall x \in X, \forall f \in X'.$$

Définition I.1.7. L'espace X est dit réflexif si $J(X) = X''$.

Théorème I.1.1 [2] Soit X un espace de Banach réflexif, alors toute suite bornée dans X admet au moins une sous-suite faiblement convergente.

Espaces séparables

Définition I.1.8. Un espace métrique séparable est un espace métrique qui contient un sous-ensemble $D \subset X$ dénombrable et dense.

corollaire I.1.1[2] Soit X un espace de Banach séparable alors de toute suite bornée $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X' on peut extraire une sous-suite $(f_{n_k})_k$ qui converge pour la topologie $\sigma(X', X)$.

Rappels sur les espaces L^p

Définition I.1.9. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $p \in [1, +\infty]$. On appelle espace de Lebesgue L^p l'espace vectoriel des classes de fonctions u de Ω dans $\mathbb{R}$, Lebesgue mesurables, vérifiant

1. Si $1 \le p < +\infty$,
$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx < +\infty,$$
2. Si $p = +\infty$, ${}_{x\in\Omega}|u(x)| < +\infty$, où
$${}_{x\in\Omega}|u(x)| = \inf\{M \| u(x)| \le M \text{ p.p. } x \in \Omega\}.$$

Propriété I.1.1.

1. L'application $\|\cdot\|$ définie de $L^p(\Omega)$ dans $\mathbb{R}_+$ par
$$u \mapsto \begin{cases} \|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right)^{1/p}, & 1 \le p < +\infty, \\ \|u\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |u(x)|, & p = \infty, \end{cases}$$
définit une norme sur $L^p(\Omega)$, qui en fait un espace de Banach.

2. Pour tout réel $p \in [1, +\infty[$, le dual $L^{p'}(\Omega)$ de $L^p(\Omega)$ est isomorphe algébriquement et topologiquement à $L^p(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. L'application de dualité est définie par

$$L^p(\Omega) \times L^{p'}(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad (u, v) \mapsto \int_\Omega u(x)v(x)\, dx,$$

pour tout réel $p \in [1, +\infty[$. Le bidual de $L^p(\Omega)$ s'identifie algébriquement et topologiquement à $L^p(\Omega)$. On dit que l'espace $L^p(\Omega)$ est réflexif.

Théorème I.1.2 (Inégalité de Hölder) Soient $f \in L^p$ et $g \in L^{p'}$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Alors $fg \in L^1$ et on a

$$\int_\Omega |fg|\, dx \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

Remarque I.1.1 Si $p = p' = 2$, on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_\Omega |fg|\, dx \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}.$$

Pour la preuve, voir H.Brezis [4] (Théorème 4.6 page 50).

Théorème I.1.3 (Théorème de convergence dominée de Lebesgue) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$. On suppose que

1. $f_n(x) \to f(x)$ p.p. $x \in \Omega$ et
2. il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ tel que pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ p.p. } x \in \Omega.$$

Alors,$f \in L^1(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0$.

I.4 Quelques notions et résultats sur les opérateurs

Opérateurs monotones

Dans tout ce qui suit, V dénote un espace de Banach et V' son dual topologique.

Définition des opérateurs monotones

Définition I.4.1 On dit d'un opérateur $A : V \to V'$ qu'il est :

1. Monotone si $\langle Au - Av, u - v\rangle \geq 0, \forall u, v \in V$.
2. Strictement monotone si $\langle Au - Av, u - v\rangle > 0$, $\forall u, v \in V$, $u \neq v$.
3. Fortement monotone s'il existe une fonction $\gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, telle que

$$\gamma(0) = 0, \gamma(t) > 0, \forall t > 0, et \lim_{t\to+\infty} \gamma(t) = +\infty,$$

vérifiant :

$$(Au - Av, u - v) \geq \|u - v\|\gamma(\|u - v\|), \forall u, v \in V. \quad (I.4.1)$$

4. Uniformément monotone si l'inégalité (I.4.1) est vérifiée avec la fonction $t \mapsto t\gamma(t)$ croissante.

Remarque I.4.1 La définition donnée ci-dessus reste vraie si l'opérateur A est défini seulement sur son domaine $D(A) \subset V$. Dans ce cas, les éléments u et v seront pris dans $D(A)$. Cette remarque est valable pour toutes les définitions de ce chapitre.

Remarque I.4.2 La monotonie généralise la notion de fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En effet, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. En identifiant $\mathbb{R}$ avec son dual $(\mathbb{R}')$, on voit que l'opérateur f est monotone : $\langle f(x) - f(y), x - y\rangle = [f(x) - f(y)][x - y] \geq 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ car f est croissante.

Exemple 1 Soit A une matrice $N \times N$ à coefficients réels, symétrique et définie positive. Alors l'opérateur $A : \mathbb{R}^N \to (\mathbb{R}^N)' = \mathbb{R}^N$ est uniformément monotone. Cela résulte de l'existence d'un nombre $\alpha > 0$ tel que $\langle Ax, x\rangle \geq \alpha\|x\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$. (I.4.2)
En effet, soient $x, y \in \mathbb{R}^N$, on a

$$\begin{aligned}\langle Ax - Ay, x - y\rangle &= \langle A(x - y), x - y\rangle \\ &\geq \alpha\|x - y\|^2 = \alpha\|x - y\| id(\|x - y\|).\end{aligned}$$

Donc, il suffit de prendre $\gamma(t) = t$ dans la définition de la forte monotonie (dans ce cas, $t \mapsto t\gamma(t) = t^2$ est une fonction croissante). Montrons maintenant l'inégalité (I.4.2).
Comme la matrice A est définie positive, la fonction ψ donnée par

$$\psi(x) = \langle Ax, x\rangle, \quad x \in \mathbb{R}^N, \text{ est telle que } \psi(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^N, x \neq 0.$$

ψ étant continue sur $\mathbb{R}^N$, son minimum sur la sphère unité de $\mathbb{R}^N$ est strictement positif : $\alpha = \min_S \psi(x) > 0$. Cela implique que

$$\langle Ax, x\rangle \geq \alpha\|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, (\|.\|_2 \text{est la norme euclidienne de} \mathbb{R}^N).$$

Exemple 2 Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et A l'opérateur de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$, défini par

$$Au = -\Delta u = -\mathrm{div}\nabla u, \quad u \in H_0^1(\Omega),$$

avec $\langle Au, v\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx, \forall u, v \in H_0^1(\Omega)$. Munissons $H_0^1(\Omega)$ de la norme du gradient, à savoir $\|v\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$. Alors, A est un opérateur uniformément monotone.
En effet, soient $u, v \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}\langle Au - Av, u - v\rangle &= \langle A(u - v), u - v\rangle \\ &= \int_\Omega \nabla(u - v)\nabla(u - v)\, dx \\ &= \|u - v\|^2_{H_0^1(\Omega)} \\ &= \|u - v\|_{H_0^1(\Omega)} id(\|u - v\|_{H_0^1(\Omega)}).\end{aligned}$$

Exemple 3 Soient $p > 1$ un nombre réel et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, alors l'opérateur

$$A : W_0^{1,p}(\Omega) \to W_0^{-1,p}(\Omega), \quad u \mapsto Au = -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$$

est monotone. La preuve utilise le fait que l'opérateur

$$Q : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N, \quad x \mapsto Q(x) = |x|^{p-2}x$$

est monotone. En effet, soient $x, y \in \mathbb{R}^N$, on a

$$\begin{aligned} \langle Q(x) - Q(y), x - y\rangle &= \langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y\rangle \\ &= |x|^p - |y|^{p-2}xy - |x|^{p-2}yx + |y|^p. \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} |y|^{p-2}|xy| &\leq |y|^{p-1}|x| \quad \text{(inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\ &\leq \frac{1}{p}|y|^p + \frac{1}{p'}|x|^p \quad \text{(inégalité de Young)}. \end{aligned}$$

De même

$$|x|^{p-2}|xy| \leq \frac{1}{p}|x|^p + \frac{1}{p'}|y|^p.$$

Donc

$$\langle Q(x) - Q(y), x - y\rangle \geq |x|^p - \frac{1}{p'}|y|^p - \frac{1}{p}|x|^p - \frac{1}{p'}|x|^p - \frac{1}{p}|y|^p + |y|^p.$$

Par suite,

$$\langle Q(x) - Q(y), x - y\rangle \geq |x|^p - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}\right)|y|^p - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}\right)|x|^p + |y|^p = 0.$$

Retour à l'exemple : soient $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} \langle Au - Av, u - v\rangle &= \langle Au, u - v\rangle - \langle Av, u - v\rangle \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla(u - v)\, dx - \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla(u - v)\, dx \\ &= \int_\Omega (|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v)\nabla(u - v)\, dx. \end{aligned}$$

On pose $x = \nabla u$, $y = \nabla v$ et on applique l'équation précédente :

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geq \int_\Omega 0\, dx = 0.$$

I.5 Opérateurs bornés, Opérateurs hémicontinus

I.5.1 Opérateurs bornés

Définition I.5.1 Soit A un opérateur d'un espace de Banach V dans un espace de Banach W. On dit que A est borné s'il transporte les bornés de V dans les bornés de W, c'est-à-dire

$$\forall \rho > 0, \exists C_\rho > 0 \text{ tel que } A(B_V(0, \rho)) \subset B_W(0, C_\rho)$$

où $B_V(0,\rho)$ (respectivement, $B_W(0,C_\rho)$) désigne la boule ouverte dans V (respectivement, W) de centre 0 et de rayon ρ (respectivement, C_ρ).

Exemple 4 Pour $p>1$ et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, l'opérateur

$$\begin{aligned} A :& W_0^{1,p}(\Omega) \to W_0^{-1,p'}(\Omega) \\ & u \mapsto Au = -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \end{aligned}$$

est borné, ($V = W_0^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme du gradient $\|v\|_V = \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}$). En effet, pour $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on a par définition

$$\langle Au, \phi\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\phi\, dx.$$

Montrons que A est borné de V dans $V' = W^{-1,p'}(\Omega)$. Soit $\rho > 0$, pour $u \in B_V(0,\rho)$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \|Au\|_{V'} &= \sup_{\phi\in V, \|\phi\|_V \leq 1} |\langle Au, \phi\rangle| \\ &= \sup_{\phi\in V, \|\phi\|_V \leq 1} \left|\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\phi\, dx\right|. \end{aligned}$$

Or

$$\left|\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\phi\, dx\right| \leq \int_\Omega |\nabla u|^{p-1}|\nabla\phi|\, dx.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\begin{aligned} \|Au\|_{V'} &\leq \left(\int_\Omega |\nabla u|^{(p-1)p'}\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |\nabla\phi|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|u\|_V^{p-1}\|\phi\|_V \\ &\leq \rho^{p-1}. \end{aligned}$$

D'où, $\|Au\|_{V'} \leq \rho^{p-1}$. Donc, on a bien $A(BV(0,\rho)) \subset B_{V'}(0,\rho^{p-1})$.

I.5.2 Opérateurs hémicontinus

Définition I.5.2 Soit V un espace de Banach réflexif. Un opérateur $A : V \to V'$ est dit hémicontinu, si l'application

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\lambda \mapsto \langle A(u+\lambda v), w\rangle$$

est continue ,pour tout $u, v, w \in V$.

Exemple 5 L'opérateur

$$A : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$$

$$u \mapsto Au = -\Delta u = -\mathrm{div}(\nabla u),$$

est hémicontinu. En effet, soient $u, v, w \in H_0^1(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\langle A(u+\lambda v), w\rangle = \int_\Omega \nabla(u+\lambda v)\nabla w\, dx$$

$$= \int_\Omega \nabla u \nabla w\, dx + \lambda \int_\Omega \nabla v \nabla w\, dx = a + \lambda b.$$

Ce qui montre que $\lambda \mapsto \langle A(u+\lambda v), w\rangle$ est continue.

Remarque I.5.1
Soit l'opérateur $Au = -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + L(x,u)$, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ avec $L(x,u)$ non monotone(croissant) en u, par exemple $L(x,u) = |u|$. Dans ce cas, l'opérateur A n'est pas monotone.
Il existe une classe particulière d'opérateurs qu'on appelle : Opérateurs pseudo-monotones.

I.5.3 Opérateurs pseudo-monotones

Définition I.5.3 Soit V un espace de Banach réflexif. On dit que l'opérateur $A : V \to V'$ est pseudo-monotone, s'il est borné et vérifie :

$$\begin{cases} u_j \rightharpoonup u \text{ dans } V, & \limsup_{j\to+\infty}\langle A(u_j), u_j - u\rangle \leq 0 \\ \Longrightarrow & \forall v \in V, \liminf_{j\to+\infty}\langle A(u_j), u_j - v\rangle \geq \langle A(u), u - v\rangle. \end{cases}$$

Théorème I.5.1 Soit V un espace de Banach et $A : V \to V'$ un opérateur. Si A est borné, hémicontinu et monotone, alors A est pseudo-monotone.

Démonstration.
Puisque A est borné, il reste à vérifier la propriété $(*)$.
Supposons que (u_j) est une suite de V qui vérifie $u_j \rightharpoonup u$ et que $\limsup_{j\to\infty}\langle A(u_j), u_j - u \leq 0\rangle$.
En utilisant la monotonie de A, on obtient

$$\langle A(u_j), u_j - u\rangle \geq \langle A(u), u_j - u\rangle \to 0, \text{ lorsque } j \to +\infty.$$

Alors,

$$\liminf_{j\to+\infty}\langle A(u_j), u_j - u\rangle \geq 0. \quad (I.5.3)$$

Ce qui conduit à,

$$0 \leq \liminf_{j\to+\infty}\langle A(u_j), u_j - u\rangle \leq \limsup_{j\to+\infty}\langle A(u_j), u_j - u\rangle \leq 0.$$

Par conséquent,

$$\lim_{j\to+\infty}\langle A(u_j), u_j - u\rangle = 0.$$

Soient $v \in V$ et $0 < \theta < 1$. On pose $w = \theta v + (1-\theta)u$. On a

$$\langle A(u_j) - A(w), u_j - w\rangle \geq 0.$$

En remplaçant w par $\theta v + (1-\theta)u = u + \theta(v-u)$, on obtient

$$\theta\langle A(u_j), u - v\rangle \geq -\langle A(u_j), u_j - u\rangle + \langle A(w), u_j - u\rangle + \theta\langle A(w), u - v\rangle$$

et en utilisant $(I.5.3)$, on arrive à

$$\theta \liminf_{j\to+\infty}\langle A(u_j), u - v\rangle \geq \theta\langle A(w), u - v\rangle.$$

D'où,

$$\liminf_{j\to+\infty}\langle A(u_j), u - v\rangle \geq \langle A(w), u - v\rangle.$$

Puisque

$$\langle A(u_j), u_j - v\rangle = \langle A(u_j), u_j - u\rangle + \langle A(u_j), u - v\rangle,$$

on a nécessairement

$$\liminf_{j\to+\infty}\langle A(u_j), u_j - v\rangle \geq \liminf_{j\to+\infty}\langle A(u_j), u - v\rangle \geq \langle A(w), u - v\rangle.$$

En utilisant la propriété de l'hémicontinuité de A et en faisant tendre θ vers 0 (dans ce cas w tend vers u), on aura

$$\forall v \in V, \liminf_{j\to+\infty}\langle A(u_j), u_j - v\rangle \geq \langle A(u), u - v\rangle.$$

Ce qui montre que A est pseudo-monotone.

Remarque I.5.1 On ne peut pas déduire la pseudo-monotonie directement à partir de la monotonie sans vérifier la bornitude et l'hémicontinuité de l'opérateur. La propriété de monotonie n'est ni plus forte, ni plus faible que la propriété de pseudo-monotonie.

I.6 Espaces de Sobolev

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et soient $m \geq 1$ un entier naturel et $p \in [1, +\infty[$ un nombre réel. On pose,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, 0 \leq |\alpha| \leq m\}.$$

On le munit de la norme,

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \quad (I.6.1)$$

ou de la norme équivalente

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} (\|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)})\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposition I.6.1 $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable, et est réflexif si $1 < p < \infty$.

Remarque I.6.1

1. Pour $p = 2$, on a $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$(u|v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u | D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

qui en fait un espace de Hilbert.

2. Pour un ouvert Ω dont la frontière Γ est bornée et "assez régulière", la norme (I.6.1) est équivalente à la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Définition I.6.1 $D(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions de classe $C^\infty(\Omega)$ à support compact dans Ω, c'est-à-dire

$$D(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u \in C^\infty(\Omega) \text{ et } \operatorname{supp}(u) \subset K \subset \Omega, K \text{ compact}\}.$$

Définition I.6.2 On note $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}$ l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.

Théorème I.6.1 $D(\overline{\Omega})$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$.

Dans toute la suite, on travaillera avec $W^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{j=1}^{N} \|\frac{\partial u}{\partial x_j}\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

ou de la norme équivalente

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{j=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L^p(\Omega)}.$$

Pour Ω borné, on peut le munir de la norme équivalente

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \right)^{1/p}$$

dite norme du gradient. L'équivalence des normes est basée sur le résultat suivant :

Théorème I.6.2 (Inégalité de Poincaré)

On suppose que Ω est borné. Alors, il existe une constante C (dépendante de Ω et de p) telle que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad 1 \leq p < \infty.$$

L'application $u \mapsto \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ est une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ équivalente à celle induite par $\| \cdot \|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Théorème I.6.3 (Rellich)
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et de classe C^1, alors

$$W^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{\text{compact}} L^p(\Omega).$$

Autrement dit, de toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée de $W^{1,p}(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite $(u_{n_k})_k$ telle que

$$u_{n_k} \to u \text{ dans } L^p(\Omega), \quad u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Théorème I.6.4 (Formule de Green)
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et de classe C^1 dont la frontière est bornée, alors pour tout $u \in H^2(\Omega)$ et pour tout $v \in H^1(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega \Delta uv\,dx = -\int_\Omega \nabla u \nabla v\,dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v\,d\sigma$$

où $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u n = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}\eta_i$ est la dérivée normale et $n = (n_1, \dots, n_N)^\intercal$ est la normale unitaire.

De façon plus générale, la formule de Green est donnée par le théorème suivant :
Théorème I.6.5 (Formule de Green) Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ avec $\Gamma = \partial\Omega$ lipschitzienne et $1 < p < \infty$. Alors, pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et pour tout $v \in W^{-1,p'}(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v\,dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx + \int_\Gamma uv\,\nu_i\,d\sigma, \quad i = 1, \dots, N, \quad (I.6.2)$$

où $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ et $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ sont prises au sens des distributions, ν_i est la i-ème composante du vecteur unitaire de la normale à $\partial\Omega$. Ici, $W^{-1,p'}(\Omega)$ dénote l'espace dual de $W^{1,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$.

I.7 Solutions d'équations différentielles et de problèmes aux limites

Solutions classiques

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ et $m \in \mathbb{N}^*$. On suppose que les fonctions $a_\alpha(x,\xi)$ d'ordre $2m$ (où α est un N-multi-indice, $|\alpha| \leq m$) définies pour $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^m$ admettent des dérivées d'ordre $|\alpha|$ (par rapport à toutes les variables) continues. Autrement dit, $a_\alpha \in C^{|\alpha|}(\Omega \times \mathbb{R}^m)$.

Définition I.7.1 Soit $f \in C^0(\Omega)$, on dit qu'une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est une solution classique de l'équation

$$\sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(a_\alpha(x, \delta_m u(x))) = f(x), \quad \text{dans } \Omega, \quad (I.7.1)$$

avec δ_m une fonction vectorielle définie par

$$\delta_m u = (D^\alpha u)_{|\alpha|\leq m} = \left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_N^m}\right),$$

si $u \in C^{2m}(\Omega)$ $\forall x \in \Omega$ et si u satisfait (I.7.1).

Solutions faibles

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $p > 1$ un nombre réel. Pour tout $x \in \Omega$ considérons l'opérateur d'ordre $2m$ défini par

$$Au(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha}(a_{\alpha}(x, \delta_m u(x))). \qquad (I.7.2)$$

L'opérateur A est dit formel car (I.7.2) n'est qu'un symbole formel, puisqu'on ne peut calculer par exemple, les dérivées figurant dans (I.7.2).

Théorème I.7.1 Soit A l'opérateur différentiel donné par (I.7.2). Si ses coefficients a_{α} ($|\alpha| \leq m$) sont dans Car(p), A définit l'opérateur

$$A : W^{m,p}(\Omega) \to (W^{m,p}(\Omega))'$$

$$u \mapsto Au$$

Avec,

$$\langle Au, v \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} a_{\alpha}(x, \delta_m u(x)) D^{\alpha} v(x)\, dx, \quad \forall v \in W_0^{m,p}(\Omega). \qquad (I.7.3)$$

Définition I.7.2 Soit l'opérateur différentiel A donné par (I.7.2) et soit $f \in (W_0^{m,p}(\Omega))'$. Nous dirons qu'une fonction $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ est une solution faible de l'équation différentielle (formelle) :

$$Au = f$$

Si l'on a

$$\langle Au, v \rangle = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in W_0^{m,p}(\Omega).$$

Où A est l'opérateur continu de $W^{m,p}(\Omega)$ dans son dual $(W^{m,p}(\Omega))'$, défini par (I.7.3).

Lemme I.7.1 (De Lax-Milgram)
Soit H un espace de Hilbert et $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique satisfaisant les conditions suivantes :

1. $|a(u, v)| \leq M\|u\|_H \|v\|_H$,pour tout $u, v \in H$ (avec $M > 0$ une constante),
2. $a(u, u) \geq \alpha \|u\|_H^2$, pour tout $u \in H$ (avec $\alpha > 0$ une constante).

Alors, pour toute forme linéaire continue F sur H, il existe une solution unique $u \in H$ telle que $a(u, \varphi) = \langle F, \varphi \rangle$, pour tout $\varphi \in H$.De plus, on a l'estimation $\|u\|_H \leq \frac{1}{\alpha}\|F\|_H$.

CHAPITRE II Méthodes variationnelles

Au cours de cette section, nous utiliserons l'équation aux dérivées partielles de type elliptique suivante :

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \qquad (II.1)$$

où nous imposons des conditions aux limites de Dirichlet. Dans cette équation, Ω est un ouvert de l'espace $\mathbb{R}^N$, $\partial\Omega$ (frontière), f est un une fonction donnée dans un espace fonctionnel, et u est l'inconnue. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $\overline{\Omega}$ sa fermeture,on note $C(\Omega)$ (respectivement, $C(\overline{\Omega})$) ,l'espace des fonctions continues dans Ω (respectivement, dans $\overline{\Omega}$.) Soit un entier $k \geq 0$. On note $C^k(\Omega)$(respectivement, $C^k(\overline{\Omega})$), l'espace des fonctions k fois continûment dérivables dans Ω (respectivement, dans $\overline{\Omega}$).

Approche variationnelle

Le principe de l'approche variationnelle pour la résolution des équations aux dérivées partielles est de remplacer l'équation par une formulation équivalente, dite variationnelle, obtenue en intégrant l'équation multipliée par une fonction quelconque, dite test. Comme il est nécessaire de procéder à des intégrations par parties dans l'établissement de la formulation variationnelle, nous commençons par donner quelques résultats essentiels à ce sujet.

I Formulation variationnelle

Pour simplifier la présentation, nous supposons que l'ouvert Ω est borné et régulier, et f est continu sur $\overline{\Omega}$.
Nous énonçons le résultat suivant qui est important de la formulation variationnelle :
Théorème II.1
Soit u une fonction de $C^2(\overline{\Omega})$. Soit X l'espace défini par

$$X = \{\phi \in C^2(\overline{\Omega}) \mid \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Alors u est une solution du problème aux limites (II.1) si et seulement si u appartient à X et vérifie l'égalité

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \quad \text{pour toute fonction } v \in X \quad (II.2)$$

L'égalité (II.2) est appelée la formulation variationnelle du problème aux limites (II.1).

Remarque II.1

Un intérêt immédiat de la formulation variationnelle (II.2) est qu'elle a un sens si la solution u est seulement une fonction de $C^1(\overline{\Omega})$, contrairement à la formulation "classique" (II.1) qui requiert que u appartienne à $C^2(\overline{\Omega})$. On pressent donc déjà qu'il est plus simple de résoudre (II.2) que (II.1) puisqu'on est moins exigeant sur la régularité de la solution. Dans la formulation variationnelle (II.2), la fonction v est appelée fonction test. La formulation variationnelle est aussi parfois appelée formulation faible du problème aux limites (II.1). En mécanique, la formulation variationnelle est connue sous le nom de "principe des travaux virtuels". En physique, on parle aussi d'équation de bilan ou de formule de réciprocité. Lorsqu'on prend $v = u$ dans (II.2), on obtient ce qu'il est convenu d'appeler une égalité d'énergie, qui exprime généralement l'égalité entre une énergie stockée dans le domaine Ω (le terme de gauche de (II.2)) et une énergie potentielle associée à f .

Démonstration

Si u est solution du problème aux limites (II.1), on multiplie l'équation par $v \in X$ et on utilise la formule d'intégration par parties

$$\int_\Omega \Delta u(x)v(x)\,dx = -\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x)v(x)\,ds.$$

Or $v = 0$ sur $\partial\Omega$ puisque $v \in X$, donc

$$\int_\Omega f(x)v(x)\,dx = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx,$$

qui n'est rien d'autre que la formule (II.2).

Réciproquement, si $u \in X$ vérifie (II.2), en utilisant "à l'envers" la formule d'intégration par parties précédente, on obtient

$$\int_\Omega (\Delta u(x) + f(x))v(x)\,dx = 0$$

pour toute fonction $v \in X$. Comme $(\Delta u + f)$ est une fonction continue, on conclut que $-\Delta u(x) = f(x)$ pour tout $x \in \Omega$. Par ailleurs, comme $u \in X$, on retrouve la condition aux limites $u = 0$ sur $\partial\Omega$, c'est-à-dire que u est solution du problème aux limites (II.1).

Lemme II.1

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Soit g une fonction continue dans Ω. Si pour toute fonction $\phi \in D(\Omega)$ à support compact dans Ω, on a

$$\int_\Omega g(x)\phi(x)\,dx = 0,$$

Alors ,la fonction g est nulle sur Ω.

Démonstration

Supposons qu'il existe un point $x_0 \in \Omega$ tel que $g(x_0) \neq 0$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $g(x_0) > 0$ (sinon on prend $-g$). Par continuité, il existe un petit voisinage ouvert $\omega \subset \Omega$ de x_0 tel que $g(x) > 0$ pour tout $x \in \omega$. Soit alors une fonction test positive, non nulle, ϕ à support inclus dans ω. On a

$$\int_\Omega g(x)\phi(x)\,dx = \int_\omega g(x)\phi(x)\,dx = 0,$$

ce qui est une contradiction avec l'hypothèse sur g. Donc $g(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$.

Remarque II.2

En notation compacte, on peut réécrire la formulation variationnelle (II.2) sous la forme suivante :

Trouver $u \in X$ tel que

$$a(u,v) = L(v) \quad \text{pour toute fonction } v \in X,$$

avec

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx$$

et

$$L(v) = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx,$$

où $a(\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire sur X et $L(\cdot)$ est une forme linéaire sur X. C'est sous cette forme abstraite que nous résoudrons (avec quelques hypothèses) la formulation variationnelle dans la prochaine section. L'idée principale de l'approche variationnelle est de montrer l'existence et l'unicité de la solution de la formulation variationnelle (II.2), ce qui entraînera le même résultat pour l'équation (II.1) (voir théorème (II.1)). En effet, nous allons voir qu'il existe une théorie à la fois simple et puissante pour analyser les formulations variationnelles. Néanmoins, cette théorie ne fonctionne que si l'espace dans lequel on cherche la solution et dans lequel on prend les fonctions tests est un espace de Hilbert, ce qui n'est pas le cas pour $X = \{v \in C^1(\overline{\Omega}), v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$ muni du produit scalaire "naturel" pour ce problème. La principale difficulté dans l'application de l'approche variationnelle sera donc qu'il faudra utiliser un autre espace que X, à savoir l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ qui est bien un espace de Hilbert.

Nous énonçons un théorème trés important dans la formulation variationnelle :

II Théorème de Lax-Milgram

Cadre abstrait

Nous décrivons une théorie abstraite pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution d'une formulation variationnelle dans un espace de Hilbert réel V. Rappelons qu'un espace de Hilbert réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, muni d'un produit scalaire, noté $\langle x, y\rangle$, qui est complet pour la norme associée à ce produit scalaire, notée $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Suivant la remarque (II.2) , nous considérons une formulation variationnelle du type : Trouver $u \in V$ telle que

$$a(u, v) = L(v) \quad \text{pour toute fonction } v \in V. \qquad (II.3)$$

Avec :

1. $L(\cdot)$ est une forme linéaire continue sur V, c'est-à-dire que $v \mapsto L(v)$ est linéaire de V dans $\mathbb{R}$ et il existe $C > 0$ tel que $|L(v)| \leq C\|v\|$ pour tout $v \in V$.
2. $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire sur V, c'est-à-dire que $w \mapsto a(w, v)$ est une forme linéaire de V dans $\mathbb{R}$, pour tout $v \in V$, et $v \mapsto a(w, v)$ est une forme linéaire de V dans $\mathbb{R}$, pour tout $w \in V$.
3. $a(\cdot, \cdot)$ est continue, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que $|a(w, v)| \leq M\|w\|\|v\|$ pour tout $w, v \in V$. $(II.4)$
4. $a(\cdot, \cdot)$ est coercive (ou elliptique), c'est-à-dire qu"' il existe $v > 0$ tel que $a(v, v) \geq v\|v\|^2$ pour tout $v \in V$. $(II.5)$

Théorème II.2 [Lax-Milgram]

Soit V un espace de Hilbert réel, $L(\cdot)$ une forme linéaire continue sur V, $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire continue coercive sur V. Alors la formulation variationnelle (II.3) admet une unique solution. De plus, cette solution dépend continûment de la forme linéaire L.

Démonstration :

Pour tout $w \in V$, l'application $v \mapsto a(w, v)$ est une forme linéaire continue sur V. Par conséquent, le théorème de représentation de Riesz entraîne qu'il existe un élément de V, noté $A(w)$, telle que

$$a(w, v) = \langle A(w), v\rangle \quad \text{pour tout } v \in V.$$

Par ailleurs, la bilinéarité de $a(w, v)$ implique évidemment la linéarité de l'application $w \mapsto A(w)$. De plus, en prenant $v = A(w)$, la continuité (II.4) de $a(w, v)$ montre que

$$\|A(w)\|^2 = a(w, A(w)) \leq M\|w\|\|A(w)\|,$$

c'est-à-dire que $\|A(w)\| \leq M\|w\|$ et donc $w \mapsto A(w)$ est continue. Une autre application du théorème de représentation de Riesz implique qu'il existe un élément de V, noté f, tel que $\|f\|_V = \|L\|_{V'}$ et $L(v) = \langle f, v\rangle$ pour tout $v \in V$.

Par conséquent, le problème variationnel (II.3) est équivalent à : trouver $u \in V$ tel que $A(u) = f$.

Pour démontrer le théorème, il nous faut donc montrer que l'opérateur A est bijectif de V dans V (ce qui implique l'existence et l'unicité de u) et que son inverse est continu (ce qui prouve la dépendance continue de u par rapport à L). La coercivité (II.5) de $a(w, v)$ montre que

$$v\|v\|^2 \leq a(w, w) = \langle A(w), w\rangle \leq \|A(w)\|\|w\|,$$

Ce qui donne $\|v\| \leq \|A(w)\|$ pour tout $w \in V$, c'est-à-dire que A est injectif. Pour montrer que A est surjectif, c'est-à-dire que $\mathrm{Im}(A) = V$ (ce qui n'est pas évident si V est de dimension infinie), il suffit de montrer que $\mathrm{Im}(A)$ est fermé dans V et que $\mathrm{Im}(A)^{\perp} = \{0\}$. En effet, dans ce cas, on voit que $V = (\mathrm{Im}(A)^{\perp})^{\perp} = \mathrm{Im}(A)$, ce qui prouve bien que A est surjectif.

Soit $A(w_n)$ une suite dans $\mathrm{Im}(A)$ qui converge vers b dans V. En vertu de (II.6), on a

$$v\|w_n - w_p\| \leq \|A(w_n) - A(w_p)\|,$$

qui tend vers zéro quand n et p tendent vers l'infini. Donc w_n est une suite de Cauchy dans l'espace de Hilbert V, c'est-à-dire qu'elle converge vers une limite $w \in V$. Alors, par continuité de A (II.6), on en déduit que $A(w_n)$ converge vers $A(w) = b$, c'est-à-dire que $b \in \mathrm{Im}(A)$, donc $\mathrm{Im}(A)$ est fermé. D'autre part, soit $v \in \mathrm{Im}(A)^{\perp}$. La coercivité (II.5) de $a(w, v)$ implique que

$$v\|v\|^2 \leq a(v, v) = \langle A(v), v\rangle = 0,$$

c'est-à-dire que $v = 0$ et $\mathrm{Im}(A)^{\perp} = \{0\}$, ce qui prouve que A est bijectif. Soit A^{-1} son inverse. L'inégalité (II.6) avec $w = A^{-1}(v)$ prouve que A^{-1} est continu. Donc la solution u dépend continûment de f. ■

Remarque II.3

Si l'espace de Hilbert V est de dimension finie (ce qui n'est cependant jamais le cas pour les applications que nous visons), la démonstration du Théorème (II.2) de Lax-Milgram se simplifie considérablement. En effet, en dimension finie toutes les applications linéaires sont continues et l'injectivité (II.6) de A est équivalent à son inversibilité. On voit bien dans ce cas (comme dans le cas général) que l'hypothèse de coercivité de la forme bilinéaire $a(w, v)$ est essentielle puisque c'est elle qui donne l'injectivité de A. Remarquons pour finir que, si $V = \mathbb{R}^N$, une formulation variationnelle n'est que l'écriture, $\langle Au, v\rangle = \langle f, v\rangle$ pour tout $v \in \mathbb{R}^N$, d'un simple système linéaire $Au = f$.

Une formulation variationnelle possède souvent une interprétation physique, en particulier si la forme bilinéaire est symétrique. En effet dans ce cas, la solution de la formulation variationnelle (II.3) réalise le minimum d'une énergie très naturelle en physique ou en mécanique.

Proposition II.1

On se place sous les hypothèses du Théorème (II.2) de Lax-Milgram. On suppose en plus que la forme bilinéaire est symétrique $a(w, v) = a(v, w)$ pour tout $v, w \in V$. Soit $J(v)$ l'énergie définie pour $v \in V$ par

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v) \qquad (II.7)$$

Soit $u \in V$ la solution unique de la formulation variationnelle (II.2). Alors u est aussi l'unique point de minimum de l'énergie, c'est-à-dire que

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v).$$

Réciproquement, si $u \in V$ est un point de minimum de l'énergie $J(v)$, alors u est la solution unique de la formulation variationnelle (II.3).

Démonstration

Si u est solution de la formulation variationnelle (II.3), on développe (grâce à la symétrie de a) :

$$J(u+v) = J(u) + \frac{1}{2}a(v,v) + a(u,v) - L(v) = J(u) + \frac{1}{2}a(v,v) \geq J(u).$$

Comme $u+v$ est quelconque dans V, u minimise bien l'énergie J dans V. Réciproquement, soit $u \in V$ tel que

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v).$$

Pour $v \in V$ on définit une fonction $j(t) = J(u+tv)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (il s'agit d'un polynôme du deuxième degré en t). Comme $t = 0$ est un minimum de j, on en déduit que $j'(0) = 0$ qui, par un calcul simple, est exactement la formulation variationnelle (II.3).

Exemple 6

Considérons le problème de Dirichlet (II.1) avec sa formulation variationnelle (II.2), sous la condition que $V = H_0^1(\Omega)$ équipé de la norme $\|v\| = \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$:

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx, \quad L(v) = \int_\Omega f v \, dx.$$

Il est évident que la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$, respectivement la forme linéaire $L(\cdot)$, est continue sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, respectivement sur $H_0^1(\Omega)$, puisque nous avons :

$$a(u,v) \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad a(u,v) \leq \|f\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

D'autre part, puisque Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ est $H_0^1(\Omega)$-elliptique. En effet, en vertu de l'inégalité de Poincaré, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on a :

$$a(v,v) \geq \frac{1}{1 + C^2(\Omega)} \|v\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

D'après le théorème (II.2), il existe donc une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ et une seule telle que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$a(u,v) = L(v).$$

De plus, puisque la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ est symétrique, cette fonction u minimise la fonctionnelle quadratique :

$$J(v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx - \int_\Omega f v \, dx$$

sur l'espace $H_0^1(\Omega)$.

III Théorème de Stampacchia

Théorème II.3 (Stampacchia)
Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire, continue et coercive, soit K un convexe, fermé et non vide, étant donné $f \in H$. Il existe $u \in K$ unique telle que :

$$a(u, v - u) \geq \langle f, v - u\rangle, \quad \forall v \in K \qquad (III.1)$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété :

$$u \in K, \quad \frac{1}{2}a(u, u) \geq \langle f, u\rangle = \min_{v \in K} \frac{1}{2}a(v, v) \geq \langle f, v\rangle \qquad (III.2)$$

Démonstration. D'après la représentation de Riesz-Fréchet, il existe $f \in H$ unique telle que :

$$\langle f, v\rangle_H = \langle f, v\rangle, \quad \forall v \in H$$

D'autre part, pour tout $u \in H$, l'application $v \mapsto a(u, v)$ est une forme linéaire continue sur H. Par la représentation de Riesz-Fréchet, il existe $Au \in H$ telle que :

$$a(u, v) = \langle Au, v\rangle, \quad \forall v \in H$$

Ainsi, A est un opérateur linéaire continu de H dans H. Donc, $(III.1)$ revient à trouver $u \in K$ telle que :

$$\langle Au, v\rangle - \langle f, v\rangle \geq \langle Au, u\rangle - \langle f, u\rangle, \quad \forall v \in K \qquad (III.3)$$

Soit $\epsilon > 0$ une constante, l'inégalité $(III.3)$ équivaut à :

$$\langle \epsilon f - Au + u, v - u\rangle \leq 0, \quad \forall v \in K$$

C'est-à-dire, $u = P_K(\epsilon f - Au + u)$, c'est la projection de $(\epsilon f - Au + u)$ sur K.

On pose $S : K \to K$ avec $v \mapsto S(v) = P_K(\epsilon f - Av + v)$. S est donc contractante, c'est-à-dire, il existe $0 \leq k < 1$ telle que :

$$\|S(v_1) - S(v_2)\| \leq k\|v_1 - v_2\|, \quad \forall v_1, v_2 \in K$$

IV Méthodes variationnelles non linéaires pour la résolution des problèmes elliptiques

Les problèmes elliptiques non linéaires constituent une vaste classe d'équations aux dérivées partielles (EDP) rencontrées dans de nombreux domaines de la physique et des mathématiques. La résolution de ces problèmes peut s'avérer difficile en raison de leur nature non linéaire. Les méthodes variationnelles non linéaires offrent un cadre puissant pour aborder ces problèmes et obtenir des solutions approchées.

IV.1 Théorème de Zarentonello

Soient H un espace de Hilbert réel, de produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de norme associée $\|\cdot\|$, et $H^{'}$ son dual. On note $\|\cdot\|_*$ la norme duale de $\|\cdot\|$; et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le crochet dans la dualité $H^{'}\times H$. Soit $A : H \to H^{'}$ un opérateur non nécessairement linéaire. Étant donné $b \in H^{'}$; on se propose de résoudre l'équation opérationnelle

$$Au = b, \quad u \in H. \qquad (IV.1)$$

On énonce les hypothèses suivantes :

(H1.1) $A : H \to H'$ est fortement monotone sur H, c'est-à-dire, il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geq c\|u - v\|^2, \quad \forall u, v \in H.$$

(H1.2) A est lipschitzien, c'est-à-dire, il existe une constante $L > 0$ telle que

$$\|Au - Av\|_* \leq L\|u - v\|, \quad \forall u, v \in H.$$

Le théorème suivant a été prouvé par Zarantonello en 1960. Il marque le début de la théorie moderne des opérateurs monotones qui a permis de
nombreuses applications à la physique mathématique non linéaire.

Théorème 1 :Zarentonello (1960) Supposons que **(H1.1)** et **(H1.2)** ont lieu. Alors, pour chaque $b \in H^{'}$ donné, le problème **(IV.1)** a une solution unique u : Cette solution dépend continûment de b. Plus précisément, si u_1 et u_2 sont les solutions de **(IV.1)** correspondant à b_1 et b_2 respectivement, alors

$$\|u_1 - u_2\| \leq c^{-1}\|b_1 - b_2\|;$$

autrement dit, l'opérateur inverse $A^{-1} : H^{'} \to H$ est lipschitzien de constante c^{-1}.
Démonstration. L'idée de la preuve est de remplacer l'équation originale **(IV.1)** par le problème de point fixe équivalent :

$$u = Bu, \quad u \in H; \qquad (IV.2)$$

où l'opérateur $B : H \to H$ est défini par

$$Bu = u - tJ(Au - b) \quad \text{pour un réel } t > 0 \text{ fixé}, \qquad (IV.3)$$

et $J : H^{'} \to H$ est l'isomorphisme canonique (isométrique) de $H^{'}$ sur H. Notons que

$$\langle J(b), w\rangle = \langle b, w\rangle, \quad \forall b \in H^{'}, \forall w \in H; \qquad (IV.4)$$

Nous allons utiliser le théorème de point fixe de Banach.
Si $H = \{0\}$, alors l'énoncé est trivial.

Supposons donc $H \neq \{0\}$. Notons $C = JA$. Pour tous $u, v \in H$, on obtient par **(H1.1)**,

$$\langle Cu - Cv, u - v\rangle = \langle J(Au - Av), u - v\rangle = \langle Au - Av, u - v\rangle \geq c\|u - v\|^2; \quad (IV.5)$$

et par **(H1.2)**,

$$\|Cu - Cv\| = \|J(Au - Av)\| = \|Au - Av\|_* \leq L\|u - v\|; \quad (IV.6)$$

Or,

$$\|Bu - Bv\|^2 = \|u - tJ(Au - b) - v + tJ(Av - b)\|^2$$
$$= \|u - v - t(Cu - Cv)\|^2 = \|u - v\|^2 - 2t\langle Cu - Cv, u - v\rangle + t^2\|Cu - Cv\|^2$$

D'où, moyennant **(IV.5)** et **(IV.6)**,

$$0 \leq \|Bu - Bv\|^2 \leq m\|u - v\|^2. \quad (IV.7)$$

Où,
$m = 1 + 2tc + t^2L^2$
Par **(IV.7)**, $m \geq 0$. Comme $t_1 = 0$ et $t_2 = \frac{2c}{L^2}$ sont les racines du trinôme en t : $-2tc + t^2L^2$, il vient $t^2L^2 - 2tc < 0$ pour tout $t \in \left]0; \frac{2c}{L^2}\right[$, et donc $m < 1$ pour tout $t \in \left]0; \frac{2c}{L^2}\right[$. Il s'ensuit de **(IV.7)**,

$$\|Bu - Bv\| \leq k\|u - v\|, u, v \in H,$$

avec $k = \sqrt{m} < 1$, pourvu que $t \in \left]0; \frac{2c}{L^2}\right[$.
Ainsi, on a montré que l'opérateur B est une contraction de rapport k, pour tout $t \in [0, \frac{2c}{L^2}]$. Par le théorème du point fixe de Banach, on conclut à l'existence d'une solution unique u du problème (IV.2), et par conséquent du problème (IV.1). De plus, il s'ensuit par le même théorème que pour tout $u_0 \in H$ donné et tout $t \in \left]0; \frac{2c}{L^2}\right[$, le schéma itératif

$$u_n = Bu_{n-1} = u_{n-1} - tJ(Au_{n-1} - b), \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad (IV.8)$$

converge vers l'unique solution u du problème original (IV.1), c'est-à-dire $u_n \to u$ dans H quand $n \to \infty$. De plus, on a l'estimation d'erreur :

$$\|u - u_n\| \leq \frac{k^n}{1 - k}\|u_1 - u_0\|, \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

Maintenant, soit $Au_j = b_j$, $j = 1, 2$. Alors par $(H1.1)$,

$$c\|u_1 - u_2\|^2 \leq (Au_1 - Au_2, u_1 - u_2) \leq \|Au_1 - Au_2\|_*\|u_1 - u_2\|,$$

d'où

$$\|u_1 - u_2\| \leq c^{-1}\|Au_1 - Au_2\|,$$

c'est-à-dire

$$\|A^{-1}b_1 - A^{-1}b_2\| \leq c^{-1}\|b_1 - b_2\|,$$

pour tout $b_1, b_2 \in H'$. Ceci achève la démonstration.

IV.2 Théorème "non linéaire" de Lax-Milgram

Comme conséquence du théorème (1), on obtient une généralisation du théorème de Lax-Milgram au cas non linéaire.
Plus précisément, étant donné $b \in H^{'}$, considérons le problème qui consiste à trouver $u \in H$ solution de l'équation

$$a(u, v) = b(v), \quad \forall v \in H; \qquad (IV.9)$$

où $a : H \times H \to \mathbb{R}$ est une application qui vérifie les hypothèses suivantes :

- **(H1.1')** $a(\cdot, \cdot)$ est linéaire continue en v, c'est-à-dire, pour chaque $w \in H$, l'application $v \mapsto a(w, v)$ représente une forme linéaire continue sur H ;
- **(H1.2')** Il existe des constantes positives L et c telles que pour tous $u, v, w \in H$, on ait
$$c\|u - v\|^2 \leq a(u, u - v) - a(v, u - v);$$
et
$$|a(u, w) - a(v, w)| \leq L\|u - v\|\|w\|.$$

Théorème 2 (de Lax-Milgram, version non linéaire)
Sous les hypothèses (H1.1í)-(H1.2í), le problème (IV.9) a une solution unique.

Démonstration Par l'hypothèse (H1.1í) et le théorème de représentation de Riesz, pour chaque $w \in H$, il existe un élément unique dans $H^{'}$ noté Aw telle que :

$$a(w, v) = \langle Aw, v \rangle, \quad \forall v \in H.$$

Ceci définit un opérateur $A : H \to H^{'}$, et l'équation (IV.9) équivaut à l'équation opérationnelle

$$Au = b, \quad u \in H. \qquad (IV.10)$$

De (H1.2í), il découle d'une part,

$$c\|u - v\|^2 \leq a(u, u - v) - a(v, u - v)$$
$$= \langle Au, u - v \rangle - \langle Av, u - v \rangle$$
$$= \langle Au - Av, u - v \rangle, \quad \forall u, v \in H;$$

c'est-à-dire, A est fortement monotone, et d'autre part :

$$|\langle Au - Av, w \rangle| = |\langle Au, w \rangle - \langle Av, w \rangle|$$
$$= |a(u, w) - a(v, w)|$$
$$\leq L\|u - v\|\|w\|, \quad \forall u, v, w \in H;$$

par définition de la norme duale,

$$\|Au - Av\|_* = \sup_{\|w\| \leq 1} |\langle Au - Av, w \rangle| \leq L\|u - v\|, \forall u, v \in H;$$

c'est-à-dire, A est continu au sens de Lipschitz.

Enfin, par application du théorème (1), il s'ensuit que l'équation (IV.10), et par suite (IV.9), a une seule solution u.
A noter que dans le cas spécial où $a : H \times H \to \mathbb{R}$ est bilinéaire, continue, et H-elliptique (coercive), c'est-à-dire,

$$|a(w, v)| \leq L\|w\|\|v\|, \forall v, w \in H;$$
$$|a(v, v)| \geq c\|v\|^2, \forall v \in H;$$

pour $L, c > 0$ fixes, les hypothèses $(H1.1')$ et $(H1.2')$ sont satisfaites. Le théorème (2) se réduit alors au théorème "linéaire" bien connu de Lax-Milgram.

CHAPITRE III Méthodes topologiques

Dans ce chapitre, nous présentons la méthode des opérateurs monotones qui a été initiée par G. Minty en 1962. Nous donnons aussi quelques applications de cette méthode dans la résolution de certains problèmes elliptiques non linéaires.

I Théorème de Minty

Théorème III.1 Soit V un espace de Banach réflexif et séparable. Supposons que l'opérateur $A : V \to V^{'}$ vérifie :

1. A monotone, borné et hémicontinu
2. A coercif, au sens que
$$\lim_{\|v\|_V \to +\infty} \frac{\langle Av, v\rangle}{\|v\|_V} = +\infty.$$

Alors, pour tout $f \in V^{'}$, il existe $u \in V$ tel que $Au = f$. De plus, si A est strictement monotone, l'élément u est unique, i.e. A est une bijection entre V et $V^{'}$.

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme III.1 Soit $P : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto P(x)$, une application continue. Supposons qu'il existe $\rho > 0$ telle que :

$$(P(x), x) \geq 0, \quad \forall x \in S_\rho = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| = \rho\}. \tag{III.1}$$

Alors, il existe $\xi \in \overline{B_\rho} = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| \leq \rho\}$ tel que $P(\xi) = 0$.

Démonstration Raisonnons par l'absurde. Supposons que $P(x) \neq 0, \forall x \in \overline{B_\rho}$, et considérons l'application
$$R : \overline{B_\rho} \to \overline{B_\rho}, x \mapsto R(x) = -\frac{\rho}{\|P(x)\|} P(x),$$
qui est alors continue. En utilisant le théorème du point fixe de Brouwer, on obtient l'existence d'un point ξ de $\overline{B_\rho}$ tel que $R(\xi) = \xi$. On a alors

$$(P(\xi), \xi) = (P(\xi), -\frac{\rho}{\|P(\xi)\|} P(\xi))$$

$$= -\frac{\rho}{\|P(\xi)\|}(P(\xi), P(\xi))$$

$$= -\frac{\rho}{\|P(\xi)\|^2}\|P(\xi)\|^2$$
$$= -\rho\|P(\xi)\|.$$

Donc, $(P(\xi), \xi) < 0$ et

$$\|\xi\| = \|R(\xi)\| = \left\| -\frac{\rho}{\|P(\xi)\|}P(\xi) \right\| = \rho.$$

Ce qui contredit (III.1). Par suite, il existe $\xi_0 \in \overline{B_\rho}$ tel que $P(\xi_0) = 0$.

Remarque III.1 Si $m = 1$ dans le lemme précédent, alors on retrouve le théorème des valeurs intermédiaires. En effet, l'hypothèse (III.1) s'écrit

$$P(\rho)\rho \geq 0 \quad \text{et} \quad P(-\rho)(-\rho) \geq 0$$

car dans ce cas $S_\rho = \{-\rho, \rho\}$. Ce qui signifie que $P(\rho)$ et $P(-\rho)$ sont de signes contraires. La continuité de P implique l'existence de $\rho_0 \in]-\rho, \rho[$ tel que $P(\rho_0) = 0$.

Démonstration .(Du Théorème III.1)
1. Soit $f \in V'$. Puisque V est séparable, alors il existe une base dénombrable $\{w_1, w_2, w_3, \ldots\}$ dense dans V. Définissons l'espace V_m de dimension finie engendré par l'ensemble des vecteurs $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$, c'est-à-dire

$$V_m = [w_1, w_2, \ldots, w_m].$$

Cherchons une fonction $u_m \in V_m$, vérifiant

$$\langle A(u_m), w_j\rangle = \langle f, w_j\rangle, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{III.2}$$

Et pour trouver

$$u_m = \sum_{j=1}^{m} \xi_j w_j,$$

on définit l'opérateur

$$P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \mapsto P(\xi)$$

comme suit

$$P(\xi) = (\langle A(u_m) - f, w_1\rangle, \langle A(u_m) - f, w_2\rangle, \ldots, \langle A(u_m) - f, w_n\rangle).$$

On a

$$P(\xi) - P(\nu) = \sum_{i=1}^{n} (P(\nu_1, \ldots, \nu_{i-1}, \xi_i, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_n) - P(\nu_1, \ldots, \nu_{i-1}, \nu_i, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_n))$$

et la composante d'indice k de cette expression est

$$\sum_{i=1}^{n}\left\langle A\left(\sum_{j=1}^{i-1}\nu_j w_j+\sum_{j=i+1}^{n}\xi_j w_j+\xi_i w_i\right)-f,w_k\right\rangle-\sum_{i=1}^{n}\left\langle A\left(\sum_{j=1}^{i-1}\nu_j w_j+\sum_{j=i+1}^{n}\xi_j w_j+\nu_i w_i\right)-f,w_k\right\rangle$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left\langle A\left(\sum_{j=1}^{i-1}\nu_j w_j+\sum_{j=i+1}^{n}\xi_j w_j+\xi_i w_i\right)-A\left(\sum_{j=1}^{i-1}\nu_j w_j+\sum_{j=i+1}^{n}\xi_j w_j+\nu_i w_i\right),w_k\right\rangle$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\langle A(\mu_i+\xi_i w_i)-A(\mu_i+\nu_i w_i),w_k\rangle$$

Où,

$$\mu_i=\sum_{j=1}^{i-1}\nu_j w_j+\sum_{j=i+1}^{n}\xi_j w_j.$$

Soit $\epsilon>0$, on sait que A est hémicontinu, donc il existe $\alpha>0$ telle que

$$|\xi-\nu|<\alpha\Rightarrow|A(\mu_i+\xi_i w_i)-A(\mu_i+\nu_i w_i)|<\frac{\epsilon}{n}.$$

($|\xi-\nu|<\alpha\Rightarrow|\xi_i-\nu_i|<\alpha$).Par suite,

$$\sum_{i=1}^{n}|A(\mu_i+\xi_i w_i)-A(\mu_i+\nu_i w_i)|<\varepsilon.$$

Ce qui signifie la continuité de la composante d'indice arbitraire k, par suite, on a la continuité de P. De plus, (la condition 2 du Théorème (III.1) implique que pour chaque $\alpha>0$, il existe $\rho>0$ telle que

$$\langle A(u),u\rangle\geq\alpha\|u\|,\forall\|u\|\geq\rho.$$

En choisissant $\alpha\geq\|f\|$, il existe $\rho>0$ vérifiant

$$\forall\|u\|\geq\rho,\langle A(u)-f,u\rangle\geq\alpha\|u\|-\|f\|\|u\|\geq 0.$$

En utilisant le Lemme (III.1), il existe $u_m\in V_m$ telle que

$$A(u_m)=f.$$

Mais (III.2) donne

$$\langle A(u_m),u_m\rangle=\langle f,u_m\rangle,\quad\forall m=1,2,\ldots$$

Par conséquent,

$$\frac{\langle A(u_m),u_m\rangle}{\|u_m\|_V}\leq\|f\|_{V'}.\tag{III.3}$$

Ce qui entraîne $\|u_m\|_V\leq C$ (en utilisant la condition 2) du Théorème (III.1) et puisque A est un opérateur borné, on a

$$\|A(u_m)\|_{V'}\leq C,\quad\forall m=1,2,\ldots$$

Puisque V est réflexif, il existe une sous-suite (u_k) telle que

$$\begin{cases} u_k \to u \text{ dans } V \text{ faible}, \\ A(u_k) \to \psi \text{ dans } V' \text{ faible}. \end{cases}$$

En utilisant (III.2), on a

$$\langle A(u_k), w_j \rangle = \langle f, w_j \rangle, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k.$$

En fixant j et en faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient

$$\langle \psi, w_j \rangle = \langle f, w_j \rangle, \quad \forall j = 1, 2, \ldots$$

Par suite, $\psi = f$. La relation (III.2) implique aussi

$$\langle A(u_k), u_k \rangle = \langle f, u_k \rangle \to \langle f, u \rangle.$$

Par conséquent,

$$\lim_{k \to +\infty} \langle A(u_k), u_k \rangle = \langle f, u \rangle,$$

Ou bien,

$$\lim_{k \to +\infty} \langle A(u_k), u_k \rangle = \langle \psi, u \rangle \tag{III.4}$$

Pour terminer la démonstration, on utilise la monotonie de A pour obtenir

$$\langle A(u_k) - A(v), u_k - v \rangle \geq 0, \quad \forall v \in V.$$

Ce qui donne

$$\langle A(u_k), u_k \rangle - \langle A(u_k), v \rangle - \langle A(v), u_k - v \rangle \geq 0.$$

En faisant tendre k vers $+\infty$ et en utilisant (III.4), on arrive à

$$\langle \psi, u \rangle - \langle \psi, v \rangle - \langle A(v), u - v \rangle \geq 0,$$

et par suite

$$\langle \psi - A(v), u - v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in V. \tag{III.5}$$

On prend $v = u - \lambda w$ dans (III.5) où $\lambda > 0$, et $w \in V$ pour obtenir

$$\lambda(\psi - A(u - \lambda w), w) \geq 0, \quad \forall w \in V,$$

et donc

$$(\psi - A(u - \lambda w), w) \geq 0, \quad \forall w \in V, \quad \forall \lambda > 0.$$

En faisant tendre λ vers 0 et en utilisant l'hémicontinuité de l'opérateur A, on obtient

$$(\psi - A(u), w) \geq 0, \quad \forall w \in V, \tag{III.6}$$

et en prenant $v = u + \lambda w$ dans (3.4.5) et en reprenant les étapes précédentes, on arrive à

$$(\psi - A(u), w) \leq 0, \quad \forall w \in V. \tag{III.7}$$

De (III.6) et (III.7), on a

$$(\psi - A(u), w) = 0, \quad \forall w \in V.$$

Par conséquent,

$$A(u) = \psi = f \in V^{'}.$$

Une application du Théorème III.1 :

Considérons l'opérateur A défini par

$$A : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p^{'}}(\Omega)$$
$$u \mapsto Au = -\text{div}(a(x, \nabla u)),$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $p \in]1, +\infty[$ et $a(\cdot, \cdot)$ vérifie les hypothèses suivantes :

a. a : $\Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est de Carathéodory.

b. $a(\cdot, \cdot)$ est coercive,c'est-à-dire,

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } a(x, \xi) \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^p_{\mathbb{R}^N}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \text{ p.p. en } x \in \Omega,$$

c. Il existe $C > 0$ et une fonction positive $a_0 \in L^{p'}(\Omega)$, $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$, telles que

$$\|a(x, \xi)\|_{\mathbb{R}^N} \leq C(\|\xi\|^{p-1}_{\mathbb{R}^N} + a_0(x)), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \text{ p.p. en } x \in \Omega,$$

d. $a(\cdot, \cdot)$ est strictement monotone,c'est-à-dire :

$$(a(x, \xi) - a(x, \xi')) \cdot (\xi - \xi') > 0, \quad \forall \xi, \xi' \in \mathbb{R}^N, \xi \neq \xi', \text{ p.p. en } x \in \Omega.$$

Théorème III.2 Sous les hypothèses précédentes sur a, pour tout $f \in W^{-1,p^{'}}(\Omega)$, il existe un unique $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ solution de

$$\begin{cases} -\text{div}(a(x, \nabla u)) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Démonstration. Soit $V = W_0^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme du gradient. On a pour tout $u, \phi \in V$

$$\langle Au, \phi \rangle = \langle -\text{div}(a(x, \nabla u)), \phi \rangle = \int_\Omega a(x, \nabla u) \nabla \phi \, dx.$$

1. Pour tout $u \in V$, Au est bien défini et A est borné car d'après (c) et l'inégalité de Hölder, on a

$$|\langle Au, \phi \rangle| \leq C \int_\Omega (|\nabla u|^{p-1} + a_0) \cdot |\nabla \phi| \, dx$$
$$\leq C(\|\nabla u\|^{p-1}_{L^p(\Omega)} + \|a_0\|_{L_0^{p'}(\Omega)}) \|\nabla \phi\|_{L^p(\Omega)}.$$

2. A est coercive, car d'après (b)

$$\langle Au, u\rangle = \int_\Omega a(x, \nabla u) \cdot \nabla u \, dx \geq \alpha \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx = \alpha \|u\|_V^p.$$

3. Montrons que A est hémicontinu. Soient $u, v, w \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que la fonction g définie par

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ \lambda \mapsto \langle A(u+\lambda v), w\rangle &= \int_\Omega a(x, \nabla(u+\lambda v))\nabla w \, dx \end{aligned}$$

est continue. Soit (λ_n) une suite convergente vers $\lambda \in \mathbb{R}$. D'après (a), on a

$$a(x, \nabla(u+\lambda_n v)) \to a(x, \nabla(u+\lambda v)) \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Et d'après (c) et comme (λ_n) est bornée, on trouve

$$\begin{aligned} |a(x, \nabla u + \lambda \nabla v)\nabla w| &\leq C(|\nabla u + \lambda_n \nabla v|^{p-1} + a_0)|\nabla w| \\ &\leq C_p(|\nabla u|^{p-1} + |\lambda_n|^{p-1}|\nabla v|^{p-1} + a_0)|\nabla w| \\ &\leq C(|\nabla u|^{p-1} + |\nabla v|^{p-1} + a_0)|\nabla w| \end{aligned}$$

avec $C_p = C\max\{1, 2^{p-2}\}$. Alors, d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \langle A(u+\lambda_n v), w\rangle = \langle A(u+\lambda v), w\rangle.$$

4. A est strictement monotone car d'après (d) on a

$$\forall u, v \in V \text{ avec } u \neq v, \quad \langle Au - Av, u - v\rangle = \int_\Omega (a(x, \nabla u) - a(x, \nabla v))(\nabla u - \nabla v)\, dx > 0$$

Donc, d'après le **Théorème (III.1)**, pour tout $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, il existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que

$$Au = f.$$

Pour montrer l'unicité, on suppose qu'il existe u_1 et u_2 tels que

$$\int_\Omega a(x, \nabla u_i)\nabla\phi \, dx = \langle f, \phi\rangle, \forall \phi \in W_0^{1,p}(\Omega), i = 1, 2.$$

Par soustraction, on trouve

$$\int_\Omega (a(x, \nabla u_1) - a(x, \nabla u_2))\nabla\phi \, dx = 0, \forall \phi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

En posant $\phi = u_1 - u_2$, on trouve

$$\int_\Omega (a(x, \nabla u_1) - a(x, \nabla u_2))(\nabla u_1 - \nabla u_2)\, dx = 0$$

et grâce à (d), on obtient le résultat suivant :

$$(a(x, \nabla u_1) - a(x, \nabla u_2))(\nabla u_1 - \nabla u_2) = 0 \text{p.p. dans} \Omega.$$

Ce qui implique que $\nabla u_1 = \nabla u_2$ p.p. dans Ω. Puisque $u_1 = u_2$ sur $\partial\Omega$, on a $u_1 = u_2$ p.p. dans Ω.

II Méthode faisant intervenir les opérateurs monotones

Maintenant, on va voir une autre méthode où la monotonie de l'opérateur joue un rôle important. On commence par un lemme principal :

Lemme III.2 Soit $A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une fonction vérifiant pour deux constantes $\alpha > 0$ et $C > 0$:

1. $|A(\xi) - A(\xi^{'})| \leq C|\xi - \xi^{'}|, \forall \xi, \xi^{'} \in \mathbb{R}^N$,
2. $(A(\xi) - A(\xi^{'})) \cdot (\xi - \xi^{'}) \geq \alpha |\xi - \xi^{'}|^2, \forall \xi, \xi^{'} \in \mathbb{R}^N$.

Alors, pour tout $b \in \mathbb{R}^N$, il existe une unique solution du système

$$A(\xi) = b. \qquad (III.2)$$

Démonstration. Il est clair que le système $(III.2)$ est équivalent au système

$$\xi - \varepsilon A(\xi) + \varepsilon b = \xi$$

où $\varepsilon > 0$ sera choisi ultérieurement. On considère la suite récurrente $(\xi^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} \xi^{(0)} \in \mathbb{R}^N \text{ donné} \\ \xi^{(p+1)} = \xi^{(p)} - \varepsilon A(\xi^{(p)}) + \varepsilon b. \end{cases}$$

On a

$$\xi^{(p+1)} - \xi^{(p)} = \xi^{(p)} - \xi^{(p-1)} - \varepsilon (A(\xi^{(p)}) - A(\xi^{(p-1)})) \qquad (III.3)$$

En considérant la norme euclidienne du vecteur $\xi^{(p+1)} - \xi^{(p)}$ et en utilisant $(III.3)$, on arrive à

$$|\xi^{(p+1)} - \xi^{(p)}|^2 = |\xi^{(p)} - \xi^{(p-1)}|^2 - 2\varepsilon (A(\xi^{(p)}) - A(\xi^{(p-1)})) \cdot (\xi^{(p)} - \xi^{(p-1)}) + \varepsilon^2 |A(\xi^{(p)}) - A(\xi^{(p-1)})|^2.$$

En utilisant les deux conditions a) et b) du Lemme (III.2), il vient que

$$|\xi^{(p+1)} - \xi^{(p)}|^2 \leq (1 - 2\alpha\varepsilon + \varepsilon^2 C^2) |\xi^{(p)} - \xi^{(p-1)}|^2.$$

On choisit maintenant $\varepsilon > 0$ telle que

$$k^2 = 1 - 2\alpha\varepsilon + \varepsilon^2 C^2 < 1.$$

Par suite, on a

$$|\xi^{(p+1)} - \xi^{(p)}| \leq k |\xi^{(p)} - \xi^{(p-1)}|, \quad k < 1.$$

Donc $(\xi^{(p)})$ est une suite convergente vers une limite (qu'on notera ξ) vérifiant

$$A(\xi) = b.$$

Pour montrer l'unicité, supposons que ξ et $\xi^{'}$ sont deux solutions du système $(III.1)$. On aura alors

$$A(\xi) - A(\xi^{'}) = 0.$$

Ce qui implique que

$$0 = (A(\xi) - A(\xi^{'}))(\xi - \xi^{'}) \geq \alpha|\xi - \xi^{'}|^2.$$

Par conséquent, $\xi = \xi^{'}$.

Supposons maintenant qu'en plus des hypothèses du Lemme (III.2), on a $A(0) = 0$. Remarquons que cette hypothèse est technique et est toujours vérifiée quitte à remplacer $A(\xi)$ par $A(\xi) - A(0)$. Sous ces conditions, on veut trouver une solution au problème

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A(\nabla u)) = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \qquad (III.4)$$

Théorème III.3 Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \in H^{-1}(\Omega)$. Alors, le problème (III.4) admet une unique solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$, vérifiant

$$\int_\Omega A(\nabla u) \cdot \nabla v \, dx = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Démonstration. On commence par démontrer l'unicité. On suppose que le problème (III.4) admet deux solutions $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$. On a alors

$$\int_\Omega [A(\nabla u_1) - A(\nabla u_2)] \cdot \nabla v \, dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

En prenant $v = u_1 - u_2$, on arrive à

$$0 = \int_\Omega [A(\nabla u_1) - A(\nabla u_2)] \cdot (\nabla u_1 - \nabla u_2) \, dx \geq \alpha \int_\Omega |\nabla u_1 - \nabla u_2|^2 \, dx.$$

Par suite, $u_1 - u_2 = 0$ car $u_1 - u_2 \in H_0^1(\Omega)$. Ce qui montre l'unicité de la solution dans le cas où elle existe.

Maintenant, on étudie l'existence de la solution. Considérons une base dénombrable orthonormale $\{w_1, w_2, \ldots, w_m, \ldots\}$ de l'espace $H_0^1(\Omega)$ (pour le produit scalaire de $L^2(\Omega)$) et on définit les espaces de dimensions finies

$$V_m = \langle w_1, w_2, \ldots, w_m \rangle, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

Cherchons une solution $u_m = \sum_{j=1}^m c_j w_j$ du problème approché

$$\int_\Omega A(\nabla u_m) \nabla v_m \, dx = \langle f, v_m \rangle, \quad \forall v_m \in V_m \qquad (III.5)$$

qui est équivalent au problème

$$\int_\Omega A(\nabla u_m) \nabla w_j \, dx = \langle f, w_j \rangle, \quad \forall j = 1, \ldots, m. \qquad (III.6)$$

À cet effet, on définit $B : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ comme suit : $B = (B_1, \ldots, B_N)$ où

$$B_j(\xi) = \int_\Omega A\left(\nabla\left(\sum_{i=1}^m \xi_i w_i\right)\right) \cdot \nabla w_j \, dx, \quad \forall j = 1, \ldots, m. \qquad (III.7)$$

où $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ et on pose $b_j = \langle f, w_j \rangle$. Par suite, le problème (III.6) est équivalent à trouver une solution pour

$$B_j(c) = b_j.$$

On remarque que la condition $A(0) = 0$ conduit à $B(0) = 0$, et que la condition a) de la fonction A (du Lemme III.2) implique que B vérifie la même condition. Vérifions que B satisfait aussi la condition b). On a

$$(B(\xi) - B(\xi')) \cdot (\xi - \xi') = \sum_{j=1}^{m} (B_j(\xi) - B_j(\xi'))(\xi_j - \xi_j')$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \int_\Omega [A(\nabla(\sum_{i=1}^{m} \xi_i w_i)) - A(\nabla(\sum_{i=1}^{m} \xi_i' w_i))] \cdot \nabla w_j (\xi_j - \xi_j')\, dx.$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré et la condition a) sur A, on obtient

$$(B(\xi) - B(\xi')) \cdot (\xi - \xi') = \int_\Omega [A(\nabla(\sum_{i=1}^{m} \xi_i w_i)) - A(\nabla(\sum_{i=1}^{m} \xi_i' w_i))] \cdot \nabla(\sum_{j=1}^{m} (\xi_j - \xi_j') w_j)\, dx$$

$$\geq \alpha \|\nabla(\sum_{j=1}^{m} (\xi_j - \xi_j') w_j)\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \beta |\xi - \xi'|^2,$$

Où β est une constante. La dernière égalité est réalisée grâce au fait que la base $\{w_1, \ldots, w_m, \ldots\}$ est orthonormale. Finalement, B vérifie la condition b) du Lemme (III.2). En utilisant le même lemme, il existe une unique solution $c \in \mathbb{R}^m$ de telle sorte que (III.5) est vérifiée. En prenant $u_m = v_m$ dans (III.5) et en utilisant la condition a) et b) et l'hypothèse $A(0) = 0$, On obtient

$$\alpha \|\nabla u_m\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_\Omega A(\nabla u_m) \cdot \nabla u_m\, dx \leq C \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)},$$

Où C est une constante. On en déduit

$$\|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{\alpha} \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}, \quad \forall m = 1, 2, \ldots.$$

Ce qui signifie que la suite des solutions approchées (u_m) est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. Par suite, il existe une sous-suite (qu'on notera encore (u_m)) faiblement convergente dans $H_0^1(\Omega)$:

$$u_m \rightharpoonup u \in H_0^1(\Omega),$$

et puisque Ω est borné, l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte. Par conséquent, on peut extraire une sous-suite (qu'on notera encore (u_m)) telle que

$$u_m \to u \in L^2(\Omega).$$

Ce qui entraîne encore une fois l'existence d'une sous-suite (notée (u_m)) telle que

$$u_m \to u \text{ p.p. } x \in \Omega.$$

Soient $v \in H_0^1(\Omega)$ et v_m une suite de V_m vérifiant

$$v_m \to v \in H_0^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \nabla v_m \to \nabla v \text{ p.p. } x \in \Omega$$

et cela est possible (quitte à extraire une sous-suite). En utilisant (III.5), on obtient

$$\int_\Omega [A(\nabla u_m) - A(\nabla v_m)] \cdot (\nabla u_m - \nabla v_m)\, dx - \int_\Omega A(\nabla v_m) \cdot (\nabla v_m - \nabla u_m)\, dx = \langle f, u_m - v_m \rangle.$$

En utilisant la propriété de monotonie de la fonction A, on trouve

$$\int_\Omega A(\nabla v_m) \cdot (\nabla v_m - \nabla u_m)\, dx \geq \langle f, v_m - u_m \rangle, \quad \forall m = 1, 2, \ldots \qquad (III.8)$$

En prenant la limite dans (III.8), on obtient

$$\int_\Omega A(\nabla v) \cdot (\nabla v - \nabla u)\, dx \geq \langle f, v - u \rangle, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \qquad (III.9)$$

En posant $v = u + tw$ où w est arbitraire dans $H_0^1(\Omega)$ et $t \in \mathbb{R}$, cela nous conduit à partir de (III.9) la relation

$$\int_\Omega A(\nabla(u + tw)) \cdot \nabla w\, dx \geq \langle f, w \rangle, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega) \qquad (III.10)$$

En utilisant la continuité de A et en faisant tendre $t \to 0$ on aura

$$\int_\Omega A(\nabla u) \cdot \nabla w\, dx \geq \langle f, w \rangle, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega) \qquad (III.11)$$

Et en remplaçant w par $-w$ dans (III.11), on obtient

$$\int_\Omega A(\nabla u) \cdot \nabla w\, dx \leq \langle f, w \rangle, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega) \qquad (III.12)$$

De (III.11) et (III.12), on a

$$\int_\Omega A(\nabla u) \cdot \nabla w\, dx = \langle f, w \rangle, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega) \qquad (III.13)$$

III Méthodes du point fixe

Dans cette section , nous présentons une des méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles non linéaires, à savoir la méthode du point fixe. Plus précisément, nous présentons les quatres principaux théorèmes de cette théorie. Il s'agit des théorèmes de Banach (1922), de Brouwer (1910), de Schauder (1930) et de Leray-Schauder (1932). Nous donnerons aussi plusieurs applications de ces théorèmes dans la résolution des EDP non linéaires.

Définition. Soit f une application définie d'un ensemble X dans lui-même. On dit que $x \in X$ est un point fixe de f si et seulement si $f(x) = x$.

III.1 Théorème du point fixe de Banach

Le théorème du point fixe de Banach est un résultat fondamental dans la théorie du point fixe. C'est un principe qui garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante d'un espace de Banach dans lui-même.

Théorème III.4 Soit T un opérateur défini d'un espace de Banach X dans lui-même. Supposons qu'il existe une constante k vérifiant $0 < k < 1$ et telle que :

$$\forall x, y \in X, \|Tx - Ty\|_X \leq k\|x - y\|_X.$$

Alors, T admet un unique point fixe.

Démonstration. On montre d'abord l'existence d'un point fixe, puis son unicité.

1. **Existence :** Soient y un point quelconque de X et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X définie par

$$\begin{cases} u_0 = y, \\ u_{n+1} = Tu_n, \quad n \geq 0. \end{cases}$$

Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans X. Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $m < n$.

♣ En utilisant l'inégalité triangulaire, on trouve

$$\|u_m - u_n\|_X \leq \|u_m - u_{m+1}\|_X + \|u_{m+1} - u_{m+2}\|_X + \ldots + \|u_{n-1} - u_n\|_X.$$

Comme l'opérateur T est contractant, on obtient

$$\|u_m - u_{m+1}\|_X = \|Tu_{m-1} - Tu_m\|_X \leq k\|u_{m-1} - u_m\|_X.$$

En répétant cette inégalité m fois, on obtient

$$\|u_m - u_{m+1}\|_X \leq k^m\|u_1 - u_0\|_X.$$

On fait la même chose pour les autres termes, on trouve

$$\begin{aligned} \|u_m - u_n\|_X &\leq (k^m + k^{m+1} + k^{m+2} + \cdots + k^{n-1})\|u_1 - u_0\|_X \\ &\leq k^m\left(\frac{1 - k^{n-m}}{1 - k}\right)\|u_1 - u_0\|_X \\ &\leq \frac{k^m}{1 - k}\|u_1 - u_0\|_X, \quad \text{(puisque } |k| < 1). \end{aligned}$$

Par passage à la limite dans l'inégalité ci-dessus ($m \to +\infty$), on obtient

$$\lim_{m\to+\infty} \|u_m - u_n\|_X = 0.$$

Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans X qui est complet. Donc

$$\exists u \in X \text{ tel que } u_n \xrightarrow{n\to\infty} u \text{ dans } X.$$

Comme l'opérateur T est contractant, alors il est continu et donc

$$u = \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} T(u_{n-1}) = T\left(\lim_{n\to+\infty} u_{n-1}\right) = Tu.$$

2.**Unicité :** On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe $u_1, u_2 \in X$ tels que

$$Tu_1 = u_1 \quad \text{et} \quad Tu_2 = u_2.$$

Par suite,

$$\|u_1 - u_2\|_X = \|Tu_1 - Tu_2\|_X \leq K\|u_1 - u_2\|_X < \|u_1 - u_2\|_X \quad (\text{car } 0 < k < 1).$$

Par conséquent, le point fixe est unique.

♣ Application à la résolution d'une équation différentielle ordinaire semi-linéaire

Considérons le problème suivant : trouver $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ solution du problème (P)

$$\begin{cases} -u''(x) + g(u(x)) = f(x), & x \in]0,1[\\ u(1) = u(0) = 0 \end{cases}$$

où $f \in C^0([0,1])$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions données avec g lipschitzienne. La non-linéarité de ce problème est portée par g. On peut transformer ce problème comme suit : résoudre l'équation

$$Au = f \in C^0([0,1])$$

où

$$D_A = \{u \in C^2([0,1]) \mid u(0) = u(1) = 0\}$$

et

$$Au(x) = -u'(x) + g(u(x)), \quad x \in [0,1].$$

Soit $v \in C^0([0,1])$ une fonction fixée, mais choisie arbitrairement, et considérons le problème aux limites linéaire, trouver $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ solution de

$$(Q) \begin{cases} -u''(x) = f(x) - g(v(x)), & x \in]0,1[\\ u(1) = u(0) = 0 \end{cases}$$

Comme le problème homogène associé à (Q) n'admet que la solution triviale nulle, alors il existe une et une seule fonction G dite de Green telle que la solution u du problème (Q) s'écrit d'une manière unique sous la forme

$$u(t) = \int_0^1 G(x,t)F(t)\,dt, \quad t \in [0,1],$$

où $F(t) = f(t) - g(v(t))$, $t \in [0,1]$ et G est donnée par

$$G(x,t) = \begin{cases} (1-x)t, & \text{pour } 0 \leq t \leq x \leq 1 \\ (1-t)x, & \text{pour } 0 \leq x < t \leq 1. \end{cases}$$

Posons maintenant

$$Tv(x) = \int_0^1 G(x,t)(f(t) - g(v(t)))\, dt$$

avec $v \in C^0([0,1])$, alors T définit un opérateur de $C^0([0,1])$ dans lui-même. En fait, on a $Tv \in D_A$ (Tv est l'unique solution de (Q)) et chercher une solution du problème (P) revient à trouver un point fixe de T dans $C^0([0,1])$, i.e., trouver $u \in C^0([0,1])$ tel que $Tu = u$.

Lemme III.3 Soient a et b deux réels et G la fonction de Green associée au problème :

$$(Q_H) \begin{cases} -u'' = 0 & \text{sur }]a,b[\\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases}$$

Alors,

$$\int_a^b |G(x,t)|\, dt \leq \frac{(b-a)^2}{8}, \quad \forall x \in [a,b].$$

Démonstration Soient $x, t \in [a,b]$ et G la fonction de Green associée au problème (Q_H) définie par

$$G(x,t) = -\frac{1}{b-a} \begin{cases} (t-a)(x-b) & \text{pour } a \leq t \leq x \leq b \\ (x-a)(t-b) & \text{pour } a \leq x < t \leq b. \end{cases}$$

Montrons que

$$\int_a^b |G(x,t)|\, dt \leq \frac{(b-a)^2}{8}, \quad \forall x \in [a,b].$$

On a,

$$\begin{aligned} \int_a^b |G(x,t)|\, dt &= \int_a^x |G(x,t)|\, dt + \int_x^b |G(x,t)|\, dt \\ &= \frac{1}{b-a}\left(\int_a^x (t-a)(x-b)\, dt + \int_x^b (x-a)(t-b)\, dt\right) \\ &= \frac{1}{2}(x-a)(x-b). \end{aligned}$$

Posons $g(x) = \frac{1}{2}(x-a)(x-b)$, $\forall x \in [a,b]$ et montrons que $\max_{x\in[a,b]} |g(x)| = \frac{(b-a)^2}{8}$. On a

$$g'(x) = x - (\frac{a+b}{2})$$

et

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a+b}{2}.$$

g est une fonction croissante sur l'intervalle $[a, \frac{a+b}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{a+b}{2}, b]$, d'où

$$\max_{x\in[a,b]} |g(x)| = g\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

donc

$$\int_a^b |G(x,t)|\, dt \leq \frac{(b-a)^2}{8}, \quad \forall x \in [a,b].$$

Le problème (P) sera résolu uniquement si l'opérateur T possède un point fixe. Il suffit de montrer que T est une contraction sur $X = C^0([0,1])$, muni de la norme de la convergence uniforme.

Lemme III.4
Si la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie la condition de Lipschitz :

$$|g(s) - g(t)| \leq h|s-t|, \quad \forall s, t \in \mathbb{R} \text{ avec } 0 < h < 8.$$

Alors l'opérateur $T : X = C([0,1]) \to X$ défini par

$$Tv(x) = \int_0^1 G(x,t)(f(t) - g(v(t)))dt, \quad v \in X$$

est une contraction.

Démonstration. Soient u et v deux fonctions de X. On a

$$\|Tu - Tv\|_X = \sup_{x\in[0,1]} |Tu(x) - Tv(x)|,$$

et puisque

$$|Tu(x) - Tv(x)| \leq \int_0^1 G(x,t)|g(u(t)) - g(v(t))|dt,$$

comme g est lipschitzienne et $\int_0^1 G(x,t)dt \leq \frac{1}{8}$, alors

$$|Tu(x) - Tv(x)| \leq \frac{h}{8}\|u - v\|_X.$$

D'où

$$\|Tu - Tv\|_X \leq k\|u - v\|_X, \quad \forall u, v \in X$$

avec $0 < k = \frac{h}{8} < 1$. L'opérateur T est donc une contraction dans X.

D'après le Théorème (III.4), l'opérateur T possède un unique point fixe u dans X et comme $Tu \in D_A$, alors le problème (P) possède une solution unique.

III.2 Théorèmes du point fixe de Brouwer et de Schauder

Dans la section précédente, nous avons vu comment utiliser le théorème du point fixe de Banach pour trouver la solution classique d'un problème aux limites à une dimension ainsi que la solution faible d'un problème aux limites de dimension N, $N > 1$. Dans ce qui suit, nous donnerons des généralisations du principe de contraction de Banach. Il s'agit des théorèmes du point fixe de Brouwer et de Schauder. Ces théorèmes permettent de montrer l'existence de solutions faibles pour certains problèmes aux limites non linéaires, mais ne disent rien sur l'unicité de ces solutions.

III.2.1 Théorèmes du point fixe de Brouwer

Définition III.2.1 On dit qu'un espace topologique X possède la propriété du point fixe si toute application continue f de X dans lui-même possède un point fixe.

Exemple 1. Tout intervalle compact $[a, b] \subset \mathbb{R}$, muni de la topologie de sous-espace, possède la propriété du point fixe.

Notons par B^N la boule euclidienne unité fermée de $\mathbb{R}^N$. Nous allons donner un résultat dû à Brouwer dont on aura besoin pour la démonstration du théorème de Schauder.

Théorème III.2.1 (Brouwer, 1910)

1. B^N possède la propriété du point fixe.
2. Tout sous-ensemble convexe compact non vide C de $\mathbb{R}^N$ (ou de E, espace euclidien de dimension N) possède la propriété du point fixe.

Remarque III.2.1 Dans le cas où nous sommes dans $\mathbb{R}$, le théorème se démontre comme suit : Soit l'application continue $f : [a, b] \to [a, b]$. Montrons que f admet un point fixe. Pour cela,considérons l'application continue g suivante :

$$g(x) = f(x) - x, \quad \forall x \in [a, b].$$

On a,

$$g(a) = f(a) - a \geq 0 \quad \text{et} \quad g(b) = f(b) - b \leq 0$$

et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule en un point x_0, qui est un point fixe de f.

III.2.2 Théorème du point fixe de Schauder

Le théorème du point fixe de Schauder est un résultat qui prolonge celui de Brouwer à des espaces de dimension infinie. Il a été prouvé d'abord dans le cas des espaces de Banach et il est notamment utile dans la résolution des problèmes aux limites non linéaires.

Théorème III.2.2 (Schauder, 1930) Tout convexe C, non vide, compact dans un espace de Banach X possède la propriété du point fixe.

Démonstration Soient X un espace de Banach, C un compact convexe, non vide de X et $f : C \to C$ une application continue. Comme C est compact alors f est uniformément continue sur C. Autrement dit,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in C, \|x - y\| \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \epsilon.$$

De plus, il existe un ensemble fini de points $\{x_1, \ldots, x_p\} \subset C$ tel que les boules ouvertes de centre x_j, $j = 1, 2, \ldots, p$ et de rayon δ recouvrent C,

$$C \subset \bigcup_{1 \leq j \leq p} B(x_j, \delta)$$

.

Soient $L = \text{vect}(f(x_j))_{1 \leq j \leq p}$ et $C^* = C \cap L$. On a L et $C*$ sont de dimension finie. De plus, C^* est compact et convexe. On définit $\psi_j : X \to \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq p$ par

$$\psi_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \|x - x_j\| \geq \delta, \\ \frac{1 - \|x - x_j\|}{\delta} & \text{si } \|x - x_j\| < \delta. \end{cases}$$

On remarque que $\psi_j > 0$ sur $B(x_j, \delta)$ et nulle dehors. On a donc

$$\forall x \in C, \sum_{j=1}^{p} \psi_j(x) > 0.$$

Par suite, on définit ϕ_j, $j = 1, 2, \ldots, p$ des fonctions continues positives sur C par

$$\phi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum_{k=1}^{p} \psi_k(x)}, \quad x \in C.$$

Les fonctions ϕ_j, $j = 1, 2, \ldots, p$ vérifient bien

$$\sum_{j=1}^{p} \phi_j(x) = 1, \quad \forall x \in C.$$

Posons alors

$$g(x) = \sum_{j=1}^{p} \phi_j(x) f(x_j), \quad x \in C.$$

g est continue comme somme de fonctions continues et prend ses valeurs dans C^* (car $g(x)$ est un barycentre des $f(x_j)$). Considérons la restriction $g|_{C^*} : C^* \to C^*$. Par le théorème de Brouwer, g possède un point fixe $y \in C^*$. De plus,

$$f(y) - y = f(y) - g(y) = \sum_{j=1}^{p} \phi_j(y) f(y) - \sum_{j=1}^{p} \phi_j(y) f(x_j),$$

car $\sum_{j=1}^{p} \phi_j(y) = 1$. Par suite,$f(y) - y = \sum_{j=1}^{p} \phi_j(y)(f(y) - f(x_j))$.

Si $\phi_j(y) \neq 0$ alors $\|y - x_j\| < \delta$, donc $\|f(y) - f(x_j)\| < \epsilon$. Donc, on a pour tout $j = 1, 2, \ldots, p$,

$$\|\phi_j(y)(f(y) - f(x_j))\| < \phi_j(y)\epsilon.$$

D'où,

$$\|f(y) - y\| \leq \sum_{j=1}^{p} \|\phi_j(y)(f(y) - f(x_j))\| \leq \sum_{j=1}^{p} \phi_j(y)\epsilon = \epsilon.$$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, posons $\epsilon = 2^{-m}$, on peut toujours trouver un point $y_m \in C$ telle que :

$$\|f(y_m) - y_m\| \leq 2^{-m}.$$

Comme C est compact, alors on peut extraire de la suite $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(y_{m_k})_k$ qui converge vers un point y^* de C. Puisque f est continue, alors la suite $f(y_{m_k})$ converge vers $f(y^*)$. En utilisant l'inégalité triangulaire, il vient que

$$\|y^* - f(y^*)\| \leq \|y^* - y_{m_k}\| + \|y_{m_k} - f(y_{m_k})\| + \|f(y_{m_k}) - f(y^*)\|.$$

Les trois termes du membre de droite de cette inégalité tendent vers zéro quand k tend vers l'infini, par les convergences que nous venons de montrer. Par conséquent, $y^* = f(y^*)$ est un point fixe de f sur C.

III.3 Théorème du point fixe de Leray-Schauder

III.3.1 Quelques rappels

Soient E un espace topologique et A une partie de E. On dit que :

- A est **séquentiellement fermée** si et seulement si A contient les limites de toutes ses suites convergentes.
- A est **relativement séquentiellement compacte** si et seulement si de toute suite d'éléments de A on peut extraire une sous-suite convergente.
- A est séquentiellement compacte si et seulement si de toute suite d'éléments de A on peut extraire une sous-suite convergente dans A.

Si E est un espace métrique, alors

- A est fermée si et seulement si A est séquentiellement fermée.
- A est relativement compacte si et seulement si A est séquentiellement relativement compacte.
- A est compacte si et seulement si A est séquentiellement compacte.

Définition III.3.1 On dit d'un opérateur **continu** entre deux espaces de Banach X et Y qu'il est compact si l'image de toute partie bornée dans X est relativement compacte (c'est-à-dire, d'adhérence compacte) dans Y.

III.3.2 Théorème de Leray-Schauder : cas particulier

Théorème III.3.1 Soit T un opérateur compact d'un espace de Banach X dans lui-même. Supposons qu'il existe une constante $M > 0$ tel que

$$\forall x \in X, \forall \sigma \in [0,1], \quad x = \sigma T x \Rightarrow \|x\|_X < M. \tag{$III.3.1$}$$

Alors, T possède un point fixe.

Démonstration. Soit T^* l'opérateur défini comme suit :

$$T^* x = \begin{cases} Tx & \text{si } \|Tx\|_X < M, \\ M\frac{Tx}{\|Tx\|_X} & \text{si } \|Tx\|_X \geq M. \end{cases} \tag{$III.3.2$}$$

- La continuité de l'opérateur T^* découle de la continuité de T.
- Il est clair que T^* applique $\overline{B_M} = \overline{B}(0, M)$ (en fait X tout entier) dans lui-même.
- $T^*(\overline{B_M})$ est relativement compact :

Cela résulte du fait que $T(\overline{B_M})$ l'est aussi. En effet, soit $(y_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $T^*(\overline{B_M})$, alors il existe une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\overline{B_M}$, telle que

$$y_n = T^* x_n, \quad \forall n \geq 1.$$

On distingue deux cas :

1. Il existe une sous-suite $(a_j)_{j\geq 1}$ de $(x_n)_{n\geq 1}$ telle que $\|Ta_j\|_X < M, \quad \forall j \geq 1$.
   Dans ce cas, on a $T^* a_j = T a_j, \quad \forall j \in \mathbb{N}^*$ ($\|a_j\|_X < M, \quad \forall j \geq 1$ car c'est une sous-suite de $(x_n)_{n\geq 1}$ de $\overline{B_M}$) et comme T est compact, on peut donc extraire de $(Ta_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ (donc aussi de $(T^* a_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$) une sous-suite convergente.
2. Il existe une sous-suite $(b_j)_{j\geq 1}$ de $(x_n)_{n\geq 1}$ telle que $\|Tb_j\|_X \geq M, \quad \forall j \geq 1$.
   Dans ce second cas, la compacité de T permet d'extraire de $(Tb_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ une sous-suite convergente vers un élément $y \in X$. Notons cette sous-suite de la même manière, on a alors
   $$\|Tb_j\|_X \to \|y\|_X,$$
   de sorte que
   $$T^* b_j = \frac{M}{\|Tb_j\|_X} T b_j \to \frac{M}{\|y\|_X} y.$$

Autrement dit, on a pu extraire de la suite $(T^* b_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ une sous-suite convergente. Cela finit de démontrer que $T^*(\overline{B_M})$ est relativement compact. Nous sommes donc dans la situation suivante :

$$T^* : \overline{B_M} \to T^*(\overline{B_M}) \subset \overline{T^*(\overline{B_M})} \subset \overline{B_M}$$

Avec $\overline{B_M}$ est un convexe fermé et $\overline{T^*(\overline{B_M})}$ est compact. D'où, l'opérateur T^* possède un point fixe.

$$\exists x \in \overline{B_M} : T^* x = x,$$

qui est encore un point fixe de T. En effet,

- si $\|Tx\|_X < M$, on a alors
$$x = T^*x = Tx,$$
car $T^*x = Tx$, si $\|Tx\|_X < M$.
- Si $\|Tx\|_X \geq M$,
$$x = T^*x = \sigma Tx \quad \text{avec} \quad \sigma = \frac{M}{\|Tx\|_X}, \quad \sigma \in]0,1].$$
Or,
$$\|x\|_X = \|T^*x\|_X = M.$$
Cela contredit (III.3.1). Donc, $\|Tx\|_X < M$ et par suite $x = T^*x = Tx$.

III.3.3 Théorème de Leray-Schauder : cas général

Théorème III.3.2 Soient X un espace de Banach et T un opérateur compact de $X \times [0,1]$ dans X tel que
$$T(x,0) = 0, \quad \forall x \in X.$$
Supposons qu'il existe une constante $M > 0$ telle que
$$\forall (x,\sigma) \in X \times [0,1], \quad (x = T(x,\sigma) \Rightarrow \|x\|_X < M). \qquad (III.3.3)$$
Alors, l'opérateur T_1 de X dans lui-même, défini par
$$T_1(x) = T(x,1), \quad x \in X,$$
possède un point fixe.
Pour démontrer ce théorème, on aura besoin du lemme suivant .

Lemme III.3.1 Soit $B_M = B(0,M)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon $M > 0$ dans l'espace de Banach X. Soit T une application continue de $\overline{B_M}$ dans X telle que $T(\overline{B_M})$ soit relativement compacte et $T(\partial B_M) \subset B_M$. Alors T possède un point fixe.

Démonstration. On considère l'opérateur T^* défini par
$$T^*x = \begin{cases} Tx & \text{si } \|Tx\|_X < M, \\ M\frac{Tx}{\|Tx\|_X} & \text{si } \|Tx\|_X \geq M. \end{cases}$$
L'opérateur T^* est continu de $\overline{B_M}$ dans lui-même, comme $T(\overline{B_M})$ est relativement compact, $T^*(\overline{B_M})$ l'est aussi (voir la démonstration ci-dessus). l'opérateur T^* possède un point fixe, c'est-à-dire,
$$\exists x \in \overline{B_M} : T^*x = x.$$

- Si $\|Tx\|_X < M$, on a alors
$$x = T^*x = Tx,$$
c'est-à-dire, x est un point fixe de T.
- Si $\|Tx\|_X \geq M$,
$$x = T^*x = \frac{M}{\|Tx\|_X} Tx.$$
Or
$$\|x\|_X = \|T^*x\|_X = M,$$
de sorte que l'hypothèse $T(\partial B_M) \subset B_M$ implique $\|Tx\|_X < M$, ce qui est une contradiction.

Démonstration. (Du Théorème III.3.2)
Soient $\epsilon \in]0, M[$ et ξ_ϵ la fonction réelle définie sur $[0, M]$ par

$$\xi_\epsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < M - \epsilon, \\ \frac{M-t}{\epsilon} & \text{si } M - \epsilon \leq t \leq M. \end{cases}$$

On peut vérifier que ξ_ϵ est lipschitzienne :

$$|\xi_\epsilon(t) - \xi_\epsilon(s)| \leq \frac{1}{\epsilon}|t - s|, \quad \forall t, s \in [0, M].$$

En effet, si $s, t \in [0, M - \epsilon[$ on a

$$|\xi_\epsilon(t) - \xi_\epsilon(s)| = 0 \leq \frac{1}{\epsilon}|t - s|.$$

Si $s, t \in [M - \epsilon, M[$,

$$\xi_\epsilon(s) = \frac{M - s}{\epsilon}, \quad \xi_\epsilon(t) = \frac{M - t}{\epsilon}.$$

$$|\xi_\epsilon(t) - \xi_\epsilon(s)| = \frac{1}{\epsilon}|M - t - (M - s)| = \frac{1}{\epsilon}|s - t| = \frac{1}{\epsilon}|t - s|.$$

Il reste deux cas, le cas où $s \in [0, M - \epsilon[$ et $t \in [M - \epsilon, M]$ et le cas où $t \in [0, M - \epsilon[$ et $s \in [M - \epsilon, M]$. Il suffit d'étudier l'un d'eux car le second résulte du premier en échangeant les rôles joués par s et t. Soient $s \in [0, M - \epsilon[$ et $t \in [M - \epsilon, M]$, on a

$$\xi_\epsilon(s) = 1, \quad \xi_\epsilon(t) = \frac{M - t}{\epsilon}.$$

Donc

$$|\xi_\epsilon(t) - \xi_\epsilon(s)| = \left|\frac{M - t}{\epsilon} - 1\right| = \frac{1}{\epsilon}|M - t - \epsilon| = \frac{1}{\epsilon}(t - M + \epsilon) \quad \text{car } t \in [M - \epsilon, M].$$

Or $s < M - \epsilon$, donc $-M + \epsilon < -s$ et par suite $t - M + \epsilon < t - s$. Ainsi,

$$|\xi_\epsilon(t) - \xi_\epsilon(s)| \leq \frac{1}{\epsilon}|t - s|.$$

Considérons l'application T_ϵ^* définie par

$$T_\epsilon^* : \overline{B_M} \to X$$

$$x \mapsto T_\epsilon^* x = T(x, \xi_\epsilon(\|x\|_X)).$$

T_ϵ^* s'écrit $T_\epsilon^* = T \circ R_\epsilon$, avec

$$R_\epsilon : \overline{B_M} \to X \times [0,1]$$

$$x \mapsto R_\epsilon x = (x, \xi_\epsilon(\|x\|_X)).$$

Il est clair que l'application R_ϵ est continue (car ξ_ϵ l'est), donc T_ϵ^* est continue comme composée d'applications continues (T est continue car elle est compacte). Montrons que T_ϵ^* est compacte : L'image $T_\epsilon^*(\overline{B_M})$ est séquentiellement relativement compacte. En effet, soit $(z_n)_{n\geq 1}$ une suite de $T_\epsilon^*(\overline{B_M})$, donc

$$z_n = T_\epsilon^*(x_n) = T(x_n, \xi_\epsilon(\|x_n\|_X)), \quad x_n \in \overline{B_M}, \quad \forall n \geq 1.$$

Comme la suite $(x_n, \xi_\epsilon(\|x_n\|_X))_{n\geq 1}$ est bornée dans $X \times [0,1]$ et l'application

$$T : X \times [0,1] \to X,$$

est compacte, alors on peut extraire de $(z_n)_{n\geq 1}$ une sous-suite $(z_{n_i})_{i\geq 1}$ convergente dans X et comme $(z_{n_i})_{i\geq 1}$ est une suite d'éléments de $T_\epsilon^*(\overline{B_M})$ puisqu'elle s'écrit

$$z_{n_i} = T_\epsilon^*(x_{n_i}), \quad x_{n_i} \in \overline{B_M}, \quad i \geq 1,$$

cela montre que $T_\epsilon^*(\overline{B_M})$ est séquentiellement relativement compacte donc relativement compacte. On a aussi $T_\epsilon^*(\partial B_M) = \{0\}$, grâce à la condition exigeant $T(x,0) = 0, \quad \forall x \in X$. En effet, soit $z \in T_\epsilon^*(\partial B_M)$. Donc

$$z = T_\epsilon^* x = T(x, \xi_\epsilon(\|x\|_X)), \quad x \in \partial B_M.$$

On a $x \in \partial B_M$ ($\|x\|_X = M$), donc $\xi_\epsilon(M) = 0$. Par suite, $z = T(x,0)$ et donc $z = 0$. Ce qui montre que $T_\epsilon^*(\partial B_M) = \{0\}$. Grâce au **Lemme (III.3.1)**, T_ϵ^* possède au moins un point fixe $x(\epsilon)$ dans $\overline{B}_M$

$$T_\epsilon^* x(\epsilon) = x(\epsilon), \quad x(\epsilon) \in \overline{B}_M.$$

Prenons successivement $\epsilon = \frac{1}{k}$, $k = k_0, k_0+1, \ldots$ avec k_0 suffisamment grand pour avoir

$$\frac{1}{k_0} < M.$$

On obtient alors une suite de points $(x_k)_{k\geq k_0}$ de $\overline{B}_M$ telle que

$$x_k = x\left(\frac{1}{k}\right), \quad T_{\frac{1}{k}}^* x_k = T(x_k, \sigma_k) = x_k,$$

avec $\sigma_k = \xi_{\frac{1}{k}}(k\|x_k\|_X), \quad \forall k \geq k_0$. Comme la suite $((x_k, \sigma_k))_{k\geq k_0}$ est bornée dans $X \times [0,1]$ et T est compacte alors, il existe une sous-suite $(x_{k_i})_{i\geq 1}$ de $(x_k)_{k\geq 1}$ qui converge dans X vers un élément $x \in \overline{B}_M$

$$x_{k_i} \to x, \quad i \to \infty, \textbf{dans } X$$

$$\text{et donc} \quad \|x_{k_i}\|_X \to \|x_k\|_X, \quad i \to \infty$$

La suite $(\sigma_{k_i})_{i\geq 1}$ admet une sous-suite $(\sigma_{k_{0_i}})_{i\geq 1}$ convergente dans $\mathbb{R}$ vers un élément $\sigma \in [0,1]$ (car $\sigma_{k_i} \in [0,1]$ qui est compact)

$$\sigma_{k'_i} \to \sigma, \quad i \to \infty, \quad \text{dans } [0,1].$$

Donc

$$(x_{k'_i}, \sigma_{k'_i}) \to (x, \sigma), \quad i \to \infty, \quad \text{dans } X \times [0,1].$$

Compte tenu de la continuité de T (du fait qu'elle est compacte), on a

$$x_{k'_i} = T(x_{k'_i}, \sigma_{k'_i}) \to T(x, \sigma), \quad i \to \infty.$$

On a aussi

$$x_{k'_i} \to x, \quad i \to \infty.$$

Grâce à l'unicité de la limite de la suite convergente $(x_{k'_i})_{i\geq 1}$, on a

$$x = T(x, \sigma).$$

Si $\sigma = 1$, le théorème est démontré. Si $\sigma < 1$, on a $\sigma_{k_{0_i}} < 1$, $\forall i \geq i_0$. Donc, grâce à la définition de ξ_ϵ on a

$$M - \frac{1}{k'_i} \leq \|x_{k'_i}\|_X, \quad \forall k'_i \geq k'_{i_0} \qquad (III.3.4)$$

car

$$\sigma_{k'_i} = \xi_{\frac{1}{k'_i}}(\|x_{k'_i}\|_X) < 1$$

ce qui implique que $\|x_{k'_i}\|_X \geq M - \frac{1}{k'_i}$. D'où $\|x\|_X = M$. En effet, $\|x\|_X \leq M$ découle du fait que $x \in \overline{B_M}$ et $\|x\|_X \geq M$ s'obtient par passage à la limite dans (III.3.4). Donc on a

$$x = T(x, \sigma) \quad \text{et} \quad \|x\|_X = M,$$

ce qui contredit l'hypothèse (III.3.1) du théorème de Leray-Schauder. Donc, le cas $\sigma < 1$ est exclu et par conséquent $\sigma = 1$ et $T(x, 1) = x$. Ce qui prouve que $T_1 : X \to X$ possède un point fixe.

CHAPITRE IV

Applications

Nous allons maintenant aborder la résolution de quelques équations aux dérivées partielles elliptiques de second ordre.

I *Problèmes aux limites elliptiques avec les conditions de Dirichlet*

Le cas homogène

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné avec $\Gamma = \partial\Omega$ sa frontière supposée régulière .
♣ On considère le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \qquad (IV.1.1)$$

Où

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \text{ le Laplacien de u}$$

et $f \in L^2(\Omega)$ est une fonction donnée.
Multiplions l'équation (IV.1.1) par $v \in H_0^1(\Omega)$ et intégrons sur Ω, on obtient

$$-\int_\Omega \Delta u v \, dx = \int_\Omega f v \, dx.$$

D'après la formule de Green, on a

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma = \int_\Omega f v \, dx.$$

Puisque $v \in H_0^1(\Omega)$, donc

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma = 0,$$

alors

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx.$$

La résolution du problème (IV.1.1) est équivalente à la résolution du problème variationnelle suivant :

$$\text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } a(u,v) = l(v)\ ,\forall v \in H_0^1(\Omega),$$

où

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx, \text{est une forme bilinéaire}$$

et

$$l(v) = \int_\Omega fv\ dx, \text{est une forme linéaire.}$$

En vérifiant les hypothèses du lemme de Lax-Milgram.

♣ **La continuité de a**

Pour tout $u, v \in H_0^1(\Omega)$, on a :

$$|a(u,v)| = \left| \int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx \right|.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient :

$$|a(u,v)| \leq \int_\Omega |\nabla u||\nabla v|\, dx \leq \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\nabla v|^2\, dx \right)^{1/2}.$$

Par définition de la norme dans $H_0^1(\Omega)$, on a :

$$|a(u,v)| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Donc, a est continue dans $H_0^1(\Omega)$.

♣ **La coercivité de a**

Pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, on a :

$$a(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

D'après l'inégalité de Poincaré, il existe une constante $\alpha > 0$ telle que :

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \alpha \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Donc,

$$a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Ainsi, a est coercive.

♣ **La continuité de $\langle l, . \rangle$**

Pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on a :

$$|l(v)| = \left| \int_\Omega fv\, dx \right|.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$|l(v)| \leq \int_\Omega |f||v|\,dx \leq \left(\int_\Omega |f|^2\,dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Par l'inégalité de Poincaré, on a :

$$|l(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Notons $c = \|f\|_{L^2(\Omega)}$**, alors :**

$$|l(v)| \leq c\|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Alors, $\langle l, .\rangle$ **est continue dans** $H_0^1(\Omega)$**. Les hypothèses du lemme de Lax-Milgram sont vérifiées. Ainsi, le problème (IV.1.1) admet une solution unique** $u \in H_0^1(\Omega)$**.**

Le cas non-homogène

Considérons maintenant le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f \textbf{ dans } \Omega, \\ u = g \textbf{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{IV.1.2}$$

Soient $f, g \in L^2(\Omega)$ **donnés.**
Posons $u = w + h$**, où** $h \in H^2(\Omega)$ **et** $h|_{\partial\Omega} = g$**; donc le problème (IV.1.2) se ramène à un problème de Dirichlet homogène pour la nouvelle variable** w **:**
En effet

$$\begin{aligned} u &= w + h \\ \implies u|_{\partial\Omega} &= w|_{\partial\Omega} + h|_{\partial\Omega} \\ \implies g &= w|_{\partial\Omega} + g \\ \implies w|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned}$$

donc, on résout le problème

$$\begin{cases} -\Delta w = f + \Delta h \quad \textbf{dans } \Omega, \\ w = 0 \quad \textbf{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{IV.1.3}$$

avec $f + \Delta h \in L^2(\Omega)$**.**

Multiplions l'équation du problème (IV.1.3) par $v \in H_0^1(\Omega)$ **et intégrons sur** Ω**, on obtient**

$$-\int_\Omega \Delta w\, v\,dx = \int_\Omega (f + \Delta h)\, v\,dx;$$

d'après la formule de Green, on a

$$\int_\Omega \nabla w \nabla v\,dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial n} v\,d\sigma = \int_\Omega f\,v\,dx - \int_\Omega \nabla h \nabla v\,dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial h}{\partial n} v\,d\sigma$$

$$\Longrightarrow \int_\Omega \nabla w \nabla v \, dx = \int_\Omega f \, v \, dx - \int_\Omega \nabla h \nabla v \, dx.$$

La résolution du problème (IV.1.3) est équivalente à la résolution du problème variationnelle

$$\textbf{Trouver } w \in H_0^1(\Omega) \textbf{ telle que } a(w,v) = l(v); \;\; \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

où

$$a(w,v) = \int_\Omega \nabla w \nabla v \, dx, \quad l(v) = \int_\Omega f \, v \, dx - \int_\Omega \nabla h \nabla v \, dx.$$

En vérifiant les hypothèses du lemme de Lax-Milgram :

♣ **La continuité de a**

$$|a(w,v)| = \left| \int_\Omega \nabla w \nabla v \, dx \right|$$
$$\leq \int_\Omega |\nabla w| |\nabla v| \, dx$$

Ainsi,d'après Cauchy-Schwarz,on a :

$$\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|w\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

donc a est continue dans $H_0^1(\Omega)$.

♣ **La coercivité de a**

$$a(w,w) = \int_\Omega |\nabla w|^2 \, dx \geq \alpha \|w\|^2_{H_0^1(\Omega)} \quad \textbf{(d'après Poincaré)},$$

alors a est coercive dans $H_0^1(\Omega)$.

♣ **La continuité de $\langle l, . \rangle$**

$$|l(v)| = \left| \int_\Omega f v \, dx - \int_\Omega \nabla h \nabla v \, dx \right|$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla h\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \|h\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$
$$\leq \max(\|f\|_{L^2(\Omega)}, \|h\|_{H^1(\Omega)}) \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$
$$\leq c \|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

où $c = \max(\|f\|_{L^2(\Omega)}, \|h\|_{H^1(\Omega)})$;

donc $\langle l, . \rangle$ est continue dans $H_0^1(\Omega)$.

Par conséquent,les hypothèses du lemme de Lax-Milgram sont vérifiées, donc le problème (IV.1.3) admet une solution unique $w \in H_0^1(\Omega)$; d'où le problème (IV.1.2) admet une solution unique $u \in H^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

II *Problèmes aux limites elliptiques avec les conditions de Neumann*

Le cas homogène

♣ **Soit à résoudre le problème suivant**

$$\begin{cases} -\Delta u = f \quad \textbf{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \textbf{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{IV.2.1}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ est une fonction donnée.

Multiplions l'équation du problème (IV.2.1) par $v \in H^1(\Omega)$ et intégrons sur Ω, on obtient

$$-\int_\Omega \Delta u \, v \, dx = \int_\Omega f \, v \, dx;$$

d'après la formule de Green, on a

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma = \int_\Omega f \, v \, dx$$

$$\Longrightarrow \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx = \int_\Omega f \, v \, dx.$$

le problème (IV.2.1) équivalent à

$$\textbf{Trouver } u \in H^1(\Omega) \textbf{ tel que } a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Où

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx$$

Et

$$l(v) = \int_\Omega f v \, dx$$

En vérifiant les hypothèses du lemme de Lax-Milgram, on obtient que $a(u,v)$ est continue et coercive dans $H^1(\Omega)$.
$\langle l, . \rangle$ est continue dans $H^1(\Omega)$.
Alors le problème (IV.2.1) admet une solution faible unique $u \in H^1(\Omega)$.

Le cas non homogène

Soit à résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f \quad \textbf{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g \qquad \textbf{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{IV.2.2}$$

tel que $f, g \in L^2(\Omega)$ sont des fonctions données.

Multiplions l'équation du problème (IV.2.2) par $v \in H^1(\Omega)$ et intégrons sur Ω, on obtient

$$-\int_\Omega \Delta u v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$$

D'après la formule de Green, on a

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma = \int_\Omega f v \, dx$$

$$\iff \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} g v d\sigma = \int_\Omega f v \, dx$$
$$\iff \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx + \int_{\partial\Omega} g v \, d\sigma$$

Le problème (IV.2.2) est donc équivalent à

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que $a(u, v) = l(v)$ pour tout $v \in H^1(\Omega)$

Où

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx$$

Et

$$l(v) = \int_\Omega f v \, dx + \int_{\partial\Omega} g v \, d\sigma$$

En vérifiant les hypothèses du lemme de Lax-Milgram :

♣ **La continuité de a**

$$|a(u, v)| = \left| \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx \right|$$
$$\leq \int_\Omega |\nabla u| |\nabla v| \, dx$$

D'après Cauchy-Schwartz

$$\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$
$$\leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Donc a est continue.

♣ **La coercivité de a**

$$a(u, u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \geq \alpha \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \textbf{(d'après l'inégalité de Poincaré)},$$

Donc a est coercive.

♣ **La continuité de $\langle l, . \rangle$**

$$\begin{aligned}|l(v)| &= \left|\int_\Omega fv\,dx + \int_\Gamma gv\,ds\right| \\ &\leq \int_\Omega |f||v|\,dx + \int_\Gamma |g||v|\,ds \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)}\|v\|_{L^2(\Gamma)} \quad \textbf{(D'après Cauchy-Schwartz)}\end{aligned}$$

D'après le théorème de Trace

$$|l(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + c\|g\|_{L^2(\Gamma)}\|v\|_{H^1(\Omega)}, \textbf{telle que } c > 0.$$

$$\Longrightarrow |l(v)| \leq \max\left(\|f\|_{L^2(\Omega)}, c\|g\|_{L^2(\Gamma)}\right)\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq k\|v\|_{H^1(\Omega)},$$

Où $k = \max\left(\|f\|_{L^2(\Omega)}, c\|g\|_{L^2(\Gamma)}\right)$**.**
Alors

$$|l(v)| \leq k\|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Donc $\langle l, .\rangle$ **est continue.**

D'après le lemme de Lax-Milgram, le problème (IV.2.2)admet une solution faible unique $u \in H^1(\Omega)$**.**

III Applications des méthodes monotones

Premières applications :

1. **Soit** Ω **un ouvert borné de** $\mathbb{R}^N$**. Comme l'opérateur** $A = -\Delta$ **(le laplacien) est hémicontinu de** $H_0^1(\Omega)$ **dans** $H^{-1}(\Omega)$**, fortement monotone, borné (prendre** $p = 2$ **dans un exemple précédent) et coercif (grâce à la forte monotonie), donc** A **est un isomorphisme de** $H_0^1(\Omega)$ **dans** $H^{-1}(\Omega)$ **et ceci grâce au théorème Mintycar** $H_0^1(\Omega)$ **est un espace de Banach réflexif et séparable. Donc le problème**

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ -\Delta u = f \textbf{ dans } \Omega \end{cases}$$

   admet une seule solution pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$**.**

2. **Soit** Ω **un ouvert borné de** $\mathbb{R}^N$**, on veut montrer l'existence d'une solution faible au problème :**

$$\begin{cases} A(u) = -\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f, \textbf{ sur } \Omega, \\ u = 0, \qquad \textbf{sur } \Gamma = \partial\Omega, \end{cases} \qquad (IV.3.1)$$

   où $1 < p < +\infty$ **et** $f \in W^{-1,p'}(\Omega) = (W_0^{1,p}(\Omega))'$ **avec** $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$**. Pour vérifier les conditions du Théorème III.1, on considère l'espace de Banach** $V = W_0^{1,p}(\Omega)$ **muni de la norme**

$$\|v\| = \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}, \forall v \in V.$$

Notons que la bornitude et la monotonie de l'opérateur A ont été démontrées précédemment. Donc, il nous reste à vérifier que A est coercif et hémicontinu.

♣ **<u>Coercivité de A</u> : Soit $v \in V$, on a**

$$\langle A(v), v\rangle = \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^p dx = \|v\|_V^p.$$

Ce qui donne

$$\frac{\langle A(v), v\rangle}{\|v\|_V} = \|v\|_V^{p-1} \to +\infty, \text{ lorsque } \|v\|_V \to +\infty, \text{ car } p > 1.$$

Donc A est coercif.

♣ **<u>Hémicontinuité de A</u> : Soient $u, v, w \in V$, on définit**

$$g(t) = \langle A(u + tv), w\rangle = \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \left|\frac{\partial (u+tv)}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial (u+tv)}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_i}\, dx.$$

Pour montrer que A est hémicontinu, on montre que la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue. Prenons une suite (t_k) de $\mathbb{R}$ telle que $t_k \to t$, $t \in \mathbb{R}$ et on écrit

$$g(t_k) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \left|\frac{\partial (u+t_k v)}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial (u+t_k v)}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_i}\, dx.$$

En utilisant le fait que la fonction $s \mapsto |s|^{p-2}s$ est continue pour tout $p > 1$, on arrive à

$$\left|\frac{\partial (u+t_k v)}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial (u+t_k v)}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_i} \to \left|\frac{\partial (u+tv)}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial (u+tv)}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_i}$$

et cela pour tout $x \in \Omega$ et pour tout $i = 1, 2, \ldots, N$. Il existe une constante $m > 0$ telle que $|t_k| \leq m$ pour tout k car (t_k) est convergente. Par conséquent,

$$\left|\frac{\partial (u+t_k v)}{\partial x_i}\right|^{p-1} \left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right| \leq C\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-1}\left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right| + \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p-1}\left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|\right). \quad (IV.3.2)$$

Puisque le membre du côté droit de $(IV.3.2)$ est une fonction de l'espace $L^1(\Omega)$, alors on peut appliquer maintenant le théorème de convergence dominée de Lebesgue. On en déduit que $g(t_k) \to g(t)$. Ce qui montre que g est une fonction continue. Par suite, l'opérateur A est hémicontinu.

En appliquant le Théorème III.1, on déduit que le problème $(IV.3.1)$ admet une solution faible $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

♣ **<u>Unicité</u> : L'unicité de la solution du problème $(IV.3.1)$ résulte du fait que l'opérateur A est strictement monotone.**

Conclusion

Ce mémoire a montré que les méthodes variationnelles et monotones sont essentielles pour résoudre les équations aux dérivées partielles de type elliptique.
Les méthodes variationnelles, appuyées par les théorèmes de Lax-Milgram et Stampacchia, permettent d'établir l'existence et l'unicité des solutions de manière rigoureuse.
Les méthodes monotones, avec des outils comme les théorèmes de Minty et de point fixe, offrent des approches complémentaires pour traiter ces équations.
Les applications aux problèmes aux limites de Dirichlet et Neumann illustrent la flexibilité et l'efficacité de ces méthodes.
En conclusion, ce travail souligne la puissance des techniques mathématiques avancées pour résoudre des problèmes complexes en mathématiques et physique, confirmant leur importance pour la recherche et les applications pratiques.

En guise de perspectives, Nous comptons considerer :

- **Des problèmes avec perte de compacité .**
- **Des problèmes faisant intervenir des opérateurs hyperbolique et parabolique .**
- **Des méthodes d'approximations à l'instar des méthodes numériques .**
- **Des méthodes de points critiques.**

Bibliographie

[1] G.A. Afrouzi, A. Hadjian, S. Shakeri, and M. Mirzapour, ***Existence results for a quasilinear boundary value problem investigated via degree theory***, Journal of Nonlinear Analysis and Optimization, Vol. 3, No. 1, (2012), 25-32.

[2] H. Brezis, ***Analyse fonctionelle. Théorie et application***, Editions Masson, Paris, 1983.

[3] R. Courant and D. Hilbert, ***Methoden der mathematischen physik. Zweiter Band***, Springer, Berlin, 1937.

[4] J. Droniou, ***Degrés topologiques et applications***, UMR CNRS 5149, Université Montpellier II, France, 20/06/2006.

[5] T. Gallouët, R. Herbin, ***Équations aux dérivées partielles***, Université Aix Marseille, 10 novembre 2016.

[6] L. Garding, ***Cauchy problem for hyperbolic equations***, University of Chicago, Lecture notes, 1957.

[7] L. Garding, ***Dirichlet's problem for elliptic partial differential equations***, Math. Ssand., t.1, 1953.

[8] O. Kavian, ***Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques***, Springer-Verlag, Paris, 1993.

[9] J. Leray and J. Schauder, ***Topologie et équations fonctionnelles***, Ann. scien, de l'E : S. 3e série, tome 51, 1934.

[10] J. L. Lions, ***Problèmes aux limites, II***, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 1953.