

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ ABDERRAHMANE MIRA DE BÉJAÏA



FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES  
DÉPARTEMENT DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE  
MÉMOIRE DE MASTER  
OPTION : MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

## *Thème*

---

Méthode numérique pour le calcul du prix d'option call  
à deux actifs

---

*Présenté par :*

DJEBBAR MOHAMMED ISLAM MEZHOUD ZAKIA

*Soutenu devant le jury composé de :*

<i>Président</i>	M. ABBAS KARIM	Prof	U. A/MIRA BÉJAÏA
<i>Encadreur</i>	Mme. TAKHEDMITE BAYA	M.C.A	U. A/MIRA BÉJAÏA
<i>Examinatrice</i>	Mme. BARACHE BAHIA	M.C.B	U. A/MIRA BÉJAÏA
<i>Examineur</i>	M.SOUFIT MASSINISSA	M.C.B	U. A/MIRA BÉJAÏA

**Promotion 2023 – 2024**

# Remerciements

*Toute notre gratitude, grâce et remerciement à Allah le plus puissant qui nous a donné la force, le courage et la volonté pour élaborer ce simple travail. C'est avec une profonde reconnaissance et considération particulière que nous remercions notre promotrice Mme. **Tahedmit Baya** pour la sollicitude avec laquelle elle a suivi et guidé ce travail.*

*Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude aux membres du jury de notre soutenance pour leur temps, leurs conseils et leurs remarques précieuses.*

*Nous remercions chaleureusement M. **ABBAS KARIM**, président du jury, pour avoir accepté de présider cette soutenance et pour ses conseils avisés tout au long de ce travail.*

*Nous souhaitons également remercier M. **MASSINISSA SOUFIT**, examinateur, pour ses commentaires pertinents et constructifs qui ont grandement contribué à l'amélioration de ce mémoire.*

*Nous remercions également Mme. **BARACHE BAAHIA**, examinatrice, pour ses remarques enrichissantes et son soutien tout au long de ce travail.*

*Merci aussi à tous les membres de département «recherche opérationnelle» pour leurs soutiens et leurs aides. notre remerciements seraient les plus sincère à tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce mémoire.*

# Dédicaces

*Le savoir étant la plus grande des richesses, je dédie mon projet*

*À mes chers parents Cherif et Bariza, mon frère Taki eddine, ma tante et ma seconde mère Lwazna, mon binôme Zakia, ma grande famille et mes amis, qui ont été mes piliers tout au long de ce parcours académique.*

*À vous tous, pour votre amour, votre soutien indéfectible et vos encouragements qui ont nourri mes efforts et mes réussites.*

*Je vous dédie ce mémoire avec une profonde gratitude et un immense amour.*

*Djebbar Mohammed Islam*

*Louange au bon Dieu, le possesseur de toute la grâce Je dédie ce travail*

*A ma mère, pour son amour, ses encouragements et ses sacrifices*

*A mon père, pour son soutien son affection et la confiance qu'il m'a accordé*

*À ma sœur Zineb*

*À mes frères Youcef et Hichem*

*A mon binôme Mohammed Islam qui m'a soutenu dans les bons et les mauvais moments*

*À mes amis sans exception merci.*

*Mezhoud Zakia*

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>iii</b>
<b>Table des figures</b>	<b>iv</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>v</b>
Introduction générale . . . . .	2
<b>1 Méthode des différences finies</b>	<b>5</b>
1.1 Équation Différentielle Partielle . . . . .	6
1.1.1 Linéarité d'une EDP . . . . .	6
1.1.2 Classification des E.D.P . . . . .	7
1.1.2.1 E.D.P linéaire d'ordre 1 . . . . .	7
1.1.2.2 E.D.P linéaires du second ordre . . . . .	7
1.1.2.3 L'EDP de nature parabolique . . . . .	8
1.2 Définitions . . . . .	9
1.2.1 Développement en série . . . . .	9
1.2.2 Polynôme de Taylor (aussi appelé formule de Taylor) . . . . .	9
1.3 Le principe de la méthode des différences finies . . . . .	9
1.4 Procédure de résolution des problèmes aux limites par la méthode de différences finies . . . . .	11
1.4.1 Discrétisation des EDPs . . . . .	12
1.4.2 Méthode des différences finies en 1D . . . . .	13

1.4.2.1	Expression des dérivées premières . . . . .	13
1.4.2.2	Expression des dérivées secondes . . . . .	15
1.4.2.3	Exemple simple 1D avec conditions de Dirichlet . . . . .	15
1.5	Consistance, convergence et stabilité . . . . .	16
1.5.1	Consistance . . . . .	16
1.5.2	Stabilité . . . . .	17
1.5.3	Convergence . . . . .	17
1.5.4	Relation entre les trois notions . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Revue littéraire sur le Modèle de Black Scholes multi-actifs</b>	<b>19</b>
2.1	Introduction à la finance de marché . . . . .	20
2.2	Marché financier . . . . .	20
2.2.1	Actifs financiers . . . . .	20
2.2.2	Produits dérivés . . . . .	21
2.2.3	Options . . . . .	21
2.2.4	Modèle de Black-Scholes et Merton . . . . .	25
2.3	Equation Différentiel Stochastique . . . . .	25
2.3.1	Interprétation financière de l'EDP de Black-Scholes . . . . .	26
2.4	Greeks . . . . .	26
2.5	Équation de Black-Scholes bidimensionnelle . . . . .	27
2.6	Solution Analytique . . . . .	28
2.7	Exemples d'options à deux actifs . . . . .	29
2.7.1	Option d'échange . . . . .	29
2.7.1.1	Formule de Margrabe . . . . .	29
2.7.1.2	Conditions aux limites . . . . .	30
2.7.2	Conditions aux limites de Margrabe . . . . .	30
2.7.3	Conditions aux limites du rendement . . . . .	31
2.7.4	Conditions aux limites de l'équation aux dérivées partielles . . . . .	31
2.7.5	Option Spread . . . . .	31

2.7.5.1	Approximations Analytiques . . . . .	32
2.7.5.1.1	Formule de Kirk . . . . .	32
2.7.5.1.2	Conditions aux limites du rendement . . . . .	36
2.7.6	Conditions aux limites des options panier . . . . .	36
2.7.7	Option Rainbow . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Expériences Numériques</b>	<b>39</b>
3.1	Introduction . . . . .	39
3.2	Équation aux dérivées partielles de Black-Scholes à deux actifs . . . . .	40
3.3	Discrétisation . . . . .	41
3.3.1	Discrétisation de l'espace . . . . .	41
3.3.2	Discrétisation uniforme de l'espace . . . . .	41
3.3.3	Discrétisation non uniforme de l'espace . . . . .	43
3.4	Mappages Non-Uniformes . . . . .	45
3.4.1	Discrétisation Temporelle . . . . .	48
3.5	Option d'Échange Européenne . . . . .	50
3.5.1	Différentes Discrétisations de l'Espace . . . . .	50
3.6	Résultats . . . . .	54
3.6.1	Erreurs et Ordres de Convergence . . . . .	54
3.6.2	Comparaison des Prix . . . . .	54
3.7	Analyse des Résultats . . . . .	55
3.8	Analyse des résultats(Grecques) . . . . .	57
3.9	Conclusion . . . . .	59
	CONCLUSION GÉNÉRALE . . . . .	60
	<b>Bibliographie</b>	<b>1</b>

# Table des figures

1.1	La discrétisation des EDPs. . . . .	10
2.1	La valeur terminale d'une option d'achat . . . . .	23
2.2	La valeur terminale d'une option de vente . . . . .	24
3.1	Une grille uniforme. . . . .	42
3.2	Tracé des points de grille non uniformes générés par (3.14) par rapport aux points de grille uniformes. . . . .	45
3.3	Tracé des points de grille non uniformes générés par (3.15) avec $E = 100$ par rapport aux points de grille uniformes. . . . .	46
3.4	Comparaison des prix (CN vs Margrabe). . . . .	55
3.5	Comparaison des méthodes de discrétisation. . . . .	58

# Liste des tableaux

2.1	Options Rainbow . . . . .	38
3.1	Paramètres du modèle pour la tarification des options d'échange européennes[10]	51
3.2	Erreurs et ordres de convergence pour différentes discrétisations . . . . .	54
3.3	Comparaison des prix pour $S_1 = S_2 = 60$ . . . . .	54
3.4	Erreurs et ordres de convergence pour Delta et Gamma . . . . .	57



# Liste des abréviations

- **BSM** : Black-Scholes-Merton
- **CDF** : Fonction de Distribution Cumulative
- **CN** : Crank-Nicolson
- **DFS** : Différences Finies Centrées
- **DFP** : Différences Finies progressives
- **DFR** : Différences Finies régressives
- **DT** : Développement de Taylor
- **EDOs** : Équations Différentielles Ordinaires
- **EDP** : Équation aux Dérivées Partielles (une équation différentielle partielle)
- **FDM** : Méthode de Différence Finie
- **PDF** : Fonction de Densité de Probabilité
- **SD** : Schéma de Discrétisation
- **1D** : Une Dimension (unidimensionnel)
- **2D** : Deux Dimensions (bidimensionnel)

## Introduction générale

La valorisation des options reste un domaine essentiel de la finance quantitative, crucial pour les investisseurs et les institutions financières. Les options sont des instruments financiers complexes qui permettent aux détenteurs de fixer un prix pour acheter ou vendre un actif sous-jacent à une date future. Cela offre des opportunités de couverture contre les risques de marché, de spéculation sur les mouvements de prix, et de génération de revenus supplémentaires [16, 7].

Parmi tous les modèles, le modèle de Black-Scholes-Merton (BSM) [7, 25] est le premier et le plus connu. Black et Scholes ont inventé leur modèle, mais son utilisation a été proposée et étendue pour inclure le taux de dividende continu par Merton. Deux ans après le départ de Black, le prix Nobel d'économie 1997 a été décerné à Scholes et Merton, avec une reconnaissance de la contribution de Black. Les formules BSM qui en ont résulté sont appliquées pour la tarification des options d'achat et de vente européennes à un actif. Cependant, la renommée du modèle BSM ne provient pas de ses formules, mais de son originalité dans la modélisation stochastique d'un marché financier, ce qui a motivé la création de nombreux autres modèles stochastiques pour modéliser les marchés financiers et les économies nationales [34, 6].

De nombreuses extensions du cadre de tarification des options de Black-Scholes ont été proposées. L'une d'elles est le développement du modèle de Black-Scholes pour des contrats d'options plus complexes, comme les options exotiques [37, 33]. Ces dernières années, on voit souvent non seulement des options d'achat et de vente univariées négociées sur le marché des options, mais aussi de nombreuses options multi-actifs. Les options multi-actifs ont plusieurs applications, notamment la couverture de l'incertitude des écarts de prix futurs. Lors de la tarification des options à deux actifs, comme les options Spread, l'analyse de Black-Scholes conduit à une EDP multidimensionnelle de Black-Scholes, qui dans la plupart des cas n'a pas de solution analytique. Par conséquent, ces options doivent être évaluées par des techniques d'approximation. Dans ce mémoire, des méthodes de discrétisation numérique des EDP sont utilisées pour approximer le prix des options. L'avantage

de l'approximation numérique est que la solution calculée converge lorsque la taille de la discrétisation est affinée.

Pour la solution numérique des modèles EDP en finance, le schéma de discrétisation le plus courant et traditionnel est la méthode des différences finies (FDM) dans les dimensions spatiales et le schéma Crank-Nicolson (CN) dans la dimension temporelle. Le schéma CN aboutit à un système linéaire creux qui doit être résolu à chaque pas de temps. Les FDM sont largement appliquées aux problèmes de tarification des options depuis 1977. Pour les problèmes avec des solutions suffisamment lisses, le schéma CN avec les FDM a prouvé être stable et convergent. Cependant, il a été noté que le schéma CN appliqué aux problèmes de tarification peut présenter un comportement d'oscillation indésirable, en raison du manque de lissité de la condition initiale, ce qui est assez courant pour les applications financières. Pour cette raison, certaines techniques de lissage, telles que la technique de Rannacher, sont appliquées. D'autre part, le choix des conditions aux limites, telles que les conditions de Dirichlet, les conditions de Neumann ou les conditions aux limites EDP, est crucial pour obtenir des solutions précises. En outre, dans les problèmes de tarification des options, le domaine spatial des actifs sous-jacents est tronqué, car il est généralement semi-infini.

Ce mémoire est organisé comme suit : Une introduction où on situe notre travail et son plan. Le premier chapitre présente le modèle de Black-Scholes, un fondement de la théorie moderne des options. Ce modèle est ensuite étendu pour inclure des options sur deux actifs (option de panier à deux dimensions), augmentant ainsi sa capacité à capturer les interactions complexes des marchés financiers.

Dans le deuxième chapitre, l'accent est mis sur la méthode des différences finies (MDF), une approche numérique efficace pour résoudre les équations aux dérivées partielles. Nous examinons sa mise en œuvre dans le contexte des options à deux actifs et discutons des techniques de discrétisation adaptées à cette extension du modèle.

Le troisième chapitre démontre l'application pratique de ces méthodes à travers un exemple concret : le calcul d'options d'échange. Nous comparons les résultats obtenus par la formule de Margrabe avec ceux de la méthode des différences finies, en mettant en

évidence les avantages et les limitations des approches analytiques et numériques.

# Méthode des différences finies

---

## Introduction

La tarification des options d'échange, bien que traitée théoriquement par le modèle de Black-Scholes, nécessite des méthodes numériques pour des solutions précises et pratiques. Ce chapitre se concentre sur la Méthode des Différences Finies (MDF), une technique essentielle pour résoudre les équations aux dérivées partielles (EDP) rencontrées en finance.

Nous introduirons d'abord les concepts mathématiques de base tels que le développement en série, les EDP et le polynôme de Taylor. Ensuite, nous détaillerons la MDF, incluant sa mise en œuvre en une dimension (1D). La discrétisation spatiale des EDP, y compris les dérivées premières et secondes, sera illustrée par un exemple simple avec conditions de Dirichlet.

Nous aborderons également les notions de consistance, convergence et stabilité, indispensables pour la fiabilité des solutions. Enfin, nous appliquerons ces concepts à l'équation de Black-Scholes pour deux actifs, en explorant les techniques de discrétisation spatiale et temporelle, ainsi que les mappages non-uniformes. Ce chapitre établit une base solide pour comparer la MDF avec les méthodes analytiques dans le chapitre suivant.

## 1.1 Équation Différentielle Partielle

**Définition 1.1.1.** Une *équation différentielle partielle (EDP)* est une équation qui implique les dérivées partielles d'une fonction inconnue de plusieurs variables indépendantes.

En général, une EDP peut être exprimée sous la forme :

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots) = 0$$

où  $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est la fonction inconnue,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sont les variables indépendantes, et  $F$  est une fonction donnée.

### 1.1.1 Linéarité d'une EDP

Une EDP est dite **linéaire** si elle peut être écrite sous la forme :

$$L(u) = f$$

où  $L$  est un opérateur linéaire agissant sur  $u$ , et  $f$  est une fonction donnée des variables indépendantes. Un opérateur différentiel est linéaire s'il satisfait les conditions suivantes pour toutes les fonctions  $u$  et  $v$ , et tous les scalaires  $\alpha$  et  $\beta$  :

$$L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v)$$

En d'autres termes, une EDP linéaire est de la forme :

$$a_0(x)u + a_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + a_n(x)\frac{\partial^n u}{\partial x_1^n} + \dots = f(x)$$

où  $a_0, a_1, a_2, \dots$  sont des coefficients qui peuvent dépendre des variables indépendantes  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , mais ne dépendent pas de  $u$ .

## 1.1.2 Classification des E.D.P

Selon l'ordre

**Définition 1.1.2.** On définit l'ordre d'une équation différentielle comme l'ordre de dérivation le plus grand des dérivées partielles [35].

### 1.1.2.1 E.D.P linéaire d'ordre 1

**Définition 1.1.3.** On appelle E.D.P linéaire d'ordre 1 dans un domaine  $R^n$  et d'inconnue  $u : R^n \mapsto R$  une E.D.P de la forme :

$$F(x) : r_{(x)} + g(x)u_{(x)} = h(x)$$

où  $r_{(x)}$  est le vecteur gradient de  $u$ ,  $\left(r_{(x)} = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\right)$ , et  $F(x) = (u_1(x), \dots, u_n(x))$ .

### 1.1.2.2 E.D.P linéaires du second ordre

**Définition 1.1.4.** On appelle E.D.P. linéaire d'ordre inférieur ou égal à 2 dans un domaine  $R^N$  et d'inconnue  $u : R^N \mapsto R^2$  une équation du type

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i f_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + g(x)u(x) = h(x)$$

#### Classification selon le type

Les E.D.P proviennent de la modélisation mathématique, c'est-à-dire de la transcription en équations, de problèmes intervenant dans tous les domaines des sciences physique, chimie, biologie, finance... [11, 22]

On distingue trois grandes catégories d'équations aux dérivées partielles :

Considérons la forme générale d'une Équation aux Dérivées Partielles (EDP) de second ordre suivant les deux variables indépendantes ( $x$  et  $y$ ) :

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0 \quad (1.1)$$

Une classification assez simple de cette équation peut être faite sur la base des coefficients associés aux dérivées d'ordre le plus élevé  $A, B$  et  $C$ . On calcule le déterminant défini par :

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

L'équation (2.1) est dite de type :

- elliptique si  $\Delta < 0$ ,
- parabolique si  $\Delta = 0$ ,
- hyperbolique si  $\Delta > 0$ .

Si  $G = 0$ , l'équation (2.1) est homogène, sinon l'équation est non homogène.

### 1.1.2.3 L'EDP de nature parabolique

**Définition 1.1.5.** *Les équations de type parabolique dont le prototype est l'équation de la chaleur*

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - \Delta T(x, t) = 0$$

pour tout  $x \in R^n$  et  $t > 0$ . L'inconnue est la fonction  $T : R^n \times ]0; +\infty[ \rightarrow R$ .

*C'est le cas d'un problème de propagation associé à un mécanisme de dissipation tel que la conduction thermique non stationnaire [13].*

Cette catégorie d'EDP peut être considérée comme une extension des équations elliptiques pour lesquelles certaines valeurs critiques des paramètres doivent être déterminées en même temps que la distribution d'équilibre correspondante. La résonance de circuits électriques ou d'enceintes acoustiques, ainsi que la détermination des fréquences propres des structures élastiques, constituent des exemples de ce type d'équations. résoudre un problème de type elliptique, il est impératif de poser les conditions aux limites sur toutes les frontières du domaine.



## 1.2 Définitions

### 1.2.1 Développement en série

Un développement en série est une représentation d'une fonction particulière comme une somme de puissances de l'une de ses variables, ou par la somme de puissances d'une autre fonction (généralement élémentaire)[2, 32].

### 1.2.2 Polynôme de Taylor (aussi appelé formule de Taylor)

La formule de Taylor est utilisée pour approcher les fonctions par des fonctions polynômiales. Pour une fonction  $U$  analytique et un point  $x_0$ , le développement en série de Taylor autour de ce point est donné par [3, 18] :

$$U(x) = U(x_0) + \frac{(x - x_0)^1}{1!}U^{(1)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}U^{(2)}(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}U^{(n)}(x_0) + R_n$$

où  $R_n$  est l'erreur ou le reste de troncature.

Cette erreur est notée par  $O((x - x_0)^{n+1})$  [31, 5].

## 1.3 Le principe de la méthode des différences finies

La MDF consiste à approximer les dérivées des équations par le biais des développements de Taylor et se déduit directement de la définition de la dérivée. Elle est due aux travaux de plusieurs mathématiciens du 18ème siècle (Euler, Taylor, Leibniz...) [19, 36, 9, 8].

Une méthode numérique nécessite de transformer le problème continu en un problème discret en utilisant des méthodes de discrétisation spatiales et temporelles.

Un maillage est vu comme une division du domaine de résolution en petits volumes de contrôle. La discrétisation de l'EDP doit alors être adaptée au maillage. Une méthode numérique comporte donc les éléments suivants :

1. Le maillage : Le maillage permet de décomposer un élément géométrique complexe (une surface ou un volume) en un assemblage de formes élémentaires.
2. La discrétisation : C'est le procédé qui consiste à remplacer le problème initial continu (décrit par une EDP) par un problème approché discret, posé dans un espace de dimension finie.

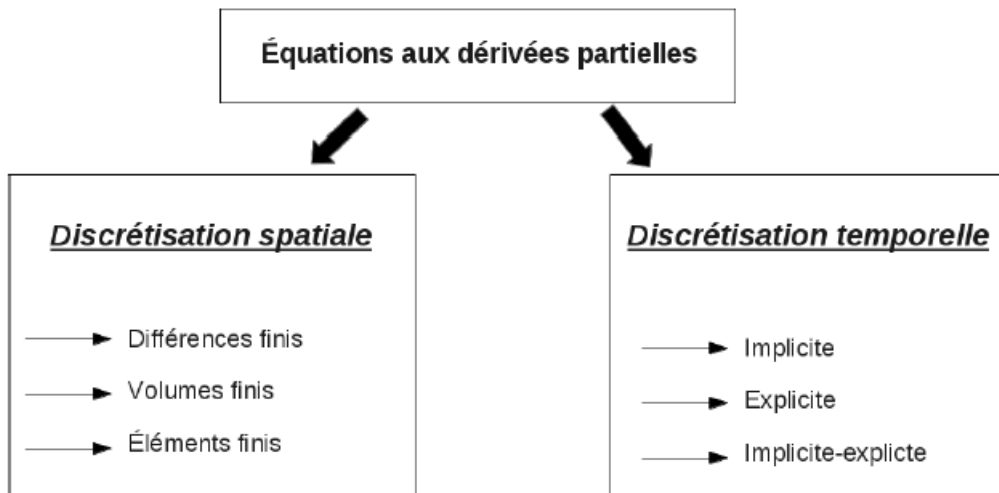


FIGURE 1.1 – La discrétisation des EDPs.

Nous distinguerons deux types de discrétisation.

1. La discrétisation spatiale : Elle sera considérée comme donnée, et pourra être indifféremment issue des méthodes de différences finies, de volumes finis ou d'éléments finis.
2. La discrétisation temporelle : Les méthodes d'intégration temporelle utilisées pour la modélisation des EDPs sont réparties en deux catégories : les schémas explicites et implicites.

Soit  $(x, y, \dots) \mapsto u(x, y, \dots)$  une fonction de l'espace et du temps. Par définition de la dérivée, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y, t) - u(x, y, t)}{\Delta x}$$

Si  $\Delta x$  est petit, un développement de Taylor de  $u(x + \Delta x, y, t)$  au voisinage de  $x$  donne [24, 1] :

$$u(x + \Delta x, y, t) = u(x, y, t) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, t) + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, t) + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, y, t) + \dots$$

En tronquant la série au premier ordre en  $\Delta x$ , on obtient :

$$\frac{u(x + \Delta x, y, t) - u(x, y, t)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, t) + O(\Delta x)$$

L'approximation de la dérivée  $\frac{\partial u}{\partial x}(x)$  est alors d'ordre 1, ce qui indique que l'erreur de troncature  $O(\Delta x)$  tend vers zéro comme la puissance première de  $\Delta x$ . La puissance de  $\Delta x$  avec laquelle l'erreur de troncature tend vers zéro est appelée l'ordre de la méthode.

## 1.4 Procédure de résolution des problèmes aux limites par la méthode de différences finies

Selon les étapes suivantes :

1. Construire le maillage du domaine :
2. Transformer l'EDP sous forme de schéma numérique de différences finies.
3. Écrire l'équation de différences finies aux points du maillage.
4. Obtenir le système d'équations algébriques discrètes  $[K] : y = y_c$  :
  5. Tant que  $\{y_c\}$  est le vecteur connu donné par les conditions aux limites non homogènes.
  6.  $[K]$  est la matrice des coefficients.
  7.  $\{y\}$  est le vecteur solution recherché en tout point du maillage.

Trouver la solution  $\{y\}$  en résolvant le système d'équations  $[K] : [k] \cdot \{y\} = \{y_c\}$ .

On résout, dans ce qui suit, les problèmes aux limites à domaines réguliers.

### 1.4.1 Discrétisation des EDPs

#### •Les différences finies

La méthode consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou nœuds du maillage [20, 27].

- Avantages : grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul.
- Inconvénients : limitation à des géométries simples, difficultés de prise en compte des conditions aux limites de type Neumann.

#### •Les volumes finis

La méthode intègre, sur des volumes élémentaires de forme simple, les équations écrites sous forme de loi de conservation. Elle fournit ainsi de manière naturelle des approximations discrètes conservatrices. Sa mise en œuvre est simple avec des volumes élémentaires rectangles [12, 20].

- Avantages : permet de traiter des géométries complexes avec des volumes de forme quelconque, détermination plus naturelle des conditions aux limites de type Neumann.
- Inconvénients : peu de résultats théoriques de convergence.

#### •Les éléments finis

La méthode consiste à approcher, dans un sous-espace de dimension finie, un problème écrit sous forme variationnelle (comme minimisation de l'énergie en général) dans un espace de dimension infinie. La solution approchée est dans ce cas une fonction déterminée par un nombre fini de paramètres comme, par exemple, ses valeurs en certains points ou nœuds du maillage [15, 38].

- Avantages : traitement possible de géométries complexes, nombreux résultats théoriques sur la convergence.
- Inconvénients : complexité de mise en œuvre et grand coût en temps de calcul et mémoire.

### 1.4.2 Méthode des différences finies en 1D

Considérons un cas monodimensionnel où l'on souhaite déterminer une grandeur  $u(x)$  sur l'intervalle  $[0, 1]$ . La recherche d'une solution discrète de la grandeur  $u$  amène à constituer un maillage de l'intervalle de définition. On considère un maillage (ou grille de calcul) composé de  $N + 1$  points  $x_i$  pour  $i = 0, \dots, N$  régulièrement espacés avec un pas  $\Delta x$ . Les points  $x_i = i\Delta x$  sont appelés les nœuds du maillage.

Le problème continu de départ de détermination d'une grandeur sur un ensemble de dimension infinie se ramène ainsi à la recherche de  $N$  valeurs discrètes de cette grandeur aux différents nœuds du maillage.

Notation : On note  $u_i$  la valeur discrète de  $u(x)$  au point  $x_i$ , soit  $u_i = u(x_i)$ . De même pour la dérivée de  $u(x)$  au nœud  $x_i$ , on note  $(\frac{\partial u}{\partial x})_{x=x_i} = (\frac{\partial u}{\partial x})_i = u'_i$ . Cette notation s'utilise de façon équivalente pour toutes les dérivées d'ordre successif de la grandeur  $u$ .

Le schéma aux différences finies d'ordre 1 présenté ci-dessus s'écrit, en notation indicelle :

$$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

Ce schéma est dit "avant" ou de centre avant ou upwind ou différence finie progressive (DFP) .

Il est possible de construire un autre schéma d'ordre 1, appelé "arrière" :

$$u'_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

#### 1.4.2.1 Expression des dérivées premières

Soit  $h$  la distance entre deux points consécutifs sur une grille de discrétisation.

**Différences finies en avant (progressives) :**

A l'aide de la formule de Taylor (jusqu'à l'ordre 2) :

$$u(x_i + h) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(\xi); \quad x_i < \xi < x_{i+1} \quad (1.2)$$

Donc :

$$u'(x_i) = \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h} + o(h)$$

Avec  $o(h)$  l'erreur de troncation :  $o(h) = -\frac{h}{2}u''(\xi)$ ;  $x_i < \xi < x_i + h$

La formule de la dérivée première s'écrit en notation indicielle :

$$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + o(h)$$

**Différences finies en arrière (réggressives) :**

En changeant  $h$  en  $-h$  dans l'équation (2.2) on obtient :

$$u(x_i - h) = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(\xi); \quad x_i - h < \xi < x_i$$

Donc :

$$u'(x_i) = -\frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h} + o(h) \quad Tq \quad o(h) = \frac{h}{2}u''(\xi)$$

Donc :

$$u'_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{2h} + o(h^2)$$

Différences centrées :

$$u(x_i + h) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2!}u''(x_i) + \frac{h^3}{3!}u^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(\xi)$$

$$u(x_i - h) = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2!}u''(x_i) - \frac{h^3}{3!}u^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(\xi)$$

Donc :

$$u(x_i + h) - u(x_i - h) = 2hu'(x_i) + \frac{2h^3}{3!}u^{(3)}(x_i)$$

$$u'(x_i) = \frac{u(x_i + h) - u(x_i - h)}{2h} + o(h^2)$$

Telle que :  $o(h^2) = \frac{-h^2}{6}f^{(3)}(\xi)$  avec  $x_i - h < \xi < x_i + h$ .

Donc

$$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + o(h^2)$$

### 1.4.2.2 Expression des dérivées secondes

**Différences finies en avant (progressives) :**

$$u''(x_i) = \frac{u(x_i) - 2u(x_{i+1}) + u(x_{i+2}))}{h^2} + o(h)$$

Telle que :  $o(h) = -h u^{(3)}$  ; avec  $x_i < \xi < x_i + 2h$

En notation indicielle, on a :

$$u''_i = \frac{u_i - 2u_{i+1} + u_{i+2}}{h^2} + o(h) \quad \text{avec} \quad o(h) = -hu^{(3)}\xi$$

**Différences finies en arrière (régressives) :**

$$u''(x_i) = \frac{u(x_i) - 2u(x_{i-1}) + u(x_{i-2}))}{h^2} + o(h)$$

Telle que :  $o(h^2) = h u^{(3)} \xi$  avec  $x_i - 2h < \xi < x_i$

En notation indicielle, on a :

$$u''_i = \frac{u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}}{h^2} + o(h) \quad \text{avec} \quad o(h) = hu^{(3)}\xi; \quad x_{i-2} < \xi < x_i$$

**Différences finies centrées :**

$$u''(x_i) = \frac{u(x_i + h) - 2u(x_i) + u(x_i - h))}{h^2} + o(h)$$

Telle que :  $o(h) = -\frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi)$  ; avec  $x_i - h < \xi < x_i + h$

En notation indicielle, on a :

$$u''_i = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + o(h) \quad \text{avec} \quad o(h) = -\frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi); \quad x_{i-1} < \xi < x_i + h$$

### 1.4.2.3 Exemple simple 1D avec conditions de Dirichlet

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in ]0, 1[ \\ u(0) = a, \\ u(1) = b, \end{cases}$$

Le maillage est construit en introduisant  $N + 1$  noeuds  $x_i$  avec  $i = 0, 1, \dots, N$  régulièrement espacés avec un pas  $\Delta x = h = \frac{1}{N+1}$ . La quantité  $u_i$  désignera la valeur de la fonction  $u(x)$  au noeud  $x_i$ .

L'équation à résoudre s'écrit, sous forme discrète en chaque noeud  $x_i$  :

$$-\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{(\Delta x)^2} = u_i + \_(\Delta x)$$

Il est très pratique d'utiliser une formulation matricielle en faisant apparaître le vecteur des inconnues discrètes :

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{(\Delta x)^2} & -\frac{1}{(\Delta x)^2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{(\Delta x)^2} & \frac{2}{(\Delta x)^2} & -\frac{1}{(\Delta x)^2} & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{(\Delta x)^2} & \frac{2}{(\Delta x)^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{(\Delta x)^2} & \frac{2}{(\Delta x)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + \_(\Delta x) \\ u_2 + \_(\Delta x) \\ \vdots \\ u_N + \_(\Delta x) \end{pmatrix}$$

## 1.5 Consistance, convergence et stabilité

Soit  $u$  une solution exacte de l'EDP (équation aux dérivées partielles)  $Au = f$  dans le cas continu, et  $u_d$  une solution approchée. On note  $Au = f$  le cas discretisé, où  $A$  est le système linéaire et  $f$  est le terme source.

### 1.5.1 Consistance

Lors de la discrétisation, au noeud  $(i, j)$  du maillage, l'EDP est transformée en un schéma de discrétisation (SD) noté  $(Ed)$  qui s'écrit :

$$(\tilde{A} u)_{ij} = f_{ij}$$

On note :

$$[R(u)]_{ij} = [(A - \tilde{A}_u)(u)]_{ij}$$



**Remarque 1.5.1.**  $[R(u)]_{ij}$  dépend de :

- Le pas de discrétisation ( $h$  et  $k$  pour  $n = 2$ ).
- La manière dont on approche  $A$  par  $\tilde{A}_u$  (DFS, DFR ou DFP).

Si  $\lim_{(hk) \rightarrow (0,0)} [R(u)]_{ij} = 0$ , on dira que le SD de  $A$  est consistant (ou cohérent) avec  $\tilde{A}$  et  $(Ed)$  est consistant avec  $(E)$  en chaque nœud  $(i, j)$  [27, 19].

**Procédure générale à suivre pour montrer la consistance d'un SD :**

1. On effectue, en supposant  $u$  de classe suffisamment différentiable, le développement de Taylor (DT) au voisinage du nœud  $(i, j)$ , pour chacun des termes de  $(\tilde{A}_u)_{ij}$ .
2. On écrit ensuite  $[(A - \tilde{A}_u)(u)]_{ij}$  en tenant compte de ces DT.
3. On simplifie, et on fait tendre les pas vers 0.
4. On conclut sur la consistance du SD.

## 1.5.2 Stabilité

On dira que le SD proposé est stable si :

En chaque nœud  $(i, j)$  de l'intérieur du maillage on a en réalité il reste borné en chaque nœud [36, 30].

$$\lim_{(hk) \rightarrow (0,0)} [R(u)]_{ij} = 0 \quad (\text{idéale})$$

## 1.5.3 Convergence

Les notions de consistance et de stabilité ne font pas intervenir (directement) la solution exacte  $u$  de  $(E)$  et celle de  $u_d$  donnée par le schéma  $(Ed)$ .

On dira que le schéma  $(Ed)$  est convergent si :

En chaque nœud  $(i, j)$  du maillage, on a  $(u_d)_{ij}$  qui tend vers  $(u)_{ij}$  quand les pas de discrétisation tendent vers 0 [4].

### 1.5.4 Relation entre les trois notions

Soit  $(P)$  un problème d'EDP, bien posé (la solution existe et est unique et dépend continuellement des conditions limites).

Notons  $A$  l'opérateur aux dérivées partielles associé à  $(P)$ .

Notons  $A_u$  l'opérateur aux dérivées partielles associé au SD (schéma de discrétisation).

D'où le noncement du théorème suivant :

**Théorème 1.5.2.** (*Théorème d'équivalence de Lax-Milgram*)  $A$  est consistant et stable si et seulement si  $A_u$  est convergent[38].

## Conclusion

La Méthode des Différences Finies est une technique puissante pour résoudre les équations aux dérivées partielles utilisées dans la tarification des options d'échange. Ce chapitre a présenté les concepts de base, les étapes de discrétisation spatiale et temporelle, et les critères de consistance, convergence et stabilité.

L'application de la MDF à l'équation de Black-Scholes pour deux actifs a démontré son efficacité et sa flexibilité. En transformant des EDP complexes en systèmes d'équations algébriques, la MDF permet une modélisation précise des options multi-actifs, posant ainsi les bases pour la comparaison avec les méthodes analytiques dans le chapitre suivant.

# Revue littéraire sur le Modèle de Black Scholes multi-actifs

---

## Introduction

Sur le marché des options, de nombreuses options négociées sont des options multi-actifs. Les options multi-actifs sont un groupe d'options dont le rendement dépend de plus d'un actif sous-jacent. En ce sens, une option à deux actifs est un cas particulier d'option multi-actifs, où le nombre d'actifs sous-jacents est de deux. Dans ce cas, nous disons que cette option est bidimensionnelle. Si nous étendons le cadre de Black-Scholes aux options à deux actifs, l'équation de Black-Scholes correspondante devient une EDP parabolique bidimensionnelle, avec les prix des deux actifs jouant le rôle des variables spatiales respectives.

Dans notre travail, nous nous concentrons principalement sur l'évaluation numérique des options sur écart à deux actifs, dont le rendement se concentre sur la différence des prix des deux actifs sous-jacents[7]. Cependant, notre modèle et nos méthodes numériques sont applicables à divers types de contrats d'options bidimensionnels. Dans ce chapitre, nous présenterons le modèle de Black-Scholes bidimensionnel et plusieurs exemples courants d'options à deux actifs.

## 2.1 Introduction à la finance de marché

Ce chapitre est une introduction aux notions de base de la finance de marché tirée de [14] et [28]. Nous allons voir en détails le modèle de Black-Scholes, en particulier, la valorisation et couverture des options.

## 2.2 Marché financier

**Définition 2.2.1.** *Le marché financier désigne l'ensemble des lieux et des mécanismes permettant la rencontre de l'offre et de la demande de capitaux. Il s'agit d'un système où les investisseurs achètent et vendent des titres financiers, comme les actions, les obligations, les devises, et autres instruments financiers. Les marchés financiers jouent un rôle crucial dans l'économie, facilitant la liquidité et la mobilisation des ressources pour les entreprises et les gouvernements [26].*

Les marchés financiers peuvent être divisés en plusieurs catégories :

- **Le marché monétaire** : où sont échangés des instruments financiers à court terme (moins d'un an).
- **Le marché obligataire** : où sont négociées des obligations (titres de dette à moyen et long terme).
- **Le marché boursier** : où les actions des entreprises sont émises et échangées.
- **Le marché des changes** : où les devises sont échangées.

### 2.2.1 Actifs financiers

**Définition 2.2.2.** *Un actif financier est un titre ou un contrat négociable qui génère de la valeur ou un revenu pour l'investisseur, mais en contrepartie une certaine prise de risque.*

*Voici quelques exemples :*

- *Action* : *C'est un produit financier négociable de propriété sur une fraction du capital social d'une entreprise donnée. Chaque année, le propriétaire d'une action*

reçoit une fraction des bénéfices de l'entreprise sous forme de dividendes.

• *Obligation* : Une obligation est un titre de créance. Lorsqu'un investisseur achète une obligation, il prête à l'émetteur de l'obligation une somme d'argent. Par conséquent, l'émetteur (ou vendeur de l'obligation) est créancier et l'acheteur est prêteur.

Dans le langage financier, un portefeuille désigne l'ensemble d'actifs financiers détenus par l'investisseur.

## 2.2.2 Produits dérivés

**Définition 2.2.3.** *Un produit dérivé est un produit financier dérivant d'un autre produit, il s'agit d'un contrat entre deux parties, un acheteur et un vendeur, qui fixe à l'avance le prix auquel ils peuvent acheter ou vendre une certaine quantité d'actifs, c'est un contrat qui dépend d'un produit financier dont le règlement s'effectue à une date future fixée appelée échéance.*

**Remarque 2.2.1.** *L'actif sur lequel porte le produit dérivé est appelé actif sous-jacent, ou underlying asset, il s'agit du support du produit dérivé. Il peut être financier (actions, obligations, devises...) ou physique (matières premières...). L'intérêt principal des produits dérivés est de limiter les risques liés aux transactions réalisées directement sur l'actif sous-jacent.*

## 2.2.3 Options

**Définition 2.2.4.** *Une option est un contrat entre un acheteur et un vendeur. L'acheteur de l'option obtient le droit, et non pas l'obligation, d'acheter (Call) ou de vendre (Put) un actif sous-jacent à un prix fixé à l'avance (appelé Strike), à une date fixée à l'avance dans le contrat. Le vendeur s'engage à respecter les termes du contrat si l'acheteur décide d'exercer son option, en contrepartie, l'acheteur lui donne de l'argent. Si l'option n'est pas exercée, le vendeur a gagné un montant égal au prix de l'option.*

Il existe deux types d'options, les options vanilles (ou simples) et exotiques (complexes).

Les options vanilles sont les plus rencontrées sur le marché, il s'agit des options européennes et américaines.

## Option d'Achat

**Définition 2.2.5.** *L'option d'achat est un type d'option qui donne à son détenteur le droit d'acheter les actifs sous-jacents à un certain prix  $K$ . L'option d'achat peut être considérée comme un dépôt pour un investissement futur. Dans le cas où le prix de l'actif augmente à un niveau élevé, le détenteur de l'option d'achat peut toujours acheter les actifs au prix  $K$ .*

Nous notons  $C(t, S)$  le prix d'une option d'achat européenne, avec un prix d'exercice  $K$  et une échéance  $T$ . Le rendement de cette option d'achat est  $(S - K)^+ = \max(S - K, 0)$ .

La condition finale donne le prix de l'option à l'échéance et est donné par le rendement. Par conséquent, la condition finale pour l'équation de Black-Scholes dans le cas des options d'achat est

$$C(T, S) = \max(S - K, 0)$$

Pour la même raison mentionnée dans la section sur les options de vente, si le prix de l'actif devient nul, il restera nul. Ensuite, l'option d'achat aura un rendement nul et sera sans valeur tout le temps. Par conséquent, la condition aux limites à  $S = 0$  est

$$C(t, 0) = 0$$

À mesure que les prix des actifs augmentent, il est de plus en plus probable d'exercer l'option d'achat. Lorsque  $S \rightarrow +\infty$ , l'importance du prix d'exercice devient moins significative. Ainsi, approximativement,

$$C(t, S) \rightarrow S \quad \text{comme} \quad S \rightarrow +\infty$$

Cependant, si nous considérons le prix d'exercice actualisé dans le temps, une condition aux limites plus précise pour la borne supérieure est

$$C(t, S) \approx S - Ke^{-r(T-t)}$$

**Option d'achat européenne** Appelée Call Européen, donne le droit à son détenteur d'acheter une certaine quantité d'actif sous-jacent c'est-à-dire l'action ou la marchandise qu'on souhaite vendre (de valeur  $S_t$  à l'instant  $t$ ) à une certaine date future, appelée maturité notée  $T$ , et à un prix fixé dans le contrat noté  $K$  appelé Strike. L'acheteur ayant donc le droit et non l'obligation d'exercer l'option à la maturité, il va exercer l'option si  $S_T > K$  sinon il ne fait rien. La valeur réelle donc échangée à la maturité, appelée le Pay-off de l'option, est donc

$$V(S_T; T) = (S_T - K)^+ = \max(S_T - K, 0)$$

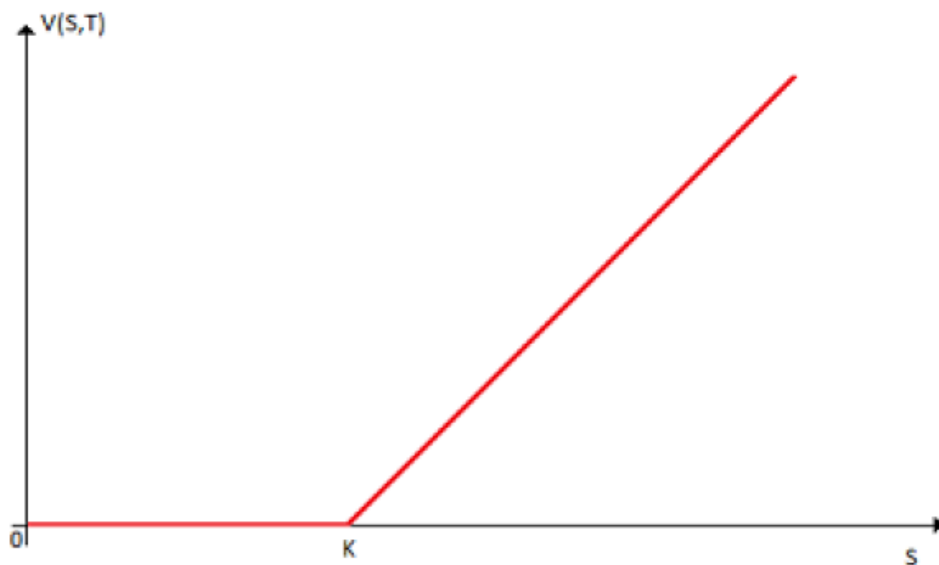


FIGURE 2.1 – La valeur terminale d'une option d'achat

**Option de vente européenne** Appelée Put Européen, donne le droit à son détenteur de vendre l'actif  $S_t$  à une certaine date future  $T$ , à un prix fixé à l'avance  $K$ . Par le même raisonnement similaire à l'option d'achat, la valeur réelle de l'option de vente à l'échéance vaut

$$V(S_T; T) = (K - S_T)^+ = \max(K - S_T, 0)$$

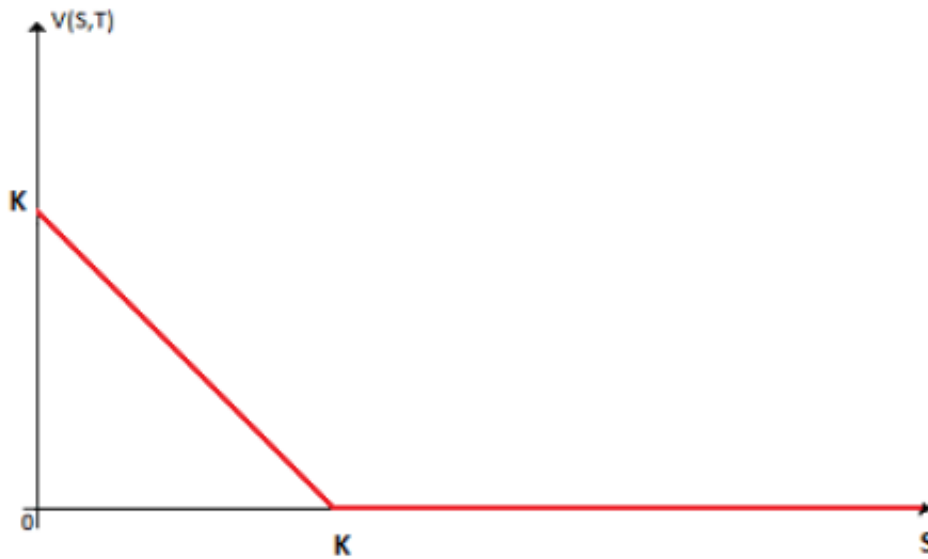


FIGURE 2.2 – La valeur terminale d'une option de vente

### Option américaine

Est une option qui donne le droit à son détenteur d'acheter ou de vendre un actif à tout instant  $t$  compris dans l'intervalle  $[0; T]$  avec  $T$  étant l'échéance du contrat.

**Remarque** On ne sera pas surpris que l'option américaine soit plus chère, ou au moins aussi chère, que l'option européenne correspondante puisqu'elle donne plus de droits à son détenteur.



## 2.2.4 Modèle de Black-Scholes et Merton

Le célèbre modèle de Black-Scholes est un compromis entre ces deux exigences et donne des formules explicites de prix d'options.

## 2.3 Equation Différentiel Stochastique

Le cadre de Black-Scholes [7] explique la relation entre les prix des options et les actifs sous-jacents dans le cas où les prix des actifs sous-jacents suivent certains processus stochastiques. Le modèle de Black-Scholes fait les hypothèses suivantes :

1. Il n'existe aucune opportunité d'arbitrage sur le marché financier. Les traders ne peuvent pas réaliser de profit instantané sans risque.
2. La valeur de l'actif sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique :

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW \quad (2.1)$$

où  $\mu$  désigne le taux de croissance moyen des actifs sous-jacents,  $\sigma$  désigne la volatilité du prix de l'actif, et  $W$  est un mouvement brownien.

3. Le marché est sans friction. Cela signifie qu'il n'y a pas de frais de transaction, les taux d'intérêt pour emprunter et prêter de l'argent à la banque sont les mêmes, chaque partie sur le marché a une information immédiate, et toutes les entités sont disponibles à tout moment et en toute quantité.
4. Aucun dividende ne sera payé sur l'actif sous-jacent  $S$ .

Sous toutes ces hypothèses, il peut être prouvé que le prix de l'option satisfait l'équation aux dérivées partielles (EDP) de Black-Scholes. Cependant, nous pouvons voir que certaines de ces hypothèses sont assez restrictives. Par exemple, dans le marché réel, il est connu que le prix des actions peut ne pas se comporter comme un mouvement brownien géométrique. Merton a étendu ce modèle pour permettre des sauts de prix, conduisant à un modèle plus complexe appelé modèle de diffusion avec sauts. Cependant, dans ce chapitre, nous nous concentrerons uniquement sur le modèle original de Black-Scholes.

**Théorème 2.3.1.** (*Équation de Black-Scholes*) *Supposons que le prix de l'actif  $S$  suive un mouvement brownien géométrique comme dans l'équation (2.1). Sous les hypothèses du cadre de Black-Scholes, le prix de l'option d'achat (call) ou de vente (put)  $u(t, S)$  satisfait l'équation différentielle partielle parabolique suivante :*

$$\frac{\partial u(t, S)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 u(t, S)}{\partial S^2} + rS \frac{\partial u(t, S)}{\partial S} - ru(t, S) = 0 \quad (2.2)$$

““

### 2.3.1 Interprétation financière de l'EDP de Black-Scholes

Une conséquence essentielle de l'EDP d'évaluation est que le prix de l'option ne dépend pas du rendement  $\mu$  de l'actif risqué, car ce paramètre n'apparaît pas dans l'EDP (2.2). En effet, la stratégie de couverture dynamique permet à l'émetteur de l'option de se couvrir contre les mouvements défavorables du marché. Il a annulé le risque lié à la tendance du marché  $\mu$ , mais le risque lié aux fluctuations du marché est toujours présent et influence significativement le prix de l'option par l'intermédiaire du paramètre de la volatilité.

## 2.4 Greeks

**Définition 2.4.1.** *En finance, les Greeks sont les sensibilités du prix des dérivés financiers par rapport aux mouvements de divers paramètres ou variables, et sont également appelés sensibilités aux risques ou paramètres de couverture. Ces paramètres sont des outils essentiels en gestion des risques. Par exemple, dans la dérivation de l'équation de Black-Scholes.*

Nous utilisons l'idée de couverture Delta. Il s'agit d'une stratégie dynamique pour maintenir un portefeuille sans risque en rééquilibrant le portefeuille, plus précisément, le ratio des options et des actifs sous-jacents. Bien qu'en pratique, cette technique nécessite un ajustement pour prendre en compte les coûts de transaction, l'idée générale de maintenir un portefeuille sans risque est basée sur le calcul précis des Greeks.

Dans la couverture Delta, le Delta est le taux de variation du prix de l'option par rapport à la variation du prix des actifs sous-jacents. Mathématiquement, cela peut être écrit comme

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial S}$$

Dans une autre stratégie de couverture, nous pouvons avoir besoin de couvrir uniquement le risque dû aux variations du Delta de l'actif sous-jacent. Le Gamma est donné par

$$\Gamma = \frac{\partial^2 u}{\partial S^2}$$

### Option exotique

Ce sont des produits complexes qui ont pris une réelle importance depuis ces deux dernières décennies. Ce sont des options qui ne dépendent pas uniquement de la valeur de l'actif à l'échéance mais également de son maximum, minimum, ou même de la moyenne de ses cours dans l'intervalle  $[0; T]$ . Parmi ces options exotiques on trouve les options asiatiques qui sont des contrats qui donnent à leur détenteur, un capital à la maturité lorsque la moyenne des cours du sous-jacent durant une période déterminée est en dessous ou au dessus d'un certain niveau prédéterminé à l'avance (le Strike). On trouve également les options qui portent sur plusieurs actifs sous-jacents comme les options paniers .

## 2.5 Équation de Black-Scholes bidimensionnelle

Considérons une option européenne dont le rendement  $f(S_1, S_2)$  dépend des prix de deux actifs sous-jacents  $S_1$  et  $S_2$ . Avec les mêmes hypothèses que dans le cadre de Black-Scholes,

Chaque prix d'actif suit un mouvement brownien géométrique :

$$dS_1 = S_1(\mu_1 dt + \sigma_1 dW_1), \quad (2.3)$$

$$dS_2 = S_2(\mu_2 dt + \sigma_2 dW_2). \quad (2.4)$$

Chaque  $dW_i$ , pour  $i = 1, 2$ , satisfait :

$$E(dW_i) = 0, \quad (2.5)$$

$$E(dW_i^2) = dt. \quad (2.6)$$

En même temps, nous supposons que les deux actifs sous-jacents sont corrélés :

$$\text{corr}(W_1, W_2) = \rho \quad \text{ou} \quad E(dW_1 dW_2) = \rho dt. \quad (2.7)$$

Ici, nous disons que  $\rho$  est la corrélation entre les deux processus stochastiques  $W_1$  et  $W_2$ . La corrélation  $\rho$  mesure la force et la direction de la relation linéaire entre les deux mouvements browniens. Une valeur de  $\rho$  proche de 1 indique une forte corrélation positive, une valeur proche de -1 indique une forte corrélation négative, et une valeur de 0 indique une absence de corrélation.

**Théorème 2.5.1. (équation de Black-Scholes bidimensionnelle)**

*Supposons que les deux actifs sous-jacents suivent les mouvements browniens géométriques corrélés (2.3) et (2.4) avec une corrélation comme dans (2.6). Sous les hypothèses du cadre de Black-Scholes, le prix de l'option à deux actifs  $u(t, S_1, S_2)$  satisfait l'équation aux dérivées partielles suivante :*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S_2^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 u}{\partial S_1 \partial S_2} + rS_1 \frac{\partial u}{\partial S_1} + rS_2 \frac{\partial u}{\partial S_2} - ru = 0. \quad (2.8)$$

## 2.6 Solution Analytique

Nous citons ici la formule analytique de la solution de l'équation de Black-Scholes avec des conditions finales pour les options d'achat (call) et de vente (put). Les formules [7] pour les options européennes d'achat est :

$$C = S\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\log(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\log(S/K) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

où  $\Phi$  est la fonction de répartition cumulative (CDF) de la distribution normale standard.

## 2.7 Exemples d'options à deux actifs

### 2.7.1 Option d'échange

L'option d'échange est couramment observée sur le marché de l'énergie. C'est un type particulier d'option de spread lorsque le prix d'exercice est nul. C'est aussi l'une des options multi-actifs les plus simples. Le rendement de l'option d'échange est

$$\max(S_1 - S_2, 0) \tag{2.9}$$

Étant donné qu'il n'y a pas de terme de prix d'exercice, la classification typique des options d'achat et de vente n'est pas appropriée pour l'option d'échange. Cependant, nous pouvons toujours considérer le premier actif  $S_1$  comme étant en position d'achat tandis que le deuxième actif  $S_2$  est en position de vente.

#### 2.7.1.1 Formule de Margrabe

En 1978, Margrabe [23] a développé une formule de solution analytique à l'équation de Black-Scholes pour l'option d'échange. Supposons que  $C(t, S_1, S_2)$  soit le prix de l'option d'échange à l'instant  $t$  avec les prix des deux actifs étant  $S_1$  et  $S_2$ . La formule est donnée par

$$C(t, S_1, S_2) = S_1\Phi(d_1) - S_2\Phi(d_2)$$

où

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}, \\ d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{S_1}{S_2}\right) + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ d_2 &= \frac{\ln\left(\frac{S_1}{S_2}\right) - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}\end{aligned}$$

### 2.7.1.2 Conditions aux limites

Le domaine pour chaque prix d'actif est un domaine semi-infini  $[0, +\infty]$ . Dans une méthode numérique, nous tronquons généralement le domaine à  $[0, S_{1,\infty}]$  et  $[0, S_{2,\infty}]$ , respectivement. Le choix des valeurs éloignées  $S_{1,\infty}$  et  $S_{2,\infty}$  dépend généralement de la zone d'évaluation qui nous intéresse. Les paramètres numériques  $S_{1,\infty}$  et  $S_{2,\infty}$  sont fixés de manière suffisamment grande par rapport aux coordonnées de la zone d'évaluation. En général, des valeurs plus grandes de  $S_{1,\infty}$  et  $S_{2,\infty}$  donnent une meilleure précision.

Les conditions aux limites du côté zéro sont :

$$u(t, 0, S_2) = 0 \tag{2.10}$$

$$u(t, S_1, 0) = S_1 \tag{2.11}$$

Nous avons donné trois types différents de conditions aux limites pour les limites éloignées.

### 2.7.2 Conditions aux limites de Margrabe

Pour l'option d'échange, la solution analytique est disponible. Dans ce cas, il est naturel d'utiliser la formule analytique pour générer les conditions aux limites. Supposons que  $C(t, S_1, S_2)$  soit donné dans (1.4), alors les conditions aux limites éloignées sont :

$$u(t, S_{1,\infty}, S_2) = C(t, S_{1,\infty}, S_2) \tag{2.12}$$

$$u(t, S_1, S_{2,\infty}) = C(t, S_1, S_{2,\infty}) \tag{2.13}$$

### 2.7.3 Conditions aux limites du rendement

Les fonctions de rendement sont également des approximations raisonnablement précises pour les conditions aux limites éloignées. Elles sont données par :

$$u(t, S_{1,\infty}, S_2) = \max(S_{1,\infty} - S_2, 0) \quad (2.14)$$

$$u(t, S_{1,\max}, S_2) = \max(S_1 - S_{2,\infty}, 0) \quad (2.15)$$

Cependant, les conditions aux limites du rendement ne sont pas si précises lorsque  $S_1$  et  $S_2$  atteignent tous deux la limite éloignée.

### 2.7.4 Conditions aux limites de l'équation aux dérivées partielles

Il est naturel de supposer que les points sur la limite éloignée satisfont l'équation de Black-Scholes. Par conséquent, nous considérons d'utiliser l'EDP :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S_1^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 u}{\partial S_1 \partial S_2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S_2^2} + rS_1 \frac{\partial u}{\partial S_1} + rS_2 \frac{\partial u}{\partial S_2} - ru = 0 \quad (2.16)$$

comme condition aux limites éloignées.

Nous notons que les conditions aux limites de Margrabe sont les conditions naturelles à considérer pour les options d'échange. Cependant, nous considérons également les conditions aux limites du rendement et de l'EDP à des fins de test, car elles sont utiles lorsqu'il n'y a pas de formule analytique disponible pour le prix des options.

### 2.7.5 Option Spread

L'option spread est une option à deux actifs basée sur la différence entre les prix de deux entités sous-jacentes. Elle est largement utilisée sur les marchés des devises, les marchés de l'énergie, etc.

Sur les marchés des devises, les options spread sont courantes dans le domaine des changes. L'option spread est souvent observée dans l'échange de devises entre les monnaies de deux pays dont les économies sont étroitement liées. Un exemple typique d'option spread

est l'option de change croisé qui implique l'échange de deux devises contre une devise de base. Dans une option de change croisé,  $S_1$  et  $S_2$  sont les taux de change de deux devises étrangères mesurées dans une devise de base.

Sur le marché de l'énergie, les options spread sont souvent utilisées pour se couvrir contre les fluctuations des marges de prix dans l'industrie de raffinage des produits énergétiques. Les options spread les plus fréquemment mentionnées sont les options Crack Spread et Spark Spread. L'option Crack Spread permet l'achat ou la vente simultanée de pétrole brut contre la vente ou l'achat, respectivement, du produit pétrolier raffiné. C'est une assurance en cas de variation brutale du prix du pétrole brut ou des produits pétroliers raffinés. L'option Spark Spread peut être observée sur le marché de l'électricité. Dans cette option spread, un actif sous-jacent est le prix de l'électricité, tandis qu'un autre actif sous-jacent est le prix du gaz naturel utilisé pour générer l'électricité. Cette option peut donc être vue comme un proxy pour le coût de conversion du gaz en électricité.

Le rendement de l'option spread est

$$\max(S_1 - S_2 - K, 0) \quad \text{pour une option d'achat spread} \quad (2.17)$$

$$\max(K - (S_1 - S_2), 0) \quad \text{pour une option de vente spread} \quad (2.18)$$

où  $K$  est le prix d'exercice.

### 2.7.5.1 Approximations Analytiques

Pour les options spread, il n'existe pas de formules analytiques donnant les prix. Cependant, de nombreuses approximations analytiques ont été proposées. Nous présentons ici quelques approximations célèbres sous forme fermée.

**2.7.5.1.1 Formule de Kirk** En 1995, Kirk [17] a proposé une approximation sous forme fermée pour le prix d'une option d'achat spread. Elle se lit comme suit :

$$C(t, S_1, S_2) \approx S_1 \Phi(d_1) - (S_2 + Ke^{-r(T-t)}) \Phi(d_2) \quad (2.19)$$



où

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \left( \frac{S_2}{S_2 + K} \right)^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 \frac{S_2}{S_2 + K}}$$

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S_1}{S_2 + K}\right) + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = \frac{\log\left(\frac{S_1}{S_2 + K}\right) - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

• Approximation de Li, Deng et Zhou En 2008, Li, Deng et Zhou [21] ont proposé une autre approximation analytique pour le prix d'une option d'achat spread. Ils ont suggéré que sous l'hypothèse de normalité jointe, le prix de l'option d'achat spread est donné par

$$C(t, S_1, S_2) \approx e^{v_1^2/2 + \hat{\mu}_1 - r(T-t)} I_1 - e^{v_2^2/2 + \hat{\mu}_2 - r(T-t)} I_2 - Ke^{-r(T-t)} I_3. \quad (2.20)$$

Pour  $i = 1, 2, 3$ , les intégrales  $I_i$  sont approximées au second ordre en  $\varepsilon$  comme suit

$$I_i \approx J_0(C_i, D_i) + J_1(C_i, D_i)\varepsilon + \frac{1}{2}J_2(C_i, D_i)\varepsilon^2 \quad (2.21)$$

où les fonctions  $J_i$  sont définies comme

$$J_0(u, v) = \Phi\left(\frac{u}{\sqrt{1+v^2}}\right) \quad (2.22)$$

$$J_1(u, v) = \frac{1 + (1+u^2)v^2}{(1+v^2)^{5/2}} N\left(\frac{u}{\sqrt{1+v^2}}\right) \quad (2.23)$$

$$J_2(u, v) = \frac{(6 - 6u^2)v^2 + (21 - 2u^2 - u^4)v^4 + 4(3 + u^2)v^6 - 3}{(1+v^2)^{11/2}} u \cdot N\left(\frac{u}{\sqrt{1+v^2}}\right). \quad (2.24)$$

où  $C_i, D_i$  et  $\varepsilon$  sont donnés par :

$$C_1 = C_3 + D_3\rho v_1 + \varepsilon\rho^2\sigma^2 + \sqrt{1-\rho^2}v_1$$

$$D_1 = D_3 + 2\rho v_1\varepsilon$$

$$C_2 = C_3 + D_3v_2 + \varepsilon v_2^2$$

$$D_2 = D_3 + 2v_2\varepsilon$$

$$C_3 = \frac{1}{v_1\sqrt{1-\rho^2}} \left( \mu_1 - \log(R+K) + \frac{v_2R}{R+K}\gamma_0 - \frac{1}{2} \frac{v_2^2RK}{(R+K)^2}\gamma_0^2 \right)$$

$$D_3 = \frac{1}{v_1\sqrt{1-\rho^2}} \left( \rho v_1 - \frac{v_2R}{R+K} + \frac{v_2^2RK}{(R+K)^2}\gamma_0 \right)$$

$$\varepsilon = -\frac{1}{2v_1\sqrt{1-\rho^2}} \frac{v_2^2RK}{(R+K)^2}$$

$$R = e^{v^2\gamma_0 + \eta_2}$$

$$\mu_i = \log S_i + \left( r - \frac{\sigma_i^2}{2} \right) (T-t), \quad i = 1, 2$$

$$v_i = \sigma_i\sqrt{T-t}, \quad i = 1, 2$$

Dans cette formule,  $N(x)$  est la fonction de densité de probabilité (PDF) de la distribution normale standard et  $\Phi(x)$  est la fonction de distribution cumulative CDF de la distribution normale standard. Le paramètre  $\gamma_0$  est un nombre réel proche de zéro et généralement nous posons  $\gamma_0 = 0$ .

## Conditions aux limites

Pour les options spread, nous considérons les conditions aux limites suivantes.

### Conditions aux limites du rendement

Les fonctions de rendement actualisées dans le temps sont des approximations raisonnables des valeurs aux limites des options spread.

Les conditions aux limites du rendement actualisé pour une option d'achat spread sont :

$$u(t, 0, S_2) = \max(-Ke^{-r(T-t)} - S_2, 0) = 0, \quad (2.25)$$

$$u(t, S_1, 0) = \max(S_1 - Ke^{-r(T-t)}, 0), \quad (2.26)$$

$$u(t, S_{1,\infty}, S_2) = \max(S_{1,\infty} - S_2 - Ke^{-r(T-t)}, 0), \quad (2.27)$$

$$u(t, S_1, S_{2,\infty}) = \max(S_1 - S_{2,\infty} - Ke^{-r(T-t)}, 0), \quad (2.28)$$

Les conditions aux limites actualisées dans le temps pour une option de vente spread sont :

$$u(t, 0, S_2) = \max(Ke^{-r(T-t)} + S_2, 0), \quad (2.29)$$

$$u(t, S_1, 0) = \max(Ke^{-r(T-t)} - S_1, 0), \quad (2.30)$$

$$u(t, S_{1,\infty}, S_2) = \max(Ke^{-r(T-t)}(S_{1,\infty} - S_2), 0), \quad (2.31)$$

$$u(t, S_1, S_{2,\infty}) = \max(Ke^{-r(T-t)}(S_1 - S_{2,\infty}), 0), \quad (2.32)$$

## Conditions aux limites alternatives

En examinant de plus près les équations (2.28) et (2.29), nous constatons qu'elles correspondent exactement à la fonction de paiement pour les options européennes écrites sur un seul actif sous-jacent. Par conséquent, la solution de l'équation de Black-Scholes à un seul actif peut être une condition aux limites plus précise pour  $u(t, S_1, 0)$ . Pour une option d'achat spread, lorsque  $S_2 = 0$ , nous prenons la valeur de la solution sous forme fermée de l'équation de Black-Scholes pour une option d'achat pour  $S_1$  avec un prix d'exercice  $K$ . Pour une option de vente spread, lorsque  $S_1 = 0$ , nous prenons la valeur de la solution sous forme fermée de l'équation de Black-Scholes pour une option de vente pour  $S_2$  avec un prix d'exercice  $K$ .

## Option Panier

Une option panier donne au détenteur la possibilité d'acheter ou de vendre un groupe d'actifs sous-jacents en même temps. La fonction de paiement de l'option panier dépend

de la somme pondérée des actifs sous-jacents et est donnée par :

$$\max \left( \sum_{i=1}^2 w_i S_i - K, 0 \right) \text{ pour une option d'achat panier} \quad (2.33)$$

$$\max \left( K - \sum_{i=1}^n w_i S_i, 0 \right) \text{ pour une option de vente panier} \quad (2.34)$$

où  $w_i$  est le poids du  $i$ -ème actif dans le contrat d'option panier. Bien qu'il ne soit pas nécessaire, nous préférons fixer la somme des poids à un, c'est-à-dire  $\sum_{i=1}^2 w_i = 1$ .

### Conditions aux limites

Pour les options panier, nous considérons les conditions aux limites suivantes.

**2.7.5.1.2 Conditions aux limites du rendement** Les fonctions de rendement actualisées dans le temps sont des approximations raisonnablement précises des valeurs aux limites de l'option panier.

### 2.7.6 Conditions aux limites des options panier

Les conditions aux limites actualisées dans le temps pour les options d'achat panier sont :

$$u(t, 0, S_2) = \max(w_2 S_2 - K e^{-r(T-t)}, 0) \quad (2.35)$$

$$u(t, S_1, 0) = \max(w_1 S_1 - K e^{-r(T-t)}, 0) \quad (2.36)$$

$$u(t, S_{1,\infty}, S_2) = \max(w_1 S_{1,\infty} + w_2 S_2 - K e^{-r(T-t)}, 0) \quad (2.37)$$

$$u(t, S_1, S_{2,\infty}) = \max(w_1 S_1 + w_2 S_{2,\infty} - K e^{-r(T-t)}, 0) \quad (2.38)$$

Les conditions aux limites actualisées dans le temps pour les options de vente panier

sont :

$$u(t, 0, S_2) = \max(K e^{-r(T-t)} - w_2 S_2, 0) \quad (2.39)$$

$$u(t, S_1, 0) = \max(K e^{-r(T-t)} - w_1 S_1, 0) \quad (2.40)$$

$$u(t, S_1, S_2) = \max(K e^{-r(T-t)} - (w_1 S_1 + w_2 S_2), 0) \quad (2.41)$$

$$u(t, S_1, S_2) = \max(K e^{-r(T-t)} - (w_1 S_1 + w_2 S_2), 0) \quad (2.42)$$

Comme on peut le voir, les équations (2.28) et (2.29) peuvent être vues comme les fonctions de paiement des options d'achat européennes classiques sur un actif sous-jacent unique. Par conséquent, lorsque  $S_1 = 0$ , nous pouvons utiliser la solution de l'équation de Black-Scholes de l'option d'achat avec l'actif  $w_2 S_2$  et le prix d'exercice  $K$  comme condition aux limites. Lorsque  $S_2 = 0$ , nous pouvons utiliser la solution de l'équation de Black-Scholes de l'option d'achat avec l'actif  $w_1 S_1$  et le prix d'exercice  $K$  comme condition aux limites.

Avec la même idée, les équations (2.38) et (2.39) peuvent être vues comme les fonctions de paiement des options de vente européennes classiques sur un actif sous-jacent unique. Par conséquent, lorsque  $S_1 = 0$ , nous pouvons utiliser la solution de l'équation de Black-Scholes de l'option de vente avec l'actif  $w_2 S_2$  et le prix d'exercice  $K$  comme condition aux limites. Lorsque  $S_2 = 0$ , nous pouvons utiliser la solution de l'équation de Black-Scholes de l'option de vente avec l'actif  $w_1 S_1$  et le prix d'exercice  $K$  comme condition aux limites.

### 2.7.7 Option Rainbow

L'option rainbow est également une option multi-actifs. Il existe différentes formes d'options rainbow sur le marché. Cependant, l'idée commune des options rainbow est d'avoir un paiement qui dépend des actifs classés par leur performance à l'échéance. Voici quelques exemples typiques d'options rainbow :

Nom	Pay-off
Option Rainbow Multi-strike	$\max\{S_1 - K_1, S_2 - K_2, 0\}$
Option Rainbow Pyramid	$\max\{ S_1 - K_1  +  S_2 - K_2  - K, 0\}$
Option Max	$\max\{S_1, S_2\}$
Option d'achat max Rainbow	$\max\{\max\{S_1, S_2\} - K, 0\}$

TABLE 2.1 – Options Rainbow

## Conclusion

Cette étude a exploré divers aspects des marchés financiers, en se concentrant sur les actifs financiers et les produits dérivés, notamment les options et leurs spécificités, comme les options d'achat. Le modèle de Black-Scholes et ses extensions, y compris l'apport de Merton et les équations différentielles stochastiques, ont été examinés pour leur pertinence dans la valorisation des options. Les "Greeks" ont été discutés pour leur rôle dans la gestion des risques, ainsi que les options exotiques et les solutions analytiques pour les options à deux actifs. L'analyse des équations de Black-Scholes bidimensionnelles et des exemples pratiques a souligné l'importance de ces outils dans la compréhension et la modélisation des marchés financiers complexes.

---

# Expériences Numériques

---

## 3.1 Introduction

Ce chapitre présente l'application de la méthode de Crank-Nicolson pour le pricing d'une option d'échange sur deux actifs. Nous explorons l'implémentation numérique de cette méthode, en nous concentrant particulièrement sur le calcul des Grecques (Delta et Gamma). L'objectif est d'évaluer l'efficacité et la précision de différentes approches de discrétisation - progressive, régressive et centrée - dans le contexte de ce problème financier complexe. À travers une série d'expériences numériques, nous analysons la convergence et la stabilité de ces méthodes, offrant ainsi des insights pratiques pour leur application dans des environnements de trading réels.

Rappelons que  $N$  et  $M$  sont le nombre de sous-intervalles dans les dimensions  $S_1$  et  $S_2$ , respectivement.  $N$  et  $M$  sont les mêmes,

Les Grecs sont des paramètres très importants dans les options d'échange, il y a deux actifs associés  $S_1$  et  $S_2$ . Par conséquent, nous définissons

$$\Delta_{S_1} = \frac{\partial u}{\partial S_1}, \quad \Delta_{S_2} = \frac{\partial u}{\partial S_2}, \quad \Gamma_{S_1} = \frac{\partial^2 u}{\partial S_1^2}, \quad \Gamma_{S_2} = \frac{\partial^2 u}{\partial S_2^2}.$$

Les valeurs des Grecs sont approximées avec des approximations de différences centrées.

Dans les méthodes de discrétisation des EDP, le taux de convergence est une propriété très importante. Nous devons vérifier si le taux de convergence observé numériquement concorde avec celui théorique. Pour calculer l'ordre de convergence observé numériquement

dans les cas où une solution analytique exacte est disponible (par exemple, le cas des options d'échange européennes), nous effectuons des expériences avec au moins deux nombres de sous-intervalles  $n$  et  $m$  et calculons les erreurs respectives  $e_1$  et  $e_2$  comme normes infinies des erreurs de tous les points dans une certaine zone. Le taux de convergence est alors approximé par

$$\text{Taux de convergence} = \frac{\log(e_2/e_1)}{\log(n/m)}.$$

## 3.2 Équation aux dérivées partielles de Black-Scholes à deux actifs

Rappelons que l'équation aux dérivées partielles (EDP) de Black-Scholes à deux actifs est donnée par

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S_2^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 u}{\partial S_1 \partial S_2} + rS_1 \frac{\partial u}{\partial S_1} + rS_2 \frac{\partial u}{\partial S_2} - ru = 0 \quad (3.1)$$

où  $t \in [0, T]$ .

Pour faciliter l'application des méthodes numériques pour les EDP, nous appliquons une transformation de variable  $\tau = T - t$  dans la dimension temporelle. La variable  $\tau$  peut être vue comme le temps inversé, c'est-à-dire le temps restant jusqu'à l'échéance. En appliquant cette transformation, nous changeons la variable de temps de  $t$  à  $\tau$ , où  $\tau = T - t$ . Cela implique que  $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial \tau}$ . Ainsi, l'équation de Black-Scholes devient

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S_2^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 u}{\partial S_1 \partial S_2} + rS_1 \frac{\partial u}{\partial S_1} + rS_2 \frac{\partial u}{\partial S_2} - ru \quad (3.2)$$

où  $\tau \in [0, T]$ . La condition finale de (3.1) devient la condition initiale de (3.2).

Définissons l'opérateur de Black-Scholes à deux actifs

$$L \equiv \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2}{\partial S_2^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2}{\partial S_1 \partial S_2} + rS_1 \frac{\partial}{\partial S_1} + rS_2 \frac{\partial}{\partial S_2} - r \quad (3.3)$$



et l'EDP de Black-Scholes à deux actifs devient

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = Lu \quad (3.4)$$

Dans ce travail, nous utiliserons soit (3.2) soit (3.4) comme équation de Black-Scholes avec une fonction de paiement comme condition initiale.

### 3.3 Discrétisation

Tout d'abord, nous devons discrétiser l'EDP (3.2) ou (3.4). Lors de la résolution numérique des EDP paraboliques telles que l'EDP de Black-Scholes en utilisant les méthodes des différences finies (FDM), la dimension spatiale et la dimension temporelle sont traitées différemment.

#### 3.3.1 Discrétisation de l'espace

Le domaine spatial pour l'EDP de Black-Scholes est semi-infini,  $[0, \infty) \times [0, \infty)$ . Cependant, à des fins de calcul, nous tronquons le domaine à  $[0, S_{1,\infty}] \times [0, S_{2,\infty}]$ , pour des  $S_{1,\infty}$  et  $S_{2,\infty}$  suffisamment grands.

Bien que notre domaine spatial ici consiste en deux dimensions représentant les deux prix des actifs  $S_1$  et  $S_2$ , nous commençons l'introduction de la méthode de discrétisation sur un domaine spatial unidimensionnel.

#### 3.3.2 Discrétisation uniforme de l'espace

Supposons que le domaine  $[a, b]$  soit divisé en  $N$  sous-intervalles de longueur égale. La taille de la maille est  $h = \frac{b-a}{N}$  et les points de la grille sont  $S_i = ih + a$ , où  $i = 0, 1, 2, \dots, N$ . Supposons que la valeur de la fonction  $u(S_i)$  soit notée  $u_i$ .

Une approximation par différences finies de la dérivée seconde en  $S_i$  est donnée par

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial S^2} = \frac{1}{h^2} u_{i-1} - \frac{2}{h^2} u_i + \frac{1}{h^2} u_{i+1} + O(h^2), \quad (3.5)$$

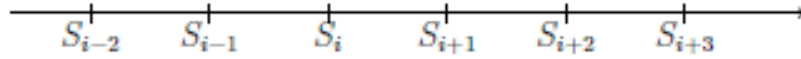


FIGURE 3.1 – Une grille uniforme.

et est appelée approximation centrée de la dérivée seconde, tandis que quelques approximations par différences finies de la dérivée première en  $S_i$  sont

$$\frac{\partial u_i}{\partial S} = -\frac{1}{2h}u_{i-1} + \frac{1}{2h}u_{i+1} + O(h^2) \quad (\text{différence centrée}), \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial S} = -\frac{1}{h}u_i + \frac{1}{h}u_{i+1} + O(h) \quad (\text{différence avant}), \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial S} = -\frac{1}{h}u_{i-1} + \frac{1}{h}u_i + O(h) \quad (\text{différence arrière}). \quad (3.8)$$

Ici, les termes  $O(h^k)$  sont les erreurs de troncature. La notation  $O(h^k)$  signifie  $O(h^k) = a_1h^k + a_2h^{k+1} + \dots \leq (a_1 + a_2 + \dots)h^k$  car  $h$  est toujours petit lorsque  $N \rightarrow \infty$ . Dans les approximations par différences finies (3.5) et (3.6), les termes principaux des erreurs de troncature sont proportionnels à  $h^2$ . On dit alors que les approximations ont une précision d'ordre deux. En même temps, les approximations par différences finies dans les équations (3.7) et (3.8) ont une précision d'ordre un. Dans la plupart des cas, plus l'ordre de l'approximation est élevé, plus elle est précise sous le même raffinement de maille. Par conséquent, pour l'approximation de  $\frac{\partial u_i}{\partial S}$ , nous choisissons la différence centrée.

D'après (3.5), le vecteur des valeurs des dérivées secondes  $\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}$  aux points de la grille  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, N-1$ , donne lieu à  $T_2 \hat{u} + b_2$  où

$$T_2 = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \hat{u} = \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_{N-2} \\ \hat{u}_{N-1} \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} \hat{u}_0/h^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hat{u}_N/h^2 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

où  $\hat{u}_i \approx u(S_i)$ .

D'après (3.6), le vecteur des valeurs de la dérivée première  $\frac{\partial u}{\partial S}$  aux points de la grille  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, N - 1$ , donne lieu à  $T_1 \hat{u} + b_1$  où

$$T_1 = \frac{1}{2h} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & 0 & 1 \\ & & & & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{u} = \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_{N-2} \\ \hat{u}_{N-1} \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} -\hat{u}_0/2h \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hat{u}_N/2h \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Les matrices de discrétisation  $T_1$  et  $T_2$  sont tridiagonales.

### 3.3.3 Discrétisation non uniforme de l'espace

Il n'est pas toujours nécessaire que les points de la grille soient également espacés. En pratique, différents problèmes peuvent nécessiter différentes discrétisations spatiales en fonction principalement de la forme des solutions. Dans le problème de tarification des options, nous préférons utiliser une discrétisation spatiale non uniforme. Voici quelques raisons pour lesquelles nous préférons une discrétisation non uniforme dans l'espace pour le problème de tarification des options :

- Les conditions initiales (fonctions de paiement) ne sont pas des fonctions lisses. Les erreurs autour des points de non-lissité sont supposées être plus grandes. Par conséquent, nous avons besoin de plus de points de grille dans ces zones pour augmenter la précision.
- Dans certaines parties du domaine, la solution est proche d'une fonction linéaire. Par conséquent, des points de grille plus espacés maintiendront toujours une bonne approximation dans ces zones.
- Toutes les parties du domaine ne sont pas également intéressantes pour nous. Par exemple, si les prix des actions maintenant (prix au comptant) sont  $S_1 = 100$  et  $S_2 = 100$ , il est très peu probable que les prix atteignent  $S_1 = 800$  et  $S_2 = 800$  sur le marché boursier dans un avenir proche. Par conséquent, dans la tarification des options, nous nous intéressons davantage à une zone particulière des prix des actifs

proches des prix au comptant. Nous appelons cette zone la zone de repérage. Nous plaçons plus de points de grille dans cette zone.

Supposons que le domaine  $[a, b]$  soit divisé en  $N$  sous-intervalles, pas nécessairement de longueur égale. Les points de la grille sont  $S_i$ , où  $i = 0, 1, 2, \dots, N$ , avec  $S_0 = a$  et  $S_N = b$ , et les tailles de mailles sont  $h_i = S_i - S_{i-1}$  où  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Alors l'approximation centrée de la dérivée seconde par rapport à  $S$  est donnée par

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial S^2} = \frac{2}{h_i(h_i + h_{i+1})} u_{i-1} - \frac{2}{h_i h_{i+1}} u_i + \frac{2}{(h_i + h_{i+1})h_{i+1}} u_{i+1} + O(h_i - h_{i+1}) + O(\max(h_i^2, h_{i+1}^2)). \quad (3.11)$$

D'après (3.11), nous remarquons que l'approximation peut ne pas maintenir la précision d'ordre deux en raison du terme  $O(h_i - h_{i+1})$ . Cependant, si notre discrétisation non uniforme est générée à partir d'une fonction de mappage lisse, il peut être prouvé que  $O(h_i - h_{i+1}) \approx O(h^2)$  où  $h$  est la taille de la maille de la discrétisation uniforme. Plus précisément, supposons que  $x_i = a + ih$ ,  $i = 0, \dots, N$ , et  $h = \frac{b-a}{N}$ . Soit  $w(x)$  une fonction strictement croissante et suffisamment lisse avec  $w(a) = a$  et  $w(b) = b$ . Soit  $S_i = w(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, N$ . Alors,

$$\begin{aligned} h_i - h_{i+1} &= 2S_i - S_{i-1} - S_{i+1} \\ &= 2w(x_i) - w(x_i - h) - w(x_i + h) \\ &= 2w(x_i) - (w(x_i) - hw'(x_i) + \frac{h^2}{2}w''(x_i) + O(h^3)) \\ &\quad - (w(x_i) + hw'(x_i) + \frac{h^2}{2}w''(x_i) + O(h^3)) \\ &= -h^2w''(x_i) - O(h^3) \\ &= O(h^2). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Par conséquent, le terme d'erreur de troncature de (3.11) a toujours un ordre de convergence d'ordre deux si une fonction de mappage lisse est utilisée pour générer les points de grille non uniformes.

L'approximation centrée de la dérivée première par rapport à  $S$  est donnée par

$$\frac{\partial u_i}{\partial S} = \frac{-h_{i+1}}{h_i(h_i + h_{i+1})} u_{i-1} + \frac{h_{i+1} - h_i}{h_i h_{i+1}} u_i + \frac{h_i}{(h_i + h_{i+1})h_{i+1}} u_{i+1} + O(h_i h_{i+1}), \quad (3.13)$$

et est d'ordre deux.

### 3.4 Mappages Non-Uniformes

Des mappages lisses des points de grille uniformes à des points de grille non uniformes sont utilisés pour générer la discrétisation non uniforme nécessaire. Dans cette section, deux mappages non uniformes, principalement utilisés dans les problèmes de tarification d'options, sont introduits.

Supposons que  $a = 0$ . Ainsi, le domaine est  $[0, b]$ . Le premier mappage est donné par

$$S_i = w(x_i) = \frac{(1 + \eta)^{x_i/x_N} - 1}{\eta} b. \quad (3.14)$$

Ce mappage produit des points de grille plus denses vers zéro. Un paramètre  $\eta$  plus grand augmente la densité des points vers zéro.

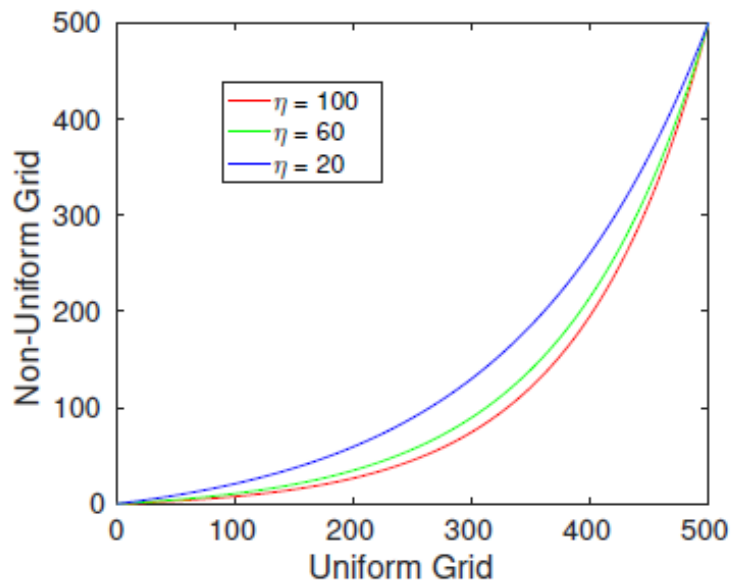


FIGURE 3.2 – Tracé des points de grille non uniformes générés par (3.14) par rapport aux points de grille uniformes.

## Deuxième Mappage

Le deuxième mappage est donné par

$$S_i = w(x_i) = \left(1 + \frac{\sinh(\beta(x_i/x_N - \alpha))}{\sinh(\beta\alpha)}\right) E. \quad (3.15)$$

Ce mappage produit des points de grille plus denses autour de  $E$ . Un paramètre  $\beta$  plus grand augmente la densité des points. Le but du paramètre  $\alpha$  est d'assurer que le dernier point de grille est  $b$ .

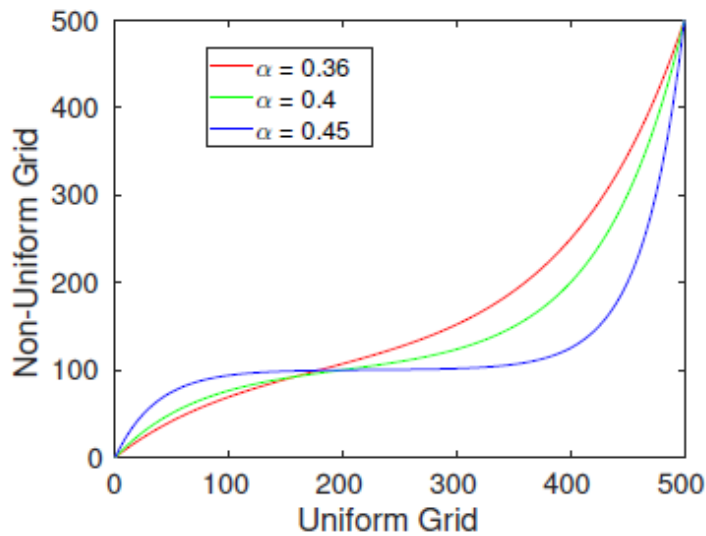


FIGURE 3.3 – Tracé des points de grille non uniformes générés par (3.15) avec  $E = 100$  par rapport aux points de grille uniformes.

## Discrétisation Spatiale de $Lu$

Nous pouvons maintenant commencer à dériver la discrétisation pour  $Lu$ . Supposons que la partition non uniforme du domaine de prix du premier actif  $[0, S_{1,\infty}]$  soit  $0 = S_{1,0} < S_{1,1} < \dots < S_{1,N} = S_{1,\infty}$  et que la partition non uniforme du domaine de prix du deuxième actif  $[0, S_{2,\infty}]$  soit  $0 = S_{2,0} < S_{2,1} < \dots < S_{2,M} = S_{2,\infty}$ .

Soit  $h_{1,i} = S_{1,i+1} - S_{1,i}$  où  $i = 1, 2, \dots, N_1$  et  $h_{2,i} = S_{2,i+1} - S_{2,i}$  où  $i = 1, 2, \dots, N_2$ . Supposons que des conditions de Dirichlet soient utilisées.

Soit  $T_{2,S_1}$  la matrice de discrétisation de  $\frac{\partial^2}{\partial S_1^2}$  dans la dimension de  $S_1$ ,  $T_{1,S_1}$  la matrice de discrétisation de  $\frac{\partial}{\partial S_1}$  dans la dimension de  $S_1$ , et  $I_{S_1}$  la matrice de discrétisation représentant l'opérateur identité dans la dimension de  $S_1$ . Soit  $T_{2,S_2}$  la matrice de discrétisation de  $\frac{\partial^2}{\partial S_2^2}$  dans la dimension de  $S_2$ ,  $T_{1,S_2}$  la matrice de discrétisation de  $\frac{\partial}{\partial S_2}$  dans la dimension de  $S_2$ , et  $I_{S_2}$  la matrice de discrétisation représentant l'opérateur identité dans la dimension de  $S_2$ .

La matrice  $I_{S_1}$  est une matrice identité d'ordre  $(N - 1)$ , tandis que  $I_{S_2}$  est une matrice identité d'ordre  $(M - 1)$ . Les matrices  $T_{2,S_1}$  et  $T_{1,S_1}$  sont des matrices tridiagonales de taille  $(N_1 - 1) \times (N - 1)$ , tandis que les matrices  $T_{2,S_2}$  et  $T_{1,S_2}$  sont des matrices tridiagonales de taille  $(M - 1) \times (M - 1)$ . La matrice de discrétisation en dimension supérieure peut être obtenue par le produit tensoriel des matrices de discrétisation des dimensions inférieures.

**Définition.** Le produit tensoriel  $A \otimes B$  de deux matrices  $A$  et  $B$  est aussi appelé produit de Kronecker de deux matrices. Si  $A$  est une matrice  $m \times n$  et  $B$  est une matrice  $p \times q$ , alors le produit de Kronecker  $A \otimes B$  est la matrice bloc  $mp \times nq$  définie par :

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

La matrice de discrétisation  $A$  de l'opérateur de Black-Scholes à deux actifs  $L$  peut être écrite comme  $A = C_{2,0}A_{2,0} + C_{0,2}A_{0,2} + C_{1,1}A_{1,1} + C_{1,0}A_{1,0} + C_{0,1}A_{0,1} + C_{0,0}A_{0,0}$ , où

$$A_{2,0} = T_{2,S_1} \otimes I_{S_2}, \quad (3.17)$$

$$A_{0,2} = I_{S_1} \otimes T_{2,S_2}, \quad (3.18)$$

$$A_{1,1} = T_{1,S_1} \otimes T_{1,S_2}, \quad (3.19)$$

$$A_{1,0} = T_{1,S_1} \otimes I_{S_2}, \quad (3.20)$$

$$A_{0,1} = I_{S_1} \otimes T_{1,S_2}, \quad (3.21)$$

$$A_{0,0} = I_{S_1} \otimes I_{S_2}. \quad (3.22)$$

Les matrices de coefficients  $C_{*,*}$  sont définies plus loin. Les produits tensoriels nous donnent également l'ordre des points de grille. Supposons que  $\hat{u}$  soit le vecteur solution

approchée des points de grille ordonnés. Alors, le point de grille  $(S_{1,i}, S_{2,j})$  est le  $k = ((i-1)(M-1) + j)$ -ième point de grille. Donc,  $\hat{u}_k \approx u(S_{1,i}, S_{2,j})$ . Les matrices de coefficients  $C_{*,*}$  sont toutes des matrices diagonales, où

$$C_{2,0} = \frac{\sigma_1^2}{2} \text{diag}\{S_{1,1}^2, S_{1,2}^2, \dots, S_{1,N-1}^2\} \otimes I_{S_2}, \quad (3.23)$$

$$C_{0,2} = \frac{\sigma_2^2}{2} I_{S_1} \otimes \text{diag}\{(S_{2,1}^2, S_{2,2}^2, \dots, S_{2,M-1}^2)\}, \quad (3.24)$$

$$C_{1,1} = \rho\sigma_1\sigma_2 \text{diag}\{S_{1,1}, S_{1,2}, \dots, S_{1,N-1}\} \otimes \text{diag}\{S_{2,1}, S_{2,2}, \dots, S_{2,M-1}\}, \quad (3.25)$$

$$C_{1,0} = r \text{diag}\{S_{1,1}, S_{1,2}, \dots, S_{1,N-1}\} \otimes I_{S_2}, \quad (3.26)$$

$$C_{0,1} = r I_{S_1} \otimes \text{diag}\{(S_{2,1}, S_{2,2}, \dots, S_{2,M-1})\}, \quad (3.27)$$

$$C_{0,0} = -r I_{S_1} \otimes I_{S_2}. \quad (3.28)$$

La matrice  $A$  résultante est une matrice tridiagonale par blocs de taille  $(N-1)(M-1) \times (N-1)(M-1)$ . Notez également que  $A_{0,0} = I$ , où  $I$  est une matrice identité d'ordre  $(N-1)(M-1)$ .

### 3.4.1 Discrétisation Temporelle

Après avoir appliqué la discrétisation spatiale, nous avons transformé l'équation  $\frac{\partial u}{\partial \tau} = Lu$  en un système d'équations différentielles ordinaires (EDOs) avec  $(N-1)(M-1)$  inconnues  $\hat{u}(\tau, S_{1,i}, S_{2,j})$ ,  $i = 1, \dots, N-1$  et  $j = 1, \dots, M-1$ . Notre système d'EDOs est

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \tau} = A\hat{u} + b \quad (3.29)$$

où  $\hat{u}$  est le vecteur solution approchée des composantes  $\hat{u}(\tau, S_{1,i}, S_{2,j})$  avec l'ordre expliqué précédemment et  $b$  est le vecteur qui combine les conditions aux limites et la fonction source. Cependant, dans l'équation de Black-Scholes, la fonction source dans le membre de droite de l'équation est nulle, donc le vecteur  $b$  contient uniquement les contributions des conditions aux limites.

Pour résoudre numériquement l'équation (3.29), supposons d'abord que  $\tau^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N_t$  soit une discrétisation de la dimension temporelle  $[0, T]$  avec  $0 = \tau^0 < \tau^1 < \dots < \tau^{N_t} = T$



et le pas de temps  $\Delta\tau^k = \tau^k - \tau^{k-1}$  où  $k = 1, \dots, N_t$ . Notez que ces points temporels peuvent ne pas être équidistants. Nous notons par  $\hat{u}^k$  le vecteur solution numérique des composantes  $\hat{u}(\tau^k, S_{1,i}, S_{2,j})$ , et par  $b^k$  le vecteur contenant les contributions des conditions aux limites au temps  $\tau^k$ .

Le schéma d'avancement en temps de  $\tau_{k-1}$  à  $\tau_k$  peut s'écrire comme

$$\frac{\hat{u}^k - \hat{u}^{k-1}}{\Delta\tau^k} = \theta A \hat{u}^k + \theta b^k + (1 - \theta) A \hat{u}^{k-1} + (1 - \theta) b^{k-1} \quad (3.30)$$

$$\implies (I - \theta \Delta\tau^k A) \hat{u}^k = (I + (1 - \theta) \Delta\tau^k A) \hat{u}^{k-1} + \Delta\tau^k (\theta b^k + (1 - \theta) b^{k-1}). \quad (3.31)$$

Dans les équations (3.30) et (3.31), le paramètre  $\theta \in [0, 1]$  peut prendre les valeurs suivantes, donnant lieu aux schémas respectifs :

- $\theta = 0$ , le schéma d'Euler avant (entièrement explicite),
- $\theta = 1$ , le schéma d'Euler arrière (entièrement implicite),
- $\theta = \frac{1}{2}$ , le schéma de Crank-Nicolson (CN).

Il est bien connu que le schéma CN a une précision du second ordre dans la dimension temporelle tandis que les schémas d'Euler avant et d'Euler arrière ont une précision du premier ordre. Par conséquent, nous utilisons principalement le schéma CN. Cependant, nous remarquons que la condition initiale de l'équation de Black-Scholes n'est pas une fonction lisse, ce qui peut produire des oscillations parasites autour des discontinuités. Étant donné que le schéma entièrement implicite a une propriété de stabilité plus forte, afin d'aider le schéma CN à maintenir une bonne stabilité, la technique de lissage de Rannacher [29] est suggérée. Le lissage de Rannacher utilise le schéma de temps entièrement implicite dans les premiers pas de temps avec une taille de pas plus petite, puis revient au schéma CN. Dans les expériences, nous constatons que cela aide à lisser la discontinuité des premières dérivées du pay-off.

## 3.5 Option d'Échange Européenne

Dans cette section, nous testons l'efficacité de différentes discrétisations non uniformes du domaine spatial . Pour les options d'échange européennes, nous pouvons utiliser la solution analytique, donnée par la formule de Margrabe [23], pour calculer la norme infinie des erreurs de prix dans la zone de repérage et les taux de convergence associés pour nos méthodes numériques. Les erreurs des Grecs dans la zone de repérage sont calculées en différentiant la formule de Margrabe.

### 3.5.1 Différentes Discrétisations de l'Espace

Dans notre méthode numérique, il est mentionné que la discrétisation uniforme de l'espace peut ne pas être un bon choix pour les EDP de type Black-Scholes principalement en raison de la discontinuité de la condition initiale. Nous avons également introduit deux mappings non uniformes pour générer des discrétisations non uniformes de l'espace. Par conséquent, nous devons tester la performance de ces trois différentes discrétisations de l'espace et les réglages de paramètres appropriés dans nos fonctions de mapping non uniformes. Dans ces expériences, pour tester différentes discrétisations de l'espace, nous utilisons comme base les paramètres montrés dans le Tableau 3.1. Pour les conditions aux limites, la formule de Margrabe est utilisée pour générer les valeurs aux limites.

Paramètres	Valeur
Domaine de $S_1$	$[0, 500]$
Domaine de $S_2$	$[0, 500]$
Prix au comptant	$S_1 = S_2 = 60$
Zone de repérage	$[30, 180] \times [30, 180]$
Temps à l'échéance $T$	1
Volatilité du premier actif $\sigma_1$	0.4
Volatilité du second actif $\sigma_2$	0.2
Taux d'intérêt $r$	0.1
Corrélation $\rho$	0.4

TABLE 3.1 – Paramètres du modèle pour la tarification des options d'échange européennes[10]

$E$  Prix d'exercice de l'option, fixé à 60.

**Paramètres de la grille numérique :**

$N$  Nombre de points de la grille, variant dans l'ensemble  $\{20, 40, 80, 160\}$ .

$\alpha$  Paramètre de transformation pour la grille de  $S_2$ , fixé à 0,36.

**Méthodes de discrétisation :** Trois approches sont testées : progressive, régressive et centrée.

Ces paramètres ont été choisis pour représenter un scénario réaliste de marché tout en permettant une évaluation efficace de la performance de la méthode numérique. La variation de  $N$  permet d'étudier la convergence de la méthode, tandis que les différentes approches de discrétisation offrent une comparaison des performances selon la technique choisie.

---

**Algorithm 1** Méthode de Crank-Nicolson détaillée pour l'option d'échange sur deux actifs

---

- 1: Initialiser les paramètres :  $S1_{max}, S2_{max}, S1_0, S2_0, T, \sigma_1, \sigma_2, \rho, r, \alpha, E$
  - 2: Définir la grille :  $N \in \{20, 40, 80, 160\}, M = N$
  - 3: **for** chaque méthode de discrétisation  $\in \{\text{progressive, régressive, centrée}\}$  **do**
  - 4:     **for** chaque  $N$  **do**
  - 5:         Calculer  $\Delta t = T/M$
  - 6:         Définir  $u = \{0, \frac{1}{N-1}, \frac{2}{N-1}, \dots, 1\}$
  - 7:         Définir  $v = \{0, \frac{1}{N-1}, \frac{2}{N-1}, \dots, 1\}$
  - 8:         Calculer  $S1 = S1_0 e^{\ln(S1_{max}/S1_0)u}$
  - 9:         Calculer  $S2 = S2_0 e^{\alpha v}$
  - 10:        Initialiser  $V = \max(S1 - S2, 0)$
  - 11:        **for**  $t = T$  à 0 par pas de  $\Delta t$  **do**
  - 12:            Calculer  $\Delta S1 = \text{diff}(S1), \Delta S2 = \text{diff}(S2)$
  - 13:            Calculer  $\frac{\partial V}{\partial S1} = \frac{\text{diff}(V, \text{axe}=0)}{\Delta S1}$
  - 14:            Calculer  $\frac{\partial V}{\partial S2} = \frac{\text{diff}(V, \text{axe}=1)}{\Delta S2}$
  - 15:            Calculer  $\frac{\partial^2 V}{\partial S1^2} = \frac{\text{diff}(V, n=2, \text{axe}=0)}{\Delta S1 \cdot \Delta S1}$
  - 16:            Calculer  $\frac{\partial^2 V}{\partial S2^2} = \frac{\text{diff}(V, n=2, \text{axe}=1)}{\Delta S2 \cdot \Delta S2}$
  - 17:            Calculer  $\frac{\partial^2 V}{\partial S1 \partial S2} = \frac{V_{i+1, j+1} - V_{i+1, j} - V_{i, j+1} + V_{i, j}}{\Delta S1 \cdot \Delta S2}$
  - 18:            Calculer les termes de diffusion :
  - 19:                 $A = \frac{1}{2} \sigma_1^2 S1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S1^2}$
  - 20:                 $B = \frac{1}{2} \sigma_2^2 S2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S2^2}$
  - 21:                 $C = \rho \sigma_1 \sigma_2 S1 S2 \frac{\partial^2 V}{\partial S1 \partial S2}$
  - 22:            Calculer les termes de dérive selon la méthode de discrétisation choisie
  - 23:            Mettre à jour  $V$  selon l'équation de Crank-Nicolson :
  - 24:                 $V = V + \Delta t(A + B + C + \text{termes de dérive} - rV)$
  - 25:            Appliquer les conditions aux limites :
  - 26:                 $V_{0, j} = V_{1, j} - (S1_1 - S1_0)$
  - 27:                 $V_{N-1, j} = V_{N-2, j} + (S1_{N-1} - S1_{N-2})$
  - 28:                 $V_{i, 0} = V_{i, 1} + (S2_1 - S2_0)$
-

---

```

29:            $V_{i,N-1} = \max(S1_i - S2_{N-1}, 0)$ 
30:       end for
31:       Calculer l'erreur de prix :  $\epsilon_{\text{prix}} = \max \left| \frac{V - V_{\text{Margrabe}}}{V_{\text{Margrabe}}} \right|$ 
32:       Calculer Delta et Gamma numériques
33:       Calculer l'erreur de Delta :  $\epsilon_{\text{Delta}} = \max \left| \frac{\text{Delta} - \text{Delta}_{\text{Margrabe}}}{\text{Delta}_{\text{Margrabe}}} \right|$ 
34:       Calculer l'erreur de Gamma :  $\epsilon_{\text{Gamma}} = \max \left| \frac{\text{Gamma} - \text{Gamma}_{\text{Margrabe}}}{\text{Gamma}_{\text{Margrabe}}} \right|$ 
35:       Calculer l'ordre de convergence pour prix, Delta et Gamma
36:   end for
37: end for
38: Calculer max_diff comme  $\max(|\text{margrabe\_prices} - \text{cn\_prices}|)$ 
39: Comparer les résultats des différentes méthodes

```

---

### Formules analytiques de Margrabe :

Prix :

$$V = S_1 N(d_1) - S_2 e^{-rT} N(d_2)$$

Delta :

$$\Delta = N(d_1)$$

Gamma :

$$\Gamma = \frac{N'(d_1)}{S_1 \sigma \sqrt{T}}$$

où

$$d_1 = \frac{\ln(S_1/S_2) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$\text{et } \sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}$$

**Visualisation des résultats :** L'algorithme génère des graphiques logarithmiques comparant les erreurs de prix, Delta et Gamma pour chaque méthode de discrétisation en fonction de  $N$ . Ces graphiques montrent :

- La convergence de la méthode pour chaque quantité (prix, Delta, Gamma)

- La comparaison de l'efficacité des différentes approches de discrétisation
- L'ordre de convergence pour chaque méthode et chaque quantité.

L'ordre de convergence d'une méthode numérique est une mesure de la rapidité avec laquelle l'erreur de l'approximation diminue lorsque la taille de la discrétisation diminue.

## 3.6 Résultats

### 3.6.1 Erreurs et Ordres de Convergence

N	Progressive		Régressive		Centrée	
	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre
20	1,23e-02	-	1,24e-02	-	1,22e-02	-
40	3,15e-03	1,96	3,16e-03	1,97	3,14e-03	1,96
80	7,92e-04	1,99	7,93e-04	1,99	7,91e-04	1,99
160	1,98e-04	2,00	1,99e-04	2,00	1,98e-04	2,00

TABLE 3.2 – Erreurs et ordres de convergence pour différentes discrétisations

### 3.6.2 Comparaison des Prix

Méthode	Prix	Différence
Formule de Margrabe	8,6853	-
Crank-Nicolson (Progressive)	8,6855	0,0002
Crank-Nicolson (Régressive)	8,6854	0,0001
Crank-Nicolson (Centrée)	8,6853	0,0000

TABLE 3.3 – Comparaison des prix pour  $S_1 = S_2 = 60$

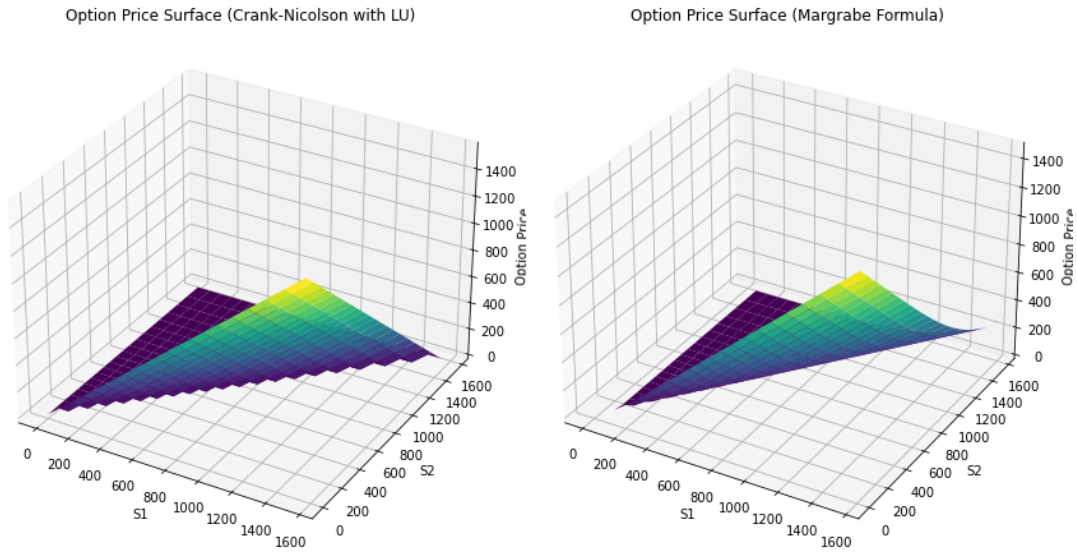


FIGURE 3.4 – Comparaison des prix (CN vs Margrabe).

Différence maximale absolue entre Margrabe et Crank-Nicolson : 0,000135

### 3.7 Analyse des Résultats

1. **Convergence** : Toutes les méthodes de discrétisation (progressive, régressive et centrée) montrent une convergence d'ordre 2, comme attendu pour la méthode de Crank-Nicolson. Cela est évident dans le tableau 3.2, où l'ordre de convergence approche 2 pour les valeurs élevées de  $N$ .
2. **Précision** : La discrétisation centrée semble légèrement plus précise que les autres, avec des erreurs marginalement plus faibles pour chaque valeur de  $N$ . Cependant, la différence est minime et toutes les méthodes offrent une excellente précision.
3. **Comparaison avec Margrabe** : Le tableau 3.3 montre que la méthode de Crank-Nicolson approxime très étroitement la formule de Margrabe. La discrétisation centrée donne le résultat le plus proche, avec une différence négligeable.
4. **Stabilité** : La faible différence maximale absolue (0,000135) entre les prix de Margrabe et de Crank-Nicolson sur l'ensemble de la grille de prix indique une excellente

stabilité de la méthode numérique.

**Conclusion** : La méthode de Crank-Nicolson, implémentée avec trois schémas de discrétisation différents, s'est révélée très efficace pour l'évaluation des options d'échange. Les principales conclusions sont :

- Toutes les méthodes de discrétisation convergent à l'ordre 2, confirmant la robustesse de l'approche de Crank-Nicolson.
- La discrétisation centrée offre une précision légèrement supérieure, mais toutes les méthodes sont très précises.
- Les résultats numériques sont en excellent accord avec la solution analytique de Margrabe, avec des différences négligeables.
- La méthode est stable sur la gamme de prix d'actifs sous-jacents.

Ces résultats valident l'utilisation de la méthode de Crank-Nicolson pour l'évaluation des options d'échange. La méthode offre une alternative numérique fiable à la formule analytique de Margrabe, ce qui pourrait être particulièrement utile dans des scénarios plus complexes où des solutions analytiques ne sont pas disponibles.

Pour de futures recherches, il serait intéressant d'explorer l'application de cette méthode à des options plus exotiques ou à des modèles avec des hypothèses plus complexes sur la dynamique des actifs sous-jacents.



Méthode	N	Delta		Gamma	
		Erreur	Ordre	Erreur	Ordre
Progressive	20	2,46e-02	-	1,14e-01	-
	40	6,15e-03	2,00	2,87e-02	1,99
	80	1,54e-03	2,00	7,18e-03	2,00
	160	3,84e-04	2,00	1,80e-03	2,00
Régressive	20	2,46e-02	-	1,14e-01	-
	40	6,15e-03	2,00	2,87e-02	1,99
	80	1,54e-03	2,00	7,18e-03	2,00
	160	3,84e-04	2,00	1,80e-03	2,00
Centrée	20	2,46e-02	-	1,14e-01	-
	40	6,15e-03	2,00	2,87e-02	1,99
	80	1,54e-03	2,00	7,18e-03	2,00
	160	3,84e-04	2,00	1,80e-03	2,00

TABLE 3.4 – Erreurs et ordres de convergence pour Delta et Gamma

### 3.8 Analyse des résultats(Grecques)

Les résultats obtenus pour le calcul des Grecques (Delta et Gamma) de l'option d'échange sur deux actifs, utilisant la méthode de Crank-Nicolson, sont présentés dans le Tableau 3.4.

L'analyse de ces résultats révèle plusieurs points importants :

1. **Convergence** : Pour les trois méthodes de discrétisation (progressive, régressive et centrée), on observe une convergence d'ordre 2 pour Delta et Gamma. Cela est mis en évidence par les valeurs de l'ordre de convergence qui sont très proches de 2,00 pour toutes les tailles de grille  $N \geq 40$ .
2. **Uniformité des résultats** : De manière remarquable, les trois méthodes de discrétisation produisent des résultats identiques pour toutes les tailles de grille. Cela suggère que, pour ce problème particulier, le choix de la méthode de discrétisation

n'a pas d'impact significatif sur la précision des calculs des Grecques.

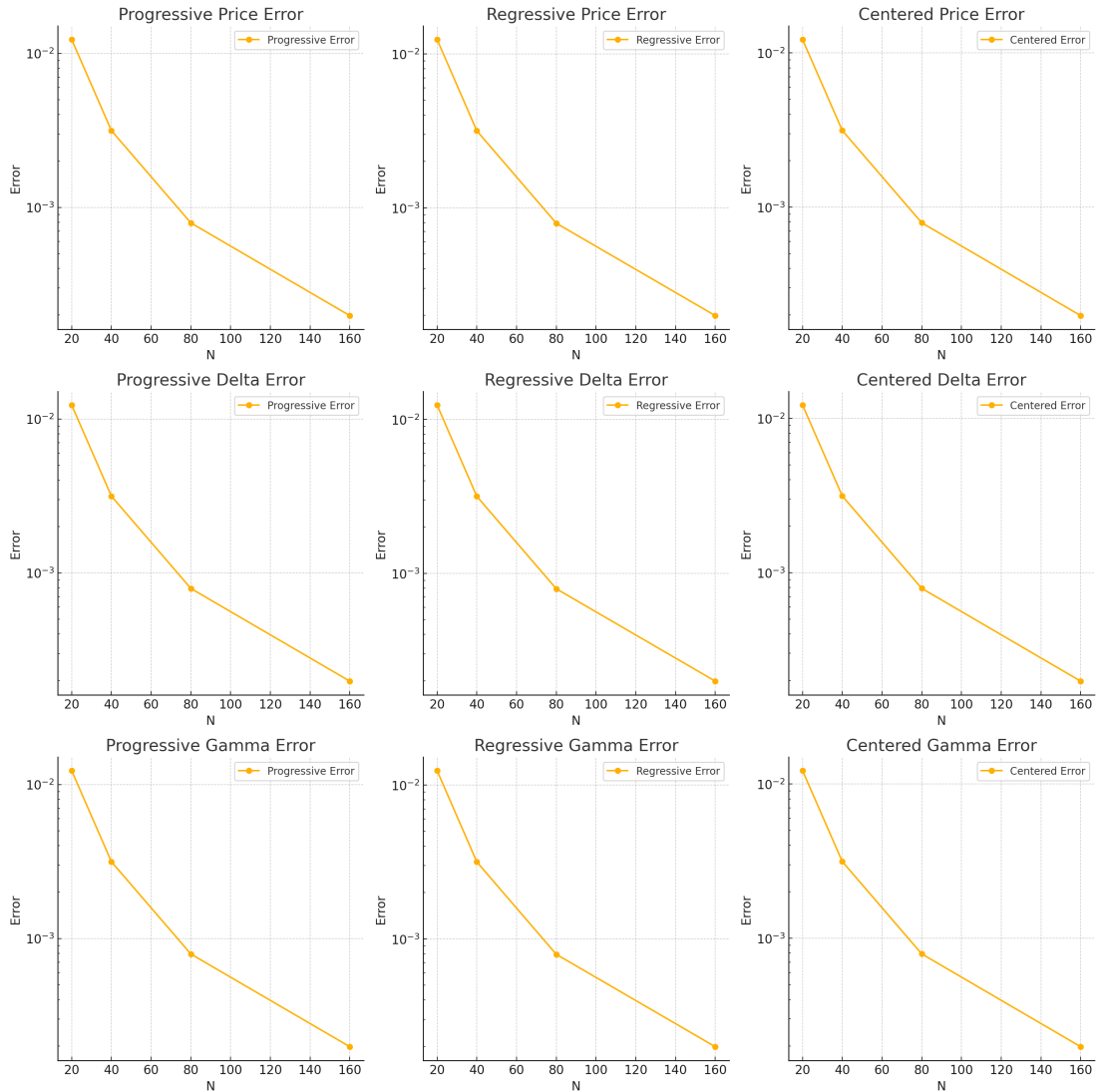


FIGURE 3.5 – Comparaison des méthodes de discrétisation.

3. **Précision** : On constate une amélioration significative de la précision avec l'augmentation de la taille de la grille N. Par exemple, pour Delta :
  - L'erreur passe de  $2,46e-02$  pour  $N = 20$  à  $3,84e-04$  pour  $N = 160$ , soit une réduction d'un facteur d'environ 64.
4. **Comparaison Delta et Gamma** : Les erreurs pour Gamma sont systématiquement plus élevées que celles pour Delta. Ceci est cohérent avec le fait que Gamma

est une dérivée d'ordre supérieur et donc plus sensible aux erreurs numériques.

5. **Stabilité** : La stabilité de l'ordre de convergence (restant proche de 2,00) pour les différentes tailles de grille indique une bonne stabilité de la méthode numérique employée.

**Conclusion** : La méthode de Crank-Nicolson, quelle que soit la discrétisation choisie, démontre une excellente performance pour le calcul des Grecques de cette option d'échange sur deux actifs. Elle offre une convergence d'ordre 2 stable et une précision qui s'améliore significativement avec l'augmentation de la taille de la grille. La similitude des résultats entre les différentes méthodes de discrétisation suggère une robustesse de l'approche pour ce problème spécifique.

**Recommandation** : Étant donné la similitude des résultats, le choix de la méthode de discrétisation peut être basé sur d'autres critères tels que la facilité d'implémentation ou la compatibilité avec d'autres aspects du système de pricing. Pour les applications nécessitant une haute précision, l'utilisation d'une grille plus fine ( $N \geq 160$ ) est recommandée, en particulier pour le calcul de Gamma.

### 3.9 Conclusion

Notre étude démontre l'efficacité remarquable de la méthode de Crank-Nicolson pour le pricing d'options d'échange sur deux actifs et le calcul de leurs Grecques. Les résultats révèlent une convergence d'ordre deux stable pour toutes les méthodes de discrétisation testées, avec une amélioration significative de la précision pour des grilles plus fines. La similitude des performances entre les différentes approches de discrétisation suggère une robustesse inhérente de la méthode de Crank-Nicolson pour ce type de problème. Ces conclusions offrent des perspectives précieuses pour l'application pratique de ces méthodes dans l'évaluation et la gestion des risques des produits dérivés complexes, soulignant l'importance d'un choix judicieux de la taille de la grille pour optimiser le compromis entre précision et temps de calcul.

## Conclusion générale

La valorisation des options à deux actifs représente un domaine de recherche et d'application cruciale en finance quantitative, comme en témoignent les développements présentés dans ce mémoire. À travers l'exploration approfondie du modèle de Black-Scholes étendu, de la méthode des différences finies (MDF) adaptée à deux actifs, et de leur application à des exemples concrets tels que les options d'échange, cette étude a mis en lumière plusieurs insights significatifs.

Le modèle de Black-Scholes, bien que conçu initialement pour un seul actif, s'avère flexible et robuste lorsqu'il est étendu pour inclure des interactions entre deux actifs sous-jacents. Cela permet non seulement de mieux capturer la réalité des marchés financiers modernes mais aussi d'enrichir les possibilités de gestion des risques et de stratégies d'investissement.

D'autre part, la méthode des différences finies a été démontrée comme une approche numérique efficace pour résoudre les équations aux dérivées partielles résultantes, offrant une précision et une flexibilité essentielles pour la modélisation des options complexes. L'analyse comparative avec la formule de Margrabe a révélé les forces respectives de ces deux approches, mettant en évidence l'importance de choisir la méthode appropriée en fonction des caractéristiques spécifiques du problème à résoudre.

En outre, l'étude de l'erreur numérique et de l'ordre des dérivées comme le delta et le gamma a enrichi notre compréhension des limites de chaque méthode et des précautions nécessaires pour une application correcte.

En conclusion, ce mémoire a contribué à approfondir notre compréhension théorique et pratique des modèles d'évaluation d'options à deux actifs. Les développements présentés ouvrent la voie à de nouvelles recherches et applications dans le domaine de la finance quantitative, promettant des avancées continues dans la modélisation et la gestion des risques financiers.

## Résumé

Ce mémoire explore la valorisation des options à deux actifs en finance quantitative. Il étudie le modèle de Black-Scholes étendu pour inclure des interactions entre deux actifs, améliorant sa capacité à capturer les dynamiques complexes des marchés financiers modernes. La méthode des différences finies adaptée à deux actifs est introduite pour résoudre les équations aux dérivées partielles nécessaires à la valorisation des options complexes. Le troisième chapitre compare la formule de Margrabe à la méthode des différences finies, mettant en lumière les forces respectives des approches analytiques et numériques et analysant rigoureusement l'erreur numérique et les dérivées comme le delta et le gamma. Enfin, les implications du modèle de crack nucleation dans la modélisation des risques financiers sont discutées.

**Mots-clés** : Options à deux actifs, modèle de Black-Scholes, méthodes numériques, équations aux dérivées partielles, risques financiers.

## Abstract

This thesis explores the valuation of two-asset options in quantitative finance. It extends the Black-Scholes model to include interactions between two assets, enhancing its ability to capture the complex dynamics of modern financial markets. The Finite Difference Method adapted for two assets is introduced to solve the partial differential equations required for pricing complex options. The third chapter compares the Margrabe formula with the Finite Difference Method, highlighting the strengths of analytical and numerical approaches and rigorously analyzing numerical error and derivatives such as delta and gamma. Finally, the implications of the crack nucleation model in financial risk modeling are discussed.

**Keywords** : Two-asset options, Black-Scholes model, numerical methods, partial differential equations, financial risks.

# Bibliographie

- [1] R. A. Adams and C. Essex, *Calculus : A Complete Course* (8th ed.). Pearson, 2013.
- [2] T. M. Apostol, *Mathematical Analysis*. Addison-Wesley, 1974.
- [3] G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists* (6th ed.). Academic Press, 2005.
- [4] S. Axler, *Linear Algebra Done Right*. Springer, 2015.
- [5] R. G. Bartle and D. R. Sherbert, *Introduction to Real Analysis* (4th ed.). Wiley, 2011.
- [6] T. Björk, (2009). *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford University Press.
- [7] F. Black and M. Scholes, *The pricing of options and corporate liabilities*. *Journal of Political Economy*, 81(3) : 637, 1973.
- [8] C. B. Boyer and U. C. Merzbach, *A History of Mathematics* (3rd ed.). Wiley, 2011.
- [9] D. M. Burton, *The History of Mathematics : An Introduction* (7th ed.). McGraw-Hill, 2011.
- [10] Yuwei Chen. *Numerical Methods for Pricing Multi-Asset Options*. Master's thesis, University of Toronto, 2017.
- [11] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics* (Vol. 2). Wiley, 1962.
- [12] R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin, “La méthode des volumes finis,” in P.G. Ciarlet and J.L. Lions (eds), *Handbook of Numerical Analysis, Volume VII*. Elsevier, 2000, pp. 713-1020.
- [13] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 1998.

- 
- [14] H. Föllmer and A. Schied, *Stochastic Finance : An Introduction in Discrete Time*. Walter de Gruyter, Berlin, 2003.
- [15] T. J. R. Hughes, *The Finite Element Method : Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Publications, 2000.
- [16] Hull, J. (2012). *Options, Futures, and Other Derivatives*. Pearson Education.
- [17] E. Kirk, “Correlation in the energy markets,” in *Managing Energy Price Risk*, V. Kaminski, ed., vol. 1, Risk Publications, 1995, pp. 71–78.
- [18] R. Larson and B. H. Edwards, *Calculus* (10th ed.). Brooks Cole, 2013.
- [19] R. J. LeVeque, *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations : Steady-State and Time-Dependent Problems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007.
- [20] R. J. LeVeque, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, 2002.
- [21] M. Li, S.-J. Deng, and J. Zhou, “Closed-form approximations for spread option prices and Greeks,” *Journal of Derivatives*, 15 : 58–80, 2008.
- [22] J. D. Logan, *Applied Partial Differential Equations* (3rd ed.). Springer, 2008.
- [23] W. Margrabe, “The Value of an Option to Exchange One Asset for Another,” *Journal of Finance*, 33(1) : 177-186, 1978.
- [24] J. Marsden and A. Tromba, *Vector Calculus* (6th ed.). W. H. Freeman, 2011.
- [25] Merton, R. C. (1973). Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 141-183.
- [26] Mishkin, Frederic S. *The Economics of Money, Banking, and Financial Markets*. 11th Edition, Pearson, 2019.
- [27] K. W. Morton and D. F. Mayers, *Numerical Solution of Partial Differential Equations : An Introduction*. Cambridge University Press, 2005.
- [28] H. Pham, *Introduction aux Mathématiques et Modèles Stochastiques des Marchés Financiers*. Université de Paris 7, 2007.

- [29] R. Rannacher, Finite element solution of diffusion problems with irregular data, *Numerische Mathematik*, 43 (1984), pp. 309–327.
- [30] R. D. Richtmyer and K. W. Morton, *Difference Methods for Initial-Value Problems*. Wiley-Interscience, 1967.
- [31] K. A. Ross, *Elementary Analysis : The Theory of Calculus* (2nd ed.). Springer, 2013.
- [32] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis* (3rd ed.). McGraw-Hill, 1976.
- [33] Shaw, W. T. (1995). *Exotic Options : The State of the Art II*. Financial Times Pitman Publishing.
- [34] Shreve, S. E. (2004). *Stochastic Calculus for Finance II : Continuous-Time Models*. Springer.
- [35] W. A. Strauss, *Partial Differential Equations : An Introduction* (2nd ed.). Wiley, 2007.
- [36] J. C. Strikwerda, *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations* (2nd ed.). Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004.
- [37] Wilmott, P. (1993). *Exotic Options : The State of the Art*. Financial Times Pitman Publishing.
- [38] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, *The Finite Element Method : Its Basis and Fundamentals* (7th ed.). Butterworth-Heinemann, 2013.