

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université A.MIRA-BEJAIA



Faculté de Technologie  
Département de Génie Mécanique  
Laboratoire de Physique Théorique

**THÈSE**  
**EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE**  
**DOCTORAT**

**Domaine : Sciences et Technologies, Filière : Génie Mécanique**  
**Spécialité : Mécanique et Ingénierie**

**Présentée par**  
**ADNANI Massinissa**

*Thème*

**Convection mixte instationnaire dans une cavité : bifurcation et dimensionnement des attracteurs**

**Soutenue le : Jeudi 10 Mai 2018**

**Devant le Jury composé de :**

**Nom et Prénom**

**Grade**

<b>Mr. SADAOUI Djamel</b>	Professeur	Univ. de Bejaia	Président
<b>Mr. MEZIANI Bachir</b>	Professeur	Univ. de Bejaia	Rapporteur
<b>Mr. NAIT BOUDA Faïçal</b>	MCA	Univ. de Bejaia	Examineur
<b>Mr. NEMOUCHI Zoubir</b>	Professeur	Univ. de Constantine	Examineur
<b>Mr. BENKOUSSAS Bouzid</b>	Professeur	ENP. Alger	Examineur

**Année Universitaire : 2017/2018**

## *Remerciements*

*C'est avec une certaine émotion et beaucoup de sincérité que je voudrais remercier toutes les personnes ayant soutenu et apprécié mon travail.*

*En premier lieu, je remercie chaleureusement, mon directeur de thèse le professeur **MEZIANI Bachir** pour m'avoir accueilli dans son équipe, pour m'avoir offert les conditions favorables et pour m'avoir parfaitement guidé tout le long de la réalisation de ce travail.*

*Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à Monsieur **SADAOUI Djamel** pour avoir accepté de présider le jury d'examen de cette thèse. Je remercie également les professeurs **NAIT BOUDA Faiçal**, **NEMOUCHI Zoubir** et **BENKOUSSAS Bouzid** pour avoir bien accepté de participer à mon jury et pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre travail de recherche, malgré leurs multiples occupations.*

*Mes plus profonds remerciements vont à mes parents. Tout au long de mon cursus, ils m'ont toujours soutenu, encouragé et aidé. Ils ont su me donner toutes les chances pour réussir. Qu'ils trouvent, dans la réalisation de ce travail, l'aboutissement de leurs efforts ainsi que l'expression de ma plus affectueuse gratitude. Je remercie tous les membres de ma famille et en particulier ma grande mère, mon frère Adnane et ma belle-sœur Mina.*

*Mes vifs remerciements vont aussi à tous mes amis, et tous les membres du laboratoire de Physique Théorique et ceux de Mécanique Energétique pour leurs aides, leurs sympathies et leurs soutiens.*

*Enfin, je dis : louange à Dieu, Seigneur de l'univers, qui m'a donné la force, le courage, et l'endurance jusqu'à l'accomplissement de ce travail.*

## Dédicaces

A mes chers parents.

Ma grande mère ima fafa.

Ma future femme Fatima.

Ma sœur Hawa.

Mes frères ADNANE ET Karim.

A toutes ma grande famille.

A tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour la réalisation de ce travail.

A la mémoire de mon grand-père Mouloud (que dieu t'accueille dans son vaste paradis).

A la mémoire de mes tantes qui sont disparues très tôt, on ne vous oubliera jamais.

ADNANI MASSINISSA

## Table des matières

Remerciements .....	i
Dédicaces .....	ii
Table des matières .....	iii
Table des figures .....	vi
Liste des tableaux .....	ix
NOMENCLATURES .....	x
Introduction Générale.....	1

### Chapitre 1

1 Introduction au chaos dans les systèmes thermiques .....	3
1.1 Introduction .....	3
1.2 Historique .....	3
1.3 Systèmes dynamique .....	5
1.4 Notion de bifurcation.....	6
1.4.1 Concept de bifurcation.....	6
1.4.2 Bifurcation de Hopf.....	7
1.5 Caractérisation des régimes dynamiques .....	8
1.5.1 Espace de phase .....	8
1.5.2 Notion d'attracteur et d'attracteur étrange .....	9
1.5.3 Exposant de Lyapunov .....	10
1.6 But et intérêt du travail .....	11
1.7 Revue bibliographiques .....	11
1.7.1 Travaux antérieures sur la convection naturelle.....	11
1.7.2 Travaux antérieures sur la convection mixte.....	14
1.7.3 Travaux antérieures sur la route vers le chaos emprunté par la convection naturelle et la convection mixte .....	19
1.8 Conclusion.....	24

### Chapitre 2

2 Modélisation mathématique et position du problème .....	26
2.1 Introduction .....	26
2.2 Description du problème .....	26
2.3 Hypothèse simplificatrices.....	27
2.3.1 Approximation de Boussinesq .....	28

2.4	Mise en équations .....	28
2.4.1	Equation de continuité .....	28
2.4.2	Equation de Naviers-Stokes .....	29
2.4.3	Equation d'énergie.....	29
2.4.4	Variables adimensionnelles .....	29
2.4.5	Equations adimensionnelles.....	31
2.4.5.1	L'équation de continuité .....	31
2.4.5.2	Equation de quantité de mouvement .....	31
2.4.5.3	Equation d'énergie.....	32
2.5	Conditions aux limites .....	32
2.6	Transfert de chaleur .....	33
2.7	Méthode numérique .....	34
2.8	Conclusion.....	34

### Chapitre 3

3	Approche numérique pour l'étude de la convection naturelle stationnaire dans une cavité carrée	36
3.1	Introduction .....	36
3.2	Etude du maillage .....	36
3.3	Validation numérique et expérimentale .....	37
3.4	Résultats et discussion .....	39
3.4.1	Champ d'écoulement .....	40
3.4.1.1	Champ d'écoulement donné par les lignes du courant .....	40
3.4.1.2	Champ d'écoulement donné par les profils de vitesses .....	44
3.4.2	Transfert de chaleur .....	48
3.4.2.1	Champ thermique donné par les lignes isothermes .....	48
3.4.2.2	Transfert de chaleur donné par le nombre de Nusselt Locale.....	53
3.4.2.3	Transfert de chaleur donné par le nombre de Nusselt moyen.....	55
3.5	Conclusion.....	57

### Chapitre 4

4	Approche numérique pour l'étude de la convection mixte dans une carrée, transition vers le chaos	59
4.1	Introduction .....	59
4.2	Validation du maillage et du pas de temps.....	59
4.3	Validation du code de calcul.....	60
4.4	Résultats et discussions .....	62
4.4.1	Signale temporel de Nusselt moyen.....	62
4.4.2	Régime laminaire donné par Nusselt moyen et ligne isothermes. ....	67

4.4.3	Projection dans l'espace des phases de la température moyenne, cas1 et cas3 .....	70
4.4.4	Projection dans l'espace des phases de la température moyenne, cas2. ....	76
4.4.5	Champ thermique donné par les lignes isothermes .....	81
4.4.6	Champ d'écoulement donné par les lignes du courant .....	85
4.4.7	Sensibilité aux conditions initiales.....	89
4.4.8	Exposant de Lyapunov .....	93
4.5	Conclusion.....	94
Conclusion générale .....		96
Références Bibliographiques .....		98
Annexes.....		105

## Table des figures

<b>Figure 1-1.</b> Diagramme de bifurcation [7].	6
<b>Figure 1-2.</b> Bifurcation de Hopf, (a) super critique, (b) sous critique [6].	8
<b>Figure 1-3.</b> Point fixe d'un pendule simple (a), cycle limite de ver der Pol(b), attracteur étrange de Lorenz (c).	9
<b>Figure 2-1.</b> Géométrie du problème physique considéré.	27
<b>Figure 3-1.</b> Le domaine numérique avec un maillage de 121X121 nœuds.	37
<b>Figure 3-2.</b> Comparaison entre nos résultats avec ceux de la référence.	38
<b>Figure 3-3.</b> (a) comparaison des lignes isothermes, (a) résultats de M. Muthamilselvan et al [27], (b) nos résultats.	39
<b>Figure 3-4.</b> Lignes du courant en fonction de Pr et de Ra, Cas1.	41
<b>Figure 3-5.</b> Lignes du courant en fonction de Pr et de Ra, Cas2.	42
<b>Figure 3-6.</b> Lignes du courant en fonction de Pr et de Ra, Cas3.	43
<b>Figure 3-7.</b> Profil de vitesse axial U(Y) à X = 0.5, Cas1.	45
<b>Figure 3-8.</b> Profil de vitesse axial U(Y) à X = 0.5, Cas2.	46
<b>Figure 3-9.</b> Profil de vitesse axial U(Y) à X = 0.5, Cas3.	47
<b>Figure 3-10.</b> Lignes isothermes en fonction de Pr et de Ra pour le Cas1.	49
<b>Figure 3-11.</b> Lignes isothermes en fonction de Pr et de Ra pour le Cas2.	50
<b>Figure 3-12.</b> Lignes isothermes en fonction de Pr et de Ra pour le Cas3.	51
<b>Figure 3-13.</b> Profil du nombre de Nusselt local le long des parois chaudes, Cas1.	52
<b>Figure 3-14.</b> Profil du nombre de Nusselt local le long des parois chaudes, Cas2.	53
<b>Figure 3-15.</b> Profil du nombre de Nusselt local le long des parois chaudes, Cas3.	54
<b>Figure 3-16.</b> Nusselt moyen le long des parois chaudes pour les trois cas considérés.	56
<b>Figure 3-17.</b> Nusselt moyen en fonction du Ra pour les cas considérés, Pr = 0.71.	57
<b>Figure 4-1.</b> (a)Teste de maillage, (b) teste de pas du temps sur la solution numérique.	60
<b>Figure 4-2.</b> (a) résultats de T. S. Cheng [46], (b) nos résultats, Ri = 1, Pr = 0.71.	61
<b>Figure 4-3.</b> (a) résultats de S. Laouar et al [91], (b) nos résultats, Ra = 10 <sup>6</sup> , Pr = 0.71.	61
<b>Figure 4-4.</b> Evolution temporelle de nombre de Nusselt moyen le long des parois chaudes, premières bifurcations.	63
<b>Figure 4-5.</b> Evolution temporelle de nombre de Nusselt moyen le long des parois chaudes, Ri = 10 régime périodique.	63
<b>Figure 4-6.</b> Evolution temporelle de nombre de Nusselt moyen le long des parois chaudes, Ri = 15 régime quasi périodique, Ri = 16 régime chaotique.	64

<b>Figure 4-7.</b> Evolution temporelle de nombre de Nusselt moyen le long des parois chaudes, phénomène de relaminarisation. ....	64
<b>Figure 4-8.</b> Evolution temporelle de nombre de Nusselt moyen le long des parois chaudes, $Ri = 120$ régime quasi périodique, (a) cas1, (b) cas3.....	65
<b>Figure 4-9.</b> Evolution temporelle de nombre de Nusselt moyen le long des parois chaudes, $Ri = 140$ régime chaotique, (a) cas1, (b) cas3. ....	65
<b>Figure 4-10.</b> Evolution temporelle de nombre de Nusselt moyen le long des parois chaudes, $Ri = 6.41$ régime périodique, $Ri = 6.66$ régime chaotique, Cas2. ....	66
<b>Figure 4-11.</b> Evolution temporelle de nombre de Nusselt moyen le long des parois chaudes, régime périodique phénomène de relaminarisation, Cas2. ....	66
<b>Figure 4-12.</b> Evolution temporelle de nombre de Nusselt moyen le long des parois chaudes, régime chaotique, Cas2. ....	67
<b>Figure 4-13.</b> Evolution temporelle de Nusselt moyen et de lignes isothermes, Cas1. ....	68
<b>Figure 4-14.</b> Evolution temporelle de Nusselt moyen et de lignes isothermes, Cas2. ....	69
<b>Figure 4-15.</b> Evolution temporelle de Nusselt moyen et de lignes isothermes, Cas3. ....	70
<b>Figure 4-16.</b> Attracteur point limite, (a) Cas1, (b) cas 3. ....	71
<b>Figure 4-17.</b> Attracteur cycle limite, transition régime périodique vers un régime quasi périodique, Cas1. ....	72
<b>Figure 4-18.</b> Attracteur cycle limite, transition régime périodique vers un régime quasi périodique, Cas3. ....	73
<b>Figure 4-19.</b> Attracteur étrange, (a) Cas1, (b) cas 3. ....	74
<b>Figure 4-20.</b> Phénomène de relaminarisation, (a) régime quasi-périodique, (b) régime périodique, (c) régime quasi-périodique, (f) régime chaotique. Cas1. ....	75
<b>Figure 4-21.</b> Phénomène de relaminarisation, (a) régime quasi-périodique, (b) régime périodique, (c) régime quasi-périodique, (f) régime chaotique. Cas3. ....	76
<b>Figure 4-22.</b> Bifurcation de Hopf, Cas2.....	77
<b>Figure 4-23.</b> Attracteur cycle limite, transition régime périodique vers un régime quasi périodique, Cas2. ....	78
<b>Figure 4-24.</b> Attracteur étrange, Cas2.....	79
<b>Figure 4-25.</b> Attracteur cycle limite, transition régime périodique vers un régime quasi périodique, Cas2. ....	80
<b>Figure 4-26.</b> Attracteur étrange, Cas2.....	81
<b>Figure 4-27.</b> Lignes isothermes, régime périodique, $Ri = 10$ , Cas1. ....	82
<b>Figure 4-28.</b> Lignes isothermes, régime chaotique, $Ri = 30$ , Cas1.....	82
<b>Figure 4-29.</b> Lignes isothermes, régime périodique, $Ri = 10$ , Cas2. ....	83
<b>Figure 4-30.</b> Lignes isothermes, régime chaotique, $Ri = 100$ , Cas2.....	83
<b>Figure 4-31.</b> Lignes isothermes, régime périodique, $Ri = 10$ , Cas3. ....	84

<b>Figure 4-32.</b> Lignes isothermes, régime chaotique, $Ri = 16$ , Cas3.....	84
<b>Figure 4-33.</b> Lignes du courant, régime périodique, $Ri = 10$ , Cas1. ....	86
<b>Figure 4-34.</b> Lignes du courant, régime chaotique, $Ri = 30$ , Cas1.....	86
<b>Figure 4-35.</b> Lignes du courant, régime périodique, $Ri = 10$ , Cas2. ....	87
<b>Figure 4-36.</b> Lignes du courant, régime chaotique, $Ri = 100$ , Cas2. ....	87
<b>Figure 4-37.</b> Lignes du courant, régime périodique, $Ri = 10$ , Cas3. ....	88
<b>Figure 4-38.</b> Lignes du courant, régime chaotique, $Ri = 16$ , Cas3.....	88
<b>Figure 4-39.</b> Sensibilité aux conditions initiales, Cas1. ....	90
<b>Figure 4-40.</b> Sensibilité aux conditions initiales, Cas2. ....	91
<b>Figure 4-41.</b> Sensibilité aux conditions initiales, Cas3. ....	92
<b>Figure A-1.</b> Volume de contrôle.....	106
<b>Figure B-2.</b> Représentation de l'organigramme de calcul.....	111

## Liste des tableaux

<b>Tableau 2-1.</b> Conditions aux limites, $t > 0$ .....	32
<b>Tableau 2-2.</b> Conditions initiales, $t = 0$ .....	33
<b>Tableau 3-1.</b> Teste de sensibilité du maillage ( $Pr = 0.71$ et $Ra = 10^5$ ). .....	37
<b>Tableau 3-2</b> Comparaison de nos résultats avec ceux de la référence. ....	38
<b>Tableau 3-3.</b> Densité de l'eau en fonction de la température[96]. .....	40
<b>Tableau 4-1.</b> Exposant de Lyapunov (Ly), Cas 1 .....	93
<b>Tableau 4-2.</b> Exposant de Lyapunov (Ly), Cas 2 .....	93
<b>Tableau 4-3.</b> Exposant de Lyapunov, Cas 3 .....	94
<b>Tableau A-0-1.</b> Les termes de l'équation de transport.....	106
<b>Tableau A-0-2.</b> Propriétés thermo physique de l'air à pression atmosphérique, [99] .....	112

**NOMENCLATURES**

A	Rapport de forme	-
ap	Facteur de relaxation	-
Cp	capacité thermique	J. kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup>
g	Gravité	m s <sup>-2</sup>
H	Hauteur de la cavité	m
h	Coefficient de convection thermique	W.m <sup>2</sup> .K <sup>-1</sup>
k	Conductivité thermique	W. m <sup>-1</sup> . K <sup>-1</sup>
Ly	Exposant de Lyapunov	-
Nu	Nombre de Nusselt	-
P	Pression dimensionnelle	Pa
q	Flux thermique	W
R	Résiduel	-
Ra	Nombre de Rayleigh	-
Ri	Nombre de Richardson	-
Re	Nombre de Reynolds	-
Pr	Nombre Prandtl	-
S	Terme source	-
T	Température	K
t	Temps adimensionnelle	-
U, V	Vitesse adimensionnelles	-
u, v	Vitesse dimensionnelle	m.s <sup>-1</sup>
X, Y	Coordonnées cartésiennes adimensionnelles	-
x, y	Coordonnées dimensionnelles	m

**Indices**

F	Froid	-
f	Face	-
C	Chaud	-
max	Valeurs maximales	-
locale	Valeur locale	-
réf	Valeur de référence	-
-	Valeurs dimensionnelle	-
0	Etat initial	-
Moyenne	Valeur moyenne	-
*	Valeur estimée	-
ˆ	Valeur corrigée	-

**Symboles Grec**

$\mu$	Viscosité dynamique	Pa.s
$\rho$	Masse volumique	Kg.m <sup>-3</sup>
$\alpha$	Diffusivité thermique	m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup>
$\beta$	Coefficient d'expansion thermique	K <sup>-1</sup>
$\varepsilon$	Ecart initial entre deux solutions	-
$\Phi$	Valeurs d'une variable	-
$\theta$	Température adimensionnelle	-
$\Gamma$	Coefficient de diffusion	m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup>

## Introduction Générale

En 1963, le mathématicien américain Edward Lorenz [1] a publié les résultats de la modélisation numérique des équations de Naviers-Stocks, utilisées pour prévoir le mouvement des courants d'air dans l'atmosphère. Afin de prévoir les phénomènes météorologiques, les calculs sont exécutés en utilisant deux groupes de conditions initiales qui sont très proches et les résultats montrent une grande sensibilité aux conditions initiales. En d'autres termes, une petite perturbation initiale suffit pour que les résultats divergent de manière asymptotique. Quelques années plus tard, ces systèmes sont qualifiés d'imprévisibles ou chaotiques. En effet, la découverte du chaos, dans les années soixante, a changé complètement le concept des phénomènes physiques non linéaires. Aujourd'hui, le chaos trouve son champ d'investigation en mécanique des fluides et les transferts thermiques, notamment en convection naturelle et mixte dans les cavités fermées, ce qui fera l'objet de cette thèse, nous citons aussi les autres domaines d'investigation, tels que la mécanique des structures, la médecine, les finances, les mathématiques, l'astronomie, ...etc.

Dans ce travail, on s'intéresse essentiellement aux systèmes dynamiques résultant des modes de transfert de chaleur. Les régimes, stationnaire et instationnaire, de la convection naturelle et mixte seront considérés respectivement. Les conditions thermiques sur les parois sont permanentes. Sous ces conditions, l'étude des caractéristiques de la convection naturelle et la route vers le chaos empruntée par la convection mixte sera notre objectif principal.

Le manuscrit de cette thèse est constitué de quatre chapitres. Le premier chapitre, sera consacré à l'introduction du chaos dans les systèmes thermiques. Le chapitre est entamé par un bref historique, ce qui nous permettra de comprendre d'avantage la naissance de la théorie du chaos. Ensuite nous mettrons l'accent sur les différents types de systèmes dynamiques. Nous donnons les différents types de bifurcations que le système dynamique subit quand le paramètre de contrôle varie. Les méthodes de caractérisation de ces systèmes seront aussi représentées. Les détails mathématiques des systèmes chaotiques ne seront pas exposés dans ce manuscrit. La route vers le chaos empruntée par le système physique considéré sera traité au sens numérique que nous allons développer aux chapitre deux. Nous terminerons le chapitre par une revue bibliographique sur les systèmes dynamiques thermique, à savoir, la convection naturelle et mixte.

Dans le deuxième chapitre, nous présenterons la problématique considérée dans cette thèse. Il s'agit principalement d'une cavité carrée remplie d'un fluide newtonien. Les équations qui régissent le transfert de chaleur et le champ d'écoulement dans cette cavité seront présentées. Il s'agit principalement des équations de Navier-Stokes régissant le mouvement du fluide et l'équation d'énergie qui gouverne le transfert de chaleur. Par la suite, un choix d'hypothèse correspondant sera précisé pour modéliser ces équations. La fin de ce chapitre est consacrée à la présentation des caractéristiques principales de l'outil numérique utilisé pour suivre l'évolution des solutions du système. Pour assurer une approche numérique correcte, nous expliciterons les considérations de précision qu'il faut respecter pour assurer une convergence des méthodes numériques vers des résultats correctes.

Le troisième chapitre sera consacré à l'étude de la convection naturelle permanente induite dans une cavité. L'étude sera menée en fonction des paramètres de contrôle, représentés par les nombres adimensionnels de Rayleigh et de Prandtl, pour trois cas de combinaison des conditions aux limites. Les résultats seront présentés sous forme d'illustrations des lignes de courant et d'isothermes. On se basant sur les conditions aux limites, les modifications apportées au transfert de chaleur et au champ des vitesses à chaque valeur du paramètre de contrôle, peuvent être réalisées pour améliorer les performances de ces derniers dans des applications industrielles.

Dans le quatrième chapitre, nous étudierons la convection mixte instationnaire induite dans une cavité. Dans le but de vérifier numériquement l'existence de certaines routes qui mènent le système vers le chaos, l'étude sera menée en fonction du paramètre de contrôle, représenté par le nombre adimensionnel de Richardson, pour trois cas de combinaison des conditions aux limites. Ces aspects s'avèrent d'une importance cruciale pour la prédiction et le contrôle des performances de transfert de chaleur.

Nous terminerons cette thèse par une conclusion générale qui sera accompagnée de quelques perspectives pour nos futurs travaux.

# 1 Introduction au chaos dans les systèmes thermiques

*Prédictibilité : le battement d'ailes d'un papillon au Brésil Peut-il provoquer une tornade au Texas ?*

## 1.1 Introduction

Edward Lorenz

**L**a dynamique non linéaire, connue sous le nom de «science non linéaire» ou «La théorie du chaos», est un domaine qui joue un rôle important dans presque toutes les disciplines scientifiques et technique, à savoir, la mécanique, l'aéronautique, les circuits électriques, les systèmes de contrôle, ...etc. En effet, la science classique se base sur des notions comme le déterminisme et cherche avant tout la prédictibilité. En revanche, la théorie du chaos, a pour but de trouver un ordre dans le désordre. Pour cela, elle s'appuie sur les notions de non-linéarité et d'autosimilarité. La théorie du chaos nous aide non seulement à mieux comprendre le monde qui nous entoure, mais apporte des applications concrètes et d'actualité dans plusieurs domaines. En fait, les modèles mathématiques qui décrivent les systèmes dynamiques contiennent certains paramètres qu'on appelle paramètres de contrôle. Et il est donc important d'étudier le comportement de tels systèmes lorsque ces paramètres varient. Effectivement, ces comportements dynamiques comprennent des phénomènes complexes tels que l'instabilité, la bifurcation et le chaos.

## 1.2 Historique

L'une des révolutions scientifiques majeures du vingtième siècle est le chaos. La théorie du chaos nous montre que tous les phénomènes auxquels nous assistons n'ont pas une prédictibilité déterministe. En 1812, Laplace a postulé que si nous connaissons la position et la vitesse d'un objet matériel de l'univers ainsi que les excitations auxquelles cet objet est soumis, nous pourrions bien évidemment connaître (prédire) son future. En revanche, la théorie du chaos affirme qu'il y a des mécanismes qui sont tellement sensible aux conditions initiales que nous nous ne pouvons pas prédire complètement leurs destin. Par ailleurs, quand le système devient chaotique, ça ne vaut pas dire qu'il est devenu désordonné et fait l'importe au quoi. Dans le désordre, se cache un ordre très précis, R. G. H. Eschauzier *et al* [2]. Comme tous les

autres systèmes, le système chaotique est soumis aux principes de physique qui lui sont appliquées. Néanmoins il est impossible de connaître son comportement par translation du temps. Cette imprédictibilité est dû essentiellement au non linéarité des systèmes chaotique qui cause sous certaines conditions une grande sensibilité aux conditions initiales. La notion d'imprédictibilité d'un système dynamique a été, premièrement, mise en évidence par le mathématicien français Henri Poincaré à la fin du 19<sup>ème</sup> siècle. Quand celui-ci a voulu calculer l'orbite de la lune par rapport à la terre, il va faire intervenir une troisième planète qui est le soleil (problème des trois corps), ce qui rend son système d'équation différentiel non linéaire. Il découvre des orbites homoclines et hétéroclines, ce qui lui a fait penser, c'est qu'il y a une grande sensibilité aux conditions initiales. Effectivement, cette notion est la base des comportements chaotique qui seront découverts par Edward Lorenz 60 ans plus tard.

Edward Lorenz, professeur de mathématique et météorologue au MIT (Massachusetts Institut of Technologie) est le père officiel de la théorie du chaos. Un hiver en 1961 il a observé le phénomène de sensibilité aux conditions initiales à la suite de calculs voulant à prévoir les phénomènes météorologiques. Quelques années plus tard Edward Lorenz lança sa découverte du siècle, E. N. Lorenz [1]. Quant aux phénomènes météorologiques repose sur le principe de la mécanique des fluides, notamment la convection (l'air chaud monte l'air froid descend) sont obéissant aux équations différentielles de Navier Stokes, et donc un calcul différentiel très complexe vu le nombre important de variables. Le coup de génie de Lorenz est de simplifier ces équations au maximum afin d'obtenir un système d'équations avec seulement trois inconnus. L'incapacité de la résolution de ces équations à la main, Lorenz va faire appel à l'informatique. Ce qui a d'ailleurs bloqué Poincaré pour la découverte de cette théorie. Il utilisa donc l'un des premiers ordinateurs à cette époque, un Royal McBee LGP-300, sachant que dans cette période les moyens informatiques étaient bien primitifs, et que les ordinateurs de cette époque étaient extrêmement volumineux, lents, et dégagent une énorme chaleur, et surtout bruyants. Donc pour avoir les résultats sous forme de colonnes de chiffres, il fallait attendre plusieurs heures, une fois que l'ordinateur finira de tourner. Pour s'assurer des résultats que Lorenz a obtenu, il relança la machine encore une deuxième fois, mais cette fois-ci il entre les variables avec seulement trois chiffres après la virgule au lieu de six chiffres afin d'accélérer le processus de simulation et pour gagner du temps. Comme tous les mathématiciens de l'époque pensaient que de petites incertitudes dans les variables de base d'un calcul complexe ne peuvent qu'engendrer de petites différences dans le résultat final. Après la comparaison des résultats obtenus, Lorenz constata une différence importante. Son premier réflexe est de vérifier le bon fonctionnement

de l'ordinateur, mais celui fonctionnait parfaitement. C'est à partir de cet instant que la théorie du chaos va naître. Grâce au développement et la disposition des ordinateurs, Lorenz venait de découvrir le comportement chaotique d'un système non linéaire, soit une infime différence dans les conditions initiales d'un système dynamique déterministe peut provoquer des résultats complètement différents.

Après la représentation graphique de son système avec son ordinateur, une deuxième découverte va apparaître, LES ATTRACTEURS. Effectivement, il traça l'évolution spatio-temporelle de son système météorologique avec deux solutions extrêmement proches à l'état initiale mais pas tout à fait identique. Au départ les deux trajectoires semblaient très proche, mais au bout d'un certain moment (temps caractéristique ou horizon temporel) les deux courbes divergent l'une de l'autre de plus en plus. En revanche, même si les deux trajectoires divergent, sont attirées par le même attracteur et sont plus au moins identiques dans l'ensemble. Les deux trajectoires ressemblaient aux ailes déployées d'un papillon. Lorenz recommence l'expérience plusieurs fois avec d'autres conditions initiales très proches et le résultat est toujours le même et toutes les trajectoires sont attirées par le même bassin d'attraction. C'est David Ruelle [3] qualifié ce bassin d'attraction d'attracteur étrange. Il montre que les trajectoires ne repassent pas deux fois par le même point et ne se coupent jamais même si celle-ci semblent évoluer au hasard se forme des ailes d'un papillon. Ce qui a rendu Lorenz célèbre par la théorie du chaos, c'est la conférence qui donnait en 1972 intitulé « Le battement d'ailes d'un papillon au Brésil peut-il provoquer une tornade au Texas ? ».

### 1.3 Systèmes dynamique

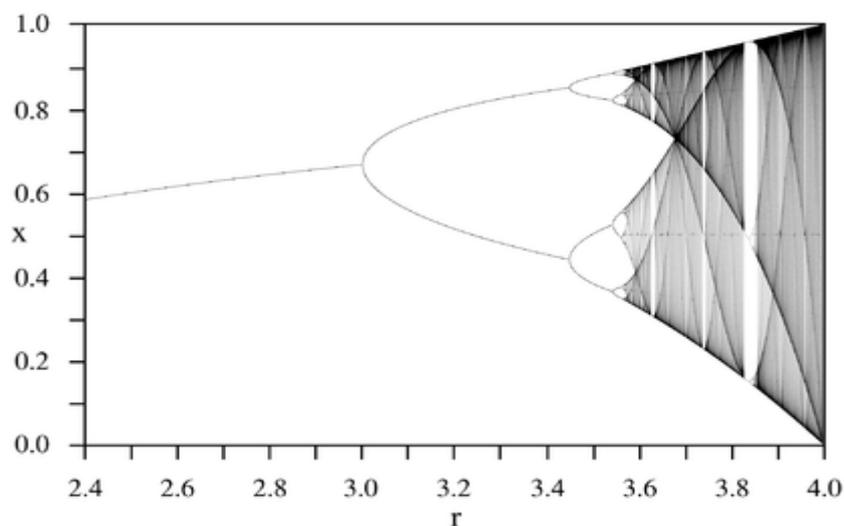
Un système dynamique est un système physique dont l'évolution au cours du temps est décrite par des lois mathématiques. C'est un système qui peut, parfois, évoluer par rapport au temps ou par rapport à une variable physique. Tout simplement lorsqu'un point matériel ou l'ensemble de points est en mouvement, ceci forme un système dynamique. On peut distinguer trois sortes de système dynamique, les systèmes déterministes, stochastiques (aléatoire) et les systèmes chaotiques. Les systèmes déterministes sont des systèmes basés sur le principe de causalité qui sont régis par des lois physique bien déterminée. Leurs mouvements sont prévisibles et prédictibles dans le temps. Les systèmes stochastiques sont des systèmes qu'évoluent au hasard sans aucune prévision ni prédictibilité dans le temps. Ces systèmes sont généralement basés sur le concept de probabilité. Enfin, les systèmes chaotiques ont un

comportement complexe. Quand un objet physique suit un mouvement chaotique, il est attiré par un bassin d'attraction compliqué, sur laquelle la trajectoire décrite par l'objet semble errer au hasard, mais sans jamais quitter l'attracteur, c'est l'attracteur étrange. En fait, ces systèmes chaotique incluent à la fois des lois déterministes et des lois stochastiques, ce qui rend l'impossibilité de la prédiction des mouvements à long termes, on parle de sensibilité aux conditions initiales. Néanmoins, ces systèmes sont prévisible jusqu'à un certain temps caractéristique ou horizon de prédictibilité, dont lequel nous pouvons suivre la trajectoire de l'objet par le calcul, au-delà de cet horizon la trajectoire devient imprévisibles, Smale, S. [4], P. Manneville [5] et T. Wit [6].

## 1.4 Notion de bifurcation

### 1.4.1 Concept de bifurcation

Une petite variation d'un paramètre de contrôle dans les équations gouvernantes un système dynamique peut produire un changement considérable dans son comportement global, **Figure 1-1**. On parle alors de bifurcation lorsqu'un changement qualitatif d'un système se produit. Les bifurcations auxquelles nous somme intéressé dans ce travail sont les bifurcations entre régime stationnaire et régime périodique, régime périodique et quasi-périodique finalement régime quasi-périodique et régime chaotique. Cette succession de bifurcations vers le chaos du système a été mise en évidence pour la première fois par Ruelle [3].



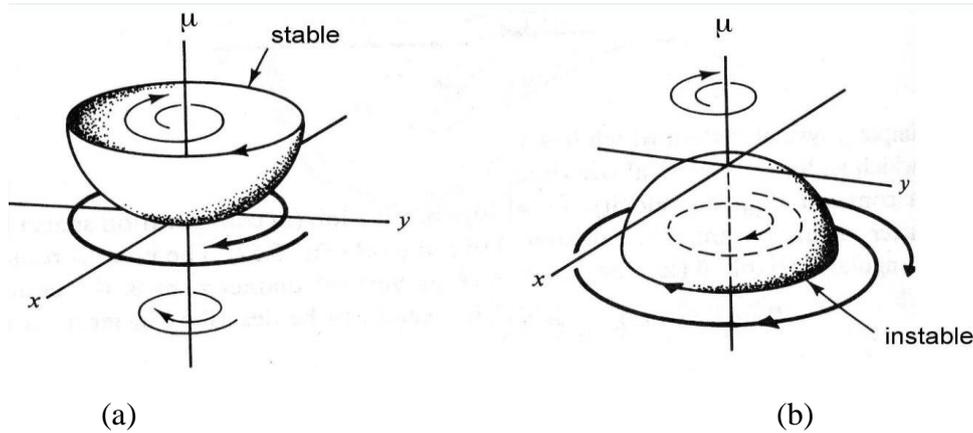
**Figure 1-1.** Diagramme de bifurcation [7].

Les routes vers le chaos qui sont possible dans la théorie des systèmes dynamiques non linéaires, Smale, S. [4], P. Manneville [5], T. Wit [6] et Ruelle [3], sont :

- La quasi-périodicité : En augmentant le paramètre de contrôle, le système dynamique passe d'une solution laminaire stationnaire à une solution périodique. La projection des solutions dans l'espace des phases correspond à un attracteur point limite qui bifurque vers un attracteur cycle limite. En continuant d'augmenter le paramètre de contrôle, la solution devient quasi-périodique et l'attracteur se transforme en Tore. Suite à la perte de stabilité, un changement topologique de l'attracteur survient et correspond à un attracteur étrange qui est la signature du chaos.
- La cascade sous harmonique : En augmentant le paramètre de contrôle, on assiste à une cascade de bifurcations. La première, qui surgit après le cycle limite, fait apparaître un pic de faible amplitude sur le spectre de Fourier. La fréquence de ce nouveau pic correspond à la moitié du pic fondamental. A la seconde bifurcation, un autre pic apparaît dont la fréquence correspond au quart de la fréquence fondamentale. Et ainsi de suite, le scénario se manifeste jusqu'à l'infini et le chaos s'installe après une infinité de bifurcations.
- L'intermittence : partant d'un régime périodique stable caractérisé par des oscillations régulières, ces dernières sont interrompues de temps en temps par des fluctuations, dont l'amplitude et la durée sont à peu près les mêmes pour chaque fluctuation.

### 1.4.2 Bifurcation de Hopf

Généralement c'est la première bifurcation que le système subit. Autrement dit, quand un système est dans un état stationnaire, ce qui correspond à un attracteur ponctuel ou point limite peut devenir harmonique (oscillatoire), ce qui correspond à un attracteur cyclique ou cycle limite, par franchissement d'une valeur critique du paramètre de control, on parle alors de la bifurcation de Hopf, C. Huyên et al [7] et J.-Q. Sun [8]. Quand le cycle limite est stable la bifurcation de Hopf est dite super critique, dans le cas contraire le cycle limite instable la bifurcation est dite sous-critique, **Figure 1-2 (a) et (b)**, respectivement. Cette notion de stabilité et d'instabilité est liée à une quantité spécifique dite premier exposant de Lyapunov.



**Figure 1-2.** Bifurcation de Hopf, (a) super critique, (b) sous critique [6].

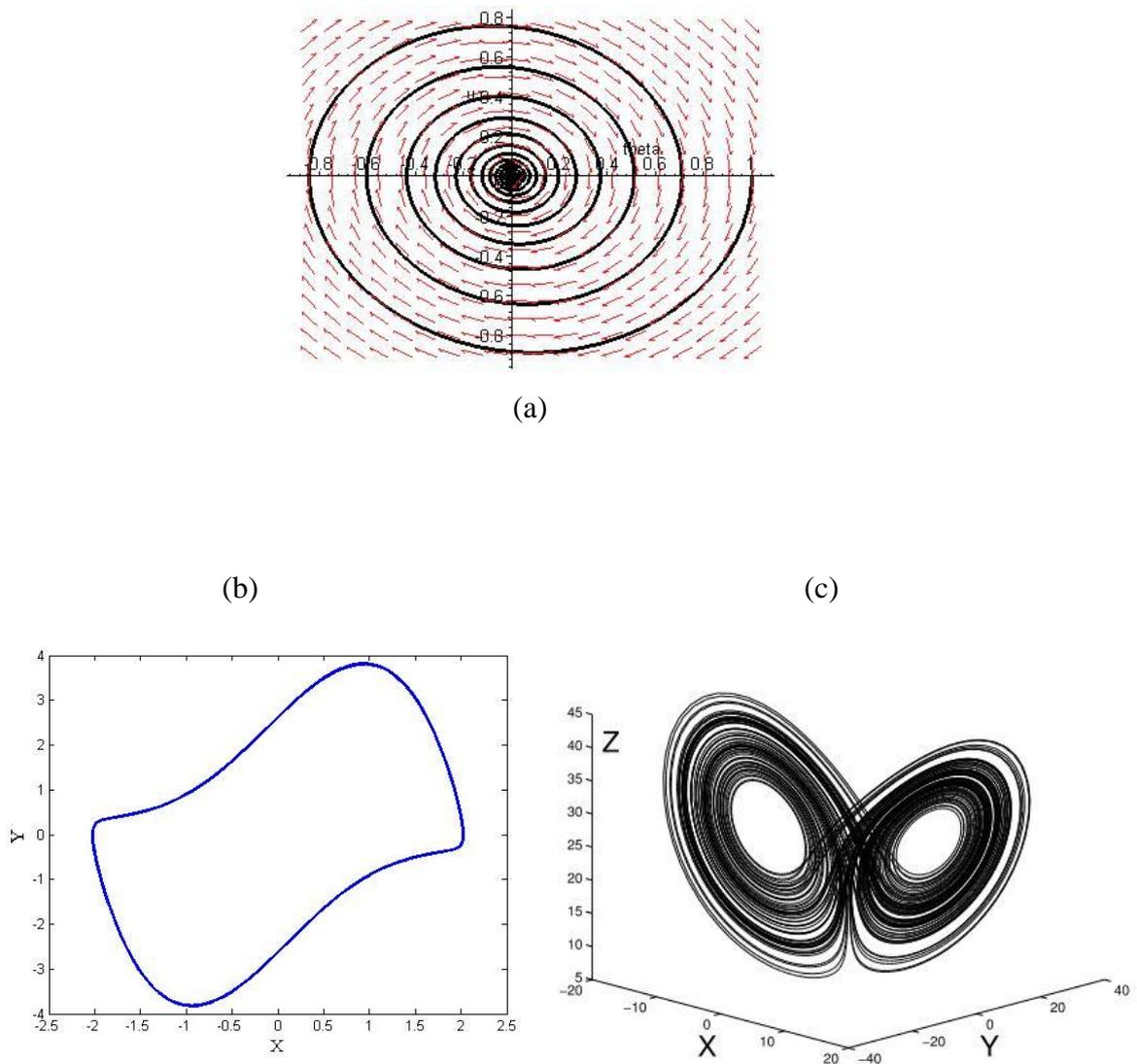
Il existe bien évidemment d'autres types de bifurcations à savoir, la bifurcation fourche, la bifurcation col-nœud, ...etc. En fait, nous avons exclu ces dernières bifurcations vu qu'elles n'apparaissent pas dans nos résultats de simulations.

## 1.5 Caractérisation des régimes dynamiques

### 1.5.1 Espace de phase

Quand un système est en mouvement, nous pouvons suivre sa dynamique ou son évolution au cours du temps afin d'emprunter la route qui mène ce système vers le chaos et de voir les situations dont lesquelles les bifurcations se produisent quand le paramètre de contrôle évolue. Tout d'abord, on construit un modèle avec des lois physiques qui le décrit et les paramètres nécessaires pour le caractériser. Dans notre cas, ce modèle est constitué d'équations différentielles dont les paramètres de contrôles sont, le nombre adimensionnel de Prandtl, Rayleigh (dans le cas de la convection naturelle), Richardson (dans le cas de la convection mixte), Grashof et le nombre de Reynolds.

L'espace des phases est un espace abstrait dont les coordonnées sont les variables dynamiques du système étudié. À un instant donné, on définira un point dans un repère, par conséquent, ce point caractérisera l'état du système dans l'espace. Cet espace appelé espace des phases. En effet, quand le temps augmente, l'état du système décrit dans cet espace une trajectoire qui caractérise le comportement dynamique du phénomène étudié au cours du temps.



**Figure 1-3.** Point fixe d'un pendule simple (a), cycle limite de ver der Pol(b), attracteur étrange de Lorenz (c).

### 1.5.2 Notion d'attracteur et d'attracteur étrange

Les systèmes dynamiques chaotiques sont décrit par des attracteurs étranges dans un espace de phase bien précis. En revanche, il existe d'autres types d'attracteurs dans beaucoup de systèmes non chaotiques de natures différentes à savoir ;

- Le point fixe : **Figure 1-3 (a)**, C'est le moins étrange de tous les attracteurs car il caractérise des systèmes dynamiques dans un état stationnaire. L'espace des phases du

pendule simple, est un attracteur ponctuel ou la masse tend vers un état d'équilibre indépendamment du temps.

- Cycle limite : **Figure 1-3 (b)** illustre l'exemple de l'oscillateur de Van der Pol. Cette attracteur caractérise les systèmes atteignant des états périodiques.
- L'attracteur étrange : **Figure 1-3 (c)**, évidemment cet attracteur (attracteur de Lorenz) caractérise les systèmes chaotiques. L'attraction des trajectoires vers l'espace de phase est liée au caractère du comportement chaotique. Par exemple, nous pouvons citer les mouvements des planètes auxquels Henri Poincaré a mis le doigt à l'échelle cosmologique, les mouvements de l'air dans l'atmosphère, ...etc.

### 1.5.3 Exposant de Lyapunov

L'un des outils les plus performants pour la caractérisation des systèmes dynamiques est l'exposant de Lyapunov noté  $L_y$ , car celui-ci nous permet essentiellement de voir la stabilité du système autour des points d'équilibre, notamment la sensibilité ou l'insensibilité des attracteurs aux conditions initiales. En gros, cet exposant clarifié le degré de divergence entre deux solutions initialement très voisine.

Prenons un système qui évolue à partir de deux conditions initiales légèrement différentes  $X$  et  $X+\varepsilon$ , après un certain temps  $t$ , la divergence de leurs solutions est caractérisé par :

$$\varepsilon(t) \approx \varepsilon e^{L_y * t} \quad (1.1)$$

Nous pouvons ainsi remonter à l'expression de l'exposant de Lyapunov suivante :

$$L_y = \frac{1}{t} \ln \left( \left| \frac{\Phi_2(t) - \Phi_1(t)}{\Phi_2(t_0) - \Phi_1(t_0)} \right| \right) \quad (1.2)$$

Où  $\Phi_2$  et  $\Phi_1$  sont les valeurs des variables calculées pour des deux simulations très proches en conditions initiales. Dans notre cas, ça peut être les températures moyennes, les vitesses ou le nombre de Nusselt moyen.

Si la valeur de  $L_y$  est positive, le système est instable. Les trajectoires sont très proches au début, puis, jusqu'à un certain temps caractéristique ou horizon de prédictibilité, les trajectoires commencent à se séparer et finissent par diverger. Effectivement, On parle de sensibilité aux conditions initiales et le système est dans un état chaotique. En revanche, si la valeur  $L_y$  est

négative ou nul, le système est asymptotiquement stable. Les trajectoires sont presque identique ou légèrement séparées finissent par converger. En effet, on parle de l'insensibilité aux conditions initiales et le système n'est pas chaotique, la prévision à long terme est possible.

## **1.6 But et intérêt du travail**

Les objectifs ultimes de cette thèse sont d'une part, d'approfondir et d'améliorer nos connaissances de base sur les phénomènes physiques résultant des modes de transfert de chaleur par convection, afin de faire des recommandations pour améliorer les performances de transfert de chaleur, à base des combinaison de conditions aux limites, dans des espaces confinés utilisés dans les applications industrielles. D'autre part, de vérifier numériquement l'existence de certaines routes qui mènent le système vers le chaos. Car cette notion est d'importance cruciale dans les applications industrielles pour promouvoir ou de supprimer le développement des instabilités thermique et hydrodynamique.

A cet effet, la recherche proposée dans cette thèse porte sur une approche numérique à l'étude de transfert de chaleur par convection induite dans une cavité carrée. Cette dernière est engendrée par des conditions aux limites de types thermiques et cinématiques imposées sur les parois du système. Le type de fluide considéré engendre des mouvements convectifs inhabituels et intéressants. Par conséquent, l'étude sera menée en fonction des paramètres de contrôle (nombre de Rayleigh, nombre de Richardson et le nombre de Prandtl) et de combinaison de conditions aux limites sur la structure de l'écoulement et sur les transferts de chaleur au sein du système considéré.

## **1.7 Revue bibliographiques**

### **1.7.1 Travaux antérieures sur la convection naturelle**

Le transfert de chaleur par convection naturelle dans les cavités fermées sont des sujets d'investigation importants en raison de leur effet sur de nombreuses applications d'ingénierie et des phénomènes naturels tels que les centrales thermiques, les industries pétrochimiques, l'aérospatiale, la construction et les capteurs solaires,...etc. L'écoulement entraîné par la

différence de température à travers la cavité entraîne une poussée de la flottabilité et induit des conditions de convection naturelles lorsque le gradient de température près des parois de la cavité augmente. Par conséquent, des modèles compliqués de transfert de chaleur se produisent à l'intérieur de la cavité pour différentes valeurs des nombres de Rayleigh et Prandtl [9]–[17]. Cependant, la convection naturelle qui se développe dans une cavité fermée semble dépendre quantitativement et qualitativement de la combinaison des conditions limites imposées, ainsi que de la position de la cavité par rapport au centre de gravité. De nombreuses études ont été menées sur la convection naturelle sous l'effet des conditions thermiques [18]–[24]. Ces modifications introduisent de nombreuses autres complexités qui modifient le champ d'écoulement et la nature de transfert de chaleur, conséquence des forces de flottabilité entraînées par les gradients de température, qui ont tendance à augmenter le transfert de chaleur. En effet, la convection naturelle se prononce de plus en plus avec l'augmentation du Rayleigh.

Sur la base de la dépendance aux conditions aux limites sur le transfert de chaleur et le champ d'écoulement, les modifications apportées pour ces derniers, peuvent être réalisées pour améliorer le transfert de chaleur dans des applications industrielles comme mentionné ci-dessus. En particulier, les résultats de la simulation montrent qu'il existe des situations optimales pour différentes combinaisons de conditions aux limites à chaque valeur du paramètre du control, pour lesquels le taux maximal ou minimal de transfert de chaleur peut être obtenu.

Dans la littérature, des études numériques sur la convection naturelle dans les cavités carrées en présence d'une plaque mince soumise à une température chaude à l'intérieur de l'enceinte, le nombre de Prandtl a été fixé à  $Pr = 0,71$ , étudié par M. Mahmoodi [25], D. Sadaoui *et al* [26] et M. Muthtamilselvan *et al* [27]. Leurs résultats indiquent que le transfert de chaleur dépend essentiellement de la géométrie et de la position de la plaque, et, sont plus prononcés avec l'augmentation de Rayleigh. A. Elatar *et al* [28] ont réalisé une étude numérique de la convection naturelle laminaire dans une enceinte carrée avec une seule ailette horizontale attachée à la paroi chaude. S. M. Aminossadati *et al* [29] ont étudié la convection naturelle laminaire dans une cavité carrée avec une ailette sous l'influence d'un champ magnétique uniforme. Les résultats indiquent que, à des nombres plus élevés de Rayleigh, les champs d'écoulement et de température et le taux de transfert de chaleur de la cavité sont tous influencés par le champ magnétique. H. F. Oztop *et al* [30] ont effectué une étude numérique du transfert de chaleur causé par les forces de flottabilités dans un tube inséré dans une cavité carrée. Le

transfert de chaleur et le champ d'écoulement dépendent de la position du tube inséré et sont affectés par la variation du nombre de Rayleigh.

Une analyse expérimentale et numérique de la convection naturelle dans une cavité carrée avec une source de chaleur supplémentaire située au centre de la paroi inférieure, est étudiée par G. Nardini *et al* [31]. Les résultats montrent clairement que différentes positions de la source chaude ont un effet considérable sur le transfert de chaleur.

D'autres études portent sur des géométries triangulaires. A. Mahmoudi *et al* [32] ont mené une étude numérique de la convection naturelle dans une cavité triangulaire inclinée pour différentes conditions thermiques. En effet, ils ont observé que, le transfert de chaleur dépend principalement de l'angle d'inclinaison. A. Koca *et al* [33] ont mené une étude numérique de la convection naturelle dans les enclos triangulaires. Les résultats ont montré que, les champs d'écoulement et de température sont affectés par le changement du nombre de Prandtl, l'emplacement et la longueur du chauffage, ainsi que le nombre de Rayleigh. D'autres chercheurs ont menés des travaux sur des cavités cylindriques, S. Xin *et al* [34] ont étudié numériquement et analytiquement la convection naturelle dans un cylindre horizontal chauffé de façon différentielle, leur étude portait sur les effets du nombre de Prandtl sur la structure du flux et l'instabilité. Les résultats indiquent que, le nombre critique de Rayleigh atteint une valeur asymptotique pour un nombre suffisamment élevé de Prandtl. Avinash Chandra *et al* [35] ont étudié le transfert de chaleur par convection naturelle à partir d'un cylindre semi-circulaire horizontal.

A. K. Baranwal *et al* [36] ont effectué l'effet du nombre de Prandtl sur le transfert de chaleur dans une enceinte carrée constituée d'un cylindre circulaire chaud et d'un cylindre circulaire froid. K. M. Gangawane *et al* [37] ont mené des simulations numériques pour élucider les effets combinés des nombres de Prandtl et Rayleigh sur le transfert de chaleur et les caractéristiques d'écoulement de fluide à l'intérieur de la cavité. Toutes ces études [35]–[37] ont développé des corrélations prédictives pour estimer la valeur du nombre de Nusselt en fonction des nombres, de Prandtl, de Grashof, de Rayleigh et les paramètres géométriques, dans les applications industrielles, en particulier dans des nouvelles applications. A. Bouras *et al* [38] ont examiné numériquement la convection naturelle dans un espace annulaire situé entre deux cylindres elliptiques horizontaux. L'étude a été réalisée pour différentes valeurs des nombres de Prandtl et de Rayleigh. Selon leur description, nous pouvons évaluer que le transfert de chaleur est affecté par les variations du nombre de Prandtl pour des basses valeurs de Rayleigh, mais il

semble que lorsque  $Ra > 10^2$ , le transfert de chaleur et le champ d'écoulement augmentent avec le nombre de Prandtl. T. Pessa *et al* [39] ont étudié numériquement et théoriquement, la cavité chauffée à travers des parois latérales à faible nombre de Prandtl causé par une grande différence de densité. L'analyse indique que le transfert de chaleur augmente avec le nombre de Prandtl, en particulier pour les nombres de Rayleigh très élevés.

La convection naturelle et la génération d'entropie dues au transfert de chaleur et aux irréversibilités de frottement de fluide dans une cavité cubique tridimensionnelle avec des parois verticales partiellement chauffées et refroidies, ont été étudiées numériquement par A. Al-Rashed *et al* [40]. Les résultats expliquent que le taux de génération d'entropie totale augmente lorsque le nombre de Rayleigh augmente. Pendant ce temps, le nombre de Bejan diminue lorsque le nombre de Rayleigh augmente. En outre, les dispositions des régions de chauffage et de refroidissement ont un effet significatif sur les caractéristiques d'écoulement de fluide et de transfert de chaleur de la convection naturelle et de la génération d'entropie dans une cavité cubique.

La convection naturelle dans une cavité carrée bidimensionnelle en présence de la rugosité sur des parois verticales, a été étudiée numériquement par M. Yousaf *et al* [41]. Le comportement hydrodynamique et thermique du fluide en présence de rugosité a été analysé sous la forme d'isothermes, de lignes de courant, de vitesse et du transfert de chaleur moyen. Les résultats basés sur cette étude numérique ont montré que la rugosité sinusoïdale affecte considérablement le comportement hydrodynamique et thermique du fluide dans une cavité carrée. Une amplitude adimensionnelle d'éléments de rugosité sinusoïdale approximativement égale à 0,025 n'a pas d'effet significatif sur le transfert thermique moyen. La réduction maximale du transfert de chaleur moyen a été calculée à 28% lorsque les éléments de rugosité sinusoïdale étaient situés à la fois sur les parois chaudes et froides simultanément.

### 1.7.2 Travaux antérieures sur la convection mixte

De nombreux travaux de recherche ont étudié le transfert de chaleur par convection mixte dans une cavité à paroi mobile. R. Iwatsu *et al* [42], M. K. Moallemi *et al* [43], K. Al-Salem *et al* [44], T. Basak *et al* [45] et T. S. Cheng [46]. L'effet de la convection forcée, causé par les conditions cinématiques (parois mobiles ou cavité ouverte) combinée avec la convection libre ou naturelle, causé par le gradient de température ou l'action d'un champ de forces

massiques (gravité), est défini comme la convection mixte, qui peut être trouvée dans de nombreuses applications d'ingénierie. Contrôler le transfert de la chaleur, en augmentant ou en diminuant la convection thermique, présente de nombreux avantages en termes d'économies d'énergie, d'augmentation de la durée de vie de l'appareil ou d'augmentation de la sécurité de l'appareil. L'écoulement entraîné par cisaillement ou le flux entraîné par le couvercle est l'une des configurations qui a beaucoup d'applications industrielles et d'ingénierie telles que les systèmes de climatisation, le refroidissement des appareils électroniques, les technologies de lubrification, les isolants de bâtiments hautes performances.

Une quantité considérable d'intérêts de recherche a été abordée au cours des dernières décennies sur le type de transfert de chaleur par convection mixte. Le cas de la convection mixte dans une cavité carrée en présence d'un bloque à l'intérieure, a été mise en évidence par A. W. Islam *et al* [47]. Les parois latérales de la cavité sont maintenues à une température froide et le bloque est soumis à une température chaude. Les auteurs ont mis l'accent sur le comportement de fluide et le transfert de chaleur qui se développe à l'intérieure de l'enceinte en fonction des paramètres de contrôle à savoir ; le nombre de Richardson, le rapport de forme du bloque et son excentricité. Les résultats montrent que, pour une petite taille du bloque ceci n'affecte pas le transfert de chaleur avec l'augmentation du nombre de Richardson.

Les principales caractéristiques de la convection mixte dans les cavités partiellement ouvertes avec des sources de chaleur internes sont étudiées à l'aide d'un modèle tridimensionnel transitoire par É. Fontana *et al* [48]. Les résultats montrent que les forces de flottabilité sont dominantes pour les valeurs de Reynolds et Rayleigh faibles, et dans ce cas, le champ d'écoulement correspond à deux recirculations tournant dans des directions opposées.

La convection mixte stable et instable dans une cavité cubique située en bas d'un canal carré, a été analysé par G. Abdelmassih *et al* [49]. Les nombres de Reynolds basés sur la vitesse moyenne de l'écoulement et la largeur du canal varie entre (1000 et 1500) et le nombre de Richardson varie entre (0.1 et 10). Les résultats montrent que, pour  $100 \leq Re \leq 1500$  et  $Ri \leq 0,1$ , le débit est stable et il consiste en un seul rouleau qui présente des vitesses plus importantes lorsque le nombre de Richardson augmente. En effet, un flux périodique instable se trouve à  $Re = 100$  et  $Ri = 10$ .

Une étude numérique a été réalisée par A. K. Kareem *et al* [50] pour étudier le transfert de chaleur par convection naturelle et forcée dans une cavité 3D obstruée différentiellement avec un cylindre circulaire rotatif isolé thermiquement. La cavité a une paroi du fond

stationnaire chaude et une paroi froide à couvercle, et toutes les autres parois sont immobiles et adiabatiques. Les simulations sont réalisées pour différents nombres de Reynolds et pour des vitesses de rotation de cylindre. Les résultats montrent clairement que les profils d'écoulement et les champs thermiques sont fortement influencés par l'augmentation de la vitesse du cylindre rotatif ou du nombre de Reynolds. Le transfert de chaleur par convection mixte transitoire dans une cavité fermée en 3D avec un flux de chaleur constant sur la partie centrale de la paroi inférieure et les parois isothermes se déplaçant dans la même direction verticale sont étudiés par A. K. Kareem *et al* [51]. Les auteurs ont montrés que le nombre de Nusselt est amélioré avec l'augmentation du nombre de Reynolds. H. F. Öztop *et al* [52] ont étudiés les effets de la convection mixte dans une cavité ondulée remplie d'un nano-fluide et partiellement chauffée. Ils ont constatés que le taux de transfert de chaleur diminue avec l'augmentation du nombre de Hartmann. Le taux de transfert de chaleur peut être amélioré ou réduit en augmentant la fraction volumique des nanoparticules en fonction des nombres de Hartmann et Richardson. K. M. Gangawane *et al* [53] ont étudié numériquement le transfert de chaleur convectif bidimensionnel en régime permanent pour les fluides newtoniens dans une enceinte carrée à couvercle avec un bloc triangulaire centré maintenu à une température constante ou un flux thermique constante. Les auteurs ont observé que l'augmentation de la force d'inertie augmente le taux de transfert de chaleur jusqu'à une certaine plage de nombres de Reynolds (80-200) ensuite une détérioration du taux de transfert de chaleur.

La convection mixte laminaire stable à l'intérieur d'une cavité carrée remplie d'eau est étudiée numériquement par M. A. Ismael *et al* [54]. La circulation du fluide est due au mouvement des parois supérieure et inférieure qui sont maintenues respectivement à  $T_F$  et  $T_h$ , avec  $T_h$  supérieur à  $T_F$ . Une condition de glissement partielle a été imposée dans ces deux parois mobiles. Les parois verticales de la cavité sont maintenues adiabatiques. Les résultats ont montrés qu'il existe des valeurs critiques de nombre de Reynolds auquel la convection est diminuée.

E. Sourtiji *et al* [55] ont mené une étude numérique du flux de convection mixte laminaire instationnaire dans une cavité carrée avec des orifices de ventilation en raison d'une vitesse d'oscillation à l'orifice d'entrée. Les résultats indiquent qu'après une certaine durée, une variation périodique du flux de fluide et du champ de température dans la cavité est créée. En effet, le transfert de chaleur est amélioré pour tous les nombres de Strouhal étudiés par rapport au cas stable. Pour réaliser le nombre optimal de Strouhal afin d'atteindre la meilleure performance du système, les auteurs évaluent le nombre total de Nusselt et le coefficient de

perte de charge dans un cycle d'oscillation par rapport au nombre de Strouhal. Ils ont constaté que pour une gamme du nombre de Strouhal comprise entre 0,5 et 1, la performance du système sera souhaitable en considérant à la fois le taux de transfert thermique maximal et la chute de pression minimale dans la cavité.

A. Chattopadhyay *et al* [56] ont simulé numériquement un flux de convection mixte bidimensionnel (2D) dans une cavité poreuse chauffée de façon sinusoïdale dont les deux parois verticales (couvercles) sont en mouvement. La paroi verticale gauche de la cavité carrée est maintenue à température froide constante et la paroi droite de la cavité est chauffée de façon sinusoïdale tandis que les parois supérieure et inférieure sont adiabatiques. Trois cas sont considérés en fonction de la direction des murs mobiles. Les auteurs ont utilisé la formulation du modèle de Darcy étendu par Brinkmann pour simuler le transfert de quantité de mouvement dans le milieu poreux. Les résultats numériques sont analysés sur une plage des paramètres de contrôles. Une étude paramétrique est réalisée pour tous les cas. En effet le transfert de chaleur dépend essentiellement de mouvement des parois verticales.

L'effet de l'ajout de milieux poreux dans une cavité carrée ventilée sur le transfert de chaleur par convection mixte est étudié par T. Behzadi *et al* [57]. La paroi supérieure de l'enceinte est maintenue à une température constante et la paroi inférieure est maintenue à un flux de chaleur constant. Les parois, droite et gauche, sont considérées adiabatiques. Un flux externe entrant dans la cavité à partir d'un orifice dans la paroi verticale gauche et sortant d'un orifice dans la paroi verticale droite. Les effets du nombre de Richardson et du nombre de Darcy sur le débit de fluide et le taux de transfert de chaleur ont été étudiés. Les résultats obtenus ont montré que le nombre croissant de Darcy et le diamètre des particules poreuses provoquent une tendance décroissante du taux de transfert de chaleur.

Une étude numérique porte sur la convection mixte dans des enceintes carrées remplies de milieux poreux a été menée est discutée par D. Ramakrishna *et al* [58]. L'influence de différentes conditions aux limites thermiques sur le fond et les parois latérales, basée sur le rapport d'aspect thermique ( $A$ ), est étudiée pour une large gamme de paramètres ; Reynolds, Prandtl, Darcy et Grashof. L'effet induit par le couvercle est dominant à faible nombre de Darcy ( $Da = 10^{-5}$ ), alors que l'effet de flottabilité est dominant pour les nombres de Darcy élevés ( $Da = 10^{-4}$  et  $Da = 10^{-3}$ ) pour  $Re = 1$ . Le modèle asymétrique est observé dans les isothermes et les lignes du courant pour  $Re = 100$ . Notamment, le gradient thermique est élevé au centre de la paroi du fond pour  $A = 0,1$  en raison des lignes du courant denses dans cette zone et faible pour  $A = 0,9$ , indépendamment de  $Re$ ,  $Pr$  et  $Gr$ .

N. S. Gibanov *et al* [59] ont analysé numériquement la convection mixte dans une cavité partiellement remplie d'un milieu poreux saturé avec un ferro-fluide. La cavité est constituée d'une couche poreuse inférieure et d'une couche de nanofluide sur la couche poreuse avec une paroi inférieure immobile chauffée et une paroi supérieure refroidie. L'analyse a été effectuée pour une large gamme de valeurs de Hartmann, d'angle d'inclinaison du champ magnétique, de nombre de Darcy, de la hauteur de la couche poreuse et de la fraction volumique de nanoparticules. Il a été révélé que le nombre moyen de Nusselt est une fonction non monotone du nombre de Darcy et de la hauteur de la couche poreuse, alors qu'une croissance du nombre de Hartmann illustre la réduction du taux de transfert de chaleur.

Les conditions optimales du transfert de chaleur par convection mixte dans une cavité carrée à surface ondulée remplie de nanofluide Cu-eau sont présentées par M. Mamourian *et al* [60]. Le paramètre de performance est supposé être le nombre de Nusselt sur la surface ondulée. Les effets des paramètres tels que la fraction volumique des particules de Cu et la longueur d'onde de la surface ondulée sur les champs d'écoulement et de température sont étudiés. Les auteurs constatent que, pour un nombre de Richardson donné, l'augmentation de la longueur d'onde de la surface ondulée diminue le nombre moyen de Nusselt et la génération d'entropie. Leur analyse conduit le processus d'optimisation pour atteindre le nombre maximum de Nusselt (transfert de chaleur maximal) pour la cavité carrée de surface ondulée.

La possibilité d'améliorer le transfert de chaleur durant la convection thermique dans une enceinte, avec la considération d'aspiration libre du fluide environnant, a été considéré par N. Biswas *et al* [61]. L'illustration est réalisée à l'aide d'une cavité poreuse entraînée par un couvercle et à deux côtés sous un chauffage différentiel. Les orifices d'aspiration sont pourvus de coins diagonalement opposés pour un écoulement partiel du fluide environnant froid et une évacuation partielle du fluide de la cavité chaude. Les résultats révèlent un transfert de chaleur accru de la cavité aspirée par rapport à la cavité non aspirée et l'aspiration peut magnifiquement améliorer le transfert de chaleur. La convection mixte dans une cavité entraînée par le couvercle remplie d'un nanofluide alumine-eau a été étudiée numériquement par N. S. Gibanov *et al* [62]. L'effet du nombre de Richardson, du rapport de la hauteur des marches, rapport de distance entre paroi gauche et paroi, coefficient de conductivité thermique et fraction volumique des nanoparticules sur les lignes de courant et les isothermes ainsi que le nombre de Nusselt moyen le long de la paroi chaude mobile et le débit de fluide ont été analysés pour Reynolds nombre ( $Re = 100$ ), nombre Prandtl ( $Pr = 6,82$ ) et l'épaisseur de la paroi solide. Les auteurs ont constaté que les dimensions et la conductivité thermique d'un étage arrière peuvent essentiellement

modifier les modèles de flux et de transfert de chaleur avec l'intensité du processus.

### 1.7.3 Travaux antérieurs sur la route vers le chaos emprunté par la convection naturelle et la convection mixte

Les écoulements de convection naturelle ou de convection mixte dans des cavités, constituent un effet de prédiction pour l'étude des différents processus physiques à travers lesquels un écoulement laminaire est transformé en un écoulement chaotique par franchissement d'une valeur critique de paramètre de contrôle. Les raisons sont les différentes bifurcations sur la route vers le chaos qui se produisent de manière étagées et suffisamment différenciées pour permettre l'identification. Selon les applications industrielles, il est intéressant de promouvoir ou de supprimer le développement des instabilités thermique et hydrodynamique. Et il est donc important de comprendre, notamment d'emprunter par une approche numérique, la route qui mène le transfert de chaleur vers le chaos. Cette identification de la route vers le chaos permet d'une part d'améliorer les connaissances sur les comportements du transfert de chaleur et de champ d'écoulement à l'intérieure du domaine d'intérêt, afin d'optimiser les qualités fonctionnelles des parois, d'autres parts de vérifier numériquement l'existence de certaines routes vers le chaos déterministe, [63]–[72].

Le cas d'écoulement de convection naturelle dans une cavité carrée/cubique différentiellement chauffée, a été mené par G. De Gassowski *et al* [73]. Les calculs mettent en évidence la première bifurcation ( $Ra \approx 3,2 \times 10^7$ ). Les principaux résultats sont d'une part, l'écoulement redevient stationnaire pour des valeurs du nombre de Rayleigh  $Ra$  plus élevées ( $Ra = 7 \times 10^7$  et  $10^8$ ) et d'autre part, des solutions stationnaires multiples et différentes par leurs propriétés de symétrie, ont été obtenues pour  $Ra = 10^8$ . Enfin, l'écoulement redevient instationnaire aux alentours de  $Ra = 3 \times 10^8$ .

Les écoulements convectifs à nombre de Prandtl faible d'un fluide contenu dans une cavité bidimensionnelle soumise à un gradient thermique latéral sont numériquement étudiés par I. Mercader *et al* [74] en utilisant différentes techniques. Deux cas de conditions aux limites thermiques sur les plaques horizontales sont considérés parfaitement conducteurs et adiabatiques. Les auteurs trouvent une transition du flux constant aux oscillations périodiques à travers une bifurcation de Hopf supercritique qui maintient la symétrie de la circulation de base. Pour un nombre de Rayleigh environ dix fois supérieur à celui de la bifurcation de Hopf,

le système initie un scénario complexe de bifurcations. Dans le cas conducteur, ceux-ci comprennent une voie quasi périodique vers le chaos. Dans le domaine adiabatique, la dynamique est dominée par l'interaction de deux bifurcations Neimark-Sacker des solutions périodiques de base conduisant à la coexistence stable de trois fréquences incommensurables, et finalement au chaos.

Une étude numérique de la convection naturelle instationnaire à l'intérieur d'une cavité carrée remplie d'air, chauffée à partir de deux côtés opposés et refroidie des deux autres côtés a été menée et analysée par M. A. Randriazanamparany *et al* [75]. Le comportement du système avec un nombre croissant de Rayleigh est analysé. Les auteurs montrent que le système transite d'un point fixe vers le chaos via un cycle limite, une cascade de dédoublement de période, des fenêtres périodiques et des bifurcations tangentielles. M. Zhao *et al* [76] ont étudié numériquement la convection mixte instationnaire dans une enceinte ventilée bidimensionnelle. Les mécanismes de flottabilité causée par le nombre de Richardson et le forçage par le flux d'entrée causé par le nombre de Reynolds, conduisent à une interaction complexe. Les résultats sont obtenus pour une plage du nombre de Richardson de 0 à 20 à  $Pr = 0,701$  et le nombre de Reynolds est compris entre 1000 et 2500. Les résultats montrent qu'en fonction des valeurs de  $Re$  et  $Ri$ , le flux à l'intérieur de l'enceinte peut être régulier, périodique, non périodique ou turbulent. En outre, certaines caractéristiques des systèmes dynamiques non linéaires tels que la bifurcation de Hopf, les oscillations auto-entretenues sont également observées.

La transition vers le chaos dans la convection de Rayleigh-Bénard (CRB) d'un fluide à faibles valeurs du nombre de Prandtl a été mise en évidence par N. Yada *et al* [77]. Des simulations numériques directes (SND) tridimensionnelles détaillées des équations gouvernantes le CRB sont réalisées à cet effet. SND pour  $Pr = 0.025$  montre deux voies possibles vers le chaos, à savoir via la voie de dédoublement de période et la route quasi-périodique.

S. Paul *et al* [78] ont étudié l'origine des différentes configurations convectives pour le nombre de Prandtl  $Pr = 6,8$  (pour l'eau à température ambiante) à l'aide de diagrammes de bifurcation construits à l'aide de simulations numériques directes (SND) de convection de Rayleigh-Bénard. Plusieurs écoulements complexes résultent de bifurcations ainsi que divers cas de transitions ont été observés. Les transitions jouent un rôle essentiel dans la détermination de divers modèles d'écoulement convectif. Après une transition de l'état de conduction vers les états de convection, les auteurs ont observés des rouleaux périodiques et quasi périodiques à

travers les bifurcations de Hopf et Neimark-Sacker à  $Ra = 80$  et  $Ra = 500$  respectivement (où  $Ra$  est le nombre de Rayleigh normalisé). La transition à la turbulence des écoulements de convection naturelle entre deux plaques verticales infinies est étudié par A. Cimarelli *et al* [79]. Pour l'étude du problème, un certain nombre de simulations numériques directes (SND) ont été réalisées. Pour les faibles valeurs de Rayleigh, les prédictions des régimes d'écoulement sont cohérentes avec les résultats analytiques classiques et les analyses de stabilité linéaire. En particulier, de la première bifurcation ( $Ra \approx 5800$ ) du régime de conduction laminaire à la convection stable est correctement capturée. En augmentant le nombre de Rayleigh au-delà d'une seconde valeur critique ( $Ra \approx 10200$ ), le régime d'écoulement devient chaotique. Cette transition vers le chaos se révèle liée à l'amplification des instabilités dans le sens de l'envergure se produisant à des échelles plus grandes que l'espace du canal,  $H$ .

La simulation numérique directe est utilisée par Z. Gao *et al* [80] pour étudier le flux d'air entre deux plaques verticales maintenues à différentes températures. Les dimensions périodiques des plaques sont faibles de manière à ne recevoir qu'une structure d'écoulement, qui consiste en un rouleau de convection avec des tresses obliques de tourbillon. À des nombres inférieurs de Rayleigh, le rouleau et les tresses croissent et rétrécissent alternativement suivant un processus cyclique. Au fur et à mesure que le nombre de Rayleigh augmente, le flux devient chaotique à travers une cascade de doublage de période.

Le cas d'un flux de convection thermique bifurqués issus d'un cylindre horizontal centré dans une enceinte à section carrée sont étudiés numériquement par D. Angeli *et al* [81] dans le but d'obtenir une description plus détaillée de la séquence des transitions conduisant à l'apparition du chaos et d'obtenir une estimation plus précise de la valeur du paramètre critique principal du système. Seule une valeur du rapport d'aspect géométrique  $A$  du système est considérée, à savoir  $A = 2,5$ , pour laquelle une cascade de doublage de période a été observée. Les résultats mettent en évidence des caractéristiques nouvelles et intéressantes dans la voie du chaos, comme une fenêtre de flux quasi-périodique et la détection d'orbites de période d'ordre élevé.

Une étude numérique sur les routes du chaos pour une convection naturelle laminaire transitoire dans une enceinte carrée avec des parois adiabatiques horizontales a été menée et analysée par S. Aklouche-Benouaguel *et al* [82]. Les effets du nombre de Rayleigh sur le transfert de chaleur ont été analysés, et les routes vers le chaos empruntées par le flux convectif. Au fur et à mesure que le nombre de Rayleigh augmentait, la structure de l'écoulement partait

de quatre cellules à trois cellules oscillantes. La première bifurcation de Hopf a été observée. Des flux quasi-périodiques sont apparus avant le début du chaos.

Un champ d'écoulement riche et complexe dû à la convection naturelle est étudié numériquement par T. W. H. Sheu *et al* [83] dans une cavité cubique grâce au diagramme de bifurcation, au cycle limite, au spectre de puissance et au portrait de phase. Le scénario de bifurcation a été confirmé pour avoir une fréquence harmonique initialement unique. Avant le chaos, dans les cinq fréquences liées arithmétiquement prédites, il existe une fréquence incommensurable aux deux autres fréquences fondamentales. Cette étude numérique montre que le système non linéaire étudié, qui implique des bifurcations doublent la fréquence, perd sa stabilité à une bifurcation quasi-périodique caractérisée par la formation d'une fréquence sous-harmonique. À la suite de la formation de trois bifurcations doublent la fréquence et d'une bifurcation quasi-périodique, on a observé un nombre infini de fréquences dans des conditions d'écoulement avec les nombres croissant de Rayleigh. Enfin, l'attracteur chaotique devait être développé à partir de l'attracteur étrange dans les portraits de phase correspondants.

Les écoulements de convection naturelle provenant d'un cylindre horizontal centré dans une enceinte à section carrée sont étudiés numériquement par D. Angeli *et al* [84]. La suite des bifurcations marquent la transition des solutions à point fixe de base vers les écoulements instables et chaotiques est suivie pour les valeurs croissantes du nombre de Rayleigh et pour deux valeurs du rapport d'aspect de l'enceinte,  $A$ . Les résultats montrent que, pour les valeurs inférieures de  $A$ , la route vers le chaos est déclenchée par une bifurcation de Hopf supercritique, suivie d'une séquence de doublements de période. Tandis que pour la valeur  $A$  plus élevée, la symétrie du système est rompue par une bifurcation de fourche.

D. H. Kang *et al* [85] ont étudié numériquement l'effet de l'emplacement d'un cylindre chauffé à l'intérieur le long d'une ligne horizontale ou diagonale dans une enceinte refroidie, sur le champ d'écoulement et le transfert de chaleur pour un nombre de Rayleigh  $Ra = 10^7$ . Les champs d'écoulement et les champs thermiques bifurquent de l'état stable ou instable à l'état instable ou stable aux positions critiques. Ce phénomène se produit à la fois sur les lignes horizontales et diagonales. L'origine majeure de l'état instable dépend de la position du cylindre.

C. C. Liao *et al* [86] ont mené une étude numérique de la convection naturelle dans des domaines à géométrie courbe. L'influence du nombre de Prandtl (0.71-0.07) sur la structure de l'écoulement est étudiée. Les résultats montrent que, en réduisant le nombre de Prandtl, le flux

subit une transition à partir de l'état de panache thermique unique stable, état stable de double panache thermique et ensuite à l'état instable pour  $Ra \leq 2 \cdot 10^6$ . Cependant, à un nombre de Rayleigh élevé ( $Ra > 2 \cdot 10^6$ ), la transition passe directement de l'état monophasé constant à l'état instable sans passer par le régime du double panache. Les variations du seuil  $Pr$  lors de la transition du panache simple au panache double ou au régime instationnaire à différents nombres de Rayleigh sont également abordées.

Des analyses détaillées ont été récemment rapportées par D. Angeli *et al* [87] sur la dynamique d'ordre faible d'un panache thermique provenant d'une source de chaleur cylindrique horizontale concentrique à une enceinte carrée refroidie par une isotherme remplie d'air. En particulier, dans la gamme  $0 < Ra < 3R_{acr}$ , avec  $R_{acr}$  correspondant à la perte de stabilité du panache flottant stationnaire, toute l'évolution d'un cycle limite périodique à la naissance du chaos par une cascade de doublement de la période a été pleinement explorée.

La cascade complète de bifurcations de convection régulière à la convection chaotique est considérée par L. Oteski *et al* [88] numériquement à l'intérieur d'une cavité chauffée différentiellement est remplie d'air. Les résultats montrent les structures modales extraites de séries temporelles révèlent l'apparition d'oscillations internes lentes au centre de la cavité. D'autres fenêtres de quasi-périodicité ont été détectées sur chaque itinéraire. Les différents régimes finissent par disparaître en faveur d'un régime hyperchaotique unique, globalement symétrique.

P. F. Kieno *et al* [89] ont mené une étude numérique de la convection naturelle transitoire dans une cavité cubique inclinée remplie d'air en utilisant la formulation de vorticités et fonction des courants pour les équations de Navier-Stokes afin d'explorer la route vers le chaos. Deux angles d'inclinaison de la cavité de  $25^\circ$  et  $65^\circ$  sont considérés. L'étude prédit différents nombres de Rayleigh critiques pour les deux angles inclinés caractérisant la variation du comportement des attracteurs et montre que plus le nombre de Rayleigh est grand, plus l'attracteur devient sensible au pas de temps. Les trajectoires vers le chaos suivies de l'attracteur sont : point limite / cycle limite / tore T2 / cycle monté sur un tore / chaos T2 / tore T2 / cycle monté sur un tore / chaos T2 lorsque le nombre de Rayleigh augmente. L'analyse confirme également la bifurcation de l'attracteur d'un point limite à un cycle limite via une bifurcation de Hopf surcritique pour un nombre de Rayleigh compris entre  $1.95 \times 10^6$  et  $1.96 \times 10^6$ .

Un modèle de calcul est présenté par H. Dillon *et al* [90] qui étend les travaux antérieurs sur la convection naturelle instationnaire dans une cavité rectangulaire. Une analyse spectrale détaillée montre un comportement dynamique du système au-delà de la bifurcation de Hopf qui n'a pas été observé précédemment. Une gamme de Rayleigh plus large révèle un nouveau comportement dynamique du système pour la géométrie rectangulaire, en particulier un retour à un comportement oscillatoire stable.

La convection naturelle de l'air dans une cavité carrée bidimensionnelle avec deux parois verticales non uniformément chauffées et les deux autres maintenues adiabatiques, est étudiée numériquement par S. Laouar *et al* [91]. Le système passe en régime oscillatoire via une bifurcation Hopf supercritique suivie d'une bifurcation Hopf sous critique à un nombre critique de Rayleigh de  $4,26 \cdot 10^6$ . L'état chaotique est observé pour le nombre de Rayleigh supérieur à  $1,4 \cdot 10^7$ .

S. A. Benouaguel *et al* [92] ont proposé une analyse numérique d'une convection naturelle instationnaire bidimensionnelle dans une cavité carrée remplie d'air et inclinée de 45 degrés par rapport à l'horizontale. Les parois verticales sont soumises à des températures non uniformes alors que les parois horizontales sont adiabatiques. L'influence du nombre de Rayleigh sur les routes du chaos emprunté par la convection naturelle développée dans cette cavité a été effectuée. Une corrélation entre le nombre de Nusselt et le nombre de Rayleigh est proposée. Cette étude a montré que l'écoulement dans la cavité subit des séquences de bifurcation de l'état stationnaire à un état oscillatoire convectif. L'étude au voisinage du point critique a permis de caractériser la nature de la première bifurcation de Hopf.

## 1.8 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons mis l'accent sur le concept de la théorie du chaos et les systèmes dynamique non linéaires. A cet effet, une représentation des outils, que nous jugeons nécessaire afin de caractériser ces systèmes, ont été mis en évidence.

Une étude bibliographique nous a montré que le transfert de chaleur par convection induit dans une cavité a fait l'objet de nombreuses études en raison de l'importance du phénomène dans de nombreuses applications. Tous les travaux cités dans ce travail, clarifient un ensemble de phénomènes physiques observés dans les cavités. Cependant, le cas d'une cavité soumise

aux différentes combinaisons aux conditions aux limites (DCCL) dans le cas de la convection naturelle et mixte n'a jamais été traité, notamment la route vers le chaos dans les systèmes thermiques engendrés par (DCCL). Pour fournir plus des clarifications supplémentaires, nous suggérons une approche numérique à l'étude de la convection sous l'effet de (DCCL) à chaque situation des paramètres de contrôles. A cet effet, le chapitre suivant est consacré à la représentation du problème considéré dans cette thèse.

## 2 Modélisation mathématique et position du problème

*La vérité est parfaite pour les mathématiques, la chimie, la philosophie, mais pas pour la vie.*

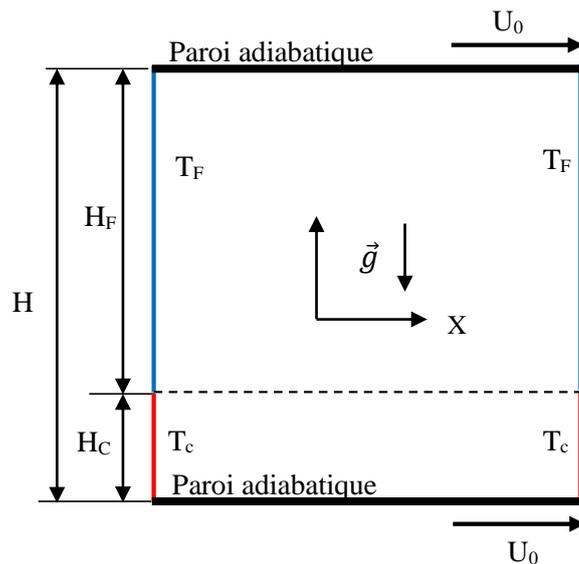
### 2.1 Introduction

Ernesto Sabato

Les systèmes dynamiques traités dans ce travail sont les phénomènes physiques résultants des modes de transfert de chaleur. En effet, ces systèmes sont de nature complexe en raison du caractère non linéaire. Or, la mise en évidence de ces problèmes, plusieurs voies et approches sont possibles à savoir, l'approche expérimentale, analytique et numérique. Dans certaines situations, l'approche expérimentale s'avère impossible à réaliser vu qu'elle présente des difficultés majeures notamment en termes de coût en temps et en argent. Ainsi, l'approche analytique des équations ne sont possibles que pour des cas simples. C'est pour cette raison qu'on a souvent recours à des approches numériques en utilisant les différences finies, les éléments finis, les volumes finis, les méthodes spectrales ou l'approche de Lattice Boltzmann afin d'avoir des solutions proches des cas réels. Dans ce manuscrit, nous avons fait appel à la méthode des volumes finis. En effet, cette méthode est conservative, donc parfaitement adaptées à la résolution de loi de conservation. Son avantage est qu'elle est facilement utilisable avec des maillages non structurés car, en matière de discrétisation des lois de conservation, sa formulation ne tient pas compte de la complexité du maillage. En revanche, les caractéristiques géométriques du maillage peuvent jouer un rôle prépondérant lorsque des flux diffusifs entrent en jeu.

### 2.2 Description du problème

On propose d'étudier numériquement le phénomène de transfert de chaleur et le champ d'écoulement d'un fluide newtonien dans une cavité carrée avec un rapport de forme  $A$  égal à l'unité. **Figure 2-1**, montre la géométrie considérée. Les parois verticales sont composées de deux parties. La partie inférieure des parois verticales est maintenue à une température chaude de hauteur  $H_C$  et la moitié supérieure est maintenue à une température froide de hauteur  $H_F$ . La hauteur totale de la cavité est  $H$ . Nous avons considéré trois cas de conditions aux limites thermique.



**Figure 2-1.** Géométrie du problème physique considéré.

Le premier cas, consiste à considérer le quart bas des parois verticales maintenu à une température chaude, le reste est maintenu à une température Froide d'où  $H_C = 0.25$ ,  $H_F = 0.75$ , ( $H = 1$ ). Deuxième cas, les deux parties ont une même dimension  $H_C = 0.5$  et  $H_F = 0.5$ . Finalement, le troisième cas, le trois quart bas des parois verticales est maintenu à une température chaude, le reste est maintenu à une température froide  $H_C = 0.75$ ,  $H_F = 0.25$ . Les parois horizontales sont adiabatiques, immobiles dans le cas de la convection naturelle et elles sont soumises à une vitesse constante, dans la direction positive de  $X+$ , dans le cas de la convection mixte. L'axe  $X$  est parallèle aux parois adiabatiques, l'axe  $Y$  est parallèle aux parois verticales et la gravité est dirigée vers le bas.

### 2.3 Hypothèse simplificatrices

Pour la modélisation du problème, nous considérons ;

- L'écoulement bidimensionnel d'un fluide newtonien.
- Un fluide incompressible.
- Le régime est laminaire, est supposé être, d'une part, permanent dans le cas de la convection naturelle, qui sera présenté dans le chapitre suivant, d'autre part,

instationnaire dans le cas de la convection mixte, qui sera présenté dans le dernier chapitre.

- Les transferts par rayonnement sont négligeables.
- La dissipation visqueuse est négligée dans l'équation de l'énergie.

### 2.3.1 Approximation de Boussinesq

Dans le cas où les variations de température sont prises comme suffisamment faibles pour que les propriétés physiques du fluide puissent être considérées comme constantes (à ne pas dépasser un écart de température à peu près de 40°C à 50°C pour les fluides incompressible), les variations de la masse volumique au sein du fluide sont faibles. Les variations de la masse volumique sont négligées partout dans les termes de l'équation de quantité de mouvement, sauf dans le terme des forces de volumes causées par la gravité. En effet, L'hypothèse de Boussinesq suppose que la densité du fluide dans ce terme, varie linéairement avec la température, ce qui amène à la relation suivante :

$$\rho = \rho_{réf} \left( 1 - \beta(T - T_{réf}) \right) \quad (2.1)$$

Où  $\rho_{réf}$  et  $T_{réf}$  dénotent respectivement, la masse volumique et la température de référence,  $\beta$  est le coefficient d'expansion thermique à pression constantes, donné par l'expression suivante :

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (2.2)$$

D'où ce coefficient est inversement proportionnel à la température de référence, il est donné par la relation suivante ;

$$\beta = \frac{1}{T_{réf}} \quad (2.3)$$

## 2.4 Mise en équations

Les équations qui régissent l'écoulement et le transfert thermique sont les équations de conservation de la masse, de quantité du mouvement et de d'énergie.

### 2.4.1 Equation de continuité

En mécanique des fluides, le principe de conservation de masse peut être décrit par l'équation de continuité sous plusieurs formes différentes : locale conservative (dérivée en

temps normale), locale non conservative (la dérivée en temps suit la particule dans son mouvement), ou intégrale. L'équation de conservation de la masse ou de continuité sous la forme locale est ;

$$\frac{\partial \rho}{\partial \bar{t}} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad (2.4)$$

### 2.4.2 Equation de Naviers-Stockes

Les équations de Navier-Stokes sont des équations aux dérivées partielles non linéaires qui décrivent le mouvement des fluides newtoniens, l'équation sous forme vectoriel est ;

$$\rho \frac{\partial(\vec{u})}{\partial \bar{t}} + \rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\vec{\nabla}p + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{u} + \rho \vec{g} \quad (2.5)$$

### 2.4.3 Equation d'énergie

Le transfert est géré par une équation différentielle au quelle obéit la température, l'équation est donnée par ;

$$\frac{\partial T}{\partial \bar{t}} + \vec{u} \vec{\nabla} T = \alpha \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} T) \quad (2.6)$$

### 2.4.4 Variables adimensionnelles

Il est plus favorable de présenter les équations qui gouvernent le phénomène de transfert de chaleur et le champ d'écoulement sous une forme adimensionnelle. Des nombres adimensionnels caractéristiques vont apparaître ce qui réduirait d'avantage la complexité du problème.

Dans ce présent travail, les équations régissant le phénomène de convection dans une cavité ont été adimensionnées en utilisant des variables caractéristiques. A cet effet, la hauteur H entre les deux parois adiabatiques de la cavité a été choisie comme hauteur de référence. La vitesse est adimensionnée, d'une part, par rapport à la diffusivité thermique dans le cas de la convection naturelle, d'autre part par rapport à la vitesse du déplacement des parois horizontales dans le cas de la convection mixte. Finalement, la température a été adimensionnée par rapport à l'écart de température  $\Delta T = T_C - T_F$  entre les parois isothermes. Les variables adimensionnelles sont données par :

$$X = \frac{x}{H}, Y = \frac{y}{H}, \quad (2.7)$$

$$\theta = \frac{T-T_F}{T_C-T_F}, Pr = \frac{\mu}{\rho\alpha}, \quad (2.8)$$

$$(U, V) = (u, v) \frac{H}{\alpha}, t = \alpha \frac{\bar{t}}{H^2}, P = \frac{\rho H^2}{\rho\alpha^2} \quad \text{pour le cas de la convection naturelle} \quad (2.9)$$

$$(U, V) = \frac{(u, v)}{U_0}, t = U_0 \frac{\bar{t}}{H}, P = \frac{\rho H^2}{\rho U_0^2} \quad \text{pour le cas de la convection mixte} \quad (2.10)$$

$$Ra = \frac{g\beta(\Delta T)\rho^2 H^3 Pr}{\mu^2}, Re = \frac{\rho H U_0}{\mu}, Ri = \frac{Gr}{Re^2} \quad (2.11)$$

A partir de la température adimensionnelle, nous pouvons calculer la température moyenne adimensionnelle suivante ;

$$\theta_{Moyenne} = \int_0^1 \theta dX \Big|_{(X,Y)} \quad (2.12)$$

- **Cas 1 ;**

$$\theta_{Moyenne} = \int_0^1 \theta dX \Big|_{(X,0.25)} \quad (2.13)$$

- **Cas 2 ;**

$$\theta_{Moyenne} = \int_0^1 \theta dX \Big|_{(X,0.75)} \quad (2.14)$$

- **Cas 3 ;**

$$\theta_{Moyenne} = \int_0^1 \theta dX \Big|_{(X,0.75)} \quad (2.15)$$

Pour tous les cas la valeur moyenne temporelle de la température adimensionnelle dans les coordonnées  $X = 0.25, Y = 0.75$ , est donnée par la formule suivante ;

$$\theta_{Moyenne} = \frac{1}{t} \int_0^t \theta dt \Big|_{(0.25,0.75)} \quad (2.16)$$

Ra est le nombre de Rayleigh, est un paramètre de contrôle sans dimension reliant, dans le cas de la convection naturelle, les effets de la force de gravité à la viscosité du fluide à l'intérieure de la cavité.

Re est le nombre de Reynolds, est un paramètre de contrôle sans dimension. Il représente essentiellement le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses. Il caractérise un écoulement, en particulier la nature de son régime (laminaire, transitoire, turbulent).

Ri est le nombre de Richardson, est un paramètre de contrôle sans dimension. Il représente le rapport entre l'énergie potentielle gravitationnelle d'une masse fluide et son énergie cinétique. Ou bien tout simplement l'importance de la convection naturelle par rapport à la convection forcée. Il est utilisé dans le cas de la convection mixte.

Pr est le nombre de Prandtl, un paramètre de contrôle sans dimension. Il caractérise les propriétés thermo-physiques du fluide ou la nature du fluide. Il compare l'importance relative de la diffusion de quantité de mouvement (viscosité) et de la diffusion de chaleur (conduction).

Ces paramètres engendrent des effets considérables sur le transfert de chaleur et le champ d'écoulement, et par conséquent le système devient de plus en plus chaotique avec l'augmentation de ces paramètres de contrôles.

## 2.4.5 Equations adimensionnelles

Tenant compte des hypothèses citées avec l'introduction des variables adimensionnelles déjà précisées, les équations qui gouvernent le phénomène devient sous leurs forme adimensionnelles suivants ;

### 2.4.5.1 L'équation de continuité

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (2.17)$$

### 2.4.5.2 Equation de quantité de mouvement

- Formulation en convection naturelle ;

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + Pr \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad (2.18)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + Pr \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + RaPr\theta \quad (2.19)$$

- Formulation en convection mixte ;

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + Ri\theta \quad (2.21)$$

### 2.4.5.3 Equation d'énergie

- Formulation en convection naturelle ;

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (2.22)$$

- Formulation en convection mixte ;

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{PrRe} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (2.23)$$

## 2.5 Conditions aux limites

Le système d'équations différentielles gouvernant le phénomène est fermé à l'aide des conditions aux frontières appropriées. En plus du choix de la cavité du confinement, il est nécessaire d'imposer les conditions aux limites sur ces frontières afin d'avoir une solution globale sur l'ensemble de la géométrie. Les conditions aux limites et les conditions initiales représentatives du problème considéré dans cette étude sont illustrées sur les tableaux suivants ;

**Tableau 2-1.** Conditions aux limites,  $t > 0$ .

	Cas I	Cas II	Cas III
$0 \leq X \leq 1, Y = (0, 1)$	$\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0$ $V = 0, U = (0,1)$	$\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0$ $V = 0, U = (0,1)$	$\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0$ $V = 0, U = (0,1)$
$0 \leq Y \leq 0.25, X = (0, 1)$	$\theta = 1$ $V = U = 0$	/	/
$0.25 \leq Y \leq 1, X = (0, 1)$	$\theta = 0$ $V = U = 0$	/	/
$0 \leq Y \leq 0.5, X = (0, 1)$	/	$\theta = 1$ $V = U = 0$	/
$0.5 \leq Y \leq 1, X = (0, 1)$	/	$\theta = 0$ $V = U = 0$	/
$0 \leq Y \leq 0.75, X = (0, 1)$	/	/	$\theta = 1$ $V = U = 0$
$0.75 \leq Y \leq 1, X = (0, 1)$	/	/	$\theta = 0$ $V = U = 0$

**Tableau 2-2.** Conditions initiales,  $t = 0$ .

	Cas I	Cas II	Cas III
$t = 0$	$\theta = 0.5$ $v = u = 0$	$\theta = 0.5$ $v = u = 0$	$\theta = 0.5$ $v = u = 0$

Notons que pour  $U = 0$  la convection est naturelle dans le cas contraire  $U = 1$  la convection est mixte.

## 2.6 Transfert de chaleur

Le taux du transfert de chaleur est donné par le nombre de Nusselt. Ce nombre mesure principalement l'importance de la convection par rapport à la conduction. Plus le nombre de Nusselt est important, plus l'échange thermique par convection est efficace. En effet, le nombre de Nusselt peut être calculé par la formule suivante ;

$$Nu = \frac{hH}{k} \quad (2.24)$$

Où  $h$ ,  $H$  et  $k$  sont ; le coefficient d'échange par convection, hauteur caractéristique de la cavité et la conductivité thermique du fluide, respectivement.

Pour une cavité différentiellement chauffée par les côtés, le nombre de Nusselt moyen est calculé moyennant les nombres de Nusselt locaux calculés au niveau de tous les nœuds de la paroi isotherme. En effet, le nombre de Nusselt local sur les parois isothermes est donné par l'expression suivante ;

$$Nu = \left( -\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)_{X=0,1} \quad (2.25)$$

Les nombres de Nusselt moyens sur les parois chaudes sont donnés par les relations suivantes ;

$$Nu = \int_0^{0.25} \left( -\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)_{X=0} dY + \int_0^{0.25} \left( -\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)_{X=1} dY, \text{ pour le premier cas} \quad (2.26)$$

$$Nu = \int_0^{0.5} \left( -\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)_{X=0} dY + \int_0^{0.5} \left( -\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)_{X=1} dY, \text{ pour le deuxième cas} \quad (2.27)$$

$$Nu = \int_0^{0.75} \left( -\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)_{X=0} dY + \int_0^{0.75} \left( -\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)_{X=1} dY, \text{ pour le troisième cas} \quad (2.28)$$

## 2.7 Méthode numérique

La résolution numérique des équations a été effectuée sur une configuration bidimensionnelle par la méthode des volumes finis à l'aide du logiciel CFD (Computational Fluid Dynamics) Fluent 14.0 disponible dans le laboratoire. Le maillage utilisé a été réalisé sur Gambit 2.3 pour la géométrie considérée.

La méthode numérique des Volumes Finis consiste à discrétiser le domaine géométrique de calcul en sous-domaines ou volumes de contrôle dont les faces suivent les lignes de coordonnées. Son principe est très simple, initialement développé dans le cas des écoulements compressibles par A. N. Tikhonov [93] et J. Glimm [94], puis répandu dans la communauté scientifique des mécaniciens par S. Patankar [95] dans les années 1980. Le principe repose essentiellement sur le théorème de la divergence qui consiste à exprimer la conservation des flux d'une variable dans son volume de contrôle délimité par sa surface, et contenant un point de discrétisation de l'inconnue et sur ce volume de contrôle, les équations de transport sont intégrées.

Le logiciel Fluent permet de choisir le modèle de discrétisation pour les différentes équations régissant dont l'algorithme SIMPLE est utilisé pour résoudre le système d'équations algébriques couplées. La discrétisation spatiale des équations, de quantité de mouvement, de continuité et de l'énergie est effectuée par un schéma décentré de second ordre. L'équation de pression est discrétisée par le schéma PRESTO. Un schéma PRESTO (pour PREssure STaggering Option) emploie l'équilibre discret de continuité pour un volume de contrôle "décalé" par rapport à la face où l'on calcule la pression. Le critère de convergence considéré comme résiduel est admis à  $10^{-7}$  pour toutes les équations dans le cas stationnaire et instationnaire.

## 2.8 Conclusion

Dans cette partie, nous avons présenté le problème considéré ainsi que les conditions aux limites associées à la géométrie correspondante au phénomène qui se développe dans une cavité confinée. Des considérations simplificatrices ont permis de modéliser les équations qui

décrivent le champ d'écoulement et le transfert de chaleur. Finalement, un choix de la méthode numérique approprié à l'étude a été effectué.

Les deux chapitres qui suivent, seront consacrés, respectivement, à la représentation des différents résultats qui ont été trouvés pour le cas de la convection naturelle permanente et la convection mixte transitoire.

### 3 Approche numérique pour l'étude de la convection naturelle stationnaire dans une cavité carrée

*Tout ce qui est vraiment grand et inspiré n'a été réalisé que par des individus travaillant librement.*

#### 3.1 Introduction

*Albert Einstein*

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats des simulations numériques bidimensionnelles de la convection naturelle induite dans une cavité carrée. Les parois horizontales de la cavité sont maintenues adiabatiques et sont soumises aux conditions de non glissement. Les parois verticales sont maintenues à des températures constantes. Le rapport de forme de la cavité est considéré constant et est égal à l'unité. L'étude est effectuée en fonction du nombre de Rayleigh et du nombre de Prandtl pour trois cas de combinaisons de conditions aux limites déjà précisées dans le chapitre précédent. Le but est d'étudier le développement des structures d'écoulement bidimensionnelles en fonction des paramètres de contrôle. Ces aspects s'avèrent d'une importance cruciale pour la prédiction des performances de transfert de chaleur et doivent donc être pris en considération lorsque des méthodes numériques sont utilisées pour simuler des problèmes réels. Pour cela, une validation du maillage approprié à la géométrie considérée et une comparaison des résultats bidimensionnels par rapport aux travaux de références sont également effectuées afin de s'assurer de l'exactitude de nos simulations numériques. Les résultats seront présentés sous forme d'illustrations des structures d'écoulement et des champs thermiques.

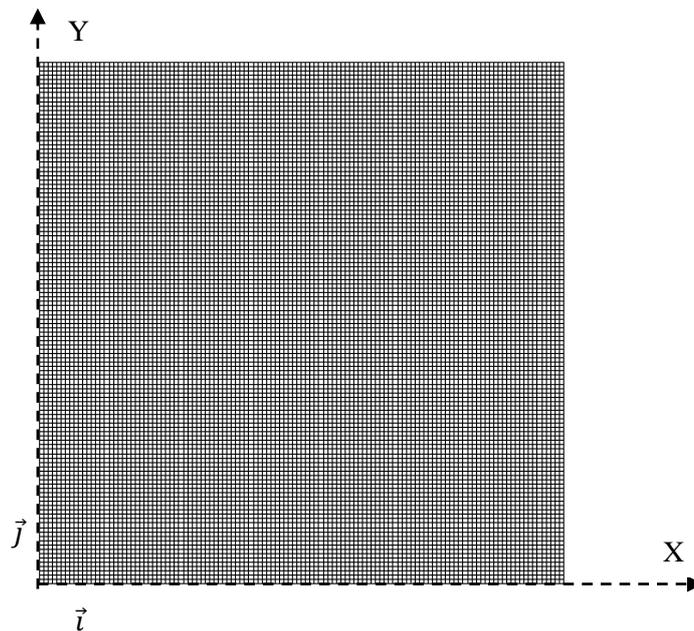
#### 3.2 Etude du maillage

Afin de déterminer une grille appropriée pour la géométrie considérée de telle sorte que la solution numérique demeure invariante avec la précision du maillage. Nous avons choisi une cavité carrée remplie d'air dont les nombre de Prandtl et Rayleigh sont fixés respectivement à,  $Pr = 0,71$  et  $Ra = 10^5$ . Sept grilles uniformes différentes, à savoir, 61X61, 81X81, 101X101, 121X121, 141X141, 161X161 et 181 X181 sont utilisées pour la validation du maillage approprié à notre cas. Le nombre de Nusselt moyen total sur les parois chaudes pour ces grilles est calculé pour chaque cas. Les résultats sont illustrés dans la **Tableau 3-1**. Comme l'indique le tableau, une grille uniforme de 121X121 est suffisamment fine pour le calcul numérique et

pour bien capturer le transfert de chaleur près des parois de la cavité. Cette grille donne le meilleur compromis entre le coût des calculs et de précision. En effet, nous avons opté pour ce maillage pour toutes les simulations de notre étude, **Figure 3-1**.

**Tableau 3-1.** Teste de sensibilité du maillage ( $Pr = 0.71$  et  $Ra = 10^5$ ).

Maillages	Cas I	Cas II	Cas III
	Nu	Nu	Nu
<b>61x61</b>	5.1565	4.3175	1.7396
<b>81x81</b>	5.5427	4.5005	1.8631
<b>101x101</b>	5.8388	4.6442	1.9586
<b>121x121</b>	6.0789	4.7621	2.0366
<b>141x141</b>	6.2810	4.8620	2.1025
<b>161x161</b>	6.4550	4.9485	2.1595
<b>181x181</b>	6.6087	5.0249	2.2097



**Figure 3-1.** Le domaine numérique avec un maillage de 121X121 nœuds.

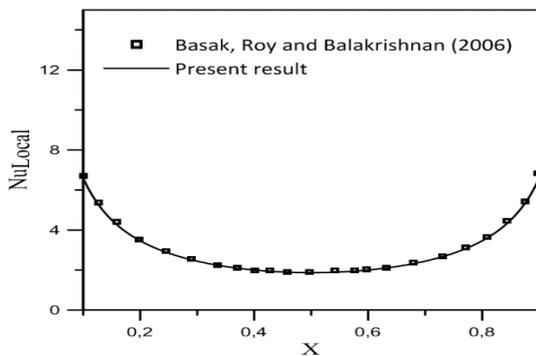
### 3.3 Validation numérique et expérimentale

Pour donner une crédibilité au schéma numérique proposé, le cas de la convection naturelle laminaire dans une cavité carrée avec une paroi de fond uniformément chauffée, et

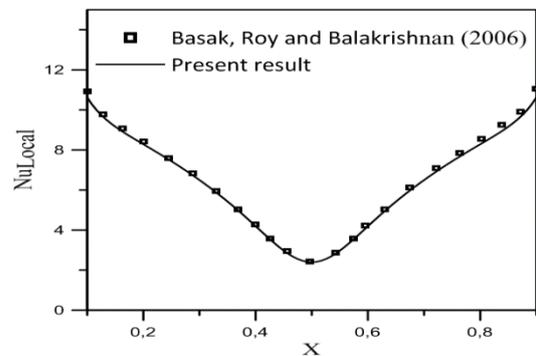
une paroi supérieure adiabatique et des parois verticales froides est analysée en utilisant le code présent, les résultats sont comparés aux résultats de T. Basak *et al* [20] pour le même problème. **Figure 3-2** montre l'évolution du nombre de Nusselt local au niveau de la paroi du fond obtenue par la présente simulation et les résultats obtenus par la référence. Une autre comparaison est faite pour le cas d'une cavité chauffée à partir de la paroi gauche et refroidie à partir de la droite. Les parois horizontales étaient adiabatiques en utilisant ce code, et les résultats sont comparés avec les résultats de G. De Vahl Davis [17] et M. Hortmann *et al* [18]. **Tableau 3-2** montre le nombre moyen de Nusselt de la paroi gauche obtenu par la présente simulation et les résultats obtenus par ces deux références. En effet, la **Figure 3-2** et la **Tableau 3-2**, montrent de très bons accords entre nos résultats et ceux donnés par les références. Cette identification justifie l'exactitude de nos résultats numériques.

**Tableau 3-2** Comparaison de nos résultats avec ceux de la référence.

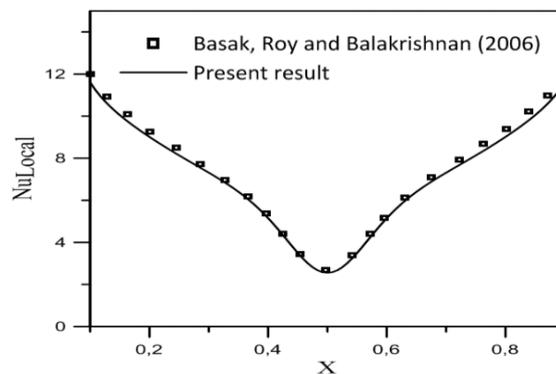
Ra	Nu (présent travail)	Nu (G. De Vahl Davis [17])	Nu (M. Hortmann <i>et al</i> [18])
$10^5$	4.53	4.50	4.55
$10^6$	8.92	9.035	9.00



$Ra = 10^3, Pr = 0.7$

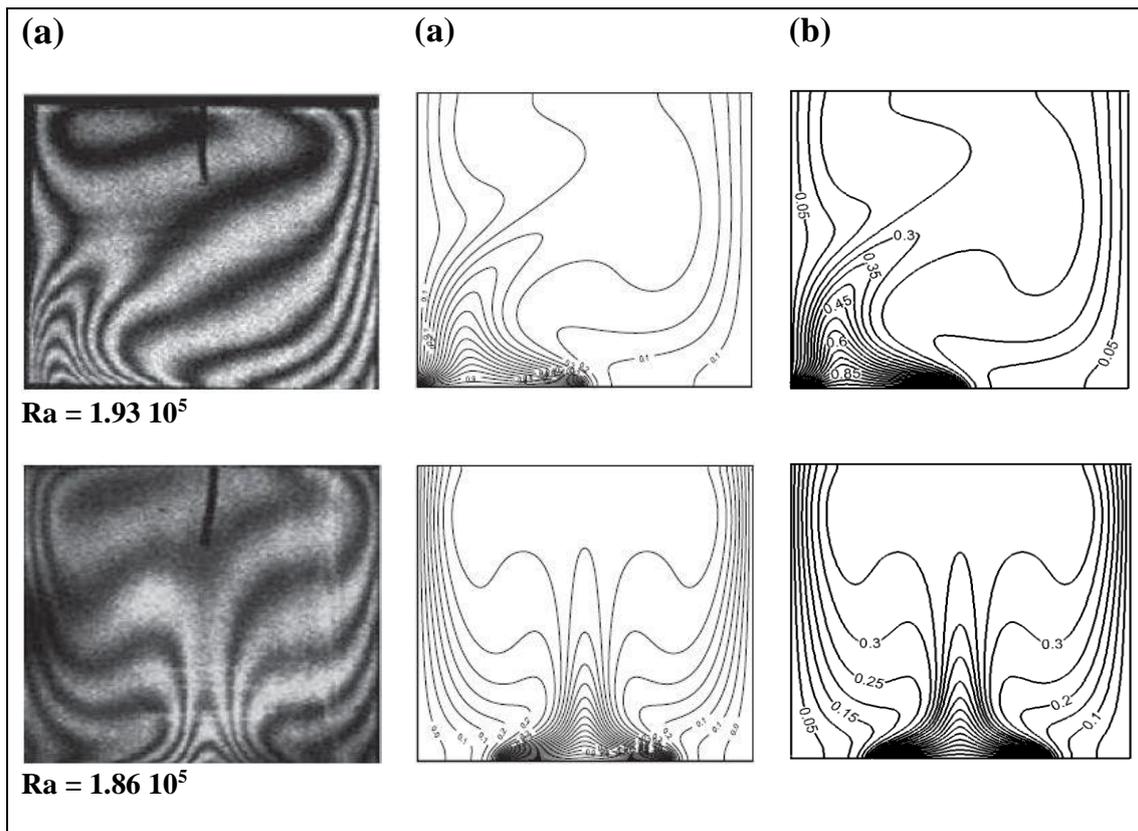


$Ra = 10^5, Pr = 0.7$



$Ra = 10^5, Pr = 10$

**Figure 3-2.** Comparaison entre nos résultats avec ceux de la référence.



**Figure 3-3.** (a) comparaison des lignes isothermes, (a) résultats de M. Muthtamilselvan *et al* [27], (b) nos résultats.

Nous avons aussi fait une validation par rapport aux travaux expérimentaux et numériques menés par Muthtamilselvan *et al* [27] dans le cas d'une cavité contenant une ailette soumise à une température chaude placée au fond de l'enceinte. Les parois verticales sont maintenues à une température froide, les parois horizontales sont adiabatiques. Nous avons comparé les isothermes pour  $Pr = 0.71$ . La **Figure 3-3** montre un très bon accord entre nos résultats numériques et les résultats expérimentaux donnés par la référence.

### 3.4 Résultats et discussion

Nous présentons nos résultats de simulation pour les trois cas de combinaison de conditions aux limites considérés à chaque nombre de Rayleigh ( $10^3 \leq Ra \leq 10^6$ ) et de nombre de Prandtl ( $0,71 \leq Pr \leq 7$ ). Nous allons, en premier lieu, présenter le comportement du champ d'écoulement donné par les lignes du courant, puis, nous allons tracer les profils de vitesse

d'écoulement dans la région centrale de la cavité. Par la suite, le transfert de chaleur sera présenté par les lignes isothermes et par le nombre de Nusselt local et moyen le long des parois latérales chaudes.

### 3.4.1 Champ d'écoulement

#### 3.4.1.1 Champ d'écoulement donné par les lignes du courant

Le champ d'écoulement donné par les lignes du courant est illustré en fonction du  $Ra$  et  $Pr$  dans la **Figure 3-4**, **Figure 3-5** et **Figure 3-6** pour les trois cas considérés, respectivement. Notons que, dans le cas de la convection naturelle, le mouvement de fluide à l'intérieure de la cavité est provoqué par les forces de flottabilités entraînées par le gradient de température. Ainsi, le mouvement de fluide causé par la convection se base sur un principe très simple, l'air chaud est moins dense que l'air froid, il a donc tendance à s'élever, puis, vu les conditions thermiques imposées sur les parois de la cavité, le fluide situé en haut a tendance à se refroidir ce qui entrainera une augmentation de sa densité qui lui permettra de descendre. Nous donnons dans la **Tableau 3-3** les variations de la densité de l'eau ( $Pr = 7$ ) en fonction de la température réalisées par ATOMER [96].

**Tableau 3-3.** Densité de l'eau en fonction de la température[96].

Température (°C)	Densité
0	0,999841
10	0,999701
20	0,998205
30	0,995649
40	0,99222
50	0,98803
60	0,98320
70	0,97778
80	0,97182
90	0,96535
100	0,95840

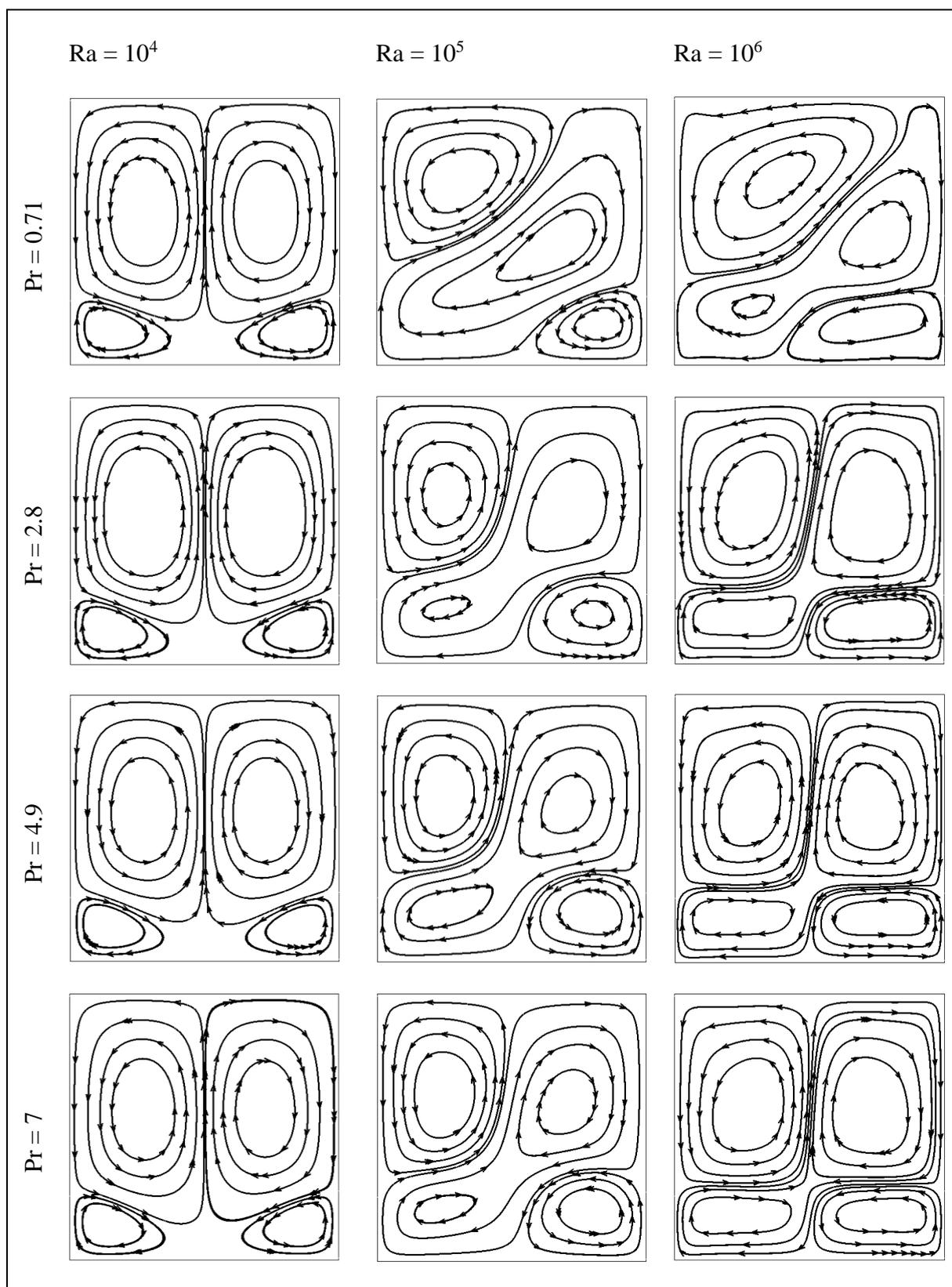


Figure 3-4. Lignes du courant en fonction de Pr et de Ra, Cas1.

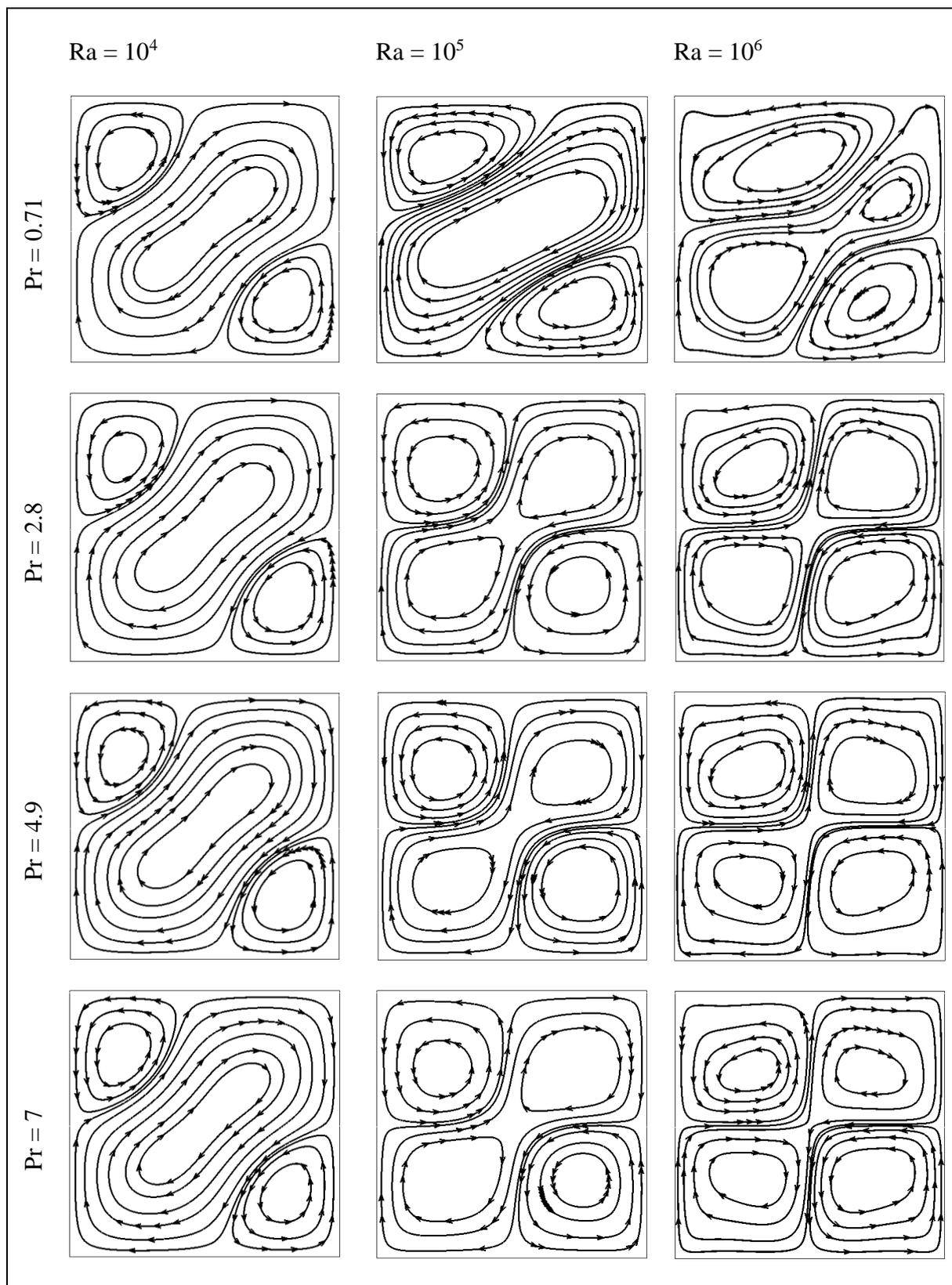


Figure 3-5. Lignes du courant en fonction de Pr et de Ra, Cas2.

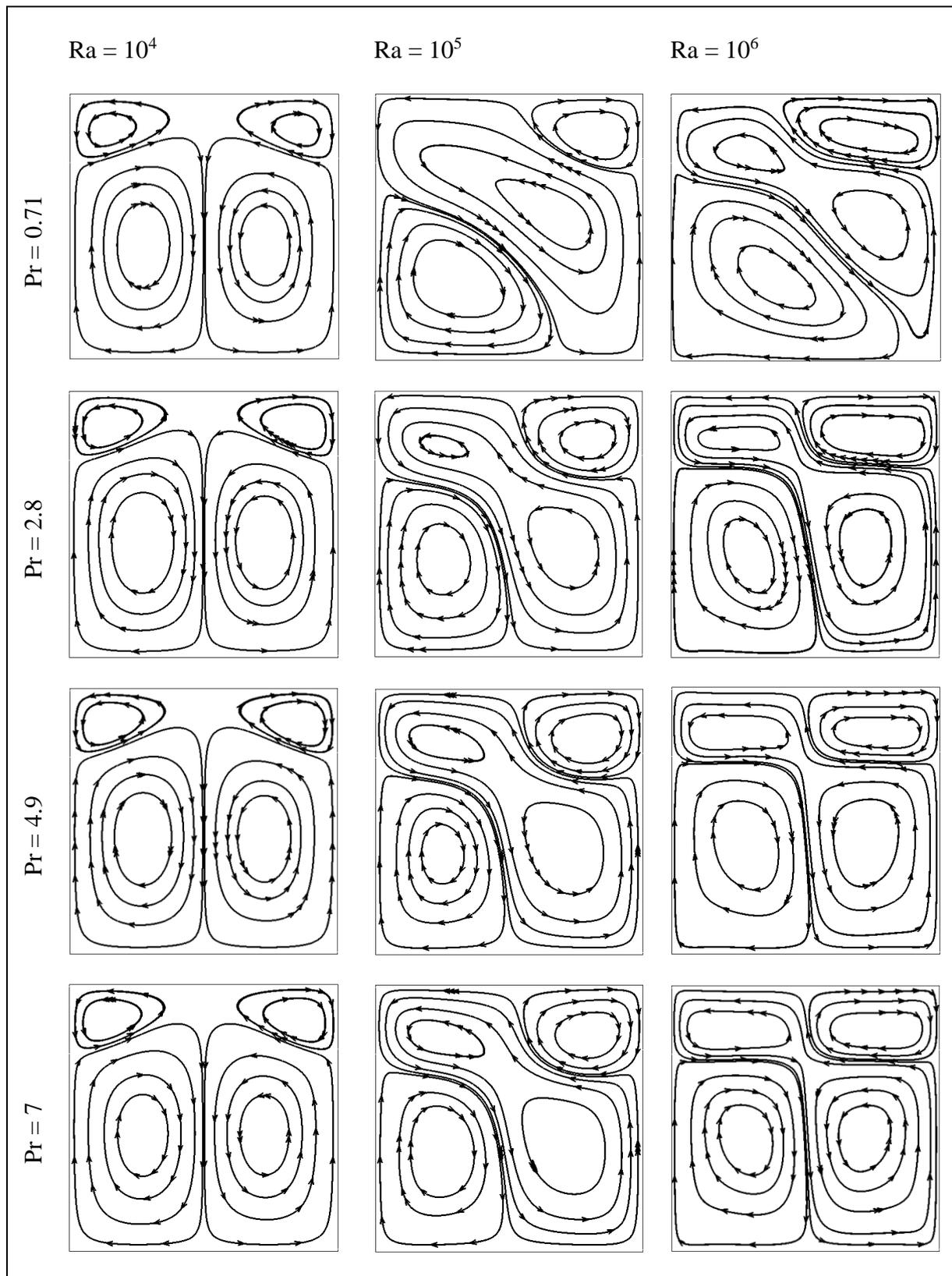


Figure 3-6. Lignes du courant en fonction de Pr et de Ra, Cas3.

**Figure 3-4** et **Figure 3-6**, À  $Ra=10^4$ , l'écoulement est caractérisé par quatre cellules contrarotatives et symétriques par rapport à l'axe des Y, ce qui traduit l'affaiblissement des lignes du courant dans cette situation. En effet, vu les dimensions des parties considérées, une circulation plus prononcée des deux cellules situées au haut de la cavité pour le premier cas dans la partie froide et inversement au troisième cas dans la partie chaude. En revanche, la **Figure 3-5**, montre une symétrie diagonale pour  $Ra = 10^4$ . En effet, cette figure nous montre que l'écoulement est caractérisé par une grande cellule principale tournante dans le sens horaire ainsi que deux cellules secondaires qui tournent dans le sens antihoraire sur la partie haute gauche et basse droite de la cavité. Evidemment, aux faibles gradients de températures le champ d'écoulement donné par les lignes du courant montre une situation invariante avec l'augmentation du nombre de Prandtl. Pour un nombre de Rayleigh  $Ra = 10^5$  et  $Ra = 10^6$ , une déformation considérable des lignes du courant est observée. L'écoulement est caractérisé par une forte circulation au milieu de la cavité et moins au mur en raison des conditions de non glissement. En fait, l'écoulement est caractérisé par une grande cellule de convection principale tournante dans le sens horaire sur la diagonal de l'enceinte à  $Pr = 0,71$  et  $Ra = 10^5$ , pour le premier et le deuxième cas, engendrée par deux petites cellules secondaires occupent les parties haute gauche et basse droite de la cavité tournantes dans le sens antihoraire. En revanche, le deuxième cas donné par la **Figure 3-6** montre que la grande cellule tourne dans le sens anti horaire. Cependant, lorsque le nombre Prandtl augmente, le champ d'écoulement devient faible. Notamment, la grande cellule principale subite une compression due aux deux cellules situées sur les cornières de la cavité et la structure des lignes du courant tend vers des situations symétriques.

### 3.4.1.2 Champ d'écoulement donné par les profils de vitesses

Pour voir l'évolution de la vitesse d'écoulement dans la région centrale de la cavité nous avons illustré les profils de la vitesse axiale au milieu de la cavité à  $X = 0,5$ , **Figure 3-7**, **Figure 3-8** et **Figure 3-9**, respectivement pour les trois cas. D'après le résultat présenté dans ces figures, nous pouvons constater que la vitesse d'écoulement augmente de plus en plus avec l'accroissement du nombre de Rayleigh. Ainsi, devient faible avec l'augmentation du nombre de Prandtl. Par conséquent, les effets visqueux devient plus importants devant les effets thermiques, ce qui entrainera la faiblissent des profils de vitesses au milieu de la cavité quand

le nombre de Prandtl augment jusqu'à 7. En revanche, vu les conditions de non glissement imposées sur les parois de la cavité, les profils de vitesses prennent des valeurs nulles sur les frontières de la cavité. En comparaison entre le cas1 et le cas3, les profils de vitesse sont inversement proportionnels pour  $Ra = 10^5$  et  $10^6$ . En revanche, aux faibles valeurs de  $Ra$ , les profils montrent un effet inverse de nombre de Prandtl sur la vitesse dans cette région.

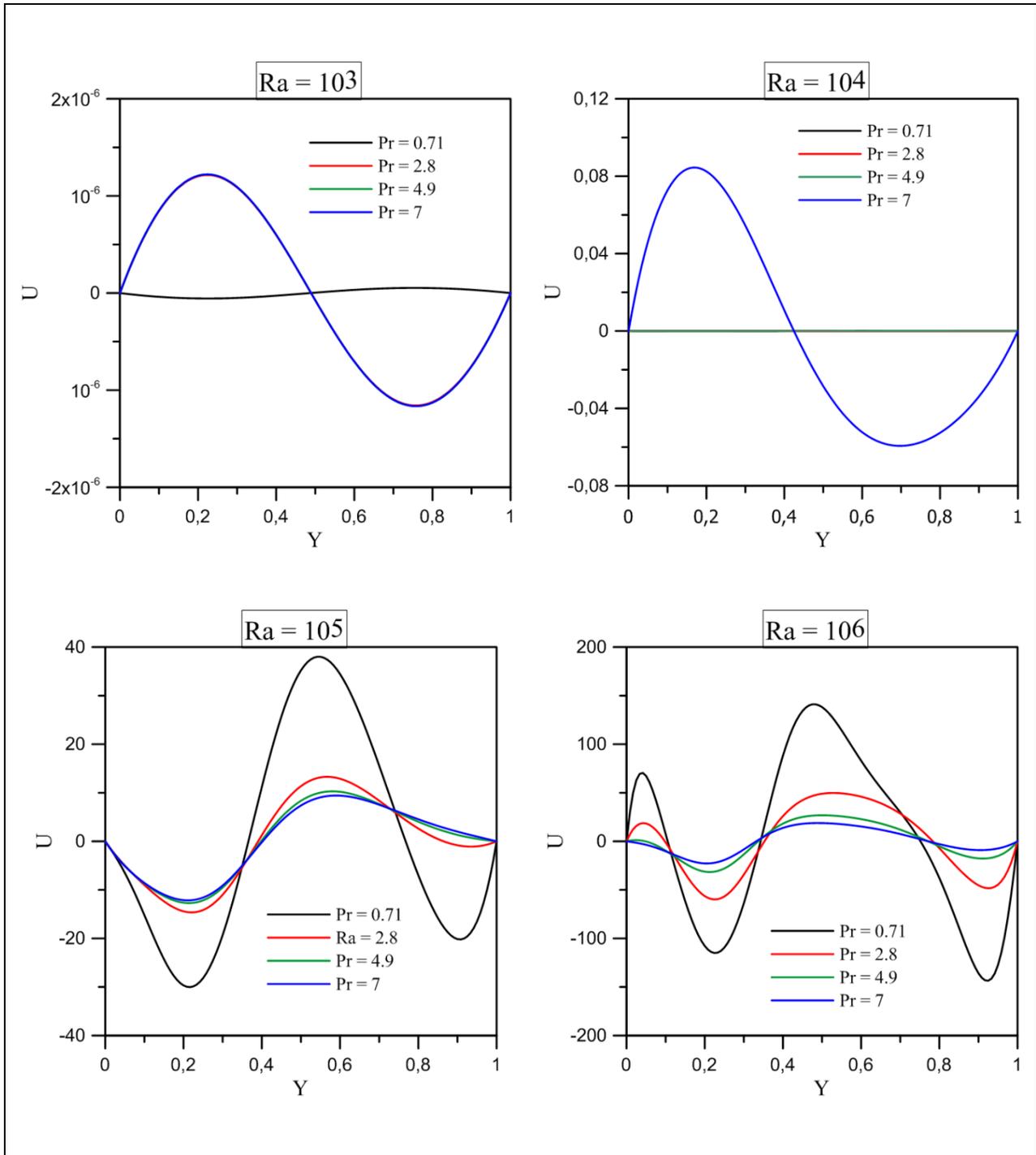
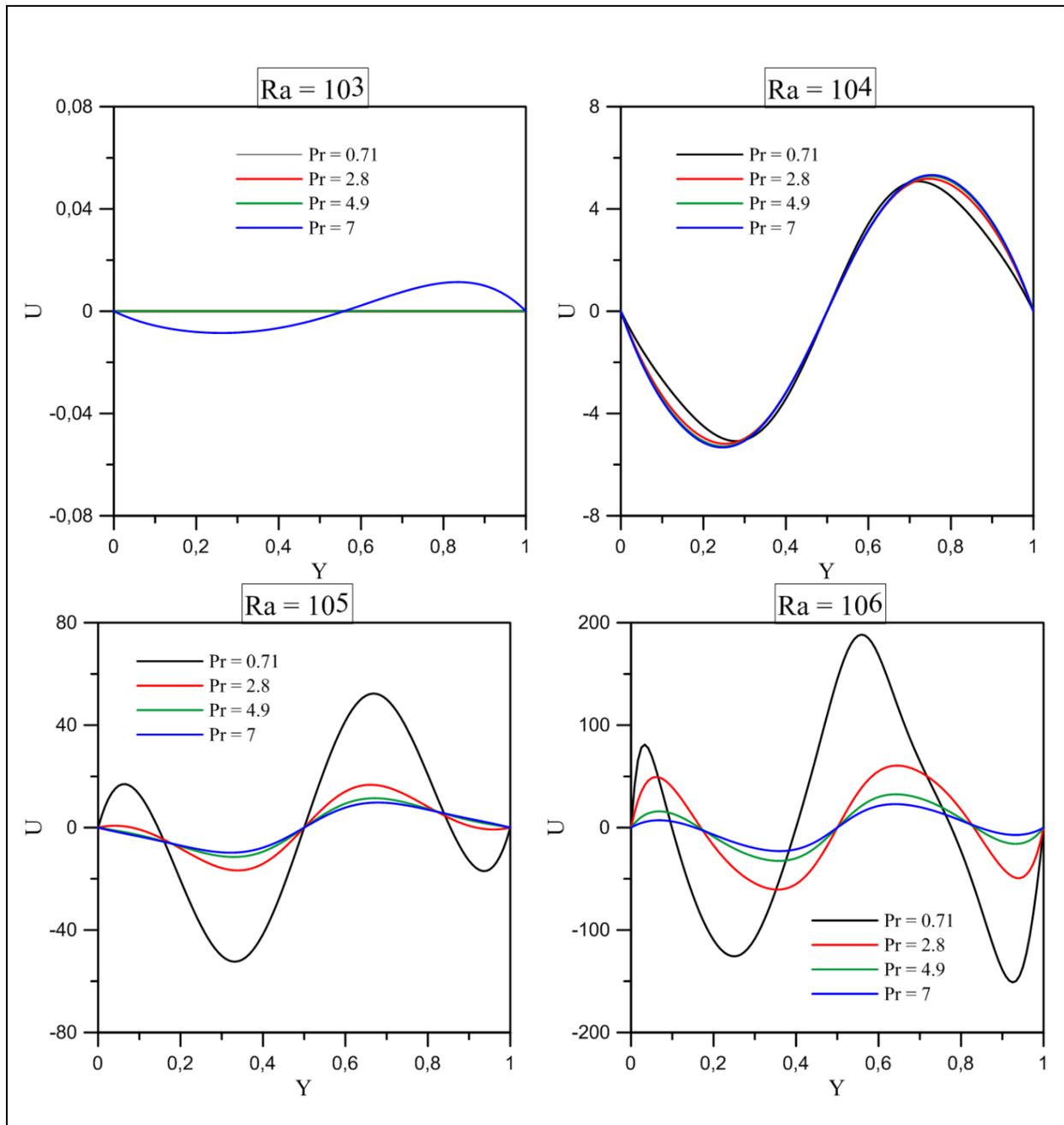


Figure 3-7. Profil de vitesse axial  $U(Y)$  à  $X = 0.5$ , Cas1.

Notant que la vitesse subit une augmentation légère quand le Prandtl augment à 7 pour  $Ra = 10^3$  et  $10^4$ . En outre, excepté le cas2 et le cas3, quand  $Ra = 10^4$ , la symétrie de l'écoulement peut être vue par rapport au plan de la cavité, **Figure 3-8**. Par conséquent, la vitesse devient importante en haut et en bas de la cavité avec une valeur nulle au milieu.



**Figure 3-8.** Profil de vitesse axial  $U(Y)$  à  $X = 0.5$ , Cas2.

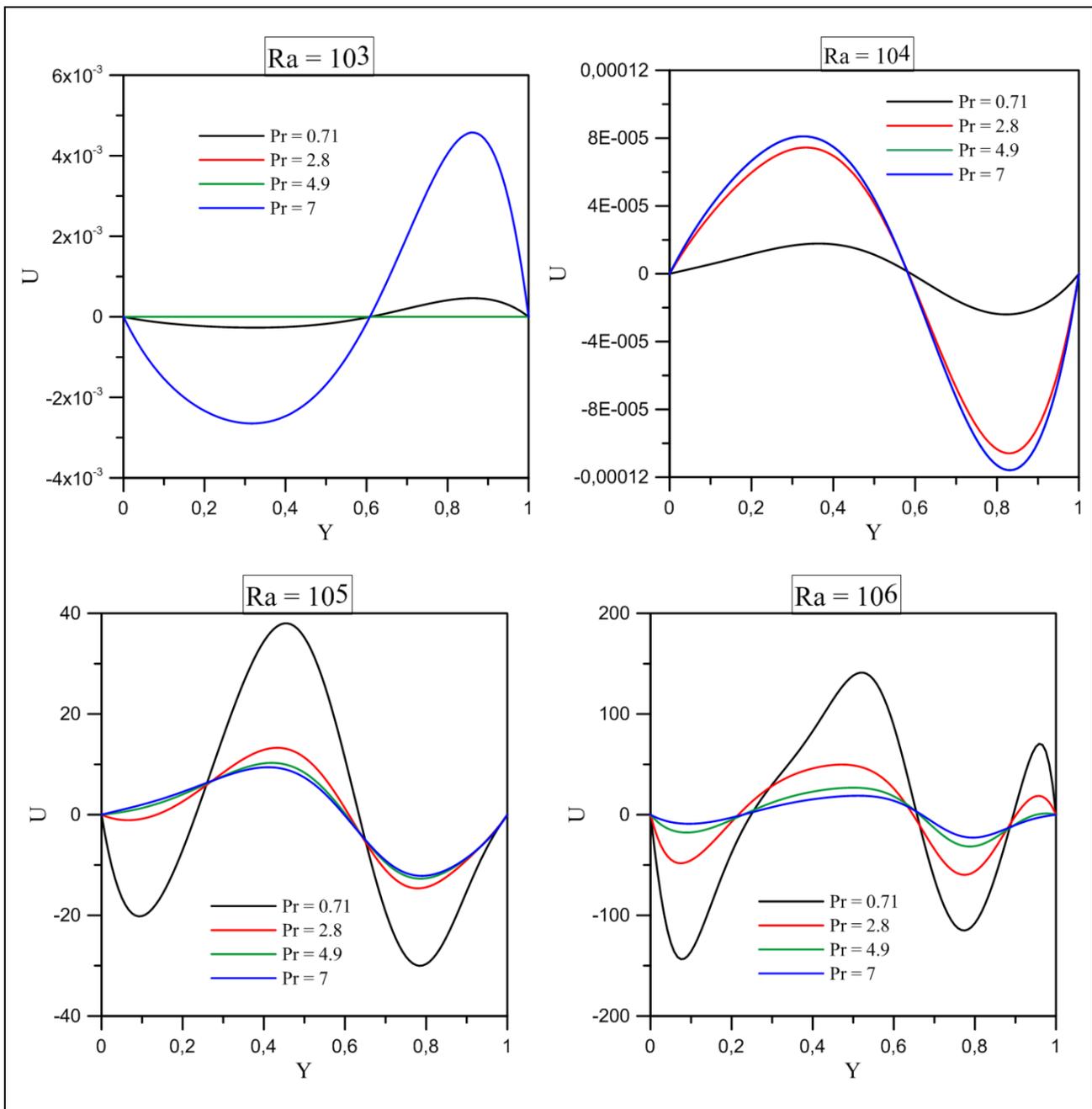


Figure 3-9. Profil de vitesse axial  $U(Y)$  à  $X = 0.5$ , Cas3.

De plus, nous constatons une légère augmentation de la vitesse avec le nombre de Prandtl au sommet de la cavité, et moins prononcé en bas avec une équivalence au milieu. Concernant le cas2, **Figure 3-9**, la vitesse d'écoulement augmente de  $Pr = 0.71$  jusqu'à  $Pr = 2.8$ , puis persiste avec une légère augmentation quand le Prandtl passe à  $Pr = 7$ . Nous pouvons ainsi

constater que l'effet du nombre de Prandtl sur la structure d'écoulement dépend essentiellement des conditions aux limites imposées sur les frontières de la géométrie.

### 3.4.2 Transfert de chaleur

#### 3.4.2.1 Champ thermique donné par les lignes isothermes

**Figure 3-10**, **Figure 3-11** et **Figure 3-12** montrent respectivement les lignes isothermes pour le cas1, ca2 et la cas3 en fonction des nombre de Rayleigh et de Prandtl.

A  $Ra = 10^4$ , les isothermes, sont symétriques et une compression plus prononcée sur la partie basse des parois latérales, **Figure 3-10**, et une concentration vers la partie haute des parois latérales, **Figure 3-12**. Puis, sont invariantes avec l'augmentation du Pr. En revanche, la **Figure 3-11** montre une situation de symétrie diagonale des lignes isothermes qui tendent à se déformer dans le sens des aiguilles d'une montre. En effet, quand le nombre de Prandtl passe à  $Pr = 2,8$ , nous voyons que la ligne isotherme 0.35 dans la partie froide et la ligne isotherme 0.65 dans la partie chaude sont attirées vers les parois adiabatiques, puis persistent sans déformation à  $Pr = 4.9$  et  $Pr = 7$ . Effectivement, le transfert de chaleur est principalement dû à la conduction aux faibles gradients de température. Cela aussi, peut être constaté d'après le comportement des lignes des courants. Dans ces conditions, la structure des lignes isothermes reste invariante avec l'augmentation du nombre de Prandtl.

Au fur et à mesure que le nombre de Rayleigh augmente à  $Ra = 10^5$  et  $Ra = 10^6$  une compression plus prononcée des isothermes vers les parois latérales de l'enceinte se produit. Par conséquent, le gradient de température à proximité des parois latérales a tendance à être important pour le développement d'une couche limite thermique et une concentration plus prononcée des isothermes sur les parties basses des parois latérales pour le premier cas, une concentration vers les parois latérales froides pour le troisième cas et une identification notée pour le deuxième cas, conséquence des dimensions des parties chaudes et froides considérées dans cette étude. Effectivement, il est évident de noter que le transfert de chaleur est essentiellement dû la convection naturelle quand le gradient thermiques près des parois latérales devient important. En revanche, quand le nombre de Prandtl augmente, on constate que le transfert de chaleur est légèrement moins prononcé par l'augmentation du Prandtl et la structures des lignes isothermes ont tendance à devenir symétriques par rapport aux axes du plan de la cavité.

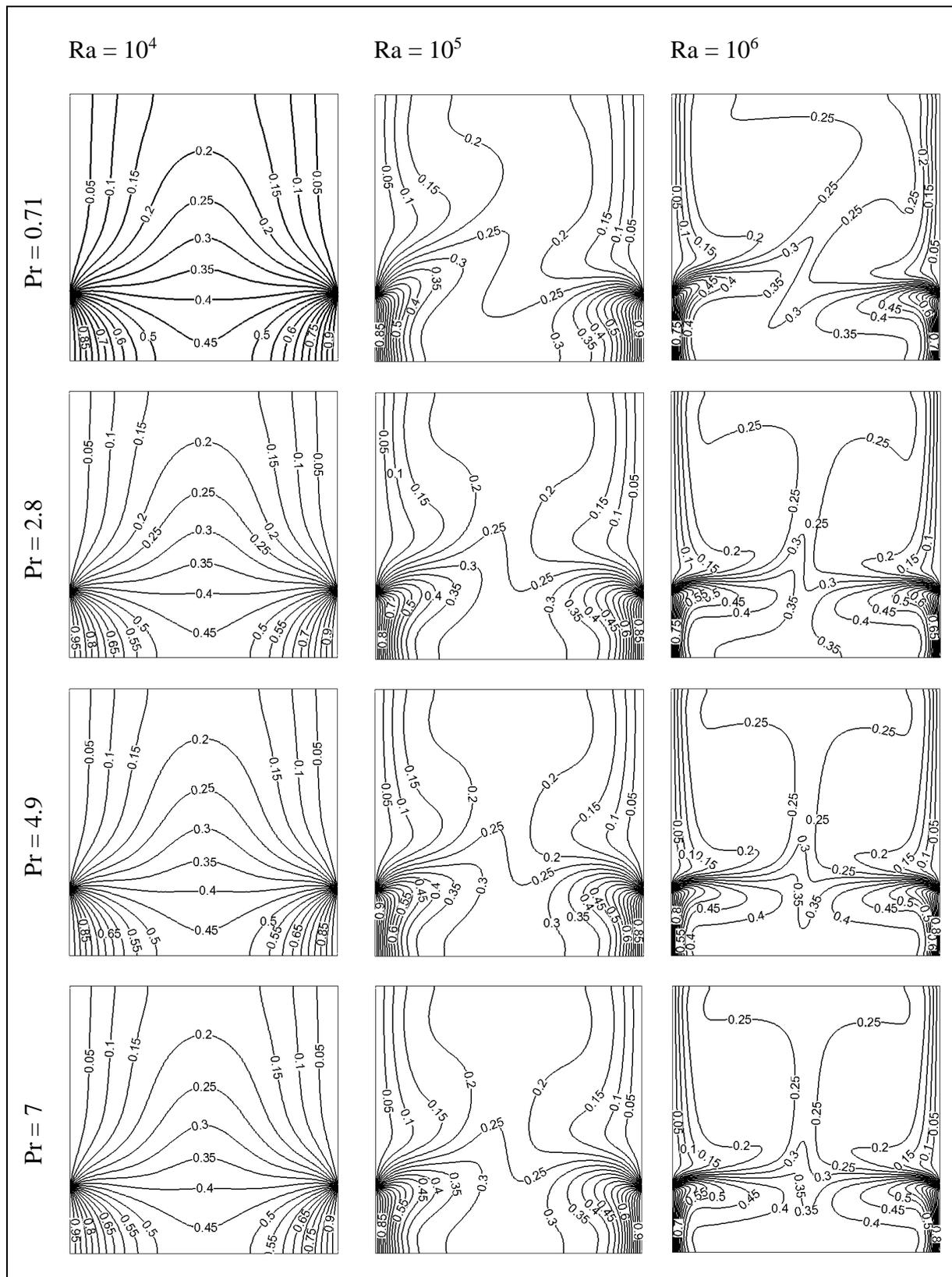


Figure 3-10. Lignes isothermes en fonction de Pr et de Ra pour le Cas 1.

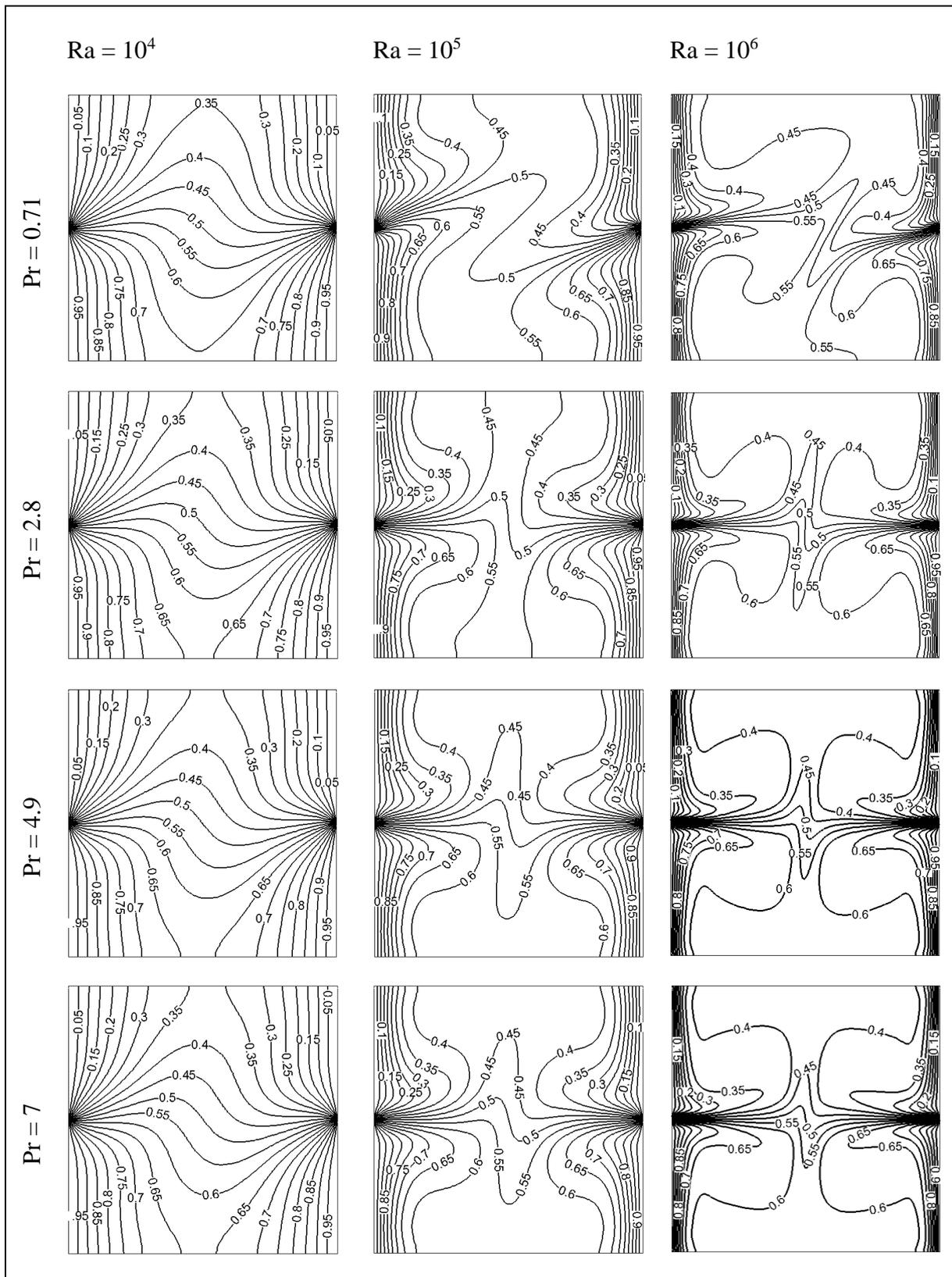


Figure 3-11. Lignes isothermes en fonction de Pr et de Ra pour le Cas2.

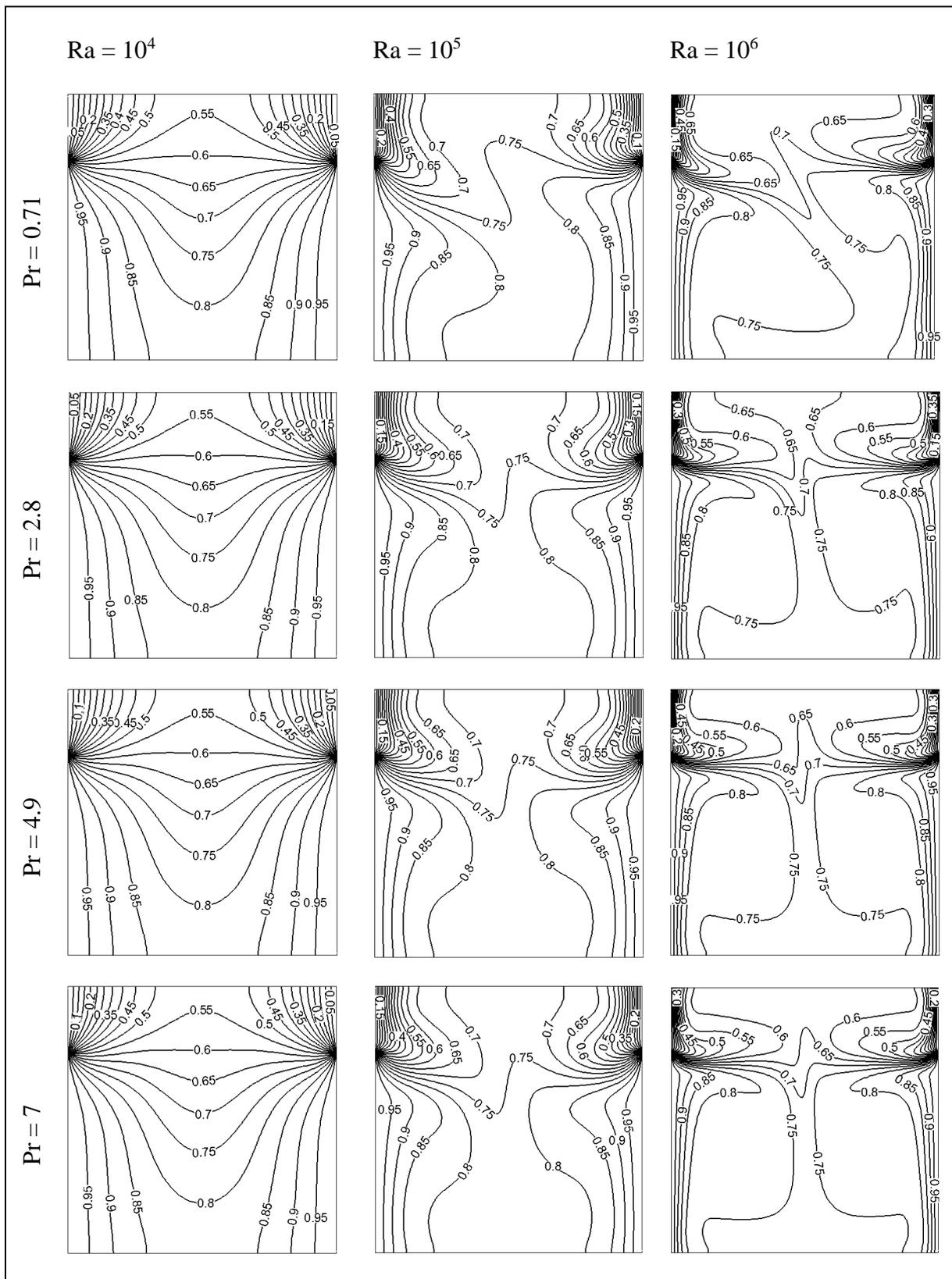
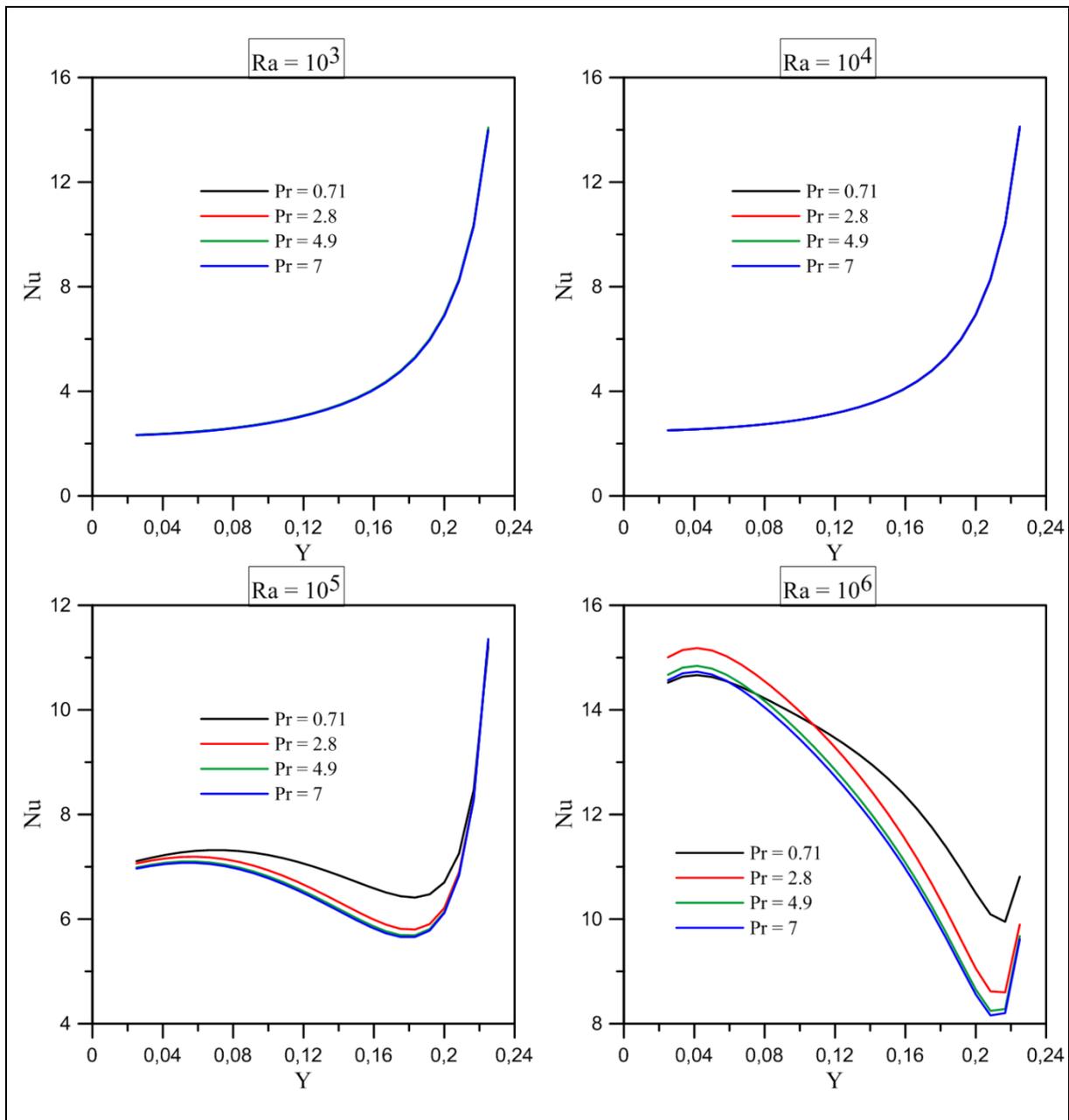


Figure 3-12. Lignes isothermes en fonction de Pr et de Ra pour le Cas3.

Finalement, l'augmentation du nombre de Rayleigh à un effet considérable sur le champ d'écoulement et le transfert thermique, conséquence des forces de flottabilités entraînées par le gradient de température qui deviennent très importants avec l'augmentation du nombre de Rayleigh et la convection s'installe à des très hautes valeurs du Ra.



**Figure 3-13.** Profil du nombre de Nusselt local le long des parois chaudes, Cas1.

### 3.4.2.2 Transfert de chaleur donné par le nombre de Nusselt Locale

Afin de préciser l'évolution de transfert de chaleur le long des parois chaudes, nous introduisons le nombre de Nusselt local qui mesure le taux de transfert de chaleur. A cet effet, nous allons illustrer les profils du nombre de Nusselt local en fonction de la direction adimensionnelle  $Y$  le long des parois chaudes de la cavité à chaque nombre de Rayleigh et de Prandtl.

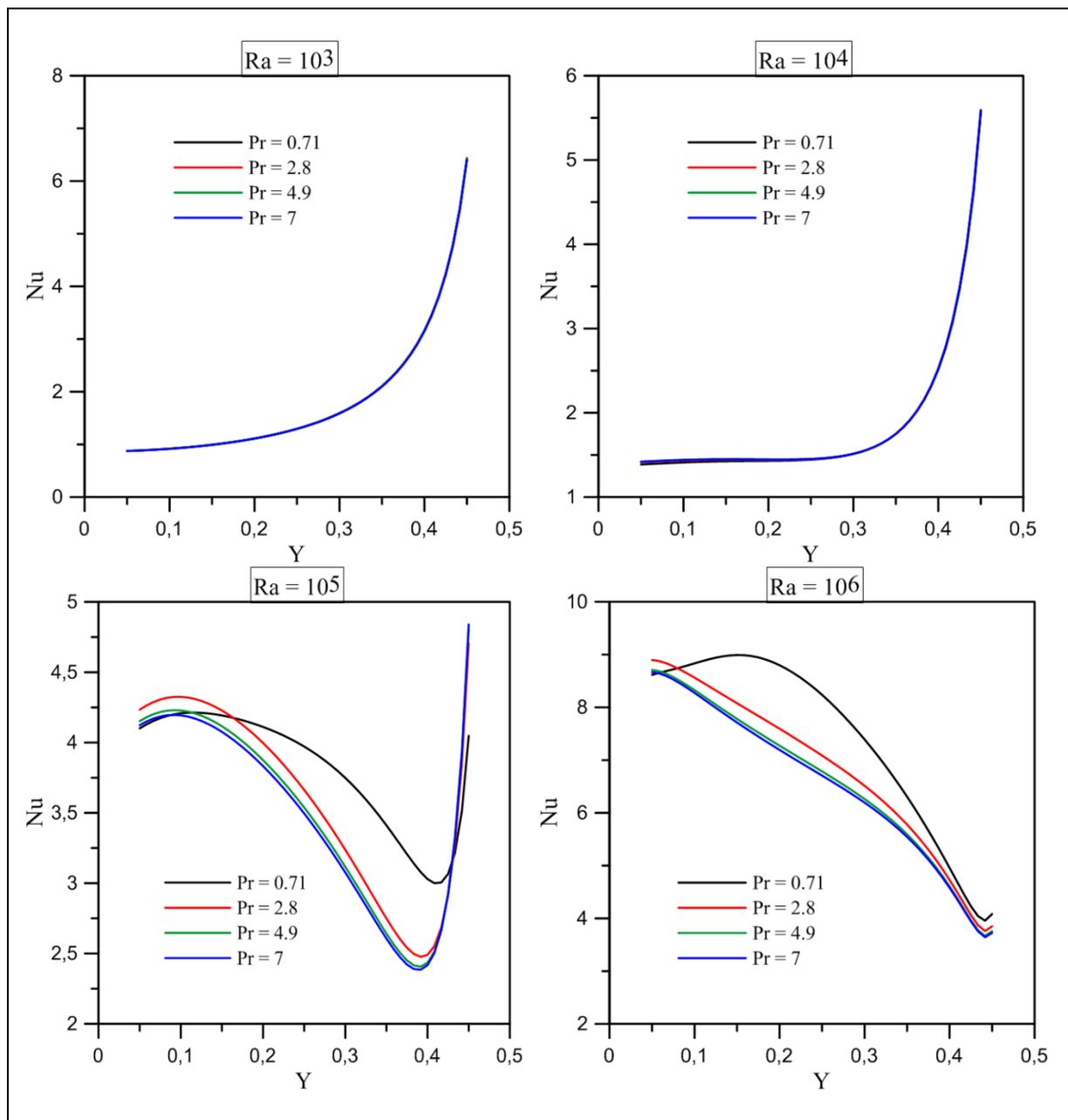
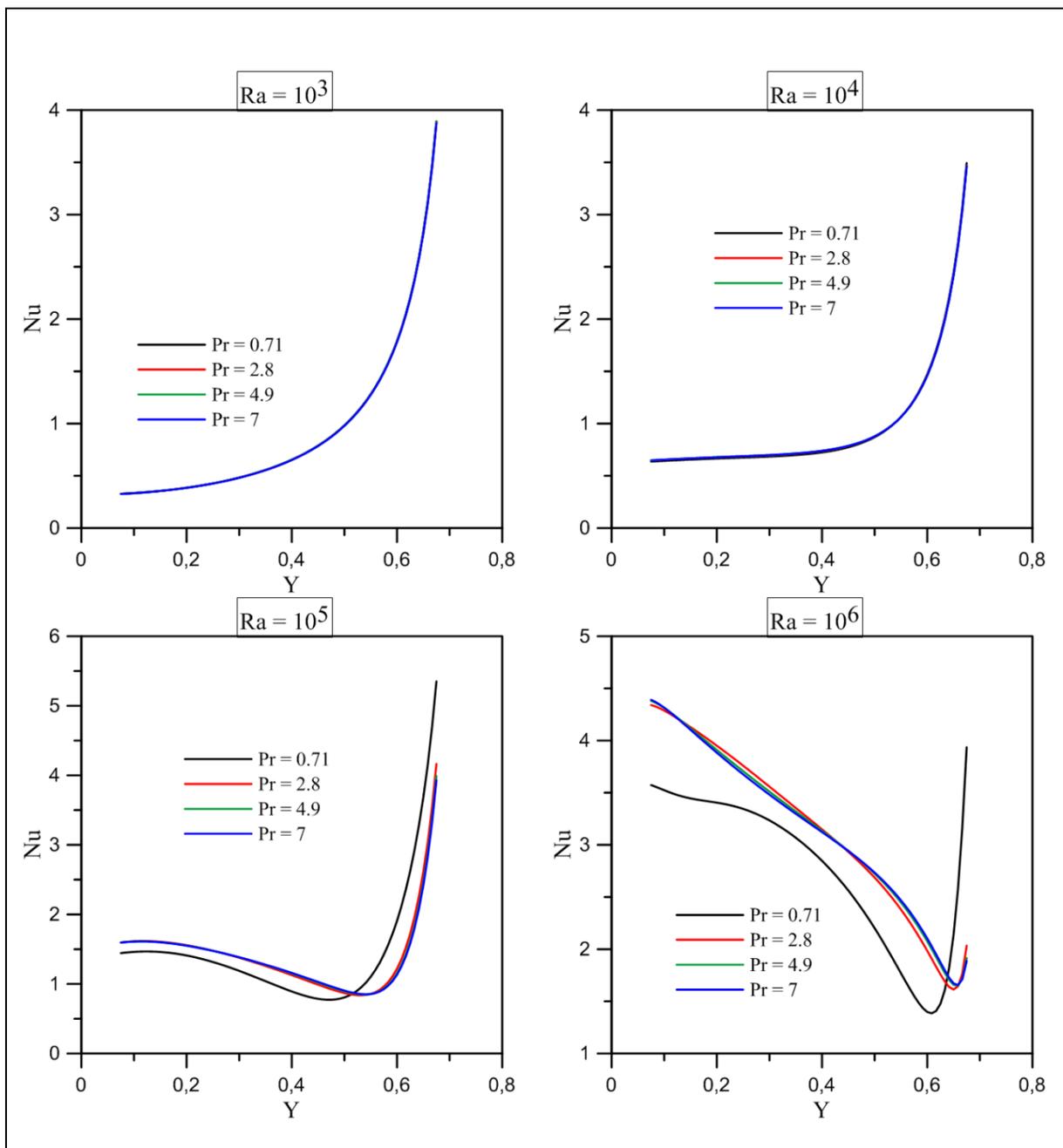


Figure 3-14. Profil du nombre de Nusselt local le long des parois chaudes, Cas2.

La **Figure 3-13**, **Figure 3-14** et la **Figure 3-15** montrent respectivement l'évolution du nombre de Nusselt local pour les trois cas considérés. Comme il a été déjà interprété par les lignes isothermes, les profils de Nusselt local montrent clairement que le transfert de chaleur n'est pas affecté par les variations du nombre du Prandtl aux faibles gradients de température. Les profils du nombre de Nusselt local subissent une évolution exponentielle à cause du faible gradient de température. En effet, le transfert thermique correspond à une conduction vu le comportement de Nusselt local dans cette situation.



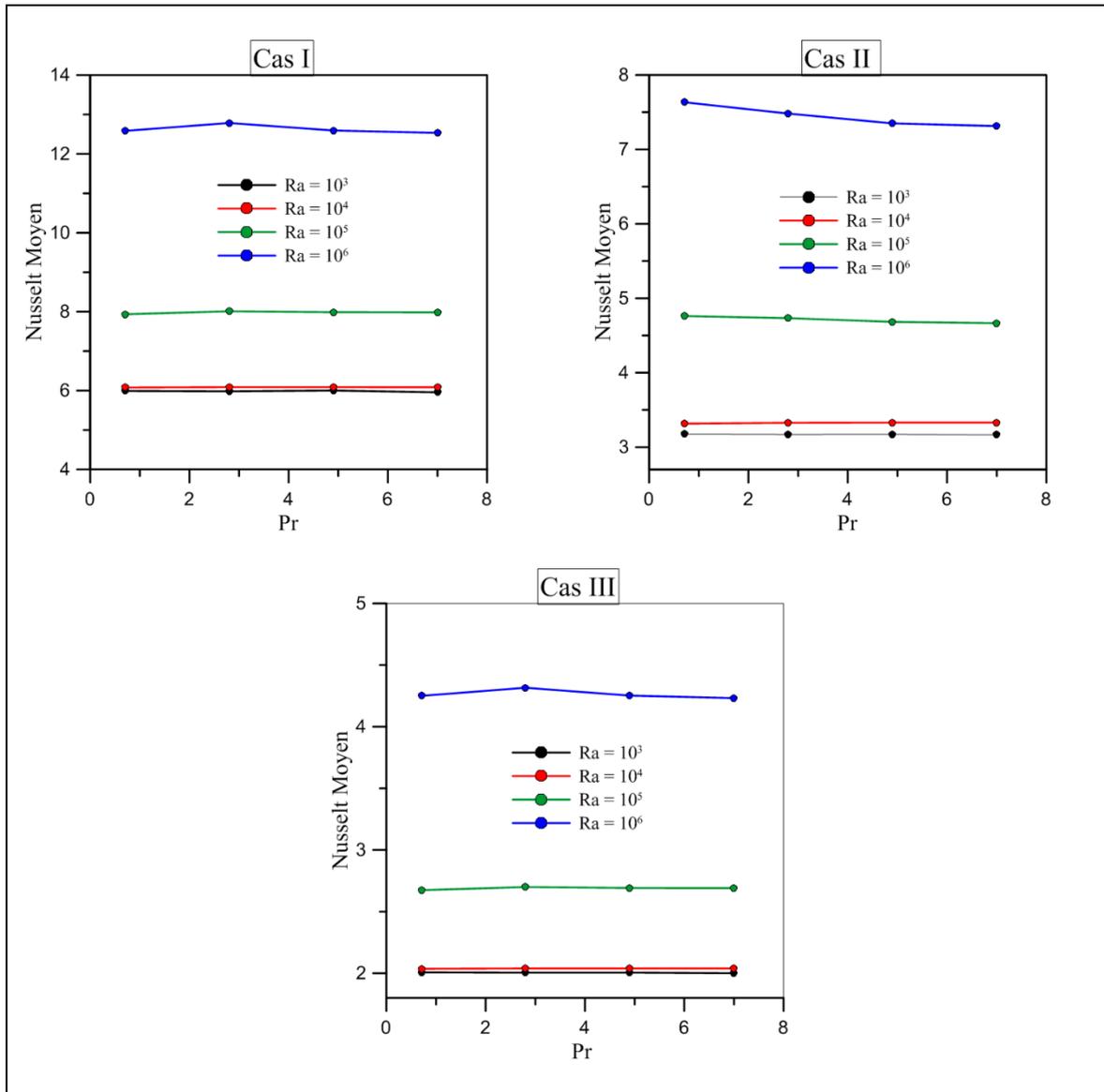
**Figure 3-15.** Profil du nombre de Nusselt local le long des parois chaudes, Cas3.

En fait, quand  $Ra$  augment, cas1, cas2 et cas3 à  $R = 10^5$ , le profil de Nusselt local augmente en bas de la paroi et subit une évolution sensiblement constante le long de la paroi chaude jusqu'au voisinage de  $Y = 0.2$ , puis une diminution légère jusqu'au voisinage de  $Y = 0,5$  ce qui correspond à un gradient nul du nombre de Nusselt local, puis une augmentation considérable en haut de la paroi chaude. On note ainsi d'après le résultat présenté dans ces figures, que le transfert de chaleur est moins prononcé par l'augmentation du nombre de Prandtl. Dans cette zone,  $0,2 \leq Y \leq 0,5$  et vu la décroissance des profils de Nusselt local, le transfert de chaleur semble dominé par une convection naturelle. D'un autre côté, sur les parties hautes de la paroi, vu que les profils subissent une évolution croissante, on note que le transfert de chaleur est dominé par un régime conductif.

Pour  $Ra = 10^6$ , le scénario se persiste et le nombre du Nusselt local augment d'une manière significative le long des parois chaudes. À cause de fort gradient de température près des parois latérales, le profil du Nusselt décroît le long des parois chaudes. En effet, le transfert thermique est moins prononcé avec l'augmentation du nombre de Prandtl et le transfert thermique correspond à une convection naturelle.

### 3.4.2.3 Transfert de chaleur donné par le nombre de Nusselt moyen

Le nombre de Nusselt moyen calculé par intégration de la distribution du nombre de Nusselt local le long des parois chaudes est utilisé pour évaluer le taux de transfert de chaleur global. La **Figure 3-16**, montre l'évolution de nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Prandtl pour les différentes valeurs du Rayleigh. La figure montre clairement que le transfert de chaleur augment de plus en plus avec l'augmentation de nombre de Rayleigh. En fait, comme il a été déjà interprété, le transfert de chaleur n'est pas affecté par les variations du nombre de Prandtl aux faibles gradients de température pour les trois cas considérés. Nous pouvons même le constater à partir de cas1 et cas3 que les deux profils de Nusselt pour  $Ra = 10^3$  et  $10^4$  sont presque confondus et une trop petite augmentation notée pour le cas2. Cependant, à des nombres de Rayleigh très élevés, le transfert de chaleur diminue légèrement en fonction du nombre de Prandtl notamment pour le deuxième cas.



**Figure 3-16.** Nusselt moyen le long des parois chaudes pour les trois cas considérés.

**Figure 3-17** montre les profils de nombre du Nusselt moyen le long des parois chaudes pour les deux cas considérés, le nombre de Prandtl est fixé à 0,71. Il est évident de noter que, dans toutes les situations le transfert thermique augmente en fonction du Rayleigh. Notamment, une augmentation considérable pour le premier cas est observée. En effet, les dimensions des parois chaudes considérées affectent cette différence de transfert de chaleur.

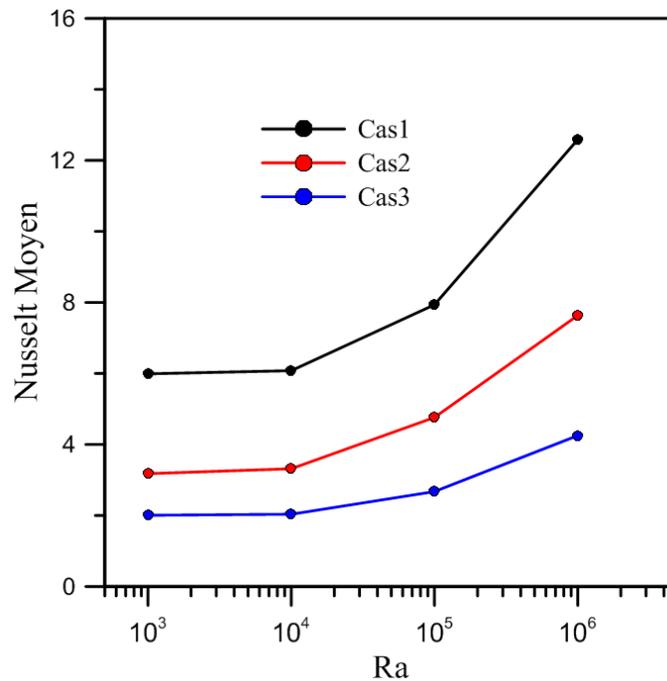


Figure 3-17. Nusselt moyen en fonction du Ra pour les cas considérés,  $Pr = 0.71$ .

### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons mené une étude numérique de la convection naturelle induite dans une cavité carrée. Nous avons considéré trois cas de combinaisons de conditions aux limites afin de voir dans quelles situations le transfert de chaleur passe par son maximum. Pour cela, l'étude a été faite pour différentes valeurs des nombres Rayleigh et Prandtl, les résultats indiquent que ;

- Le champ d'écoulement entraîné par les forces de flottabilités est plus prononcé avec l'augmentation du nombre de Rayleigh, et devient faible avec l'augmentation du nombre de Prandtl, conséquence des effets visqueux qui deviennent plus importants devant les effets thermiques ce qui entraînent ainsi l'affaiblissement des profils de vitesse au milieu de la cavité.
- Le transfert de chaleur n'est pas affecté par les nombre de Pr et Ra aux faibles gradients de température. En revanche, aux nombres de Rayleigh très élevés, le transfert de chaleur augmente, et dans cette situation diminue légèrement avec l'augmentation du nombre de Prandtl. En particulier, le taux de transfert thermique donné par le Nu moyen montre une augmentation considérable de transfert de chaleur dans le premier cas par rapport autres cas considérés dans la présente étude.

Finalement, pour les améliorations des performances de transfert de chaleur dans des applications d'ingénierie en utilisant des effets de convection naturels dans des espaces confinés, cette technique de combinaisons de condition aux limites s'avère d'une importance fondamentale à prendre en considération et peut être reproduite pour ces applications à savoir le refroidissement des composants électronique, les centrales thermiques, bâtiments, etc.

### **Ce travail a fait l'objet d'un article publié d'une revue internationale**

ADNANI Massinissa, MEZIANI Bachir, OURRAD Ouerdia and ZITOUNE Mounir, "Natural Convection in a Square Cavity: Numerical Study for Different values of Prandtl Number", *FDMP: Fluid Dynamics & Materials Processing*, Vol. 12, No. 1, pp. 1-14, 2016.

### **D'une communication internationale**

ADNANI. M, MEZIANI. B and OURRAD. O, Boundary Conditions Effects on the Natural Convection in a Square Cavity, 9<sup>th</sup> *International Conference on Thermal Engineering: Theory and Applications*, March 24-26 2016, Abu Dhabi, UAE.

### **Et de deux communications nationales**

ADNANI. M, MEZIANI. B & OURRAD. O : Application de la méthode des volumes finis à l'étude de la convection naturelle dans une cavité. *1ere Conférence nationale sur les CFD et la Technologie*, CRND-DRARIA, Alger, 02-03 Mai 2016.

ADNANI. M, MEZIANI. B and OURRAD. O, NUMERICAL STUDY OF NATURAL CONVECTION IN A SQUARE CAVITY FOR DIFFERENT VALUES OF PRANDTL NUMBRES, *Congré annuel des Sciences ET Technologies Appliquées (CASTA-2016)* 18-20 Septembre 2016, Boumerdes, Algérie.

## 4 Approche numérique pour l'étude de la convection mixte dans une carrée, transition vers le chaos

*La prévision est un art difficile surtout lorsqu'elle concerne  
l'avenir.  
Pierre Dac*

### 4.1 Introduction

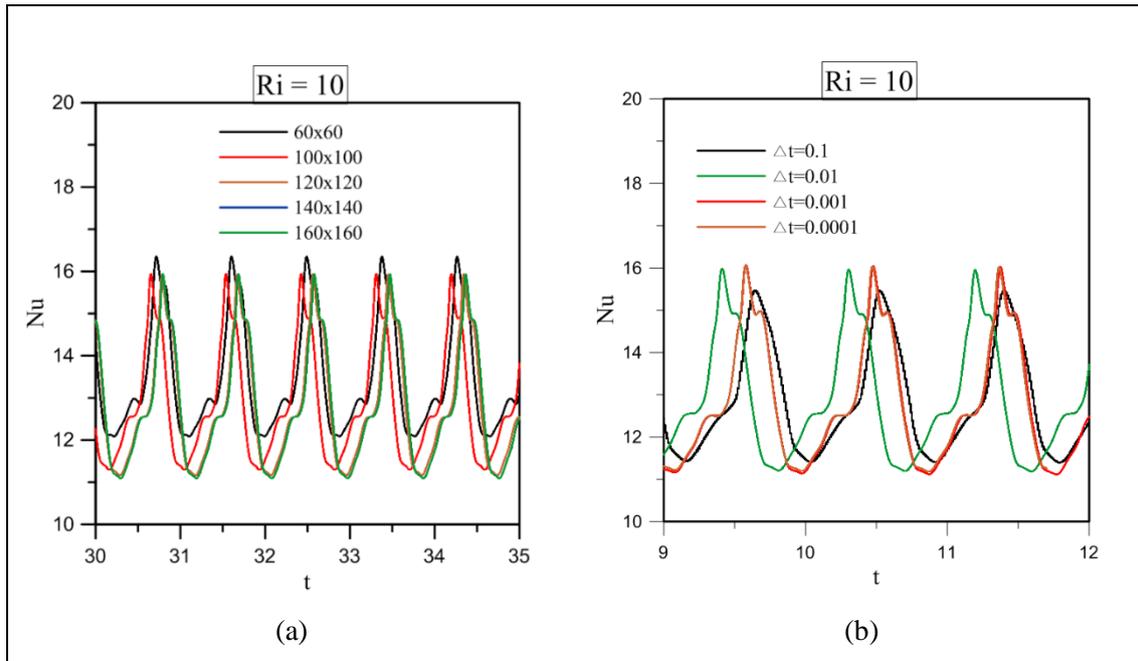
**D**ans ce chapitre, nous présentons les résultats des simulations numériques bidimensionnelles de la convection mixte transitoire qui se développe dans une cavité carrée. Les parois horizontales de la cavité sont maintenues adiabatiques et sont soumises à une vitesse constante selon l'axe  $X+$ . Les parois verticales sont maintenues à des températures constantes. L'étude est effectuée en fonction du nombre de Richardson pour les trois cas de combinaison des conditions aux limites déjà précisées dans le deuxième chapitre. Le but est de vérifier numériquement l'existence de certaines routes qui mènent le système vers le chaos. La connaissance et la mise en évidence de cette notion pour contrôler les systèmes dynamique résultants des modes de transfert de chaleur est d'importance cruciale dans les applications industrielles.

### 4.2 Validation du maillage et du pas de temps

L'étude de la sensibilité du maillage et du pas de temps sur la solution numérique sont réalisés pour  $Re = 1000$ ,  $Ri = 10$ . L'étude a été faite pour le deuxième cas, une cavité carrée dont les parois verticales ont une même dimension, la partie basse est chaude, la partie haute est froide, les parois horizontales sont maintenues adiabatiques et sont soumises à une vitesse constante selon l'axe  $X+$ .

L'évolution temporelle de Nusselt moyen le long des parois chaudes est représentée sur la **Figure 4-1** pour différents maillages et pas du temps. D'après les résultats montrés par cette figure, nous pouvons constater que un maillage de  $120 \times 120$  et un pas du temps  $\Delta t = 0.001$  sont largement suffisants pour le calcul. En outre, **Figure 4-1** (a), la différence du nombre de Nusselt moyen calculé sur les grilles  $120 \times 120$  et  $140 \times 140$  avec un pas du temps  $\Delta t = 0.001$  est de 0,03%. **Figure 4-1** (b), la différence du nombre de Nusselt moyen calculé avec les pas du temps

$\Delta t = 0.001$  et  $\Delta t = 0.0001$  et un maillage de 120X120 est de 0,02%. Par conséquent, une grille uniforme de 120X120 et un pas du temps  $\Delta t = 0.001$  sont utilisés pour tous les calculs.



**Figure 4-1.** (a)Teste de maillage, (b) teste de pas du temps sur la solution numérique.

### 4.3 Validation du code de calcul

Pour se fier et s'assurer de la précision du code numérique élaboré dans le cas transitoire, il est indispensable de le valider avec des résultats existant dans la littérature. Ainsi, nous avons confronté avec succès nos résultats à ceux obtenus dans une cavité différentiellement chauffée.

Les résultats dans le cas de la convection mixte transitoire que nous avons obtenus avec un maillage de 120X120 et un pas du temps  $\Delta t = 0.001$  dans une cavité différentiellement chauffées remplie d'air, sont comparés avec ceux obtenus par T. S. Cheng [46], **Figure 4-2**. Nous avons comparé les lignes de courant et les isothermes pour  $Ri = 1$  (écoulement laminaire),  $Pr = 0.71$ ,  $Re = 300, 900$ . Cette comparaison montre que notre code donne des résultats très satisfaisants.

Le cas de la convection naturelle transitoire induite dans une cavité carrée, est aussi mise en évidence et les résultats sont comparés avec ceux donnés par S. Laouar et al [91]. Nous avons comparé les structures d'écoulement, les champs de température et le régime d'écoulement donné dans l'espace des phases, **Figure 4-3**. Cette comparaison montre un très bon accord entre

nos résultats et ceux donnés par la référence, ce qui montre l'exactitude de nos résultats numériques.

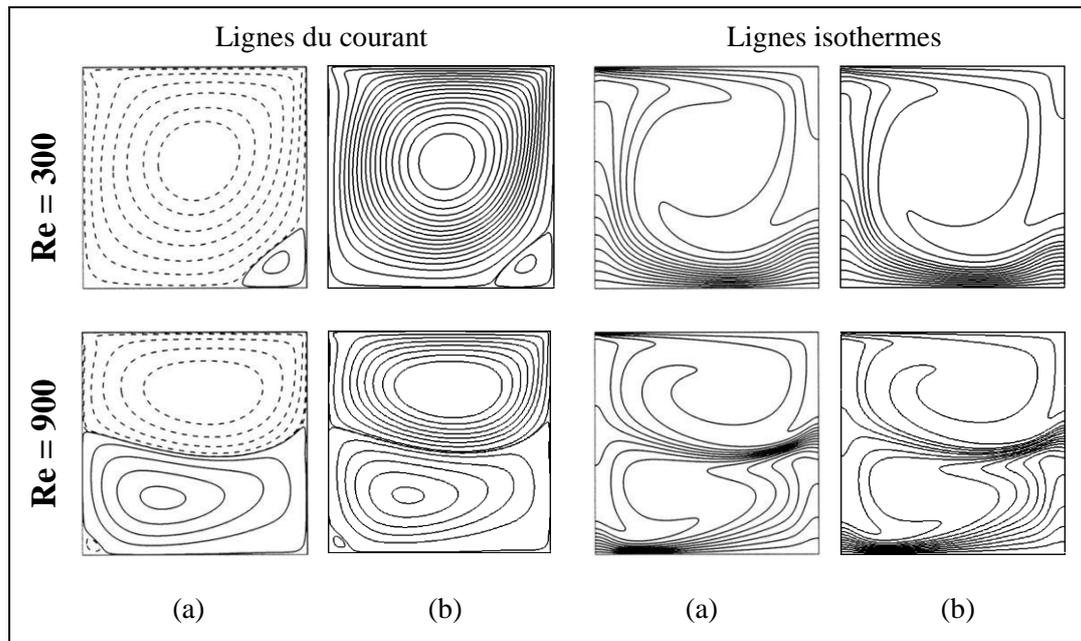


Figure 4-2. (a) résultats de T. S. Cheng [46], (b) nos résultats,  $Ri = 1$ ,  $Pr = 0.71$ .

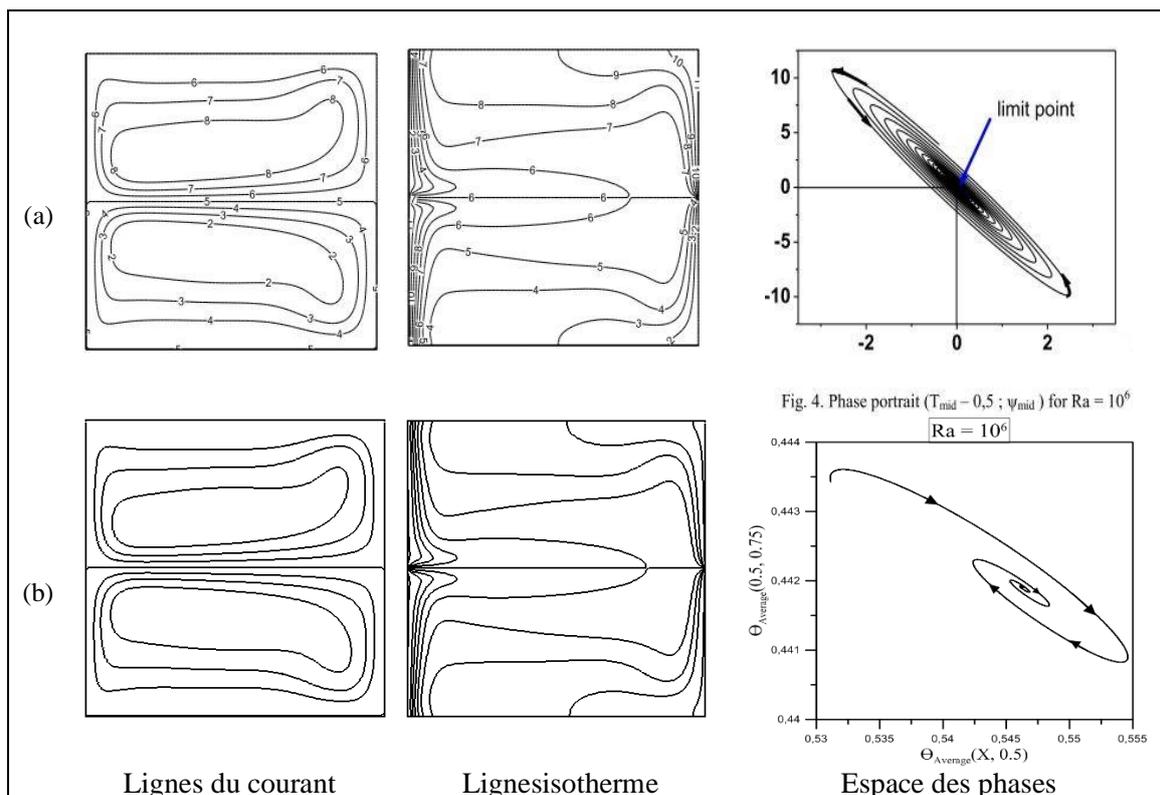


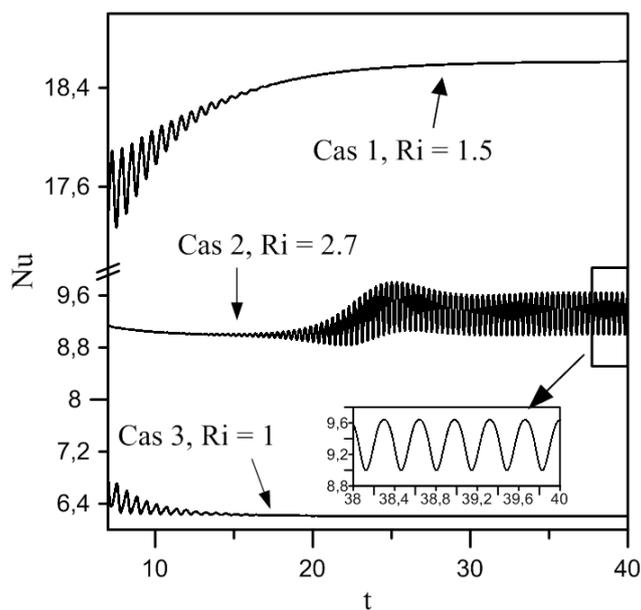
Figure 4-3. (a) résultats de S. Laouar et al [91], (b) nos résultats,  $Ra = 10^6$ ,  $Pr = 0.71$ .

## 4.4 Résultats et discussions

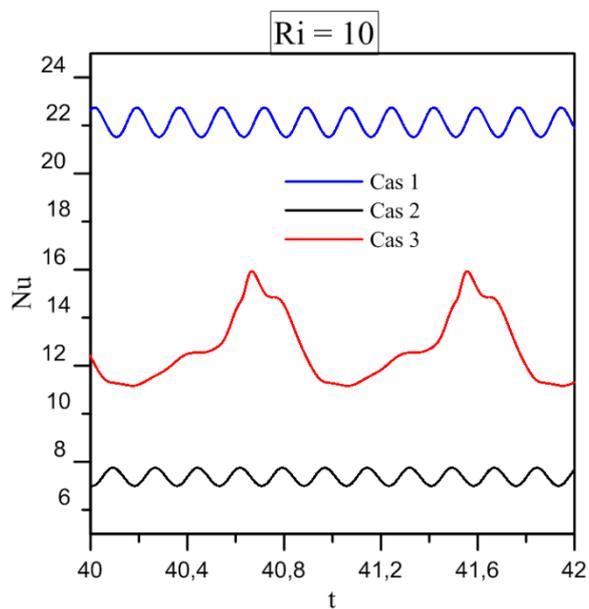
Le régime de transfert de chaleur a été caractérisé par l'évolution temporelle du nombre de Nusselt moyen le long des parois chaudes, évolution temporelle des lignes isothermes et isocourants, la projection dans l'espace des phases des températures moyennes, la sensibilité aux conditions initiales et l'exposant de Lyapunov. L'étude a été effectuée en fonction de nombre de Richardson pour les cas de combinaison aux conditions aux limites. Les nombres adimensionnels de Reynolds et de Prandtl, sont fixés respectivement à :  $Re = 1000$  et  $Pr = 0.71$ .

### 4.4.1 Signale temporel de Nusselt moyen

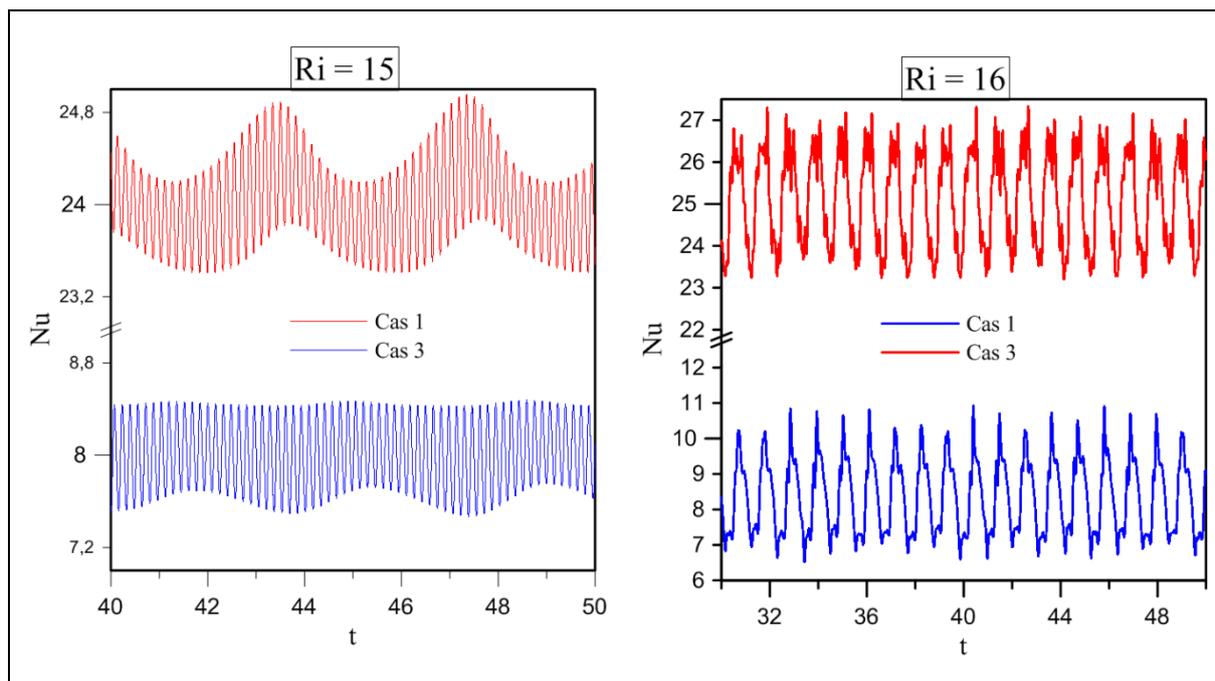
Afin d'emprunter les scénarios de bifurcation vers le chaos, nous illustrons les évolutions temporelles de nombre de Nusselt moyen le long des parois chaudes pour les trois cas considérés. A cet effet, la **Figure 4-4**, montrent les premières bifurcations que le système subit pour les trois cas. La figure montre qu'à  $Ri = 1.5$  et  $Ri = 1$ , respectivement cas1 et cas3, que la solution tend vers une situation asymptotiquement stable. Le cas2, **Figure 4-4** montre que le régime laminaire bifurque vers un régime périodique via une bifurcation de Hopf à  $Ri = 2.7$ . On augmentant le nombre de Richardson, **Figure 4-5**, le régime laminaire devient périodique pour les trois cas. Notons que, l'évolution temporelle de Nusselt moyen pour le cas1 et le cas3 ont des amplitudes presque identique. Par contre, l'évolution temporelle de cas2 présente une amplitude de période importante (le cas2 se trouve dans un état de relaminarisation). En revanche, la **Figure 4-6**, à  $Ri = 15$ , l'évolution montre que la solution est quasi périodique pour le cas1 et le cas3. **Figure 4-6** et **Figure 4-10**, respectivement à  $Ri = 16$  et  $Ri = 6.66$ , le régime est chaotique vu le comportement des profils de Nusselt. En revanche, nous assistons à un phénomène de relaminarisation pour tous cas. Le cas1 et le cas3, **Figure 4-7**, à  $Ri = 60$ , l'évolution temporelle de Nusselt moyen montre que le système transite vers un régime quasi périodique puis il redevient périodique aux voisinages de  $Ri = 100$ . **Figure 4-11**, illustre aussi un phénomène de relaminarisation pour le deuxième cas. Dans cette situation, on assiste à un régime périodique au voisinage de  $Ri = 8.4$ , et ce scénario persiste jusqu'à  $Ri = 19$ .



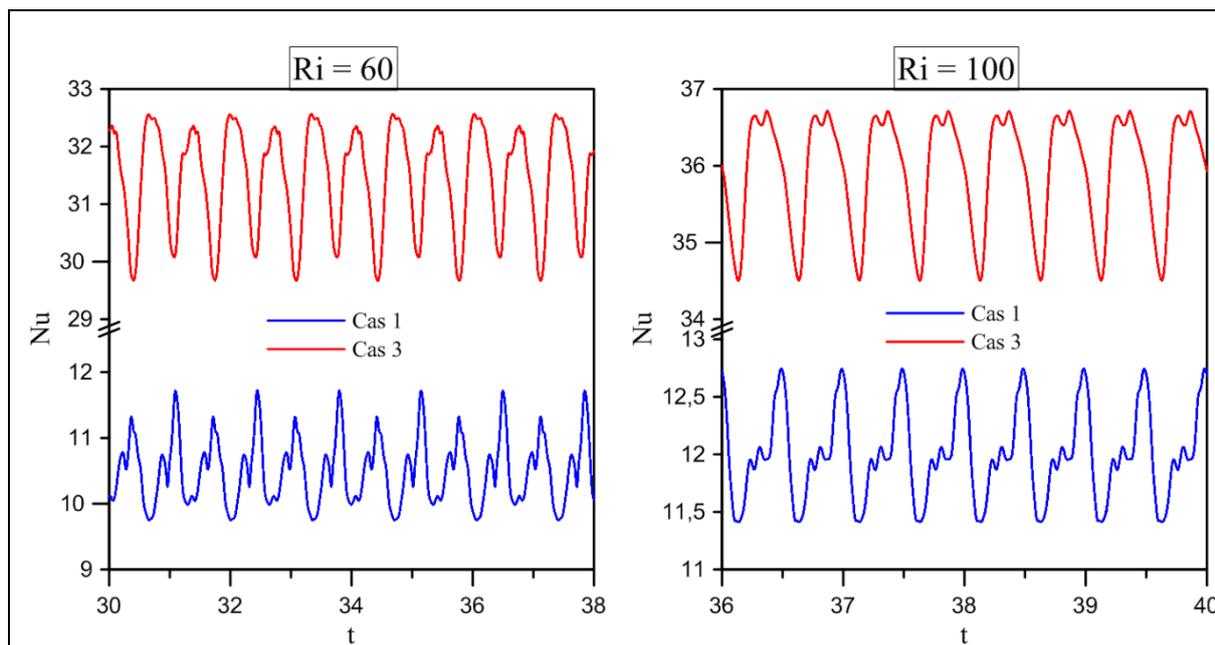
**Figure 4-4.** Evolution temporelle de nombre de Nusselt moyen le long des parois chaudes, premières bifurcations.



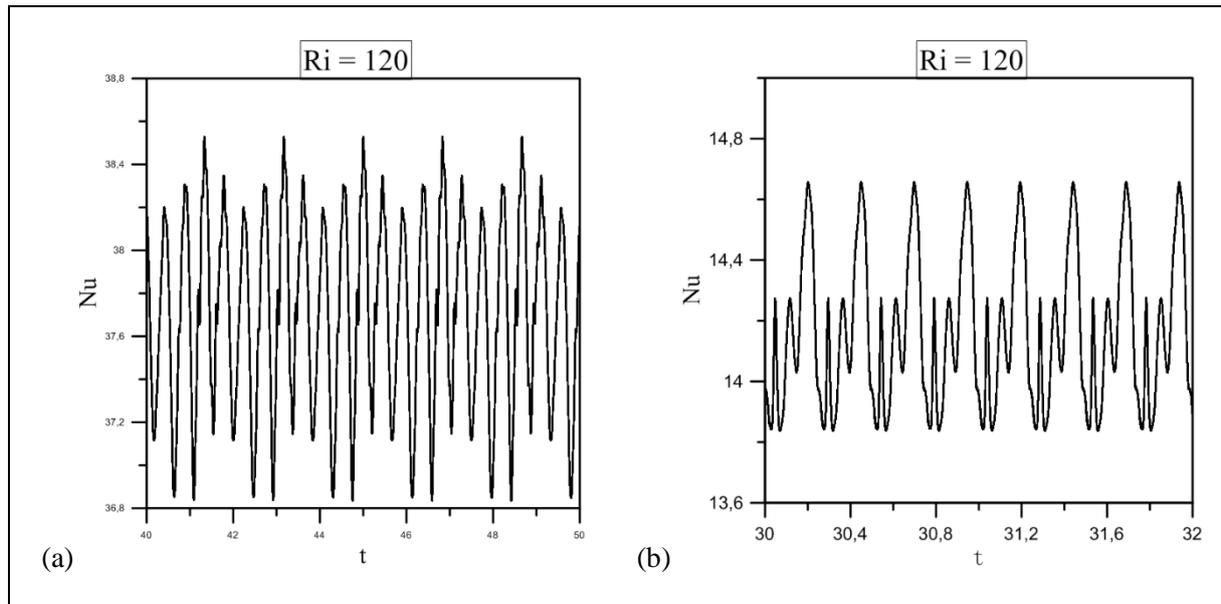
**Figure 4-5.** Evolution temporelle de nombre de Nusselt moyen le long des parois chaudes, Ri = 10 régime périodique.



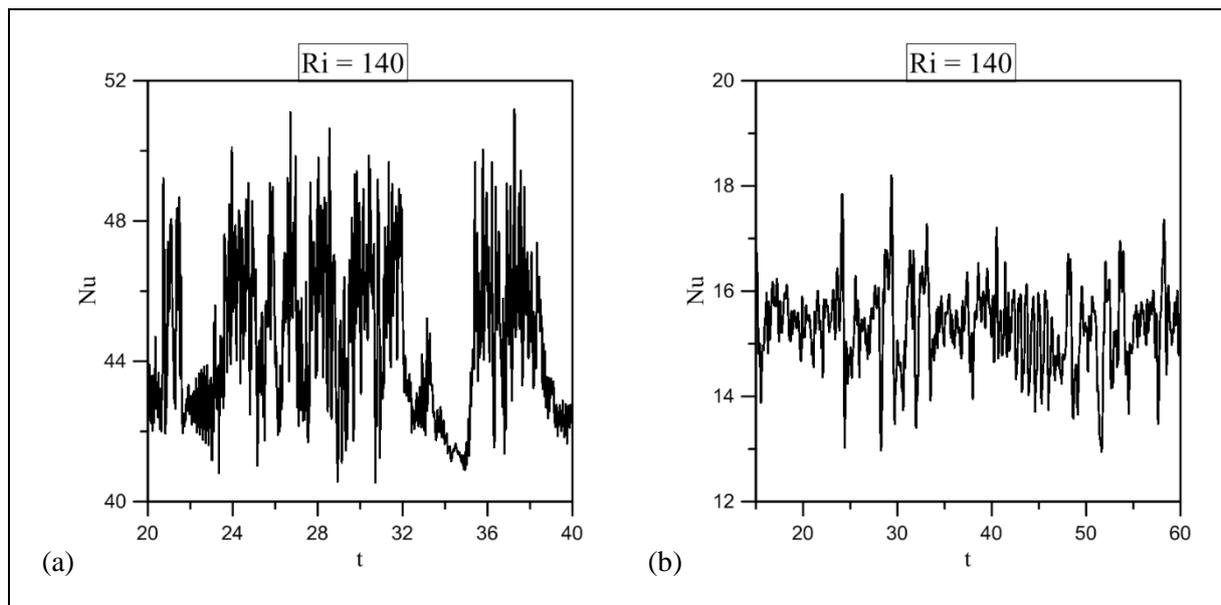
**Figure 4-6.** Evolution temporelle de nombre de Nusselt moyen le long des parois chaudes, Ri = 15 régime quasi périodique, Ri = 16 régime chaotique.



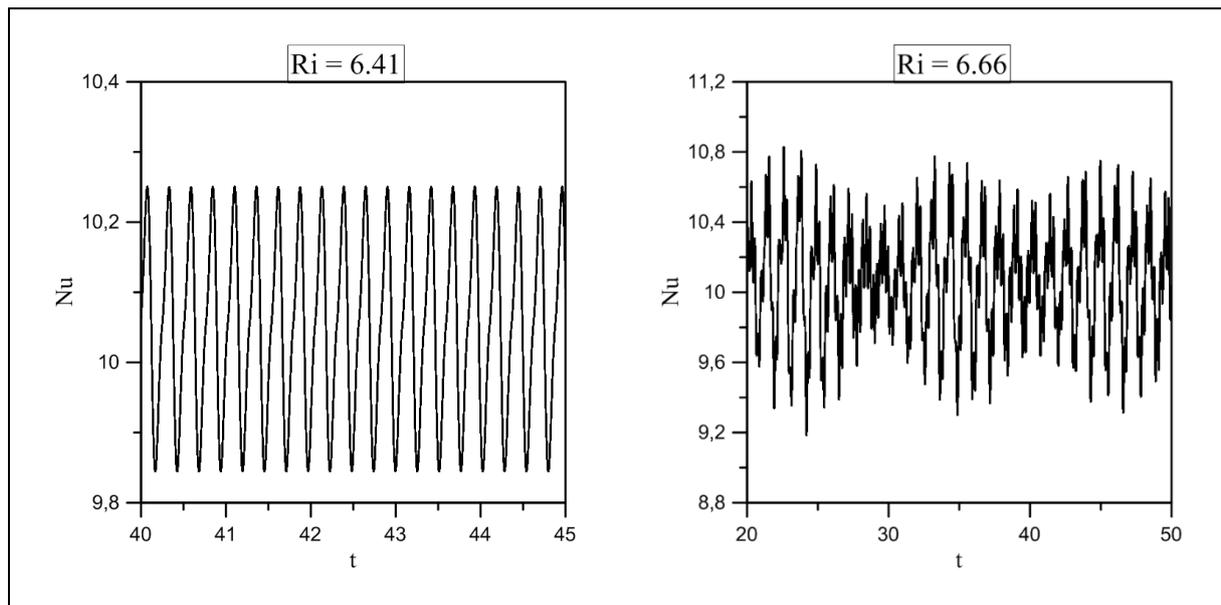
**Figure 4-7.** Evolution temporelle de nombre de Nusselt moyen le long des parois chaudes, phénomène de relaminarisation.



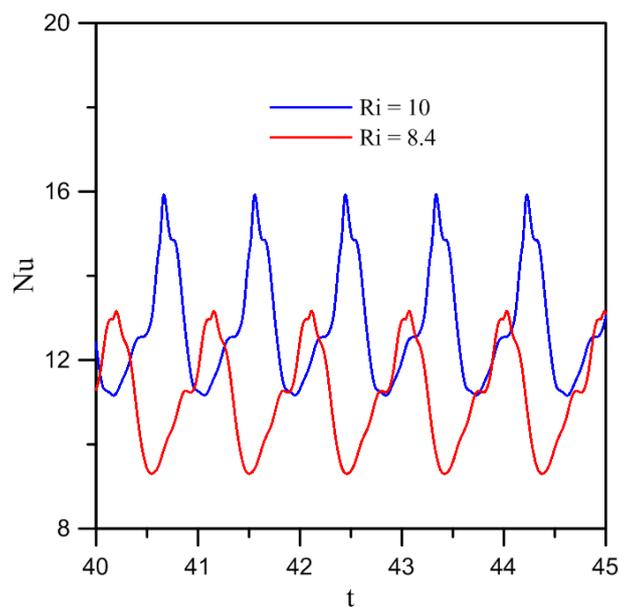
**Figure 4-8.** Evolution temporelle de nombre de Nusselt moyen le long des parois chaudes,  $Ri = 120$  régime quasi périodique, (a) cas1, (b) cas3.



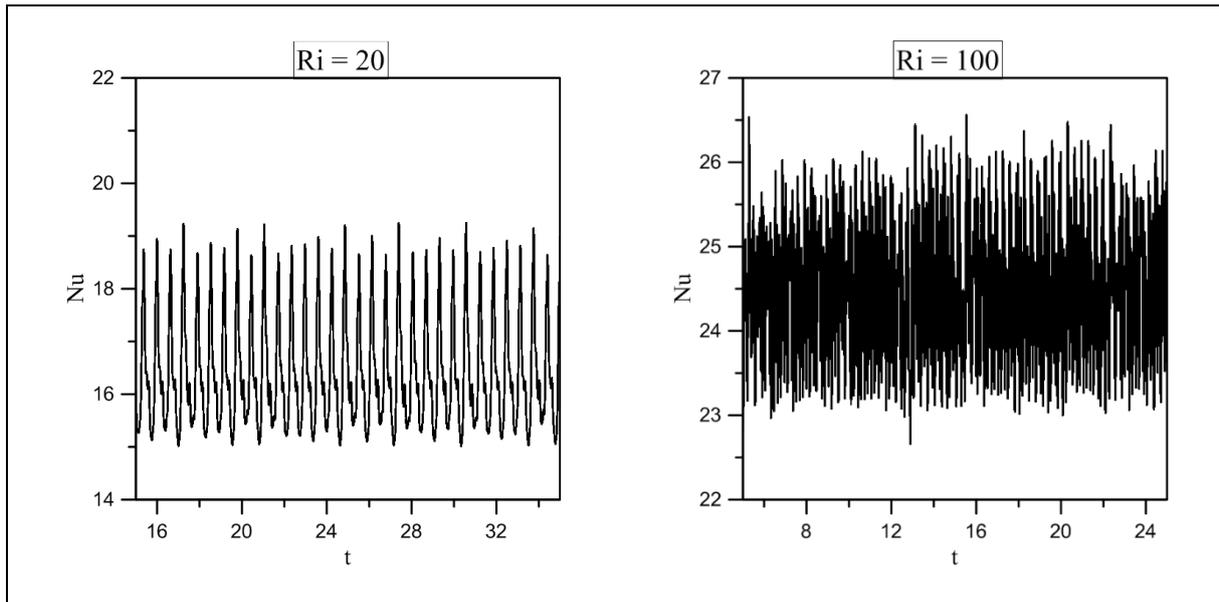
**Figure 4-9.** Evolution temporelle de nombre de Nusselt moyen le long des parois chaudes,  $Ri = 140$  régime chaotique, (a) cas1, (b) cas3.



**Figure 4-10.** Evolution temporelle de nombre de Nusselt moyen le long des parois chaudes,  $Ri = 6.41$  régime périodique,  $Ri = 6.66$  régime chaotique, Cas2.



**Figure 4-11.** Evolution temporelle de nombre de Nusselt moyen le long des parois chaudes, régime périodique phénomène de relaminarisation, Cas2.



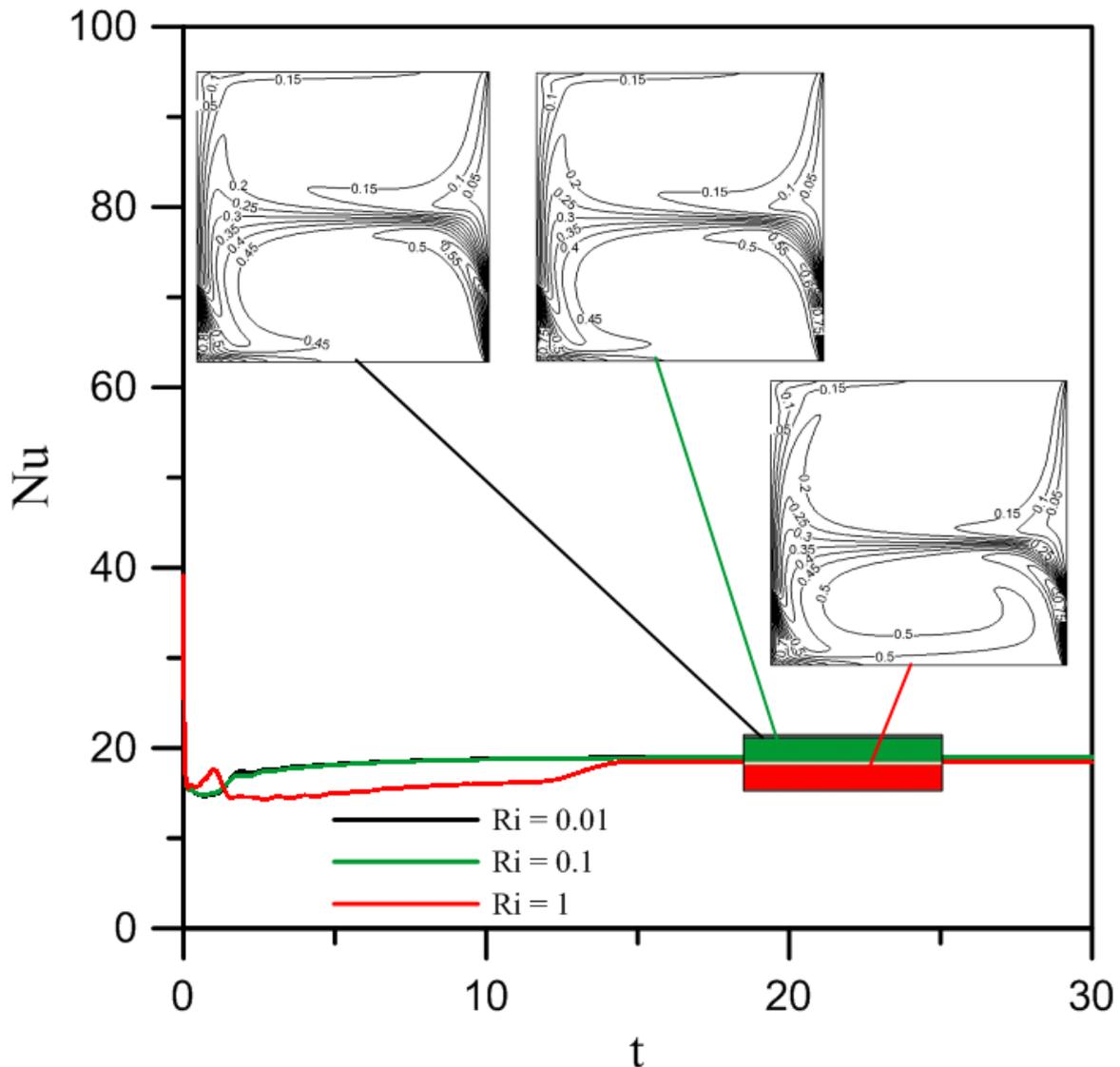
**Figure 4-12.** Evolution temporelle de nombre de Nusselt moyen le long des parois chaudes, régime chaotique, Cas2.

Un régime quasi-périodique observé pour le cas1 et le cas2 à des valeurs très importantes de paramètre de contrôle, **Figure 4-8**. Finalement, le chaos prend sa place quand le paramètre de contrôle augment, **Figure 4-9** et **Figure 4-12**, respectivement à  $Ri = 140$  (cas1 et cas3) et  $Ri = 100$  (cas2). Les figures montrent des comportements désordonnés et des trajectoires imprédictibles.

Dans tous les cas, les suites de bifurcation vers le chaos, qui ont été observées suivent les scénarios suivants ; régime laminaire- périodique, régime périodique-quasi périodique et finalement régime quasi périodique-chaotique. Cette succession vers le chaos a été mise pour la première fois par Ruelle [3]. Il est évident de noter que, le système étudié subit un phénomène des relaminarisations dans des situations différentes de paramètre de contrôle pour les trois cas de combinaison de conditions aux limites.

#### 4.4.2 Régime laminaire donné par Nusselt moyen et ligne isothermes.

La **Figure 4-13**, **Figure 4-14** et **Figure 4-15** montrent respectivement l'évolution du nombre de Nusselt moyen le long des parois chaudes accompagnée par l'évolution des lignes isotherme aux faibles valeurs de nombre de Richardson.

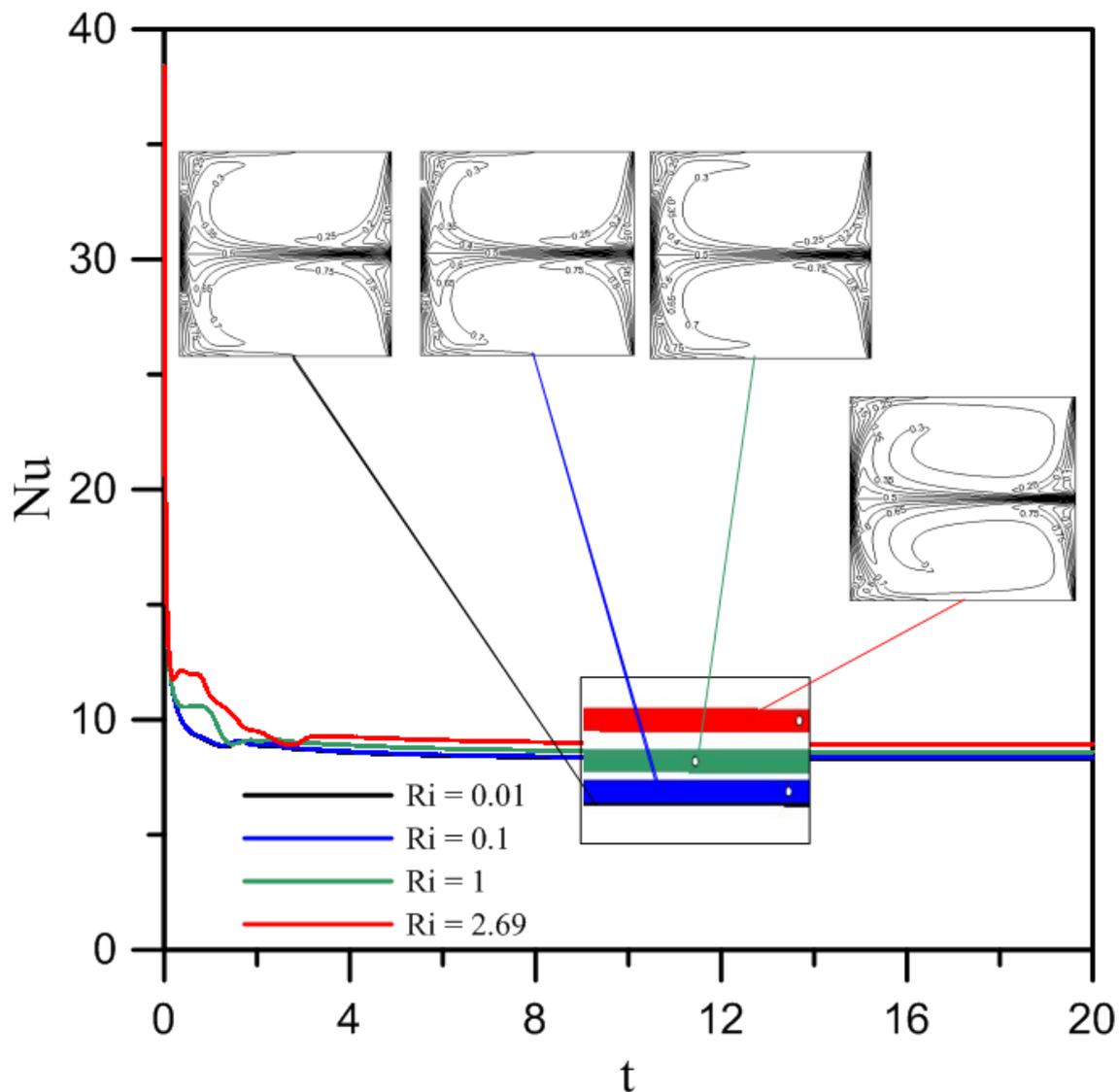


**Figure 4-13.** Evolution temporelle de Nusselt moyen et de lignes isothermes, Cas 1.

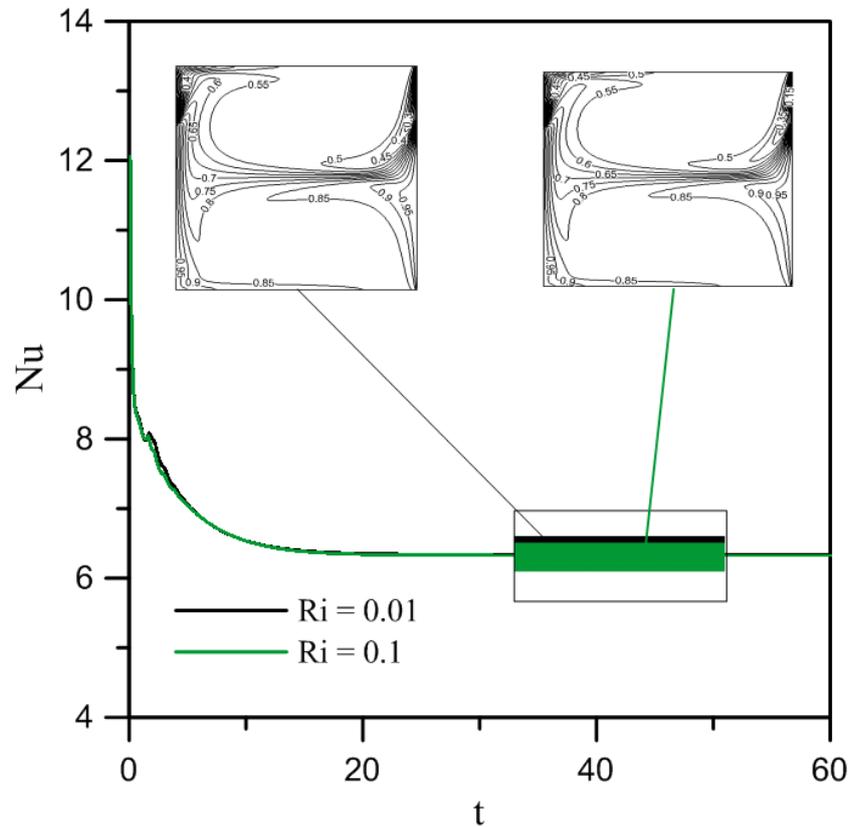
Les profils de Nusselt montrent que le transfert de chaleur est légèrement influencé par les variations du paramètre de contrôle quand le temps augmente pour tous les cas considérés. Notons que tous les profils convergent vers une situation asymptotiquement stable. En effet, la solution est caractérisée par un régime laminaire. Pour les lignes isothermes, **Figure 4-13** et **Figure 4-15**, montrent une région centrale plus au moins stratifiée, et sont caractérisées par un panache thermique allant de la paroi gauche vers la paroi droite. Il est évident de noter que, dans cette situation, aux faibles gradients de température, le transfert de chaleur est caractérisé par une convection forcée vu l'importance et la dominance des effets cinématique par rapport

aux effets thermiques à l'intérieure de l'enceinte. Et, une couche limite tend à se développer près des parois verticales.

Quant au deuxième cas, **Figure 4-14**, vu que la géométrie est soumise aux conditions aux limites symétriques, les lignes isothermes se produisent d'une façon symétrique par rapport à l'axe médian de la cavité à  $Y = 0,5$ .



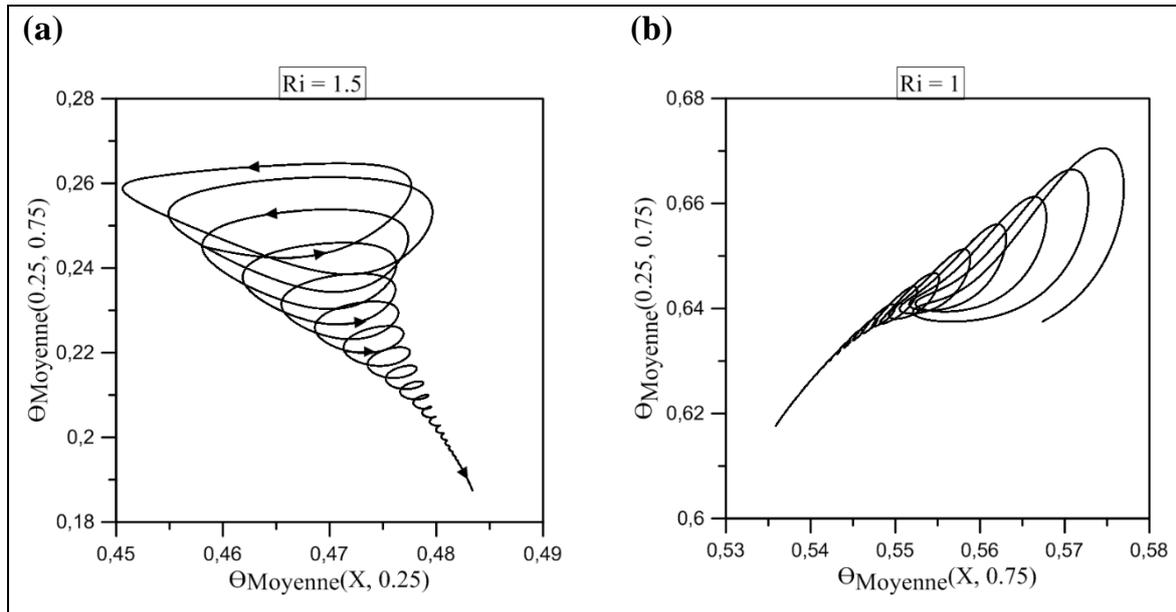
**Figure 4-14.** Evolution temporelle de Nusselt moyen et de lignes isothermes, Cas2.



**Figure 4-15.** Evolution temporelle de Nusselt moyen et de lignes isothermes, Cas3.

#### 4.4.3 Projection dans l'espace des phases de la température moyenne, cas1 et cas3

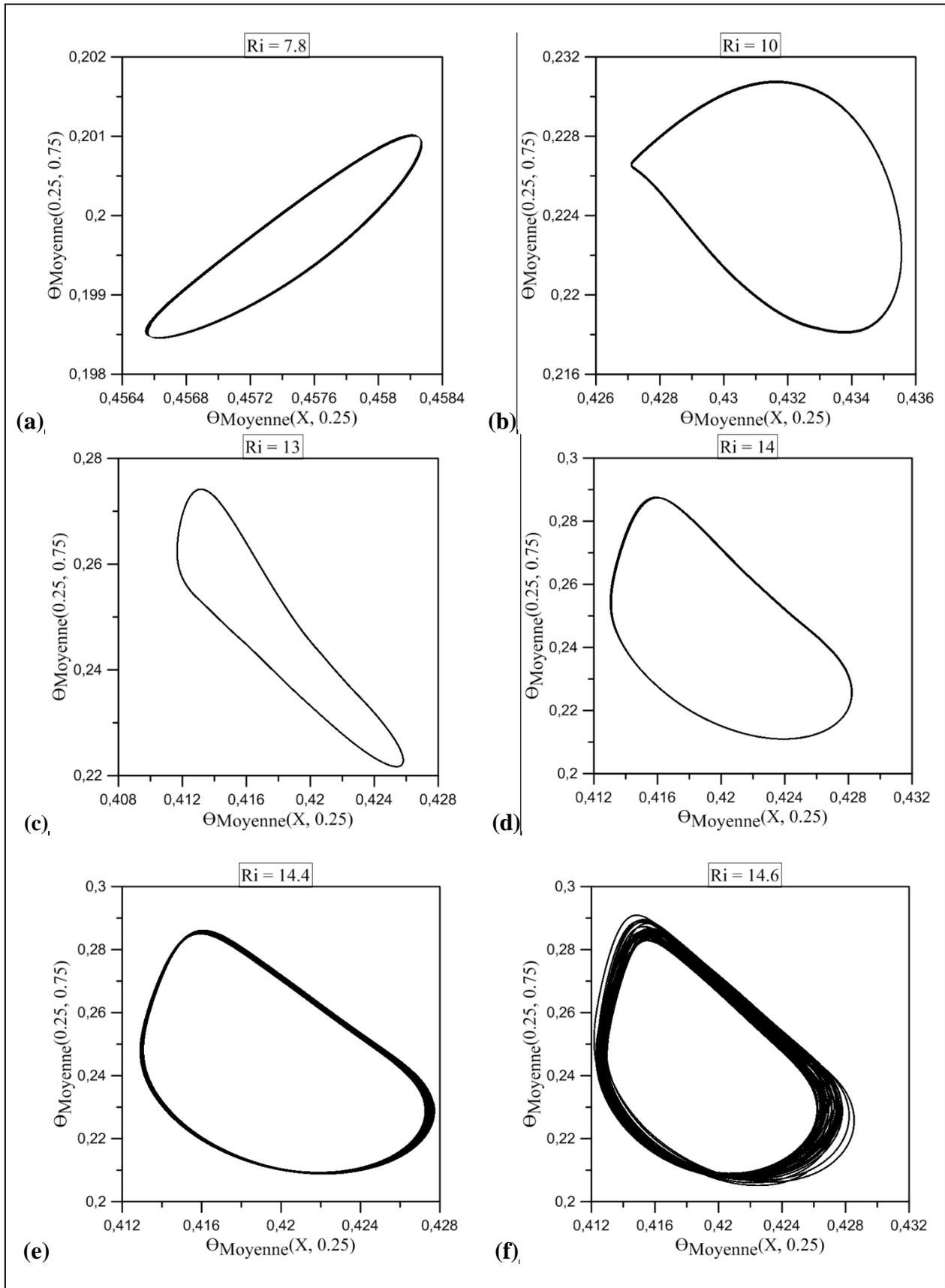
Dans cette section nous présentons les résultats de premier cas et de troisième cas, puisque les conditions aux limites sont inversées et que toutes les bifurcations qui ont été cernées sont presque identiques, ce qui permettra de voir l'influence de ces derniers sur le comportement spatio-temporelle de la température moyenne. Au-delà d'une valeur critique du paramètre de contrôle, le système subit des instabilités et des bifurcations locales. Notamment, la première bifurcation a été observé pour le premier cas au voisinage de  $Ri = 1.5$ , **Figure 4-16 (a)** et  $Ri = 1$  pour le troisième cas, **Figure 4-16 (b)**. La projection dans l'espace des phases montre des attracteurs points limites. Soit la solution périodique converge vers un point limite asymptotiquement stable. Ce scénario se manifeste jusqu'à une certaine valeur de Richardson comprise entre [7.8, 8]. Où le point limite devient cycle limite et au-delà d'une valeur critique au voisinage de  $Ri = 7.8$  pour le cas 1, **Figure 4-17 (a)**, et au voisinage de  $Ri = 8$  pour le cas 3, **Figure 4-18 (a)**. Ces figures montrent que les attracteurs sont des cycles limites sous différentes formes. **Figure 4-18 (a)** l'attracteur prend une forme ovale, **Figure 4-17 (a)**, le cycle limite montre la forme d'une ellipse légèrement aplatie sur sa partie supérieure.



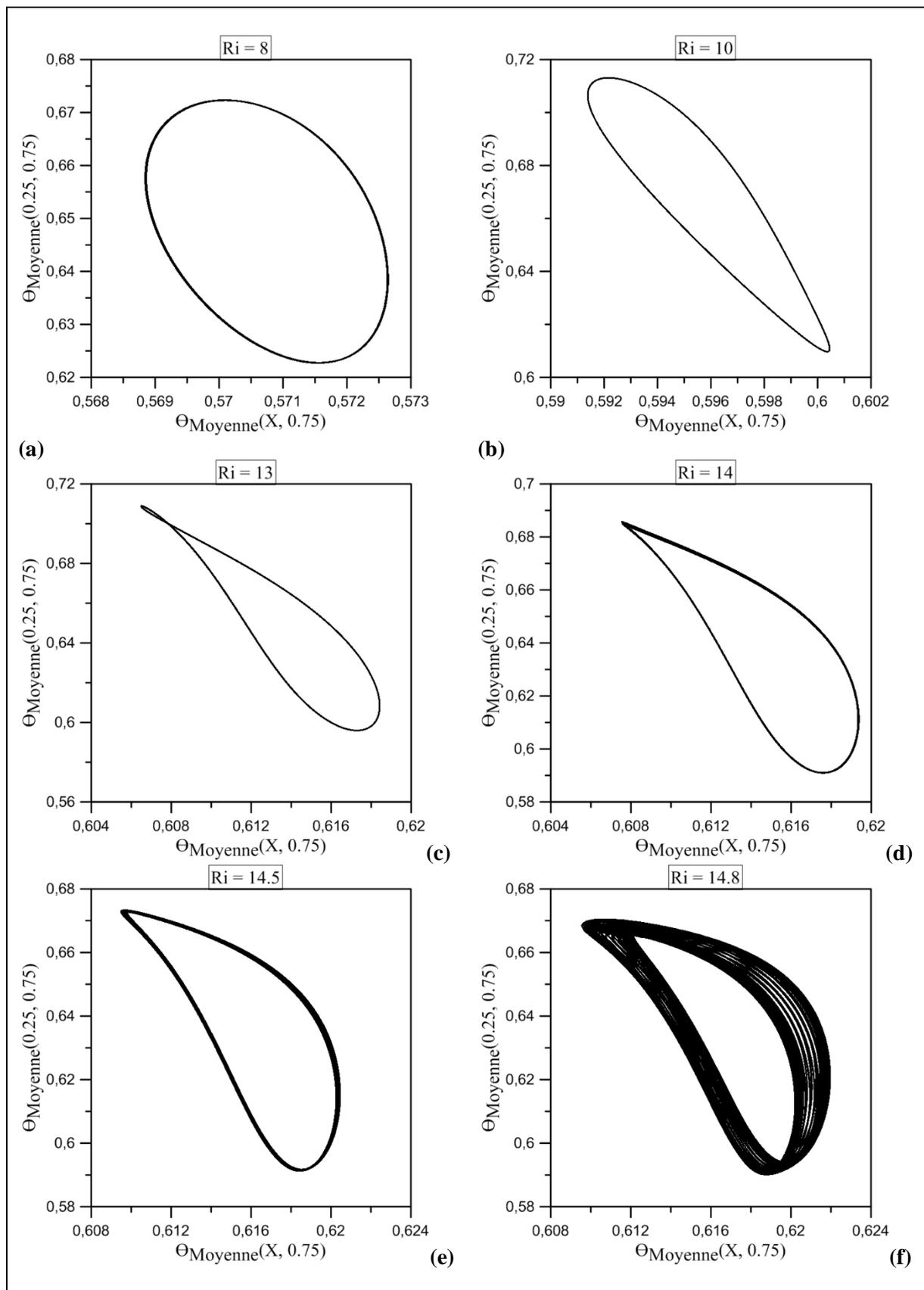
**Figure 4-16.** Attracteur point limite, (a) Cas1, (b) cas 3.

Quand le nombre de Richardson augmente à  $Ri = 10$ , le cycle limite prend une forme largement ovale, **Figure 4-17 (b)**, et une forme d'une ellipse légèrement aplatie sur sa partie inférieure, **Figure 4-18 (b)**. En revanche, à partir du  $Ri = 14$ , **Figure 4-17 (c)** et **Figure 4-18 (c)**, le régime subit une autre bifurcation, soit la solution périodique devient quasi périodique. En fait, on assiste à un changement dans la nature topologique de l'attracteur. Le cycle limite cède la place à un nouveau attracteur, le Tore.

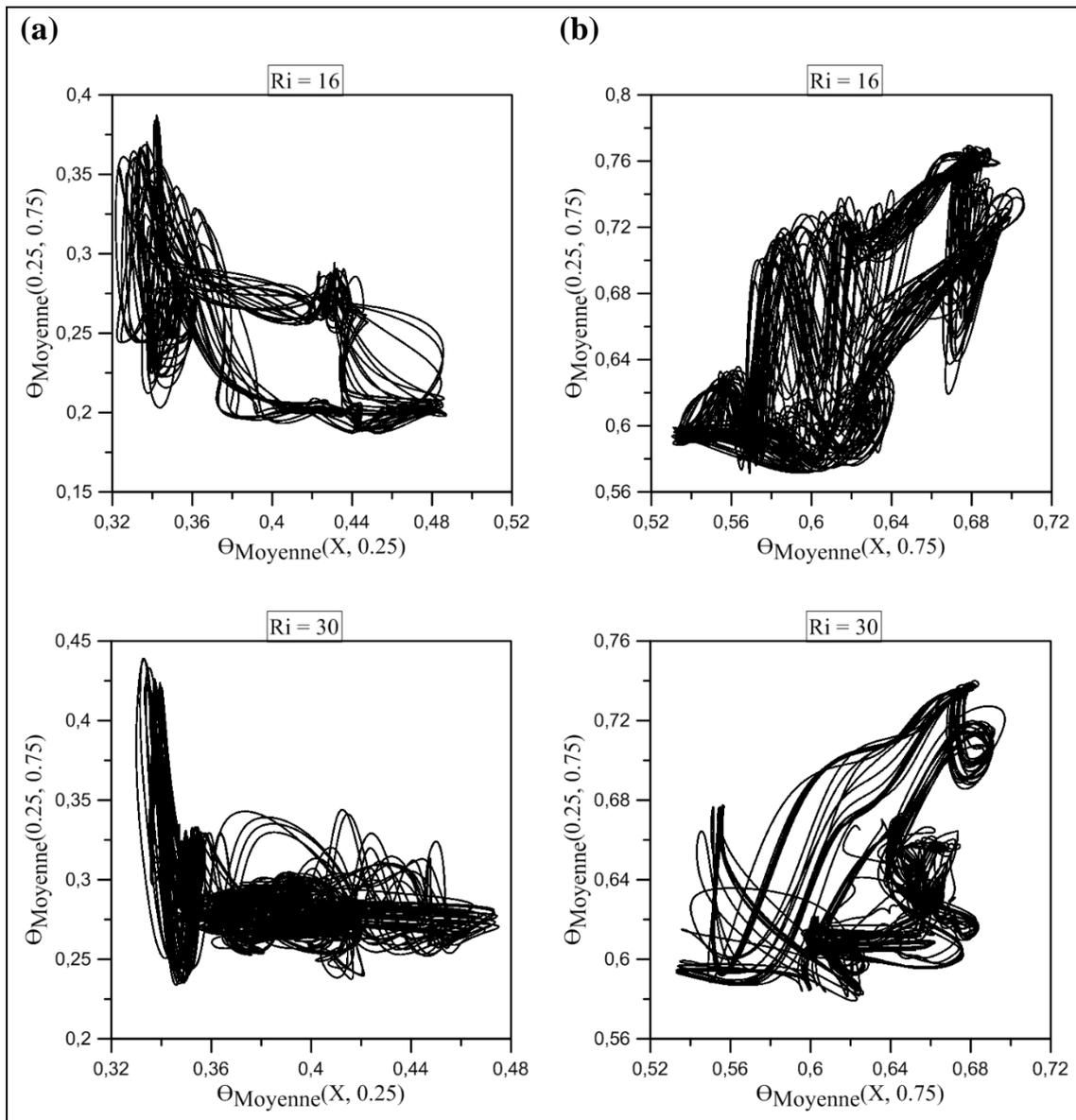
Au-delà de  $Ri = 16$ , **Figure 4-19**, le régime devient complètement chaotique, notamment l'espace des phases montre des trajectoires désordonnées et un attracteur étrange. Quand le système est chaotique, les points paraissent aléatoires au début, cependant, quand on observe suffisamment longtemps les trajectoires décrites par la dynamique du mouvement, on constate que ces trajectoires forment une forme particulière qui présente une structure feuilletée (fractale). A cause de cette géométrie particulière, ces attracteurs sont qualifiés d'étranges, D. Ruelle [3]. Effectivement, ces attracteurs sont la signature d'un régime chaotique. Ce scénario se manifeste jusqu'au voisinage de  $Ri = 60$ , **Figure 4-20 (a)** et **Figure 4-21 (a)**. Là, on voit que le régime subit un effet inverse, et l'attracteur dans cette situation montre que le régime devient quasi périodique. En augmentant le nombre de Richardson à  $Ri = 100$ , **Figure 4-20 (b)** et **Figure 4-21 (b)**, nous observons un phénomène de relaminarisation, le régime quasi périodique devient périodique. Et les attracteurs sont des cycles limites avec des formes différentes.



**Figure 4-17.** Attracteur cycle limite, transition régime périodique vers un régime quasi périodique, Cas1.



**Figure 4-18.** Attracteur cycle limite, transition régime périodique vers un régime quasi périodique, Cas3.



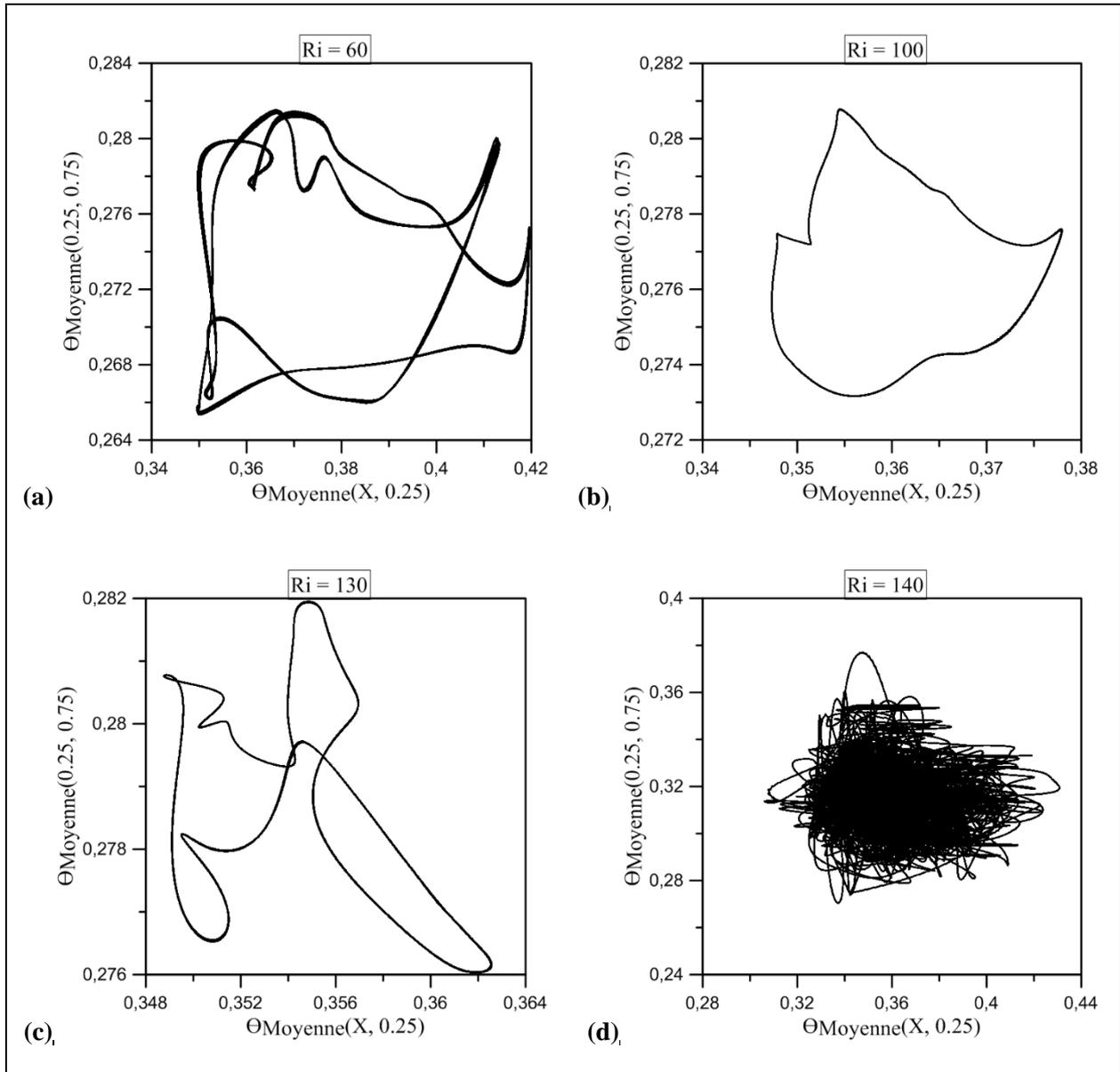
**Figure 4-19.** Attracteur étrange, (a) Cas1, (b) cas 3.

En revanche, quand le paramètre de contrôle augmente, **Figure 4-20 (c)** et **Figure 4-21 (c)**, le système subit une suite de bifurcation vers un régime quasi périodique à  $Ri = 130$ . Finalement, un régime chaotique prend place à  $Ri \geq 140$ . La **Figure 4-20 (d)** et **Figure 4-21 (d)** montrent des attracteurs étranges, notamment les trajectoires décrites par l'évolution spatio-temporelle de la température moyenne sont imprédictibles et montrent un état désordonné. C'est le chaos.

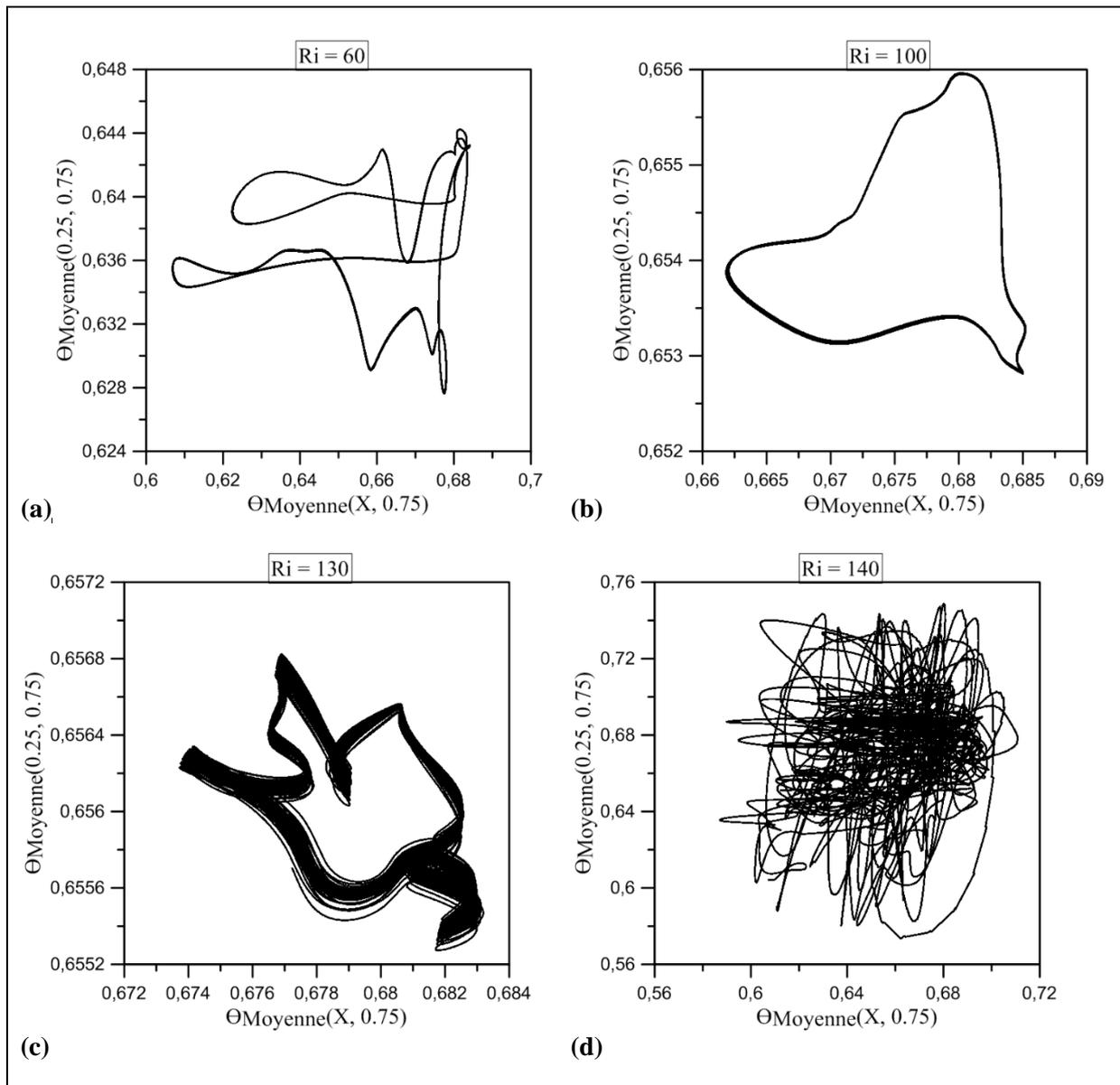
Nous constatons que le premier et le troisième cas ont presque les mêmes valeurs critiques du paramètre de contrôle, conséquence de l'inversement des conditions aux limites

thermique. En revanche, on obtient des résultats différents des portraits de phase et un phénomène de relaminarisation a été observé pour tous les cas considérés.

Un système chaotique est imprévisible, mais il est parfaitement décrit par des équations simples et déterministes. En toute généralité le système ainsi étudié dépend essentiellement de paramètre de contrôle. Ce qui compte est la nature du régime qui s'instaure à une valeur donnée de ce paramètre, et la façon dont le portrait de phase change lorsque celui-ci varie.



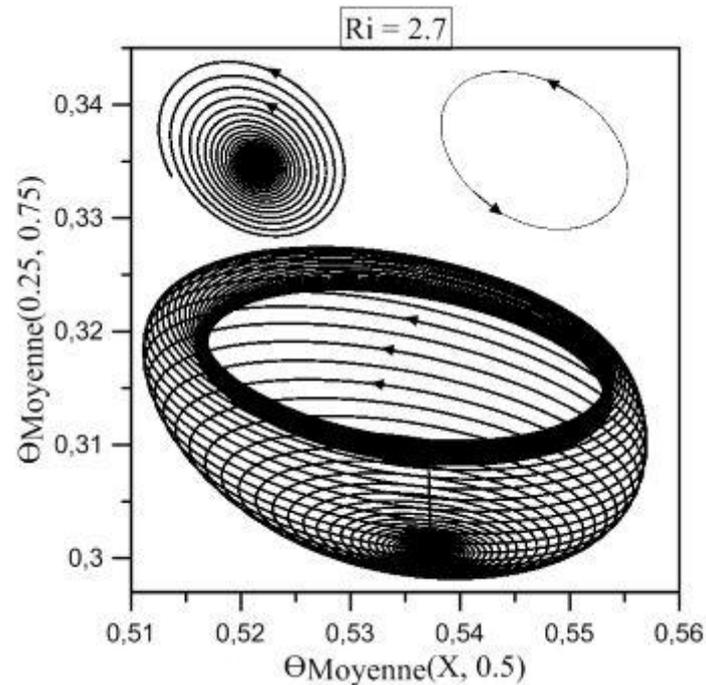
**Figure 4-20.** Phénomène de relaminarisation, (a) régime quasi-périodique, (b) régime périodique, (c) régime quasi-périodique, (f) régime chaotique. Cas I.



**Figure 4-21.** Phénomène de relaminarisation, (a) régime quasi-périodique, (b) régime périodique, (c) régime quasi-périodique, (f) régime chaotique. Cas3.

#### 4.4.4 Projection dans l'espace des phases de la température moyenne, cas2.

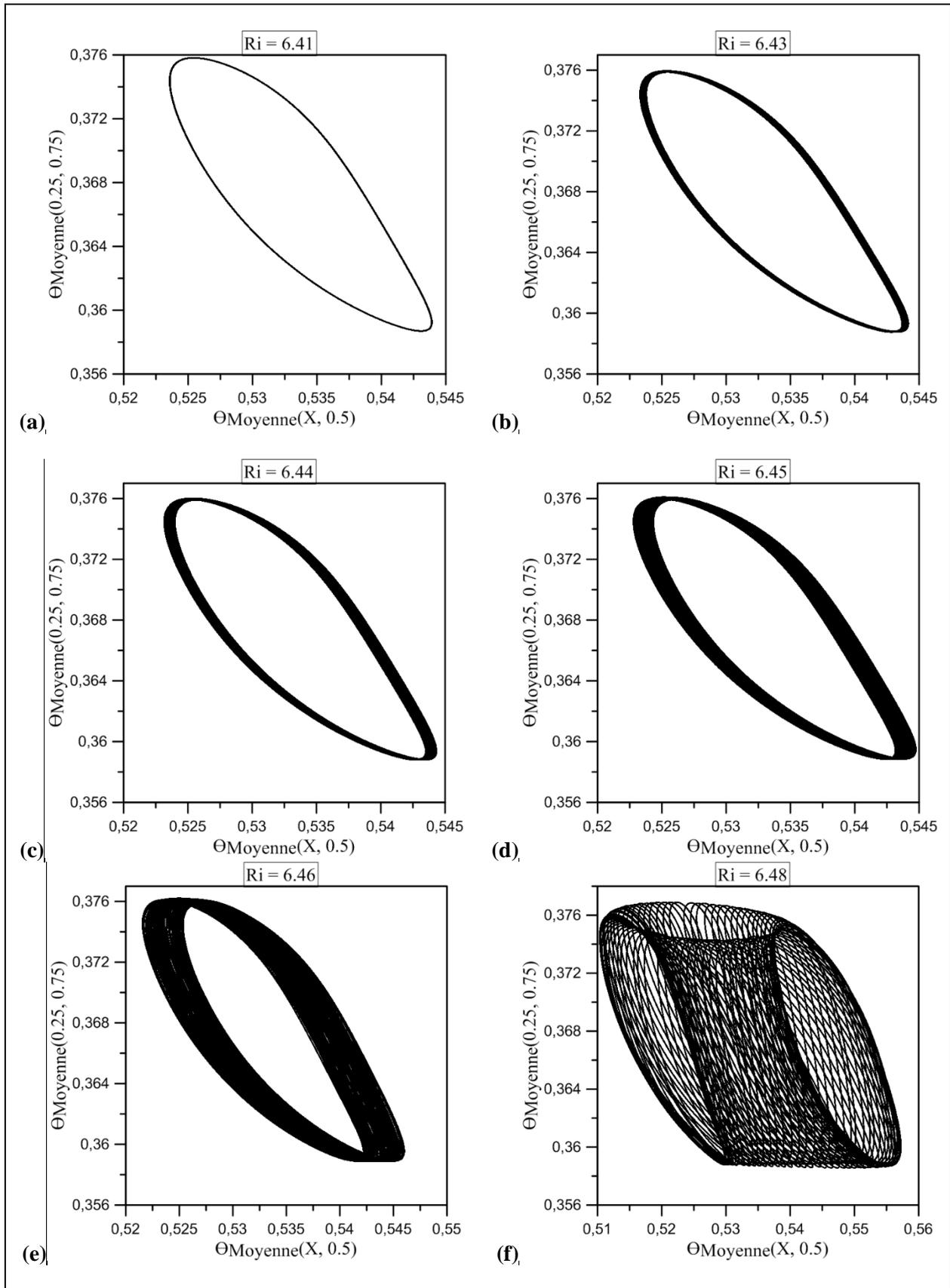
La première bifurcation qu'a été observé pour le deuxième cas, est au voisinage d'une valeur critique de  $Ri = 2.7$ , l'attracteur donné par la **Figure 4-22**, montre la forme d'une vasque.



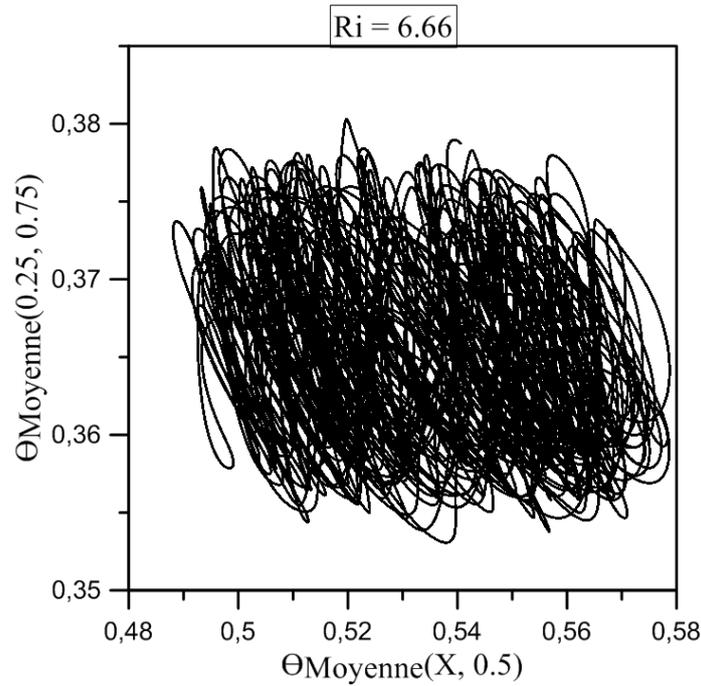
**Figure 4-22.** Bifurcation de Hopf, Cas2.

En effet, ce comportement montre que le régime laminaire subit une instabilité locale et se bifurque vers un régime périodique par franchissement d'une valeur critique. Effectivement, quand un point limite perd sa stabilité pour s'installer dans un cycle limite, cette bifurcation est dite : bifurcation de Hopf.

Le régime périodique persiste jusqu'à  $Ri = 6.41$ , on assiste au changement de forme du cycle limite. Notons que, l'attracteur cycle limite s'amointrit et prend une forme elliptique légèrement déformée sur sa partie droite. En revanche, lorsqu'on augmente légèrement le paramètre de contrôle, l'attracteur devient de plus en plus épais. L'attracteur montre la forme d'un Ruban à  $Ri = 6,45$  et  $Ri = 6,46$ . Les forces pilotées par la flottabilité sont de plus en plus déstabilisées par la bifurcation quasi-périodique, par conséquent, à  $Ri = 6,48$ , la figure, montre une dynamique de fer à cheval, Smale. S. [4], et les trajectoires s'enroulent autour de la surface d'un Tore. Dans cette situation, les trajectoires décrites par la dynamique du système montrent un régime quasi périodique. Notons que la deuxième bifurcation que le système subit se trouve dans l'intervalle  $Ri$  ( $6.41-6.43$ ). On augmentant légèrement le nombre de  $Ri$  le régime quasi périodique transite vers le chaos via une valeur critique aux alentours de  $Ri = 6,66$ , **Figure 4-24**. En effet, l'attracteur montre des trajectoires désordonnées et imprédictible, c'est l'attracteur étrange.



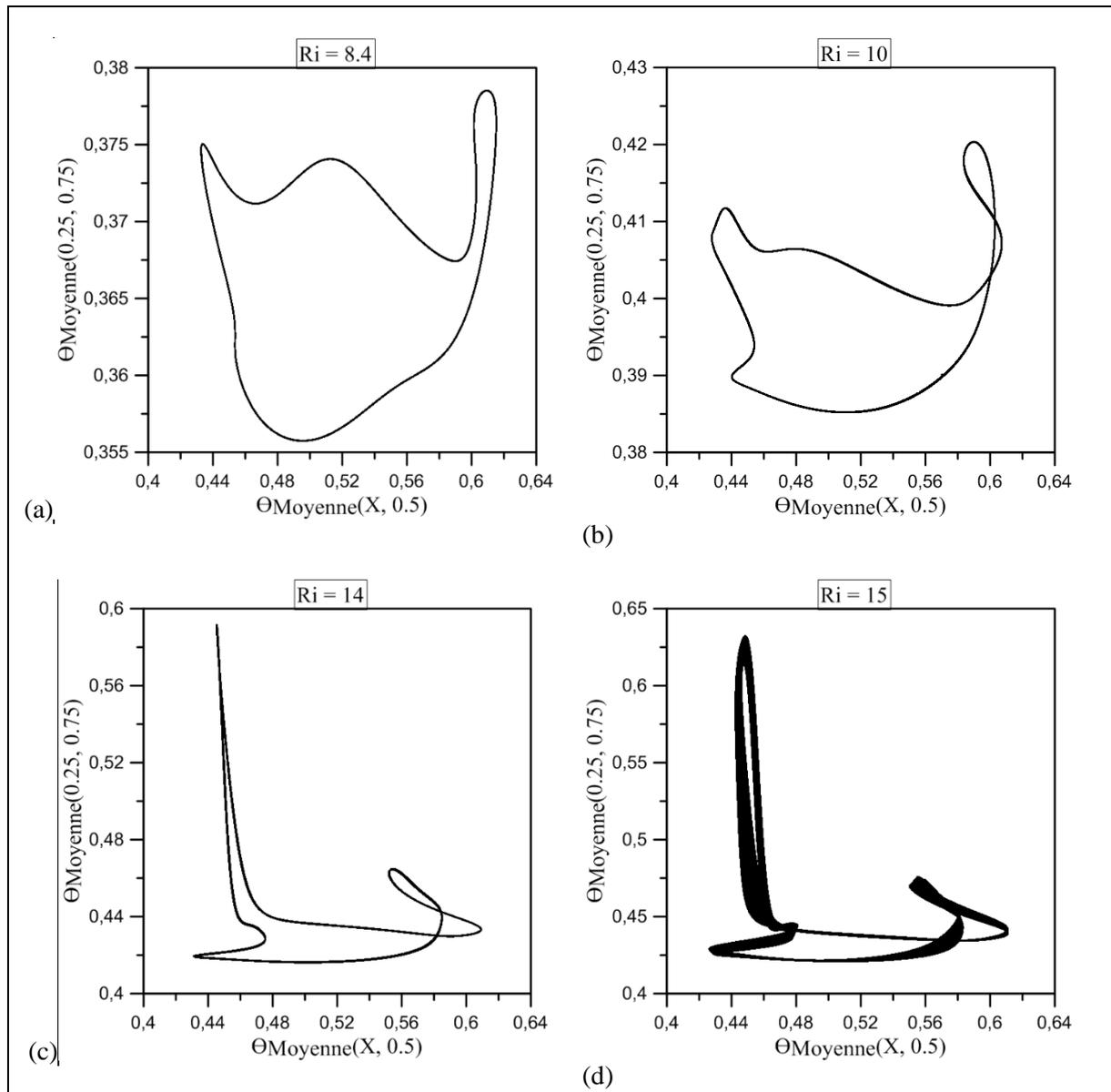
**Figure 4-23.** Attracteur cycle limite, transition régime périodique vers un régime quasi périodique, Cas2.



**Figure 4-24.** Attracteur étrange, Cas2.

En revanche, cet état chaotique persiste jusqu'à une certaines valeurs de Richardson comprise entre  $Ri$  (8-8,3), à 8,4 le régime subit un phénomène de relaminarisation et l'attracteur devient périodique. A cet effet, nous remarquons que, même si la première bifurcation qu'a été observée pour le deuxième cas apparait moins vite que celle observé pour le cas1 ( $Ri = 1.5$ ) et le cas3 ( $Ri = 1$ ), le régime chaotique apparait plus vite par rapport aux autres cas, conséquence de la symétrie des conditions aux limites. En effet, dans ce cas, le système est très sensible aux variations du paramètre de contrôle.

Au fur et à mesure que le nombre de Richardson augmente, on assiste à un changement des trajectoires décrites par la projection dans l'espaces des phases. A  $Ri = 10$ , la période du cycle limite se double. Notamment, le cycle limite est un Tore périodique à  $Ri = 10$  et quasi périodique à  $Ri = 15$ . Avec l'augmentation le nombre de Richardson, il existe une bifurcation critique comprise entre 19 et 20 pour laquelle l'attracteur devient étrange et le régime devient finalement chaotique. En effet, ce scénario persiste aux grandes valeurs du  $Ri$ .



**Figure 4-25.** Attracteur cycle limite, transition régime périodique vers un régime quasi périodique, Cas2.

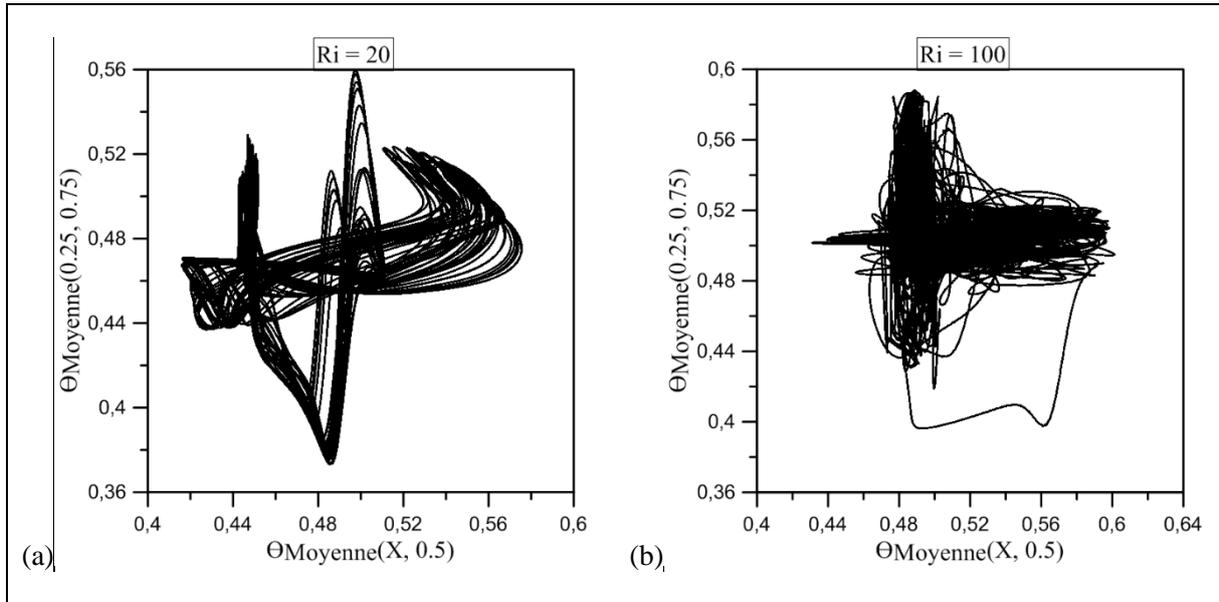


Figure 4-26. Attracteur étrange, Cas2.

#### 4.4.5 Champ thermique donné par les lignes isothermes

Figure 4-27, Figure 4-28, Figure 4-29, Figure 4-30, Figure 4-31 et Figure 4-32, montrent les évolutions temporelles des lignes isothermes, ces figures montrent que le transfert de chaleur tend vers une convection naturelle vu que les effets thermiques dominent les effets cinématique.

Nous tenons à préciser que, pour les faibles valeurs du Richardson soit ;  $Ri \leq 1$ , la convection est forcée (les effets cinématique dominant les effets thermiques) pour les valeurs du Richardson modérées  $1 \leq Ri \leq 10$  la convection devient mixte (une égalité entre les deux effets), et finalement,  $Ri \geq 10$ , la convection est naturelle. R. Iwatsu *et al* [42], M. K. Moallemi *et al* [43]–[45], É. Fontana *et al* [48] et N. S. Gibanov *et al* [62].

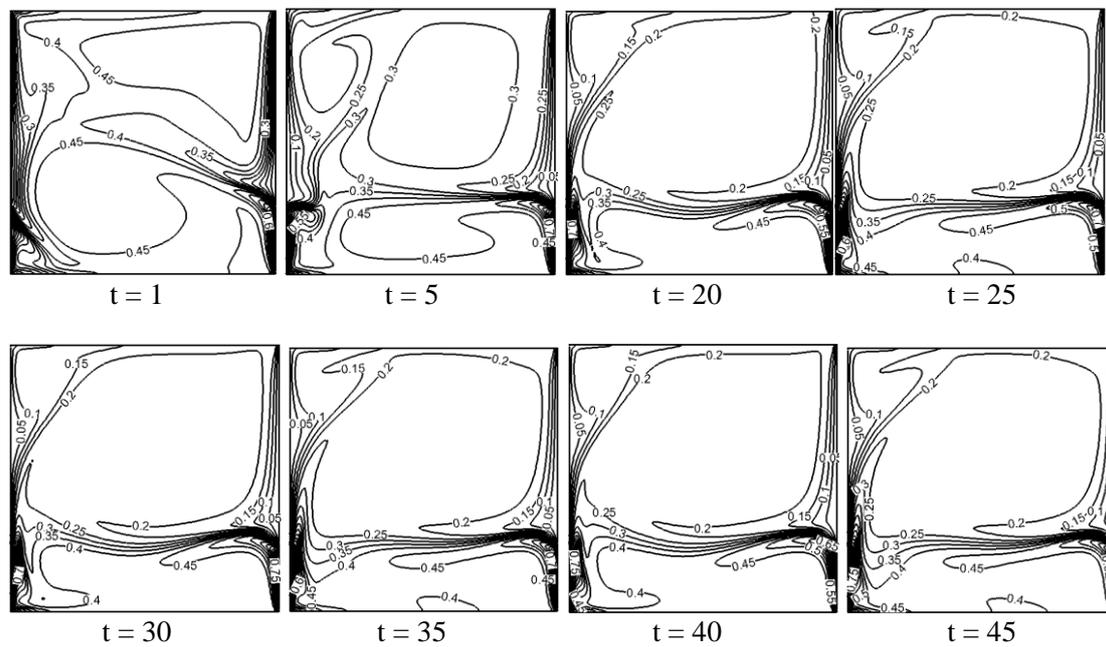


Figure 4-27. Lignes isothermes, régime périodique,  $Ri = 10$ , Cas 1.

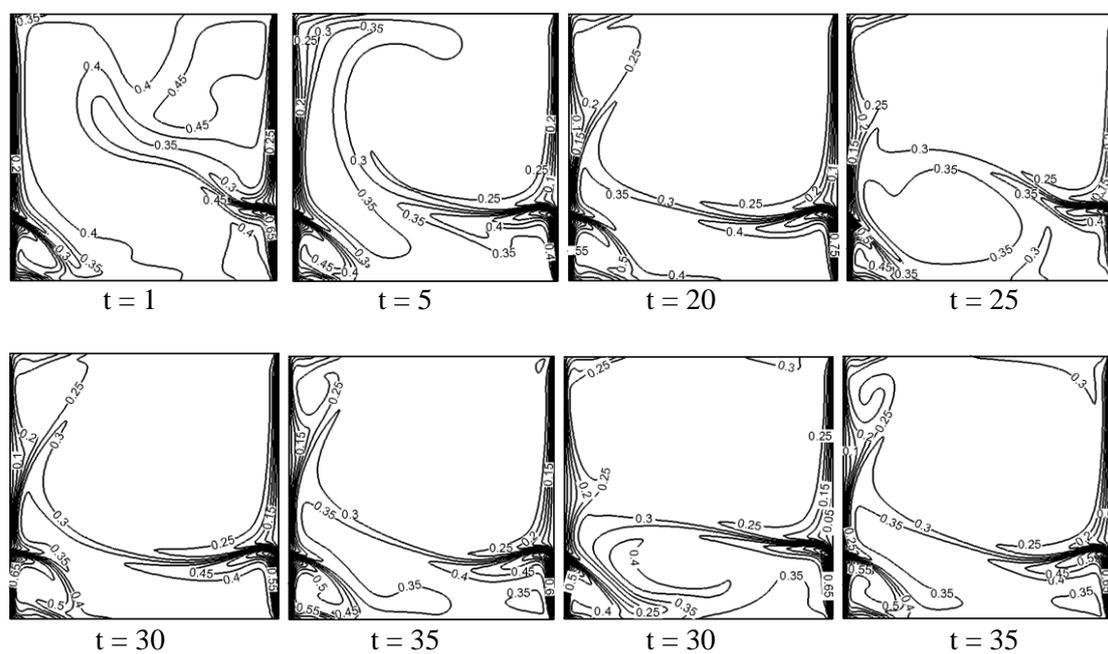


Figure 4-28. Lignes isothermes, régime chaotique,  $Ri = 30$ , Cas 1.

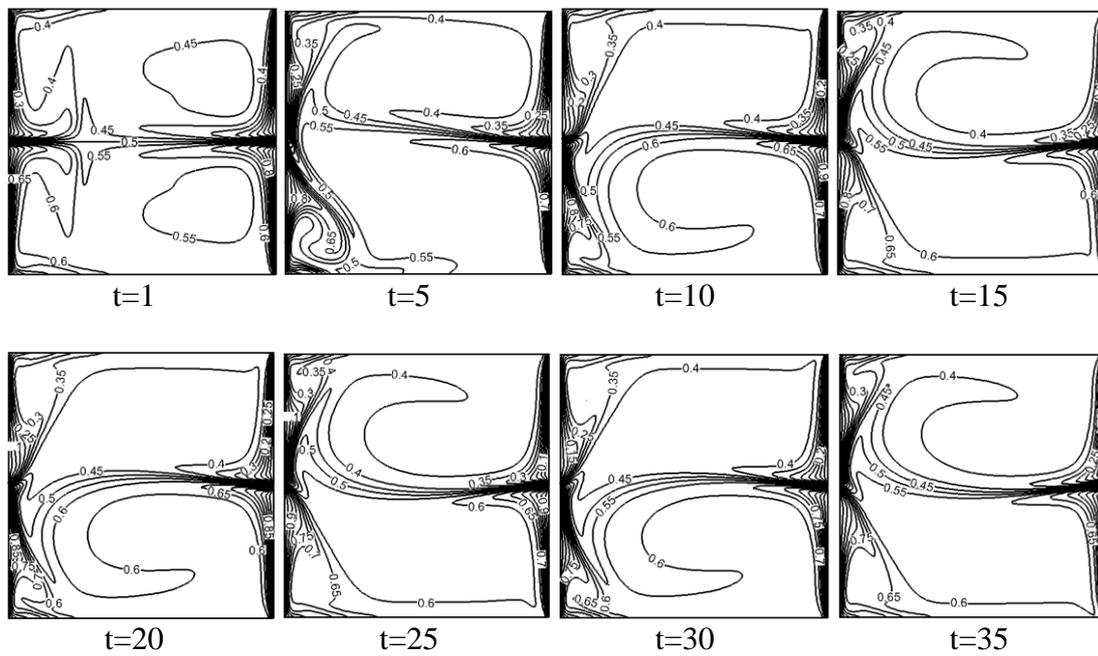


Figure 4-29. Lignes isothermes, régime périodique,  $Ri = 10$ , Cas2.

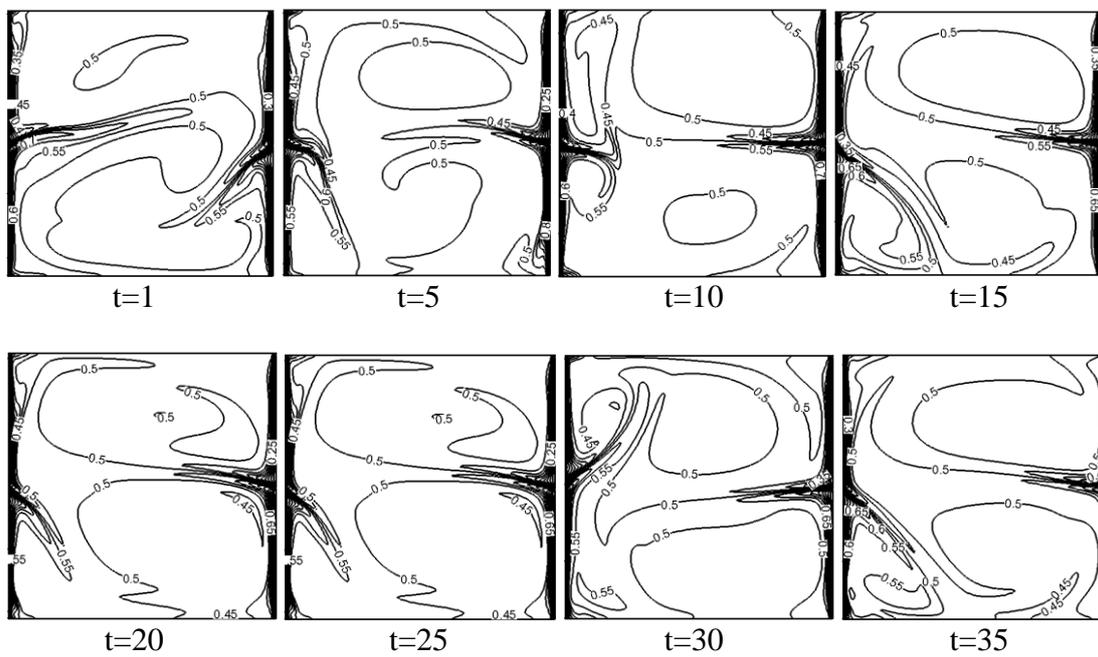


Figure 4-30. Lignes isothermes, régime chaotique,  $Ri = 100$ , Cas2.

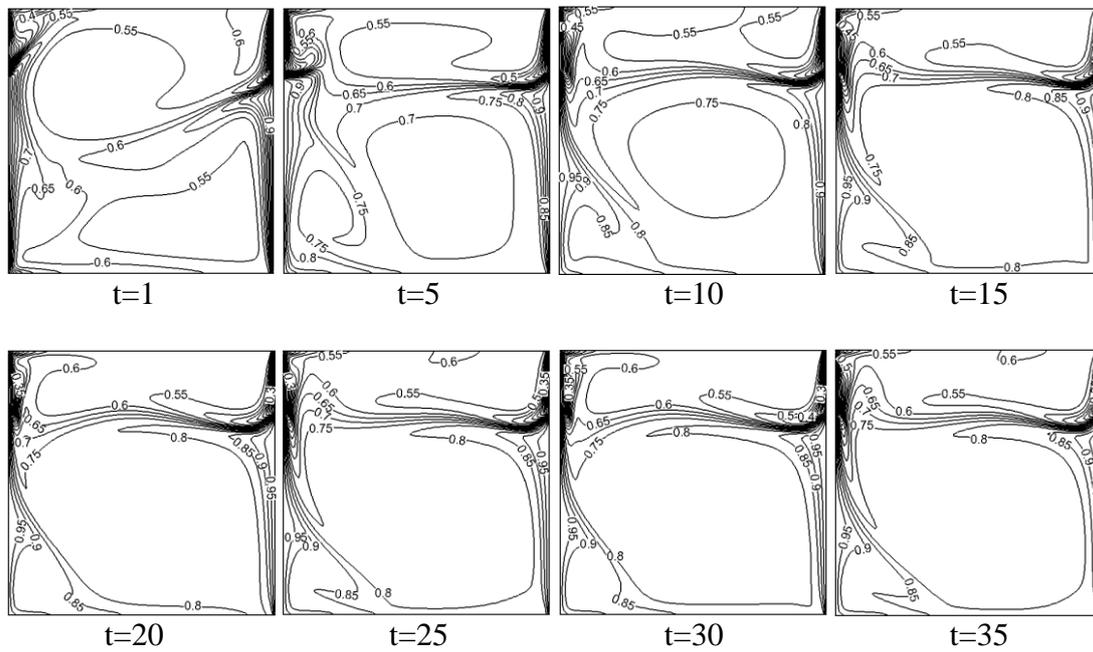


Figure 4-31. Lignes isothermes, régime périodique,  $Ri = 10$ , Cas3.

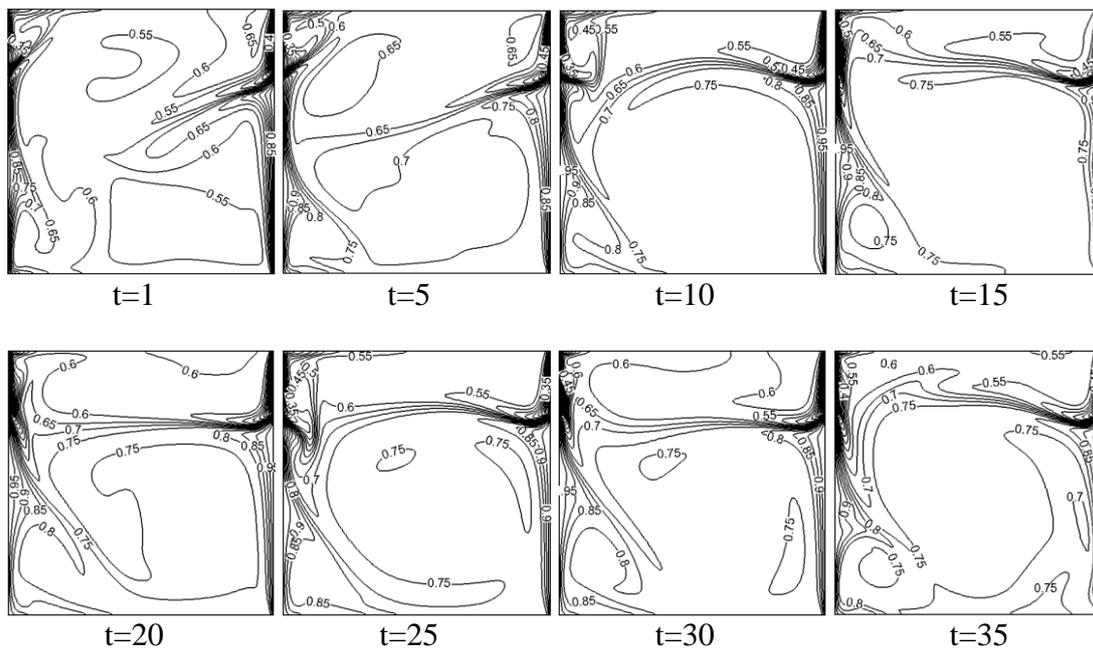


Figure 4-32. Lignes isothermes, régime chaotique,  $Ri = 16$ , Cas3.

Les lignes isothermes sont complètement déformées à  $Ri = 10$  pour les trois cas et c'est la signature d'une convection naturelle. Initialement, on voit une évolution transitoire. En revanche, quand le temps augmente au-delà de  $t = 10$ , nous remarquons que le champ thermique

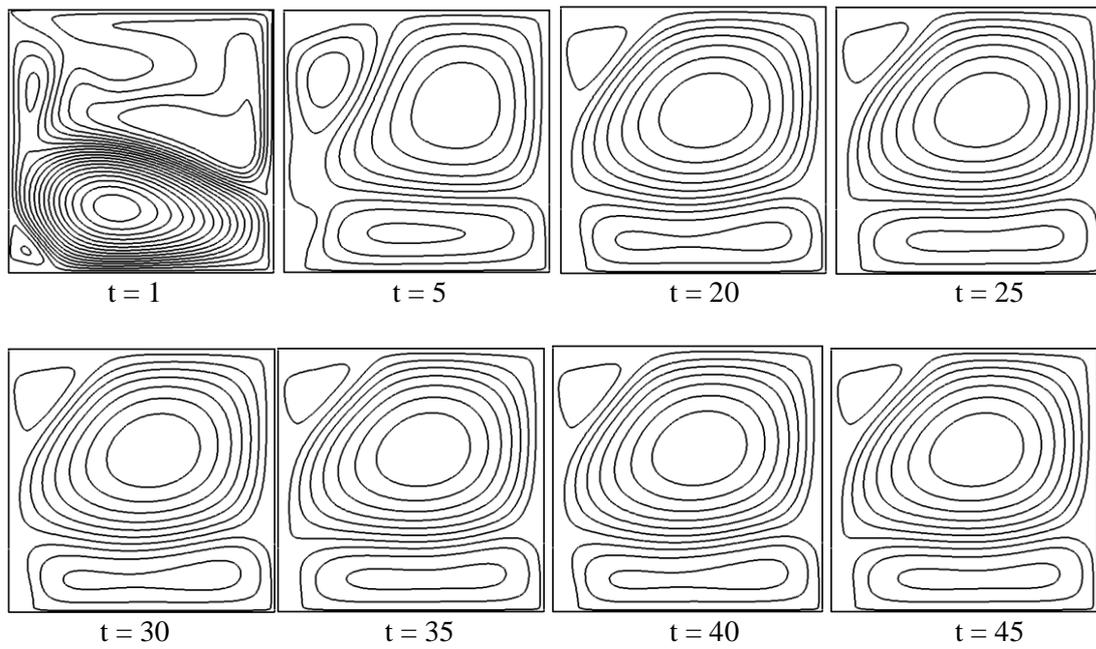
revient à une même structure chaque 5 période. Par exemple, à  $t = 25, 35$ , **Figure 4-27** et **Figure 4-31**, respectivement, on voit l'apparition d'une ligne isotherme ( $T = 0.4$ ) dans la région centrale de la paroi inférieure (cas1), et une ligne isothermes ( $T = 0.6$ ) dans la partie droite de la paroi supérieure (cas3), et ces lignes se répètent chaque 5 période. Le deuxième cas, **Figure 4-29**, initialement, les lignes isothermes se produisent d'une façon symétrique par rapport à l'axe centrale des parois verticales. Quand le temps augmente, la symétrie disparaît et les lignes isothermes montrent un régime périodique. Dans cette situation, à  $t = 10$ , nous voyons l'apparition d'une ligne isotherme ( $T=0.6$ ) dans la région basse de la cavité, après période de 5, la structure se renverse, notamment on voit l'apparition d'une autre ligne ( $T=0.4$ ) dans la région haute de la cavité, et ce comportement se répète ainsi chaque 5 période. En effet, la distribution et l'évolution temporelle des lignes isothermes montre un régime périodique. En revanche, la **Figure 4-28**, **Figure 4-30** et **Figure 4-32**, respectivement à  $Ri = 30$ ,  $Ri = 100$  et  $Ri = 16$ , montrent que les lignes isothermes sont imprédictibles et subissent un régime transitoire, notamment le système est chaotique.

#### 4.4.6 Champ d'écoulement donné par les lignes du courant

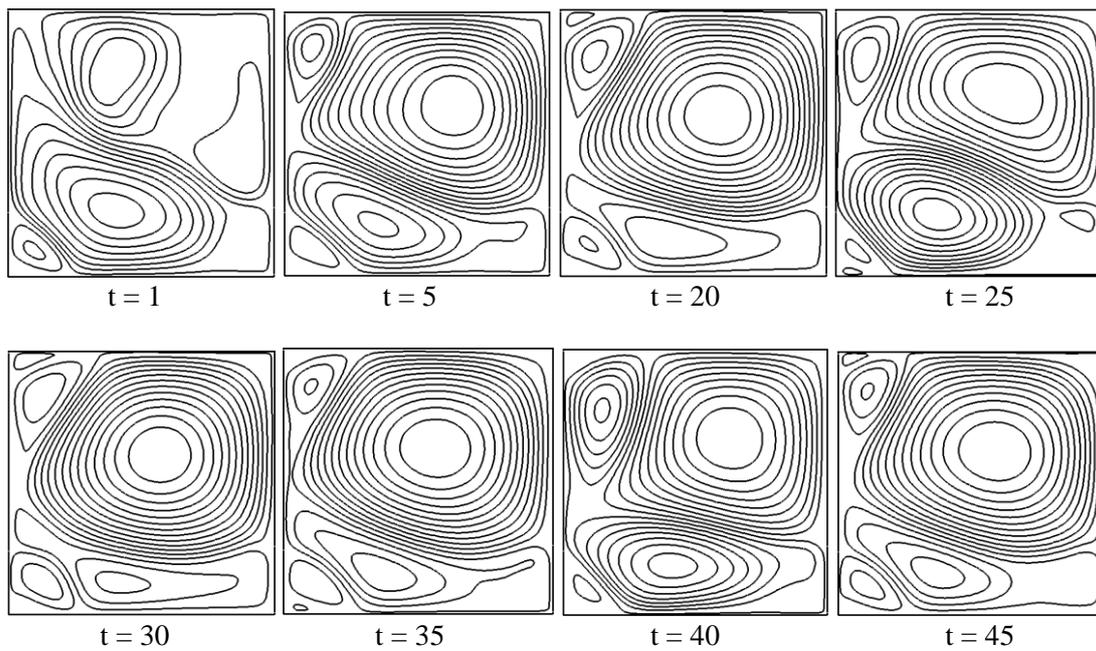
**Figure 4-33**, **Figure 4-34**, **Figure 4-35**, **Figure 4-36**, **Figure 4-37** et **Figure 4-38** montrent les évolutions temporelles des lignes du courant pour les trois cas considérés.

La **Figure 4-33** et **Figure 4-38** montrent le champ d'écoulement pour le premier et le troisième cas à  $Ri = 10$ . Ces figures montrent qu'à  $t = 1$ , les lignes du courant sont complètement déformées. On voit l'apparition d'une grande cellule dominante est plus dense située près de la paroi inférieure pour le premier cas, et près de la paroi supérieure pour le troisième cas, ainsi, une autre cellule moins dense tend à se déformer dans la région centrale, partie supérieure de la cavité (cas1), partie inférieure de la cavité (cas3). La **Figure 4-35**, à  $Ri = 10$ ,  $t = 1$ , l'écoulement est caractérisé par quatre cellules contrarotatives et symétriques par rapport à l'axe centrale des parois verticales.

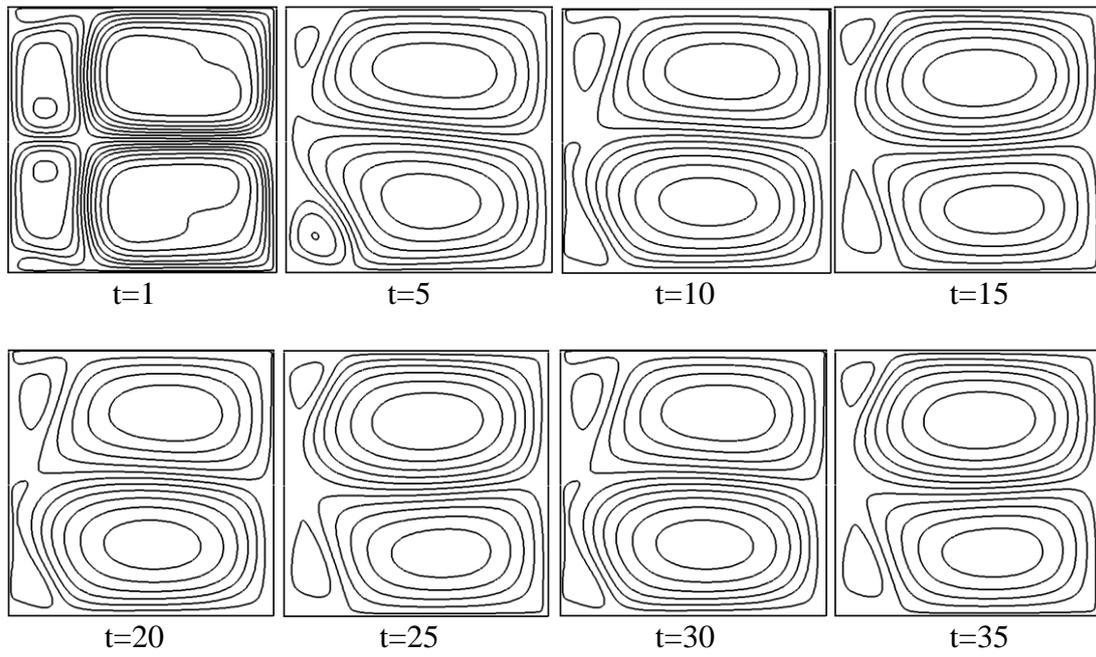
Quand le temps augmente, la cellule moins dense située en haut et en bas de la cavité tend à se développer et occupe la totalité de l'enceinte, respectivement pour le cas1 et le cas3. La cellule principale subit une compression et occupe la partie basse de la cavité, le long de la paroi inférieure pour le cas1 et le long de la paroi supérieure pour le cas3.



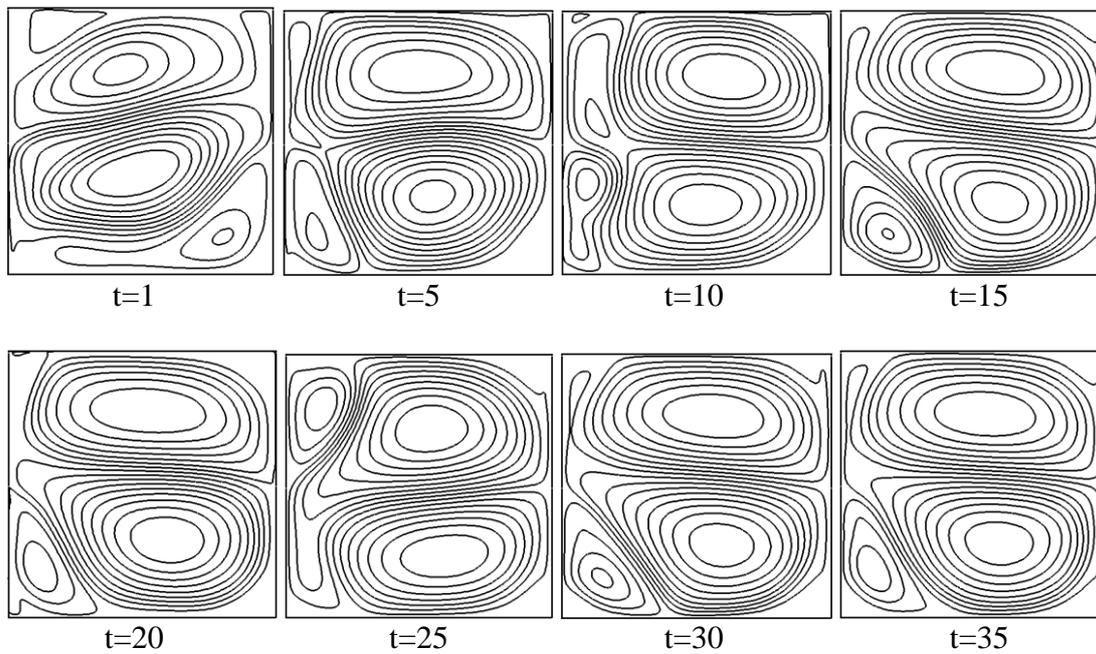
**Figure 4-33.** Lignes du courant, régime périodique,  $Ri = 10$ , Cas1.



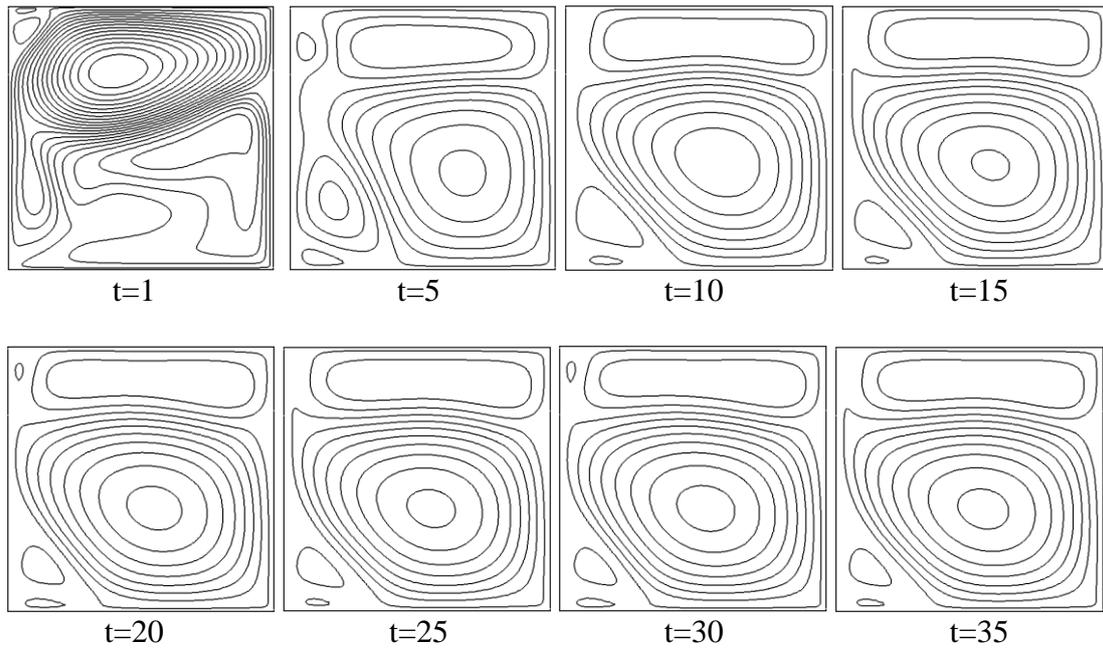
**Figure 4-34.** Lignes du courant, régime chaotique,  $Ri = 30$ , Cas1.



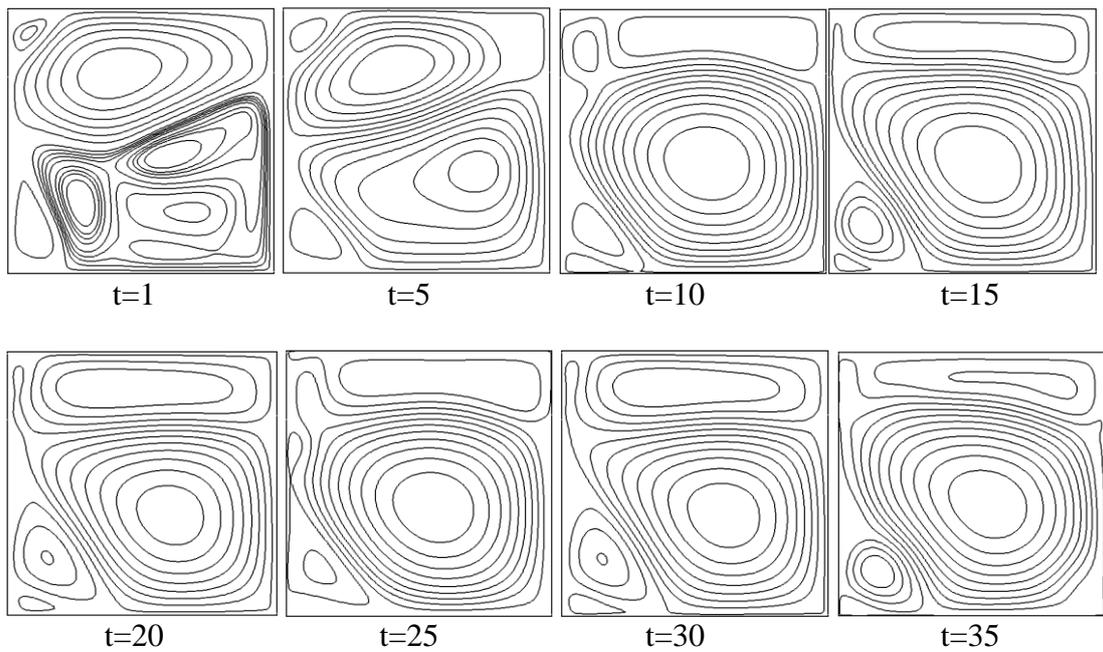
**Figure 4-35.** Lignes du courant, régime périodique,  $Ri = 10$ , Cas2.



**Figure 4-36.** Lignes du courant, régime chaotique,  $Ri = 100$ , Cas2.



**Figure 4-37.** Lignes du courant, régime périodique,  $Ri = 10$ , Cas3.

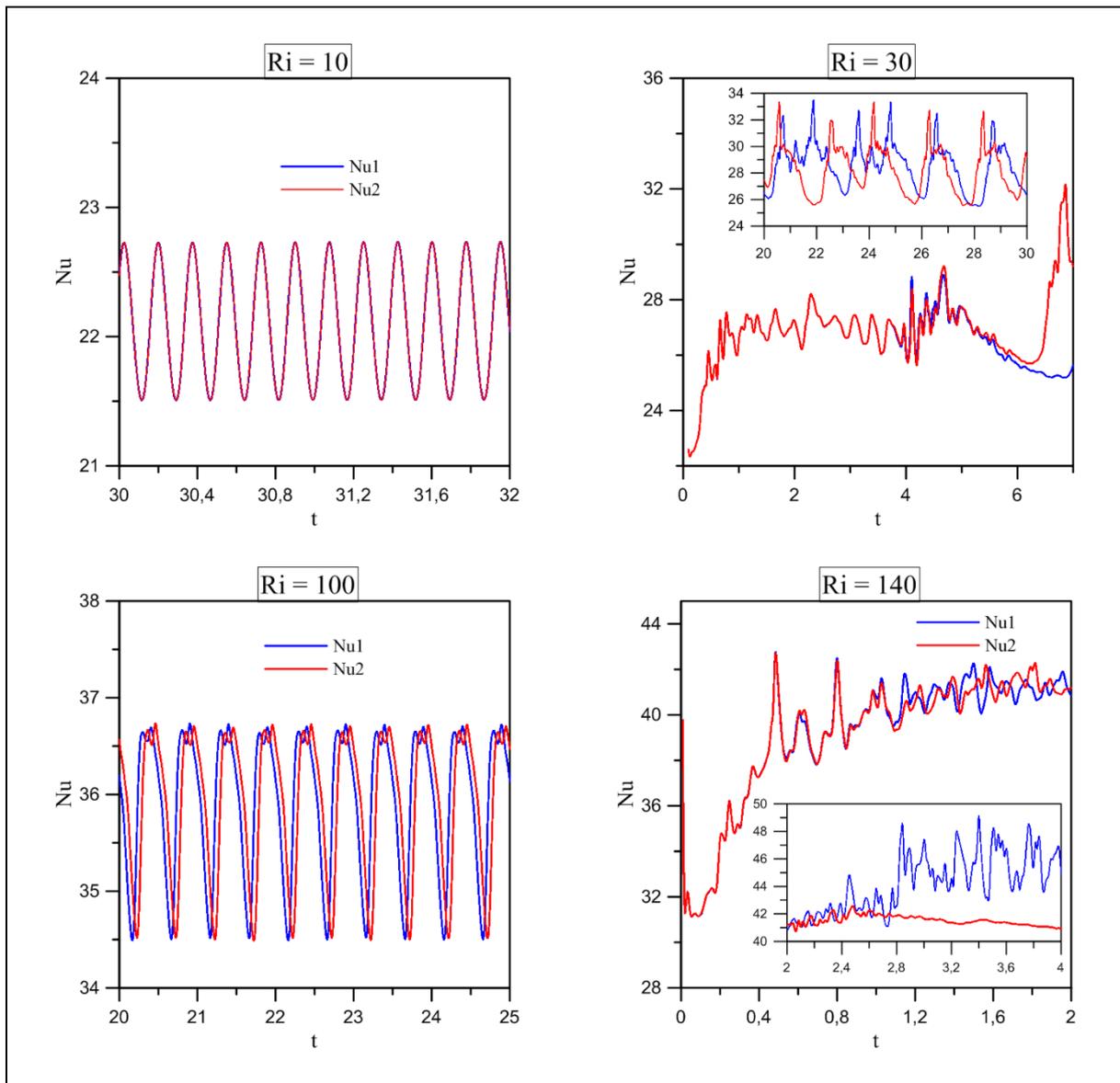


**Figure 4-38.** Lignes du courant, régime chaotique,  $Ri = 16$ , Cas3.

Nous voyons ainsi une cellule secondaire occupe le coin de gauche de la cavité cas1 et inversement pour le cas3. En revanche, les lignes du courant donné par la **Figure 4-35**, montre que l'écoulement est caractérisé par deux grande cellules principales et contrarotatives occupent la totalité de l'enceinte, notamment dans la partie gauche vu le sens du déplacement des parois horizontales. En fait, le comportement des lignes du courant montre qu'à chaque 5 période, la structure revient à son état de départ, ce qui est bien évidemment un régime périodique. En revanche, **Figure 4-34**, **Figure 4-36** et **Figure 4-38**, respectivement à,  $Ri = 30$ ,  $Ri = 100$  et  $Ri = 16$ , nous voyons un régime transitoire imprédictible est c'est la signature du chaos. Notamment la structure des lignes du courant est caractérisée par plusieurs cellules qui évoluent d'une manière transitoire et imprédictible quand le temps augment.

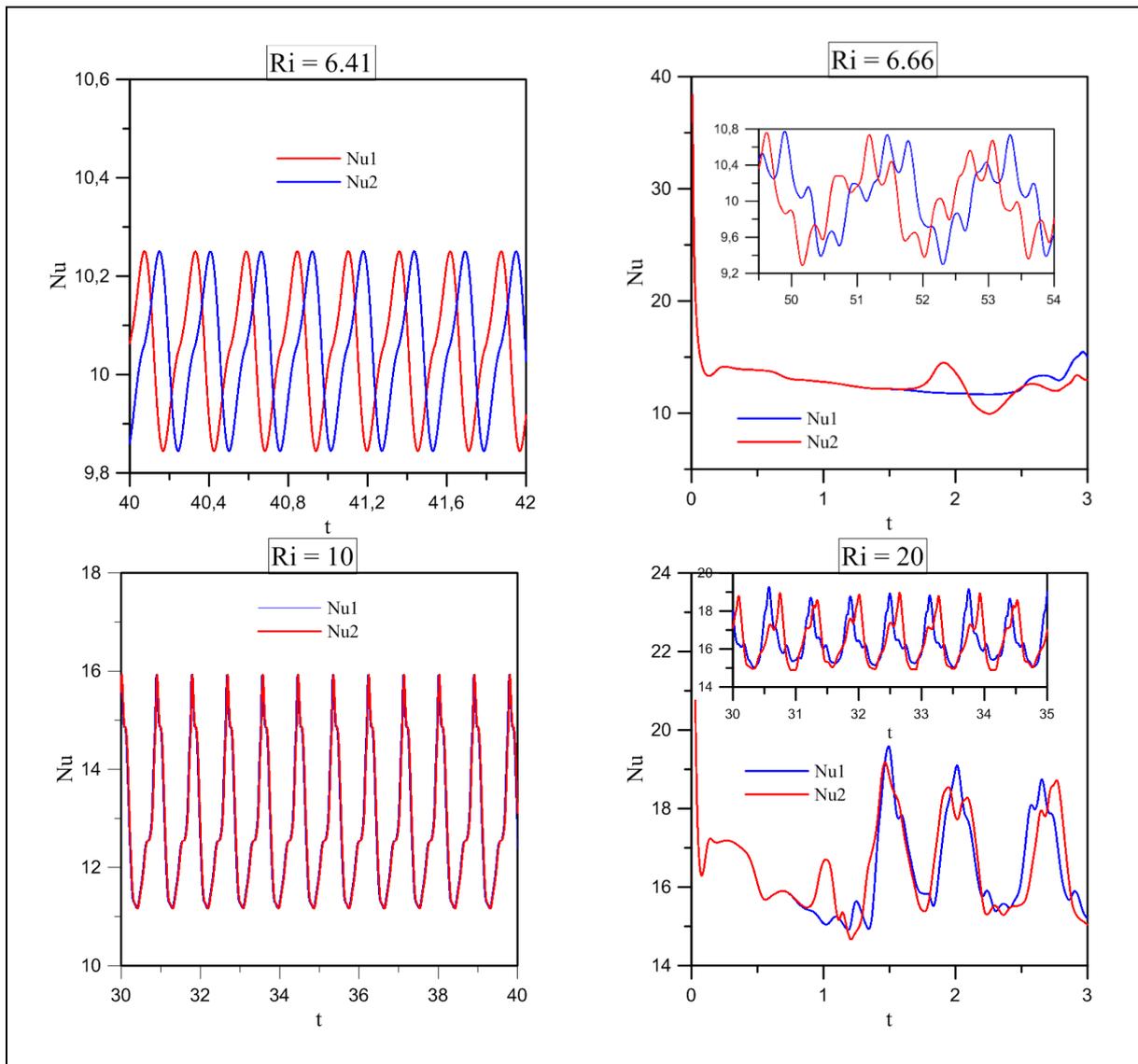
#### 4.4.7 Sensibilité aux conditions initiales

L'effet le plus visible de la non-linéarité des équations gouvernants le transfert de chaleur et le champ d'écoulement, est la sensibilité aux conditions initiales de ces équations. Effectivement, des petites incertitudes dans les conditions initiales d'une simulation numérique, peuvent provoquer de grandes variations dans le résultat final. Pour cela, La sensibilité aux conditions initiales de notre système est mise en évidence suite à un changement dans la condition initiale de nombre de Nusselt moyen. Pour cela, pour chaque cas considéré et chaque situation de nombre de Richardson, nous avons lancé deux simulations très proches dans les conditions initiales, soit une déférence de l'ordre de  $\varepsilon = 10^{-3}$ . **Figure 4-39**, **Figure 4-40** et **Figure 4-41** montrent des exemples pour différents nombre de Richardson pour les trois considérés. Ces figures montrent, respectivement à,  $Ri = 10$ , 100 cas1,  $Ri = 6.41$ , 10 cas2 et  $Ri = 10$ , 100 cas3, les évolutions du nombre du Nusselt moyen pour deux solutions très proches dans les conditions initiales, à cet effet, les trajectoires décrites montrent des évolutions régulières et parfaites. En effet, les deux profils de Nusselt à  $Ri = 10$  pour tous les cas sont confondus. En revanche, **Figure 4-39** à  $Ri = 100$ , **Figure 4-40** à  $Ri = 6.41$  et **Figure 4-41** à  $Ri = 100$  même si ces figure présentent un léger écartement entre les deux évolutions du Nusselt, cet écart évolue d'une manière constante avec le temps. En effet, cet écartement des deux solutions semble invariant en fonction du temps, et sont insensibles aux conditions initiales et le régime n'est pas chaotique notamment la prédiction est possible à long terme.



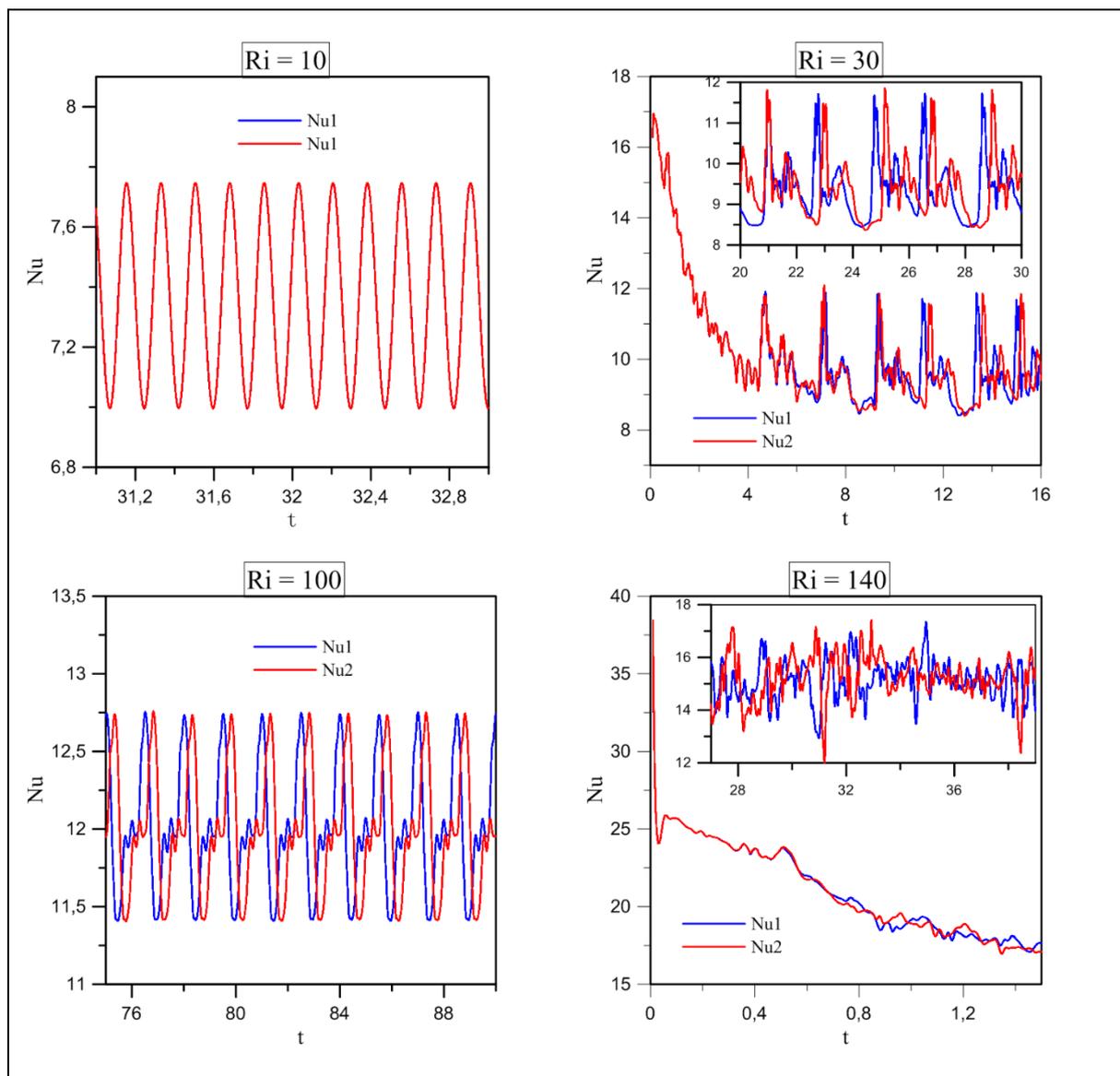
**Figure 4-39.** Sensibilité aux conditions initiales, Cas 1.

En revanche, quand le nombre de Richardson augmente, **Figure 4-39**, **Figure 4-40** et **Figure 4-41** respectivement à,  $Ri = 30$  et  $140$ ,  $Ri = 6.66$  et  $20$ ,  $Ri = 30$  et  $140$  on voit des évolutions transitoires du nombre de Nusselt. En effet, une grande sensibilité aux conditions initiales du nombre de Nusselt moyen est à noter. Les figures montrent que les deux solutions initialement sont indiscernables et évoluent d'une manière identique, jusqu'à un certain horizon de prédictibilité, les trajectoires commencent à se séparer et finissent par diverger. Et, cette divergence des deux trajectoires est due essentiellement aux termes non linéaires dans les équations du modèle. Cette dépendance aux conditions initiales caractérise un régime chaotique et déterministe.



**Figure 4-40.** Sensibilité aux conditions initiales, Cas2.

On parle alors d'une dynamique chaotique, localement prévisible mais imprévisible à long terme. Cependant, l'imprévisibilité provient non pas de la dynamique modélisée, mais de la méconnaissance inévitable des conditions initiales avec une précision, chose qui impossible à réaliser avec un calcul numérique, T. D. De Wit [4], P. Manneville [5].



**Figure 4-41.** Sensibilité aux conditions initiales, Cas3.

Certains phénomènes dynamiques non linéaires sont si sensibles aux conditions initiales que, même s'ils sont régis par des lois rigoureuses et parfaitement déterministes, les prédictions exactes sont impossibles, R. G. H. Eschauzier *et al* [2]. Comme la plupart des phénomènes sont non linéaires, on comprend alors l'importance de la découverte de E. Lorenz [1].

#### 4.4.8 Exposant de Lyapunov

La mesure de la sensibilité aux conditions initiales de notre système est estimée par l'évaluation de l'exposant de Lyapunov. Cet exposant nous permet essentiellement de voir le degré de divergence entre deux solutions initialement très voisines, notamment la stabilité ou l'instabilité autour des points d'équilibres. Un exposant de Lyapunov positif, le régime est chaotique imprédictible, dans le cas contraire, nul ou négatif, le régime est non chaotique notamment la prédictibilité est possible à long terme.

**Tableau 4-1.** Exposant de Lyapunov (Ly), Cas 1

Richardson	Ly	Nature du régime
<b>8</b>	-0.0315	Non chaotique
<b>10</b>	-0.0030	Non chaotique
<b>11</b>	-0.1124	Non chaotique
<b>13</b>	-0.1440	Non chaotique
<b>15</b>	+0.1233	chaotique
<b>20</b>	+0.2386	chaotique
<b>60</b>	-0.2697	Non chaotique
<b>100</b>	-0.0270	Non chaotique
<b>120</b>	+0.1628	chaotique
<b>140</b>	+1.2441	chaotique

**Tableau 4-2.** Exposant de Lyapunov (Ly), Cas 2

Richardson	Ly	Nature du régime
<b>6.41</b>	-0.3070	Non chaotique
<b>6.47</b>	-0.1119	Non chaotique
<b>6.5</b>	-0.3854	Non chaotique
<b>6.6</b>	+0.1994	chaotique
<b>10</b>	-0.1714	Non chaotique
<b>12</b>	-0.2386	Non chaotique
<b>14</b>	-0.0496	Non chaotique
<b>18</b>	-0.1188	Non chaotique
<b>20</b>	+0.1628	chaotique
<b>100</b>	+0.3456	chaotique

**Tableau 4-3.** Exposant de Lyapunov, Cas 3

Richardson	Ly	Nature du régime
<b>10</b>	-0.6362	Non chaotique
<b>12</b>	-0.0619	Non chaotique
<b>15</b>	-0.0351	Non chaotique
<b>30</b>	+0.3333	Chaotique
<b>50</b>	+0.0300	Chaotique
<b>60</b>	-0.3363	Non chaotique
<b>100</b>	-0.9515	Non chaotique
<b>120</b>	-0.3456	Non chaotique
<b>140</b>	+0.3582	Chaotique

A cet effet, **Tableau 4-1**, **Tableau 4-2** et **Tableau 4-3**, montrent respectivement, pour les trois cas, les valeurs du coefficient de Lyapunov pour différentes valeurs du Richardson, et résumement les successions de transition du système vers le chaos. Ces tableaux montrent également des phénomènes de relaminarisation pour les trois cas considérés. En fait, la **Tableau 4-1** et **Tableau 4-3** montrent que les points critiques de transition vers le chaos sont presque identiques. En revanche, la **Tableau 4-2** montre que la première transition vers le chaos apparait plus vite que dans les autres cas, et la deuxième bifurcation vers le chaos se trouve au voisinage de  $Ri = 20$ .

#### 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons mené une étude du régime transitoire de la convection mixte induite dans une cavité carrée. Une étude sur la route du système vers le chaos a été menée est discutée sous forme de projection de la température moyenne dans l'espace des phases, de l'évolution temporelle de Nusselt moyen, des lignes isothermes et iso-courants, et de la sensibilité aux conditions initiales via l'exposant de Lyapunov. Cette étude a été effectuée en fonction du nombre de Richardson pour les trois cas de combinaison aux conditions aux limites déjà précisés au second chapitre. Les résultats indiquent que ;

- Le transfert de chaleur est légèrement prononcé aux faibles valeurs du paramètre de contrôle, notamment est dû à une convection forcée vu l'importance des effets cinématiques par rapport aux effets thermiques dans ce cas (faible valeurs de

Richardson). En revanche, la convection est mixte pour les valeurs modérées du nombre de Richardson, pour les valeurs très importantes de ce paramètre, la convection est naturelle.

- Dans tous les cas, nous avons observé des suites de bifurcation vers le chaos suivent les scénarios suivants ; régime laminaire- périodique, régime périodique-quasi périodique et finalement régime quasi périodique-chaotique. Pour tous les cas considérés, à chaque valeur du paramètre de contrôle, un phénomène de relaminarisation a été observé dans des situations différentes.

### **Une partie de ces travaux a fait l'objet d'une communication internationale**

ADNANI. M, MEZIANI. B and OURRAD. O, Transfert de chaleur dans une cavité carrée soumise aux différentes conditions aux limites, 6ème congrès Algérien de Mécanique «CAM2017», Novembre 26—30, 2017, Constantine, Algérie.

## Conclusion générale

L'étude qu'a été menée dans cette thèse avait comme objectif d'évaluer le comportement permanent et transitoire d'un écoulement laminaire en convection naturelle et mixte respectivement, lorsque la cavité est soumise à des conditions aux limites thermiques variables.

Dans un premier temps, la notion des systèmes dynamiques non linéaire a été introduite. Nous avons présenté les outils nécessaires pour la caractérisation de ces systèmes. Une recherche bibliographique nous a permis d'une part d'améliorer nos connaissances sur les structures des écoulements et le transfert de chaleur par convection, d'autre part, de comprendre la transition et la bifurcation de ces systèmes vers le chaos.

Le chapitre deux est consacré à la représentation de la configuration considérée dans cette thèse, il s'agit notamment d'une cavité carrée remplie d'un fluide Newtonien. Trois cas de condition aux limites thermiques ont été considérés pour toutes les simulations du présent travail. Le quart bas des parois verticales est chaud, le reste est froid, pour le premier cas. La moitié basse des parois verticales est chaude, le reste est froid, pour le deuxième cas. Le troisième cas, nous avons inversé les conditions aux limites du premier cas, soit les trois quarts bas des parois verticales sont chaudes, le reste est froid. Les parois horizontales sont adiabatiques, immobiles dans le cas de la convection naturelle et soumises à une vitesse constante dans le cas de la convection mixte. Des considérations simplificatrices nous ont permis de modéliser le problème. La méthode des volumes finis a été adoptée pour résoudre le phénomène.

La troisième partie du travail a été consacrée à une étude numérique de la convection naturelle en régime permanent. L'effet des conditions aux limites thermiques et les nombres adimensionnels à savoir le nombre de Rayleigh et le nombre de Prandtl sur les structures d'écoulement et le champ thermique ont été mises en évidence. Cette considération nous a permis de voir le comportement du transfert de chaleur ainsi que le champ d'écoulement pour différentes valeurs des nombres de Rayleigh et de Prandtl. Nous avons illustré des situations dans lesquelles le transfert de chaleur passe par un maximum à chaque nombre de Rayleigh et de Prandtl. Les résultats montrent que le transfert de chaleur n'est pas affecté par les nombres de Prandtl et de Rayleigh aux faibles gradients de température. Pour des nombres de Rayleigh très élevés, le transfert de chaleur augmente, et dans cette situation diminue légèrement avec

l'augmentation du nombre de Prandtl. En particulier, le taux de transfert thermique donné par le nombre de Nusselt moyen montre une augmentation considérable de transfert de chaleur dans le premier cas par rapport autres cas.

Dans la dernière partie de ce travail, nous avons mené une étude numérique de la convection mixte en régime transitoire induite dans une cavité carrée. Sous l'effet des conditions aux limites thermique et cinématique et le nombre adimensionnel de Richardson sur la convection mixte, nous avons pu mettre en évidence la route qui mène le système vers le chaos. Dans tous les cas, nous avons observé des suites de bifurcation vers le chaos suivent les scénarios suivants ; régime laminaire- périodique, régime périodique-quasi périodique et finalement régime quasi périodique-chaotique. A chaque valeur du paramètre de contrôle, pour tous les cas considérés, un phénomène de relaminarisation a été observé dans des situations différentes. Les résultats indiquent que le chaos apparaît plus vite dans le deuxième cas par rapport aux deux autres cas, conséquence de la symétrie des conditions aux limites.

Aujourd'hui la maîtrise et le contrôle des systèmes dynamiques résultants des modes de transfert de chaleur par convection est une question évidente pour les chercheurs, car cette notion est d'importance cruciale dans les applications industrielles pour promouvoir ou supprimer le développement des instabilités thermique.

En perspective, puisque cette étude est basée sur des considérations simplificatrices, comme la masse volumique considérée constante dans tous les termes de l'équation de quantité de mouvement sauf dans le terme des forces de volume où elle est donnée par l'approximation de Boussinesq. Nous pouvons suggérer une étude qui mettra l'accent sur une approche plus globale où la masse volume varie dans tous les termes de l'équation pour mieux approcher les cas réels. Nous pouvons ainsi considérer un fluide complexe, notamment un fluide non-newtonien dans des configurations tridimensionnelles.

## Références Bibliographiques

- [1] E. N. Lorenz and E. N. Lorenz, “Deterministic Nonperiodic Flow,” *Journal of the Atmospheric Sciences*, vol. 20, no. 2, pp. 130–141, 1963.
- [2] R. G. H. Eschauzier, L. P. T. Kerklaan, and J. H. Huijsing, *FROM ORDER TO CHAOS II: Essays: Critical, Chaotic and Otherwise*, no. April 1976. London: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1988.
- [3] D. Ruelle and F. Takens, “On the nature of turbulence,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 20, no. 3, pp. 167–192, 1971.
- [4] S. Smale, “Differentiable dynamical systems,” *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 73, no. 6, pp. 747–817, 1967.
- [5] P. Manneville, *Systèmes dynamiques et chaos*, LadHyX, Ec. France: LadHyX, Ecole Polytechnique, 1999.
- [6] T. D. De Wit, “Physique Non-Linéaire,” Université d’Orléans, France, 2012.
- [7] C. and DELCARTE, *Bifurcations et chaos*, Ellipses É. Paris: Ellipses Édition Marketing S.A, 2000.
- [8] J.-Q. Sun, “Bifurcation and Chaos in Complex Systems.” Elsevier B.V., USA, p. 388, 2006.
- [9] W. P. Graebel, “The influence of Prandtl number on free convection in a rectangular cavity,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 24, no. 1, pp. 125–131, 1981.
- [10] G. Ahlers and X. Xu, “Prandtl-Number Dependence of Heat Transport in Turbulent Rayleigh-Bénard Convection,” vol. 86, 2001.
- [11] H. Bertin and O. Hiroyuki, “Numerical study of two-dimensional natural convection in a horizontal fluid layer heated from below, by finite-element method: influence of Prandtl number,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 29, no. 3, pp. 439–449, Mar. 1986.
- [12] J. L. Lage, A. Bejan, and J. Georgiadis, “On the effect of the Prandtl number on the onset of Bénard convection,” *International Journal of Heat and Fluid Flow*, vol. 12, no. 2, pp. 184–188, Jun. 1991.
- [13] J. L. Lage, A. Bejan, and J. G. Georgiadis, “The Prandtl number effect near the onset of Bénard convection in a porous medium,” *International Journal of Heat and Fluid Flow*, vol. 13, no. 4, pp. 408–411, Dec. 1992.
- [14] J.-S. Yoo, “Prandtl number effect on transition of free-convective flows in a wide-gap horizontal annulus,” *International Communications in Heat and Mass Transfer*, vol. 26, no. 6, pp. 811–817, Aug. 1999.
- [15] F. T. Poujol, J. Rojas, and E. Ramos, “Natural convection of a high Prandtl number fluid in a cavity,” *International Communications in Heat and Mass Transfer*, vol. 27, no. 1, pp. 109–118, Jan. 2000.
- [16] G. de Vahl Davis, “Laminar natural convection in an enclosed rectangular cavity,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 11, no. 11, pp. 1675–1693, Nov. 1968.
- [17] G. De Vahl Davis, “Natural convection of air in a square cavity: A bench mark numerical solution,” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 3, no. 3, pp. 249–264,

- May 1983.
- [18] M. Hortmann, M. Perić, and G. Scheuerer, “Finite volume multigrid prediction of laminar natural convection: Bench-mark solutions,” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 11, no. 2, pp. 189–207, Jul. 1990.
- [19] C. Cianfrini, M. Corcione, and P. P. Dell’Omo, “Natural convection in tilted square cavities with differentially heated opposite walls,” *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 44, no. 5, pp. 441–451, May 2005.
- [20] T. Basak, S. Roy, and A. R. Balakrishnan, “Effects of thermal boundary conditions on natural convection flows within a square cavity,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 49, no. 23–24, pp. 4525–4535, Nov. 2006.
- [21] M. Sathiyamoorthy, T. Basak, S. Roy, and I. Pop, “Steady natural convection flows in a square cavity with linearly heated side wall(s),” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 50, no. 3–4, pp. 766–775, Feb. 2007.
- [22] O. Aydın and I. Pop, “Natural convection in a differentially heated enclosure filled with a micropolar fluid,” *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 46, no. 10, pp. 963–969, Oct. 2007.
- [23] M. Corcione, “Effects of the thermal boundary conditions at the sidewalls upon natural convection in rectangular enclosures heated from below and cooled from above,” *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 42, no. 2, pp. 199–208, Feb. 2003.
- [24] G. Huelsz and R. Rechtman, “Heat transfer due to natural convection in an inclined square cavity using the lattice Boltzmann equation method,” *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 65, pp. 111–119, Mar. 2013.
- [25] M. Mahmoodi, “Numerical simulation of free convection of nanofluid in a square cavity with an inside heater,” *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 50, no. 11, pp. 2161–2175, Nov. 2011.
- [26] D. Sadaoui, A. Sahi, H. Nadjib, B. Meziani, and T. Amoura, “Free convection in a square enclosure with a finned plate,” *Mechanics & Industry*, vol. 16, no. 3, p. 310, 2015.
- [27] M. Muthamilselvan, K. Periyadurai, and D. H. Doh, “Convection of Micropolar Fluid in a Square Cavity with an Inside Heater,” *JOURNAL OF THERMOPHYSICS AND HEAT TRANSFER*, vol. 31, no. 4, pp. 817–831, 2017.
- [28] A. Elatar, M. A. Teamah, and M. A. Hassab, “Numerical study of laminar natural convection inside square enclosure with single horizontal fin,” *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 99, pp. 41–51, Jan. 2016.
- [29] S. M. Aminossadati, B. Ghasemi, and A. Kargar, “Computational analysis of magnetohydrodynamic natural convection in a square cavity with a thin fin,” *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, vol. 46, pp. 154–163, Jul. 2014.
- [30] H. F. Oztop, Z. Fu, B. Yu, and J. Wei, “Conjugate natural convection in air filled tube inserted a square cavity,” *International Communications in Heat and Mass Transfer*, vol. 38, no. 5, pp. 590–596, May 2011.
- [31] G. Nardini, M. Paroncini, and R. Vitali, “Experimental and numerical analysis of the effect of the position of a bottom wall hot source on natural convection,” *Applied Thermal Engineering*, vol. 92, pp. 236–245, 2016.
- [32] A. Mahmoudi, I. Mejri, and M. A. Abbassi, “Numerical study of natural convection in an inclined triangular cavity for different thermal boundary conditions: application of the lattice Boltzmann method,” *Fluid Dynamics and Materials Processing*, vol. 9, no. 4, pp. 353–388, 2013.

- [33] A. Koca, H. F. Öztop, and Y. Varol, “The effects of Prandtl number on natural convection in triangular enclosures with localized heating from below,” *International Communications in Heat and Mass Transfer*, vol. 34, no. 4, pp. 511–519, Apr. 2007.
- [34] S. Xin, P. Le Quéré, and O. Daube, “Natural convection in a differentially heated horizontal cylinder: Effects of Prandtl number on flow structure and instability,” *Physics of Fluids*, vol. 9, no. 4, pp. 1014–1033, Apr. 1997.
- [35] Avinash Chandra and R. P. Chhabra, “Effect of Prandtl Number on Natural Convection Heat Transfer from a Heated Semi-Circular Cylinder,” *International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering*, vol. 6, no. 1, 2012.
- [36] A. K. Baranwal and R. Chhabra, “Effect of Prandtl Number on Free Convection from Two Cylinders in a Square Enclosure,” *Heat Transfer Engineering*, vol. 37, no. 6, pp. 545–556, Apr. 2016.
- [37] K. M. Gangawane, R. P. Bharti, and S. Kumar, “Two-dimensional lattice Boltzmann simulation of natural convection in differentially heated square cavity: Effect of Prandtl and Rayleigh numbers,” *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, vol. 93, no. 4, pp. 766–780, Apr. 2015.
- [38] A. Bouras, M. Djezzar, and C. Ghernoug, “Numerical Simulation of Natural Convection Between Two Elliptical Cylinders: Influence of Rayleigh Number and Prandtl Number,” *Energy Procedia*, vol. 36, pp. 788–797, 2013.
- [39] T. Pessa and S. Piva, “Laminar natural convection in a square cavity: Low Prandtl numbers and large density differences,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 52, no. 3–4, pp. 1036–1043, Jan. 2009.
- [40] A. A. A. Al-Rashed, L. Kolsi, A. K. Hussein, W. Hassen, M. Aichouni, and M. N. Borjini, “Numerical study of three-dimensional natural convection and entropy generation in a cubical cavity with partially active vertical walls,” *Case Studies in Thermal Engineering*, vol. 10, no. May, pp. 100–110, 2017.
- [41] M. Yousaf and S. Usman, “Natural convection heat transfer in a square cavity with sinusoidal roughness elements,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 90, pp. 180–190, 2015.
- [42] R. Iwatsu, J. M. Hyun, and K. Kuwahara, “Mixed convection in a driven cavity with a stable vertical temperature gradient,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 36, no. 6, pp. 1601–1608, 1993.
- [43] M. K. Moallemi and K. S. Jang, “Prandtl number effects on laminar mixed convection heat transfer in a lid-driven cavity,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 35, no. 8, pp. 1881–1892, 1992.
- [44] K. Al-Salem, H. F. Öztop, I. Pop, and Y. Varol, “Effects of moving lid direction on MHD mixed convection in a linearly heated cavity,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 55, no. 4, pp. 1103–1112, 2012.
- [45] T. Basak, P. V. Krishna Pradeep, S. Roy, and I. Pop, “Finite element based heatline approach to study mixed convection in a porous square cavity with various wall thermal boundary conditions,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 54, no. 9–10, pp. 1706–1727, 2011.
- [46] T. S. Cheng, “Characteristics of mixed convection heat transfer in a lid-driven square cavity with various Richardson and Prandtl numbers,” *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 50, no. 2, pp. 197–205, 2011.
- [47] A. W. Islam, M. A. R. Sharif, and E. S. Carlson, “Mixed convection in a lid driven square cavity

- with an isothermally heated square blockage inside,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 55, no. 19–20, pp. 5244–5255, 2012.
- [48] É. Fontana, C. A. Capeletto, A. Da Silva, and V. C. Mariani, “Numerical analysis of mixed convection in partially open cavities heated from below,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 81, pp. 829–845, 2015.
- [49] G. Abdelmassih, A. Vernet, and J. Pallares, “Steady and unsteady mixed convection flow in a cubical open cavity with the bottom wall heated,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 101, pp. 682–691, 2016.
- [50] A. K. Kareem and S. Gao, “Mixed convection heat transfer of turbulent flow in a three-dimensional lid-driven cavity with a rotating cylinder,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 112, pp. 185–200, 2017.
- [51] A. K. Kareem, S. Gao, and A. Q. Ahmed, “Unsteady simulations of mixed convection heat transfer in a 3D closed lid-driven cavity,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 100, pp. 121–130, 2016.
- [52] H. F. Öztop, A. Sakhrieh, E. Abu-Nada, and K. Al-Salem, “Mixed convection of MHD flow in nanofluid filled and partially heated wavy walled lid-driven enclosure,” *International Communications in Heat and Mass Transfer*, vol. 86, pp. 42–51, 2017.
- [53] K. M. Gangawane and B. Manikandan, “Mixed convection characteristics in lid-driven cavity containing heated triangular block,” *Chinese Journal of Chemical Engineering*, 2016.
- [54] M. A. Ismael, I. Pop, and A. J. Chamkha, “Mixed convection in a lid-driven square cavity with partial slip,” *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 82, no. 1, pp. 47–61, 2014.
- [55] E. Sourtiji, S. F. Hosseinizadeh, M. Gorji-Bandpy, and D. D. Ganji, “Heat transfer enhancement of mixed convection in a square cavity with inlet and outlet ports due to oscillation of incoming flow,” *International Communications in Heat and Mass Transfer*, vol. 38, no. 6, pp. 806–814, 2011.
- [56] A. Chattopadhyay, S. K. Pandit, S. Sen Sarma, and I. Pop, “Mixed convection in a double lid-driven sinusoidally heated porous cavity,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 93, pp. 361–378, 2016.
- [57] T. Behzadi, K. M. Shirvan, S. Mirzakhani, and A. A. Sheikhrabat, “Numerical Simulation on Effect of Porous Medium on Mixed Convection Heat Transfer in a Ventilated Square Cavity,” *Procedia Engineering*, vol. 127, pp. 221–228, 2015.
- [58] D. Ramakrishna, T. Basak, S. Roy, and I. Pop, “Numerical study of mixed convection within porous square cavities using Bejan’s heatlines: Effects of thermal aspect ratio and thermal boundary conditions,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 55, no. 21–22, pp. 5436–5448, 2012.
- [59] N. S. Gibanov, M. A. Sheremet, H. F. Oztop, and N. Abu-Hamdeh, “Effect of uniform inclined magnetic field on mixed convection in a lid-driven cavity having a horizontal porous layer saturated with a ferrofluid,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 114, pp. 1086–1097, 2017.
- [60] M. Mamourian, K. Milani Shirvan, R. Ellahi, and A. B. Rahimi, “Optimization of mixed convection heat transfer with entropy generation in a wavy surface square lid-driven cavity by means of Taguchi approach,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 102, pp. 544–554, 2016.
- [61] N. Biswas and N. K. Manna, “Enhanced convective heat transfer in lid-driven porous cavity with aspiration,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 114, pp. 430–452, 2017.

- [62] N. S. Gibanov, M. A. Sheremet, H. F. Oztop, and K. Al-Salem, “Convective heat transfer in a lid-driven cavity with a heat-conducting solid backward step under the effect of buoyancy force,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 112, pp. 158–168, 2017.
- [63] P. Vadasz, “Transitions and chaos for free convection in a rotating porous layer,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 41, no. 11, pp. 1417–1435, 1998.
- [64] J. P. Gollub and S. V. Benson, “Many routes to turbulent convection,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 100, no. 3, pp. 449–470, 1980.
- [65] E. Zienicke, N. Seehafer, and F. Feudel, “Bifurcations in two-dimensional Rayleigh-Bénard convection,” *Physical Review E*, vol. 57, no. 1, pp. 428–435, 1998.
- [66] T. Fusegi, “Mixed Convection in Periodic Open Cavities With Oscillatory Throughflow,” *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, vol. 29, no. 1, pp. 33–47, 1996.
- [67] D. Beigie, A. Leonard, and S. Wiggins, “Invariant manifold templates for chaotic advection,” *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 4, no. 6, pp. 749–868, 1994.
- [68] S. Mizumi, “Cavity Flows in Different Domains and Bifurcation,” no. July, 1995.
- [69] F. Pallares, J. Grau, F. X. Giralt, “Flow transitions in laminar Rayleigh-Benard convection in a cubical cavity at moderate Rayleigh numbers,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 42, pp. 753–769, 1999.
- [70] D. O. N. a L. D. R. Chenoweth, “Chaos in a Differentially Heated Vertical Cavity,” no. 1989, 2001.
- [71] Y. F. Peng, Y. H. Shiau, and R. R. Hwang, “Transition in a 2-D lid-driven cavity flow,” *Computers and Fluids*, vol. 32, no. 3, pp. 337–352, 2003.
- [72] M. Kotouč, G. Bouchet, and J. Dušek, “Transition to turbulence in the wake of a fixed sphere in mixed convection,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 625, p. 205, 2009.
- [73] G. De Gassowski, S. Xin, and O. Daube, “Bifurcations et solutions multiples en cavité 3D différentiellement chauffée,” *Comptes Rendus - Mécanique*, vol. 331, no. 10, pp. 705–711, 2003.
- [74] I. Mercader, O. Batiste, L. Ramírez-Piscina, X. Ruiz, S. Rüdiger, and J. Casademunt, “Bifurcations and chaos in single-roll natural convection with low Prandtl number,” *Physics of Fluids*, vol. 17, no. 10, pp. 1–13, 2005.
- [75] M. A. Randrianamparany, A. Skouta, and M. Daguénet, “Numerical Study of the Transition Toward Chaos of Two-Dimensional Natural Convection within a Square Cavity,” *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, vol. 48, no. 2, pp. 127–147, 2005.
- [76] M. Zhao, M. Yang, M. Lu, and Y. W. Zhang, “Self-Sustained Oscillations and Bifurcations of Mixed Convection in a Multiple Ventilated Enclosure,” *Computational Thermal Sciences*, 3, vol. 3, no. 1, pp. 63–72, 2011.
- [77] N. Yada, P. Kundu, S. Paul, and P. Pal, “Different routes to chaos in low Prandtl-number Rayleigh-Bénard convection,” *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 81, no. April, pp. 261–267, 2016.
- [78] S. Paul and M. K. Verma, “Bifurcation Analysis of the Flow Patterns in Two-Dimensional Rayleigh – Bénard Convection,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 22, no. 5, pp. 1–16, 2012.
- [79] A. Cimarelli and D. Angeli, “Routes to chaos of natural convection flows in vertical channels,” *International Communications in Heat and Mass Transfer*, vol. 81, pp. 201–209, 2017.
- [80] Z. Gao, B. Podvin, A. Sergent, and S. Xin, “Chaotic dynamics of a convection roll in a highly

- confined, vertical, differentially heated fluid layer,” *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, vol. 91, no. 1, pp. 1–14, 2015.
- [81] D. Angeli, R. Emilia, A. Pagano, G. S. Barozzi, and R. Emilia, “Analysis of the bifurcating orbits on the route to chaos in confined thermal convection,” *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM)*, vol. 2, pp. 289–296, 2013.
- [82] S. Aklouche-Benouaguef, B. Zeghmami, and K. Bouhadeh, “Numerical Simulation of Chaotic Natural Convection in a Differentiated Closed Square Cavity,” *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, vol. 65, no. 3, pp. 229–246, 2014.
- [83] T. W. H. Sheu and R. K. Lin, “Three-dimensional bifurcations in a cubic cavity due to buoyancy-driven natural convection,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 54, no. 1–3, pp. 447–467, 2011.
- [84] D. Angeli, A. Pagano, M. A. Corticelli, and G. S. Barozzi, “Routes to chaos in confined thermal convection arising from a cylindrical heat source,” *Chaotic Modeling and Simulation*, vol. 1, no. January, pp. 61–68, 2011.
- [85] D. H. Kang, M. Y. Ha, H. S. Yoon, and C. Choi, “Bifurcation to unsteady natural convection in square enclosure with a circular cylinder at Rayleigh number of 107,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 64, no. November, pp. 926–944, 2013.
- [86] C. C. Liao and C. A. Lin, “Transitions of natural convection flows in a square enclosure with a heated circular cylinder,” *Applied Thermal Engineering*, vol. 72, no. 1, pp. 41–47, 2014.
- [87] D. Angeli, M. A. Corticelli, A. Fichera, and A. Pagano, “Heat transfer along the route to chaos of a swaying thermal plume,” *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 655, no. 1, 2015.
- [88] L. Oteski, Y. Duguet, L. Pastur, and P. Le Quéré, “Quasiperiodic routes to chaos in confined two-dimensional differential convection,” *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, vol. 92, no. 4, 2015.
- [89] P. F. Kieno, A. Ouédraogo, O. M. Zongo, J. D. Bathiébo, and B. Zeghmami, “Numerical Study of the Routes toward Chaos of Natural Convection within an Inclined Enclosure,” *Journal of Scientific Research*, vol. 5, no. 1, pp. 105–117, 2013.
- [90] H. Dillon, A. Emery, and A. Mescher, “Analysis of Chaotic Natural Convection in a Tall Rectangular Cavity With Non-Isothermalwalls,” *Frontiers in Heat and Mass Transfer (FHMT)*, vol. 4, no. 2, 2013.
- [91] S. Laouar, E. Mezaache, and M. Daguene, “Analysis of the quasi periodic scenario leading to chaos in a square cavity,” *International Review of PHYSICS*, vol. 1, no. 4, p. 224, 2007.
- [92] S. A. Benouaguef and B. Zeghmami, “Bifurcations in two-dimensional differentially heated cavity,” *J. Appl. Eng. Sci. Technol.*, vol. 3, no. 1, pp. 7–11, 2017.
- [93] A. N. Tikhonov, “All Russian mathematical portal,” *Matematicheskii Sbornik*, vol. 31, no. 3, pp. 575–586, 1952.
- [94] J. Glimm, “Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations,” *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 18, no. 4, pp. 697–715, 1965.
- [95] S. Patankar, *Numerical heat transfer and fluid flow*. New York: Hemisphere Published Corp, 1980.
- [96] ATOMER, “Densité de l’eau en fonction de la température.” [Online]. Available: <http://www.atomer.fr/1/1-densite-eau.html>. [Accessed: 14-Nov-2017].
- [97] B. R. Hutchinson and G. D. Raithby, “A MULTIGRID METHOD BASED ON THE ADDITIVE CORRECTION STRATEGY,” *Numerical Heat Transfer: An International Journal of*

*Computation and Methodology*, vol. 9, no. 5, pp. 511–537, 1986.

- [98] T. J. Barth and D. C. Jespersen, “The design and application of upwind schemes on unstructured meshes,” *Technical Report AIAA-89-0366*, AIAA 27th Aerospace Sciences Meeting, Reno, Nevada, Jan. 1989.
- [99] Latif M. Jiji, *Heat Convection*. Springer Berlin Heidelberg New York This, 2006.

## Annexes

### A. La discrétisation

Les équations de conservation présentées précédemment dans le chapitre 2 peuvent être décrites par une équation globale. Cette formulation permet de ne pas répéter le travail de discrétisation pour chaque équation. Si on note  $(\Phi)$  la variable étudiée, toutes les équations précédentes peuvent être réduites en une seule équation générale, de la forme :

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t}}_A + \underbrace{\frac{\partial(\rho\Phi u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\Phi v)}{\partial y}}_B = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma_\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma_\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right)}_C + S_\Phi \quad \text{A.1}$$

Avec :

- $A$  : Terme transitoire
- $B$  : Terme de convection.
- $C$  : Terme de diffusion.
- $S_\Phi$  : Terme source.
- $\Gamma_\Phi$  : Coefficient de diffusion.

Cette équation est intégrée dans des volumes de contrôle, **Figure A-1**, afin d'avoir un système algébrique plus accessible à la résolution.

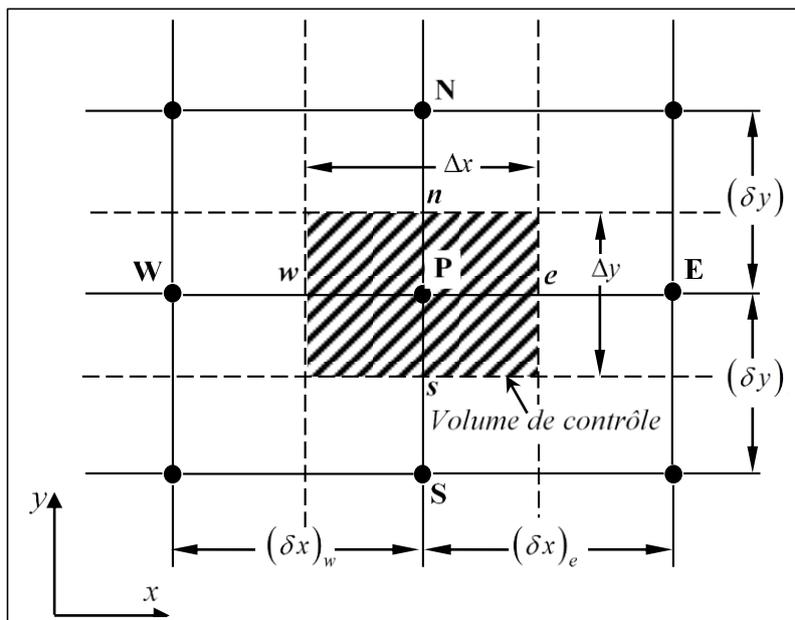


Figure A-1. Volume de contrôle

Le tableau ci-dessous résume la définition des grandeurs  $\Phi$ ,  $\Gamma_{\Phi}$  et  $S_{\Phi}$  pour le problème traité.

Dans le cas de la convection naturelle le terme transitoire est nul.

Tableau A-0-1. Les termes de l'équation de transport

Équation de conservation	$\Phi$	$\Gamma_{\Phi}$	$S_{\Phi}$
Conservation de masse	1	0	0
Quantité de mouvement projetée suivant x	u	$\nu$	$-\frac{\partial p}{\partial x}$
Quantité de mouvement projetée suivant y	v	$\nu$	$-\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g \beta (T - T_o) \frac{\partial P}{\partial y}$
Énergie	T	$-\frac{k}{C_p}$	0

## A.1. Couplage pression vitesse

### A.1.1. Algorithme SIMPLE

L'algorithme SIMPLE utilise une relation entre les corrections de vitesse et de pression pour imposer la conservation de la masse et obtenir le champ de pression.

Si l'équation de quantité de mouvement est résolue avec un champ de pression  $p^*$ , le flux de faces résultant  $J_f^*$  ne satisfait pas l'équation de continuité. Le flux  $J_f^*$  est donné par la relation ;

$$J_f^* = \hat{J}_f^* + d_f(p_{c0}^* - p_{c1}^*) \quad \text{A.2}$$

Où  $p'_{c0}$  et  $p'_{c1}$  sont les pressions, respectivement, dans les deux cellules de chaque côté de la face, et  $\hat{J}_f^*$  contient l'influence des vitesses dans ces cellules. Le terme  $d_f$  est une fonction de  $\bar{a}_p$ , la moyenne de l'équation de quantité de mouvement,  $a_p$  coefficients pour les cellules de chaque côté de la face  $f$ .

Par conséquent, une correction  $J'_f$  est ajoutée au flux de face  $J_f^*$  de sorte que le flux corrigé de la face  $J_f$  satisfait l'équation de continuité, le flux corrigé est donné par ;

$$J_f = J_f^* + J'_f \quad \text{A.3}$$

L'algorithme SIMPLE postule que  $J'_f$  soit écrit comme ;

$$J'_f = d_f(p'_{c0} + p'_{c1}) \quad \text{A.4}$$

L'algorithme SIMPLE substitue les équations de correction de flux dans l'équation de continuité discrète pour obtenir une équation discrète pour la correction de pression  $p'$  dans la cellule :

$$a_p p' = \sum_{nb} a_{nb} p'_{nb} + b \quad \text{A.5}$$

Où le terme source  $b$  est le débit net dans la cellule donné par :

$$b = \sum_f^{N_{faces}} J_f^* A_f \quad \text{A.6}$$

L'équation de correction de pression (équation A.5) peut être résolue en utilisant la méthode multigrille algébrique, B. R. Hutchinson *et al* [97]. Une fois la solution obtenue, la pression de la cellule et le flux de la face sont corrigés en utilisant ;

$$p = p^* + \alpha_p p' \quad \text{A.7}$$

$$J_f = J'_f + d_f(p'_{c0} + p'_{c1}) \quad \text{A.8}$$

Ici  $\alpha_p$  est le facteur de sous-relaxation pour la pression. Le flux corrigé de face  $J_f$ , vérifie de façon identique l'équation de continuité discrète à chaque itération.

## A.2. Discrétisation spatiale

Du fait que les valeurs du flux sont ignorées aux faces des cellules, et que le flux doit être quantifié à ce niveau pour déterminer les vitesses, une nécessité d'interpoler va naître. Nous avons utilisé dans le code de simulation différentes méthodes pour approximer et ses dérivées normales. Il existe plusieurs schémas d'interpolation couramment utilisés et cités dans l'ouvrage de S. Patankar [95]. On ne citera que les schémas utilisés dans notre outil de simulation.

Par défaut, l'ANSYS stocke les valeurs discrètes du  $\Phi$  scalaire aux centres de la cellule. Cependant, les valeurs faciales  $\Phi_f$  sont requises pour les termes de convection dans l'équation et doivent être interpolées à partir des valeurs du centre de la cellule. Ceci est accompli en utilisant un schéma upwind.

Upwinding signifie que la valeur faciale  $\Phi_f$  est dérivée des quantités dans la cellule en amont, ou "upwind", par rapport à la direction de la vitesse normale  $v_n$ . FLUENT nous permet de choisir parmi plusieurs au près schémas : premier ordre upwind, deuxième ordre upwind, loi de puissance et QUICK. Ici nous mettons l'accent uniquement sur le schéma de second ordre upwind utilisé pour discrétiser les équations gouvernantes.

### A.2.1 Schéma de second ordre upwind

Lorsque la précision du second ordre est souhaitée, les quantités sur les faces de la cellule sont calculées en utilisant une approche de reconstruction linéaire multidimensionnelle, Barth *et al* [98]. Dans cette approche, une précision d'ordre supérieur est atteinte au niveau des faces de la cellule grâce à une expansion en série de Taylor de la solution centrée sur la cellule autour du centroïde cellulaire. Ainsi, lorsque l'upwinding de second ordre est sélectionné, la valeur faciale  $\Phi_f$  est calculée en utilisant l'expression suivante.

$$\Phi_f = \Phi + \Delta\Phi \cdot \vec{r} \quad \text{A.9}$$

Où  $\Phi$  et  $\Delta\Phi$  sont la valeur centrée sur la cellule et son gradient dans la cellule amont, et  $\vec{r}$  est le vecteur de déplacement du centroïde de la cellule amont vers le centroïde de la face. Cette formulation nécessite la détermination du gradient  $\Delta\Phi$  dans chaque cellule. Enfin, le gradient  $\Delta\Phi$  est limité de sorte qu'aucun nouveau maximum ou minimum n'est introduit.

### A.3. Discrétisation temporelle

Pour les simulations transitoires, les équations directrices doivent être discrétisées dans l'espace et dans le temps. La discrétisation spatiale pour les équations dépendant du temps est identique au cas en régime permanent. La discrétisation temporelle implique l'intégration de chaque terme dans les équations différentielles sur un pas de temps  $\Delta t$ .

Une expression générique pour l'évolution temporelle d'une variable  $\Phi$  est donnée par ;

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = F(\Phi) \quad \text{A.10}$$

Où la fonction  $F$  intègre toute discrétisation spatiale. Si la dérivée temporelle est discrétisée en utilisant des différences vers l'arrière, la discrétisation temporelle précise de premier ordre est donnée par ;

$$\frac{\Phi^{n+1} - \Phi^n}{\Delta t} = F(\Phi) \quad \text{A.11}$$

Et la discrétisation de second ordre est donnée par ;

$$\frac{3\Phi^{n+1} - 4\Phi^n - \Phi^{n-1}}{2\Delta t} = F(\Phi)$$

Où

$n + 1$  : valeur au niveau de temps suivant,  $t + \Delta t$

$n$  : valeur au niveau de temps actuel,  $t$

$n-1$  : valeur au niveau de temps précédent,  $t - \Delta t$

Une fois que la dérivée temporelle a été discrétisée, il reste un choix pour évaluer  $F(\Phi)$ : en particulier, quelles valeurs de  $\Phi$  doivent être utilisées pour évaluer  $F$  ?

### A.3.1. Schéma Implicite

Une méthode consiste à évaluer  $F(\phi)$  au niveau du temps futur :

$$\frac{\Phi^{n+1} - \Phi^n}{\Delta t} = F(\Phi^{n+1}) \quad \text{A.13}$$

C'est ce qu'on appelle une intégration implicite puisque  $\phi^{n+1}$  dans une cellule donnée est liée à  $\Phi^{n+1}$  dans les cellules voisines par  $F(\Phi^{n+1})$ :

$$\Phi^{n+1} = \Phi^n + \Delta t F(\Phi^{n+1}) \quad \text{A.14}$$

Cette équation implicite peut être résolue itérativement à chaque niveau de temps avant de passer au pas de temps suivant.

L'avantage du schéma entièrement implicite est qu'il est inconditionnellement stable par rapport à la taille du pas de temps.

### B. Organigramme du code de calcul

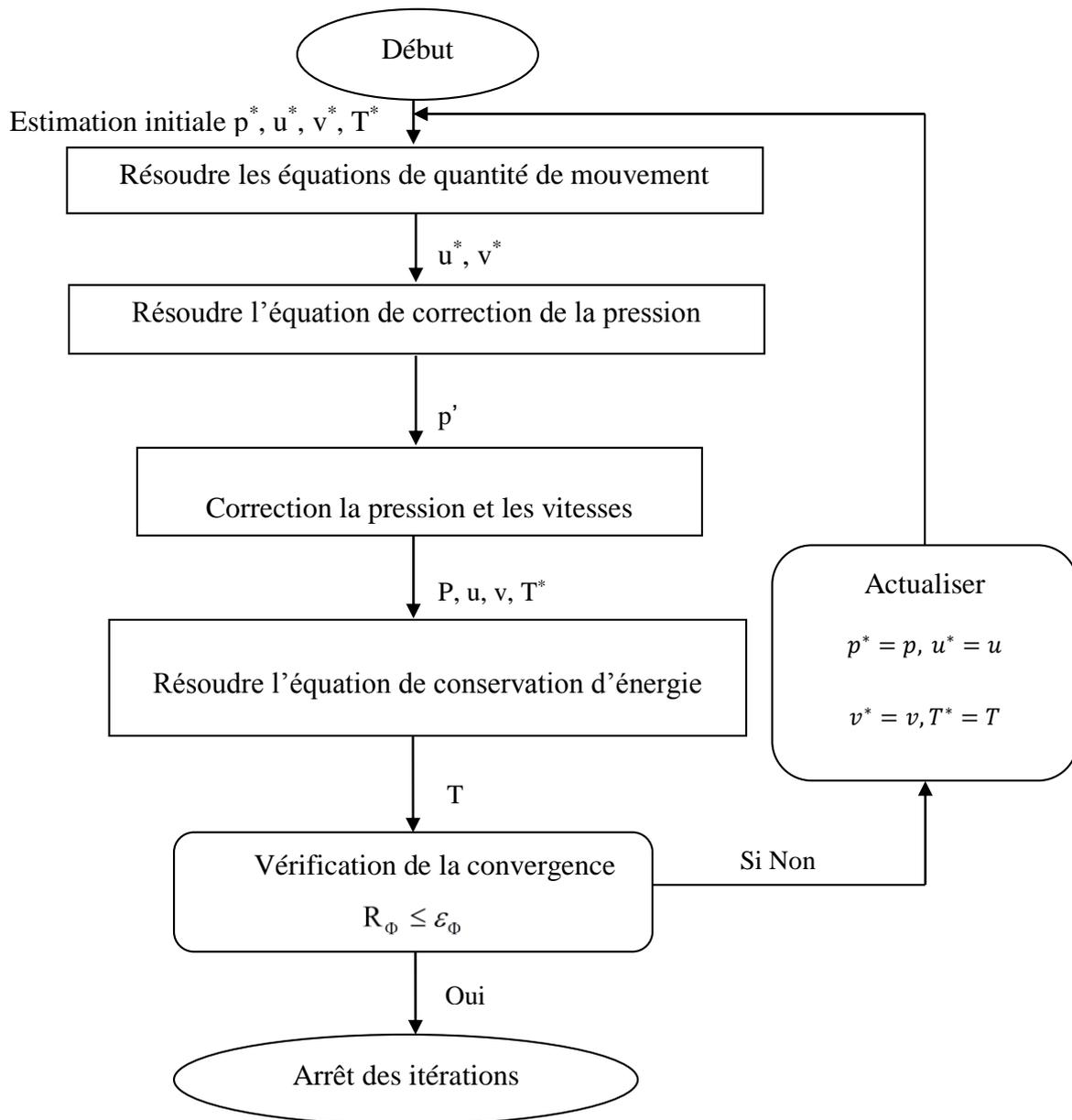


Figure B-2. Représentation de l'organigramme de calcul.

**C. Propriété thermo-physique de l'air à pression constante****Tableau A-0-2.** Propriétés thermo physique de l'air à pression atmosphérique, [99]

T °C	Cp J/kg.°C	P kg/m <sup>3</sup>	μ kg/s.m	ν m <sup>2</sup> /s	λ W/m.°C	Pr
-40						
-30	1006.0	1.5141	15.17 10 <sup>-6</sup>	10.02 10 <sup>-6</sup>	0.02086	0.731
-10	1005.8	1.4518	15.69 10 <sup>-6</sup>	10.81 10 <sup>-6</sup>	0.02168	0.728
0	1005.6	1.3414	16.71 10 <sup>-6</sup>	12.46 10 <sup>-6</sup>	0.02329	0.721
10	1005.7	1.2923	17.20 10 <sup>-6</sup>	13.31 10 <sup>-6</sup>	0.02408	0.718
20	1005.8	1.2467	17.69 10 <sup>-6</sup>	14.19 10 <sup>-6</sup>	0.02487	0.716
30	1006.1	1.2042	18.17 10 <sup>-6</sup>	15.09 10 <sup>-6</sup>	0.02564	0.713
40	1006.4	1.1644	18.65 10 <sup>-6</sup>	16.01 10 <sup>-6</sup>	0.02638	0.712
50	1006.8	1.1273	19.11 10 <sup>-6</sup>	16.69 10 <sup>-6</sup>	0.02710	0.710
60	1007.4	1.0924	19.57 10 <sup>-6</sup>	17.92 10 <sup>-6</sup>	0.02781	0.709
80	1008.0	1.0596	20.03 10 <sup>-6</sup>	18.90 10 <sup>-6</sup>	0.02852	0.708
90	1009.5	0.9995	20.92 10 <sup>-6</sup>	20.92 10 <sup>-6</sup>	0.02991	0.706
100	1010.3	0.9721	21.35 10 <sup>-6</sup>	21.96 10 <sup>-6</sup>	0.03059	0.705
120	1011.3	0.9460	21.78 10 <sup>-6</sup>	23.02 10 <sup>-6</sup>	0.03127	0.704
130	1013.4	0.8679	22.62 10 <sup>-6</sup>	25.19 10 <sup>-6</sup>	0.03261	0.703
140	1014.6	0.8756	23.02 10 <sup>-6</sup>	26.31 10 <sup>-6</sup>	0.03328	0.702
150	1015.9	0.8544	23.44 10 <sup>-6</sup>	27.44 10 <sup>-6</sup>	0.03349	0.702
160	1017.2	0.8342	23.84 10 <sup>-6</sup>	28.58 10 <sup>-6</sup>	0.03459	0.701
170	1018.6	0.8150	24.24 10 <sup>-6</sup>	29.75 10 <sup>-6</sup>	0.03525	0.701
180	1020.1	0.7966	24.63 10 <sup>-6</sup>	30.93 10 <sup>-6</sup>	0.03589	0.700
190	1021.7	0.7790	25.03 10 <sup>-6</sup>	32.13 10 <sup>-6</sup>	0.03654	0.700
200	1023.3	0.7622	25.41 10 <sup>-6</sup>	33.34 10 <sup>-6</sup>	0.03718	0.699
220	1025.0	0.7561	25.79 10 <sup>-6</sup>	34.57 10 <sup>-6</sup>	0.03781	0.699
240	1028.6	0.7158	26.54 10 <sup>-6</sup>	37.08 10 <sup>-6</sup>	0.03908	0.699
250	1032.4	0.6879	27.27 10 <sup>-6</sup>	39.65 10 <sup>-6</sup>	0.04033	0.698
280	1034.4	0.6748	27.64 10 <sup>-6</sup>	40.96 10 <sup>-6</sup>	0.04095	0.698
300	1040.7	0.6382	28.70 10 <sup>-6</sup>	44.97 10 <sup>-6</sup>	0.04279	0.698
350	1045.2	0.6159	29.39 10 <sup>-6</sup>	47.72 10 <sup>-6</sup>	0.04401	0.698
	1056.8	0.5665	31.07 10 <sup>-6</sup>	54.85 10 <sup>-6</sup>	0.04692	0.700

## D. Travaux antérieure

Copyright © 2016 Tech Science Press

FDMP, vol.12, no.1, pp.1-14, 2016

### **Natural Convection in a Square Cavity: Numerical Study for Different values of Prandtl Number**

ADNANI Massinissa<sup>1</sup>, MEZIANI Bachir<sup>2</sup>, OURRAD Ouerdia<sup>2</sup> and ZITOUNE Mounir<sup>1</sup>

**Abstract** A numerical study of natural convection in a square cavity subjected to the thermals boundary conditions on the sidewalls is presented and discussed. The fluid is Newtonian and equations governing the flow field and the heat transfer are given in dimensionless form. The finite volume method was adopted to solve the algebraic system. Influence of the Prandtl and the Rayleigh numbers on heat transfer and the flow field is illustrated and discussed as the stream functions, isotherms, horizontal velocity, local and average Nusselt numbers. Results indicate that improved heat transfer is more pronounced with increasing Rayleigh number. In particular, at low Rayleigh numbers, the flow field is slightly pronounced with increasing Prandtl number and decreases by increasing the Rayleigh number. In contrast, the heat transfer is not affected by variations of Prandtl number at low Rayleigh numbers and decrease with increasing the Prandtl number especially for very high Rayleigh numbers.

**Keywords:** Natural convection, square cavity, boundary conditions, finite volume method.

## APPLICATION DE LA METHODE DES VOLUMES FINIS A L'ETUDE DE LA CONVECTION NATURELLE DANS UNE CAVITE

ADNANI Massinissa<sup>1,2</sup>, MEZIANI Bachir<sup>1</sup>, OURRAD Ouerdia<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Physique Théorique, Faculté des Sciences Exactes, Université de Bejaia, 06000, Algérie.

<sup>2</sup> Laboratoire de Mécanique, Matériaux et Energetique, Faculté de Technologie, Université de Bejaia, 06000, Algérie.  
massi\_univst06@hotmail.fr

**Résumé :** Dans ce travail, une étude numérique de la convection naturelle a été menée et discutée. Nous avons considéré une cavité avec un rapport de forme égale à 1 remplie d'un fluide newtonien en régime permanent. Les équations régissant l'écoulement et le transfert de chaleur sont les équations de quantité de mouvements, de continuité et l'équation d'énergie. La méthode des volumes finis a été adoptée pour la résolution du système algébrique. Afin d'améliorer les performances de transfert de chaleur, deux cas sont considérés dans cette étude. Les résultats indiquent que le transfert de chaleur se prononce de plus en plus avec l'accroissement du nombre de Rayleigh pour les deux cas considérés. Notamment, les résultats indiquent que le transfert de chaleur produit par le premier cas est plus intense par rapport au deuxième cas. En effet, le premier cas de chauffage est plus favorable pour un transfert de chaleur plus efficace par rapport au deuxième cas.

**Mots clés :** Convection naturelle, Nusselt, Méthode des volumes finis.

9<sup>th</sup> International Conference on Thermal Engineering: Theory and Applications  
March 24-26 2016, Abu Dhabi, UAE

## Boundary Conditions Effects on the Natural Convection in a Square Cavity

ADNANI Massinissa<sup>1,2</sup>, MEZIANI Bachir<sup>1</sup> and OURRAD Ouerdia <sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire de Physique Théorique, Faculté des Sciences Exactes, Université de Béjaia, 06000, Algérie

<sup>2</sup>Laboratoire de Mécanique, Matériaux et Energétique, Faculté de Technologie, Université de Béjaia, 06000, Algérie  
[massi\\_univst06@hotmail.fr](mailto:massi_univst06@hotmail.fr) , [Bachirdidih@yahoo.fr](mailto:Bachirdidih@yahoo.fr) , [omeziani@yahoo.fr](mailto:omeziani@yahoo.fr)

---

### Abstract

A numerical study of natural convection in a square cavity is presented. The fluid considered is Newtonian. Governing equations of the flow and heat transfer are given in dimensionless form. Finite volume method was adopted to solve the algebraic system. The influence of the Prandtl number and the Rayleigh number on the heat transfer and fluid flow is illustrated and discussed as the stream lines and isothermal lines. The results indicate that improved heat transfer is more pronounced with increasing Rayleigh number.

*Keywords: Natural-convection; Boundary condition; Modeling; Finite Volumes.*

---

**Résumé :** Dans cette thèse de doctorat, nous avons présenté une étude numérique de la convection thermique induite dans une cavité carrée remplie d'un fluide newtonien. Les équations qui régissent l'écoulement et le transfert de chaleur sont l'équation de continuité, de quantité de mouvements et l'équation d'énergie. L'étude a été effectuée en fonction des paramètres de contrôles avec des conditions aux limites variables. La recherche proposée dans cette thèse repose sur deux principes. La première partie a été focalisée sur les caractéristiques de la convection naturelle en régime laminaire, tandis que la seconde partie a été focalisée sur la convection mixte en régime transitoire où la route vers le chaos était notre objectif principal. Les résultats indiquent que la convection thermique est largement influencée par les variations des conditions aux limites à chaque valeur du paramètre de contrôle. Notamment, le transfert de chaleur est dû essentiellement à une conduction pour les faibles valeurs du Rayleigh et la convection naturelle se développe à des valeurs très élevées du Rayleigh et un maximum de transfert de chaleur a été trouvé pour le premier cas de condition aux limites. Dans la seconde partie, nous avons pu mettre en évidence la transition et la bifurcation vers le chaos empruntée par la convection mixte. Un phénomène de relaminarisation a été observé pour tous les cas de conditions aux limites dans des situations différents.

**Mots Clés :** Convection mixte, Fluide Newtoniens, Stabilité, Attracteurs, Exposants de Lyapunov, Méthode Numériques.

**Abstract:** In this work, we presented a numerical study of thermal convection induced in a square cavity filled with a Newtonian fluid. Governing equations of the flow and the heat transfer are continuity, momentum and energy equations. The study is conducted based on control parameters at varying boundary conditions. The first part of this thesis focused on natural convection characteristics in laminar regime, while second part focused on transient mixed convection, and the road to the chaos of the system was our main goal. Results indicate that thermal convection largely influenced by boundary conditions changes at each value of control parameter. Notably, heat transfer mainly due to the conduction for low Rayleigh values and natural convection develops at very high Richardson values, and maximum heat transfer found for the first case of boundary conditions. In the second part, we have been able to highlight the transition and bifurcation towards chaos borrowed by mixed convection. Relaminarization phenomenon observed for all boundary conditions cases in different situations.

**Keys words:** Mixed Convection, Newtonian Fluid, Stability, Attractors, Lyapunov Exponents, Numerical Methods.

**ملخص:** في هذه الأطروحة، قدمنا دراسة عددية من النقل الحراري الناجم في تجويف مربع مليئة بالسوائل النيوتونية. المعادلات التي تحكم التدفق ونقل الحرارة هي معادلات الاستمرارية والزخم ومعادلة الطاقة. أجريت الدراسة على أساس معلمات التحكم في ظروف حدودية متفاوتة. ويستند البحث المقترح في هذه الرسالة على مبدئين، الجزء الأول يتركز على خصائص الحمل الحراري الطبيعي في النظام الرقائقي، في حين أن الجزء الثاني يتركز على الحمل المؤقت المختلط. الطريق إلى الفوضى كان هدفنا الرئيسي. تشير النتائج إلى أن الحمل الحراري يتأثر إلى حد كبير بالتغيرات في ظروف الحدود عند كل قيمة من معلمات التحكم. والجدير بالذكر أن نقل الحرارة يرجع أساساً إلى التوصيل لقيم رايلي منخفضة والحمل الطبيعي يتطور عند قيم رايلي عالية جداً وقد تم العثور على أقصى انتقال الحرارة للحالة الأولى من الشروط الحدودية. في الجزء الثاني، تمكنا من تسليط الضوء على الانتقال والتشعب نحو الفوضى المقترضة من قبل الحمل المختلط، وخاصة لوحظ ظاهرة إعادة التأهيل لجميع حالات شروط الحدود في حالات مختلفة.

**الكلمات المفتاحية:** الحمل المختلط، السوائل النيوتونية، الاستقرار، الجذاب، ليابونوف، الطرق العددية.