

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR**

**ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE ABDERRAHMANE MIRA BEJAIA**

**FACULTE DE TECHNOLOGIE**

**DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE**

**MEMOIRE**

Présenté pour l'obtention du diplôme de

**MASTER**

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Installations énergétiques et turbomachines

Par :

**MAZOUZ Ali**

**Thème**

---

**Modélisation d'un écoulement de couche limite d'un fluide non newtonien autour d'un cylindre horizontal chauffé**

---

Soutenu le .....2024 devant le jury composé de :

M. NAIT BOUDA Faïçal	Président
M. MOULOUD Smail	Rapporteur
M. ALLOUCHE Moussa	Examinateur

**Année Universitaire 2023-2024**

## Remerciements

*Je tiens tout d'abord à exprimer ma gratitude envers Dieu Tout-Puissant, qui m'a donné la force et le courage de mener à bien ce modeste travail.*

*Je tiens également à exprimer ma profonde reconnaissance envers mon encadreur, Monsieur MOULOUD. S, qui m'a accompagné et guidé tout au long de la réalisation de ce projet avec une grande expertise.*

*Je remercie également de tout mon cœur les membres de jury, pour leur contribution à l'examen de mon travail.*

*Enfin, je remercie toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.*

*Je suis reconnaissant envers ma famille et mes amis pour leur soutien indéfectible*

## Dédicaces

*Je souhaite humblement dédier ce travail.*

*À mes parents,*

*Qui, grâce à leur tendre encouragement et à d'immenses sacrifices, ont créé un climat affectueux et propice à la poursuite de mes études. Aucune dédicace ne saurait suffire à exprimer mon respect, ma considération et mes profonds sentiments envers eux. Je prie le bon Dieu de les bénir et j'espère qu'ils seront toujours fiers.*

*À mes très chers frères et sœur,*

*Je vous souhaite un avenir radieux, plein de bonheur et de succès. Que Dieu, le Tout-Puissant, vous préserve et vous accorde santé.*

*Finalement, à tous mes amis et collègues, témoins de l'amitié qui nous unit, je dédie ce travail en souvenir de tous les bons moments que nous avons partagés ensemble. Je vous souhaite une vie remplie de réussite.*

*Je ne peux pas non plus oublier de remercier mes professeurs qui m'ont enseigné et aidé tout au long de mon parc.*

# Sommaire

## Table des matières

<b>Introduction générale</b> .....	1
<b>Chapitre I : Etat de l'art et revue bibliographique</b> .....	3
<b>I.1. Introduction</b> .....	3
<b>I.2.1. Propriétés des fluides :</b> .....	3
<b>I.2.2. Fluide newtonien :</b> .....	3
<b>I.2.3. Fluide non newtonien</b> .....	4
<b>I.3 : couche limite</b> .....	9
<b>I.3.1 : Définition</b> .....	9
<b>I.3.2 : Concept de couche limite dynamique</b> .....	11
<b>I.3.3 : Concept de couche limite thermique</b> .....	12
<b>I.4 : Ecoulement des fluides et transfert de chaleur</b> .....	13
<b>I.4.1 : Les régimes d'écoulement</b> .....	13
<b>I.5.1 : Écoulement dans un milieu poreux</b> .....	14
<b>I.6 : Ecoulement magnétohydrodynamique</b> .....	14
<b>I.6.1 : Différentes modélisations de la MHD</b> .....	15
<b>I.7 : Généralité sur le transfert de chaleur</b> .....	16
<b>I.7.1 : Conduction</b> .....	16
<b>I.7.2 : Rayonnement</b> .....	16
<b>I.7.3 : La convection</b> .....	17
<b>I.8 : Conclusion</b> .....	19
<b>Chapitre II : positionnement et modélisation du problème</b> .....	21
<b>II .1 : Introduction</b> .....	21
<b>II .2 : Description du problème</b> .....	21
<b>II .3 : Géométrie du problème</b> .....	22
<b>II .4 : Hypothèses simplificatrices</b> .....	22

II .5 : Modèle thermo-fluide viscoélastique magnétohydrodynamique .....	22
II .6 : Formulations mathématiques .....	24
II .6.1 : Forme dimensionnel des équations.....	24
II .6.2 : conditions aux limites dimensionnel.....	25
II .6.3 : Forme adimensionnel des équations.....	25
II .6.4 : conditions aux limites adimensionnel.....	26
II .6.5 : Nombre adimensionnel.....	27
II .7 : Etude numérique.....	28
II .7.1 : Méthode des différences finies .....	29
II .7.2 : Méthode de Keller-box (boite de Keller).....	30
II .9 : conclusion .....	35
Chapitre III : Résultats et discussions .....	36
III.1 : Introduction .....	36
III.2 : Validation numérique .....	36
III.3 : Résultats et discussions.....	37
III.3.1 : Effet de $We$ sur les profils de vitesse et de température .....	37
III.3.2 : Effet de $Pr$ sur les profils de vitesse et de température.....	39
III.3.3 : Effet de $M$ sur les profils de vitesse et de température.....	40
III.3.4 : Effet de $\xi$ sur le profil de vitesse et de température .....	42
III.3.5 : Effet de $We$ sur les résultats du coefficient de frottement cutané et sur les résultats du coefficient du nombre de Nusselt.....	43
III.3.6 : Effet de $M$ sur les résultats du coefficient de frottement cutané et sur les résultats du coefficient du nombre de Nusselt.....	44
III.4 : Validation de coefficient de frottement cutané ( $C_f$ ) et de du coefficient du nombre de Nusselt ( $Nu$ ) pour différents $We$ , $\gamma$ et $\xi$ .....	46
III.5 : Validation de coefficient de frottement cutané ( $C_f$ ) et de du coefficient du nombre de Nusselt ( $Nu$ ) pour différents $\gamma$ et $Pr$ .....	48
III.6 : conclusion.....	49
Conclusion générale .....	51

<b>Références Bibliographiques</b> .....	52
<b>Résumé</b> .....	55

# Listes des figures

## Chapitre I

<b>Figure I. 1:</b> Comportement d'un fluide newtonien. [1].....	4
<b>Figure I. 2:</b> Classification des comportements rhéologiques [1].....	5
<b>Figure I. 3:</b> Rhéogramme des fluides à comportement indépendant du temps [1] .....	6
<b>Figure I. 4:</b> Fluide de Bingham [1] .....	8
<b>Figure I. 5:</b> Histoire du taux de cisaillement [3] .....	9
<b>Figure I. 6:</b> Couches limites laminaires et turbulentes pour un écoulement autour du cylindre. [7]...	11
<b>Figure I. 7:</b> Représentation d'une couche limite dynamique.....	12
<b>Figure I. 8:</b> Représentation d'une couche limite thermique.....	12
<b>Figure I. 9:</b> Régimes d'écoulement [8] .....	13
<b>Figure I. 10:</b> Structure d'un milieu poreux [10].....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
<b>Figure I. 11:</b> Les différents types du transfert de chaleur [13]. .....	16
<b>Figure I. 12:</b> Schéma du phénomène de transfert de chaleur par convection. [15].....	18

## Chapitre II

<b>Figure II. 1:</b> géométrie de problème .....	22
<b>Figure II. 2:</b> élément de boîte Keller et maillage de la couche limite.....	32

## Chapitre III

<b>Figure III. 1:</b> effet de nombre de Weissenberg ( $We$ ) sur le profil de vitesse .....	38
<b>Figure III. 2:</b> effet de nombre de Weissenberg ( $We$ ) sur le profil de température .....	38
<b>Figure III. 3:</b> effet de $Pr$ sur le profil vitesse .....	39
<b>Figure III. 4:</b> effet de $Pr$ sur le profil de température.....	39
<b>Figure III. 5:</b> effet de $M$ sur le profil de vitesse.....	40
<b>Figure III. 6:</b> effet de $M$ sur le profil de température.....	41
<b>Figure III. 7:</b> effet de $\xi$ sur le profil de vitesse .....	42
<b>Figure III. 8:</b> effet de $\xi$ sur le profil de température.....	42
<b>Figure III. 9:</b> effet de $We$ sur les résultats du coefficient du nombre de Nusselt .....	43
<b>Figure III. 10:</b> effet de $We$ sur les résultats du coefficient de frottement cutané .....	43
<b>Figure III. 11:</b> effet de $M$ sur les résultats du coefficient de frottement cutané .....	44
<b>Figure III. 12:</b> effet de $M$ sur les résultats du coefficient du nombre de Nusselt .....	45

<b>Symboles</b>	<b>Définition</b>	<b>Unité(SI)</b>
$a$	Rayon du cylindre	[m]
$B_0$	Champ magnétique radial imposé de l'extérieur	[-]
$f$	Fonction de vapeur non dimensionnelle	[-]
$g$	L'accélération de la pesanteur	[m s <sup>-2</sup> ]
$k$	Conductivité thermique	[W m <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]
$T$	Température	[K]
$u, v$	Composants non dimensionnelles de la vitesse suivant les axes x et y	[m s <sup>-1</sup> ]
$x$	Coordonnée du cours de fluide	[m]
$y$	Coordonnée transversales	[m]
$p$	Pression	[Pa]
$C_f$	coefficient de frottement	[-]
<b>Symboles grecs</b>		
$\alpha$	Diffusivité thermique	[m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ]
$\beta$	Coefficient de dilatation à pression constante	[K <sup>-1</sup> ]
$\eta$	Coordonnée transversal sans dimension	[-]
$\nu$	Viscosité cinématique	[m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ]
$\mu$	Viscosité dynamique	[kg m <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup> ]
$\rho$	Densité du fluide viscoélastique	[kg m <sup>-3</sup> ]
$\gamma$	paramètre de chauffage newtonien non dimensionnel	[-]
$\theta$	température non dimensionnelle	[-]
$\sigma$	Conductivité électrique du fluide viscoélastique	[-]

$\xi$	coordonnée sans dimension de l'orientation de la vapeur	[-]
$\psi$	fonction du flux sans dimension	[-]
$\Gamma$	constante matérielle dépendante du temps	[-]
$\lambda$	Conductivité thermique	[W m <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]
$\varepsilon$	La porosité du milieu poreux	[m <sup>3</sup> ]
$\Delta T$	Différence de température	[K]
$\varphi$	Flux de chaleur transmis par convection	[W]

**Nombres adimensionnels**

Gr	Nombre de Grashof	[-]
Da	Nombre de Darcy	[-]
Pr	Nombre de Prandtl	[-]
Re	Nombre de Reynolds	[-]
Ri	Nombre de Richardson	[-]
Nu	Nombre de Nusselt	[-]
M	Paramètre de la force du corps magnétique	[-]
We	nombre de Weissenberg	[-]

**Indices :**

$i, j$	$i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ composantes
$w$	Condition sur la paroi
$\infty$	Condition d'écoulement libre

**Abréviations**

L'éq	l'équation
Réf	Référence
MHD	Magnétohydrodynamiques

# **Introduction Général**

# Introduction générale

Au cours de ces dernières années, de nombreux travaux ont porté sur des écoulements non newtoniens en raison de leur application dans divers domaines. Dans cette thématique nous avons examiné un écoulement de couche limite laminaire, incompressible et bidimensionnel autour d'un cylindre horizontal chauffé en présence de champ magnétique pour voir l'influence de ce dernier sur les profils de vitesses et de températures et cette problématique est décrite selon les trois chapitres que nous allons voir.

L'objectif de notre étude est de voir l'influence du champ magnétique et de la convection mixte sur les profils de vitesses et de températures au sein de la couche limite mais aussi la variation du taux de transfert de chaleur entre la paroi de cylindre et le fluide, ainsi que le coefficient de frottement. Ainsi, nous avons utilisé divers paramètres qui ont un impact significatif sur notre objectif d'étude mentionné précédemment, tels que le nombre de Nusselt, le nombre de Prandtl, le nombre de Weissenberg ( $we$ ), le Nombre de Grashof et le paramètre magnétique qui sont considérés comme les principaux facteurs de notre étude.

Ce présent mémoire composé de trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré à des différents phénomènes physiques qui constituent notre sujet d'étude, des généralités sur la couche limite produite d'un écoulement incident et le transfert de chaleur.

Le deuxième chapitre est consacré au domaine d'étude (géométrie du problème) décrire le problème physique, une formulation mathématique dimensionnelle générale du problème sur les équations de la conservation de masse et de quantité de mouvement que nous avons transformée sous la forme adimensionnelle et finaliser avec une procédure numérique pour résoudre les équations différentielles finies avec la méthode de Keller box.

Le troisième chapitre est dédié à la présentation des résultats que nous avons obtenus à l'aide d'un programme MATLAB.

Enfin, une conclusion générale qui synthétise les principaux résultats obtenus, suivie de perspectives de travail, est présentée.

# **Chapitre I**

**[Etat de l'art et revue  
bibliographique]**

# Chapitre I : Etat de l'art et revue bibliographique

## I.1. Introduction

Dans ce chapitre nous allons voir les différents phénomènes physiques qui constituent notre sujet d'étude, en premier lieu nous allons définir les différents fluides newton et non newtonien et leur comportement dans les conduites.

Par suite nous allons voir les couche limite et leur caractéristiques (turbulent, laminaire, dynamique et thermique) qui est définie comme étant une couche limite laminaire par un écoulement autour d'un cylindre horizontal.

En dernier lieu nous allons parler de différent tipe d'écoulement en présence d'une source de chaleur.

## I.2. Généralité des fluides :

### I.2.1. Propriétés des fluides :

Tous les fluides possèdent des caractéristiques permettant de décrire leurs conditions physiques dans un état donné. Parmi ces caractéristiques qu'on appelle propriétés des fluides on a :

- Compressibilité
- Masse volumique
- Densité
- Poids volumique
- Volume massique
- Viscosité

### I.2.2. Fluide newtonien :

En termes usuels, cela signifie que le fluide continue de s'écouler indépendamment des forces extérieures qui agissent sur lui. Par exemple, l'eau est un fluide newtonien parce qu'elle continue d'exhiber les propriétés d'un fluide quelle que soit la vitesse à laquelle elle est agitée. Pour un fluide newtonien, la viscosité, par définition, ne dépend que de la température et de la

pression (mais elle dépend aussi de la composition chimique du fluide si ce n'est pas un corps pur), non des forces agissant sur l'élément de fluide.

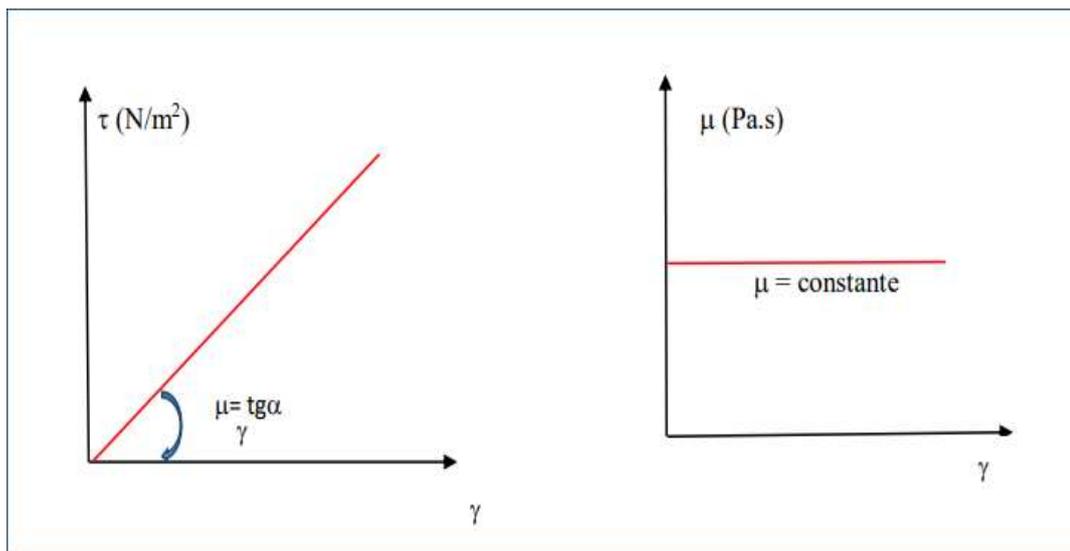
Le fluide newtonien est un fluide dont la viscosité est constante quelle que soit l'intensité du cisaillement qui lui est appliqué et s'obéi à la loi de newton, sa relation s'écrit sous la forme :

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{I.1})$$

Avec :

- ✓  $\tau$  : est la contrainte de cisaillement exercée par le fluide.
- ✓  $\mu$ : est la viscosité du fluide
- ✓  $\frac{\partial u}{\partial y}$ : est le gradient de vitesse perpendiculaire à la direction du cisaillement.

On représente le comportement du fluide graphiquement dans la figure ci-dessous



**Figure I. 1:** Comportement d'un fluide newtonien. [1]

Le graphe montre que la relation entre la contrainte de cisaillement  $\tau$  et le taux de cisaillement  $\gamma$  est une ligne droite. Avec la viscosité du fluide reste constante lorsque le taux de cisaillement varie. Comme exemples typiques de fluides newtoniens, on trouve l'eau et les huiles de moteur fines.

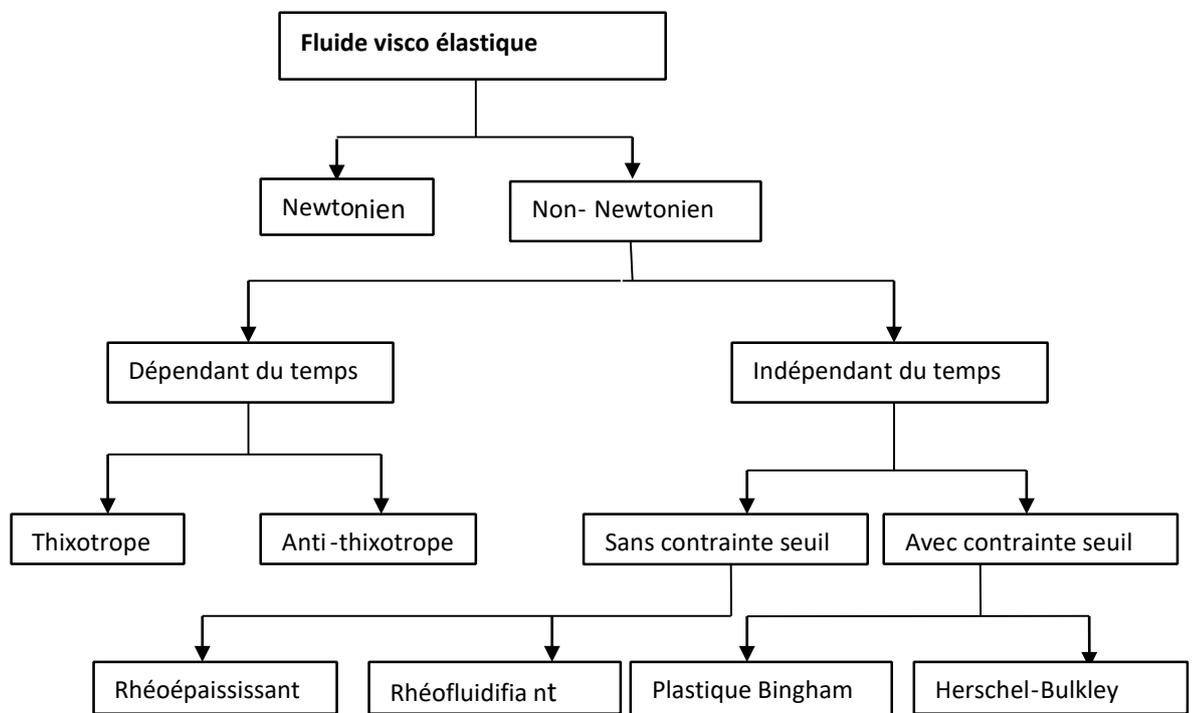
Ces fluides sont les plus simples à mesurer, mais ils ne sont malheureusement pas aussi communs que le groupe de fluides plus complexes, non-newtoniens, dont nous allons parler dans la prochaine section.

### I.2.3. Fluide non newtonien

Fluide non newtonien est un fluide qui ne suit pas la loi de viscosité de Newton.

On dit qu'un fluide est non Newtonien, à partir du moment où la courbe d'écoulement est non linéaire, c'est à dire que le fluide ne suit pas la loi de viscosité de Newton où la viscosité n'est plus constante mais dépend des conditions d'écoulement, du taux de cisaillement . Par exemple Le plastique, le caoutchouc, les dentifrices sont par exemple des fluides non - newtoniens.

La caractérisation rhéologique d'un fluide consiste à établir la relation qui existe entre sa déformation et la contrainte qui lui est appliquée. D'autre part, ils peuvent être classés en matériaux aux propriétés indépendantes ou dépendantes du temps. On peut trouver ces fluides dans l'industrie chimique, pharmaceutique et agroalimentaire. (Par exemple : suspensions, pommades, pâtes, émulsions...). [2] [3]



**Figure I. 2:** Classification des comportements rhéologiques [1]

### I.2.3.1 : Fluides non-newtoniens au comportement indépendant du temps de cisaillement sans contrainte critique

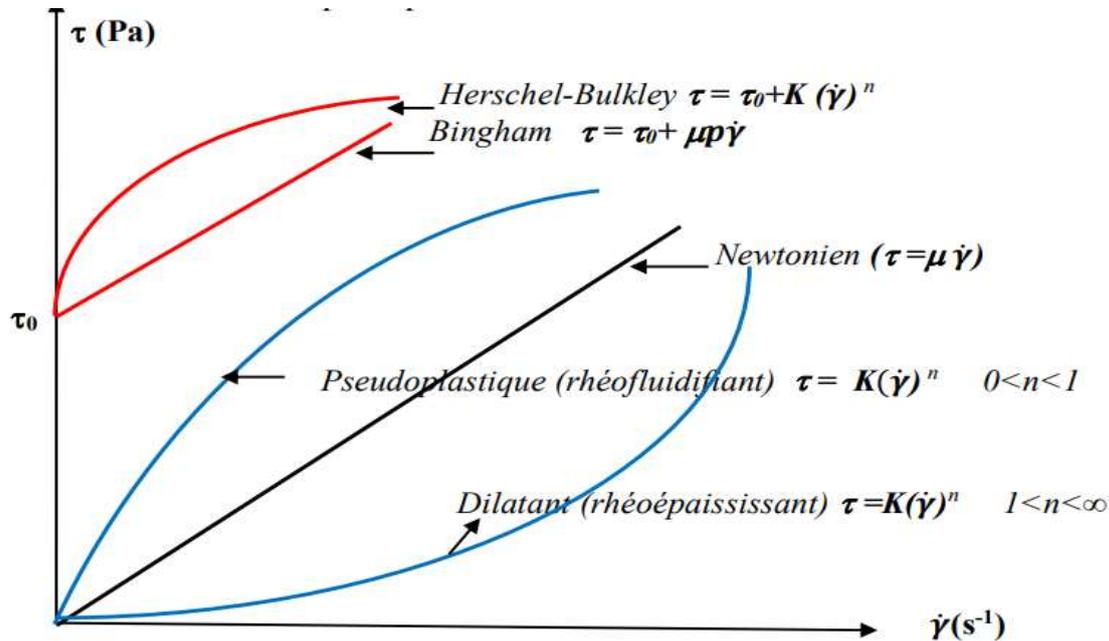


Figure I. 3: Rhéogramme des fluides à comportement indépendant du temps [1]

#### I.2.3.1.1 : Fluides rhéofluidifiants (ou pseudoplastiques)

Un fluide purement visqueux est considéré comme rhéofluidifiant ou pseudo-plastique lorsqu'il présente une diminution de sa viscosité apparente avec l'augmentation du taux de cisaillement. La majorité des fluides non-newtoniens réels démontrent ce comportement rhéofluidifiant. [3]

Exemples : presque tous les polymères fondus, les solutions de polymères, les fluides biologiques, la mayonnaise...

Ces fluides sont représentés, en général, par une loi de puissance ou encore appelée loi d'Ostwald de Waele.

$$\tau = K \left( \frac{du}{dy} \right)^n = K (\dot{\gamma})^n \quad (\text{I.2})$$

Où K représente l'indice de consistance et n représente l'indice de comportement, dont la valeur  $n < 1$  est un exposant qui traduit l'écart avec le comportement newtonien pour lequel  $n = 1$  (ou indice de structure du fluide).

La viscosité apparente pour un fluide suivant la loi en puissance se calcule comme suit :

$$\mu_a = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = K \left( \frac{du}{dy} \right)^{n-1} = K (\dot{\gamma})^{n-1} \quad (\text{I.3})$$

### **I.2.3.1.2 : Les fluides rhéoépaississants (ou dilatants)**

Un ensemble limité des liquides réels présente une caractéristique différente : leur viscosité apparente augmente en parallèle avec l'augmentation du taux de cisaillement. Ce type de comportement est désigné sous le nom de fluides rhéoépaississants ou fluides dilatants. En d'autres termes, au lieu de maigrir ou de devenir plus fluides avec un mouvement accru, ces fluides deviennent plus visqueux, résistants à l'écoulement. [3]

La loi de comportement est similaire à celle d'un fluide rhéofluidifiant représentée par la loi d'Ostwald de Waele sauf que dans ce cas l'indice d'écoulement  $n > 1$ .

### **I.2.3.2 : Fluides non newtoniens au comportement indépendant du temps de cisaillement avec contrainte critique**

#### **I.2.3.2.1 : Fluides plastiques ou fluides à contrainte critique**

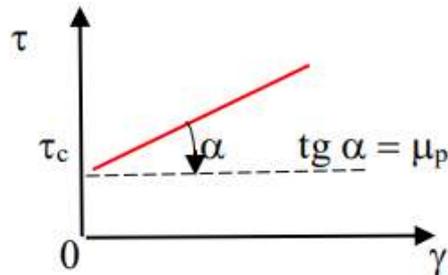
Certains fluides, comme les solutions de polymères et les suspensions très concentrées, ne s'écoulent qu'au-delà d'une contrainte seuil. En deçà de cette limite, ils se comportent comme des solides, mais deviennent fluides, avec des propriétés similaires à celles d'un fluide newtonien ou rhéofluidifiant, une fois cette contrainte franchie. Ce phénomène est observé couramment dans des produits de la vie quotidienne tels que le dentifrice, le yaourt, le ketchup, ainsi que dans des matériaux comme les argiles (laponite et bentonite) et les boues de forage. Il peut être expliqué par la présence d'agrégats ou de gels qui persistent jusqu'à ce que la contrainte seuil soit atteinte. Bien que certains contestent son existence, divers modèles, dont le modèle de Bingham (1922), ont été proposés pour décrire ce comportement rhéologique. [1] on site deux types

#### **✓ Fluide plastique idéal ou fluide de Bingham**

Un régime proportionnel existe entre la vitesse de cisaillement et la contrainte de cisaillement. Il est défini par la loi de comportement suivante

$$\tau = \tau_c + \mu_p \left( \frac{du}{dy} \right) = \tau_c + \mu_p (\dot{\gamma}) \quad (\text{I.4})$$

Où  $\tau_c$  est la contrainte minimale appelée aussi « contrainte seuil ou contrainte critique » provoquant l'écoulement et  $\mu_p$  est la viscosité plastique. Au-delà du seuil d'écoulement  $\tau_c$ , ils se comportent comme des liquides newtoniens, toute augmentation de  $\tau$  se traduit par une augmentation proportionnelle de  $\dot{\gamma}$



**Figure I. 4:** Fluide de Bingham [1]

- $\tau = \tau_c + \mu_p \cdot \dot{\gamma}$  pour  $\tau > \tau_c$
- et  $\dot{\gamma} = 0$  pour  $\tau < \tau_c$

#### ✓ **Fluide de Herschel- Bulkley**

Les matériaux présentant un comportement non newtonien rhéofluidifiant au-delà du seuil peuvent être décrit par la relation d'Herschel-Bulkley (1926) :

$$\tau = \tau_c + K \left( \frac{du}{dy} \right)^n = \tau_c + K (\dot{\gamma})^n \quad (\text{I.5})$$

#### ➤ **Fluide de Casson**

Ce genre de fluide ne suit pas un comportement newtonien une fois que le seuil d'écoulement est dépassé, ce qui signifie que sa courbe d'écoulement n'est pas linéaire. Casson a établi une loi rhéologique pour ce type de fluide, formulée comme suit :

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_c} + \sqrt{\mu_c} \sqrt{\dot{\gamma}} \quad (\text{I.6})$$

Types	n	$\tau_0$	Exemples
Newtonien	1	0	Eau, jus de fruit, lait, huile

Rhéofluidifiant	$0 < n < 1$	0	Compote de pomme, purée de banane, jus d'orange concentré
Rhéopaisissant	$1 < n < \infty$	0	Miel (certains types), solution à 40% d'amidon natif
Plastique de Bingham	1	$> 0$	Dentifrice, purée de tomates
Herchel-Bulkley	$0 < n < \infty$	$> 0$	Pate de poisson, mouts de raisin

**Tableau I.1 :** Paramètres rhéologiques de l'équation rhéologique d'état

### I.2.3.3 : Fluides au comportement dépendant du temps

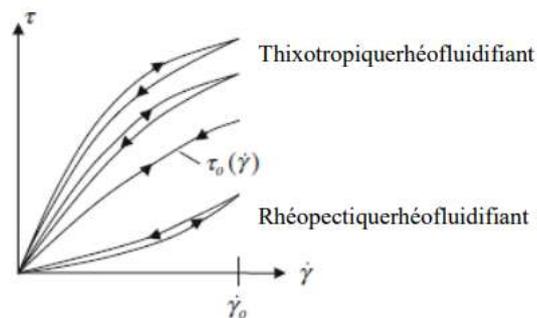
Le comportement des fluides dépendants du temps, est tel que pour un taux de cisaillement constant et à température constante, la contrainte de cisaillement augmente ou diminue de façon monotone par rapport au temps. Les fluides retrouvent leurs propriétés initiales quelque temps après que le taux de cisaillement soit revenu à zéro. Les fluides dépendant du temps sont divisés en deux sous-groupes : [3]

#### I.2.3.3.1 : Fluides thixotropes

Pour un taux de cisaillement constant, la contrainte de cisaillement diminue de façon monotone. [3]

#### I.2.3.3.2 : Fluides rhéopectiques

Pour un taux de cisaillement constant, la contrainte de cisaillement augmente de façon monotone. Ces fluides sont également appelés fluides anti-thixotropes. [3]



**Figure I.5 :** Histoire du taux de cisaillement [3]

## I.3 : couche limite

### I.3.1 : Définition

La couche limite est une région d'interaction entre un objet et le fluide qui l'entoure lorsqu'il y a un mouvement relatif entre les deux. C'est là que les effets de la viscosité sont observés, faisant de cette zone un élément crucial en mécanique des fluides. Elle se compose d'une fine couche de fluide qui se forme à la surface d'un objet solide lorsqu'il est en contact avec un fluide visqueux en mouvement, et peut avoir des aspects dynamiques et thermiques. [4,5,6].

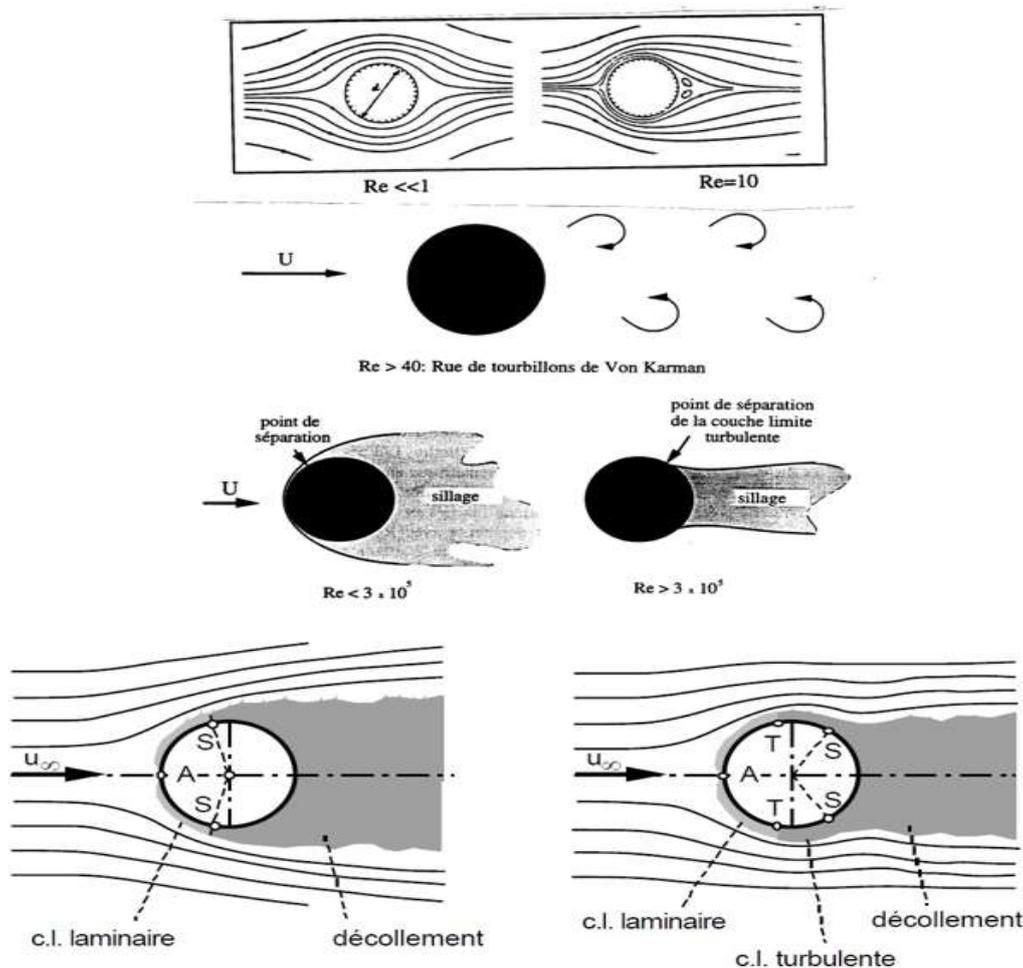
Dans notre cas l'obstacle est un cylindre horizontal cette situation correspond par exemple à celle des échangeurs à tubes et calandre dans lesquels le fluide de la calandre croise les tubes.

L'écoulement autour d'un cylindre dépend fortement de  $Re$

- Si  $Re \ll 1$  (rare) : l'écoulement purement visqueux symétrique
- Si  $Re \nearrow$  mais reste inférieur à 40, il existe 2 tourbillons attachés derrière le cylindre
- Si  $Re > 40$ , il existe une allée de tourbillons de Von Karman à l'aval du cylindre
- Si  $Re \nearrow$  encore, la couche limite qui se développe à partir du point d'arrêt à  $\theta = 0$  devient turbulente et décolle à  $\theta_d = 0$

$$Re < 3.10^5 \rightarrow \theta_d = 80^\circ$$

$Re > 3.10^5 \rightarrow \theta_d = 120^\circ$  Et la couche limite est turbulente même entre  $\theta = 0$  et  $\theta = \theta_d$



**Figure I. 6:** Couches limites laminaires et turbulentes pour un écoulement autour du cylindre. [7]

### I.3.2 : Concept de couche limite dynamique

Une des caractéristiques principales d'un fluide est la viscosité. Elle varie avec la température et ne s'annule jamais à la paroi. La couche limite est la zone de fluide contigu à la paroi dans laquelle se produit l'accommodation entre la vitesse nulle en paroi et la pleine vitesse local du fluide libre. Les propriétés de l'écoulement qui dépendent de cette couche limite sont (Les forces de frottement, Transfer thermique).

La couche limite laminaire est caractérisée par le fait que tous les vecteurs vitesses sont parallèles à un même plan, l'écoulement se présente alors sous la forme de lames de fluide glissant les unes sur les autres. Ces lames restent rectilignes sur une certaine longueur, puis s'estompent. On observe une telle couche limite vers le bord d'attaque d'un profil. On appelle conventionnellement l'épaisseur  $\delta$  de la couche limite la distance à la paroi.

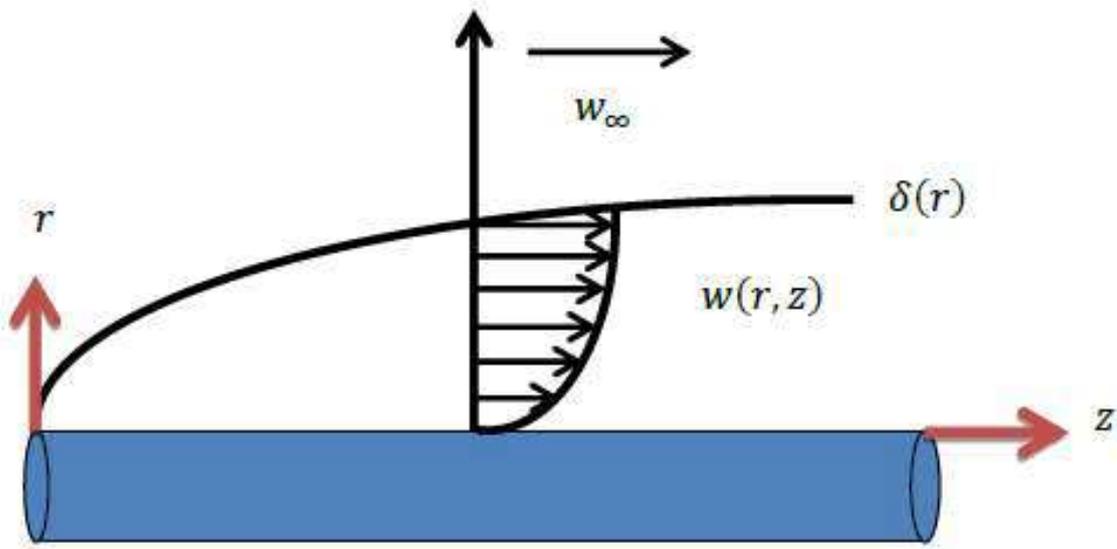


Figure I. 7: Représentation d'une couche limite dynamique.

### I.3.3 : Concept de couche limite thermique

Lorsqu'un fluide de température  $T_\infty$  s'écoule sur une paroi à la température  $T_w$ , des échanges thermiques s'établissent. Les particules échangent de la chaleur de proche en proche avec leurs voisines et un gradient de température se forme.

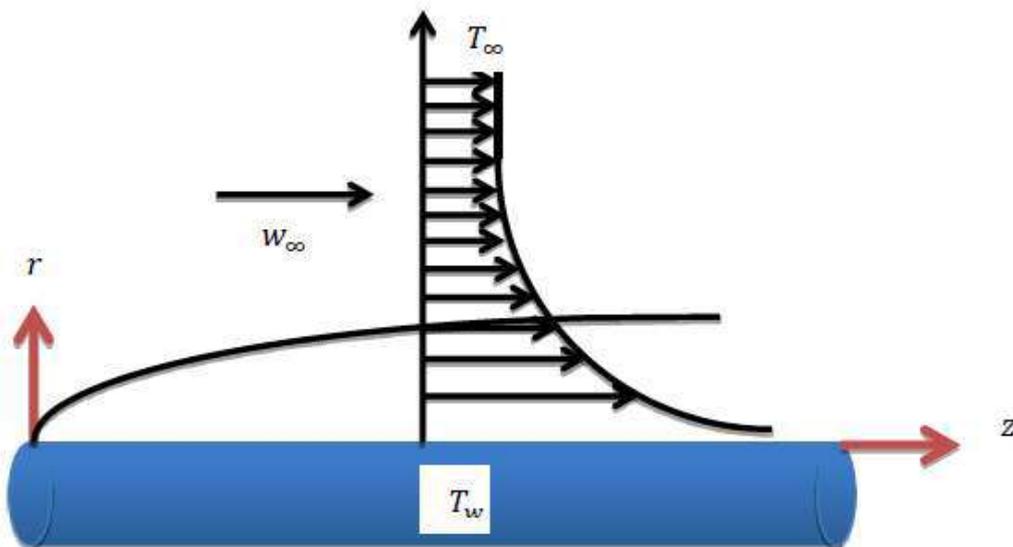
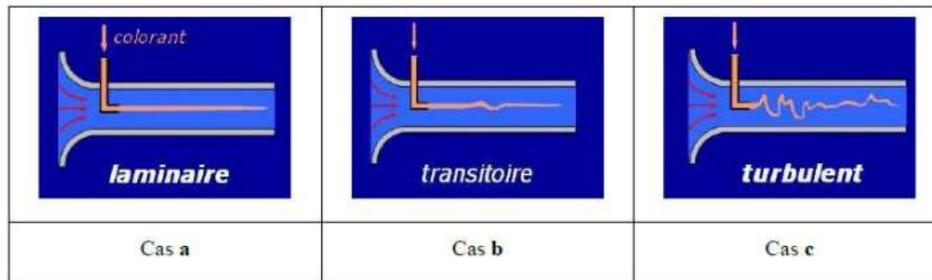


Figure I. 8: Représentation d'une couche limite thermique.

## I.4 : Ecoulement des fluides et transfert de chaleur

### I.4.1 : Les régimes d'écoulement

Soit un fluide qui circule dans une conduite à section. On introduit un filet de colorant dans l'axe de cette conduite. Suivant la vitesse d'écoulement de fluide, on peut observer les phénomènes suivants



**Figure I. 9:** Régimes d'écoulement [8]

- Pour des vitesses faibles, le filet colorant traverse le long de la conduite en position centrale.
- Pour des vitesses plus élevées, le filet colorant se mélange brusquement dans le fluide après avoir parcouru une distance.
- Pour des vitesses très élevées, le colorant se mélange donc immédiatement dans le fluide.

#### I.4.1.1 : Ecoulement laminaire :( cas a)

Dans la dynamique des fluides, écoulement laminaire (ou les flux) se produit lorsqu'un fluide s'écoule dans des couches parallèles et glissent les unes sur les autres sans se mélanger et les échanges d'énergie entre elles sont réduits, sans interruption. Une des conséquences de l'écoulement laminaire est que la vitesse du fluide est constante à n'importe quel point dans le fluide.

Les fluides ayant l'écoulement laminaire ont également souvent l'écoulement constant, Le fluide coule en ligne droite au presque.

#### I.4.1.2 : Ecoulement transitoire : (cas b)

C'est une transition entre les deux régimes laminaire et turbulent avec de faibles perturbations.

### **I.4.1.3 : Ecoulement turbulent : (cas c)**

Dans le mouvement turbulent, le mécanisme de conduction est favorisé par d'innombrables tourbillons. Les petits volumes du fluide, en se mélangeant avec d'autre, jouent le rôle de porteur d'énergie. Par conséquent un accroissement de turbulence amène une augmentation de la quantité de chaleur s'écoulant par convection, les tubes de courant ne se conservent pas long de l'écoulement, les couches fluides se mélangent et les échanges d'énergie entre elle sont important, les écoulements turbulents sont irréversibles et aussi augmente les échanges et les frottements, les écoulements turbulents sont irréversibles

### **I.5.1 : Écoulement dans un milieu poreux**

Un écoulement dans un milieu poreux se réfère au mouvement d'un fluide à travers un matériau contenant des espace vide interconnectés tels que des pores. Ce phénomène est décrit par la loi de Darcy qui établit une relation entre la vitesse d'écoulement de fluide le gradient de pression et la perméabilité du milieu poreux le fluide peut se déplacer à travers des canaux ou des interstices influencés par des forces de viscosité et des caractéristique géométrique du matériau. Les écoulements dans les milieux poreux sont essentiels dans de nombreux domaines de l'hydraulique souterraine a l'industrie pétrolière et nécessitent souvent des modèles complexes pour décrire avec précision les interactions entre le fluide et le matériau poreux.

### **I.6 : Ecoulement magnétohydrodynamique**

Un écoulement magnétohydrodynamique (ou MHD) est un phénomène physique qui explique comment un fluide conducteur électrique se comporte en présence d'un champ magnétique. Les interactions entre le fluide et le champ magnétique jouent un rôle essentiel dans un tel écoulement, ayant une influence considérable sur la dynamique du fluide. Des phénomènes tels que la production de courants électriques, la modification de la viscosité du fluide et des effets de confinement ou de propulsion peuvent être causés par ces interactions dans le domaine des applications technologiques et des études astrophysiques.

Ces écoulements sont modélisés par un couplage des équations de Maxwell et de Navier-Stokes. Comme dans la dynamique des fluides en générale. Le physicien suédois Hannes Alfvén fut le premier, en 1942, à employer le terme de magnétohydrodynamique. Il reçut le prix Nobel de physique en 1970 pour ses travaux. [26]

Les principales caractéristiques d'un écoulement MHD sont :

- Le fluide est électriquement conducteur, ce qui permet l'interaction entre le mouvement du fluide et le champ magnétique appliqué.
- Les équations de l'hydrodynamique sont couplées aux équations de l'électromagnétisme (équations de Maxwell) pour décrire l'évolution du champ magnétique et du mouvement du fluide.
- Les forces électromagnétiques, comme la force de Lorentz, jouent un rôle important dans la dynamique de l'écoulement.
- Les écoulements MHD sont souvent caractérisés par des nombres adimensionnels comme le nombre de Hartmann qui compare les forces électromagnétiques aux forces visqueuses.
- Les écoulements MHD sont présents dans de nombreux domaines comme l'astrophysique, la géophysique, la sidérurgie ou la propulsion spatiale.

### **I.6.1 : Différentes modélisations de la MHD**

Il existe plusieurs modèles de magnétohydrodynamique en fonction du degré de complexité requis il y a deux types :

- La magnétohydrodynamique idéale
- La magnétohydrodynamique résistive

Le choix de l'un de ces modèles dépend de la valeur du nombre de Reynolds magnétique  $R_m$ .

#### **I.6.1.1 : Magnétohydrodynamique idéale**

La MHD idéale (optimale) se distingue par des valeurs très élevées de Reynolds magnétique ( $R_m \gg 1$ ). Le fluide, fortement magnétisé, est considéré comme ayant une résistance électrique faible ou nulle, et il est considéré comme un conducteur idéal. La recherche sur cette MHD idéale se concentre sur les plasmas chauds, tels que les plasmas astrophysiques et thermonucléaires, qu'ils soient naturels (étoiles) ou fabriqués. L'équation de continuité, les lois de la quantité de mouvement, le théorème d'Ampère et les équations de la thermodynamique (conservation de l'énergie). On effectue des approximations du flux de chaleur via des conditions adiabatiques ou isothermes. [27]

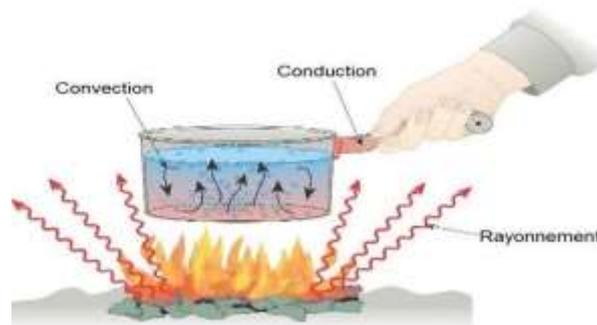
#### **I.6.1.2 : Magnétohydrodynamique résistive**

La MHD résistive est un type de fluide magnétisé qui présente un faible nombre de Reynolds magnétique ( $R_m \leq 1$ ) et qui ne sont pas parfaitement conducteurs. En règle générale,

on considère qu'il s'agit d'une résistivité causée par les collisions entre les composants du plasma, qui convertissent l'énergie magnétique en chaleur. Quand la résistivité est minime, (nombre de Reynolds faible). Ce genre de MHD intervient dans les applications industrielles à plasmas froids. [27]

### I.7 : Généralité sur le transfert de chaleur

Le transfert de chaleur revêt une importance cruciale dans l'industrie et les technologies. Il se présente sous différentes formes telles que le rayonnement, la conduction et la convection (voir Figure I.1), mais c'est surtout cette dernière qui est particulièrement recherchée dans certains domaines spécifiques tels que le refroidissement des processeurs et des composants électroniques, ainsi que dans la conception de radiateurs et d'échangeurs de chaleur, ...etc. [13]



**Figure I. 10:** Les différents types du transfert de chaleur [13].

#### I.7.1 : Conduction

La conduction thermique se produit dans un milieu opaque sans mouvement de matière, influencée par une variation de température. À l'intérieur d'un corps, la chaleur se propage par deux mécanismes distincts : la transmission par les vibrations des atomes ou molécules, et la transmission par les électrons libres. [14]

La loi fondamentale correspondant à ce processus particulier de diffusion de la chaleur est telle que la densité du flux de chaleur est une fonction linéaire du gradient de température en un point donné :

$$\vec{\varphi} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \quad (\text{I.7})$$

#### I.7.2 : Rayonnement

Le rayonnement électromagnétique est le processus par lequel un objet émet et absorbe de l'énergie sous forme de rayonnement. Ce mode de transfert de chaleur peut se produire entre deux objets séparés par le vide ou un milieu semi-transparent, grâce aux ondes électromagnétiques, sans nécessiter de support matériel. L'émission d'un objet correspond à la conversion de l'énergie matérielle (provenant de l'agitation des électrons constituant la matière, dont l'intensité est liée à la température) en énergie radiative. [14]

Ce mode de transfert de chaleur est évalué par la loi de Stephan Boltzmann, elle donne la puissance par unité de surface par l'expression suivante :

$$M = \sigma \cdot \varepsilon \cdot T^4 \quad (\text{I.8})$$

Où :

$\sigma$  : la constante de Stephan Boltzmann vaut (dans le système international)

### **I.7.3 : La convection**

La convection, résultant de l'interaction combinée de la conduction, de l'accumulation d'énergie et du mouvement du milieu, est considérée comme le principal mécanisme de transfert d'énergie entre une surface solide et un liquide ou un gaz. Le transfert d'énergie par convection depuis une surface dont la température est plus élevée que celle du fluide environnant se produit en plusieurs étapes. Initialement, la chaleur se propage par conduction de la surface vers les molécules du fluide adjacent.

L'énergie ainsi transmise est utilisée pour augmenter la température et l'énergie interne des molécules du fluide. Ensuite, ces molécules se mêlent à d'autres et transfèrent une partie de leur énergie. Dans ce processus, le flux transporte simultanément à la fois le fluide et l'énergie. L'énergie est alors stockée dans les molécules du fluide et est transportée grâce à leur mouvement. [15]



**Figure I. 11:** Schéma du phénomène de transfert de chaleur par convection. [15]

L'étude de transfert de chaleur par convection permet de déterminer un écoulement à une température  $T_\infty$  autour d'une structure à une température uniforme  $T_s$  de surface  $S$ , l'expression du flux de chaleur en convection est la suivante :

$$\varphi_Q = h(T_s - T_\infty)ds. dt \quad (\text{I.9})$$

Où  $h$  est le coefficient de transfert thermique. Cette loi est une loi empirique. Elle dépendra donc beaucoup de la situation physique : en particulier  $(T_s - T_\infty)$  peut se trouver dans certains cas, être à une puissance plus grande que l'unité. Le flux de chaleur transmis est donné par la relation dite loi de Newton.

$$\frac{\delta Q}{dt} = h(T_s - T_\infty)ds \quad (\text{I.10})$$

### I.7.3.1 : Convection naturelle

La convection libre, ou naturelle, survient lorsque le mouvement du fluide est uniquement dû à des variations de masse volumique. Ces gradients de masse volumique sont responsables de l'écoulement du fluide. Ce phénomène repose sur le déplacement de matière, ce qui le rend pertinent uniquement pour les fluides (liquides et gaz). Contrairement à la conduction, où le transfert de chaleur se produit par contact, la convection naturelle implique un mouvement global du fluide. Par conséquent, la compréhension des mécanismes de convection naturelle revêt une importance cruciale pour établir des modèles et, par conséquent, des prévisions des effets sur l'environnement (et donc sur les équipements). [16]

### I.7.3.2 : Convection forcée

Dans la convection forcée, le mouvement est initié par un processus mécanique indépendant des phénomènes thermiques. C'est donc un gradient de pression externe qui

entraîne le déplacement des particules du fluide. Ainsi, l'étude du transfert de chaleur par convection est étroitement liée à celle de l'écoulement des fluides. La convection est qualifiée de forcée lorsque le mouvement est induit par une cause autre que les variations de température du fluide, cette cause étant considérée comme prédominante en raison de son importance relative. [16]

### I.7.3.3 : Convection mixte

Correspond au couplage des deux phénomènes précédents (convection naturelle et forcée) quand les vitesses d'écoulement, fictives, dues aux deux types de convections sont considérées séparément, du même ordre de grandeur.

La convection mixte peut être bénéfique lorsque les effets de la convection naturelle et de la convection forcée se combinent dans la même direction. Elle est considérée comme défavorable lorsque ces effets vont en sens opposé. En général, les problèmes liés à la convection thermique portent sur la détermination du taux de transfert thermique et/ou de la température de surface. Ces aspects d'ingénierie cruciaux sont établis une fois que la distribution de température dans le fluide en mouvement est évaluée. Dans le transfert thermique par convection, l'accent est mis sur la détermination de la distribution de température dans un fluide en mouvement. [15]

Le groupe adimensionnel qui détermine laquelle de ces convections est dominante est le nombre de Richardson  $Ri$  qui est le rapport du nombre de Grashof sur le carré du nombre de Reynolds.

$$Ri = \frac{Gr}{Re^2} \quad (\text{I.11})$$

- Si :  $Ri < 1$  c'est la convection forcée qui domine.
- Si :  $Ri > 1$  c'est la convection naturelle qui domine.
- Si :  $Ri=1$  c'est le domaine de la convection mixte (naturelle et forcée).

## I.8 : Conclusion

Dans ce chapitre nous avons bien rappelé quelques notions générales sur les fluides. Aussi bien les couches limites en suite nous avons donné des définitions sur les écoulements et le transfert de chaleur. Pour ce faire, nous allons aborder quelque concept sur les différent

travaux, menés sur les écoulements de couche limite d'un fluide non newtonien autour d'un cylindre horizontal chauffé. Ceci permettra alors de préciser le contexte de notre travail.

# Chapitre II

# Chapitre II : positionnement et modélisation du problème

## II .1 : Introduction

Dans ce chapitre notre problème consiste à étudier le comportement de l'écoulement de la couche limite et le transfert de chaleur d'un fluide non newtonien incompressible autour d'un cylindre horizontal.

En premier lieu nous allons décrire le problème physique en suite une formulation mathématique des équations de de la conservation de masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie.

En dernier lieu nous utilisons la procédure numérique pour résoudre les équations. La méthode des différences finies plus exacte sur la méthode de Keller box implicite.

## II .2 : Description du problème

Le problème considéré est schématisé sur la figure (II.1) en (2D). Il s'agit d'un écoulement de couche limite d'un écoulement incident  $(u_\infty, T_\infty)$ , vertical ascendant, sur un cylindre horizontal isotherme de rayon  $(a)$ .

On suppose que la température  $T_w$  sur la surface du cylindre est uniforme, de tel sorte que le cylindre peut être soit chauffé ou refroidi par convection, à partir d'un fluide de température  $T_\infty$ . Les coordonnées orthogonales  $x$  et  $y$  sont mesurées le long de la surface du cylindre, en partant du point de stagnation correspondant à  $x = 0$  en présence des forces de gravité et de champ magnétique.

### II .3 : Géométrie du problème

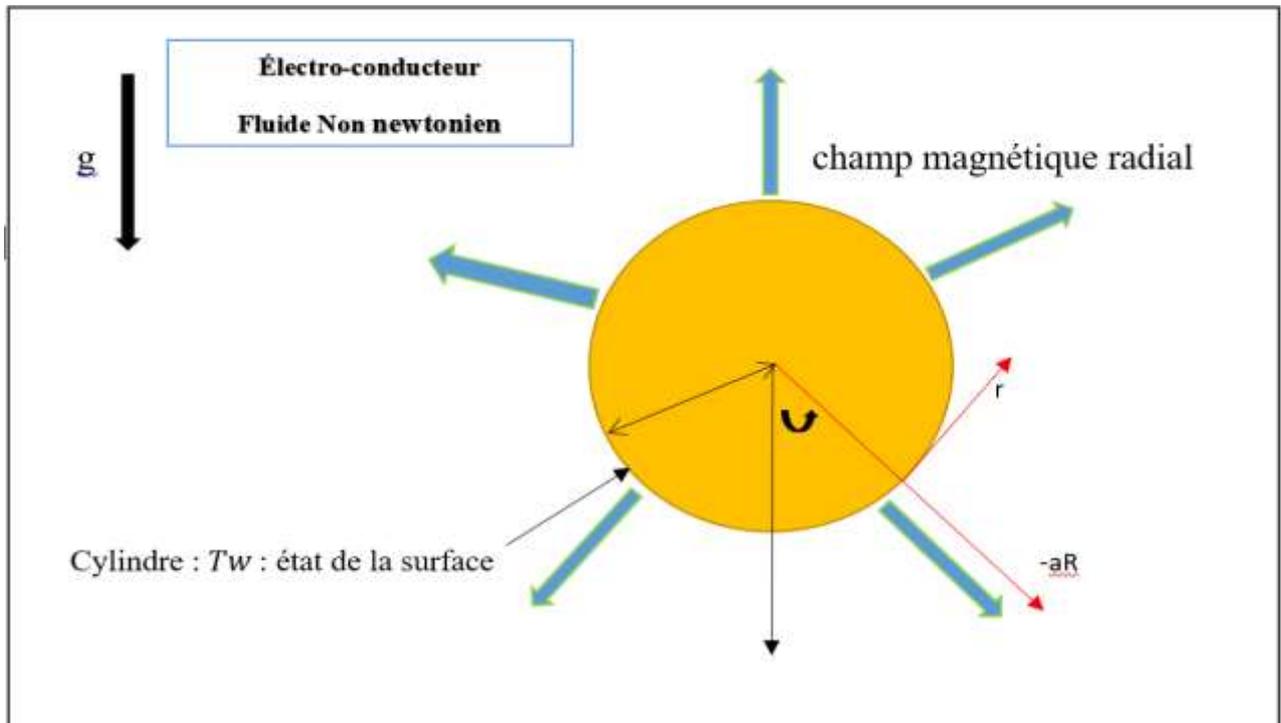


Figure II. 1: géométrie de problème

### II. 4 : Hypothèses simplificatrices

Il est nécessaire d'effectuer certaines hypothèses afin d'établir un modèle mathématique simple pour décrire la physique de ce problème. A cette effet, les hypothèses simplificatrices sont ;

- Le régime d'écoulement est laminaire et permanent.
- L'écoulement est bidimensionnel (x, y).
- Le fluide est incompressible  $\rho = \text{constante}$ .
- Le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable.
- Le fluide est non-newtonien (fluide Williamson)

### II .5 : Modèle thermo-fluide viscoélastique magnétohydrodynamique

On considère l'écoulement de la couche limite et le transfert de chaleur d'un corps cylindrique soumis à un champ magnétique radial, en régime permanent et incompressible. Les équations de continuité (conservation de la masse) et de quantité de mouvement sont données comme suit :

$$\text{div } V = 0 \quad (\text{II.1})$$

$$\rho \frac{dV}{dt} = \text{div}S + \rho b \quad (\text{II.2})$$

Avec

- $\rho$  : la densité du fluide
- $V$  : le vecteur vitesse
- $S$  : le tenseur des contraintes de Cauchy
- $b$  : représente le vecteur force spécifique du corps, et  $\frac{d}{dt}$  représente le temps matériel.
- Vecteur de force corporelle spécifique, et  $d/dt$  représente la dérivée temporelle de la matière.

$$S = -pI + \tau \quad (\text{II.3})$$

$$\tau = \left( \mu_{\infty} + \frac{(\mu_0 - \mu_{\infty})}{1 - \Gamma \dot{\gamma}} \right) 2D \quad (\text{II.4})$$

Avec

- $P$  : la pression
- $I$  : le vecteur d'identité
- $\tau$  : le tenseur des contraintes supplémentaires
- $\mu$  : sont les viscosités de limites à zéro et à un taux de cisaillement infini
- $\Gamma$  : la constante de temps ( $>0$ )
- $2D$  : le premier tenseur de Rivlin-Erickson.
- $\dot{\gamma}$  : est défini comme suit :

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (\text{II.5})$$

Dans notre cas en considère que  $\mu_{\infty} = 0$  et  $\Gamma \dot{\gamma} < 1$  donc l'équation (4) peut être écrit comme suite:

$$\tau = \left[ \frac{(\mu_0 - \mu_{\infty})}{1 - \Gamma \dot{\gamma}} \right] 2D \quad (\text{II.7})$$

Ou bien :

$$\tau = \left[ \frac{\mu_0}{1 - \Gamma \dot{\gamma}} \right] 2D \quad (\text{II.8})$$

Ou en utilisant l'expansion binomiale, nous obtenons :

$$\tau = \mu_0 [1 + \Gamma \dot{\gamma}] 2D \quad (\text{II.9})$$

## II .6 : Formulations mathématiques

Un écoulement de couche limite en convection mixte induit par un écoulement incident est un phénomène essentiel qui doit être pris en compte. Pour cela, il est nécessaire de résoudre les équations générales de la dynamique des fluides, qui permettent de lier les variables de pression, vitesse et température. Ces équations sont dérivées des lois de conservation de la masse (équation de continuité), de la quantité de mouvement (équations de Navier-stokes), et de l'énergie (équation de la température) et sont exprimées en projection dans un système d'axes cartésiens (x, y).

La coordonnée  $x$  est mesurée le long de la circonférence du cylindre horizontal à partir du point le plus bas et la coordonnée  $y$  est mesurée perpendiculairement à la surface, " $a$ " désignant le rayon du cylindre horizontal.

L'accélération gravitationnelle,  $g$ , agit vers le bas.

Le cylindre horizontal et le fluide sont initialement maintenus à la même température. Instantanément, ils sont portés à une température  $T_w > T_\infty$ , c'est-à-dire à la température ambiante du fluide, qui reste inchangée.

En considérant les différentes hypothèses préalables, un modèle mathématique est adopté pour décrire le phénomène de convection. Les équations qui en résultent sont donc essentielles pour comprendre le mouvement du fluide dans ce régime, et permettent de déterminer les effets de la pression, de la vitesse et de la température sur le comportement du fluide. En sommes, la résolution de ces équations est primordiale pour modéliser notre problème.

### II .6.1 : Forme dimensionnel des équations

Équation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.10})$$

$u$  : la vitesse dans la direction  $x$

$v$  : la vitesse dans la direction  $y$

Equation de quantité de mouvement et d'énergie

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sqrt{2} \nu \Gamma \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g \beta (T - T_\infty) \sin\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} u \quad (\text{II.11})$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (\text{II.12})$$

### II .6.2 : conditions aux limites dimensionnel

$$u=0, v =0 \text{ et } T=T_w \text{ si } y=0$$

$$u \rightarrow 0, v \rightarrow 0, T \rightarrow T_\infty \quad \text{si } y \rightarrow \infty$$

(II.13)

$u$  et  $v$  sont les composantes de vitesse le long des axes  $x$  et  $y$  respectivement.

$T$  est la température locale du fluide.

$g$  l'accélération de la pesanteur.

$\nu$  La viscosité cinématique

$\alpha$  Est la diffusivité thermique

$\beta$  le coefficient d'expansion thermique.

les indices  $w$  et  $\infty$  indiquent respectivement les conditions à la paroi et à l'extérieur de la couche limite.

la fonction de courant  $\psi(x, y)$ , et définie par :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{II.14})$$

Après avoir remplacé par la fonction de courant dans les équations (10, 11) on introduit que l'équation (10) est automatiquement satisfaite. L'équation (11) sera comme suite :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + \sqrt{2} \nu \Gamma \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + g \beta \theta \sin \xi - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (\text{II.15})$$

### II .6.3 : Forme adimensionnel des équations

Les équations ci-dessus ont été écrites sous forme non dimensionnelle en utilisant les variables suivantes :

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{x} Gr^{\frac{1}{4}}, \quad \theta(\xi, \eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} \quad (\text{II.16})$$

Équation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad (\text{II.17})$$

Equation de quantité de mouvement et d'énergie

$$u \frac{\partial u}{\partial \xi} + v \frac{\partial u}{\partial \eta} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \sqrt{2} \nu \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + g\beta(\theta) \sin \xi - \sigma B_0^2 \frac{u}{\rho} \quad (\text{II.18})$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + v \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \quad (\text{II.19})$$

Où : Pr est le nombre de Prandtl

$$Pr = \frac{\nu}{a} \quad , \quad f(\xi, \eta) = \frac{\psi}{\nu \xi Gr^4} \quad , \quad Gr = \frac{g\beta_1(T_w - T_\infty)a^3}{\nu^3}$$

$$We = \frac{\sqrt{2}\nu\Gamma x Gr^{3/4}}{a^3} \quad , \quad M = \frac{\sigma B_0^2 a^2}{\rho\nu\sqrt{Gr}} \quad (\text{II.20})$$

Pour résoudre les équations (17–19) on introduit la solution sous la forme proposée par Merkin [3] et Ping Cheng [18] soit :

$$\psi = \xi f(\xi, \eta) \quad \text{et} \quad \theta = \theta(\xi, \eta) \quad (\text{II.21})$$

Où  $\psi$  est la fonction de courant adimensionnelle définie de la manière habituelle :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \quad (\text{II.22})$$

On obtient les équations suivantes (prime désigne une différenciation par rapport à  $\eta$ ) :

$$f'''' + ff'' - f'^2 + We f'' f'''' + \frac{\sin \xi}{\xi} \theta - M f' = \xi \left( f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \quad (\text{II.23})$$

$$\frac{1}{Pr} \theta'' + f \theta' = \xi \left( f' \frac{\partial \theta'}{\partial \xi} - \theta' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \quad (\text{II.24})$$

#### II .6.4 : conditions aux limites adimensionnel

$$\text{A } \eta = 0, \quad f = 0, \quad f' = 0, \quad \theta = 1 + \frac{\theta'}{\gamma}$$

$$\eta \rightarrow \infty, \quad f' \rightarrow 0, \quad \theta \rightarrow 0 \quad (\text{II.25})$$

Le coefficient de friction cutanée (contrainte de cisaillement à la surface du cylindre) et le nombre de Nusselt local (taux de transfert de chaleur à la surface du cylindre) peuvent être

définis, respectivement, en utilisant les transformations décrites ci-dessus avec les expressions suivantes :

$$Gr^{-3/4}C_f = \xi(f''(\xi, 0)) + \frac{W_e}{2}\xi(f''(\xi, 0))^2 \quad (\text{II.26})$$

$$Gr^{-1/4}Nu = -\theta'(\xi, 0) \quad (\text{II.27})$$

### II .6.5 : Nombre adimensionnel

- **Nombre de Prandtl :**

C'est un nombre qui est le rapport entre la diffusivité de quantité de mouvement et la diffusivité thermique.

$$Pr = \nu/\alpha \quad (\text{II.28})$$

- **Nombre de Grashof :**

Il caractérise le transfert de chaleur au sein d'un fluide. Il est le rapport entre l'effet de flottabilité par la force motrice d'Archimède et l'effet résistif de l'écoulement.

$$Gr = \frac{g\beta_1(T_w - T_\infty)a^3}{\nu^3} \quad (\text{II.29})$$

- **Nombre de Reynolds :**

C'est un nombre sans dimension utilisé en mécanique des fluides, défini par le rapport des forces d'inertie sur les forces de viscosité.

$$Re = \frac{\rho U_0 L}{\mu} = \frac{U_0 L}{\nu} \quad (\text{II.30})$$

- **Nombre de Richardson :**

C'est un nombre sans dimension utilisé notamment en thermodynamique, qui a été développé par Lewis Fry Richardson, physicien et mathématicien anglais. Il est le rapport entre l'énergie potentielle gravitationnelle d'une parcelle du fluide et son énergie cinétique.

$$Ri = \frac{Gr}{Re^2} \quad (\text{II.31})$$

- **Nombre de Darcy :**

Il est le rapport entre la perméabilité du milieu et l'aire de section transversale (généralement de diamètre de porc au carré).

$$Da = \frac{K}{L^2} \quad (\text{II.32})$$

- **Nombre de Nusselt :**

Le coefficient moyen de transfert de chaleur pour la convection peut être représenté sous forme adimensionnelle par le nombre de Nusselt. Le nombre de Nusselt local et moyen sont calculés à l'interface solide-liquide et aux parois par les relations suivantes [17].

$$Nu = \frac{\varphi_{total}}{\lambda \frac{\Delta T}{L}}$$

$$\overline{Nu} = \int_0^1 Nu dY \quad (\text{II.32})$$

- **Nombre de Weissenberg (We) :**

Le nombre de Weissenberg (We) est un nombre sans dimension utilisé dans l'étude des écoulements viscoélastiques. Il porte le nom de Karl Weissenberg. Et compare les forces élastiques aux forces visqueuses. Le nombre de Weissenberg est défini comme le rapport entre le temps de relaxation du fluide et un temps de processus spécifique. Sa formule est définies dans l'éq (II.21)

- **Paramètre de force corporelle magnétique(M) :**

Le paramètre de force corporelle magnétique est un concept critique pour comprendre le comportement des ferrofluides et leurs interactions avec les champs magnétiques. Bien qu'il ait été étudié de manière approfondie, il y a encore des limitations et des domaines à explorer. Des études futures devraient viser à améliorer la précision du paramètre de force corporelle magnétique en considérant des géométries et des effets non linéaires plus réalistes.

## II .7 : Etude numérique

Une fois que les équations régissant le problème sont posées avec les conditions aux limites associées, il est souvent impossible de les résoudre analytiquement. Il existe différentes méthodes numériques de discrétisation des équations différentielles aux dérivées partielles, on cite :

- Méthode des éléments finis
- Méthode des différences finies
- Méthode des volumes finis

Dans notre travail on va expliquer la méthode des différences finies utilisée pour résoudre numériquement ces équations.

### II .7.1 : Méthode des différences finies

La méthode des différences finies est une technique courante en analyse numérique pour trouver des solutions approximatives d'équations aux dérivées partielles. Elle consiste à discrétiser l'espace en un maillage de points et à remplacer les dérivées partielles par des différences finies. Cette méthode permet de transformer un problème continu en un problème discret, facilitant ainsi sa résolution numérique. Les différences finies progressives, régressives, avant, et arrière sont des schémas utilisés pour approximer les dérivées premières et secondes. En outre, la méthode des différences finies peut être utilisée pour des problèmes aux limites d'ordre 2 en une dimension, comme l'équation de la chaleur. Elle repose sur des principes de consistance, stabilité et convergence pour garantir la précision des résultats obtenus

Voici les étapes générales de la méthode des différences finies :

- **Discrétisation du domaine :**

Le domaine de la fonction à résoudre est discrétisé en un ensemble fini de points. Cela implique de diviser l'intervalle spatial ou temporel en petits intervalles ou pas de temps.

- **Approximation des dérivées :**

Les dérivées de la fonction sont approximées en remplaçant les dérivées par des différences finies. Il existe plusieurs types de différences finies selon l'ordre de précision souhaité et la nature de l'équation différentielle.

- **Construction des équations discrètes :**

En utilisant les approximations des dérivées, les équations différentielles sont discrétisées pour obtenir un système d'équations algébriques.

- **Résolution du système d'équations :**

Le système d'équations algébriques obtenu est résolu numériquement à l'aide de méthodes appropriées telles que la méthode de Gauss, la méthode de Jacobi, la méthode de Gauss-Seidel ou d'autres méthodes itératives ou directes.

➤ **Calcul des valeurs de la fonction :**

Une fois que le système d'équations est résolu, les valeurs de la fonction inconnue sont obtenues aux points discrétisés du domaine.

➤ **Analyse et interprétation des résultats :**

Les résultats obtenus sont analysés pour évaluer la validité de l'approche numérique, la convergence de la solution et son adéquation par rapport au problème physique initial.

➤ **Interpolation si nécessaire :**

Si une représentation continue de la fonction est requise, une interpolation peut être utilisée pour estimer les valeurs de la fonction entre les points discrétisés.

La méthode des différences finies est largement utilisée dans de nombreux domaines tels que la physique, l'ingénierie, les finances et d'autres sciences appliquées pour résoudre une grande variété de problèmes impliquant des équations différentielles. Elle est relativement simple à mettre en œuvre et peut être utilisée pour résoudre des problèmes avec des géométries complexes et des conditions aux limites non standard. [28]

## **II .7.2 : Méthode de Keller-box (boite de Keller)**

Dans notre problème non linéaire et multi-physique le modèle général d'écoulement défini par les équations (23) et (24). Avec les conditions aux limites (25)

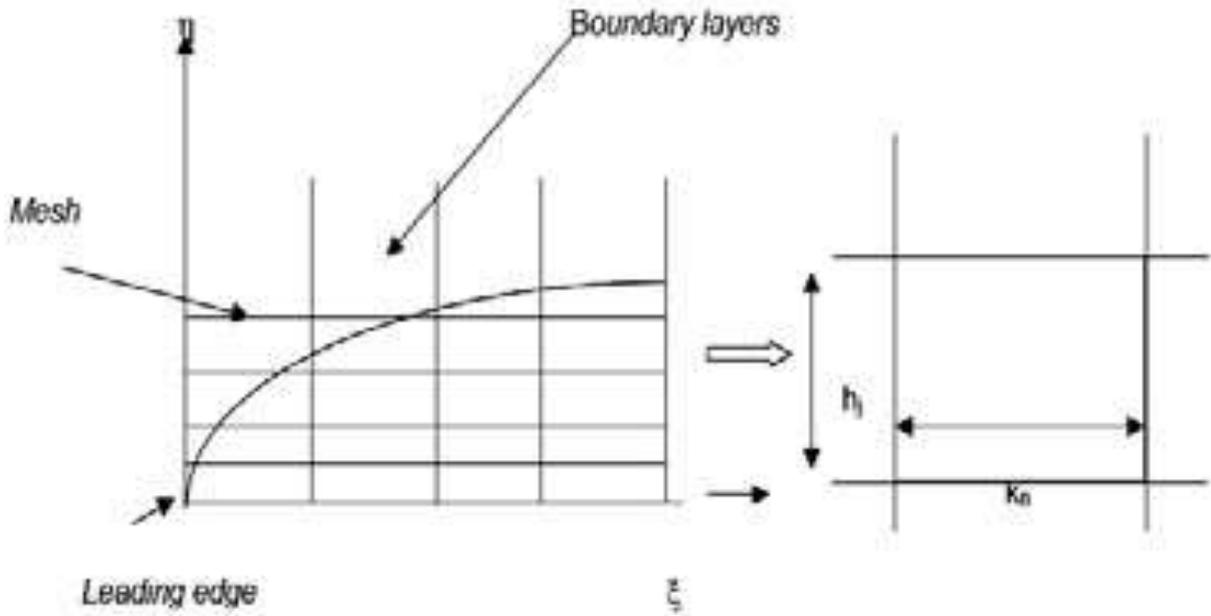
Ces problèmes peuvent être résolus à l'aide d'un certain nombre de schémas numériques. Ici, nous mettons en œuvre une méthode de différence finie implicite, précise et populaire, du second ordre, développée à l'origine par Keller [18]. Parmi les études récentes utilisant cette méthode dans le contexte des écoulements magnétohydrodynamiques et rhéologiques, on peut citer Sajid et al [19] qui ont étudié les écoulements de ferrofluides dans des conduits courbes, Gaffar et al [20] qui ont étudié la convection non newtonienne hyperbolique tangente hydromagnétique à partir d'un cône et les écoulements radiatifs-convectifs de la couche limite de glissement de Casson par Subba Rao et al [21]. Dans le schéma de Keller, les équations différentielles partielles couplées à plusieurs degrés et à plusieurs ordres définis

La méthode de Keller-box, également connue sous le nom de méthode de la boîte Keller, est une technique numérique utilisée pour résoudre des ensembles d'équations aux dérivées partielles paraboliques. Cette méthode, initialement conçue par Keller & Cebeci et popularisée par Cebeci & Bradshaw, est couramment employée pour résoudre les équations de la couche limite en mécanique des fluides.

La méthode de Keller Box comprend des étapes commençant par la méthode standard de Newton-Raphson pour résoudre la racine d'une équation algébrique, puis s'étendant à deux variables ou plus, aux équations différentielles ordinaires, et finalement aux systèmes paraboliques d'équations différentielles partielles. Il s'agit d'un outil puissant pour résoudre les équations différentielles non linéaires en raison de sa stabilité et de son efficacité.

La méthode commence par l'introduction de nouvelles variables dans le système gouverné avec des conditions aux limites, ce qui donne un ensemble d'équations différentielles du premier ordre. Ces équations sont ensuite discrétisées à l'aide d'approximations par différences finies et les équations algébriques non linéaires sont linéarisées à l'aide de la méthode de linéarisation de Newton. Un schéma d'élimination tri-diagonal par blocs est ensuite appliqué pour résoudre le système linéaire résultant

Les résultats numériques et l'analyse utilisant la méthode de la boîte de Keller impliquent généralement la visualisation des résultats à l'aide de graphiques et de tableaux. La méthode s'est avérée être une technique efficace et fiable pour résoudre les équations gouvernantes non linéaires couplées, fournissant des solutions précises et efficaces pour divers problèmes d'écoulement des fluides.



**Figure II. 2:** élément de boîte Keller et maillage de la couche limite

Alors pour résoudre notre problème on va écrire les équations de Nème ordre se forme de premier ordre

**II .7.2 .1 : Réduction du système d'équations différentielles partielles du Nème ordre aux équations du premier ordre**

La réduction d'un système d'équations différentielles partielles (EDP) du Nème ordre aux équations du premier ordre est une étape importante dans la simplification et la résolution de ces systèmes. Nous commençons par réécrire le système en introduisant de nouvelles variable

Pour écrire les équations (23) (24) de troisième et deuxième ordre de forme de première ordre on a

$$f''' + ff'' - f'^2 + W_e f'' f''' + \frac{\sin \xi}{\xi} \theta - Mf' = \xi \left( f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \quad \text{(II.34)}$$

$$\frac{1}{Pr} \theta'' + f\theta' = \xi \left( f' \frac{\partial \theta'}{\partial \xi} - \theta' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \quad \text{(II.35)}$$

Les variables que nous utilisons sont comme suite

$$u(x, y) = f' ; \quad v(x, y) = f'' ; \quad S(x, y) = \theta \quad \text{(II.36)}$$

De la

$$f' = u \quad (\text{II.37})$$

$$f'' = u' \quad (\text{II.38})$$

$$u' = v \quad (\text{II.39})$$

Donc :

$$f'' = v \quad (\text{II.40})$$

Et

$$\theta' = t \quad (\text{II.41})$$

Les équations (34) et (35) se réduisent de la forme suivante :

$$v' + fv - u^2 + w_e vv' + \frac{\sin \xi}{\xi} S - Mu = \xi \left( u \frac{\partial u}{\partial \xi} - v \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \quad (\text{II.42})$$

$$\frac{1}{Pr} t' + ft = \xi \left( u \frac{\partial S}{\partial \xi} - t \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \quad (\text{II.43})$$

Où les nombres premiers indiquent la différenciation par rapport à  $\eta$ . En termes de variables dépendantes, les conditions aux limites (25) deviennent :

$$\eta = 0, \quad f = 0, \quad u = 0, \quad S = 1 + \frac{t}{\gamma}$$

$$\eta \rightarrow \infty, \quad u \rightarrow 0, \quad S = 0 \quad (\text{II.44})$$

### II .7.2 .2 : Le maillage de calcul

Un maillage de calcul bidimensionnel (grille) est imposé sur le plan  $\xi - \eta$  comme indiqué sur la Figure.2 On définit Le processus de pas par :

$$\begin{aligned} \eta^0 = 0 \quad , \quad \eta_j = \eta_{j-1} + h_j \quad , \quad j=1,2,\dots,J \quad \eta_J \equiv \eta_\infty + \\ \xi^0 = 0 \quad , \quad \xi^n = \xi^{n-1} + K_n \quad , \quad n=1,2,\dots,N \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

Où  $K_n$  et  $h_j$  représentent les distances de pas dans les directions  $\xi$  et  $\eta$  respectivement.

Si  $g_j^n$  représente la valeur d'une variable à  $(\eta_j, \xi^n)$  alors les variables et les dérivées des équations (37) à (43) on  $(\eta_{j-1/2}, \xi^{n-1/2})$  sont remplacer par

$$g_{j-1/2}^{n-1/2} = \frac{1}{4} (g_j^n + g_{j-1}^n + g_j^{n-1} + g_{j-1}^{n-1}) \quad (\text{II.46})$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \eta}\right)_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = \frac{2}{2h_j} (g_j^n - g_{j-1}^n + g_j^{n-1} - g_{j-1}^{n-1}) \quad (\text{II.47})$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \xi}\right)_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2K^n} (g_j^n - g_{j-1}^n + g_j^{n-1} - g_{j-1}^{n-1}) \quad (\text{II.48})$$

L'approximation par différences finies des équations (37), (39), (41), (42), (43) pour le point médian  $(\eta_{j-1/2}, \xi^n)$  prend la forme suivante :

$$h_j^{-1}(f_j^n - f_{j-1}^n) = u_{j-1/2}^n \quad (\text{II.49})$$

$$h_j^{-1}(u_j^n - u_{j-1}^n) = v_{j-1/2}^n \quad (\text{II.50})$$

$$h_j^{-1}(S_j^n - S_{j-1}^n) = t_{j-1/2}^n \quad (\text{II.51})$$

$$\begin{aligned} (v_j - v_{j-1}) + (1 + \alpha) \frac{h_j}{4} [(f_j + f_{j-1})(v_j + v_{j-1})] - \frac{(1+\alpha)h_j}{4} (u_j + u_{j-1})^2 + \\ \frac{Ah_j}{2} (S_j + S_{j-1}) + \frac{w_e}{2} (v_j + v_{j-1})(v_j - v_{j-1}) - \frac{Mh_j}{2} (u_j + u_{j-1}) - \\ \frac{\alpha h_j}{2} f_{j-1/2}^{n-1} (v_j + v_{j-1}) + \frac{\alpha h_j}{2} v_{j-1/2}^{n-1} (f_j + f_{j-1}) = [R_1]_{j-1/2}^{n-1} \end{aligned} \quad (\text{II.52})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pr} (t_j - t_{j-1}) + (1 + \alpha) \frac{h_j}{4} [(f_j + f_{j-1})(t_j + t_{j-1})] - \frac{\alpha h_j}{4} [(u_j + u_{j-1})(S_j + S_{j-1})] + \\ \frac{\alpha h_j}{2} S_{j-1/2}^{n-1} (u_j + u_{j-1}) - \frac{\alpha h_j}{2} u_{j-1/2}^{n-1} (S_j + S_{j-1}) - \frac{\alpha h_j}{2} f_{j-1/2}^{n-1} (t_j + t_{j-1}) + \\ \frac{\alpha h_j}{2} t_{j-1/2}^{n-1} (f_j + f_{j-1}) = [R_2]_{j-1/2}^{n-1} \end{aligned} \quad (\text{II.53})$$

Les abréviations suivantes s'appliquent ici :

$$\alpha = \frac{\xi^{n-1/2}}{K_n} \quad (\text{II.54})$$

$$A = \frac{\sin(\xi^{n-1/2})}{\xi^{n-1/2}} \quad (\text{II.55})$$

$$\begin{aligned} [R_1]_{j-1/2}^{n-1} = -h_j \left[ \left( \frac{v_j - v_{j-1}}{h_j} \right) + (1 - \alpha) \left( f_{j-1/2} v_{j-1/2} \right) + W_e v_{j-1} v'_{j-1/2} + (1 - \alpha) \left( u_{j-1/2} \right)^2 + \right. \\ \left. A \left( S_{j-1/2} \right) - M \left( u_{j-1/2} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.56})$$

$$[R_2]_{j-1/2}^{n-1} = -h_j \left[ \frac{1}{Pr} \left( \frac{t_j - t_{j-1}}{h_j} \right) + (1 - \alpha) (f_{j-1/2} t_{j-1/2}) + \alpha (u_{j-1/2} S_{j-1/2}) \right] \quad (\text{II.57})$$

Les conditions aux limites prennent la forme suivante

$$f_0^n = u_0^n = 0, \theta_0^n = 1, u_j^n = 0, v_j^n = 0, \theta_j^n = 0 \quad (\text{II.58})$$

Le système complexe d'équations algébriques non linéaires est simplifié en utilisant la méthode de Newton pour linéariser, puis résolu à l'aide de la méthode d'élimination par blocs. La précision des calculs dépend du nombre de points de maillage dans les deux directions. Après avoir testé différentes tailles de grille dans la direction radiale ( $\eta$ ), un nombre accru de points de maillage est choisi, tandis que dans la direction tangentielle ( $\xi$ ), un nombre considérablement moindre de points est utilisé. Pour garantir la satisfaction des conditions limites,  $\eta_{max}$  est fixé à 16, tandis que  $\xi_{max}$  est maintenu à 1,0 pour le domaine d'écoulement. Ainsi, l'indépendance du maillage est assurée dans cette étude. Un programme informatique (algorithme) est exécuté dans MATLAB sur un ordinateur personnel.

## II .9 : conclusion

L'utilisation des méthodes numériques s'avère indispensable pour les études de dynamique des fluides. Dans notre étude, on a utilisé la méthode des différences finies.

Dans le prochain chapitre, résultats et discussion, nous allons voir l'influence de certains paramètres (nombre de Prandtl, nombre de Weissenberg, paramètre de force magnétique) sur les profils vitesses et températures, et l'effet de ces derniers sur les résultats du coefficient de frottement cutané et sur les résultats du coefficient du nombre de Nusselt

# **Chapitre III**

**[Résultats et discussions]**

# Chapitre III : Résultats et discussions

## III.1 : Introduction

Dans ce chapitre nous présentons les principaux résultats obtenus à partir de l'étude numérique d'un écoulement de couche limite d'un fluide non newtonien autour d'un cylindre horizontal chauffé. Les résultats numériques présentés dans ce chapitre sont obtenus en utilisant la méthode numérique (méthode de Keller box implicite). Nous rappelons que notre étude concerne un écoulement de couche limite bidimensionnelle qui se développe sur un cylindre horizontal chauffé, dont la température  $T_w$ . En raison de l'existence d'un transfert thermique, il existe un couplage entre l'aspect dynamique et thermique du problème. L'étude est sur l'influence de la variation du nombre de Prandtl ( $Pr$ ), le nombre de weissenberg ( $We$ ), paramètre de la force magnétique ( $M$ ), paramètre de chauffage newtonien adimensionnel ( $\gamma$ ) et le nombre de Nusselt ( $Nu$ ) sur les profils de vitesses et de températures.

## III.2 : Validation numérique

Les méthodes actuellement utilisées par Keller box (la boîte de Keller) ont été confirmées pour un type spécifique d'écoulement, qui est non magnétique ( $M = 0$ ) et non affecté par le chauffage newtonien ( $\gamma = 0$ ), comme décrit dans une étude antérieure par Nazar et ses collègues [22]. En outre, ces méthodes exigent également que  $M = We = \gamma = 0$ .

	Pr=1.0	
	Nazar et ses collègues	Solution actuelle
<b>0</b>	0.4214	0.4212
$\pi/6$	0.4161	0.4259
$\pi/3$	0.4005	0.4004
$\pi/2$	0.3741	0.4004
$2\pi/3$	0.3355	0.3743
$5\pi/6$	0.2811	0.2809
$\pi$	0.1916	0.1917

**Tableau. III.1 :** Variations du coefficient de transfert de chaleur local  $-\theta'(\xi, 0)$  pour différentes valeurs de  $\xi$  avec  $We=0.0$  ,  $M=0.0$  ,  $\gamma=0$

Dans le présent modèle, il est également possible de faire une comparaison car l'équation de la quantité de mouvement et les conditions aux limites prennent la forme réduite suivante :

$$f'''' + ff'' - f'^2 + \frac{\sin \xi}{\xi} \theta = \xi \left( f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right)$$

$$\text{A } \eta = 0 \quad ; \quad f = 0 \quad ; \quad f' = 0 \quad ; \quad \theta = 0$$

$$\eta \rightarrow 0 \quad ; \quad f' \rightarrow 0 \quad ; \quad \theta \rightarrow 0$$

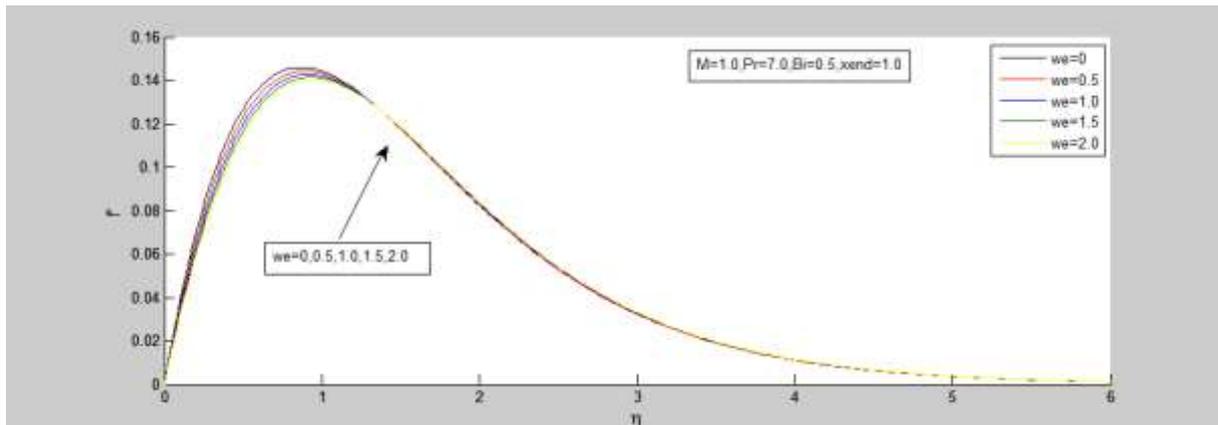
L'équation énergétique (II.35) est identique à celle considérée dans Nazar et ses collègues [22]. La comparaison des solutions est documentée dans le tableau 1. La corrélation est excellente et la confiance dans les solutions actuelles est donc justifiée.

### III.3 : Résultats et discussions

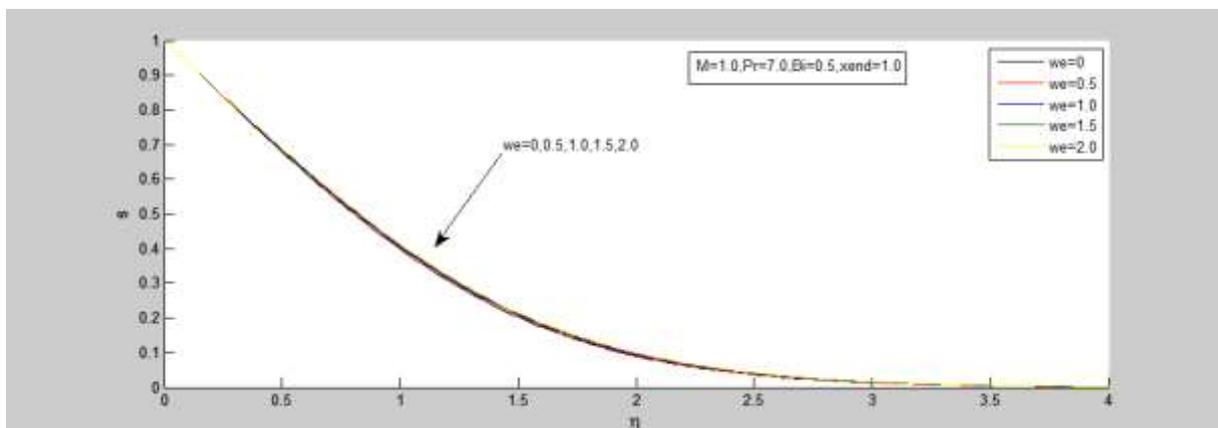
Une analyse détaillée a été menée en utilisant la méthode de Keller box (le code de la boîte de Keller) afin d'examiner comment les paramètres thermo-physiques principaux affectent la vitesse, la température, le frottement de la paroi et le nombre de Nusselt. Les calculs actuels utilisent les paramètres par défaut suivants sont prescrit (sauf indication contraire) :  $\xi=1$ ,  $M=1$ ,  $We=0.3$ ,  $Pr=7$ ,  $\gamma=0.5$ . Elles sont représentées dans les figures suivantes : 1 2 3 4 5 6 7

#### III.3.1 : Effet de We sue les profils de vitesse et de température

L'influence du nombre de Weissenberg ( $We$ ) n'intervient que dans l'équation de quantité de mouvement (II.34) dans la dérivée mixte  $w_e f'' f'''$ . Le nombre de Weissenberg ( $We$ ) mesure les effets relatifs de la viscosité et de l'élasticité. Un nombre de Weissenberg de zéro correspond à un fluide purement newtonien, et un nombre de Weissenberg infini correspond à un solide purement élastique. Les valeurs intermédiaires correspondent assez bien aux valeurs réelles de l'indice de Weissenberg.



**Figure III. 1:** effet de nombre de Weissenberg ( $We$ ) sur le profil de vitesse



**Figure III. 2:** effet de nombre de Weissenberg ( $We$ ) sur le profil de température

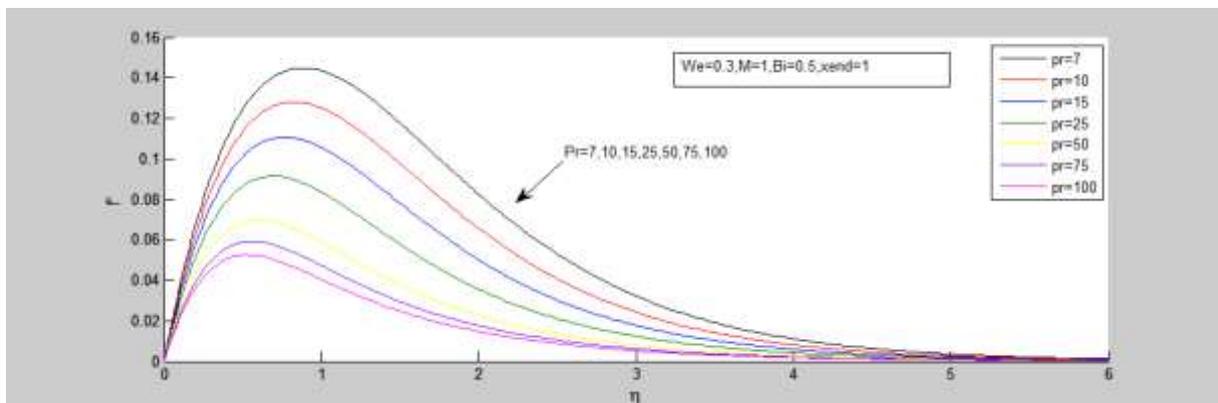
Les figures **III.1** et **III.2** mettent en évidence l'impact du nombre de Weissenberg ( $We$ ) sur les profils de vitesse et de température dans les propriétés viscoélastiques des polymères. À mesure que le  $We$  augmente, on observe généralement une augmentation de l'amplitude des vitesses dans la couche limite. Cela indique une accélération de l'écoulement de la couche limite, à mesure que les effets visqueux s'affaiblissent et que la résistance à l'écoulement diminue. En conséquence, la couche limite de quantité de mouvement s'appauvrit avec l'augmentation du  $We$ .

Il convient de noter que dans la figure **III.1**, le paramètre de la force magnétique du corps,  $M$ , est maintenu à l'unité, ce qui signifie que la traînée magnétique et la force hydrodynamique visqueuse sont de même amplitude. Quant à la figure **III. 2**, elle révèle une augmentation cohérente de la température du fluide viscoélastique avec des valeurs croissantes du nombre de Weissenberg  $We$ . L'accélération de l'écoulement favorise le développement de

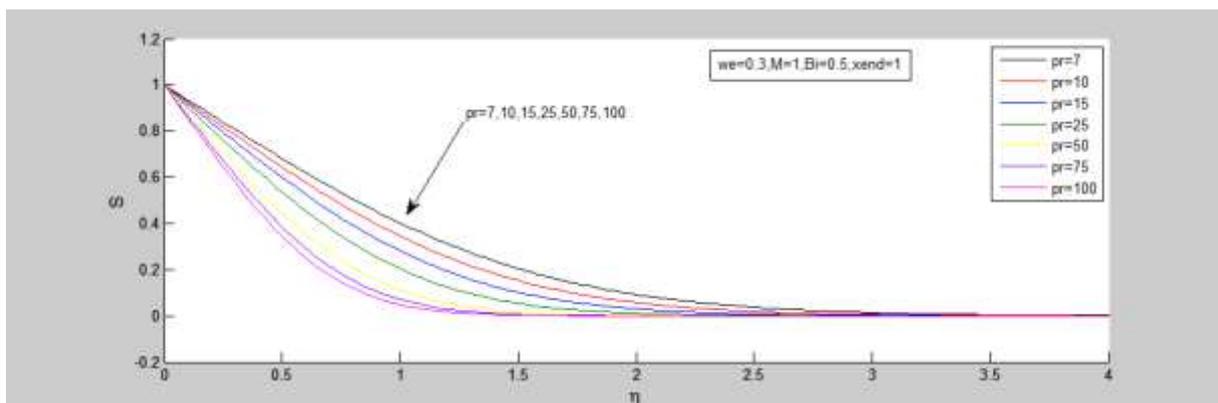
l'élan, ce qui contribue également à la diffusion thermique, entraînant ainsi un réchauffement de la couche limite. Par conséquent, l'épaisseur de la couche limite thermique augmente avec les valeurs de  $We$ , c'est-à-dire avec la diminution de la viscosité et l'augmentation des effets élastiques.

En conclusion, les fluides newtoniens ( $We = 0$ ) atteignent des vitesses et des températures plus basses que les fluides de Williamson. Ces observations sont cohérentes avec des études antérieures menées par Hayat et ses collègues [23] et Khan et Khan [24].

### III.3.2 : Effet de $Pr$ sur les profils de vitesse et de température



**Figure III. 3:** effet de  $Pr$  sur le profil vitesse



**Figure III. 4:** effet de  $Pr$  sur le profil de température

L'évolution des caractéristiques de vitesse et de température le long de la coordonnée transversale, perpendiculaire à la surface du cylindre, est illustrée dans les figures **III.3** et **III.4** pour différentes valeurs du nombre de Prandtl,  $Pr$ . On prend en compte les valeurs de  $Pr$  élevées, car elles sont en accord avec les polymères industriels dans la réalité physique. Le rapport entre

la diffusivité de la quantité de mouvement et la diffusivité thermique dans le régime de la couche limite est représenté par le nombre de Prandtl, qui correspond également au rapport entre le produit de la capacité thermique spécifique et de la viscosité dynamique et la conductivité thermique du fluide.

Dans le cas des polymères, la vitesse de diffusion de la quantité de mouvement est nettement supérieure à celle de la diffusion thermique, tandis que les faibles valeurs de conductivité thermique des polymères entraînent des nombres de Prandtl élevés. (Figure III.3) En augmentant  $Pr$  de 7 à 100, l'écoulement de la couche limite se décélère considérablement, ce qui suggère un épaissement de cette dernière près de la surface du cylindre.

De la même manière, la figure III.4 illustre que des valeurs plus élevées de Prandtl entraînent une baisse importante de la température dans toute la couche limite transversale à la surface du cylindre, ce qui réduit l'épaisseur de la couche limite thermique. L'application d'une condition limite à l'infini suffisamment grande dans le cadre numérique de la méthode Keller box (boîte de Keller) est confirmée par les profils asymptotiquement lisses dans l'écoulement libre (valeurs élevées de  $\eta$ ).

### III.3.3 : Effet de $M$ sur les profils de vitesse et de température

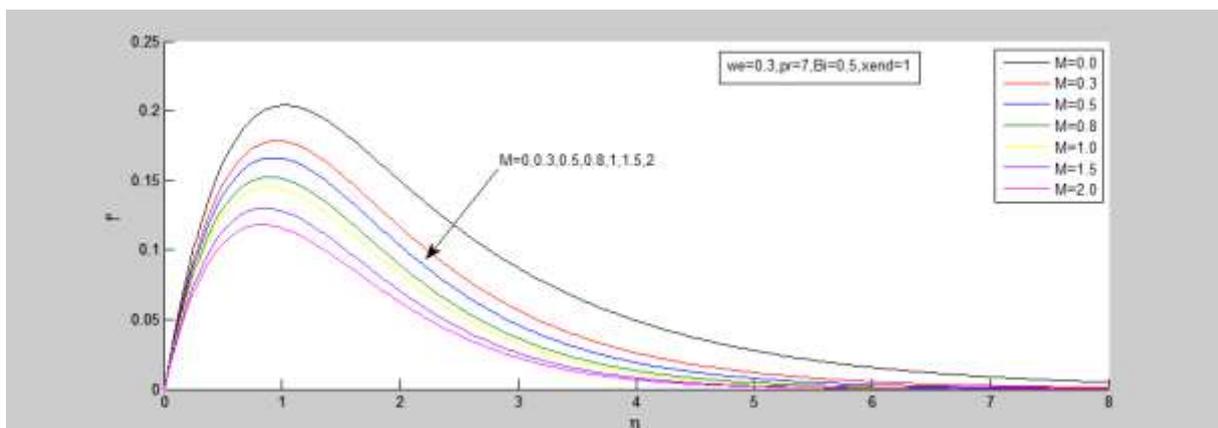
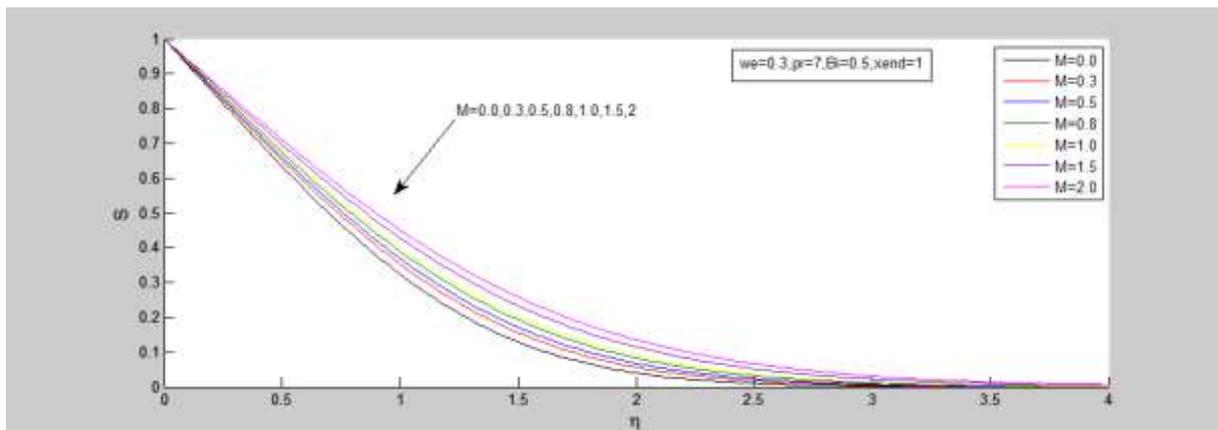


Figure III. 5: effet de  $M$  sur le profil de vitesse



**Figure III. 6:** effet de  $M$  sur le profil de température

L'évolution des fonctions de vitesse et de température avec une variation du paramètre de force magnétique ( $M$ ) est illustrée dans les figures **III.5** et **III.6**. Une force de corps retardatrice transversale est produite par le champ magnétique radial. La force exercée ralentit le déplacement de la couche limite, ce qui entraîne une diminution des vitesses, comme illustré dans la figure **III.5**. Il est donc possible de réguler le développement de la quantité de mouvement dans le revêtement viscoélastique en utilisant un champ magnétique radial. L'impact est significatif dans l'ensemble de la couche limite, de la surface du cylindre jusqu'à l'écoulement libre. Ainsi, la couche limite du moment cinétique (hydrodynamique) devient plus épaisse lorsque le champ magnétique augmente. Selon la figure **III.6**, il est évident que la température augmente considérablement lorsque le paramètre magnétique est plus élevé. La quantité excessive de travail nécessaire pour entraîner le polymère contre l'effet du champ magnétique est dissipée sous forme de chaleur. Cela entraîne une dynamique dans la couche limite et accroît l'épaisseur de la couche thermique limite. Une fois de plus, l'impact du champ magnétique persiste dans l'ensemble de la couche limite. D'autres recherches sur le transfert de chaleur magnétique non newtonien, telles que celles menées par Kasim et ses collègues [25] et Megahed [26], sont en accord avec ces résultats.

### III.3.4 : Effet de $\xi$ sur le profil de vitesse et de température

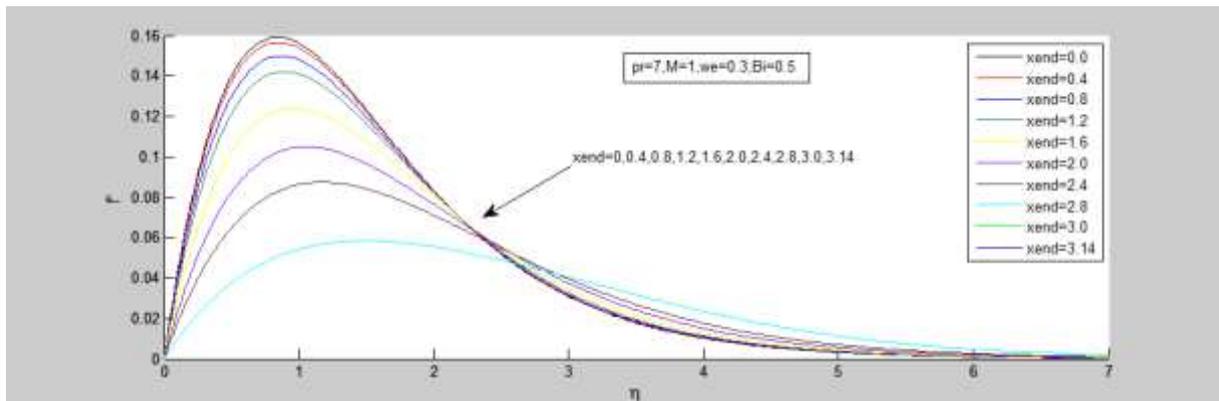


Figure III. 7: effet de  $\xi$  sur le profil de vitesse

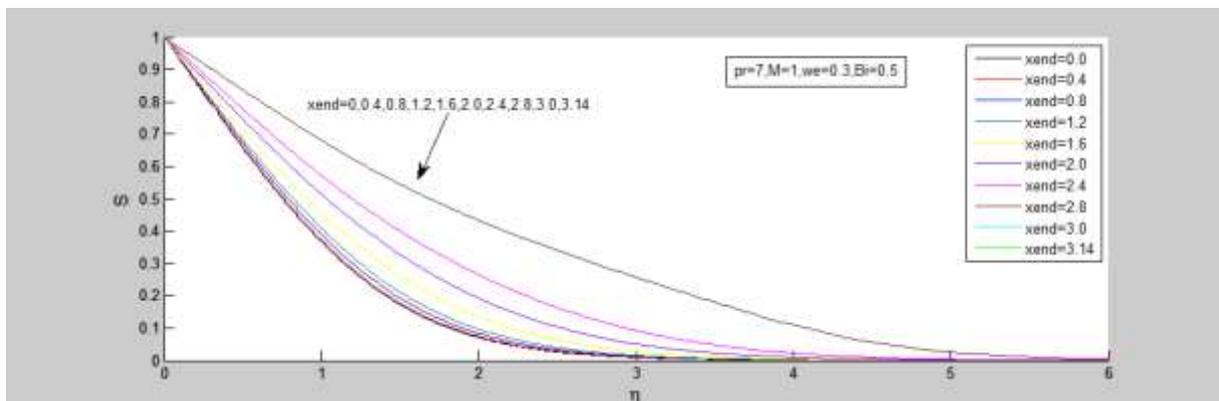
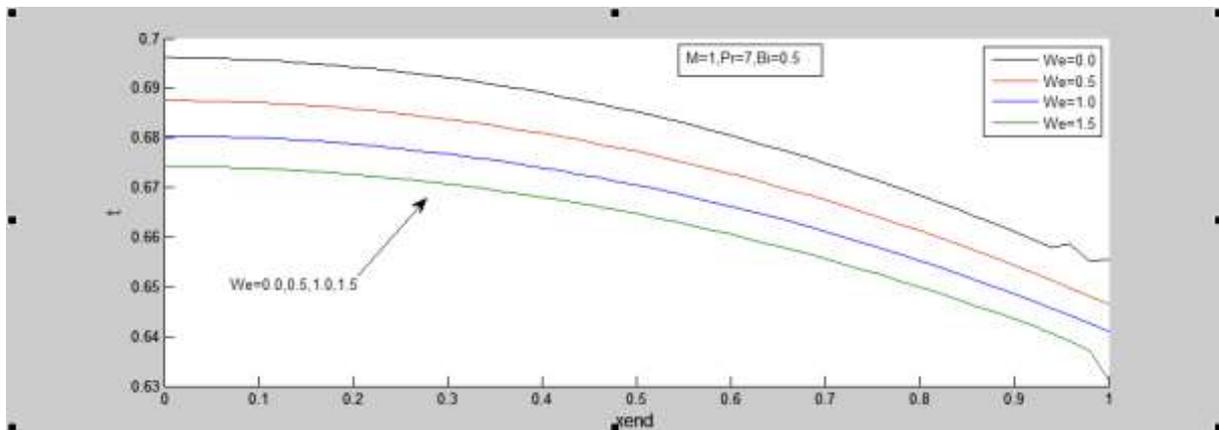


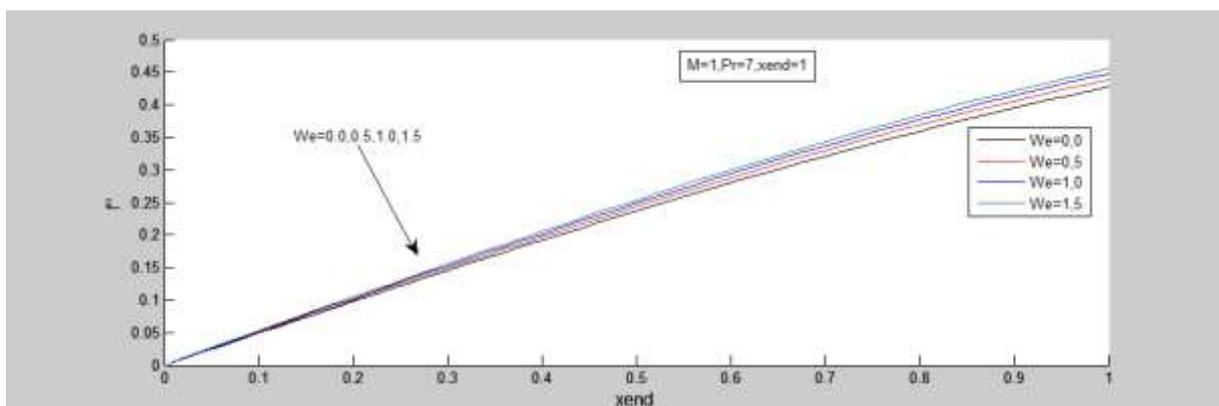
Figure III. 8: effet de  $\xi$  sur le profil de température

Les figures III.7 et III.8 examinent comment la position le long de la surface du cylindre, appelée coordonnée tangentielle ( $\xi$ ), influence la vitesse et la température dans la couche limite. Lorsque  $\xi$  augmente, c'est-à-dire lorsque l'on s'éloigne du point de stagnation inférieur ( $\xi = 0$ ) le long du cylindre, la décélération de l'écoulement dans la couche limite est légère, comme illustré dans la figure III.7. Ainsi, l'épaisseur de la couche limite où la vitesse change légèrement augmente marginalement avec  $\xi$ . En revanche, dans la figure III.8, une légère augmentation de la température est observée avec l'augmentation de  $\xi$ . Cela signifie que l'épaisseur de la couche limite où la température change légèrement augmente progressivement du point de stagnation inférieur sur la surface du cylindre vers sa périphérie. Mais comme on approche plus en plus vers ( $\xi=\pi$ ) les lignes de courant de la couche limite seront moins attachées à la paroi du cylindre c'est le décollement de couche limite.

### III.3.5 : Effet de $We$ sur les résultats du coefficient de frottement cutané et sur les résultats du coefficient du nombre de Nusselt



**Figure III. 9:** effet de  $We$  sur les résultats du coefficient du nombre de Nusselt



**Figure III. 10:** effet de  $We$  sur les résultats du coefficient de frottement cutané

En présence d'un glissement thermique et d'un glissement de vitesse, les figures **III.9** et **III.10** montrent comment la contrainte de cisaillement de surface (frottement cutané) et le nombre de Nusselt (gradient de transfert thermique de la paroi) varient en fonction du nombre de Weissenberg.

Conformément au comportement près de la paroi calculé pour le champ de vitesse de la figure 1a, on observe une augmentation significative du frottement cutané avec l'augmentation des valeurs de  $We$ .

Avec des valeurs de  $We$  progressivement plus élevées, l'élasticité du polymère augmente. Cela favorise le développement de l'élan et accélère l'écoulement de la couche limite. Une tendance similaire a été calculée dans les études de Hayat et al [23].

Le nombre de Weissenberg indique le degré d'anisotropie ou d'orientation généré par la déformation et est approprié pour décrire les écoulements avec un historique d'étirement constant, et donc approprié pour les polymères. Une forte réduction du nombre de Nusselt se produit avec une augmentation du nombre de Weissenberg, c'est-à-dire que la chaleur est transférée de la surface du cylindre à la couche limite. Cela concorde avec la figure III.2 où l'on constate que la température (et l'épaisseur de la couche limite thermique) augmente avec le nombre de Weissenberg. La surface du cylindre est donc efficacement refroidie lorsque le nombre de Weissenberg est élevé.

### III.3.6 : Effet de $M$ sur les résultats du coefficient de frottement cutané et sur les résultats du coefficient du nombre de Nusselt

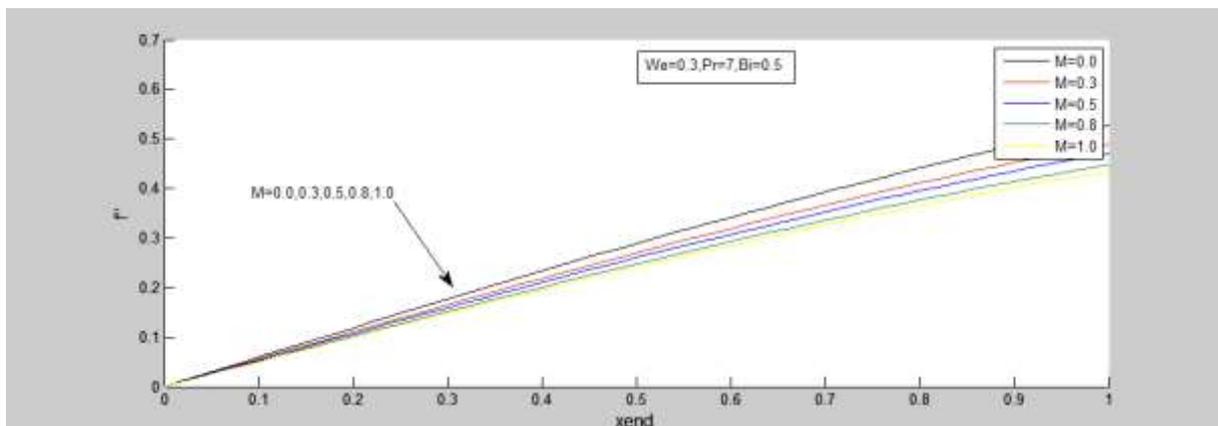
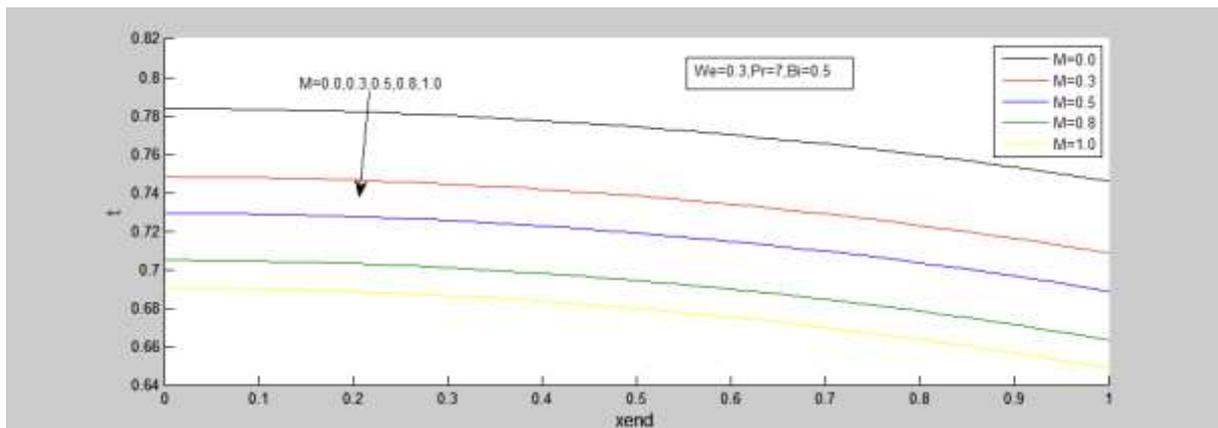


Figure III. 11: effet de  $M$  sur les résultats du coefficient de frottement cutané



**Figure III. 12:** effet de  $M$  sur les résultats du coefficient du nombre de Nusselt

Les figures **III.11** et **III.12** illustrent l'influence du paramètre magnétique ( $M$ ) sur le frottement cutané et le nombre de Nusselt.

D'après la (figure **III.11**), on constate une diminution significative du frottement cutané lorsque le champ magnétique est plus élevé, ce qui entraîne un ralentissement de l'écoulement de la couche limite.

Il n'est donc possible d'atteindre le frottement cutané maximal qu'en l'absence de champ magnétique radial, c'est-à-dire  $M = 0$ . Dans le régime où  $M < 1$ , la force magnétique du corps est supérieure à la force hydrodynamique visqueuse. Pour  $M > 1$ , il en va autrement.

Les valeurs de  $M$  plus élevées de Nusselt entraînent une diminution du transfert de chaleur de la couche limite vers la paroi (surface du cylindre). Cela suggère de manière physique qu'une plus grande quantité de chaleur est transférée de la surface du cylindre vers le fluide, ce qui explique les températures plus élevées liées à un fort champ magnétique dans les calculs précédents (figure **III.6**).

Le champ magnétique est donc un mécanisme puissant pour contrôler les caractéristiques thermiques et de vitesse dans la dynamique des polymères conducteurs d'électricité.

### III.4 : Validation de coefficient de frottement cutané ( $C_f$ ) et de du coefficient du nombre de Nusselt ( $Nu$ ) pour différents $We$ , $\gamma$ et $\xi$

We	$\gamma$	$\xi = 0.0$		$\xi = \pi/6$		$\xi = \pi/4$	
		$C_f$	$Nu$	$C_f$	$Nu$	$C_f$	$Nu$
0.0	0.5	0	0.5532	0.2275	0.5452	0.2516	0.4620
0.3		0	0.5482	0.2308	0.5405	0.2549	0.4596
0.5		0	0.5451	0.2328	0.5376	0.2569	0.4580
0.8		0	0.5410	0.2356	0.5337	0.2597	0.4559
1.0		0	0.5384	0.2373	0.5313	0.2615	0.4546
1.5		0	0.5327	0.2413	0.5257	0.2657	0.4515
2		0	0.5276	0.2449	0.5209	0.2696	0.4487
0.3	0.25	0	0.3310	0.1697	0.3263	0.1814	0.2704
	0.3	0	0.4010	0.1907	0.3954	0.2065	0.3309
	0.35	0	0.4525	0.1657	0.3820	0.2240	0.3758
	0.4	0	0.4920	0.1753	0.4170	0.2370	0.4103
	0.45	0	0.5230	0.1826	0.4447	0.2469	0.4375
	0.5	0	0.5482	0.1885	0.4671	0.2549	0.4596

We	$\gamma$	$\xi = \pi/3$		$\xi = \pi/2$		$\xi = 2\pi/3$	
		$Cf$	$Nu$	$Cf$	$Nu$	$Cf$	$Nu$
0.0	0.5	0.3339	0.4463	0.4136	0.4017	0.4030	0.3524
0.3		0.3379	0.4440	0.4176	0.4053	0.4064	0.3481
0.5		0.3404	0.4425	0.4201	0.4044	0.4082	0.3477
0.8		0.3440	0.4408	0.4239	0.4025	0.4109	0.3465
1.0		0.3462	0.4397	0.4261	0.4025	0.4128	0.3458
1.5		0.3515	0.4370	0.4316	0.4006	0.4166	0.3462
2		0.3563	0.4344	0.4367	0.3988	0.4203	0.3454
0.3	0.25	0.2402	0.2607	0.2961	0.2372	0.2867	0.2024
	0.3	0.2736	0.3195	0.3375	0.2909	0.3275	0.2489
	0.35	0.2969	0.3629	0.3665	0.3308	0.3561	0.2834
	0.4	0.3141	0.3962	0.3880	0.3614	0.3772	0.3100
	0.45	0.3274	0.4226	0.4045	0.3857	0.3935	0.3310
	0.5	0.3379	0.4440	0.4176	0.4053	0.4064	0.3481

**Tableau III.2 :** Validation de  $Cf$  et  $Nu$  pour différents  $We$ ,  $\gamma$  et  $\xi$

### III.5 : Validation de coefficient de frottement cutané ( $C_f$ ) et de du coefficient du nombre de Nusselt ( $Nu$ ) pour différents $\gamma$ et $Pr$

$\gamma$	$Pr$	$\xi = 0.0$		$\xi = \pi/6$		$\xi = \pi/4$	
		$C_f$	$Nu$	$C_f$	$Nu$	$C_f$	$Nu$
0.25	7	0	0.2871	0.1342	0.2749	0.1814	0.2704
0.3		0	0.3427	0.1527	0.3364	0.2065	0.3309
0.35		0	0.3891	0.1657	0.3820	0.2240	0.3758
0.4		0	0.4247	0.1753	0.4170	0.2370	0.4103
0.45		0	0.4528	0.1826	0.4447	0.2469	0.4375
0.5		0	0.4756	0.1885	0.4671	0.2549	0.4596
0.5	10	0	0.5331	0.1776	0.5236	0.2402	0.5153
	20	0	0.6605	0.1570	0.6489	0.2124	0.6392
	25	0	0.7065	0.1506	0.6941	0.2037	0.6834
	50	0	0.8666	0.1316	0.8518	0.1782	0.8388
	75	0	0.9739	0.1213	0.9574	0.1642	0.9429
	100	0	1.0568	0.1142	1.0390	0.1547	1.0235

$\gamma$	Pr	$\xi = \pi/3$		$\xi = \pi/2$		$\xi = 2\pi/3$	
		$Cf$	$Nu$	$Cf$	$Nu$	$Cf$	$Nu$
0.25	7	0.2402	0.2607	0.2961	0.2372	0.2867	0.2024
0.3		0.2736	0.3195	0.3375	0.2909	0.3275	0.2489
0.35		0.2969	0.3629	0.3665	0.3308	0.3561	0.2834
0.4		0.3141	0.3962	0.3880	0.3614	0.3772	0.3100
0.45		0.3274	0.4226	0.4045	0.3857	0.3935	0.3310
0.5		0.3379	0.4440	0.4176	0.4053	0.4064	0.3481
0.5	10	0.3186	0.4981	0.3943	0.4552	0.3847	0.3919
	20	0.2821	0.6180	0.3499	0.5663	0.3430	0.4896
	25	0.2707	0.6614	0.3360	0.6063	0.3299	0.5251
	50	0.2368	0.8114	0.2946	0.7457	0.2905	0.6486
	75	0.2183	0.9125	0.2717	0.8369	0.2683	0.7301
	100	0.2057	0.9907	0.2564	0.9092	0.2533	0.7923

**Tableau III.3 :** validation de  $Cf$  et  $Nu$  pour différents  $\gamma$  et Pr

### III.6 : conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudiés l'influence du nombre de Prandtl (Pr), le nombre de weissenberg (We), paramètre de la force magnétique (M), paramètre de chauffage newtonien adimensionnel ( $\gamma$ ) sur les profils de vitesses et de températures et leur effet sur les résultats du coefficient de frottement cutané et sur les résultats du coefficient du nombre de Nusselt

Cette étude numérique a exploré l'écoulement de la couche limite d'un fluide non newtonien autour d'un cylindre chauffé. Les résultats démontrent la fiabilité et la validité de la méthode de Keller box utilisée. Les études des paramètres thermo-physiques tels que le nombre

de Weissenberg ( $We$ ), le nombre de Prandtl ( $Pr$ ) et le paramètre de force magnétique ( $M$ ) montrent des effets importants sur les profils de vitesse et de température, ainsi que sur les coefficients de frottement cutané et de Nusselt. Dans la plupart des cas, l'augmentation de  $We$  et  $M$  accélère le débit et augmente la température, tandis que l'augmentation de  $Pr$  ralentit le débit et réduit la température. Ces résultats correspondent aux recherches précédentes et aident à mieux comprendre les comportements des fluides non newtoniens lorsqu'ils sont soumis à des transferts thermiques et magnétiques.

# Conclusion générale

Dans ce présent mémoire nous avons effectué une étude pour un écoulement MHD et le transfert de chaleur par convection mixte pour un fluide viscoélastique électro-conducteur à partir d'un corps cylindrique soumis à un champ magnétique radial, le fluide non newtonien est considéré incompressible incident sur un cylindre horizontal, cet écoulement est considéré comme étant laminaire et bidimensionnel.

Les équations qui régissent l'écoulement sont des équations normalisées en régime non linéaire de la couche limite en régime permanent pour la quantité de mouvement et la chaleur (énergie). Ces équations ont été résolues numériquement grâce à la méthode des différences finies en utilisant la méthode de la boîte de Keller (méthode de Keller box) modéliser avec un programme MATLAB. La vérification de la précision des calculs a été démontrée par une analyse comparative avec des solutions newtoniennes antérieures non magnétique sans glissement, disponible dans la littérature.

Notre étude numérique a été effectuées pour un fluide conducteur afin d'examiner les effets du paramètre de la force magnétique, du nombre de Prandtl, paramètre de chauffage newtonien adimensionnel et du nombre weissenberg à la paroi du cylindre sur les profils de vitesse et de température, mais aussi sur les résultats du coefficient de frottement cutané et sur les résultats du coefficient du nombre de Nusselt.

L'augmentation du nombre de Weissenberg a été démontrée par les calculs actuels comme une accélération de l'écoulement près de la paroi et une augmentation des températures (c'est-à-dire une diminution du nombre de Nusselt). Un paramètre magnétique supérieur permet de ralentir l'écoulement et d'augmenter les températures, ce qui signifie que le nombre de Nusselt diminue avec une quantité de mouvement plus élevée. L'écoulement est accéléré près de la surface du cylindre, tandis que les températures diminuent, ce qui signifie que le nombre de Nusselt augmente. En augmentant le glissement thermique, on peut considérablement réduire le frottement cutané de la surface et le nombre de Nusselt.

Le présent travail a ignoré les effets transitoires et de milieu poreux dans l'écoulement viscoélastique.

## Références Bibliographiques

- [1] D. Y. Sarra, Rhéologie des fluides complexes (cours et exercices corrigés), Oran : Université d'Oran des sciences et de la technologie Mohamed Boudiaf.
- [2] Aksouh. M., Zéraïbi. N. Etude de l'écoulement à seuil de contrainte à travers une sténose. 6ème séminaire international sur la physique énergétique Béchar 2002.
- [3] A. BENSLIMANE. Introduction a la mecanique des fluides cours, Béjaia : Université A.Mira-béjaia faculté de technologie departement genie mécanique, 2016/2017.
- [4] H. Ali. Qbdnasser, etude numerique du refroidissement d'une plaque chauffée par un jet l'impactant dans un canal, Mémoire de fin d'étude, université de Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.
- [5] Incropera, D.Dewitt, T.Bergman, A.Lavine. 'Fundamentals of Heat and Mass Ttransfer''. New York :Wiley,6 edition ;(2007).
- [6] M. Tarik et A. Feriel, Etude de l'influence des effets de flottabilité thermique et massique sur l'écoulement impactant sur une paroi chauffée, Mémoire de fin d'étude, université Abderrahmane Mira Bejaia.
- [7] FAVRE MARINET M. : Cours de Convection Thermique, ENSHMG.
- [8] Laouar Lakhdar., Cours, 'Systèmes Hydrauliques et Pneumatiques ' UNIVERSITE BADJI MOKHTAR – ANNABA, 2020/2021.
- [9] K. Bencheikh, A. Azzi. « Etude du transfert de chaleur dans une conduite courbée annulaire partiellement poreuse ». Mémoire de Magister, USTHB-FGMGP (2006).
- [10] G. Khelil et H. Mouloud, Contribution à l'étude de la convection mixte dans un anneau cylindrique horizontal en utilisant des ailettes poreuses, Mémoire de Master, Université Abderrahmane Mira de Bejaia, 2019.
- [11] Amkadni, M. Etude des équations de couches limites dans un écoulement MHD autour d'un profil, 2006.
- [12] : Belghoul, N. Modélisation et simulation de la convection due à un champ de force externe dans des cavités : Convection Naturelle, MHD et Marangoni, 2018.

- [13] H. Abdelhakim et S. Hamimi, Étude numérique de la convection mixte avec source de chaleur localisée dans des cavités carrées, Mémoire de Master, UNIVERSITE AKLI MOHAND OULHADJE-BOUIRA, 2020.
- [14] Sophie Mergui, Transferts thermiques, Cours 2eme année, Sorbonne Université.
- [15] Bouayed, Z. Etude de la convection mixte laminaire dans une cavité ventilée par la méthode de Boltzmann sur réseau (Doctoral dissertation), 2014.
- [16] Belghoul, N. Modélisation et simulation de la convection due à un champ de force externe dans des cavités : Convection Naturelle, MHD et Marangoni, 2018.
- [17] S. V. Patankar, D.B. Spalding, (1972), A calculation procedure for heat, mass and Momentum transfer in three-dimensional parabolic flows, Int. J. Heat Mass Transfer, 15, 1787
- [18] Keller, H.B. : Numerical Solution of Two-Point Boundary Value Problems. SIAM Press, Philadelphia (1976)
- [19] Sajid, M., Iqbal, S.A., Naveed, M., Abbas, Z.: Joule heating and magnetohydrodynamic effects on ferrofluid (Fe<sub>3</sub>O<sub>4</sub>) flow in a semi-porous curved channel. J. Mol. Liq. 222, 1115–1120 (2016). doi :10.1016/j.molliq.2016.08.001
- [20] Gaffar, S.A., Prasad, V.R., Reddy, S.K., Bég, O.A. : Magnetohydrodynamic free convection boundary layer flow of non-Newtonian tangent hyperbolic fluid from a vertical permeable cone with variable surface temperature. J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng. (2016). doi :10.1007/s40430-016-0611-x
- [21]. Subba, A., Prasad, V.R., Harshavalli, K., Bég, O.A. : Thermal radiation effects on non-Newtonian fluid in a variable porosity regime with partial slip. J. Porous Media. 19(4), 313–329 (2016). doi :10.1615/JPorMedia.v19.i4.30
- [22] Nazar, R., Amin, N., Pop, I. : Free convection boundary layer on an isothermal horizontal circular cylinder in a micropolar fluid, Heat transfer. In : Proceeding of the 12th International Conference (2002)
- [23] Hayat, T., Shafiq, A., Alsaedi, A. : Hydromagnetic boundary layer flow of Williamson fluid in the presence of thermal radiation and Ohmic dissipation. Alex. Eng. J. 55(3), 2229–2240 (2016). doi: 10.1016/j.aej. 2016.06.004.

- [24] Khan, N.A., Khan, H. : A Boundary layer flows of non-Newtonian Williamson fluid. *Nonlinear Eng.* 3(2), 107–115 (2014). doi :10.1515/nleng-2014-0002.
- [25] Kasim, A.R.M., Mohammad, N.F., Anwar, I., Shafie, S. : MHD effect on convective boundary layer flow of a viscoelastic fluid embedded in porous medium with Newtonian heating. *Recent Adv. Math.* 4, 182–189 (2013).
- [26] Megahed, A.M.: Variable viscosity and slip velocity effects on the flow and heat transfer of a powerlaw fluid over a non-linearly stretching surface with heat flux and thermal radiation. *Rheol. Acta* 51(9), 841–847 (2012). doi :10.1007/s00397-012-0644-8.
- [27] Aly, A.A. : Heat treatment of polymers: à review. *Int. J. Mater. Chem. Phys.* 1(2), 132–140 (2015).
- [28] R. J. LeVeque, *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*, Washington: University of Washington Seattle, Washington, 6/4/2007.

## Résumé

Le travail exposé dans ce mémoire porte sur l'étude d'un écoulement de couche limite d'un fluide non newtonien autour d'un cylindre horizontal chauffé d'un écoulement laminaire en présence de champ magnétique. Pour réaliser cette étude, un programme de calcul basé sur la méthode des différences finies a été utilisé pour discrétiser les équations gouvernantes, en tenant compte des conditions aux limites appropriées. Les résultats obtenus montrent l'influence de divers paramètres, comme le nombre de Weissenberg et le paramètre magnétique, sur les profils de vitesse et de température ainsi que sur les coefficients de frottement et de Nusselt.

En résumé, une augmentation du nombre de Weissenberg accélère l'écoulement près de la paroi et accroît les températures, tandis qu'un paramètre magnétique plus élevé ralentit l'écoulement et augmente les températures. Une analyse comparative avec des solutions antérieures pour des fluides newtoniens sans champ magnétique confirme ces observations.

**Mots clés : convection mixte, écoulement non newtonien, couche limite, nombre de Weissenberg, cylindre horizontal, Magnétohydrodynamique (MHD), méthode de Keller box**

## Abstract

The work presented in this thesis concerns the study of a boundary layer flow of a non-Newtonian fluid around a heated horizontal cylinder in laminar flow in the presence of a magnetic field. To carry out this study, a calculation program based on the finite difference method was used to discretize the governing equations, taking into account the appropriate boundary conditions. The results obtained show the influence of various parameters, such as the Weissenberg number and the magnetic parameter, on velocity and temperature profiles, as well as on friction and Nusselt coefficients.

In summary, an increase in the Weissenberg number accelerates flow near the wall and increases temperatures, while a higher magnetic parameter slows flow and increases temperatures. A comparative analysis with previous solutions for Newtonian fluids without a magnetic field confirms these observations.

**Keywords : Mixed convection, Non-Newtonian flow, Boundary layers, Weissenberg number, Cylinder horizontal, Magnetohydrodynamics (MHD), Keller box method**