

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université A.MIRA-BEJAIA



Faculté des Sciences Exactes  
Département de Recherche Opérationnelle  
Unité de recherche LaMOS

# THÈSE

## EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE DOCTORAT

Domaine : Mathématiques et Informatique Filière : Mathématiques Appliquées.  
Spécialité : Recherche Opérationnelle et Aide à la Décision.

Présentée par  
**BAZIZI Lydia Epse SAIDANI**  
*Thème*

**Modélisation et Analyse de quelques systèmes de gestion des stocks  
avec rappels : Approche par les réseaux de Petri**

Soutenue le : 23 Avril 2024

Devant le Jury composé de :

Nom et Prénom	Grade		
M. Djamil AISSANI	Professeur	Univ. de Béjaïa	Président
M <sup>me</sup> Fazia RAHMOUNE	Professeure	Univ. de Béjaïa	Rapporteur
M <sup>me</sup> Ouiza LEKADIR	Professeure	Univ- de Bejaïa	Co-Rapporteur
M <sup>me</sup> Nadia OUKID	Professeure	Univ- de Blida 1	Examinatrice
M. Abdelghani HAMAZ	Professeur	Univ. de Tizi-Ouzou	Examineur
M. Belkacem BRAHMI	M.C.A	Univ. de Béjaïa	Examineur
M. Karim LABADI	Professeur	Univ. Cergy Pontoise- France	Invité

Année Universitaire : 2023/2024

## *\* Remerciements \**

Avant tout, je remercie Dieu, le plus puissant, sans lui rien de tout ça n'aurait pu être.

Je remercie Mme Aoudia-Rahmoune Fazia et Mme Lekadir-Imouchene Ouiza d'avoir accepté d'encadrer ce travail. Je les remercie chacune pour son apport dans la contribution de ce travail et son aboutissement. Je les remercie pour leurs orientations, leurs disponibilité et plus particulièrement pour leurs encouragements et leurs bon sens de travail.

J'exprime mes remerciements aussi à Mr Labadi Karim qui m'a encadré durant mon séjour en France, et qui m'a accueilli dans le laboratoire ECAM-EMPI , où j'ai pu développer de nouvelles compétences et qui m'ont aidé dans l'aboutissement de mes travaux de thèse.

Je voudrais remercier le professeur Djamil AISSANI de m'avoir honoré en présidant le jury de ma soutenance. J'exprime aussi mes remerciements à Mme. Nadia OUKID, M. Abdelghani HAMAZ et M. Belkacem BRAHMI d'avoir examiné mon travail.

Dans ces beaux moments, je voudrais exprimer mes remerciements à mes chers parents, ma soeur, mon frère, sans oublier ma belle-famille, mon mari qui m'ont apporté leurs soutiens, leurs encouragements et qui n'ont jamais cessé de croire en moi. Je vous remercie tous !

Enfin, je voudrais aussi remercier tout mes collègues de l'unité de recherche LaMOS, enseignants et doctorants qui ont contribué de près ou de loin dans le parachèvement de ce travail.

※ *Dédicaces* ※

Je dédie ce travail

*A* mes très chers parents ;

*A* ma soeur Sonia et mon frère Lounes ;

*A* mon mari Ziad ;

*A* mon fils Dylan ;

*A* toute ma famille ;

*A* ma belle-famille ;

*A* tous mes amis et mes collègues.

*M<sup>me</sup>. BAZIZI Lydia*

# Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	v
Listes des tableaux	vi
Liste des contributions	vii
Introduction générale	1

---

## Partie I Gestion de stocks et réseaux de Petri

---

<b>1 Généralités sur la gestion de stocks</b>	<b>8</b>
1.1 Généralités sur les stocks . . . . .	9
1.1.1 Définition d'un stock . . . . .	9
1.1.2 Les raisons de constitution des stocks . . . . .	10
1.1.3 La fonction de stocks dans une entreprise . . . . .	10
1.2 La gestion de stocks . . . . .	11
1.3 Les éléments essentiels dans un système de gestion de stocks . . . . .	12
1.4 Les modèles déterministes et stochastiques de gestion de stocks . . . . .	17
1.4.1 Les modèles de la gestion de stocks avec demande déterministe . . . . .	18
1.4.2 Les modèles de la gestion de stocks avec demande stochastique . . . . .	22
1.5 État de l'art sur les modèles de gestion de stocks avec ruptures permises et rappels .	23
1.5.1 Modèles de gestion de stocks avec ruptures permises . . . . .	23
1.5.2 Systèmes de gestion de stocks avec rappels . . . . .	26
<b>2 Les Réseaux de Petri</b>	<b>29</b>
2.1 Généralités sur les réseaux de Petri . . . . .	31
2.1.1 Réseau de Petri (RdP) . . . . .	31
2.1.2 Dynamique des RdP (Evolution d'un RdP) . . . . .	32

2.1.3	Pouvoir de modélisation des RdP . . . . .	35
2.1.4	Propriétés dynamiques d'un RdP . . . . .	35
2.1.5	Extensions des RdP . . . . .	38
2.2	Les RdP stochastiques (RdPS) . . . . .	39
2.2.1	Les réseaux de Petri stochastiques généralisés (RdPSG) . . . . .	39
2.2.2	Analyse des réseaux de Petri stochastiques généralisés . . . . .	43
2.3	Bref état de l'art sur les modèles de gestion de stocks en utilisant les RdP . . . . .	46

---

## Partie II Modélisation et Analyse de quelques systèmes de gestion des stocks avec rappels : Approche par les RdPSG

---

<b>3</b>	<b>Modélisation et Analyse d'un système de gestion des stock de type <math>(s, Q)</math> avec rappels classiques via les RdPSG</b>	<b>49</b>
3.1	Modélisation du système de gestion de stocks de type $(s, Q)$ avec rappels classiques via les RdPSG . . . . .	51
3.1.1	Modèle RdPSG établi pour le système étudié . . . . .	52
3.2	Analyse stochastique du modèle RdPSG établi avec rappels classiques . . . . .	55
3.2.1	Processus stochastique associé au modèle établi . . . . .	55
3.2.2	Distribution stationnaire du modèle établi . . . . .	59
3.3	Mesures de performances du système étudié . . . . .	62
3.4	Formulation et étude de la fonction récompense-coûts . . . . .	64
3.4.1	Formulation mathématique du problème d'optimisation de la fonction récompense-coûts . . . . .	65
3.4.2	Approche de résolution du problème d'optimisation . . . . .	66
3.5	Analyse de sensibilité de la politique optimale et du profit optimal . . . . .	67
3.5.1	Analyse de sensibilité des valeurs optimales par rapport à la récompense . . . . .	68
3.5.2	Analyse de sensibilité des valeurs optimales par rapport au taux de demande et au taux de réapprovisionnement . . . . .	69
3.5.3	Analyse de sensibilité des valeurs optimales par rapport au taux de rappels et au taux de réapprovisionnement . . . . .	71
3.5.4	Analyse de sensibilité des valeurs optimales par rapport au coût de perte et au taux de demandes . . . . .	74
3.5.5	Analyse de sensibilité des valeurs optimales par rapport au coût d'attente en orbite et au taux de rappels . . . . .	76
<b>4</b>	<b>Modélisation et Analyse d'un système de gestion de stocks de type <math>(s, Q)</math> avec rappels constants : Approche par les RdPSG</b>	<b>80</b>

4.1	Modélisation du système de gestion de stocks avec rappels constants via les RdPSG	82
4.1.1	Modèle RdPSG	82
4.2	Analyse stochastique du modèle RdPSG établi avec rappels constants	84
4.2.1	Processus stochastique associé au RdPSG	84
4.2.2	Distribution stationnaire du modèle établi	87
4.3	Mesures de performances du système étudié	90
4.4	Système de gestion de stocks avec demandes perdues	93
4.5	Analyse de la fonction récompense-coûts associé au système étudié	96
4.6	Étude de sensibilité du profit optimal et de la politique optimale	97
4.6.1	Analyse de sensibilité des valeurs optimales par rapport à la récompense	97
4.6.2	Analyse de sensibilité des valeurs optimales par rapport au taux de demandes et au taux de réapprovisionnement	99
4.6.3	Analyse de sensibilité des valeurs optimales par rapport au taux de rappels et au taux de réapprovisionnement	100
4.6.4	Analyse de sensibilité des valeurs par rapport au coût de perte et au taux de demandes	101
4.6.5	Analyse de sensibilité des valeurs optimales par rapport au coût d'attente d'une demande en orbite et au taux de rappels	103
<b>5</b>	<b>Modélisation et Simulation d'un système de gestion de stocks avec rappels et deux types de demandes</b>	<b>106</b>
5.1	Description du système de gestion de stocks considéré	107
5.2	Modélisation du système considéré via les RdPSG	108
5.2.1	Analyse qualitative du modèle RdPSG établi	110
5.3	Simulation du système de gestion de stocks considéré avec le simulateur GRIF	112
5.3.1	A propos du simulateur GRIF	112
5.3.2	Simulation du modèle sous le simulateur GRIF	112
	<b>Conclusion générale</b>	<b>118</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>121</b>

# Table des figures

1.1	Représentation du stock. . . . .	10
1.2	Environnement de la fonction de stocks. . . . .	11
1.3	Evolution du stock dans le modèle EOQ. . . . .	19
1.4	Modèle de gestion des stocks avec ruptures permises. . . . .	20
2.1	Les éléments graphiques d'un RdP. . . . .	31
2.2	Exemple d'un réseau de Petri marqué. . . . .	32
2.3	Graphe d'accessibilité du réseau de Petri de la Figure 2.2. . . . .	34
2.4	Exemple de RdP avec synchronisation. . . . .	36
2.5	Exemple de RdP avec parallélisme. . . . .	36
2.6	Exemple de RdP avec partage de ressources. . . . .	36
2.7	Exemple de Rdp avec Conflit. . . . .	36
2.8	RdP à arc inhibiteur. . . . .	38
2.9	(a) Transition stochastique. (b) Transition immédiate. . . . .	40
3.1	Schéma du système de gestion de stocks avec rappels et demandes partiellement arriérées. . . . .	52
3.2	Le RdPSG associé au système de gestion de stocks avec rappels classiques. . . . .	53
3.3	Le graphe d'accessibilité associé au modèle RdPSG établi pour $(S, s, n, K) = (6, 2, 2, 2)$ . . . . .	56
3.4	Le graphe réduit associé au modèle RdPSG établi pour $(S, s, n, K) = (6, 2, 2, 2)$ . . . . .	56
3.5	Le graphe réduit pour $S, s \in \mathbb{N}$ et $n, K \in \mathbb{N}^*$ . . . . .	57
4.1	Le schéma du système de gestion de stocks avec rappels constants et demandes partiellement arriérées. . . . .	82
4.2	Le modèle RdPSG associé au système de gestion de stocks avec rappels constants. . . . .	83
4.3	Le graphe de marquages réduit pour $(S, s, n, K) = (6, 2, 2, 2)$ . . . . .	84
4.4	Le graphe de marquages réduit pour $S, s, n \in \mathbb{N}$ et $K \in \mathbb{N}^*$ . . . . .	85
5.1	Le RdPSG associé au système de gestion de stocks avec rappels et deux types demandes. . . . .	108
5.2	Graphe de marquages réduit associé au RdPSG pour $(S, s, K) = (6, 2, 2)$ . . . . .	111
5.3	Le modèle RdPSG de la Figure 5.1 sous l'interface du module petri de GRIF. . . . .	113
5.4	La probabilité de disponibilité du stock dans une période de 100h par rapport à $\lambda_1$ . . . . .	114
5.5	Le taux de pertes des deux types de demandes par rapport à $\lambda_1$ . . . . .	114

---

5.6	Le nombre moyen de demandes de type 1 en orbite par rapport à $\lambda_1$ .	114
5.7	La probabilité de disponibilité du stock dans une période de 100h par rapport à $\lambda_2$ .	114
5.8	Le taux de pertes des deux types de demandes par rapport à $\lambda_2$ .	114
5.9	Le nombre moyen de demandes de type 1 en orbite par rapport $\lambda_2$ .	114
5.10	La probabilité de disponibilité du stock dans une période de 100h par rapport à $\theta$ .	115
5.11	Le taux de pertes des deux types de demandes par rapport à $\theta$ .	115
5.12	Le nombre moyen de demandes de type 1 en orbite par rapport à $\theta$ .	115
5.13	La probabilité de disponibilité du stock dans une période de 100h par rapport à $\mu$ .	116
5.14	Le taux de pertes des deux types de demandes par rapport à $\mu$ .	116
5.15	Le nombre moyen de demandes de type 1 en orbite par rapport à $\mu$ .	116

# Liste des tableaux

3.1	Interprétations des places du RdPSG présenté dans la FIGURE 3.2. . . . .	53
3.2	Interprétations des transitions du RdPSG présenté dans FIGURE 3.2. . . . .	54
3.3	L'effet de la variation de la récompense sur les valeurs optimales $(s^*, S^*, K^*)$ et $F^*$ , ainsi que le niveau de service $\mathbb{P}_{ser}$ associé à chaque politique optimale pour $n = \overline{1,2}$ . . . . .	68
3.4	L'effet de variation de $\lambda$ et $\mu$ sur le profit optimal $F^*$ et la politique optimale $(s^*, S^*, K^*)$ , ainsi que le niveau de service associé à chaque politique optimale pour $n = \overline{1,2}$ . . . . .	69
3.5	L'effet de variation de $\theta$ et $\mu$ sur le profit optimal $F^*$ et la politique optimale $(s^*, S^*, K^*)$ , ainsi que le niveau de service associé à chaque politique optimale pour $n = \overline{1,2}$ . . . . .	72
3.6	L'effet de de variation du coût de perte $c_l$ , pour $\lambda = \{1.5, 3, 4.5\}$ et $\mu = \overline{1,2}$ , sur les valeurs optimales pour $n = \overline{1,2}$ . . . . .	75
3.7	L'effet de variation du coût d'attente en orbite $c_w$ , pour $\theta = \{2, 5, 10\}$ et $\mu = \overline{1,2}$ sur les valeurs optimales pour $n = \overline{1,2}$ . . . . .	77
4.1	L'effet de l'augmentation de la récompense sur le profit optimal $F^*$ et sur la politique optimale $(s^*, S^*, K^*)$ ainsi que le niveau de service associé à chaque politique optimale pour $n = \overline{1,2}$ . . . . .	98
4.2	L'effet de variation de $\lambda$ et $\mu$ sur le profit optimal $F^*$ et la politique optimale $(s^*, S^*, K^*)$ ainsi que le niveau de service associé à chaque politique optimale pour $n = \overline{1,2}$ . . . . .	99
4.3	L'effet de variation de $\theta$ et $\mu$ sur le profit optimal $F^*$ et la politique optimale $(s^*, S^*, K^*)$ , ainsi que sur le niveau de service associé à chaque politique optimale pour $n = \overline{1,2}$ . . . . .	100
4.4	L'effet de de variation du coût de perte $c_l$ , pour $\lambda = \{1.5, 3, 4.5\}$ et $\mu = 2$ , sur les valeurs optimales. . .	102
4.5	L'effet de variation du coût d'attente d'une demande en orbite $c_w$ , pour $\theta = \{2, 5, 10\}$ et $\mu = \overline{1,2}$ sur le profit optimal et la politique optimale pour $n = \overline{1,2}$ . . . . .	103
5.1	L'interprétation des places du RdPSG de la Figure 5.1. . . . .	109
5.2	L'interprétation des transitions du RdPSG de la Figure 5.1. . . . .	110

# Liste des contributions

Dans le cadre de cette thèse, nous avons réalisé les contributions scientifiques suivantes :

## ► Publication internationale

1. L. Bazizi, F. Rahmoune, O. Lekadir, K. Labadi. Modeling, Performance Evaluation and Optimization of (s,Q) Retrial Inventory System with partial backlogging demands : A GSPN Approach. *European journal of industrial engineering (EJIE)*, Vol. 17, no. 4, pp. 529-569. (DOI : 10.1504/EJIE.2023.131778).
2. L. Bazizi, F. Rahmoune, O. Lekadir, K. Labadi. Stochastic analysis of an (s;Q) inventory system with repeated attempts and lost demands using GSPNs tool. *Stochastic Analysis and Applications*. (soumis)

## ► Publication nationale

1. L. Bazizi, F. Rahmoune, O. Lekadir. Analysis of an (s,Q) Inventory model with continuous Review and partially backordered demands through Petri nets, *Séminaire mathématique de Bejaia*, Vol. 16, no. 1, pp. 77-77, Bejaia, Algérie.(<https://www.asjp.cerist.dz/en/downArticle/755/16/1/179637>)

## ► Conférences internationales

1. L. Bazizi, F. Rahmoune, O. Lekadir, K. Labadi. Modélisation et simulation discrète d'un système de gestion des stocks avec deux types de demandes et rappels. *Conférence internationale MOFA'19*, université de Bejaia, Algérie. (octobre 2019).(https://sites.google.com/site/bejiamfoa2019/home).
2. L. Bazizi, F. Rahmoune, O. Lekadir, K. Labadi. Stochastic analysis of the (s,Q) continuous review inventory system with Retrial demands. *International Conference on Recent Advances in Mathematics and Informatics (ICRAMI)* , Tebessa, Algérie. (Septembre 2021) (DOI : 10.1109/ICRAMI52622.2021.9585989).
3. L. Bazizi, F. Rahmoune, O. Lekadir, K. Labadi. Optimisation of Batch stochastic (s,Q) continuous review inventory system with retrial demands. *Colloque International MOAD'22 Méthodes et Outils d'Aide à la Décision*, Bejaia, Algérie. (novembre 2022).(http://www.univ-bejaia.dz/moad22).

## ► Conférences nationales

1. L. Bazizi , F. Rahmoune, O. Lekadir. Analysis of an (s,Q) Inventory model with continuous Review and partially backordered demands through Petri nets, *Séminaire mathématique de Bejaia*, Algérie.(Décembre 2018)
2. L. Bazizi , F. Rahmoune, O. Lekadir. Analyse des systèmes de gestion de stocks avec rappels par l'outil des réseaux de Petri Stochastiques. *Séminaire mathématique de Bejaia, Algérie*. (Mars 2020).

3. L. Bazizi , F. Rahmoune, O. Lekadir, K. Labadi. Modélisation pour une gestion optimale dans un système de gestion de stocks avec rappels et demandes partiellement arriérées : Approche par les réseaux de Petri. *Séminaire Mathématique de Bejaia*, Algérie.(Mars 2022)
-

# Introduction générale

Les entreprises considèrent le stock comme une ressource importante. Du point de vue économique, un stock important peut définir la puissance d'une entreprise par rapport à ses concurrents et augmenter sa profitabilité. D'un point de vue financier, le stock peut être considéré comme une charge supplémentaire pour l'entreprise ou comme un capital immobilisé. Néanmoins, si l'entreprise ne peut pas répondre à la demande à temps, l'insuffisance du stock peut avoir un impact négatif sur sa relation avec ses clients. Par conséquent, la gestion de stocks est d'une telle importance qu'elle mérite une attention particulière, c'est pour cette raison qu'elle est l'une des disciplines les plus répandues dans le domaine de recherche opérationnelle. La gestion de stocks est définie par l'ensemble des techniques et des méthodes opérationnelles qui visent à réaliser un compromis entre la présence du stock qui entraîne les différents coûts encourus, et les coûts résultants par son insuffisance et qui sont facturés par le manque à gagner.

Durant plusieurs années, l'étude des systèmes de la gestion de stocks demeure un sujet d'intérêt. Cependant, chaque système étudié se distingue par ses paramètres, tels que l'horizon de planification, la structure de stockage, la source de demandes potentielles, le produit ou les produits (sa nature, sa durée de vie, etc.), les politiques de réapprovisionnement existantes, le processus de la demande, les ruptures et d'autres paramètres. Ces paramètres peuvent être considérés comme aléatoires dans des circonstances plus réalistes, d'où l'appellation "systèmes stochastiques de gestion de stocks". Ces systèmes sont parmi les plus délicats à étudier à cause de l'aspect stochastique qui les décrivent. Toutefois, une autre situation qui complique davantage l'étude d'un système de gestion de stocks est de considérer la situation de rupture de stock, où les clients qui arrivent au système ne peuvent pas être satisfaits temporairement. Dans ce cas, on parle de systèmes de gestion de stocks avec demandes insatisfaites. Pour cette classe de systèmes, deux situations sont courantes pour les demandes insatisfaites : soit elles sont toutes perdues [6, 3, 23, 51], soit elles sont toutes mises en attente (complètement arriérées) [96, 4, 79, 92]. Cependant, ces deux hypothèses restent peu applicables, où dans certaines recherches, par exemple [74, 90, 83, 105, 56], les auteurs supposent que c'est plus réaliste de considérer qu'une fraction de ces demandes est arriérée et que le reste est perdu, ce qui est connu dans la littérature sous le nom d'hypothèse demandes partiellement arriérées ou demandes partiellement perdues. Dans cette thèse de doctorat, on s'est intéressé principalement à cette catégorie de systèmes avec demandes partiellement arriérées, tout

en considérant la classe des systèmes de gestion de stocks avec rappels [16, 17, 18, 19].

Le concept de rappel dans les systèmes de gestion de stocks a été introduit pour la première fois par Artalejo et al. dans [13]. Depuis, les systèmes de gestion de stocks avec rappels ont vu le jour qui ont été largement abordés dans la littérature, voir [4, 5, 29, 58, 66, 79, 96, 101, 100, 92, 98, 56, 106]. Ces systèmes peuvent être classés par rapport au temps de service positif ou nul. Pour la classe avec temps de service nul, les demandes sont servies immédiatement si le stock est disponible, comme l'ont démontré les travaux de recherche [4, 5, 58, 101, 100, 92, 79]. Cependant, l'autre classe de systèmes avec temps de service positif dite "*Queueing inventory systems*", une file d'attente a tendance à se former en raison de l'indisponibilité du serveur (une revue récente est détaillée par Krishnamoorthy et al. dans [60], pour une meilleure compréhension de cette catégorie, et d'autres travaux peuvent être inclus [29, 66, 96, 98, 56, 106]).

L'analyse mathématique des systèmes de gestion de stocks avec rappels se complique davantage quand le nombre de paramètres pris en compte devient important. Pour se faire, une étape cruciale est celle qui nous permet de se rapprocher le plus possible des systèmes réels qui est la modélisation. Les mathématiciens bénéficient de différents outils de modélisation, entre autres la théorie des chaînes de Markov, la théorie des files d'attente et les formalismes des réseaux de Petri.

Les chaînes de Markov constituent un outil de modélisation mathématique conçu pour la description des systèmes à événements probabilistes à espaces d'états dénombrables. Ces événements probabilistes peuvent être définis à base des processus stochastiques qui sont caractérisés par la propriété de Markov ou la propriété "sans mémoire". Grâce à cette propriété, l'historique du système étudié peut être résumé à tout temps par son état présent, et qui est suffisant pour décrire son évolution future. Une chaîne de Markov est représentée graphiquement sous forme d'un graphe d'états qui sont reliés par des transitions entre chaque paire d'états. Pour l'étude des systèmes de gestion de stocks, cet outil de modélisation est souvent utilisé, par exemple [13, 4, 79, 85, 101, 100, 106]. Néanmoins, pour décrire le comportement du système étudié en utilisant les chaînes de Markov, on est généralement confronté au problème d'identification de la chaîne, en particulier dans les cas où le nombre d'états est considérable. Cependant, la théorie des files d'attentes et les formalismes des réseaux de Petri sont des exemples de modèles plus formels proposées pour décrire le comportement des systèmes.

La théorie des files d'attente relève du domaine des probabilités. Cette théorie est largement utilisée dans la modélisation des systèmes de gestion de stocks avec temps de service positif, voir [2, 54, 59, 97, 103, 55, 56, 66, 75, 98]. Chaque système de file d'attente possède ses propres propriétés qui permettent de lui attribuer une notation (notation de Kendall) pour pouvoir ensuite l'analyser. Dans ce type de formalisme, on peut faire face aux processus non markoviens dans le cas d'une loi

générale et cela nécessite la description de la chaîne de Markov incluse mais il reste tout de même un outil simple est efficace pour l'analyse des systèmes. Par contre, cet outil de modélisation ne peut pas représenter certains mécanismes importants dans les systèmes réels, à savoir le mécanisme de synchronisation et de parallélisme et c'est pour cela que les formalismes des réseaux de Petri ont été conçus.

Les réseaux de Petri (RdP) sont apparus entre 1960-1962 créés par le mathématicien allemand Carl Adam [80]. Ils représentent un outil graphique est mathématique adapté à la modélisation des systèmes dynamiques à événements discrets à phénomènes asynchrones, parallèles ou encore concurrents. Le RdP offre une représentation graphique à la fois simple et détaillée du système étudié. Depuis leurs création, les RdP ont connu plusieurs extensions où chacune vise à répondre à un besoin de modélisation bien précis. Cependant, en raison de certains phénomènes aléatoires présentés dans quelques systèmes réels, une classe importante des RdP a vue le jour nommée les réseaux de Petri stochastiques (RdPS) [76, 72, 73].

Les RdPS connaissent plusieurs formalismes, notamment le formalisme des RdPS généralisés (RdPSG). D'une part, ce formalisme demeure l'un des formalismes des RdPS le plus exploité par les chercheurs puisqu'il permet de combiner entre deux types d'événements (immédiats et stochastiques). D'autre part, grâce à son aspect graphique et mathématique, le formalisme des RdPSG demeure un outil de modélisation et d'analyse complet des systèmes, tels que les réseaux informatiques [67], les réseaux téléphoniques mobiles [69], de plus il a montré son efficacité dans la modélisation et l'analyse des systèmes de gestion de stocks à un seul niveau ou sur plusieurs niveaux (chaînes logistiques) [68, 88, 87, 31, 62, 48, 25, 26]. Pour cette raison, nous l'avons sélectionné pour la modélisation et l'analyse de quelques systèmes de gestion de stocks avec rappels (classiques et constants) [18, 19], ainsi que pour la modélisation d'un système de gestion de stocks avec rappels et deux types de demandes [17].

Une classe importante des RdPS est celle qui associe aux transitions stochastiques un délai de franchissement distribué suivant une loi qui vérifie la propriété d'absence de mémoire. Pour ce type de RdPS dit markovien, K. Molloy a démontré dans [72] que le processus sous-jacent engendré par le graphe d'accessibilité d'un RdPS markovien est isomorphe à une chaîne de Markov à temps continue (CMTC) à espace d'états discret. L'avantage de ce résultat est que la chaîne de Markov décrivant la dynamique du système étudié peut être retrouvée tout simplement en énumérant les états du graphe d'accessibilité du RdPS. Néanmoins, dans certains systèmes modélisés avec les RdPS, la génération de tous les marquages du graphe d'accessibilité n'est pas une tâche aussi simple, en particulier lorsque le nombre d'états ne cesse de croître. Pour faire face à ce problème, plusieurs méthodes ont été mise en place pour résoudre les RdPS à problème d'espace de marquages important, par exemple les méthodes tronquées [50], les méthodes de décomposition [78, 108], la méthode de construction du graphe symbolique par symétrie [53], etc. Les RdP connaissent aussi une grande application de la simulation [88, 87, 30, 36, 28].

La simulation est une méthode qui permet d'observer le comportement du système étudié dans le temps et de quantifier ses indices de performance selon les paramètres d'entrées. Dans la simulation traditionnelle, le temps de calcul est exponentielle, c'est pour cela que les simulateurs ont été conçus dans le but de minimiser le temps de calcul d'utilisateur. Les outils de simulation consacrés aux RdP sont nombreux, où chacun répond à un formalisme de RdP bien particulier. Par exemple, les simulateurs CPNtools (Colored Petri Nets tools) et GreatSPN (Graphical Editor and Analyzer for Timed and Stochastic Petri Nets) sont exploités pour la classe de RdPSG ainsi que ceux colorés. Dans [47], les auteurs ont fait appel au simulateur GreatSPN pour la simulation des systèmes multi-classes avec rappels. Dans [88, 87], les auteurs ont fait appel au simulateur SPNP (Stochastic Petri Nets Package) dédié pour la classe des RdPS, ou encore le simulateur GRIF (Graphiques Interactifs pour la Fiabilité) qui est une suite de logiciels appropriée pour la classe des RdP à prédicats. Dans [30, 36, 28], les auteurs ont fait appel au simulateur GRIF pour l'étude de la sûreté de fonctionnement et de la fiabilité des systèmes étudiés. Pour notre étude, nous l'avons sélectionné pour réaliser une étude de performances du système de gestion de stocks avec rappels et deux types de demandes en fonction des paramètres du système.

Une autre piste d'intérêt dans cette thèse, est l'introduction d'un problème d'optimisation relatif aux systèmes de gestion de stocks considérés. Plusieurs études soulignent comme premier objectif de la gestion des stocks, est de minimiser la valeur investie dans les stocks car elle a un impact direct sur le rendement des entreprises ([13, 101, 4, 79]). Cette approche n'est pas totalement complète, car elle ne prend pas en considération le niveau de service que veut atteindre l'entreprise. Le niveau de service représente la probabilité de ne pas être en rupture de stock et de ne pas perdre de ventes. Cette mesure est importante en raison de son lien avec la gestion de stocks. D'une part, elle sert à mesurer la performance des politiques de gestion de stocks, et d'autre part, elle peut affecter la relation avec ses clients et selon la nature de l'entreprise, elle peut déterminer un impact important sur sa rentabilité.

Pour déterminer sa rentabilité, l'entreprise doit réaliser un compromis entre les revenus qu'on lui attribue et qui peuvent être définis comme une récompense due à l'accomplissement d'un service et entre les différents coûts encourus par le maintien de stock, des ordres de commandes ainsi que les coûts de rupture de stocks, si cette hypothèse est considérée. Plusieurs chercheurs se sont intéressés à l'étude de la fonction "profit" au lieu de la fonction "coût total", tels que [22, 96] et plus récemment on retrouve [91, 94] pour les systèmes de gestion de stocks avec rupture. Pour la classe de systèmes de gestion de stocks avec rappels, on trouve peu de travaux [56, 75, 98]. L'optimalité de la fonction "profit" est assurée par la politique optimale qui est donnée généralement par les valeurs optimales des variables définissant la politique de gestion de stocks considérée dans chaque étude. Pour retrouver la politique optimale, la plupart des auteurs ont fait recours à des approches numériques (heuristiques, programmation dynamique, etc), d'où les résultats obtenus restent sub-optimaux.

## Organisation du document

Cette thèse est répartie en deux parties principales :

- La première partie est composée de deux chapitres consacrés aux rappels sur **la gestion de stocks et les réseaux de Petri**.
    - Dans le **premier chapitre**, nous rappelons le lecteur sur les notions de base d'un système de stockage et ses éléments essentiels pour la compréhension des différents systèmes de gestion de stocks considérés dans le cadre de cette thèse de doctorat. Ensuite, nous définissons les deux grandes classes de modèles de gestion de stocks, à savoir la classe "des modèles avec demande déterministe" et l'autre classe "des modèles avec demande stochastique", et pour chacune des deux classes nous exposons une brève revue des modèles existants. Pour terminer ce chapitre, nous définissons deux classes importantes de systèmes de gestion de stocks qui sont : la classe des systèmes de gestion de stocks avec demandes insatisfaites (ruptures de stock permises) et aussi la classe des systèmes de gestion de stocks avec rappels. Pour ces deux classes, nous présentons plusieurs travaux qui sont regroupés à la fin de ce chapitre.
    - Dans le **deuxième chapitre**, nous initions le lecteur aux notions fondamentales des RdP (réseaux de Petri). Ensuite, nous présentons quelques extensions des RdP tel que les RdP stochastiques dont le formalisme des RdP stochastiques généralisés (RdPG). Ce formalisme auquel nous faisons appel dans cette thèse pour la modélisation et l'analyse des différents systèmes de gestion de stocks considérés. Nous terminons ce chapitre par un bref état de l'art sur quelques modèles de gestion de stocks en utilisant l'outil des RdP.
  - La deuxième partie quant à elle est répartie en trois chapitres (chapitre 3, chapitre 4 et chapitre 5) dédiés aux principales contributions et qui est intitulée "**Modélisation et Analyse de quelques systèmes de gestion de stocks avec rappels via les RdPSG**".
    - Dans le **troisième chapitre**, nous présentons la première contribution scientifique dans le cadre de cette thèse de doctorat intitulée "Modélisation et analyse d'un système de gestion de stocks avec rappels classiques". La première partie de ce chapitre est réservée à la modélisation et l'analyse stochastique du système de gestion de stocks considéré et qui s'appuie sur la propriété d'isomorphisme entre les RdPSG et les chaînes de Markov. Ensuite, nous proposons une approche récursive pour le calcul de la distribution stationnaire et nous dérivons différentes mesures de performance du système étudié avec rappels classiques. La deuxième partie de ce chapitre est consacrée à l'étude d'optimalité d'une fonction récompense-coûts. De plus, nous présentons une analyse de sensibilité des valeurs optimales en fonction des paramètres exogènes au système et de quelques paramètres économiques en faisant appel à une approche numérique.
    - Le **quatrième chapitre** est dédié à la deuxième contribution scientifique de cette thèse intitulée "Modélisation et analyse d'un système de gestion de stocks avec rappels constants". La première partie de ce chapitre englobe le modèle RdPSG ainsi que l'analyse stochas-
-

tique du modèle. Ensuite, nous calculons la distribution stationnaire en utilisant la même approche récursive proposée dans le cadre des rappels classiques et nous dérivons différentes mesures de performance du système étudié avec rappels constants. Nous réadaptions la fonction récompense-coûts dégagée dans le cas du système étudié. Enfin, nous effectuons une analyse numérique de sensibilité des valeurs optimales, en fonction des paramètres exogènes au système et de quelques paramètres économiques.

- Le **cinquième chapitre** concerne la modélisation et la simulation d'un système de gestion de stocks avec rappels et deux types de demandes. Pour modéliser ce système, nous faisons appel encore une fois au formalisme des RdPSG. Pour le modèle établi, la construction du graphe d'accessibilité s'avère difficile à cause de la grandeur de l'espace d'états et c'est pour cela que nous avons fait appel à la simulation sous GRIF. En utilisant la simulation, nous calculons quelques indices de performance du système étudié, ces résultats sont présentés sous forme d'une analyse de la sensibilité des mesures de performance système étudié par rapport aux paramètres du système.
  - Nous terminons cette thèse par une conclusion générale des travaux réalisés durant notre recherche et nous dégagons quelques perspectives de recherches qui peuvent enrichir ce travail à court et à long terme. Enfin, nous concluons ce travail avec une riche synthèse bibliographique.
-

# Partie I

## Gestion de stocks et réseaux de Petri

# Chapitre 1

## Généralités sur la gestion de stocks

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Généralités sur les stocks . . . . .</b>	<b>9</b>
1.1.1	Definition d'un stock . . . . .	9
1.1.2	Les raisons de constitution des stocks . . . . .	10
1.1.3	La fonction de stocks dans une entreprise . . . . .	10
<b>1.2</b>	<b>La gestion de stocks . . . . .</b>	<b>11</b>
<b>1.3</b>	<b>Les éléments essentiels dans un système de gestion de stocks . . . . .</b>	<b>12</b>
<b>1.4</b>	<b>Les modèles déterministes et stochastiques de gestion de stocks . . . . .</b>	<b>17</b>
1.4.1	Les modèles de la gestion de stocks avec demande déterministe . . . . .	18
1.4.2	Les modèles de la gestion de stocks avec demande stochastique . . . . .	22
<b>1.5</b>	<b>État de l'art sur les modèles de gestion de stocks avec ruptures permises et rappels . . . . .</b>	<b>23</b>
1.5.1	Modèles de gestion de stocks avec ruptures permises . . . . .	23
1.5.2	Systèmes de gestion de stocks avec rappels . . . . .	26

---

## Introduction

Quelle que soit l'activité de l'entreprise, sa taille et son organisation, les stocks existent. Les stocks représentent des produits immobilisés, en attente de transfert, de traitement ou de livraison. Les raisons d'existence des stocks sont nombreuses, à savoir : faire face au aléas (les retards de livraison, la demande aléatoire ou encore la fluctuation des prix, etc.). La compétitivité de l'entreprise peut être particulièrement affectée par sa gestion de stocks, raison suffisante pour y porter une grande attention.

En effet, la gestion de stocks représente l'ensemble de méthodes et de techniques pouvant réaliser un compromis entre les différents coûts encourus par le capital immobilisé qui est le stock, à savoir : les coûts de stockage, qui sont liés à plusieurs facteurs, par exemple : l'occupation du local, le maintien de produits stockés en bonnes condition, etc..) et les différents coûts résultants par la rupture de stock provoquant soit la perte de demandes soit des demandes retardées/arriérées.

La gestion de stocks est l'une des disciplines les plus répandues dans le domaine de la recherche opérationnelle, la préoccupation des chercheurs est de répondre aux besoins économiques d'une entreprise, tel que garantir une bonne gestion de stocks pour en tirer un meilleur bénéfice et pour cela, on doit nécessairement faire une étude mathématique après une bonne modélisation du système considéré.

Les spécialistes de la recherche opérationnelle ont classifié les différents modèles de la gestion de stocks en deux grandes classes selon le type de la demande, qui sont : les modèles déterministes où la demande est constante (déterministe) et les modèles stochastiques dont la demande est aléatoire. Les modèles stochastiques de la gestion de stocks s'avèrent les plus difficiles à étudier et ceci est dû aux phénomènes aléatoires des paramètres du système étudié.

Dans ce chapitre, nous allons énoncer les éléments essentiels liés à un système de gestion de stocks. Ensuite, nous allons faire une synthèse sur les modèles de gestion de stocks existants dans la littérature, à savoir les modèles (déterministes et stochastiques) de la gestion de stocks. Enfin, nous allons donner une brève revue sur les modèles de gestion de stocks avec rappels en utilisant les diverses méthodes de modélisation mathématique existantes, à savoir : les chaînes de Markov, la théorie des files d'attente et les réseaux de Petri.

## 1.1 Généralités sur les stocks

### 1.1.1 Définition d'un stock

Le stock peut être défini comme un ensemble de produits (marchandises, matières premières, produits finis, emballages, etc.) stockés pour être consommés, vendus ou fabriqués pour répondre aux besoins des clients.

Un stock peut être comparé à un réservoir de régulation situé entre deux flux avec des débits

---

irréguliers. Le flux d'entrée représente généralement les approvisionnements et le flux de sortie représente la demande des produits par les clients.



FIGURE 1.1 – Représentation du stock.

### 1.1.2 Les raisons de constitution des stocks

Les stocks sont constitués dans une entreprise pour plusieurs raisons d'ordre économique et d'ordre financier. Ces raisons seront énumérées comme suit :

1. Les raisons de constitution des stocks d'ordre économique sont données comme suit :
  - Le premier facteur d'ordre économique est liée à l'idée d'économie d'échelle. D'une part, la baisse du coût moyen de production d'un produit ou de service incite les entreprises productives à produire en grandes quantités à un prix moins élevé pour en bénéficier. D'autre part, pour l'approvisionnement de matières premières, l'existence d'un coût fixe de commande indépendant de la quantité de commande permet à l'entreprise d'approvisionner en quantité plus importante pour réduire le nombre de commandes, et ainsi la baisse des charges liées à la passation de ces commandes. Néanmoins, les quantités produites ou les quantités commandées ne sont pas entièrement vendues, d'où la constitution des stocks.
  - Un autre facteur d'ordre économique est liée la position d'une entreprise par rapport à ses concurrents. En effet, une entreprise qui possède un stock assez élevé peut répondre à la demande des clients à tout moment malgré les aléas de la demande dues aux variations de l'offre et de la demande. Dans ce cas, le stock agit contre l'effet d'incertitude, ce qui peut lui apporter un grand bénéfice par rapport à ses concurrents.
2. Le deuxième facteur est d'ordre financier, il est lié à la possibilité de prévision des prix des biens. En effet, si l'on peut prévoir la baisse ou la hausse des prix, l'entreprise a tout intérêt à stocker. Ainsi, elle peut éviter d'acheter plus tard à des prix plus élevés pour en bénéficier davantage.

### 1.1.3 La fonction de stocks dans une entreprise

La fonction de stocks se compose de deux sous-fonctions principales :

1. Le suivi des stocks : Cette fonction vise à connaître les articles disponibles à tout moment dans l'entreprise et à calculer la valeur du stock actuel. Pour y parvenir, elle utilise la "**comptabilité physique**" et la "**comptabilité financière**" des articles pour assurer un suivi aux différents moments du processus de stockage.
  - **Comptabilité physique** : Pour pouvoir fournir à tout moment un état des stocks à jour, elle doit prendre en compte les réceptions et les délivrance des articles (en nombre).
  - **Comptabilité financière** : Pour pouvoir fournir à tout moment la valeur de l'immobilisation financière, elle doit prendre en compte les entrées et les sorties du stock (en valeur).
2. La gestion de stocks : Le but de cette fonction est de déterminer la valeur appropriée des stocks pour répondre aux besoins de l'entreprise et des clients. Un autre objectif de la gestion de stocks est de trouver la politique de réapprovisionnement optimale afin de réaliser un compromis entre les coûts encourus par l'existence des stocks et ceux résultant de leur insuffisance. Cette fonction cruciale dans les systèmes de stocks est détaillée dans la section suivante.

Le schéma représentatif de la fonction des stocks dans une entreprise interagissant avec les différents composants constituant l'environnement de stock (Fournisseur → Stocks → Clients) est donné dans la Figure 1.2 suivante.

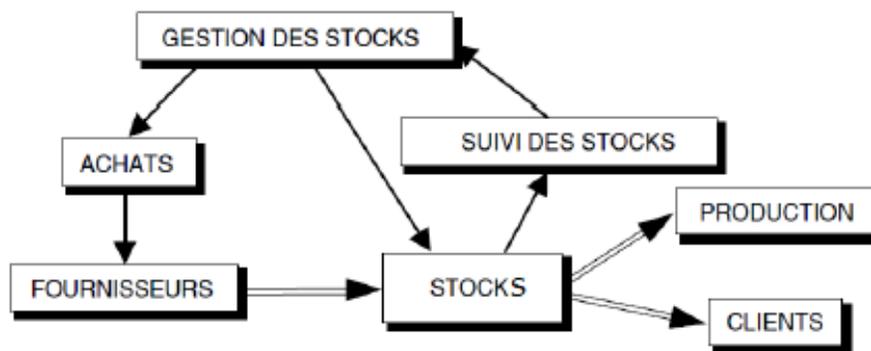


FIGURE 1.2 – Environnement de la fonction de stocks.

## 1.2 La gestion de stocks

La gestion de stocks représente l'ensemble de méthodes et de techniques qui tente de réaliser un compromis entre les coûts encourus dû au capital immobilisé résultant de l'existence du stock défini par les coûts de stockage liés à plusieurs facteurs, par exemple (l'occupation du local, le maintien de produits stockés en bonnes condition, etc), et les coûts résultants de l'insuffisance du stock provoquant soit la perte de demandes où des demandes retardées. En cas, de demandes

perdues, on parle d'un manque à gagner, et en cas de demandes retardées un coût de retient de cette demande est facturé. Pour satisfaire ce compromis, le gestionnaire doit se poser ces deux questions essentielles :

- Comment l'entreprise peut-elle maintenir un niveau de stock suffisamment élevé?
- Quand est-ce que on se dit que le niveau du stock est assez suffisent ?

La gestion de stocks permet de répondre aux exigences de l'entreprise, en utilisant l'ensemble des informations et des règles de décisions permettant de déclencher les approvisionnements au bon moment, et à des quantités optimales de commande. L'optimalité est basée sur le critère de l'espérance des coûts par période où dans le long terme.

## 1.3 Les éléments essentiels dans un système de gestion de stocks

Les systèmes de gestion de stocks sont parmi les plus étudiés par les spécialistes de la recherche opérationnelle. La raison de cette attention considérable est due simplement au fait qu'en pratique l'analyste se retrouve face à plusieurs situations différentes l'une de l'autre, et que chacune nécessite une étude sur mesure. Le modèle de Wilson introduit en 1913 [49], est le premier modèle de gestion de stocks, il est basé sur des hypothèses simples et peu réalistes mais il reste largement applicable en pratique. Depuis, divers modèles de gestion de stocks ont été proposés à savoir les hypothèses posées dans chaque étude. Par ailleurs, on distingue ses divers modèles par rapport aux éléments qui le constitue.

Tout d'abord, définissons un système de stockage : il s'agit d'un ensemble de structures physiques conçues pour stocker des marchandises, avec comme priorités une exploitation optimale de l'espace, un accès facile et une organisation des produits selon certains critères. Maintenant, décrivons les éléments constituant ce système de stockage :

1. **Structure de stockage** : c'est la manière dont les produits stockés sont organisés. Principalement, il existe deux structures possibles :
    - **Structure mono-échelon (un seul niveau)** : cette structure est la plus adaptée dans les modèles conçus par les analystes. Dans ce cas de structure, seulement un seul magasin reçoit le produit du fournisseur et le délivre aux consommateurs à la fois.
    - **Structure multiples échelons (plusieurs niveaux)** : contrairement à la première structure, dans cette structure un magasin central appelé souvent dépôt reçoit le produit du fournisseur et le délivre pour d'autres magasins moins volumineux appelés détaillants. Cette structure est plus complexe mais elle reste tout de même une situation réaliste.
  2. **Horizon de planification** : c'est l'horizon (l'espace de temps) sur le quel le stock est contrôlé. Cet horizon peut être fini où infini, déterministe où aléatoire. En littérature, la situation la plus considérée est l'horizon de planification infini, déterministe, mais il existe
-

tout de même une certaine catégorie qui suppose que ce dernier est fini où aléatoire.

3. **Produits** : La gestion de stocks peut inclure un ou plusieurs produits. Ces produits peuvent être de divers types, comme ils peuvent interagir entre eux. Chaque produit est stocké sous des conditions, par exemple les produits périssables doivent être gérés d'une manière plus délicate par rapport aux produits non périssables sous des conditions contrôlées (humidité, température, etc.).

Dans la littérature des systèmes de gestion de stocks, la plupart des modèles proposés ne considère qu'un seul produit et suppose que celui-ci est géré en stock d'une manière indépendante. Néanmoins, il existe d'autres modèles considérant plusieurs produits qui sont gérés simultanément, à savoir qu'ils partagent les mêmes ressources disponibles ( i.e. espace de stockage, budget, possibilité d'interaction entre eux, etc.).

4. **Les politiques de contrôle (politique de gestion de stocks)** : Une politique de contrôle a pour objectifs principaux de définir le niveau de stock indispensable pour faire face à la demande de clients, de définir les tailles des quantités à commander et les délais entre deux réapprovisionnements pour maintenir le niveau de stock souhaité. Elle répond aux questions principales suivantes :

- **Quand est-ce qu'on lance un approvisionnement ?** Principalement il existe trois méthodes répondant à cette question, et elles sont données ci-après :
  - **La méthode avec point de commande** : un approvisionnement est lancé seulement lorsque le stock chute à un niveau prédéfini appelé **point de commande**.
  - **La méthode calendaire** : l'approvisionnement du stock est lancé à des intervalles de temps, par exemple chaque semaine ou chaque mois.
  - **La méthode calendaire conditionnelle** : cette méthode jumle entre les deux premières méthodes i.e. l'approvisionnement du stock est déclenché à des intervalles de temps, mais seulement si le niveau du stock atteint un niveau prédéfini (point de commande).
- **Combien faut-il commander ?** Il existe deux méthodes de base qui permettent de répondre à cette question, à savoir :
  - **Approvisionnement par quantité fixe** : à chaque approvisionnement, une même quantité fixe de commande est lancée. Le modèle de Wilson se base essentiellement sur cette méthode d'approvisionnement.
  - **Approvisionnement par quantité variable** : lors de chaque commande, le niveau du stock est mesuré pour commander une quantité qui permet de re-compléter ce stock (tenter de le ramener à son niveau initial).

Après avoir défini c'est quoi une politique de contrôle de stocks, nous allons introduire les politiques de contrôle de stocks les plus utilisées dans la littérature. Les politiques les plus courantes sont les politiques avec point de commande. Ces politiques ont l'avantage d'éviter

de recommander alors que le stock peut être encore disponible, ou de se retrouver dans une situation de rupture de stock dans une période de forte demande. Cependant, ces politiques de contrôle avec point de commande peuvent être classées en deux classes selon de la revue : revue continue ou revue périodique qui sont données ci-après :

► **Politiques à revue continue :**

- **Politique  $(s, S)$**  : Cette politique est caractérisée par les paramètres de contrôle  $s$  et  $S$ . Quand le niveau du stock est inférieur ou égal à  $s$ , une commande est immédiatement lancée. La quantité de commande est telle que le niveau de stock atteint  $S$ .
- **Politique  $(S, S)$**  : Cette politique est un cas spécial de la politique  $(s, S)$ , avec  $s = S$ . Suivant cette politique, une commande est lancée à chaque demande d'articles par les clients. Elle est essentiellement utilisée dans les systèmes de gestion de stocks d'éléments réparables ou bien d'articles rares et chers.
- **Politique  $(s, Q)$**  : Cette politique est semblable à la politique  $(s, S)$ , dans le cas où  $S = Q + s$ . Elle est caractérisée par le lancement d'une commande de taille  $Q = S - s$ , lorsque le niveau de stock est inférieur ou égal au seuil  $s$ .
- **Politique  $(s, nQ)$**  : Suivant cette politique, lorsque le niveau de stock  $x$  chute au dessous de  $s$ , une commande de  $nQ$  articles est lancée où  $Q$  est la quantité optimale de commande est calculée par la formule de Hariss (donnée dans la section 1.5.1.1, formule 1.2) et  $n$  est le plus petit entier vérifiant  $x + nQ > s$ .

► **Politiques à revue Périodique :**

Pour ce type de politiques à revue périodique, les politiques sont équivalentes à celles utilisés pour le contrôle du stock à revue continue. Néanmoins, pour ce type, l'inspection du stock se fait chaque  $R$  unités de temps. Les plus courantes sont données comme suit :

- **Politique  $(R, s, S)$**  : Cette politique est équivalente à la politique  $(s, S)$  à revue continue. Dans cette politique, le stock est inspecté chaque  $R$  unités de temps, si durant l'inspection le niveau de stock a chuté au niveau  $s$ , une commande est lancée de telle sorte à reconstituer le stock à son niveau initial  $S$ , sinon on attend jusqu'à la prochaine période d'inspection.
- **Politique  $(R, S)$**  : Cette politique est un cas spécial de la politique  $(R, s, S)$ , avec  $s = S$ . Suivant cette politique, une commande est lancée à chaque demande d'articles par les clients après une inspection chaque  $R$  unités de temps.
- **Politique  $(R, s, Q)$**  : Cette politique est semblable à la politique  $(R, s, S)$ , dans le cas où  $S = Q + s$ . Elle est caractérisée par le lancement d'une commande de taille  $Q = S - s$ , lorsque le niveau de stock est inférieur ou égal au seuil  $s$  au moment de l'inspection qui se fait chaque  $R$  unités de temps.
- **Politique  $(R, s, nQ)$**  : Suivant cette politique, chaque  $R$  unités de temps, le stock est supervisé et lorsque le niveau de stock  $x$  chute au dessous de  $s$ , une commande de  $nQ$  articles est lancée où  $Q$  est la quantité de commande est calculée par la formule de Hariss et  $n$  est le plus petit entier vérifiant  $x + nQ > s$ .

Toutefois, il existe plusieurs d'autres variantes des politiques de contrôle, tels que  $(S-1, S)$  à revue continue et périodique [2, 5] et  $(R, s, l_n Q)$ [1]. chacune répond aux objectifs visés par le gestionnaire.

5. **Le processus de la demande** : Le processus de la demande peut être déterministe, aléatoire/stationnaire ou dynamique. L'hypothèse la plus simple est de considérer une demande connue (déterministe) et constante dans le temps. Cette hypothèse est celle qui est considérée dans le modèle de Wilson et elle est considérée peu réaliste. Une hypothèse qui reflète plus la réalité est que les demandes soient déterministes variables ou bien aléatoires suivant des lois de probabilités connues (loi de Bernoulli, loi géométrique, loi normale, etc.).
6. **Délai de livraison** : C'est le temps écoulé entre l'instant de lancement d'une commande et l'instant de sa réception. Le cas le plus simple est de le considérer nul (i.e. dans ce cas la commande est reçue instantanément), ce qui n'est pas toujours le cas dans la réalité. Il convient donc de considérer que cette durée est non nulle, déterministe ou aléatoire. Cependant, il se trouve que la plupart des modèles élaborés dans la littérature considèrent que ce délai est aléatoire. Ces modèles demeurent parmi les modèles les plus compliqués à étudier, pour s'y faire on suppose que les commandes ne peuvent jamais se croiser dans le temps, autrement dit les commandes arrivent dans l'ordre de leurs lancements dans le temps.
7. **Ruptures de stock** : Une situation qui complique davantage l'analyse d'un système de gestion de stocks est de considérer que les ruptures de stock sont permises. Dans ce cas, deux situations possibles peuvent être considérées, et elles sont : demandes retardées dites aussi arriérées ou demandes perdues. Ces deux situations donne naissance à deux modèles de gestion de stocks différents, à savoir :
  - **Modèles avec demandes arriérées** : Dans ces modèles on considère que toute demande qui arrive en situation de rupture de stock est retardée jusqu'à réception d'une nouvelle commande.
  - **Modèles avec demandes perdues (ventes perdues)** : Dans ce cas, la demande en situation de rupture de stock est tout simplement perdue.

Il se trouve que certains chercheurs ont considérés que les deux situations citées auparavant sont peu réalistes ou plutôt peu praticables lorsque le modèle considéré est soumis à certaines hypothèses, par exemple une source infinie de demandes avec une capacité de stockage limitée, où l'entreprise ne peut pas répondre à toutes les demandes en situation de rupture de stock et elle souhaite arriérer seulement un certain nombre de demandes. Dans ce cas, on peut considérer une mixture entre les deux hypothèses existantes, celle-ci est connue sous le nom de l'hypothèse **demandes partiellement arriérées ou partiellement perdues**.

---

– **Modèles avec demandes partiellement arriérées/perdues** : Plusieurs chercheurs ont considéré ce type de modèles. Les travaux les plus populaires incluant cette hypothèse dans leurs modèles de gestion de stocks ont considéré la fraction des demandes insatisfaites, voir les contributions de D.C.Montgomery et al. [74] et D.Rosenberg [90], et voir aussi [105] et [56] pour des références plus récentes. En revanche, dans [83] G.Rabinowitz et al. ont inclus un paramètre de contrôle définissant le seuil maximal pour le nombre de demandes arriérées au-delà duquel, les demandes n’y accèdent plus au système c’est-à-dire rejetées. Ces travaux nous ont inspiré pour considérer cette hypothèse dans les systèmes de gestion de stocks que nous étudions dans cette thèse.

8. **Capacité** : La capacité de stockage est l’une des propriétés qui peuvent aussi rendre l’analyse des systèmes de gestion de stocks plus complexe, lorsque on suppose que la quantité que peut recevoir le gestionnaire depuis le fournisseur peut être aléatoire où limitée. La limitation peut être liée à la capacité de production, où encore à la capacité de stockage, etc.

9. **Coûts** : La gestion de stocks a pour but de garantir une satisfaction des demandes des clients en assurant la disponibilité des articles demandés tout en minimisant le coût total encouru par la politique de gestion de stocks. Généralement trois types de coûts sont pris en compte, à savoir le coût de possession, le coût de passation d’une commande et le coût de rupture de stock, qui sont détaillés comme suit :

- **Le coût de possession** : il exprime le coût dû à la possession d’un article en stock, il peut être généré par plusieurs composantes, telles que les charges liées au stockage physique des articles en stock (entretien, conservation en stock, assurance des produits,...). Aussi, on peut trouver des charges liées à l’entrepôt (coût de location où d’achat, coût des salariés qui assure la surveillance et l’entretien de l’entrepôt,..). Le coût de possession est généralement proportionnel au niveau moyen du stock.

- **Le coût de passation d’une commande** : La passation d’une commande doit passer par plusieurs opérations préliminaires (surveiller l’état du stock, déterminer la quantité de commande, contacter le fournisseur, contrôler et payer la facture du fournisseur...). Ces opérations sont généralement indépendantes de la quantité de commande, ceci est exprimé par un coût fixe dit coût fixe de passation d’une commande. Ce coût se répète à chaque fois qu’une nouvelle commande est passée et il est proportionnel aux nombre d’ordres de réapprovisionnement par unité de temps. Il existe d’autres coûts qui sont proportionnels à la quantité de commande, par exemple le coût d’achat d’une unité en stock. La fonction des coûts de commandes est généralement linéaire.

- **Les coûts de rupture de stock (coûts de pénurie)** : Ce sont des coûts liés à l’absence de l’article en stock en cas de demande. Ces coûts sont délicats et sont difficiles à estimer, ils dépendent aussi du modèle à étudier. Dans ce cas, lorsqu’un article n’est pas disponible en stock la demande est retardée (arriérée), perdue ou encore partiellement arriérée. Dans

le cas d'une demande qui est arriérée, ce coût peut être exprimé par la charge budgétaire dépensé pour retenir la demande en attente d'un nouvel réapprovisionnement. Dans le cas d'une demande qui est perdue, le coût de pénurie est estimé par le manque à gagner de la non satisfaction de cette demande. Dans certains cas, le coût de pénurie est connu, c'est le cas où il figure dans certains contrat sous forme d'astreintes. Ce coût est généralement proportionnel au nombre d'articles manquants et au nombre de périodes pendant les quelles se poursuit la pénurie.

10. **Mesures de service** : Certains auteurs trouve que l'approche par coûts moyen est difficile à élaborer et parfois impossible, spécialement lorsque les coûts sont difficiles à estimer particulièrement les coûts de pénuries. Cependant, il existe d'autres mesures quantitatives de la qualité de service, liées à la période de rupture de stock. Essentiellement, les trois mesures de service qui sont souvent utilisées sont :

- **Mesure de non rupture (P1-mesure)** : est la proportion de cycles dans lesquels aucune rupture n'est enregistrée. Un cycle est défini par l'intervalle de temps entre la réception de deux commandes consécutives.
- **Mesure de taux de remplissage (P2-mesure)** : est la proportion de demandes satisfaites directement du stock en main.
- **Mesure de taux de disponibilité (P3-mesure)** : est la proportion de temps où le niveau de stock est positif.

Dans nos contributions on a mesuré la qualité de service par la probabilité de disponibilité du stock.

Maintenant, nous allons passer à définir les modèles de base de la gestion de stocks, à savoir : les modèles avec "demande déterministe" et les modèles avec "demande stochastique", tout en donnant une brève revue pour chacun des deux modèles de gestion de stocks. Ceci est bien détaillé dans la section suivante :

## 1.4 Les modèles déterministes et stochastiques de gestion de stocks

Les modèles sont conçus de telle sorte à se rapprocher des systèmes réels étudiés avec les hypothèses impliquées dans chaque modèle (Horizon de planification, capacités, Processus de la demande, ruptures,..). Ces hypothèses peuvent rendre l'analyse plus complexe, et pour ce faire différents outils de modélisation viennent en aide pour les mathématiciens à savoir : La théorie des chaînes de Markov, la théorie de files d'attentes et les formalismes des réseaux de Petri. Dans la littérature, on retrouve une classification des modèles de gestion de stocks selon la demande, à savoir : les modèles avec "demande déterministe" et les modèles avec "demande stochastique". Dans cette section, nous allons présenter les modèles de bases de la gestion de stocks, à savoir : "le

---

modèle de quantité économique de commande” qui un modèle avec ”demande déterministe” et ”le problème du marchand de journaux” qui est un modèle avec ”demande stochastique”. Ensuite pour chaque modèle défini, nous allons donner brièvement une revue sur les modèles de quantité économique de commande et des modèles avec demande stochastique. Les deux sous-sections 1.4.1 et 1.4.2 vont faire l’objet de cette revue.

### 1.4.1 Les modèles de la gestion de stocks avec demande déterministe

Dans cette catégorie on suppose que la demande est connue ou déterministe. Dans la même catégorie, on peut considérer les modèles qui supposent que le processus de la demande est aléatoire mais que sa taille est déterministe. Dans ce cas de figure, on se ramène à la demande déterministe en remplaçant tout simplement la variable aléatoire représentant la demande par sa moyenne qui est une quantité déterministe. Ces modèles ont l’avantage de simplifier énormément l’analyse, et à avoir des résultats plus faciles à implanter par un économiste. Dans cette même catégorie s’inscrit le premier modèle de gestion de stocks appelé le modèle de base où le modèle de la quantité économique de commande EOQ (*Economic Order Quantity*).

#### 1.4.1.1 Le modèle de la quantité économique de commande (modèle Wilson)

Ce modèle fut le premier modèle de gestion de stocks, il a été introduit en 1913 par H. Wilson [49]. Ce modèle repose sur des hypothèses assez simples et peu réalistes, mais il reste tout de même efficace et largement applicable en pratique. Les hypothèses de ce modèle sont données comme suit :

- La demande est connue et est constante à un taux  $\lambda$  éléments par unité de temps.
- Les ruptures de stock ne sont pas permises.
- Les éléments sont instantanément servis après leurs commande, i.e. le délai de livraison est nul.
- L’horizon de planification est infini.
- Un seul article est géré en stock.

L’évolution du stock pour ce modèle mono-article dans un cycle de durée  $T$  unités de temps est illustré dans la Figure. 1.3 suivante :

Le modèle EOQ vise essentiellement à déterminer la quantité économique de commande  $Q$  de telle sorte à réaliser un compromis entre le coût de commande ( $C_L$ ) et le coût de possession du stock ( $C_P$ ). Ces coûts sont donnés ci-après :

- Le coût de commande ( $C_L$ ) : est la somme de deux coûts différents, à savoir :
  - Le coût fixe de commande  $K$  (pour chaque commande lancée)  $\times$  le nombre de commandes  $(\frac{\lambda}{Q})$ ;
  - Le coût de commande proportionnel  $c$  pour tout élément commandé  $\times$  la quantité commandée ( $Q$ ) pendant un cycle réapprovisionnement  $T = \frac{Q}{\lambda}$ .

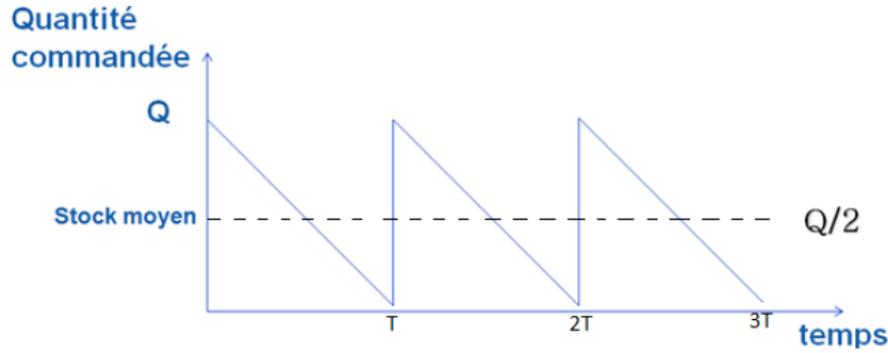


FIGURE 1.3 – Evolution du stock dans le modèle EOQ.

- Le coût de possession du stock ( $C_P$ ) : Le coût de maintien en stock  $h$  par chaque élément maintenu par unité de temps  $\times$  Le stock moyen  $\frac{Q}{2}$ .

Le modèle mathématique à résoudre est de minimiser la fonction coût total notée  $C_T(Q)$  par rapport à  $Q$ , définie comme suit :

$$\min C_T(Q) = \frac{\lambda K}{Q} + c\lambda + \frac{hQ}{2} \quad (1.1)$$

La fonction  $C_T(Q)$  est convexe par rapport à ( $Q > 0$ ), donc elle admet un optimum (un minimum global) qui vérifie la condition (1.2) suivante :

$$C_T''(Q) = 2K\left(\frac{\lambda}{Q^3}\right) > 0, \quad (1.2)$$

avec :

$$C_T'(Q) = -K\left(\frac{\lambda}{Q^2}\right) + \frac{h}{2}, \quad (1.3)$$

L'optimum est trouvé lorsque on pose ( $C_T'(Q) = 0$ ), la solution unique est donnée par :

$$Q^* = \sqrt{\frac{2K\lambda}{h}}. \quad (1.4)$$

Cette équation est la formule classique de la quantité économique de commande.

#### 1.4.1.2 Modèle de gestion des stocks avec ruptures permises

Dans des situations plus réalistes, les demandes peuvent ne pas être satisfaites à temps à cause de la situation de rupture du stock, et doivent attendre jusqu'au prochain cycle de réapprovisionnement. Cependant, le modèle de base (modèle de la quantité économique de commande) n'est plus applicable dans ce cas.

Dans le modèle de gestion des stocks avec ruptures permises, des coûts supplémentaires sont engendrés à savoir : le coût de perte d'une vente qui est généralement estimé par un manque à gagner ainsi que d'autres coûts encourus par l'arriération des demandes par exemple, le coût

d'attente, etc..). Ces différents coûts sont généralement connus sous le coût de rupture ou coût de pénurie.

Soit  $c_m$  le coût dû au manque (pénurie) d'une unité de l'article par an. En plus des différents coûts déjà considérés dans le modèle de la EOQ ( le coût fixe de commande  $K$ , le coût de commande proportionnel  $c$  à la quantité commandée et coût de maintien d'une unité en stock  $h$  ). Dans ce modèle, On suppose que toutes les demandes des clients sont différées et aucune vente n'est perdue, i.e. que la demande des clients non encore servis sera satisfaite au prochain cycle de réapprovisionnement. De plus, on suppose que le délai de livraison est nul.

La quantité optimale de commande dans ce modèle peut être déterminée après définition des paramètres suivants :

- $Q$  : la quantité de commande ;
- $M$  : le niveau du stock maximal ;
- $S$  : le nombre maximal d'unités de l'article en pénurie pendant le cycle de réapprovisionnement  $T$ .
- $T_1$  : le cycle de temps où la demande peut être satisfaite du stock en main ;
- $T_2$  : le cycle de temps où le stock est rupturé ;

L'évolution du stock dans le modèle de gestion de stock avec ruptures permises lorsque la commande est lancée à l'instant zéro est représenté dans la figure suivante :

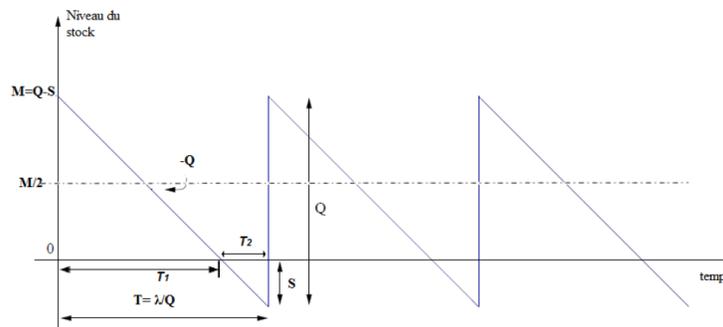


FIGURE 1.4 – Modèle de gestion des stocks avec ruptures permises.

Dans ce modèle, le coût total annuel de gestion de stock est composé du coût de lancement de commandes ( $C_L$ ), le coût de possession du stock  $C_p$  et du coût de rupture de stock ( $C_r$ ). Dans ce cas, la fonction du coût total annuel de gestion de stock  $C_T(Q)$  est donné comme suit :

$$C_T(Q) = C_L + C_P + C_r = \frac{\lambda K}{Q} + c\lambda + \frac{M}{2} \frac{T_1}{T} h + \frac{S}{2} \frac{T_2}{T} c_m; \quad (1.5)$$

En remplaçant  $T = \frac{Q}{\lambda}$ ,  $T_1 = \frac{M}{\lambda}$  et  $T_2 = \frac{(Q - M)}{\lambda}$  dans la formule (1.5), on obtient :

$$C_T(Q, M) = \frac{\lambda K}{Q} + c\lambda + \frac{M^2}{2Q} h + \frac{(Q - M)^2}{2Q} c_m; \quad (1.6)$$

La fonction  $C_T(Q, M)$  est convexe, donc elle admet un minimum global  $(Q^*, M^*)$  vérifiant les deux relations suivantes :

$$\frac{\partial C_T(Q, M)}{\partial Q} = 0; \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial C_T(Q, M)}{\partial M} = 0. \quad (1.8)$$

En résolvons simultanément les deux précédentes equations, on aboutit à l'optimum (minimum) global (la quantité optimale de commande  $Q^*$  et le niveau maximal du stock  $M^*$ ) donné comme suit :

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\lambda K}{h} \left( \frac{c_m + h}{c_m} \right)}; \quad (1.9)$$

$$M^* = \sqrt{\frac{2\lambda K}{h} \left( \frac{c_m}{c_m + h} \right)}; \quad (1.10)$$

D'après les deux relations précédentes (1.9) et (1.10), on peut exprimer  $M^*$  en fonction de  $Q^*$  en utilisant la formule suivante :

$$M^* = \left( \frac{c_m}{c_m + h} \right) Q^*. \quad (1.11)$$

Le modèle de base (EOQ) ainsi que le modèle avec rupture de stock ont été largement repris dans la littérature depuis leurs élaborations. Les articles les plus récents qui ont travaillé sur des modèles avec ruptures de stocks permises sont [93, 105, 38] et voir aussi [77].

San-José et al. [93] ont présenté un modèle mathématique qui généralise plusieurs systèmes déterministes connus de type (EOQ) avec demandes partiellement arriérées. Pour résoudre le problème de la quantité optimale de commande, les auteurs ont considéré une fonction coûts qui est une somme pondérée des coûts suivants : le coût d'achat, le coût de maintien en stock, les coûts de pénurie et de réapprovisionnement. Les coûts de pénurie sont donnés par : le coût d'arriération et le coût des ventes perdues et ils sont constitués d'un coût fixe et d'un coût variable qui dépend de la longueur du temps d'attente pour le prochain réapprovisionnement. En pratique, cette situation s'avère intéressante, car les clients prennent généralement la décision d'attendre ou non le prochain réapprovisionnement, en fonction du temps qu'ils doivent attendre et aussi de la possibilité de la récompense de la part de l'entreprise s'ils attendent. La politique optimale est retrouvée à l'aide d'une procédure d'optimisation dite "optimisation séquentielle". Pour illustrer cette approche, San-José et al. ont proposé des exemples numériques ainsi qu'une analyse de sensibilité.

Wang et al. [105] ont étudié un modèle de gestion de stocks avec demandes partiellement arriérées, contraint par le taux de sélection pendant la période de pénurie. Les auteurs ont pu dégager l'expression exacte du profit total par unité de temps, en utilisant la théorie de la récompense de renouvellement. Pour simplifier le problème, ils ont posé l'intervalle de temps comme variable de décision au lieu de la taille de demandes arriérées en période de rupture de stock. La

solution de ce problème est donnée par sa forme explicite grâce à l'approche de transformation de variables. En posant des valeurs limites des paramètres, les auteurs ont pu obtenir un modèle de gestion de stocks réduit au modèle EOQ traditionnel avec ou sans demandes partiellement arriérées. Le modèle généralisé a été illustré par des exemples numériques.

Plus récemment, Mandal a présenté dans [38] un système de gestion de stocks avec une demande qui dépend du temps, la détérioration des produits est variable dans le temps et le délai de livraison est nul. De plus, l'auteur a considéré la demande telle une fonction cubique dépendant du temps et du coût de stockage. Dans ce modèle, les demandes insatisfaites sont complètement arriérées. Dans ce travail, Mandal a proposé une nouvelle approche de résolution, en utilisant une valeur de récupération des articles qui se dégradent au cours d'un cycle.

### 1.4.2 Les modèles de la gestion de stocks avec demande stochastique

Contrairement à la première classe définie par les modèles avec "demande déterministe" où la demande est connue et déterministe ou remplacée par une quantité déterministe. Dans cette deuxième classe avec "demande stochastique", la demande est une variable aléatoire discrète ou continue. Cette variable aléatoire suit une loi de probabilité bien connue, à savoir : les lois de probabilités dans le cas discret et celles dans le cas continue, comme elle peut être inconnue, donc il faut chercher son estimateur.

Une catégorie d'auteurs ont fait recours à ce type de modèles qui reflètent beaucoup plus les systèmes réels. Néanmoins, l'analyse de ces modèles demeurent d'une complexité considérable, et en général ces modèles ne sont résolus que d'une manière approximative. Dans ce qui suit, nous allons donner une brève revue sur quelques modèles avec "demande stochastique".

#### 1.4.2.1 Le problème du marchand de journaux

Le problème du marchand de journaux est un problème de gestion de stocks où la demande est stochastique étudié sur une seule période (horizon fini). Ce problème correspond particulièrement au cas de produits occasionnels par exemple : journaux, magazines, cadeaux de fin d'année. Ce problème a connu beaucoup d'extensions dans le domaine de gestion de stocks (voir les travaux de Silver et al. [99] et aussi le livre de E.L., Porteus [82]).

Dans le modèle de base du problème du marchand de journaux, on s'intéresse à déterminer la quantité optimale de commande pour faire face à une demande aléatoire sur une seule période. Soit cette quantité est inférieure à la demande, dans ce cas la différence est considérée comme un manque à gagner, dans le cas contraire, à la fin de la période tout article est perdu ou soldé. La résolution de ce problème est faite à la base de deux différentes approches qui aboutissent à un même résultat. Dans la première approche, on minimise le coût moyen de la surestimation et de la sous-estimation de la demande. Dans la deuxième approche, on maximise le profit total par période.

---

Cependant, d'autres auteurs se sont penchés sur l'étude des modèles de gestion de stocks avec "demande stochastique" sur un horizon infini, présentés à la base de processus régénératifs ([20, 44, 84]).

Dans sa thèse de doctorat [84], Rabta a étudié les modèles de la gestion de stocks suivant la politique  $(R, s, S)$  et la politique  $(s, S)$ , avec demande stochastique suivant une loi de probabilité discrète. L'auteur a appliqué la méthode de stabilité forte, qui est une méthode connue dans l'étude de stabilité des systèmes stochastiques.

Dans [21], Bensoussan et al. ont étudié un système de gestion de stocks contrôlé sur plusieurs périodes avec demande stochastique selon deux cas différents. Comme premier cas, la demande est supposée markovienne. Dans le deuxième cas, la distribution de la demande est une loi de paramètre inconnu estimé avec l'approche de Bayes. La demande est partiellement observée sur une période. Ces observations sont utilisées pour mettre à jour les distributions de la demande dans le temps. L'équation d'évolution d'état pour la distribution de la demande devient linéaire avec l'utilisation de probabilités non normalisées. Dans les deux cas de demande, l'existence d'une politique optimale de commande est prouvée par récurrence. Pour plus de détails sur les modèles de gestion de stocks avec demande markovienne voir [23].

Dans cette thèse, nous nous intéressons à une classe bien particulière de modèles de gestion de stocks, qui est la classe des modèles de gestion de stocks avec demande aléatoire représentée par une quantité déterministe ayant une taille connue "déterministe", tout en considérant d'autres paramètres aléatoires (les inter-arrivées, le délai de livraison et les inter-rappels). De plus, nous allons faire appel aux "modèles avec ruptures permises" plus exactement "les modèles avec demandes partiellement arriérées". Dans la cas de rupture, les demandes qui arrivent au système rejoignent une orbite (elles sont arriérées) et rappellent. Par conséquent, nous avons fait appel à une autre classe de systèmes dite "classe de systèmes avec rappels". Tout ces aspects, nous ont motivé à considérer un système de gestion de stocks avec demandes lots de taille déterministe, demandes partiellement arriérées et rappels.

## **1.5 État de l'art sur les modèles de gestion de stocks avec ruptures permises et rappels**

### **1.5.1 Modèles de gestion de stocks avec ruptures permises**

Les modèles de gestion avec rupture de stock sont des modèles qui traitent la situation de rupture de stock. Dans de tels modèles, les demandes qui arrivent en situation de stock nul ou insuffisant (rupture de stock) font face aux hypothèses liées à la rupture de stock, qui sont déjà définies dans la section 1.3 : les demandes sont complètement arriérées, les demandes sont complètement perdues (ventes perdues) où les demandes sont partiellement arriérées/perdues. Ces modèles sont classés et détaillés ci-dessous :

**► Modèles avec demandes complètement arriérées**

Les modèles avec politique de demandes complètement arriérées sont largement répandus dans la littérature des modèles de gestion de stocks avec ruptures permises. Selon la source de demandes potentielles finie ou infinie, les auteurs modélisent la politique d'arriération des demandes. D'une part, lorsque la source des demandes est finie, lors de la rupture de stock les demandes peuvent être arriérées complètement, c'est le cas des travaux : [4, 79, 92]. D'une autre part, lorsque la source des demandes est infinie, la politique d'arriération complète demeure peu réaliste, car le nombre de demandes arriérées peut croître considérablement et aboutissant à des coûts élevés encourus par l'arriération de ces demandes. Cependant, certains auteurs trouvent que cette politique est plus adéquate pour modéliser la situation des demandes insatisfaites durant la période de rupture de stock, par exemple [96, 2].

Dans [96], Schwarz et Daduna ont analysé un système de gestion de stocks à revue continue suivant les deux politiques de contrôle  $(r, Q)$  et  $(0, Q)$ , un délai de livraison aléatoire exponentiellement distribué et des demandes qui sont complètement arriérées durant la situation de rupture de stock. Dans ce travail, les auteurs ont élaboré un modèle de type  $M/M/1/\infty$ , où ils ont présenté l'heuristique proposée par Sigman et Simchi-Levi, pour dériver certaines performances du modèle étudié. Le problème d'optimisation proposé dans ce travail répond à la maximisation d'une fonction "profit" avec la récompense  $R$ , qui est attribuée au système. En utilisant une approche numérique, Schwarz et Daduna ont pu obtenir des résultats sub-optimaux.

Dans [2], Alimardani et al. ont proposé un système de gestion de stocks avec la politique de révision continue  $(S - 1, S)$  dans une Chaîne Logistique (CL) à trois échelons, comprenant  $r$  détaillants identiques, un entrepôt central avec un espace de stockage limité et deux usines de fabrication indépendantes qui offrent deux types de produits au clients. Le mécanisme de l'entrepôt est décrit par une file d'attente de type  $M/M/1$  où les demandes de clients suivent un processus de Poisson et un temps de service aléatoire distribué selon une loi exponentielle. La solution du problème d'optimisation proposé pour ce modèle à deux produits a été comparée avec celle des deux modèles  $M/M/1$  qui sont développés séparément pour chaque produit, et la solution optimale du modèle développé représentant le stock optimal de chaque produit à l'entrepôt a été élaboré via une méthaheuristique répondant au degré de complexité de l'analyse de ce modèle.

**► Modèles avec demandes complètement perdues**

Les modèles avec demandes complètement perdues ou bien avec "ventes perdues" sont les modèles les plus simples à étudier. Du fait, que ces derniers sont semblables aux modèles de gestion de stocks sans ruptures permises, voir [3, 6, 23, 51].

Dans [51], Hill et al. ont étudié un système de gestion de stocks en deux échelons, mono-article. Le processus de demande de chaque détaillant est un processus de Poisson. La demande non satisfaite est perdue. La quantité commandée de chaque détaillant et de l'entrepôt prend la même valeur fixe  $Q$ , une variable exogène déterminée par les contraintes d'emballage et de manutention.

Pour retrouver les mesures de performance intéressantes à savoir le niveau moyen du stock dans le système et la fraction de demandes satisfaites chez les détaillants, ainsi que pour optimiser le comportement du système des procédures ont été développées.

Dans [6], Andersson et al. ont étudié un système multi-échelons, suivant une politique de révision continue  $(S - 1, S)$ , et ont supposé que dans le milieu compétitif, il est plus représentatif de considérer que les clients quittent le système s'ils trouvent que le stock indisponible à l'instant de la demande, d'où la perte de demandes. Pour trouver les politiques de gestion de stocks les plus rentables, les auteurs ont suggéré une heuristique à base d'une métrique approximative.

Dans cette thèse, on s'intéresse spécialement à la classe de modèles de gestion de stocks avec une mixture entre les deux premières hypothèses "demande complètement arriérées" et "demandes complètement perdues" qui est dite l'hypothèse de "demandes partiellement arriérées". Dans ce qui suit, on va donner un état de l'art des travaux citant cette hypothèse dans leurs modèles.

### ► Modèles avec demandes partiellement arriérées

Les travaux les plus répandus dans la littérature des modèles de gestion de stocks avec demandes partiellement arriérées ont considéré la fraction des demandes insatisfaites, voir les contributions de Montgomery et al.[74] et Rosenberg [90]. Montgomery et al. ont considéré un système de gestion de stocks avec une fraction de demandes insatisfaites qui est arriérée et que le reste est complètement perdu. Les deux types de demandes, à savoir demande déterministe et demande stochastique sont considérés dans ce modèle. Néanmoins, le cas de demande stochastique s'est avéré plus difficile à étudier, c'est la raison pour laquelle l'auteur a proposé une heuristique. Rosenberg a reformulé le modèle de Montgomery et al. en introduisant un taux de demande fictif qui simplifie l'analyse de la politique de demande partiellement arriérées et donne une interprétation économique des circonstances dans lesquelles cette politique est optimale.

Plus tard, dans [83] Rabinowitz et al. ont proposé un modèle suivant la politique du point de commande  $(r, Q)$  avec demandes partiellement arriérées. Dans ce modèle l'hypothèse partiellement arriérées est modélisée en fixant un seuil dit seuil d'arriération qui limite le nombre de demandes en attente pouvant être accumulées dans un cycle de réapprovisionnement. Au-delà de ce seuil, les demandes qui arrivent sont perdues. Cette variable définissant le seuil d'arriération est une variable de contrôle entre les deux hypothèses de base (complètement arriérées et complètement perdues). Le coût annuel du modèle est donné par le coût de lancement d'une commande (le coût fixe et un coût proportionnel à la quantité de commande  $Q$ ), le coût de maintien en stock et les coûts de pénuries (le coût d'arriération et le coût d'une vente perdue), le coût d'arriération est donné par de différents coûts : le coût unitaire et le coût annuel. Les auteurs ont résolu un problème d'optimisation tri-dimensionnel pour trouver une solution exacte de la politique optimale de contrôle de stocks. Des exemples numériques démontrent l'avantage de la mise en oeuvre de la politique de demandes qui sont partiellement arriérées.

Dans ce qui suit, nous allons introduire une autre classe de systèmes de gestion de stocks auxquels nous avons fait appel dans nos différents travaux de recherches. Dans ce type de systèmes, un client qui arrive en situation de rupture de stock a la possibilité d'attendre dans une orbite virtuelle et de rappeler après un temps de durée déterministe ou aléatoire, d'où l'appellation des "systèmes de gestion de stocks avec rappels".

### **1.5.2 Systèmes de gestion de stocks avec rappels**

La théorie des rappels a été largement appliquée à plusieurs domaines, initialement dans les réseaux de télécommunications [41, 32, 39], les files d'attentes avec rappels [7, 8, 11, 9, 14] où encore les systèmes multi-classes avec rappels [47]. Pour les systèmes de files d'attentes avec rappels, voir le livre de Artalejo [12], où il décrit les différentes politiques de rappels existantes (politique de rappels classiques, politique de rappels constants et politique de rappels linéaires) et voir aussi [81] pour une revue récente sur les files d'attente avec rappels.

Ces dernières décennies, la théorie de rappels a été généralisée à d'autres systèmes, tels que les systèmes de gestion de stocks avec demandes insatisfaites, et c'est bien Artalejo qui a introduit le concept de rappels aux systèmes de gestion de stocks pour expliquer la situation où les demandes insatisfaites qui sont en attente de service. Dans ce travail, Artalejo et al. supposent que ces demandes peuvent quitter temporairement la zone de service et attendre dans une orbite virtuelle pour tenter de rappeler après une durée de temps déterministe ou aléatoire. Dans [13], Artalejo et al. ont considéré les hypothèses suivantes pour les paramètres du système de gestion de stocks considéré : une politique de révision  $(s, S)$ , un seul article est géré en stock, les demandes arrivent suivant un processus de Poisson et elles sont servies immédiatement et le délai de livraison est non nul de distribution exponentielle. Dans la situation de rupture de stock, les demandes qui arrivent au système rejoignent une orbite virtuelle illimitée et rappellent après une durée aléatoire distribuée exponentiellement selon la politique de rappels classiques. En utilisant la méthode de troncature des chaînes de Markov, les auteurs ont pu étudié les trois politiques d'arriération (demandes perdues, complètement arriérées et partiellement arriérées). Pour dériver la distribution stationnaire du modèle étudié, Artalejo et al. ont proposé une approche algorithmique. Pour ensuite, calculer les principales mesures de performance. Les résultats obtenus leurs ont servi de comparaison entre les trois politiques d'arriération). Une étude numérique du coût moyen par cycle de durée  $T$  a été présentée.

Plusieurs travaux ont suivi la contribution de Artalejo et al. en mixant plusieurs hypothèses du modèle à savoir tous les éléments essentiels d'un système de stockage présenté dans la section 1.3, ainsi que la loi de distribution du temps de rappels et de la politique considérée. Pour répondre à la complexité des systèmes étudiés, les auteurs ont proposé la modélisation la plus proche des systèmes réels considérés en utilisant l'une des approches de modélisation existantes, à savoir : les chaînes de Markov, les files d'attentes et les réseaux de Petri.

Dans [104], Ushakumari a étudié le même système de gestion de stocks déjà considéré par Artalejo et al. dans [13] mais avec la "politique de rappels constants". L'auteur a proposé une solution exacte pour les performances du système au régime stationnaire. Depuis lors, plusieurs travaux de recherche ont apparus dans cette classe de systèmes de gestion de stocks avec rappels et qui peuvent être subdivisés en deux grandes classes selon que le temps de service, soit positif ou nul. Pour la première classe avec temps de service positif, une file d'attente a tendance à être formée d'où l'appellation "queueing inventory systems". Dans cette catégorie de systèmes s'inscrivent les travaux suivants [96, 29, 66, 98, 56, 106]. Dans [98], Shajin et Krishnamoorthy ont proposé une décomposition stochastique d'un système de gestion de stocks avec la file  $M/M/1$ . Les auteurs ont pu obtenir une forme produit de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov représentant le niveau de stock et la longueur de la file d'attente. La forme de la distribution stationnaire a servi dans le développement de quelques mesures de performance du système étudié et aussi dans l'étude de la fonction "coût total". Pour les lecteurs intéressés par cette catégorie de systèmes de gestion de stocks avec temps de service positif voir une revue récente réalisée par Krishnamoorthy et al. [60].

Pour la deuxième classe avec temps de service négligeable, d'autres travaux ont été élaborés après les deux contributions [13, 104] tels que, ([4, 5, 58, 101, 100, 92, 79]).

Par exemple, dans [101, 100], Sivakumar a réalisé une analyse via l'outil des chaînes de Markov de deux systèmes de gestion de stocks à source infinie de demandes potentielles, un délai de livraison qui est exponentiellement distribué et une politique de révision continue de type  $(s, S)$ . Dans [101], l'auteur a considéré deux types de produits, supposés être substituables, i.e. au moment où le stock de l'un d'eux produits est nul, l'autre peut être utilisé pour servir la demande du client. Dans le cas où le stock des deux produits est épuisé, les demandes rentrent en orbite dans le cas et elles rappellent après une durée aléatoire de distribution exponentielle selon la politique de rappels constants. Les probabilités d'état au régime stationnaire sont calculées, et les mesures de performance sont ainsi dérivées. Sivakumar a formulé la fonction "coût total", mais l'optimum de cette fonction n'est retrouvé que partiellement (deux variables sont seulement considérées), selon une approche numérique.

Dans [100], Sivakumar a introduit le concept de vacances du serveur dans le système de gestion de stocks avec rappels. Il a supposé des distributions exponentielles distinctes, mais mutuellement indépendantes pour les paramètres du système, à savoir : le délai d'inter-demandes, le délai de livraison, la durée d'inter-rappels et la durée de vacances du serveur. Il a opté pour une politique de vacances multiples. Dans l'analyse de la fonction de coût total pour ce système, l'auteur propose une étude numérique réalisée à base deux variables de décision (le stock maximal et le stock de sécurité).

Dans [4, 5], Anbazhagan et al. ont étudié deux systèmes de gestion de stocks via l'approche des chaînes Markov. Pour le premier travail [4], les auteurs ont considéré un système de gestion

de stocks de type  $(s, S)$  avec rappels, deux produits périssables et un nombre fini de sources de demande homogènes. Pour le deuxième travail [5], Anbazhagan et al. ont proposé un système de gestion de stocks avec rappels de type  $(S-1, S)$  et une source infinie de demandes potentielles. Pour ces deux systèmes étudiés, les inter-arrivées, le délai de livraison, les inter-rappels et la durée de vie du produit sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes exponentiellement distribuées. De plus, les auteurs ont pu obtenir la distribution stationnaire et ils ont dérivé plusieurs mesures de performance. Pour l'étude d'optimalité de la fonction "coût total", les auteurs ont élaboré une méthode numérique pour les deux systèmes étudiés.

Dans [92], Sgayaraj et al. ont étudié un système de gestion de stocks de type  $(s, S)$ , avec une source finie de demandes potentielles, des arrivées et un délai de livraison distribués suivant une loi géométrique. Pour l'analyse de ce système, les auteurs ont opté pour l'approche des chaînes de Markov discrètes.

Dans [58], Karthick et al. ont traité un système de gestion de stocks de type  $(s, S)$  avec deux types de clients, des arrivées selon un processus MAP (Markovian Arrival Process) et une distribution de type phase pour le délai de livraison. Lorsque le stock est au dessus du niveau  $s$ , les clients ne sont pas distingués et sont servis immédiatement. Une fois le stock chute au niveau  $s$ , seulement les clients de type 2 sont servis, et les clients de type 1 rejoignent une de taille infinie (sont complètement arriérées). Pour l'étude stochastique de ce système, Karthick et al. ont dérivé les probabilités stationnaires ainsi que les mesures de performances du système. Dans [79], Periyasamy a analysé via l'outil des chaînes de Markov un système de gestion de stocks de type  $(s, S)$  avec une source finie, des arrivées suivant une loi de Bernoulli et un délai de livraison suivant une loi géométrique. Pour le calcul des mesures de performances ainsi que la fonction "coût total", l'auteur a proposé une approche numérique.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit le lecteur à quelques généralités sur les stocks, à savoir : les éléments essentiels constituant un système de stockage, les raisons de constitution des stocks, etc. Ensuite, nous avons défini la discipline de la gestion de stocks et son rôle dans le milieu de l'entreprise et donner une classification des modèles de base de la gestion de stocks qui sont : les modèles avec demande déterministe et les modèles avec demande stochastique. Enfin, nous avons fait un état de l'art sur les modèles de gestion de stocks sur le quel on porte attention dans notre étude qui sont : les modèles de gestion de stocks avec rupture permises et les modèles de gestion de stocks avec rappels.

Dans le chapitre suivant, nous allons introduire l'outil de modélisation mathématique appelé "Réseaux de Petri", spécialement le formalisme des Réseaux de Petri Stochastiques généralisés auquel nous avons fait appel pour la modélisation et l'analyse des systèmes de gestion de stocks considérés dans le cadre de cette thèse de doctorat.

# Chapitre 2

## Les Réseaux de Petri

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Généralités sur les réseaux de Petri</b>	<b>31</b>
2.1.1	Réseau de Petri (RdP)	31
2.1.2	Dynamique des RdP (Evolution d'un RdP)	32
2.1.3	Pouvoir de modélisation des RdP	35
2.1.4	Propriétés dynamiques d'un RdP	35
2.1.5	Extensions des RdP	38
<b>2.2</b>	<b>Les RdP stochastiques (RdPS)</b>	<b>39</b>
2.2.1	Les réseaux de Petri stochastiques généralisés (RdPSG)	39
2.2.2	Analyse des réseaux de Petri stochastiques généralisés	43
<b>2.3</b>	<b>Bref état de l'art sur les modèles de gestion de stocks en utilisant les RdP</b>	<b>46</b>

---

---

## Introduction

Les réseaux de Petri (RdP) est l'un des outils de modélisation mathématique dédié pour la classe des systèmes dynamiques à événements discrets. Le premier modèle de RdP a été créé par le mathématicien Carl Adam Petri en 1962 [80]. Depuis lors, ce modèle est devenu célèbre et a été largement utilisé par plusieurs chercheurs pour la modélisation des systèmes dont les actions peuvent avoir le concept de synchronisation, de parallélisme, de partage de ressource où encore de concurrence. Un réseau de Petri est une représentation graphique ayant deux ensembles distinct, à savoir : les places et les transitions. Les places du réseau représentent les ressources/conditions du système tandis que les transitions du réseau représentent les événements/actions qui se produisent dans le système. Grâce à leurs représentation graphique simple et aux nombreux résultats accumulés, les réseaux de Petri sont devenus un outil de modélisation très puissant notamment dans la modélisation des systèmes complexes, tels que les protocoles de télécommunications [24, 35]. Néanmoins, le modèle initial n'assure que l'analyse qualitative du système mais il ne permet pas la description et l'analyse du système modélisé dans le temps. Cependant, pour s'assurer du bon fonctionnement du système on doit aussi évaluer les paramètres quantitatifs du système, tels que le temps moyen de service, le temps moyen d'attente, etc. Ce besoin d'analyse quantitative a motivé les chercheurs à intégrer la notion du temps aux RdP ce qui a donné naissance aux réseaux de Petri Temporisés (RdPT) élaboré par Ramchandani [89]. Dans ce modèle de réseau de Petri Temporisé, une durée de temps de franchissement fixe est associée à chaque transition, mais en pratique le temps d'exécution d'une tâche n'est pas toujours fixe (deterministe) et peut être aléatoire. C'est pour cette raison que Florin, Molloy et Natkin ont proposé une nouvelle extension des RdP dénommée "les réseaux de Petri stochastiques" (RdPS) [76, 72, 73], où on associe à chaque transition un délai de franchissement suivant une distribution de probabilité de loi exponentielle. Toutefois, il existe d'autres systèmes ayant deux types d'événements : des événements à temps d'exécution aléatoire et des événements à temps d'exécution nul telle qu'une vérification d'une condition logique. Ainsi, pour modéliser ce type de systèmes, les RdPS ne sont plus adéquats, d'où vient la nécessité de créer une autre extension des RdPS dite "les réseaux de Petri stochastiques généralisés" (RdPSG)[67, 70, 68]. Ainsi, les RdPSG représente à la fois un formalisme simple et puissant dédié à la modélisation et à l'analyse qualitative et quantitative des systèmes complexes, grâce à sa représentation graphique simple qui permet de visualiser les ressources et les événements du système modélisé, et de combiner entre deux types d'événements aléatoires et instantanés et encore plus il permet d'analyser la performance du système étudié. Depuis leur création, les RdPSG ont connu beaucoup d'applications dans de nombreux domaines, à savoir : les réseaux informatiques [67], les réseaux téléphoniques mobiles [69], les systèmes de communications et plus récemment les systèmes de production et les chaînes logistiques [25, 48, 61, 87].

Dans ce chapitre, nous allons définir les notions de base des réseaux de Petri, puis nous allons entamer une section sur les réseaux de Petri stochastiques généralisés, et nous terminons par un

---

état de l'art de l'application de cet outil dans la modélisation des systèmes de gestion des stocks ou des chaînes logistiques.

## 2.1 Généralités sur les réseaux de Petri

### 2.1.1 Réseau de Petri (RdP)

#### 2.1.1.1 Notion de graphe d'un RdP

Un modèle RdP est un graphe orienté et biparti, il comporte :

- Un ensemble fini de places symbolisées par des cercles. Chaque place représente l'état d'une ressource du système.
- Un ensemble fini de transitions symbolisées par des bars ou rectangles et représentent l'ensemble des **événements** qui se produisent dans le système.
- Un ensemble fini d'arcs orientés qui assurent la liaison entre les places et les transitions du réseau. Les arcs sont partitionnés en deux classes :
  - Les arcs d'entrées : ce sont des arcs orientés des places vers les transitions.
  - Les arcs de sortis : ce sont des arcs orientés des transitions vers les places.

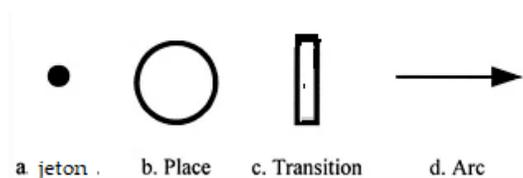


FIGURE 2.1 – Les éléments graphiques d'un RdP.

#### 2.1.1.2 Définitions formelles

Dans ce qui suit, nous allons définir formellement un RdP non marqué et un RdP marqué [24, 35] :

##### Définition 2.1.1. Définition d'un RdP non marqué

Un réseau de Petri non marqué noté  $R$  est défini par le quadruplet  $R = (P, T, Pré, Post)$ , où :

- $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_m\}$  est un ensemble fini de places ;
- $T = \{t_1, t_2, t_3, \dots, t_n\}$  est un ensemble fini de transitions ;
- $Pré : P \times T \mapsto \mathbb{N}$  est l'application d'incidence avant, où  $Pré(p, t)$  contient une valeur entière (poids) associé à l'arc allant de la place  $p$  à la transition  $t$  ;
- $Post : P \times T \mapsto \mathbb{N}$  est l'application d'incidence arrière, où  $Post(p, t)$  contient une valeur entière (poids) associé à l'arc allant de la transition  $t$  vers la place  $p$ .

**Définition 2.1.2. Définition d'un RdP marqué**

Un réseau de Petri marqué est défini par le couple  $(R, M)$ , dont  $R$  est le réseau de Petri et  $M : P \mapsto \mathbb{N}$  est une application appelée **marquage**.

On note  $M$  pour le marquage du réseau et  $M(p)$  pour le marquage de chaque place du réseau et il désigne le nombre de marques (jetons) présentes dans la place  $p$ . Graphiquement, une marque est symbolisée par un point noir ou un nombre à l'intérieur de la place.

Le marquage initial, noté  $M_0$  donne le nombre de marques initiales dans chaque place du RdP, et il désigne l'état initial du système modélisé.

On note  $M_0(p)$  le marquage initial de la place  $p$ .

Dans la FIGURE 2.2, nous allons donner un exemple d'un RdP marqué.

Le réseau de Petri marqué, comporte :

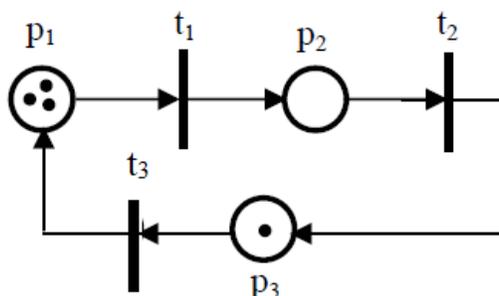


FIGURE 2.2 – Exemple d'un réseau de Petri marqué.

- Un ensemble fini de places  $P = \{p_1, p_2, p_3\}$  ;
- Un ensemble fini de transitions  $T = \{t_1, t_2, t_3\}$  ;
- Les places sont reliées aux transitions par des arcs de multiplicité 1 ;
- Le marquage initial du réseau noté  $M_0 = (M_0(p_1), M_0(p_2), M_0(p_3)) = (3, 0, 1)$ .

**Remarque 2.1.1.** 1. Dans un RdP, le poids de l'arc doit être indiqué par un nombre entier naturel sur cet arc. Dans le cas où ce poids n'est pas désigné par un nombre, donc il est de poids 1.

2. Les places qui sont reliées par des arcs à une transition  $t$ , sont dites "places d'entrée de  $t$ ", et elles sont notées  $\bullet t$ . Les places, reliées à une transition par un arc qui joint  $t$  à ces places, sont dites "places de sortie de la transition  $t$ ", et sont notées  $t \bullet$ .

**2.1.2 Dynamique des RdP (Evolution d'un RdP)**

L'évolution d'un réseau de Petri correspond à l'évolution de son marquage par la franchissement d'une transition, une fois validée [35, 46].

**Définition 2.1.3. Validation d'une transition**

Une transition  $t$  est **validée** (sensibilisée, franchissable, tirable) pour un marquage  $M$ , si et seulement si :

$$\forall p \in P, M(p) \geq \text{Pré}(p, t); \quad (2.1)$$

**Définition 2.1.4. Franchissement d'une transition**

Le franchissement de la transition  $t$  conduit au nouveau marquage  $M'$ , obtenu selon la relation suivante :

$$\forall p \in P, M'(p) = M(p) - \text{Pré}(p, t) + \text{Post}(p, t); \quad (2.2)$$

et on note  $M[t > M'$  i.e. le marquage  $M'$  est le marquage résultant du franchissement de la transition  $t$  à partir de  $M$ .

En appliquant la règle de franchissement pour toutes les transitions validées, par succession on peut obtenir une évolution dans les marquages à partir du marquage initial. Ces marquages forme un ensemble de marquages accessibles à partir du marquage initial formant un graphe appelé **"graphe de marquages accessibles"**

**Définition 2.1.5. Séquence de franchissements**

Une séquence de transitions franchises dans un ordre donné forme une séquence de franchissement. Soit  $(R, M_0)$  un RdP marqué,  $\sigma = t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$  est **une séquence de franchissements** depuis le marquage initial  $M_0$ , si et seulement si :

$$\exists M_1, M_2, M_3, \dots, M_n : \forall i \in \{1, \dots, n\}, M_{i-1}[t_i > M_i). \quad (2.3)$$

**Définition 2.1.6. Matrice d'incidence**

La matrice d'incidence  $C$  d'un réseau de Petri marqué  $(R, M_0)$  ayant  $n$  places et  $m$  transitions, est une matrice de dimension  $n \times m$ , et elle est donnée par :

$$C(i, j) = C^+(p_i, t_j) - C^-(p_i, t_j); \quad (2.4)$$

tel que :  $C^+$  (resp.  $C^-$ ) sont les matrices d'incidences arrière (resp. avant) qui sont les deux matrices  $\text{Post}$  (resp.  $\text{Pré}$ ).

**Définition 2.1.7. L'équation fondamentale**

Le nouveau marquage  $M_j$  allant de  $M_i$  en suivant la séquence de franchissements  $\sigma$  est obtenu en utilisant l'équation suivante dite **"equation fondamentale"**

$$M_j^t = M_i^t + C\bar{\sigma}; \quad (2.5)$$

où :  $\bar{\sigma}$  est un vecteur dont chaque composante correspond au nombre de fois que chaque transition du réseau est franchie, il est appelé **"vecteur caractéristique"**.

**Définition 2.1.8. Marquage accessible**

Soit  $(R, M_0)$  un RdP marqué, le marquage  $M$  est **un marquage accessible**, si et seulement si :  
 $\exists \sigma$  une séquence de franchissements à partir de  $M_0 : M_0[\sigma > M)$ .

**Définition 2.1.9. Ensemble d'accessibilité**

Soit  $(R, M_0)$  un RdP marqué, l'**ensemble d'accessibilité** du réseau de Petri, noté  $A(R, M_0)$  est l'ensemble des marquages atteignables à partir du marquage initial  $M_0$ , tels que :  
 $A(R, M_0) = \{M \in \mathbb{N}^P / \exists \sigma \text{ séquence de franchissement à partir de } M_0; M_0[\sigma > M)\}$ .

**Définition 2.1.10. Graphe d'accessibilité**

Soit  $(R, M_0)$  un RdP marqué, le **graphe d'accessibilité** du RdP, noté  $G(R, M_0)$  est un graphe dont les sommets sont représentés par les marquages accessibles à partir de  $M_0$  (l'ensemble d'accessibilité  $A(R, M_0)$ ), et les arcs reliant ces sommets sont étiquetés par le nom des transitions permettant le passage d'un marquage (sommets) à un autre.

Dans l'exemple montré dans la FIGURE 2.2, le graphe d'accessibilité est donné dans la FIGURE 2.3 suivante :

A partir du graphe d'accessibilité représenté dans la FIGURE 2.3, on peut voir tout les mar-

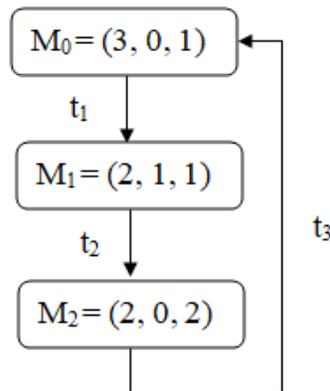


FIGURE 2.3 – Graphe d'accessibilité du réseau de Petri de la Figure 2.2.

quages accessibles à partir de  $M_0$ , qui sont donnés par l'ensemble d'accessibilité  $A(R, M_0) = \{M_1, M_2, M_0\}$ . De plus, on a les séquences de franchissements permettant d'aller du marquage initial à d'autres marquages. Par exemple, la séquence  $\sigma = t_1, t_2$  nous permet d'atteindre le marquage  $M_2$  à partir de  $M_0$ , et on écrit  $M_0[\sigma > M_2)$ . Les nouveaux marquages  $M_1$  et  $M_2$  sont obtenus en appliquant la règle de franchissement d'une transition donnée dans la définition 2.1.4.

**Remarque 2.1.2.** Il existe des cas de RdP dont le graphe d'accessibilité ne peut pas être obtenu en sa globalité à cause du nombre de marquages qui est infini. Dans ce cas, on ne parle plus d'un graphe d'accessibilité mais d'un arbre dit "**arbre de couverture**". Cet arbre est fini mais il fournit moins d'informations que le graphe de marquages accessibles. Il existe plusieurs algorithmes efficaces pour

générer l'arbre de couverture, voir (Karp et Miller 1969 [57], Finkel 1993 [42] et Geeraerts et al. 2006 [45]).

### 2.1.3 Pouvoir de modélisation des RdP

Les réseaux de Petri sont conçus pour la modélisation des systèmes dynamiques à événements discrets. Leur avantage réside dans le pouvoir de modélisation de certains comportements importants, à savoir : La synchronisation, le parallélisme, le conflit et le partage de ressources :

► **Synchronisation** : Ce comportement permet de synchroniser entre les opérations de deux processus dans le même système. La synchronisation est souvent retrouvée dans les systèmes de fabrication, de production, etc. Un exemple de cette structure est montré dans la FIGURE 2.4.

► **Parallélisme** : Ce mécanisme représente la possibilité que deux processus ou plus évoluent instantanément dans le même système. Les systèmes de stockage et de production ont souvent ce mode de fonctionnement. Voir un exemple de ce mécanisme modélisant deux processus en parallèle donné dans la FIGURE 2.5.

► **Partage de ressources** : Cette structure modélise le fait que plusieurs processus dans un même système partagent la même ressource. C'est le cas par exemple d'un système de stockage à deux niveaux, qui partagent la même ressource qui est le stock. Un exemple de cette structure est représenté dans la FIGURE 2.6.

► **Conflit** : Un conflit correspond à la situation où deux événements ou plus peuvent s'exécuter au même temps, graphiquement cela correspond au cas où deux transitions ou plus sont validées en même temps. Un exemple qui montre ce mécanisme est donné dans la (voir FIGURE 2.7). Il existe deux types de conflits : le **conflit structurel** et le **conflit effectif**.

**Définition 2.1.11. Conflit structurel** deux transitions  $t_1$  et  $t_2$  sont en **conflit structurel**, si et seulement si :

$$\exists p \in P : \text{Pré}(p, t_1) \times \text{Pré}(p, t_2) \neq 0; \quad (2.6)$$

Autrement dit la place  $p$  est une place d'entrée de  $t_1$  et de  $t_2$ .

**Définition 2.1.12. Conflit effectif** deux transitions  $t_1$  et  $t_2$  sont en **conflit effectif** pour un marquage  $M$ , si en plus du conflit structurel :

$$M[t_1 >, M[t_2 > \text{ et } \exists p \in P : M(p) < \text{Pré}(p, t_1) + \text{Pré}(p, t_2); \quad (2.7)$$

### 2.1.4 Propriétés dynamiques d'un RdP

En plus du pouvoir de modélisation des réseaux de Petri, ils permettent aussi une analyse qualitative des systèmes considérés. En effet, l'analyse qualitative permet de s'assurer du bon fonctionnement du système modélisé (en état actif, absence de blocage, le nombre d'états fini).

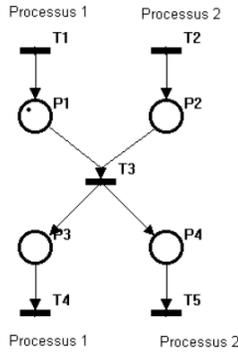


FIGURE 2.4 – Exemple de RdP avec synchronisation.

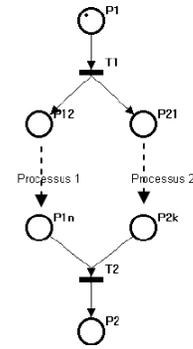


FIGURE 2.5 – Exemple de RdP avec parallélisme.

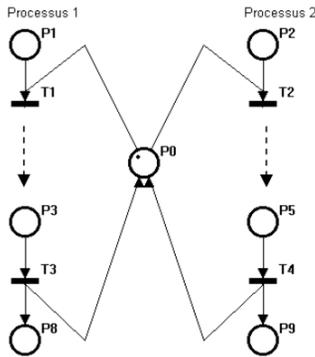


FIGURE 2.6 – Exemple de RdP avec partage de ressources.

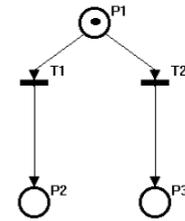


FIGURE 2.7 – Exemple de RdP avec Conflit.

Dans ce qui suit, nous allons définir les propriétés usuelles dans l’analyse comportementale d’un RdP. Les définitions des propriétés qualitatives d’un RdP vont essentiellement se baser sur l’analyse du graphe de marquages accessibles (graphe d’accessibilité) [24, 35] :

► **Bornitude** : Cette propriété permet de conclure si le nombre d’états du système étudié est fini ou infini. Dans le graphe d’accessibilité, on doit vérifier si le nombre de marquages est fini ou infini, et ceci revient à vérifier si chaque place du RdP reçoit une quantité finie de marques (jetons) au cours de l’évolution du graphe de marquages.

**Définition 2.1.13. RdP  $k$ -borné**

Un réseau de Petri  $(R, M_0)$  est  **$k$ -borné**, si et seulement si :

$$\exists k \in \mathbb{N}, \forall M \in A(R, M_0), \forall p \in P : M(p) \leq k; \tag{2.8}$$

- Si  $k = 1$ , le réseau de Petri est dit un RdP **sauf**.

Le réseau de Petri montré dans la FIGURE 2.2 est borné car toutes ses places  $p_1, p_2$  et  $p_3$  reçoivent un nombre fini de marques (voir le graphe d’accessibilité dans la FIGURE 2.3).

**Proposition 2.1.1.** *Un réseau de Petri  $(R, M_0)$  est **borné**, si et seulement si le nombre de marquages dans le graphe d’accessibilité est fini [35].*

► **Absence de blocage** :

**Définition 2.1.14. Marquage puits**

Un marquage  $M$  est un marquage puits si aucune transition n'est franchissable à partir de  $M$ , i.e. aucun marquage n'est atteignable depuis  $M$ .

**Définition 2.1.15. RdP sans blocage**

Un réseau de Petri  $(R, M_0)$  est dit réseau **sans blocage**, si tout marquage accessible depuis  $M_0$  n'est pas un marquage puits.

► **Vivacité** : Cette propriété est importante pour valider le bon fonctionnement du système, elle permet de vérifier si le système ou une partie du système évolue ou non dans le temps. Autrement dit, la vivacité vérifie que toutes les actions du système sont exécutables à n'importe quel état du système, i.e. absence de blocage. Ce blocage peut être global, dans le cas où tout le système ne fonctionne plus, ou partiel dans le cas où seulement une partie du système ne fonctionne pas.

**Définition 2.1.16. RdP vivant**

Un réseau de Petri  $(R, M_0)$  est **vivant (sans blocage)**, si :

$$\forall M \in A(R, M_0), \forall t \in T, \exists \sigma \text{ une séquence de franchissements : } M[\sigma.t >]; \quad (2.9)$$

**Remarque 2.1.3.** Un réseau de Petri vivant est sans blocage, mais l'inverse n'est pas vrai.

Le réseau de Petri donné dans la FIGURE 2.2, est vivant et sans blocage.

► **Réinitialisabilité** : Un système est **réinitialisable** si à partir d'un état donné on peut revenir à l'état initial. Dans un RdP, cela revient à vérifier que le marquage initial est un **état d'accueil**.

**Définition 2.1.17. Existence d'un état d'accueil**

Un réseau de Petri  $(R, M_0)$  admet un état d'accueil  $M_a$  si :

$$\forall M \in A(R, M_0), \exists \sigma \text{ une séquence de franchissements : } M[\sigma > M_a]; \quad (2.10)$$

• Si  $M_a = M_0$ , on dit que le réseau de Petri est **réinitialisable (ou réversible)**.

**Remarque 2.1.4.** Pour vérifier si le système est réinitialisable, on vérifie si le graphe d'accessibilité est fortement connexe.

Pour le réseau de Petri montré dans la FIGURE 2.2, le réseau de Petri est réinitialisable car son graphe d'accessibilité donné dans la FIGURE 2.3 est fortement connexe.

### Remarque 2.1.5. Propriétés structurelles d'un RdP

Dans le cas où le RdP admet un nombre de marquages important ou une infinité d'états, la vérification des propriétés comportementales du réseau par la méthode d'énumération des marquages accessibles devient coûteuse et peu praticable. Pour résoudre ce problème, on peut faire appel à d'autres méthodes d'analyse, à savoir : la méthode d'analyse par calcul algébrique. Cette méthode dite "structurelle" se base sur la théorie de l'algèbre linéaire, en calculant les invariants ( $P$ -invariants et  $T$ -invariants), voir la référence [35] pour plus de détail sur cette méthode.

## 2.1.5 Extensions des RdP

Après leurs apparition dans les années 60, les réseaux de Petri sont devenus applicables à plusieurs systèmes où chacun à ses propres caractéristiques, ce qui a créé un besoin d'extension du modèle initial [80]. Ces extensions ont donné naissance à une diversité de formalismes de RdP, où chaque nouveau modèle répond à un besoin bien précis. Parmi ces formalismes, nous allons présenter ceux qui seront utilisés au cours de cette thèse, et qui sont : Les RdP à arcs inhibiteurs, les RdP stochastiques (RdPS) dont le formalisme des RdPS généralisés (RdPSG).

### 2.1.5.1 Les réseaux de Petri à arcs inhibiteurs

Dans les réseaux de Petri à arcs inhibiteurs, on peut modéliser une situation où on doit vérifier l'absence d'un jeton dans une place pour déclencher un événement. Par exemple, lorsqu'un client est en attente de service, il doit vérifier si aucun autre client n'est au cours de service. La vérification de cette condition est représentée par un "arc inhibiteur" reliant une place à une transition et qui se termine par un cercle. Dans un RdP à arc inhibiteurs, la transition n'est validée que si la place ne contient aucun jeton. D'une façon plus générale, l'arc inhibiteur peut avoir une multiplicité supérieur à 1, dans ce cas pour la validation de la transition on doit vérifier si le nombre de jetons présents dans la place est inférieur au poids de l'arc inhibiteur [35, 46]. Formellement :

#### Définition 2.1.18. RdP à arcs inhibiteurs

Un réseau de Petri à arcs inhibiteurs est défini par le tuple  $R = (P, T, Pré, Post, Inh)$ , où :

- $P$  est un ensemble fini de places et  $T$  un ensemble fini de transitions.
- $Pré, Post : P \times T \mapsto \mathbb{N}$  est la matrice incidence avant (resp. incidence arrière).
- $Inh : P \times T \mapsto \mathbb{N} \setminus \{0\}$  est la fonction d'inhibition.



FIGURE 2.8 – RdP à arc inhibiteur.

**Remarque 2.1.6.** Notons que la seule différence entre les RdP standards et ceux à arcs inhibiteurs est la règle de franchissement d'une transition, qui est défini comme suit :

Soit  $M$  un marquage d'un RdP à arcs inhibiteurs et  $t$  une transition. La transition  $t$  est franchissable à partir du marquage  $M$ , si et seulement si :

$$\forall p \in P, M(p) \geq \text{Pré}(p, t) \text{ et } M(p) < \text{Inh}(p, t); \quad (2.11)$$

Le nouveau marquage  $M'$  obtenu par le franchissement de la transition  $t$  à partir du marquage  $M$  est défini comme suit :

$$M'(p) = M(p) - \text{Pré}(p, t) + \text{Post}(p, t); \quad (2.12)$$

## 2.2 Les RdP stochastiques (RdPS)

Les RdPS sont des RdP ayant des transitions à temporisation stochastique. Cette temporisation est une variable aléatoire qui représente le temps écoulé entre la validation d'une transition et son franchissement. Les RdPS ont été introduits par Florin et Natkin [43] et Molloy [72], dans le but de répondre à certains problèmes d'évaluation liés à la sûreté de fonctionnement des systèmes informatiques. Cette nouvelle classe de RdP offre la possibilité de profiter des méthodes d'évaluation des processus stochastiques, tel que les chaîne de Markov. Un autre intérêt des réseaux de Petri stochastiques est d'associer l'analyse quantitative à l'analyse qualitative qui est d'une importance primordiale dans l'étude des systèmes. Il existe plusieurs formalismes appartenant à la classe des RdP stochastiques, où chaque extension à une distribution de probabilité bien particulière associée à la durée de temps de franchissement d'une transition, entre autre on distingue : les RPDS à distribution exponentielles, les RdPS à distributions discrètes, les RdPS à distributions de type phase, etc. Dans cette thèse, nous n'allons nous intéresser que pour les RdPS à distributions exponentielles, particulièrement "les RdPS généralisés (RdPSG) markoviens" pour la modélisation et l'analyse des systèmes de gestion de stocks considérés.

### 2.2.1 Les réseaux de Petri stochastiques généralisés (RdPSG)

Les RdPS généralisés sont une classe importante des RdPS, qui ont été introduit par Marsan et al. Les RdPSG ont le pouvoir de combiner entre les deux types d'événements, à savoir :

- Les événements non-temporisés (instantanés).
- Les événements temporisés stochastiques à distributions exponentielles.

Graphiquement, les événements immédiats et les événements stochastiques exponentiellement distribués sont symbolisés par des traits et des rectangles respectivement (Voir FIGURE 2.9).

Dans ce qui suit, nous allons définir les notions fondamentales des *réseaux de Petri stochastiques généralisés markoviens*, qui est une classe des RdPSG dont la particularité est d'associer au temps de franchissement des transitions temporisées une distribution ayant la propriété d'absence de mémoire, et dans notre cas on a choisi la loi exponentielle [72, 43].

### 2.2.1.1 Modèle RdPSG

Un RdPSG markovien est défini comme suit :

**Définition 2.2.1.** Un réseau de Petri stochastique généralisé est un huit-uplet  $(P, T, Pré, Post, Inh, pri, \omega, M_0)$ , où :

- $P$  est un ensemble fini de places ;
- $T$  est un ensemble fini de transitions ;
- $Pré, Post, Inh : P \times T \mapsto \mathbb{N}$  sont respectivement les applications d'incidence avant, d'incidence arrière et d'inhibition ;
- $pri : T \mapsto \{0, 1\}$  est une application qui associe la valeur 0 à chaque transition temporisée et la valeur 1 à chaque transition immédiate ;
- $\omega : T \mapsto R^+$  est une application qui associe à chaque transition temporisée un taux de franchissement (i.e. taux de la loi exponentielle) et à chaque transition immédiate un poids ;
- $M_0$  est le marquage initial du réseau.

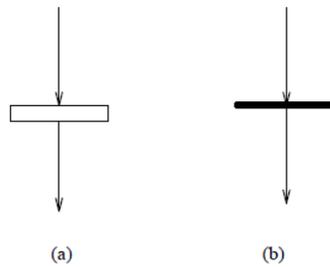


FIGURE 2.9 – (a) Transition stochastique. (b) Transition immédiate.

### 2.2.1.2 Sémantique stochastique des RdPSG

La sémantique stochastique des RdPSG dite aussi **politique d'exécution** comprend trois sémantiques : sémantique de choix (selection), sémantique de service et sémantique de mémoire :

★ **Sémantique de choix** : cette sémantique spécifie la règle de choix de la transition à franchir entre toutes les transitions tirables (franchissables) à partir d'un marquage donné. Il existe deux types de politiques, à savoir "la politique de préselection" et "la politique de compétition" :

- **Politique de préselection (preselection policy)** : cette politique permet de choisir d'une manière statique des priorités entre les transitions tirables. Ces priorités sont définies sur le RdP en associant aux transitions des fonctions de probabilités indépendantes de leurs délais de franchissement.
- **Politique de compétition (race policy)** : comme son nom l'indique, cette politique autorise la concurrence entre les transitions, et la transition qui sera sélectionnée est celle dont le délai de franchissement est le plus petit. L'inconvénient de cette politique est qu'elle

n'est plus adaptée, lorsque deux transitions sensibilisées à partir d'un même marquage ont la même délai de franchissement.

★ **Sémantique de service** : Cette sémantique appelée aussi "dépendance du marquage", spécifie le comportement de la transition lorsqu'elle peut être franchissable plusieurs fois consécutivement, ce qui est défini par le degré de son franchissement (enabling degree).

### Définition 2.2.2. Degré de franchissement d'une transition

Soit  $t$  une transition et  $M$  un marquage, le degré de franchissement d'une transition  $t$ , noté  $ED(t, M)$ , est défini comme suit :

$$ED(t, M) = k \text{ ssi } \begin{cases} \forall p \in \bullet t, M(p) \geq kPré(p, t); \\ \forall p \in \circ t, M(p) < H(p, t); \\ \exists p \in \bullet t, M(p) < k + 1. \end{cases}$$

Il y a trois politiques de service appliquées dans la littérature, à savoir : la politique serveur unique, la politique serveurs multiples et la politique serveurs infini :

► **serveur unique (single server)** : pour un marquage  $M$ , la transition  $t$  peut être validé une seule fois, et elle ne peut être activée une autre fois que dans de nouveaux marquages, cela signifie que le taux de franchissement de la transition  $t$  est indépendant du degré de franchissement de  $t$  (i.e.  $\omega(t, M) = \omega(t)$ ).

► **serveurs multiples (multiple-servers)** : pour un marquage  $M$ , la transition  $t$  est activée au plus  $K$  fois en parallèle. Dans ce cas, le taux de franchissement de  $t$  est donné par :  $\omega(t, M) = \text{Min}(K, ED(t, M)).\omega(t)$ .

► **serveurs infini (infinite-servers)** : Pour un marquage  $M$ , la transition  $t$  est activée autant de fois que possible en parallèle (un nombre illimité d'activation de  $t$ ). Dans ce cas, le taux de franchissement de  $t$  est donné par :  $\omega(t, M) = ED(t, M).\omega(t)$ .

★ **Sémantique de mémoire** : cette sémantique spécifie comment le processus de marquage associé au RdP est conditionné par rapport à son passé, elle indique ce que devient le travail déjà réalisé à chaque changement d'état (marquage). Dans la littérature, trois politiques de mémoire ont été introduites : la politique de réinitialisation (resampling policy), la politique de mémoire de la dernière sensibilisation (enabling memory policy) et la politique de mémoire de toutes les sensibilisations (age memory policy).

► **La politique de réinitialisation (resampling policy)** : cette politique ne prend pas en compte le passé du système ; chaque variable aléatoire associée à la durée de sensibilisation d'une transition est réinitialisée après chaque sensibilisation, i.e. aucune mémorisation de la durée de sensibilisation.

► **La politique de mémoire de la dernière sensibilisation (enabling memory policy)** : Dans cette politique la seule sensibilisation qui est prise en compte est la dernière sensibilisation

qui débute juste après le tir de la transition sensibilisée, i.e. la durée totale mémorisée est remise à zéro à chaque désensibilisation d'une transition.

► **La politique de mémoire de toutes les sensibilisations (age memory policy)** : dans cette politique toutes les sensibilisations de la transition sont prises en compte i.e. la durée totale mémorisée est égale à la somme de toutes les durées dans lesquelles chaque transition est sensibilisée.

Dans le cas des RdPSG markoviens, les trois politiques de mémoire sont équivalentes à cause de la propriété de perte de mémoire de la distribution de probabilité de la durée de sensibilisation de chaque transition (loi exponentielle). Ainsi, dans les RdPSG markoviens à chaque changement de marquage la durée totale de sensibilisation mémorisée est perdue. La seule durée de sensibilisation qui est prise en compte est celle issue de la transition tirée et qui est responsable du changement de l'état du système.

### 2.2.1.3 Processus stochastique associé aux RdPS et aux RdPSG

Les RdPSG étant une extension des RdPS sont exploités pour l'analyse de performance des systèmes à événements stochastiques markoviens (i.e. des événements ayant des distributions de probabilité qui vérifient la propriété d'absence de mémoire). Cette propriété a été exploitée par Molloy [73] et Florin et Natkin[43] pour prouver que le processus sous-jacent au graphe d'accessibilité d'un RdP stochastique est isomorphe à une chaîne de Markov à temps continu (CMTC). En particulier, le processus sous-jacent au graphe d'accessibilité d'un RdPS  $k$ -borné est isomorphe à une CMTC finie.

La CMTC associée peut être obtenue en appliquant simplement les deux étapes suivantes :

1. **Étape 1** : l'espace d'états de la CMTC associée correspond aux états du graphe d'accessibilité du RdPS.
2. **Étape 2** : le taux de passage (transition) d'un état (marquage) à un autre correspond à la somme des taux de franchissements des transitions tirables à partir de ce marquage.

Cependant, l'ajout des transitions immédiates aux RdPS qui a donné naissance au RdPS généralisés ne complique pas l'analyse du modèle. Autrement dit, les états (marquages) dont seulement les transitions immédiates sont sensibilisées appelées "marquages évanescents" ne sont pas pris en compte dans l'analyse car le temps moyen de séjour écoulé dans ces marquages est négligeable. Par contre, les états (marquages) dont seulement les transitions stochastiques sont sensibilisées appelés "marquages tangibles" ont un temps moyen de séjour positif qui correspond à la somme des taux de franchissements des transitions sensibilisées à partir de ce marquage. En effet, le processus stochastique associé à un RdPSG peut être décrit par un processus markovien dont l'évolution est définie par le graphe de marquages réduit qui est formé seulement des **marquages tangibles**, obtenu après suppression des **marquages évanescents**, qui sont définis ci-après :

**Définition 2.2.3. Marquage évanescent**

Un marquage  $M_i$  est un marquage évanescent (instable, fugitif, virtuel) si et seulement si il existe au moins une transition immédiate franchissable à partir de ce marquage.

**Définition 2.2.4. Marquage tangible**

Un marquage  $M_i$  est un marquage tangible s'il n'est pas un marquage évanescent (i.e. seulement les transitions temporisées sont franchissables à partir de ce marquage).

**2.2.1.4 Evolution des RdPSG**

L'évolution d'un RdPSG est caractérisée par l'évolution de son graphe d'accessibilité qui n'est qu'une conséquence du franchissement des transitions immédiates et des transitions stochastiques. Le franchissement d'une transition du RdPSG dépend du type du marquage (marquage évanescent et marquage tangible). Dans le cas où plusieurs transitions sont sensibilisées à partir d'un même marquage, il faut déterminer la transition à tirer.

- Dans le cas d'un marquage tangible, les transitions sensibilisées peuvent être tirées simultanément. Le changement d'état va être effectué par le franchissement de la transition ayant le plus petit délai.
- Dans le cas d'un marquage évanescent, seulement les transitions immédiates sensibilisées peuvent être tirées. Si de plus, plusieurs transitions immédiates sont en conflit à partir d'un même marquage. Dans ce cas, une seule transition est tirée selon une probabilité qui est déterminée en fonction des poids associées à toutes les transitions immédiates sensibilisées. Si par contre, ces transitions sont concurrentes, elles sont tirées simultanément, la sélection n'est pas nécessaire.

Soit  $E(M_i)$  l'ensemble des transitions sensibilisées à partir du marquage  $M_i$  (tangible ou évanescent), la probabilité de sélection d'une transition (temporisée ou immédiate)  $t_j \in E(M_i)$  pour être franchie à partir de  $M_i$  est donnée par la formule suivante :

$$P\{t_j/M_i\} = \frac{\omega(t_j)}{\sum_{t_k \in E(M_i)} \omega(t_k)}, \quad (2.13)$$

Où :  $\omega(t_j)$  et  $\omega(t_k)$  correspondent soit aux poids des transitions immédiates sensibilisées à partir d'un marquage évanescent  $M_i$ , soit aux taux de franchissement des transitions stochastiques sensibilisées à partir d'un marquage tangible. Une fois la transition immédiate ou stochastique est franchie, un nouveau marquage est obtenu selon la règle de franchissement des RdP standards (voir la formule (2.2)).

**2.2.2 Analyse des réseaux de Petri stochastiques généralisés**

Lors de l'analyse des RdPSG, on assure deux sortes d'analyses qui sont l'analyse qualitative (bornitude, vivacité, états d'accueil, etc) et l'analyse quantitative ou indices de performance du

modèle.

### 2.2.2.1 Analyse qualitative

L'analyse qualitative consiste à étudier les qualités du système ou encore ses propriétés dynamique, par exemple l'absence de blocage, voir si l'évolution du système modélisé est limité à un certain nombre d'états et s'assurer de la réinitialisabilité du système, etc. Toutes ces propriétés sont précédemment définies dans le cas d'un RdP standard dans la section 2.1.4, et elles restent valables pour les RdPSG.

### 2.2.2.2 Analyse quantitative

Pour l'analyse quantitative des RdPSG, on doit calculer les probabilités d'états en régime stationnaire et ensuite calculer les mesures de performance du système étudié via les RdPSG. Par exemple, le temps moyen d'activité du serveur, le nombre moyen de clients dans le système, l'évolution du niveau du stock, etc. L'isomorphisme entre le processus sous-jacent au graphe réduit du RdPSG et les chaînes de Markov à temps continue rend l'analyse des RdPSG exploitable. En fait, l'analyse des RdPSG se base essentiellement sur les résultats des chaînes de Markov après vérification de la condition d'ergodicité assurant l'existence de la distribution stationnaire d'après les théorèmes suivants [107, 37] :

**Théorème 2.2.1.** *Un RdPSG borné est tel que son graphe d'accessibilité est fortement connexe est ergodique.*

**Théorème 2.2.2.** *Un RdPSG borné est ergodique s'il admet l'état initial comme état d'accueil.*

Une fois qu'on a prouvé que le RdPSG est ergodique, nous allons passer à calculer la distribution de probabilités stationnaires  $\pi$ , qui est obtenue en résolvant le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \pi Q = \mathbf{0}; \\ \pi \mathbf{1}^T = 1; \end{cases} \quad (2.14)$$

où :

- $\mathbf{0}$  est un vecteur ligne nul ayant la même dimension que celle du vecteur stationnaire  $\pi$  ;
- $\mathbf{1}^T$  est un vecteur colonne unitaire de même dimension que  $\pi$ .
- Le générateur infinitésimal associé à la CMTC noté par  $Q$  donne les taux de transitions d'un marquage  $M_i$  à un marquage  $M_j$ , et qui est exprimé comme suit :

$$q_{ij} = \begin{cases} \sum_{t_k \in E_j(M_i)} \omega(t_k), \text{ si } i \neq j; \\ -q_i, \text{ si } i = j; \end{cases} \quad (2.15)$$

telque :

$\omega(t_k)$  est le taux de franchissement de la transition  $t_k$  et  $E_j(M_i) = \{h : T_h \in E_{M_i} \wedge M_i[T_h > M_j]\}$  est l'ensemble des transitions qui mènent le RdP du marquage  $M_i$  au marquage  $M_j$ .

Dans ce qui suit, nous allons noter la probabilité d'état  $\pi(M_i)$  par  $\pi_i$ .

### 2.2.2.3 Evaluation des indices de performances d'un RdPS

L'obtention de la distribution stationnaire  $\pi$ , nous permet de calculer les différentes mesures de performance d'un RdPS y compris un RdPSG : Ces mesures données comme suit :

1. **Le nombre moyen de jetons dans une place  $p_j$  du RdP, notée  $\bar{M}(p_j)$  est exprimé** comme suit :

$$\bar{M}(p_j) = \sum_{M_i \in A(R, M_0)} M_i(p_j) \pi_i; \quad (2.16)$$

où :  $A(R, M_0)$  est l'ensemble de marquages tangibles accessibles depuis le marquage initial dans le RdPSG.

et  $\pi_i$  est la probabilité que le processus se trouve dans le marquage  $M_i$ .

2. **La probabilité qu'une condition  $\gamma$  soit réalisée, notée  $\mathbb{P}\{\gamma\}$  , qui est donnée par :**

$$\mathbb{P}\{\gamma\} = \sum_{M_i \in E_\gamma} \pi_i; \quad (2.17)$$

où :  $E_\gamma = \{M_i \in A(R, M_0) : \gamma(M_i) = \text{vraie}\}$  est l'ensemble de marquages où la condition  $\gamma(M)$  est **vraie**.

3. **La fréquence de franchissements d'une transition  $t_j$  du RdP, notée  $f_j$ .** Cette quantité mesure le nombre de fois que la transition  $t_j$  est validée à partir d'un marquage donné, et elle exprimée comme suit :

$$f_j = \sum_{M_i \in A_j} \omega(t_j) \pi_i; \quad (2.18)$$

où :  $A_j = \{M_i \in A(R, M_0) : t_j \in E(M_i)\}$  est l'ensemble de marquages où la transition  $t_j$  est franchissable (validée).

4. **Le temps moyen de séjour d'un jeton dans un sous-réseau.** Le temps moyen que passe un jeton dans un sous-réseau  $S$  du RdP à l'état stationnaire noté  $E(TS)$ , peut être calculé en utilisant la formule de Little [65] :

$$E(TS) = \frac{E(N)}{E(\psi)}; \quad (2.19)$$

où :  $E(TS)$ ,  $E(N)$  et  $E(\psi)$  désignent respectivement, le temps moyen de séjour dans  $S$ , le nombre moyen de jetons dans  $S$  et le taux effectif de jetons arrivant au sous réseau  $S$ .

## 2.3 Bref état de l'art sur les modèles de gestion de stocks en utilisant les RdP

Ces dernières années, les RdP ont montré leur efficacité dans la modélisation des systèmes dynamiques à événements discrets (SDED) [33], et plus particulièrement dans la modélisation et l'analyse des systèmes de gestion à un seul niveau ou bien sur plusieurs niveaux (chaînes logistiques) (CLs), voir les références [25, 26, 28, 31, 36, 52, 48, 61, 62, 68, 88, 87, 30].

Dans [25], Bounou et al. ont fait une étude d'évaluation de la performance d'approvisionnement basé sur les RdPS, tout en considérant le paramètre d'obsolescence (stock mort) dans la gestion de pièces de rechange. Ensuite, dans [26], les auteurs ont présenté un modèle des gestion de production de pièces de rechange via les RdPS et déterministes. Les mesures de performance de ce modèle ont été calculées par une approche de simulation.

Dans [30], l'auteur a fait une étude de sûreté de fonctionnement à l'aide du formalisme des RdPS à prédicats, tout en faisant appel au simulateur GRIF (Graphiques Interactifs pour la Fiabilité), pour prendre en compte la complexité croissante du contexte opératoire de ses équipements de sécurité. Les résultats ont été obtenus par la simulation de Monte Carlo qui est implémentée dans ce simulateur et qui reste adapté à tout modèle RdP. Encore, dans [28], les auteurs ont présenté différents modèles de RdPS à prédicats qui ont été implémentés dans le simulateur GRIF. De plus, dans [36], les auteurs ont réalisé une étude probabiliste de sûreté dynamique par la méthode des réseaux de Petri à l'aide de ce même simulateur (GRIF).

Dans [31], Chen et al. ont modélisé une CL à l'aide des RdP, ensuite ils ont proposé une optimisation numérique avec les algorithmes génétiques.

Dans [52], Ikhlef et al. ont analysé un système de gestion de stocks en file d'attente avec rappels et recherche orbitale via les RdPSG. Les auteurs ont supposé que le serveur recherche des clients à partir de l'orbite pendant sa période de vacance et ils ont également supposé une distribution généralisée pour le temps de service. Pour ce type de loi générale, les auteurs ont adapté le formalisme de RdPS markoviens régénératifs (MRSPN), et ils ont pu réaliser une analyse de performance du système considéré, ainsi que l'étude numérique de la fonction de coût total du système étudié.

Dans [48], Gomri et al. se sont intéressés à créer une liaison entre les réseaux de Petri continue et les automates hybrides via un algorithme de translation. Pour prouver la compatibilité entre ces deux formalises, ils ont fait une application sur un système de la logistique.

Dans [61], Labadi présente dans sa thèse de doctorat un nouveau formalisme dédié à une classe de systèmes avec comportements lots (arrivées par lots, réapprovisionnement par lots, etc.), dénommé "les réseaux de Petri stochastiques et déterministes avec lots". Ensuite, dans [62] Labadi et al. ont fait recours à ce nouveau formalisme dans le but de modéliser et d'analyser un système de gestion des stocks avec deux types de demandes, source infinie et demandes perdues.

Marsan et al. ont étudié dans [68], un système de gestion de stocks avec produits périssables dans une CL, les auteurs ont pu comparé le modèle de la chaîne logistique (CL) à un système réel simulé avec un outil dédié pour les RdPSG.

Dans [88] et [87], les auteurs ont proposés différents modèles de CLs en faisant recours aux RdPSG. Dans [88], les modèles proposés par les auteurs tiennent compte du processus d'approvisionnement et de la distribution qui existent entre deux membres de la CL. Dans ce travail, les auteurs ont pu résoudre numériquement deux problèmes de minimisation de la fonction "coût total" par un progiciel dédié pour le formalisme des RdSG dénommé SPNP (Stochastic Petri Nets Package). Aussi, dans [87], les modèles élaborés sous le formalisme des RdPSG d'une CL de distribution et de stockage prennent en compte la stratégie de rationalisation de stocks. Cette stratégie est utilisée pour résoudre le problème ayant comme objectifs : minimiser les coûts de gestion des stocks d'une part, et atteindre les niveaux de service souhaités d'autre part. Pour résoudre ce problème bi-objectifs, les auteurs ont fait recours à la simulation avec le progiciel SPNP.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les notions de base d'un RdP. Dans l'analyse des systèmes, les RdP standards assure une analyse qualitative qui est définie par les propriétés dynamiques du système étudié. De plus, nous avons donné plusieurs formalismes des RdP, entre autre une classe importante qui est la classe des RdPS, dont le formalisme des RdPSG. Cette classe permet l'analyse quantitative qui vient compléter l'analyse qualitative des RdP. Enfin, nous avons présenter une brève revue sur l'application des RdP dans l'étude des systèmes de gestion de stocks.

Dans les chapitres suivants, nous allons présenter quelques modèles de de gestion de stocks avec rappels via l'approche RdPSG. En premier lieu, nous allons nous intéresser aux systèmes de gestion de stocks avec demandes lots déterministes et rappels (rappels classiques et rappels constants). Pour chaque système, nous allons faire une étude analytique détaillée ainsi qu'une analyse de performance. Ensuite, nous allons proposer un problème d'optimisation d'une fonction récompense-coûts à maximiser et pour sa résolution, nous allons procéder par une approche numérique.

En deuxième lieu, nous allons considérer un système avec rappels et deux types de demandes. Pour ce système, nous allons présenter le modèle RdPSG ainsi que son analyse qualitative. Désormais, l'étude analytique de ce système n'est pas possible, donc nous allons faire appel à l'approche de simulation sous GRIF. Grâce à ce simulateur, nous allons pouvoir présenter quelques mesures de performance du système considéré.

## Partie II

**Modélisation et Analyse de quelques systèmes de gestion des stocks avec rappels : Approche par les RDPSG**

# Chapitre 3

## Modélisation et Analyse d'un système de gestion des stock de type $(s, Q)$ avec rappels classiques via les RdPSG

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Modélisation du système de gestion de stocks de type <math>(s, Q)</math> avec rappels classiques via les RdPSG . . . . .</b>	<b>51</b>
3.1.1	Modèle RdPSG établi pour le système étudié . . . . .	52
<b>3.2</b>	<b>Analyse stochastique du modèle RdPSG établi avec rappels classiques</b>	<b>55</b>
3.2.1	Processus stochastique associé au modèle établi . . . . .	55
3.2.2	Distribution stationnaire du modèle établi . . . . .	59
<b>3.3</b>	<b>Mesures de performances du système étudié . . . . .</b>	<b>62</b>
<b>3.4</b>	<b>Formulation et étude de la fonction récompense-coûts . . . . .</b>	<b>64</b>
3.4.1	Formulation mathématique du problème d'optimisation de la fonction récompense-coûts . . . . .	65
3.4.2	Approche de résolution du problème d'optimisation . . . . .	66
<b>3.5</b>	<b>Analyse de sensibilité de la politique optimale et du profit optimal .</b>	<b>67</b>
3.5.1	Analyse de sensibilité des valeurs optimales par rapport à la récompense	68
3.5.2	Analyse de sensibilité des valeurs optimales par rapport au taux de demande et au taux de réapprovisionnement . . . . .	69
3.5.3	Analyse de sensibilité des valeurs optimales par rapport au taux de rappels et au taux de réapprovisionnement . . . . .	71
3.5.4	Analyse de sensibilité des valeurs optimales par rapport au coût de perte et au taux de demandes . . . . .	74
3.5.5	Analyse de sensibilité des valeurs optimales par rapport au coût d'attente en orbite et au taux de rappels . . . . .	76

---

---

## Introduction

La modélisation est une étape primordiale dans l'analyse des systèmes. Les systèmes stochastiques de gestion de stocks sont très complexes à analyser à cause de leurs paramètres qui sont aléatoires (délai de réapprovisionnement, temps de service,..), suite à ces aléas la situation de rupture de stock peut survenir. Les systèmes de gestion de stocks avec ruptures permises traitent les demandes insatisfaites dues à la rupture de stock, où ces demandes sont soit arriérées (retardées) soit perdues (abandonnées). Cependant, ces deux dernières situations ne sont applicables qu'à une minorité de systèmes, comme lorsqu'une entreprise a un stock limité et ne peut pas répondre à toutes les demandes insatisfaites en cas de rupture de stock, mais elle ne veut pas perdre les demandes de ses clients fidèles. Dans ce cas, il est possible de considérer une hypothèse alternative appelée "hypothèse d'arriération partielle", qui implique qu'un nombre limité de demandes est arriéré et que le reste est perdu. Toutefois, une autre situation est envisageable pour cette classe de systèmes avec ruptures permises. En effet, Artalejo dans son travail [13], offre une option aux demandes insatisfaites dues à la rupture de stock, de quitter temporairement la zone de service et rejoindre une orbite limitée ou illimitée. Ces demandes attendent dans une orbite virtuelle une durée de temps aléatoire pour tenter à nouveau d'accéder au service, c'est une nouvelle classe de systèmes de gestion de stocks dénommée "Systèmes de gestion de stocks avec rappels" (une brève revue a été présentée dans la section 6 dans le chapitre 1).

La particularité des systèmes de gestion de stocks avec rappels et ruptures permises, nous a motivé à considérer un système de gestion de stocks avec rappels et demandes partiellement arriérées en situation de rupture de stock que nous avons modélisé via les RdPSG. D'un point de vue théorique, ce formalisme nous permet d'obtenir une représentation graphique simple et détaillée, ainsi que de nombreux résultats mathématiques avec des formules simples et exploitables. D'un point de vue pratique, ce formalisme permet au praticien d'effectuer une analyse qualitative et quantitative du système étudié. L'analyse qualitative valide le bon fonctionnement du système modélisé via les RdPSG, comme vérifier si les actions du système sont exécutables à tout moment, si le système en question admet un nombre fini d'états, etc. En ce qui concerne l'analyse quantitative, elle permet de calculer divers indices quantitatifs du système tels que les mesures de service (niveau de service), la probabilité de perte d'une demande, le nombre moyen de demandes en orbite, le niveau moyen du stock, etc. Pour tous ces avantages, on a choisi cet outil de modélisation pour effectuer la modélisation et l'analyse des systèmes de gestion de stocks considérés.

Lors de l'étude des systèmes de gestion de stocks, il est fréquent de résoudre le problème d'optimisation, qui est défini par la minimisation de la fonction des coûts totaux encourus par le maintien du stock, les commandes et les ruptures de stocks. Cependant, de nombreuses études montrent l'intérêt de prendre en compte ce problème et de le résoudre en utilisant diverses approches (heuristiques, optimisation dynamique, etc.)(voir [4, 13, 101, 100, 58, 92]). Néanmoins, toutes ces études ne prennent pas en considération la mesure du niveau de service visé par l'entreprise. La mesure du

---

niveau de service représente la probabilité de ne pas être en rupture de stock et de ne pas perdre de ventes. Cette mesure est importante en raison de son lien avec la gestion de stocks. En effet, d'une part, elle sert à mesurer la performance des politiques de gestion de stocks, et d'autre part, elle peut affecter la relation avec ses clients et avoir un impact significatif sur la rentabilité de l'entreprise. Quelques travaux de recherche sur les systèmes de ruptures de stocks ont été inclus dans cet axe de recherche, comme ([22, 96, 91, 94]) et on trouve également [56, 75, 98] pour les systèmes de gestion de stocks avec rappels.

Dans le présent chapitre, nous allons faire appel au formalisme de RdPSG pour modéliser et analyser un système de gestion de stocks avec rappels classiques. Cette politique de rappels est caractérisée par le fait que chaque client en orbite tente de rappeler indépendamment des autres clients en orbite, après un temps aléatoire exponentiellement distribué de taux  $\theta$ . Cependant, dans un intervalle de temps  $(t, t + dt)$ , la probabilité qu'un rappel se produise est donnée par  $i\theta dt + o(dt)$ , sachant que  $i$  est le nombre de demandes en orbite à l'instant  $t$ . De plus, d'autres éléments essentiels liés au système étudié seront donnés dans ce chapitre. En se basant sur la propriété d'isomorphisme entre le graphe de marquage du RdPSG et celui du CMTC, nous allons décrire le processus stochastique associé à l'évolution du système modélisé via les RdPSG. Pour l'analyse stochastique du système étudié, nous allons procéder au calcul de la distribution stationnaire de la CMTC en utilisant une approche récursive. Ensuite, nous allons réaliser une analyse de performance du système étudié. Pour une gestion optimale de stocks, nous allons proposer dans ce chapitre un problème d'optimisation d'une fonction récompense-coûts à maximiser. L'étude analytique de cette fonction s'est avérée difficile, en raison de la forme récursive de la distribution stationnaire intervenant dans sa forme explicite. Pour palier ce problème, nous avons fait recours à une approche de résolution. Pour illustrer cette approche, nous avons développé une analyse de sensibilité des valeurs optimales en fonction des paramètres du système étudié ainsi que quelques paramètres économiques. Ce travail a fait l'objet de deux publications scientifiques [18, 19].

### **3.1 Modélisation du système de gestion de stocks de type $(s, Q)$ avec rappels classiques via les RdPSG**

Considérons le système de gestion de stocks avec la politique  $(s, Q)$  à revue continue, à source infinie de demandes de taille identiques dont les arrivées sont poissonniennes de taux  $\lambda$  et le service est immédiat. Initialement, on suppose que la position du stock est égale à  $S$  et dès qu'elle chute au niveau du stock de sécurité  $s$ , un approvisionnement par lot de taille fixe  $Q = S - s$  est lancé. Nous supposons que  $Q > s$ , cette hypothèse garantit que seulement un seul ordre de commande aura lieu à la fois, et qu'elle n'arrive qu'après un temps aléatoire exponentiellement distribué de taux  $\mu$ . Dans une situation de rupture de stock, une demande arrivant au système passe immédiatement dans une orbite de taille limitée  $K$ . Chaque demande rappelle dans un intervalle de temps  $(t, t + dt)$

de durée aléatoire exponentiellement distribuée avec le taux  $i\theta$  ( $i$  le nombre de demandes en orbite à l'instant  $t$ ), tel que  $i \in \{1, \dots, K\}$  (des rappels classiques). De plus, les arrivées primaires sont immédiatement rejetées du système dans le cas où l'orbite est pleine et le stock est en rupture.

Notons que le stock est géré d'une manière unitaire et que chaque  $n$  unités forme un lot i.e. le stock maximal  $S$  est un multiple de  $n$ , et que le niveau de sécurité est multiple de  $n$ , tels que  $S = \alpha n$ , et  $s = \beta n$ . où  $\alpha, \beta, K \in \mathbb{N}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

La description du système de gestion de stocks de type  $(s, Q)$  avec rappels classiques et demandes partiellement arriérées peut être résumé dans le schéma donné dans la Figure 3.1.

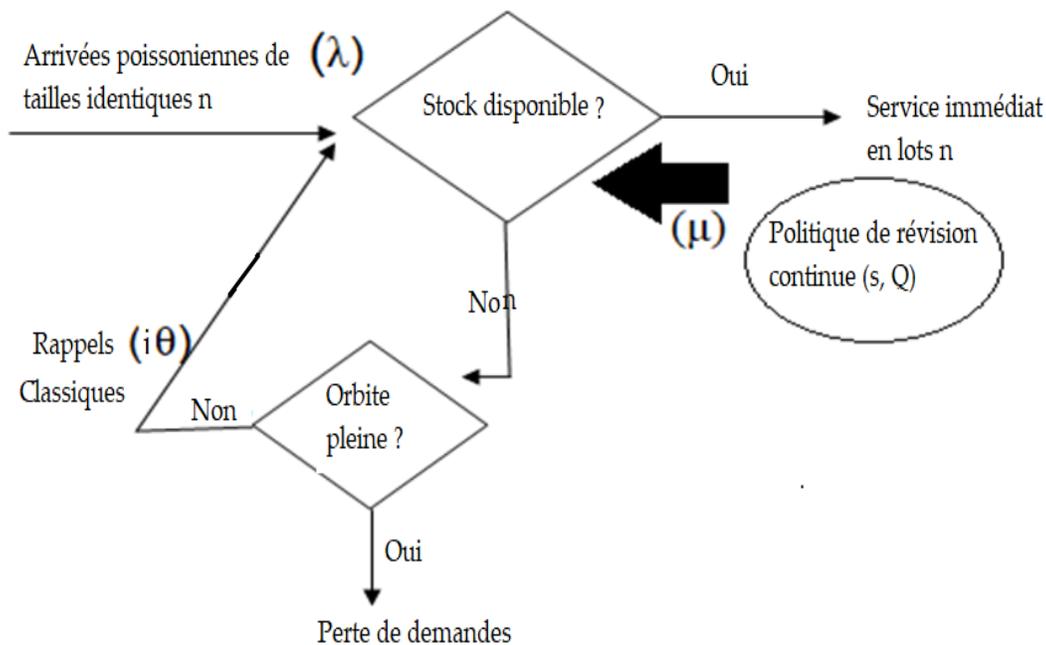


FIGURE 3.1 – Schéma du système de gestion de stocks avec rappels et demandes partiellement arriérées.

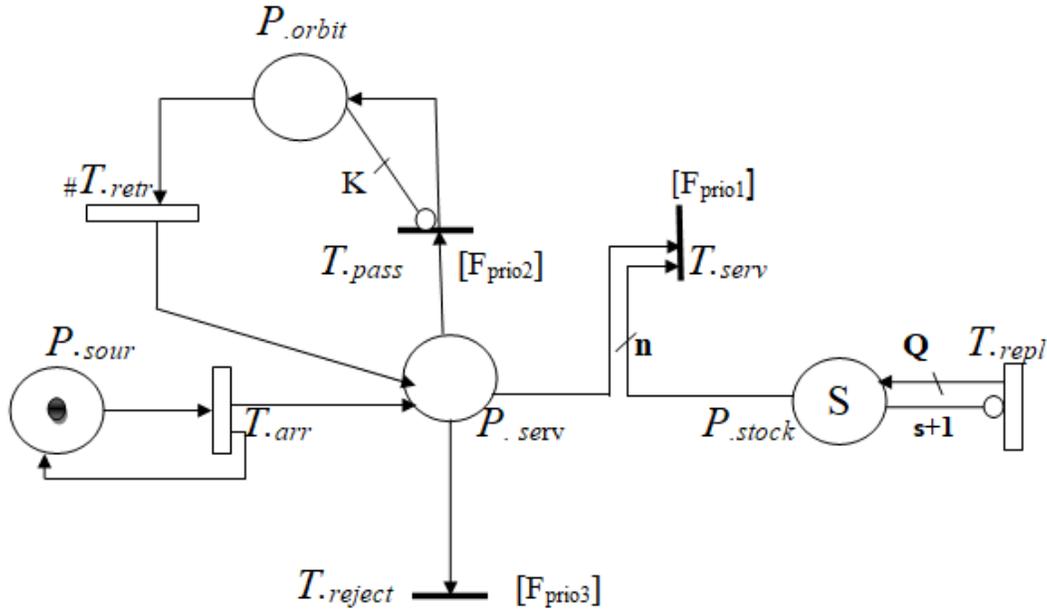
### 3.1.1 Modèle RdPSG établi pour le système étudié

Dans le modèle RdPSG donné dans la Figure 3.2, nous représentons les événements par deux types de transitions : les transitions stochastiques et les transitions immédiates. Les transitions stochastiques sont  $(T_{arr}, T_{retr}$  et  $T_{repl})$ , correspondant aux événements dont leurs durées de réalisation sont aléatoires, et elles sont symbolisées par des rectangles. Les transitions immédiates  $(T_{pass}, T_{serv}$ , et  $T_{reject})$ , modélisant les événements dont leur durées de réalisation sont nulles, et elles sont représentées par des barres. Par contre, les conditions de réalisation de chaque événement correspondent aux places  $(P_{sour}, P_{serv}, P_{orbit}$ , et  $P_{stock})$ , qui sont représentées par des cercles. Le marquage de chaque place est noté :  $M(P_{sour})$ ,  $M(P_{serv})$ ,  $M(P_{stock})$  et  $M(P_{orbit})$ , tandis que le

marquage initial de chaque place est donné par :

$$M_0 = (M_0(P.sour), M_0(P.serv), M_0(P.stock), M_0(P.orbit)).$$

L'interprétation des places et des transitions du modèle RdPSG, sont données respectivement



Fonctions Guards	condition
$[F_{prio1}]$	If $(M(P.serv) \neq 0) \ \& \ (M(P.stock) \geq n)$ .
$[F_{prio2}]$	If $(M(P.serv) \neq 0) \ \& \ (M(P.stock) = 0)$ .
$[F_{prio3}]$	If $(M(P.serv) \neq 0) \ \& \ (M(P.stock) = 0) \ \& \ (M(P.orbit) = K)$ .

FIGURE 3.2 – Le RdPSG associé au système de gestion de stocks avec rappels classiques.

dans le Tableau 3.1 et Tableau 3.2.

La dynamique du réseau de Petri modélisant le système de stock considéré et pour lequel le

Place	Description	marquage initial
$P.sour$	Source des demandes primaires.	1
$P.serv$	Demandes primaires qui arrivant au système.	0
$P.stock$	Position du stock.	S
$P.orbit$	Orbite virtuelle.	0

Tableau 3.1 – Interprétations des places du RdPSG présenté dans la FIGURE 3.2.

marquage initial est donné par :  $M_0 = (1, 0, S, 0)$ , peut être décrite comme suit :

Transition	Description	nature de la transition	taux de tir
$T_{.arr}$	Arrivée d'une demande primaire.	Stochastique	$\lambda$
$T_{.serv}$	Service d'une demande.	Immédiate	/
$T_{.pass}$	Passage d'une demande primaire en orbite.	Immédiate	/
$T_{.reject}$	Rejet d'une demande primaire.	Immédiate	/
$T_{.retr}$	Rappel d'une demande en orbite.	Stochastique	$\theta$
$T_{.repl}$	Réapprovisionnement du stock.	Stochastique	$\mu$

Tableau 3.2 – Interprétations des transitions du RdPSG présenté dans FIGURE 3.2.

- La présence d'un jeton dans la place  $P_{.sour}$  active la transition stochastique  $T_{.arr}$  pour déclencher l'arrivée d'une demande au système. Une fois cette transition est franchie, une nouvelle demande est générée dans la place  $P_{.sour}$  (une boucle indéfiniment répétée signifie que la source des demandes est infinie). De plus, la demande arrivée se déplace à la place  $P_{.serv}$ .
- La présence d'une demande dans la place  $P_{.serv}$  active ces trois transitions immédiates  $T_{.serv}$ ,  $T_{.pass}$  et  $T_{.reject}$ . Les priorités entre ces transitions sont définies par les trois fonctions guards  $[F_{prio1}]$ ,  $[F_{prio2}]$  et  $[F_{prio3}]$  qui sont définies dans la FIGURE 2.5. L'ordre de priorité de ces transitions est détaillé comme suit :
  - Si la condition dans la fonction guard  $[F_{prio1}]$  est remplie, autrement dit si une demande est arrivée au système et que le stock est disponible, la transition immédiate  $T_{.serv}$  sera validée. Le franchissement de cette transition fait que la demande quitte le système après son service du stock en main en retirant  $n$  jetons (articles) de la place  $P_{.serv}$ .
  - Sinon, si c'est la condition dans la fonction guard  $[F_{prio2}]$  qui est remplie et que le marquage de  $P_{.orbit}$  est inférieur strictement au poids de l'arc inhibiteur  $(T_{.pass}, P_{.orbit})$ , alors c'est la transition immédiate  $T_{.pass}$  qui sera validée. Le franchissement de cette dernière mène au passage du jeton(demande) de la place  $P_{.serv}$  à  $P_{.orbit}$ . La présence du jeton dans la place  $P_{.orbit}$  valide la transition stochastique  $T_{.retr}$ , cette transition est précédée par le signe #, signifiant que le taux de franchissement de cette dernière dépend du nombre de jetons dans la place d'entrée  $P_{.orbit}$  (i.e, la politique de service de cette transition est une politique multi-serveurs).
  - Sinon, si c'est la condition définie pour la fonction guard  $[F_{prio3}]$  qui est remplie, c'est bien la transition immédiate  $T_{.reject}$  qui sera validée. Après franchissement de cette transition, le jeton (demande) présent(e) dans la place  $P_{.serv}$  quitte le système définitivement, et elle est considérée comme perdue dans le cas d'un système (stock indisponible et orbite pleine).
- Une fois le nombre de jetons (articles) dans la place  $P_{.stock}$  est inférieur ou égal à  $s$ , ce qui est modélisée par l'arc inhibiteur  $(T_{.repl}, P_{.stock})$  de poids  $s + 1$ , la transition stochastique  $T_{.repl}$  est validée pour un réapprovisionnement du stock en rajoutant  $Q$  jetons (articles) à

la place  $P_{.stock}$ , et ceci après une durée aléatoire représentée par la transition stochastique  $T_{.repl}$  reliée à la place  $P_{.stock}$  avec un arc de poids  $Q$ .

## 3.2 Analyse stochastique du modèle RdPSG établi avec rappels classiques

### 3.2.1 Processus stochastique associé au modèle établi

L'obtention du processus stochastique décrivant le système de gestion de stocks avec rappels classiques via le formalisme des RdPSG passe par les étapes suivantes :

► **Étape 1** : Générer le graphe de marquages représentant l'évolution des marquages à partir du marquage initial  $M_0$ , par le franchissement des différentes transitions du modèle RdPSG. Les états contenus dans ce graphe sont les états tangibles (ceux dont seulement les transitions stochastiques sont franchissables), ainsi que les états évanescents (ceux dont les transitions immédiates sont franchissables), et les arcs reliant les états de ce graphe porte le nom des transitions (stochastiques ou immédiates) permettant le passage d'un marquage à un autre marquage.

► **Étape 2** : Éliminer les états évanescents du graphe de marquages et leurs transitions associées (transitions immédiates), pour obtenir le graphe de marquages réduit.

► **Étape 3** : L'espace d'états de la chaîne de Markov à temps continu est isomorphe à l'espace d'états du graphe de marquages réduit. De plus, le taux de transition d'un état à un autre correspond à la somme des taux de franchissement des transitions stochastiques qui sont tirables à partir d'un même marquage tangible.

Suivant ces étapes, nous allons donner un exemple illustratif de la démarche d'obtention du processus stochastique du système étudié via le formalisme des RdPSG. Dans cet exemple, nous allons considérer  $S = 6$ ,  $s = 2$ ,  $n = 2$ , et  $K = 2$ . En voici les étapes ci-dessous :

► **Étape 1** : Nous allons générer tout les états (marquages tangibles et évanescents) accessibles à partir du marquage initial  $M_0$  par le franchissement des transitions stochastiques et immédiates qui sont donnés dans le graphe d'accessibilité (voir Figure 3.3). Dans ce graphe, les états (marquages) tangibles sont représentés à l'intérieur de rectangles de lignes continues, et les états (marquages) évanescents sont représentés à l'intérieur de rectangles de lignes discontinues. Ainsi, les arcs reliant les états de ce graphe porte le nom des transitions permettant le passage d'un marquage à un autre marquage.

► **Étape 2** : Après élimination de tout les états évanescents du graphe d'accessibilité (rectangles de lignes discontinues) résulte le graphe de marquages réduit, qui est donné dans la Figure 3.4.

► **Étape 3** : Enfin, une généralisation à des valeurs quelconques pour  $S, s, n \in \mathbb{N}$  et  $K \in \mathbb{N}^*$

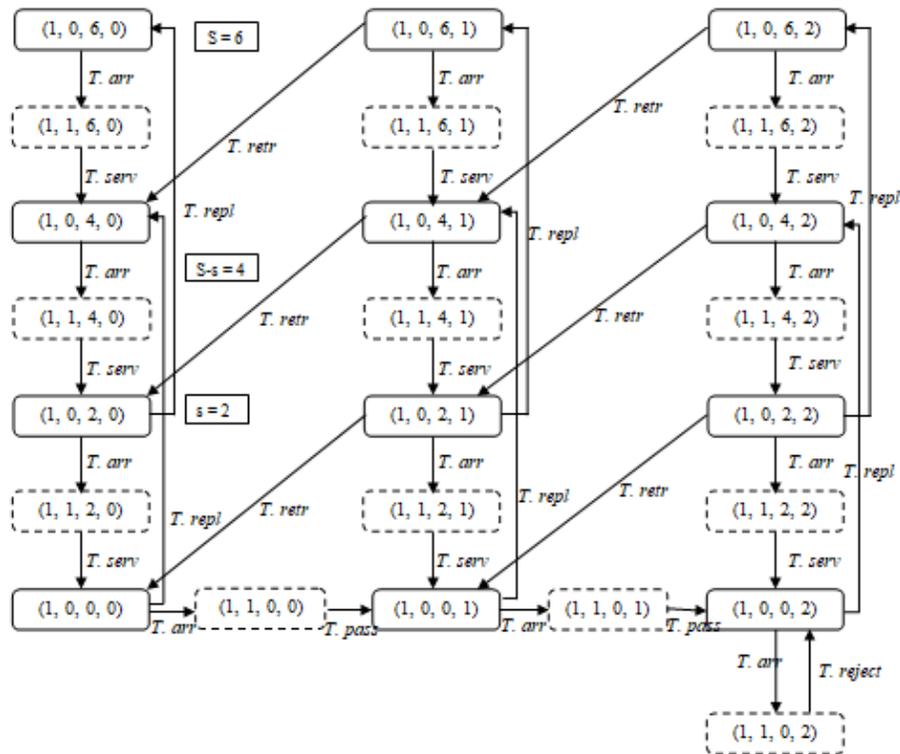


FIGURE 3.3 – Le graphe d’accessibilité associé au modèle RdPSG établi pour  $(S, s, n, K) = (6, 2, 2, 2)$ .

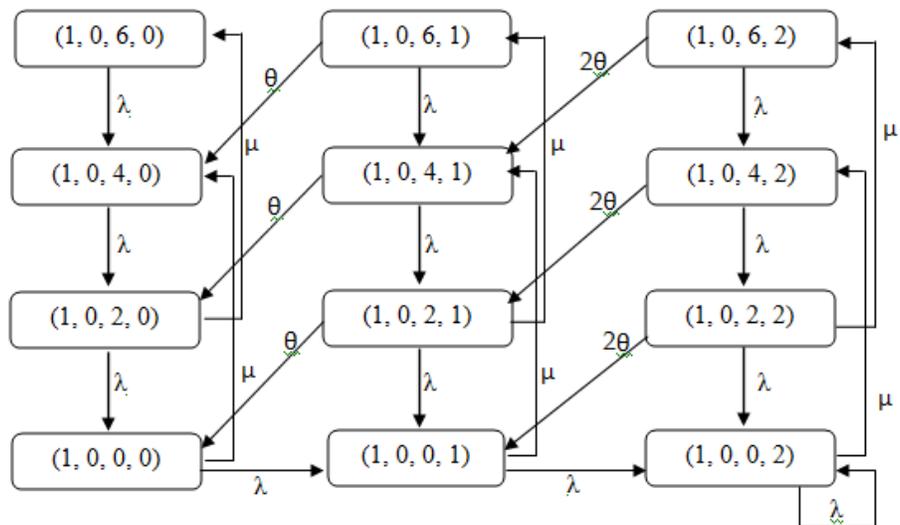
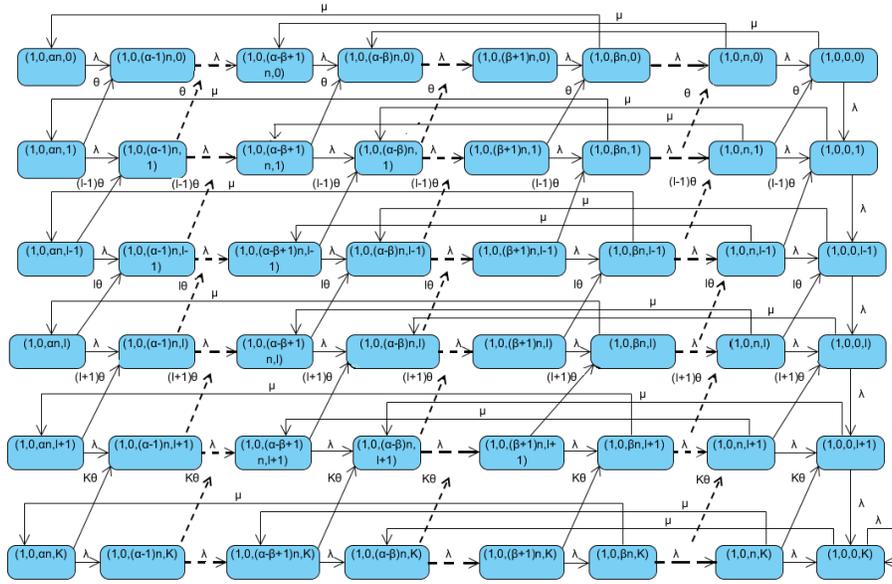


FIGURE 3.4 – Le graphe réduit associé au modèle RdPSG établi pour  $(S, s, n, K) = (6, 2, 2, 2)$ .

est réalisée. Ainsi, à cette étape tout les marquages possibles obtenus par le franchissement des transitions immédiates et stochastiques sont donnés. Après élimination des états évanescents, le graphe des marquages réduit (graphe des états tangibles) est obtenu et il est donné dans la Figure 3.5.

FIGURE 3.5 – Le graphe réduit pour  $S, s \in \mathbb{N}$  et  $n, K \in \mathbb{N}^*$ .

D'après l'évolution du graphe de marquages réduit, on peut clairement remarquer que le processus stochastique décrivant notre système correspond à l'évolution de marquages des deux places  $P_{.stock}$  et  $P_{.orbit}$ , où chaque marquage prend la forme  $(1, 0, M(P_{.stock}), M(P_{.orbit}))$ .

**Remarque 3.2.1.** En raison de simplification d'écriture, on va noter chaque marquage par  $(M(P_{.stock}), M(P_{.orbit}))$ . Ces marquages sont énumérés dans l'ensemble  $\Omega_n = \{(ni, l) / 0 \leq i \leq \alpha, 0 \leq l \leq K\}$  avec  $\alpha, K \in \mathbb{N}$ , et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Le nombre de marquages tangibles est  $|\Omega_n| = (\alpha + 1) \times (K + 1)$ .

En se basant sur la propriété de Molloy [73], disons que le graphe de marquages réduit est isomorphe au graphe des états d'une CMTC, on conclut que la chaîne de Markov bi-dimensionnelle à temps continu représente la position du stock et le nombre de demandes en orbite à espace d'états dénombrable  $\Omega_n$ .

Le générateur infinitésimal  $P_\infty$  donné par  $(P_\infty(ni, l); (nj, m))$ , où  $(ni, l); (nj, m) \in \Omega_n$  peut être représenté sous forme de blocs suivant le nombre de demandes en orbite qu'on note  $P_\infty(l; m)$  avec  $l; m \in \{0, \dots, K\}$ . Sa représentation matricielle est écrite comme suit :



- $\forall l \in \{0, 1, \dots, K-1\}$ ,  $C$  est donnée comme suit :

$$[C]_{ni;nj} = P_\infty(ni, l); (nj, l+1) \begin{cases} (1 - \delta_{K,0})\lambda, & \text{si } i = j = 0; \\ 0, & \text{sinon;} \end{cases}$$

- $\forall l \in \{1, \dots, K\}$ ,  $B_l$  est donnée comme suit :

$$[B_l]_{ni;nj} = P_\infty(ni, l); (nj, l-1) \begin{cases} l\theta, & \text{si } j = i-1, i \in \{\alpha, \alpha-1, \dots, 1\}; \\ 0, & \text{sinon;} \end{cases}$$

### 3.2.2 Distribution stationnaire du modèle établi

Le RdPSG donné par la Figure 3.2 est borné (i.e le graphe des marquages réduit de la Figure 3.5 admet un nombre fini d'états et il est réinitialisable (admet l'état initial  $(1, 0, \alpha n, 0)$  comme état d'accueil). D'après les deux théorèmes (2.3.1 et 2.3.2), le système est ergodique, d'où la distribution stationnaire  $\Pi = (\Pi^0, \Pi^1, \Pi^2, \dots, \Pi^K)$ , avec  $\Pi^l = (\pi_0^l, \pi_1^l, \dots, \pi_\alpha^l)$ ,  $\forall l \in \{0, 1, \dots, K\}$  existe et est unique. Elle est donnée par la résolution du système linéaire  $(I)$  suivant :

$$(I) \iff \begin{cases} \Pi P_\infty = 0; \\ \sum_{(i,l) \in \Omega_n} \pi_i^l = 1; \end{cases}$$

où on note  $\pi(in, l)$  par  $\pi_i^l$ ;  $(i, l) \in \Omega_n$ .

$$(I) \iff \begin{cases} A_0 \Pi^{(0)} + B_1 \Pi^{(1)} = 0; \\ C \Pi^{(l-1)} + A_l \Pi^{(l)} + B_{l+1} \Pi^{(l+1)} = 0, \forall l \in \{1, 2, \dots, K-1\}; \\ C \Pi^{(K-1)} + A_K \Pi^{(K)} = 0; \\ \sum_{(i,l) \in \Omega_n} \pi_i^l = 1; \end{cases}$$

La résolution du système (I) nécessite la résolution de  $(\alpha + 1) \times (K + 1)$  équations linéairement indépendantes, qui sont données ci-après :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda + \mu)\pi_0^l = (1 - \delta_{l,0})\lambda\pi_0^{l-1} + \lambda\pi_1^l + (l + 1)\theta\pi_1^{l+1}, l \in \{0, \dots, K - 1\}; \\ (\lambda + l\theta + \mu)\pi_i^l = \lambda\pi_{i+1}^l + (l + 1)\theta\pi_{i+1}^{l+1}, i \in \{1, \dots, \beta\}, l \in \{0, \dots, K - 1\}; \\ (\lambda + l\theta)\pi_i^l = \lambda\pi_{i+1}^l + (l + 1)\theta\pi_{i+1}^{l+1}, i \in \{\beta + 1, \dots, \alpha - \beta - 1\}, l \in \{0, \dots, K - 1\}; \\ (\lambda + l\theta)\pi_i^l = (1 - \delta_{i,\alpha})\lambda\pi_{i+1}^l + (1 - \delta_{i,\alpha})(l + 1)\theta\pi_{i+1}^{l+1} + \mu\pi_{i-\alpha-\beta}^l, i \in \{\alpha - \beta, \dots, \alpha\}, l \in \{0, \dots, K - 1\}; \\ \mu\pi_0^K = (1 - \delta_{K,0})\lambda\pi_0^{K-1} + \lambda\pi_1^K; \\ (\lambda + K\theta + \mu)\pi_i^K = \lambda\pi_{i+1}^K, i \in \{1, \dots, \beta\}; \\ (\lambda + K\theta)\pi_i^K = \lambda\pi_{i+1}^K, i \in \{\beta + 1, \dots, \alpha - \beta - 1\}; \\ (\lambda + K\theta)\pi_i^K = (1 - \delta_{i,\alpha})\lambda\pi_{i+1}^K + \mu\pi_{i-\alpha-\beta}^K, i \in \{\alpha - \beta, \dots, \alpha\}; \\ \sum_{(i,l) \in \Omega_n} \pi_i^l = 1. \end{array} \right.$$

Après avoir effectué plusieurs transformation algébriques, nous arrivons à une formulation plus simple donnée par la procédure récursive élaboré par Artalejo et al. dans [13] réadapté à notre système, qui est résumée ci-après :

### 3.2.2.1 Approche récursive de résolution

Introduire de nouvelles variables notées  $r_{(in,l)}$ ,  $\forall (in,l) \in \Omega_n$ , où :

$$r_{(in,l)} = \frac{\pi_{(in,l)}}{\pi_{(0,K)}}, \forall (in,l) \in \Omega_n; \quad (3.1)$$

avec  $\pi_{(in,l)} = \pi_i^l$ . Ces nouvelles variables sont utiles pour calculer récursivement la distribution stationnaire  $\pi_i^l$ , en suivant les étapes données ci-après :

**Étape 0 :**

- Calculer  $T_{i,l}$ , pour  $l \in \{0, \dots, K\}$  :

$$T_{i,l} = \begin{cases} -(1 - \delta_{l,0}) \left(\frac{\lambda + l\theta + \mu}{\lambda}\right)^i, & \text{si } i \in \{0, 1, \dots, \beta\}; \\ -(1 - \delta_{l,0}) \left(\frac{\lambda + l\theta + \mu}{\lambda}\right)^\beta \left(\frac{\lambda + l\theta}{\lambda}\right)^{i-\beta}, & \text{si } i \in \{\beta + 1, \dots, \alpha - \beta - 1\}; \\ \left(\frac{\lambda + l\theta}{\lambda}\right) T_{i-1,l}, & \text{si } i = \alpha - \beta; \\ \left(\frac{\lambda + l\theta}{\lambda}\right) T_{i-1,l} - \frac{\mu}{\lambda} T_{i-(\alpha-\beta)-1,l}, & \text{si } i \in \{\alpha - \beta + 1, \dots, \alpha - 1\}. \end{cases} \quad (3.2)$$

**Étape 1 :**

- Calculer  $M_{i,K}$ , pour  $l = K$  :

$$M_{i,K} = \begin{cases} \frac{\mu}{\lambda} \left( \frac{\lambda + K\theta + \mu}{\lambda} \right)^i, & \text{si } i \in \{0, 1, \dots, \beta\}; \\ \frac{\mu}{\lambda} \left( \frac{\lambda + K\theta + \mu}{\lambda} \right)^\beta \left( \frac{\lambda + K\theta}{\lambda} \right)^{i-\beta}, & \text{si } i \in \{\beta + 1, \dots, \alpha - \beta - 1\}; \\ \left( \frac{\lambda + K\theta}{\lambda} \right) M_{i-1,K} - \frac{\mu}{\lambda}, & \text{si } i = \alpha - \beta; \\ \left( \frac{\lambda + K\theta}{\lambda} \right) M_{i-1,K} - \frac{\mu}{\lambda} M_{i-(\alpha-\beta)-1,K}, & \text{si } i \in \{\alpha - \beta + 1, \dots, \alpha - 1\}. \end{cases} \quad (3.3)$$

- Calculer  $r_0^{K-1}$  :

$$r_0^{K-1} = \frac{K\theta \sum_{i=0}^{\alpha-1} M_{i,K}}{\lambda - K\theta \sum_{i=0}^{\alpha-1} T_{i,K}}. \quad (3.4)$$

- Puis, calculer

$$r_{i+1}^K = M_{i,K} + T_{i,K} r_0^{K-1}, \forall i \in \{0, \dots, \alpha - 1\}. \quad (3.5)$$

**Étape 2 :**

- Poser  $l = l - 1$ , Calculer  $M_{i,l}$  :

$$M_{i,l} = \begin{cases} r_0^l \left( \frac{\lambda + \mu}{\lambda} \right) \left( \frac{\lambda + l\theta + \mu}{\lambda} \right)^i \\ - \frac{(l+1)\theta}{\lambda} \sum_{m=0}^i \left( \frac{\lambda + l\theta + \mu}{\lambda} \right)^{i-m} r_{m+1}^{l+1}, & \text{si } i \in \{0, 1, \dots, \beta\}; \\ r_0^l \left( \frac{\lambda + \mu}{\lambda} \right) \left( \frac{\lambda + l\theta + \mu}{\lambda} \right)^\beta \left( \frac{\lambda + l\theta}{\lambda} \right)^{i-\beta} - \frac{(l+1)\theta}{\lambda} \left[ \left( \frac{\lambda + l\theta}{\lambda} \right)^{i-\beta} \sum_{m=0}^{\beta} \left( \frac{\lambda + l\theta + \mu}{\lambda} \right)^{\beta-m} r_{m+1}^{l+1} \right. \\ \left. + \sum_{m=\beta+1}^i \left( \frac{\lambda + l\theta}{\lambda} \right)^{i-m} r_{m+1}^{l+1} \right], & \text{si } i \in \{\beta + 1, \dots, \alpha - \beta - 1\}; \\ \left( \frac{\lambda + l\theta}{\lambda} \right) M_{i-1,l} - \frac{(l+1)\theta}{\lambda} r_{i+1}^{l+1} - \frac{\mu}{\lambda} r_0^l, & \text{si } i = \alpha - \beta; \\ \left( \frac{\lambda + l\theta}{\lambda} \right) M_{i-1,l} - \frac{(l+1)\theta}{\lambda} r_{i+1}^{l+1} - \frac{\mu}{\lambda} M_{i-(\alpha-\beta)-1,l}, & \text{si } i \in \{\alpha - \beta + 1, \dots, \alpha - 1\}. \end{cases} \quad (3.6)$$

- Calculer

$$r_0^{l-1} = \frac{l\theta \sum_{i=0}^{\alpha-1} M_{i,l}}{\lambda - l\theta \sum_{i=0}^{\alpha-1} T_{i,l}}. \quad (3.7)$$

- Calculer récursivement :

$$r_{i+1}^l = M_{i,l} + T_{i,l} r_0^{l-1}, \forall i \in \{0, \dots, \alpha - 1\}. \quad (3.8)$$

**Étape 3 :**

- Répéter **Étape 2** jusqu'à  $l = 0$  et on obtient :

$$r_{i+1}^0 = M_{i,0}, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, \alpha - 1\}. \quad (3.9)$$

Les variables  $r_i^l \forall (i, l) \in \{0, 1, \dots, \alpha\} \times \{0, 1, \dots, K\}$  sont ainsi remplacées dans la relation 3.1, ainsi on obtient la distribution stationnaire comme suit :

$$\pi_i^l = r_i^l \left( \sum_{j=0}^K \sum_{i=0}^{\alpha} r_i^l \right)^{-1}, \quad \forall (i, l) \in \{0, 1, \dots, \alpha\} \times \{0, 1, \dots, K\}, \quad (3.10)$$

### 3.3 Mesures de performances du système étudié

A partir de l'algorithme de recherche recursive de la distribution stationnaire de la CMTC, nous avons obtenu la position du stock et le nombre de demandes en orbite à l'état stationnaire. A partir de la distribution stationnaire, on a pu calculer les mesures de performances suivantes :

1. **Le niveau moyen du stock**, noté  $\overline{M}(P_{.stock})$  est le nombre moyen de jetons dans la place  $P_{.stock}$  :

$$\overline{M}(P_{.stock}) = \sum_{M_j \in \Omega_n} M_j(P_{.stock}) \cdot \pi_{M_j} = n \sum_{l=0}^K \sum_{i=1}^{\alpha} i \cdot \pi_i^l; \quad (3.11)$$

où :  $M_j(P_{.stock})$  est le nombre de jetons dans la place  $P_{.stock}$  dans le marquage  $M_j$  et  $\pi_{M_j}$  est la probabilité stationnaire que le processus se trouve à l'état  $M_j$  dans l'ensemble des marquages accessibles  $\Omega_n$ .

2. **Le nombre moyen de demandes en orbite**, noté  $\overline{M}(P_{.orbit})$  représente le nombre moyen de jetons dans la place  $P_{.orbit}$  :

$$\overline{M}(P_{.orbit}) = \sum_{M_j \in \Omega_n} M_j(P_{.orbit}) \cdot \pi_{M_j} = \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{l=1}^K l \cdot \pi_i^l; \quad (3.12)$$

où  $M_j(P_{.orbit})$  est le nombre de jetons dans la place  $P_{.orbit}$  dans le marquage  $M_j$ .

3. **La probabilité de la rupture de stock**, notée  $\mathbb{P}_b$  (**la probabilité que le marquage de la place  $P_{.stock}$  soit égale à zéro**) :

$$\mathbb{P}_b = \mathbb{P}\{M(P_{.stock}) = 0\} = \sum_{M_j \in A_0} \pi_{M_j} = \sum_{l=0}^K \pi_0^l; \quad (3.13)$$

où :  $A_0 = \{M_j \in \Omega_n : [M(P_{.stock}) = 0] \text{ dans le marquage } M_j\}$ .

4. **La probabilité de disponibilité du stock**, notée  $\mathbb{P}_{ser}$  qui correspond à la probabilité que l'événement  $[M(P.stock) > 0]$  soit vrai :

$$\mathbb{P}_{ser} = \mathbb{P}\{M(P.stock) > 0\} = \sum_{M_j \in A_1} \pi_{M_j} = \sum_{l=0}^K \sum_{i=1}^{\alpha} \pi_i^l; \quad (3.14)$$

où :  $A_1 = \{M_j \in \Omega_n : [M(P.stock) > 0]$  dans le marquage  $M_j\}$ .

5. **Le taux d'arrivée des demandes primaires en orbite dû à la situation de rupture de stock**, noté  $\lambda_o$  est la fréquence de franchissement de la transition  $T.arr$  tant que l'événement  $[(M(P.stock) = 0) \text{ et } (M(P.orbit) \leq K - 1)]$  soit vrai :

$$\lambda_o = \sum_{M_j \in S(T.arr)Orbit} \lambda \pi_{M_j} = \lambda \sum_{l=0}^{K-1} \pi_0^l; \quad (3.15)$$

où :

$S(T.arr)Orbit = \{M_j \in \Omega_n : T_{arr} \in E(M_j) \wedge [(M(P.stock) = 0) \& (M(P.orbit) \leq K - 1)] = \text{vrai dans } M_j\}$ , est le sous-ensemble de marquages accessibles de  $\Omega_n$  où la transition  $T.arr$  est franchissable et que l'événement  $[(M(P.stock) = 0) \& (M(P.orbit) \leq K - 1)]$  soit vrai dans  $M_j$ .

6. **Le taux de service des demandes primaires**, noté  $\lambda_{ser}$  correspond à la fréquence de franchissement de la transition  $T.arr$ , et que l'événement  $[M(P.stock) > 0]$  soit vrai :

$$\lambda_{ser} = \sum_{j/M_j \in S(T.arr)serv} \lambda \pi_{M_j} = \lambda \mathbb{P}_{ser}; \quad (3.16)$$

où :

$S(T.arr)serv = \{M_j \in \Omega_n : T_{arr} \in E(M_j) \wedge [(M(P.stock) > 0)] = \text{vrai dans } M_j\}$ , est le sous-ensemble de marquages accessibles dans  $\Omega_n$  où la transition  $T.arr$  est franchissable et que l'événement  $[M(P.stock) > 0]$  soit vrai dans  $M_j$ .

7. **Le taux de demandes perdues**, noté  $\lambda_p$  représente la fréquence de franchissement de la transition  $T.arr$ , quand l'événement  $[(M(P.stock) = 0) \text{ et } (M(P.orbit) = K)]$  soit vrai :

$$\lambda_p = \lambda \sum_{M_j \in A_2} \pi_{M_j} = \lambda \pi_0^K; \quad (3.17)$$

avec :  $\pi_0^K$  est la probabilité qu'une demande primaire soit perdue,

et :  $A_2 = \{M_j \in \Omega_n : T_{arr} \in E(M_j) \wedge [(M(P.stock) = 0) \& (M(P.orbit) = K)] = \text{vrai dans } M_j\}$  est le sous-ensemble de marquages accessibles dans  $\Omega_n$  où la transition est franchissable et que l'événement  $[(M(P.stock) = 0) \& (M(P.orbit) = K)]$  soit vrai.

8. **Le taux d'arrivée effectif au système**, noté  $\lambda_e$  est la fréquence de franchissement de la transition  $T.arr$ , quand l'un des deux événements  $[(M(P.stock) > 0)]$  ou bien  $[(M(P.stock) = 0) \text{ et } (M(P.orbit) \leq K - 1)]$  soit vrai :

$$\lambda_e = \sum_{j/M_j \in S(T.arr)} \lambda \pi_{M_j} = \lambda (\mathbb{P}_o + \mathbb{P}_{ser}) = \lambda_o + \lambda_{ser}; \quad (3.18)$$

où :  $S(T_{.arr}) = S(T_{.arr})_{Orbit} \cup S(T_{.arr})_{serv}$ .

9. **Le temps moyen de séjour de  $n$  articles en stock**, noté  $\overline{TS}_{P.stock}$  est donné par :

$$\overline{TS}_{P.stock} = \frac{\overline{M}(P_{.stock})}{\lambda_e}; \quad (3.19)$$

10. **Le temps moyen de séjour d'une demande en orbite**, noté  $\overline{TS}_{P.orbit}$  est donné par :

$$\overline{TS}_{P.orbit} = \frac{\overline{M}(P_{.orbit})}{\lambda_o}; \quad (3.20)$$

11. **Le niveau moyen de commande**, noté  $\mu_r$  est donné par la fréquence de franchissement de la transition  $T_{.repl}$  :

$$\mu_r = \sum_{j/M_j \in \Omega(T_{.repl})} \mu \cdot \pi_{M_j} = \sum_{l=0}^K \sum_{i=0}^{\beta} \mu \cdot \pi_i^l; \quad (3.21)$$

Où :  $\Omega(T_{.repl}) = \{M_j \in \Omega_n : T_{.repl} \in E(M_j)\}$  est le sous-ensemble de marquages accessibles dans les quels la transition  $T_{.repl}$  est franchissable.

12. **Le taux de rappels-servis**, noté  $\theta_{ser}$  est la fréquence de franchissement de la transition  $T_{.retr}$  quand l'événement  $[M(P_{.stock}) > 0]$  soit vrai :

$$\theta_{ser} = \sum_{j/M_j \in S(T_{.retr})_{serv}} \theta(M_j) \mathbb{P}_{ser} = \theta \sum_{l=0}^K \sum_{i=1}^{\alpha} l \pi_i^l; \quad (3.22)$$

où :  $S(T_{.retr})_{serv} = \{M_j \in \Omega_n : T_{.retr} \in E(M_j) \wedge [M(P_{.stock}) > 0] = \text{vrai dans } M_j\}$ , est le sous-ensemble des marquages accessibles où la transition  $T_{.retr}$  est franchissable et que l'événement  $[M(P_{.stock}) > 0]$  soit vrai dans le marquage  $M_j$ , et  $\theta(M_j)$  est le taux de franchissement de la transition  $T_{.retr}$  dans le marquage  $M_j$ .

13. **Le taux de rappels-non-servis**, noté par  $\theta_b$  correspond à la fréquence de franchissement de la transition  $T_{.retr}$ , quand l'événement  $[M(P_{.stock}) = 0]$  soit vrai :

$$\theta_b = \sum_{j/M_j \in S(T_{.retr})_{blocked}} \theta(M_j) \mathbb{P}_b = \theta \sum_{l=0}^K l \pi_0^l; \quad (3.23)$$

où :  $S(T_{.retr})_{blocked} = \{M_j \in \Omega_n : T_{.retr} \in E(M_j) \wedge [M(P_{.stock}) = 0] = \text{vrai dans } M_j\}$ , est le sous-ensemble de marquages accessibles dans le quel la transition  $T_{.retr}$  est franchissable est que l'événement  $[M(P_{.stock}) = 0]$  soit vrai dans  $M_j$ .

### 3.4 Formulation et étude de la fonction récompense-coûts

Pour qu'une entreprise puisse réponde à son objectif qui est de fournir un niveau de service élevé, alors elle doit trouver la politique optimale qui maximise son revenu d'une part et elle doit

minimiser ses coûts encourus par le maintien du stock, le lancement des commandes ainsi que par les coûts dûs à la rupture de stock d'autre part.

Dans le but de répondre à cet objectif, nous avons posé le problème d'optimisation qui a pour objectif de maximiser une fonction récompense-coûts, qui est le compromis entre les revenus attribués à l'entreprise et les différents coûts encourus dans le cas de notre système, pour retrouver les valeurs optimales du stock maximal  $S^*$ , du niveau de stock de sécurité  $s^*$ , ainsi que le seuil optimal des demandes arriérées  $K^*$ , qui maximisent le profit de l'entreprise et maintiennent un niveau de service élevé.

Pour l'étude de ce problème d'optimisation, en premier lieu la formalisation de la fonction objectif "fonction récompense-coûts" de ce problème est réalisée en s'appuyant sur les mesures de performances du système de gestion avec rappels et demandes partiellement arriérées, et sur la notion du niveau de service. Cette fonction objectif est composée de deux parties. Dans la première partie, nous avons défini le niveau de service de l'entreprise qui n'est autre que la probabilité de ne pas avoir de rupture de stock, autrement dit la probabilité d'avoir un stock disponible ( $\mathbb{P}_{ser} = 1 - \mathbb{P}_b$ ) (voir formule 3.14), tout en définissant une récompense  $R_c$ , qui va être attribuée à l'entreprise à chaque fois qu'une demande est servie. Dans la seconde partie, nous avons estimé les différents coûts considérés dans le cas de notre système qui englobe les coûts suivants : le coût moyen dû au lancement de commande  $((f + c_p Q)\mu_r)$ , le coût moyen dû au maintien du stock  $c_h \bar{M}(P_{stock})$ , ainsi que les coûts moyen de rupture de stock qu'on a mesuré par le coût moyen dû aux demandes perdues  $c_l \lambda_p$  et le coût moyen dû à l'attente des demandes arriérées en orbite qui est donné par  $c_w \bar{M}(P_{orbit})$ . L'optimisation de cette fonction objectif est contrainte aux hypothèses impliquées dans le système de gestion de stocks considéré. La résolution de ce problème d'optimisation se base sur une approche qui va nous permettre de trouver la politique de stock optimale (le stock de sécurité optimal  $s^*$ , le stock maximal optimal  $S^*$  et le seuil optimal des demandes arriérées  $K^*$ ) qui maximise le profit de l'entreprise et assure un niveau de service élevé.

En deuxième lieu, nous avons fait une étude de sensibilité du profit optimal  $F^*$  et de la politique de stock optimale  $(s^*, S^*, K^*)$ , ainsi que le niveau de service par rapport à la variation des paramètres exogènes au système, à savoir les paramètres non contrôlables  $(n, \lambda, \mu$  et  $\theta)$ , ainsi que quelques paramètres économiques, à savoir : La récompense  $R_c$  et les deux coûts liés à l'hypothèse partiellement arriérées  $c_w$  et  $c_l$ . Ces exemples sont regroupés dans la section 6.

### 3.4.1 Formulation mathématique du problème d'optimisation de la fonction récompense-coûts

Dans cette section, nous avons formulé la fonction récompense-coûts, dans le cas d'un système de gestion de stocks avec service immédiat, rappels classiques et des demandes partiellement arriérées. Les coûts considérés dans cette fonction sont liés aux quantités données par les mesures

de performance du système étudié est qui sont exprimés dans la fonction "Coût total" donnée dans la formule (3.25). De plus, nous avons considéré une récompense  $R \in \mathbb{R}_*^+$  qui est attribuée au système lorsque un service est accompli dû à un stock disponible. Dans le cas d'un stock disponible, le service d'un client peut être accompli immédiatement qui est considéré par le taux de service des demandes primaires (voir formule (3.16), où bien après un rappel depuis l'orbite qui est exprimé par le taux de rappels-servis (voir formule (3.22)).

La fonction récompense-coûts notée  $F$  est à maximiser et elle est formulée dans le problème d'optimisation énoncé comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} F(s, S, K) = R_c \cdot (\lambda_{ser} + \theta_{ser}) - C_T(s, S, K); \rightarrow \max \\ \text{sous contraintes à :} \\ S \geq 2s + 1; \\ S = \alpha n; s = \beta n; \\ (\alpha, \beta, K) \in \mathbb{N}^3, n \in \mathbb{N}^*; (R_c \in \mathbb{R}_*^+); \end{array} \right. \quad (3.24)$$

où :

$$C_T(s, S, K) = c_h \cdot \overline{M}(P_{stock}) + c_w \cdot \overline{M}(P_{orbit}) + c_r \cdot \mu_r + c_l \cdot \lambda_p, \quad (3.25)$$

- $c_h$  :le coût de maintien d'une unité en stock/unité de temps ;
- $c_r = c_p * Q + f$  :  $c_p$  le coût d'achat d'un article/unité de temps, et  $f$  est un coût fixe/ordre de commande ;
- $c_w$  :le coût dû a une attente d'une demande en orbite/unité de temps ;
- $c_l$  :le coût dû à une vente perdue/unité de temps.

Dans le problème (3.24), la première contrainte exprime le fait qu'un seul ordre de commande peut avoir lieu en même temps, et la deuxième contrainte exprime que le stock peut satisfaire  $\alpha$  demandes lots de taille fixe  $n$ , et  $\beta$  dans le cas d'un stock de sécurité. Enfin, la dernière contrainte du problème, qui représente le domaine de définition des variables de décision  $s, S$  et  $K$ , et celui de la récompense  $R_c$ .

Pour résoudre le problème (3.24), nous avons procédé par une approche de résolution donnée dans la sous-section suivante.

### 3.4.2 Approche de résolution du problème d'optimisation

Le problème d'optimisation donné en (3.24) est un problème tridimensionnel, de plus les performances intervenant dans l'expression de la fonction  $F$  sont établis à l'aide de la distribution stationnaire données dans les équations (3.4)-(3.10) dont l'expression est donnée d'une manière recursive, ce qui rend son étude analytique de ce problème plus difficile. Pour palier à cette difficulté,

on a proposé une approche de résolution donnée explicitement en deux étapes, dont le principe est donné en deux étapes :

- **Étape 1** : On considère un problème bi-dimensionnel, qui consiste à trouver la valeur du stock de sécurité optimal  $s^*$  et la valeur optimale du stock maximal  $S^*$ , tout en fixant la valeur du seuil de demandes arriérées  $K$  ; tel que  $F(s^*, S^*, K) = \max_{(s,S) \in (I_s, I_S)} F(s, S, K)$ , où  $I_s, I_S$  sont respectivement les intervalles de variation de  $s$  et  $S$ , avec  $(I_s, I_S) \subset \mathbb{N}^2$ .
- **Étape 2** : Dans la deuxième étape, on retrouve la valeur optimale du seuil d'arriération des demandes  $K^*$ , dans un intervalle de variation noté  $I_K \subset \mathbb{N}$ , tel que  $F(s^*, S^*, K^*) = \max_{K \in I_K} F(s^*, S^*, K)$ , ce qui va permettre de retrouver l'optimum local (i.e. le profit maximal  $F^*$ ) procuré par les valeurs optimales  $(s^*, S^*, K^*)$ .

### 3.5 Analyse de sensibilité de la politique optimale et du profit optimal

Dans cette section, nous avons analysé la sensibilité de la politique optimale et du profit optimal  $F^*$  par rapport aux paramètres non contrôlables (exogènes) au système étudié qui sont : le taux de demande  $\lambda$ , le taux de réapprovisionnement  $\mu$  et le taux de rappels  $\theta$ . La politique optimale est définie par l'ensemble des valeurs optimales, à savoir le niveau de sécurité optimal  $s^*$ , la valeur optimale du niveau maximal du stock  $S^*$ , et la seuil de demandes à arriérer optimal  $K^*$ . De plus, nous avons considéré les paramètres économiques (la récompense  $R_c$ , et les deux coûts liés à la politique demandes partiellement arriérées, donnés par le coût dû à l'attente d'une demande en orbite  $c_w$  et le coût de perte  $c_l$ ). Cette étude de sensibilité a plusieurs objectifs, à savoir :

1. Conclure sur le comportement de la politique optimale, le profit optimal vis à vis de :
  - la récompense attribuée au système  $R_c$ .
  - des paramètres du système ( $\lambda$ ,  $\theta$  et  $\mu$ ).
  - des coûts liés à la politique partiellement arriérées, qui sont le coût d'attente d'une demande en orbite  $c_w$  et le coût d'une perte de demande  $c_l$ , tout en variant les paramètres ( $\theta$  et  $\mu$ ) et ( $\lambda$  et  $\mu$ ) respectivement.
2. Évaluer la politique optimale issue de chaque variation soit des paramètres du système soit des paramètres économiques, en calculant à chaque fois la probabilité de disponibilité du stock (de non rupture) qui mesure la performance du niveau de service de l'entreprise .
3. Conclure sur l'importance des tailles des demandes  $n$ .

Dans toute l'application numérique, nous allons considérer les instances suivantes :  $I_s = [0 : n : 8]$ ,  $I_S = [18 : n : 26]$  et  $I_K = [5 : 5 : 40]$ . Les valeurs initiales des paramètres exogènes au système sont données par  $(\lambda, \theta, \mu) = (3, 2, 1)$ , les coûts liés à la politique de gestion de stocks sont donnés par  $(c_h, c_p, f) = (0.5, 0.1, 10)$  et les coûts liés à l'hypothèse des demandes partiellement arriérées sont

fixés  $(c_w, c_l) = (2, 5)$ .

### 3.5.1 Analyse de sensibilité des valeurs optimales par rapport à la récompense

Dans le Tableau 3.3, nous avons analysé la sensibilité des valeurs optimales (profit optimal  $F^*$  et politique optimale  $(s^*, S^*, K^*)$ ) quand on varie la valeur de la récompense  $R_c = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  pour deux différentes tailles des demandes  $n = \overline{1, 2}$ . Pour évaluer cette analyse de sensibilité, nous avons déduit à chaque variation de  $R_c$  la mesure du niveau de service  $\mathbb{P}_{ser}$  associée à chaque politique optimale obtenue.

		$R_c = 1$	$R_c = 2$	$R_c = 3$	$R_c = 4$	$R_c = 5$
$n = 1$	$F^*$	-4.0469	-1.0471	1.9528	4.9528	7.9528
	$(s^*, S^*, K^*)$	(1,18,25)	(1,18,30)	(1,18,35)	(1,18,40)	(1,18,40)
	$\mathbb{P}_{ser}$	0.867056	0.867041	0.867038	0.867037	0.867037
$n = 2$	$F^*$	-4.4701	-1.4785	1.5190	4.5182	7.5180
	$(s^*, S^*, K^*)$	(2,26,15)	(2,26,15)	(2,26,20)	(2,26,25)	(2,26,30)
	$\mathbb{P}_{ser}$	0.810112	0.810112	0.809563	0.809421	0.809386

Tableau 3.3 – L'effet de la variation de la récompense sur les valeurs optimales  $(s^*, S^*, K^*)$  et  $F^*$ , ainsi que le niveau de service  $\mathbb{P}_{ser}$  associé à chaque politique optimale pour  $n = \overline{1, 2}$ .

D'après les résultats du Tableau 3.3, on remarque que le profit optimal est une fonction croissante de la récompense. De plus, on constate que le seuil optimal des demandes à arriérer  $K^*$  croît, tant que la récompense  $R_c$  est plus grande, car si la récompense attribuée au système est assez importante, l'entreprise a tout intérêt à augmenter le seuil des demandes arriérées pour ne pas les perdre. Néanmoins, l'augmentation de la récompense n'a pas d'influence sur le stock maximal  $S^*$ , ni sur le niveau de sécurité optimal  $s^*$ , où pour  $R_c = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , l'entreprise n'a pas intérêt à augmenter son niveau du stock. Ces remarques restent les mêmes pour les deux tailles de demandes  $n = \overline{1, 2}$ .

Cependant, on remarque que par rapport à la taille de la demande, le profit optimal est plus intéressant pour  $n = 1$  que pour  $n = 2$ . De plus, on constate que le seuil maximal des demandes à arriérer  $K^*$  est plus important lorsque les demandes sont unitaires, car il est plus profitable pour l'entreprise d'arriérer des demandes unitaires qui ne nécessitent qu'une unité en stock. C'est pour cette même raison que la valeur optimale du stock maximal est  $S^*$  reste plus grande pour les demandes de taille deux, que pour les demandes unitaires.

D'après le même Tableau 3.3, on constate que le niveau de service  $\mathbb{P}_{ser}$  est très satisfaisant ( $\mathbb{P}_{ser} \geq 81\%$ ) pour les deux tailles des demandes  $n = \overline{1, 2}$ , et pour différentes valeurs de  $R_c$ . Cependant, l'effet de l'augmentation de la récompense  $R_c$  sur  $\mathbb{P}_{ser}$  n'est pas assez significatif (la différence est d'ordre  $10^{-5}$ ), c'est-à-dire l'augmentation de  $R_c$  n'influe pas sur la disponibilité du

stock où on voit que les deux valeurs liées au stock qui sont  $S^*$  et  $s^*$  gardent le même niveau. Par contre, on remarque clairement que le niveau de service est sensible à la taille des demandes et qu'il est plus intéressant pour les demandes sont unitaires. Par conséquent, on conclut que les demandes unitaires garantissent à l'entreprise un niveau de service plus élevé, indépendamment de la valeur de la récompense qui lui est attribuée.

### 3.5.2 Analyse de sensibilité des valeurs optimales par rapport au taux de demande et au taux de réapprovisionnement

Dans le Tableau 3.4, nous avons varié le taux de demandes  $\lambda = \{0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4\}$  pour deux valeurs du taux de réapprovisionnement  $\mu = \overline{1, 2}$ . Chaque exemple numérique est réalisé pour deux différentes tailles de demandes  $n = \overline{1, 2}$ . Dans ces exemples numériques, nous avons fixé la valeur du taux de rappel à  $\theta = 2$ . Pour mesurer la performance des politiques optimales  $(s^*, S^*, K^*)$ , nous avons calculé la mesure du niveau de service  $\mathbb{P}_{ser}$  pour chaque politique.

$n = 1$	$\lambda$	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$\mu = 1$	$F^*$	-2.3799	-0.1139	2.0481	4.1067	6.0622	7.9528	9.7416	11.4963
	$(s^*, S^*, K^*)$	(0,18,30)	(0,18,40)	(0,18,40)	(0,18,40)	(0,18,40)	(1,18,40)	(1,18,40)	(2,20,40)
	$\lambda_{serv}$	0.4861	0.9444	1.3750	1.7778	2.1528	2.6011	2.9354	3.4221
	$\lambda_p$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0005e-03	0.0043e-03	0.0278e-03	0.1236e-03
	$\mathbb{P}_{ser}$	0.972222	0.944444	0.916667	0.888889	0.861111	0.867037	0.838701	0.855537
$\mu = 2$	$F^*$	-2.4701	-0.2250	1.9854	4.1612	6.3023	8.4092	10.4821	12.5211
	$(s^*, S^*, K^*)$	(0,18,30)	(0,18,35)	(0,18,30)	(0,18,35)	(0,18,40)	(0,18,40)	(0,18,40)	(0,18,40)
	$\lambda_{serv}$	0.4931	0.9722	1.4375	1.8889	2.3264	2.7500	3.1597	3.5556
	$\lambda_p$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001e-07	0.0034e-07	0.0484e-07	0.4111e-07
	$\mathbb{P}_{ser}$	0.986111	0.972222	0.958333	0.944444	0.930556	0.916667	0.902778	0.888889
$n = 2$	$\lambda$	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$\mu = 1$	$F^*$	-0.5097	1.2736	2.8598	4.4374	6.0259	7.5180	8.8093	9.8678
	$(s^*, S^*, K^*)$	(0,18,30)	(0,18,30)	(0,20,30)	(0,24,35)	(0,26,35)	(2,26,30)	(2,26,30)	(2,26,25)
	$\lambda_{serv}$	0.4722	0.8889	1.2750	1.6667	2.0192	2.4282	2.6882	2.9048
	$\lambda_p$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0061
	$\mathbb{P}_{ser}$	0.944445	0.888889	0.850000	0.833333	0.807693	0.809386	0.768045	0.726212
$\mu = 2$	$F^*$	-0.5653	1.3001	3.0971	4.8527	6.6465	8.4817	10.3129	12.0952
	$(s^*, S^*, K^*)$	(0,18,30)	(0,18,30)	(0,18,30)	(0,20,35)	(0,22,40)	(0,26,40)	(0,26,40)	(0,26,40)
	$\lambda_{serv}$	0.4861	0.9444	1.3750	2.7500	2.2159	2.6538	3.0288	3.3846
	$\lambda_p$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001e-07	0.0002e-07	0.0048e-07	0.0720e-07	0.6381e-07
	$\mathbb{P}_{ser}$	0.972222	0.944444	0.916667	0.900000	0.886364	0.884615	0.865385	0.846154

Tableau 3.4 – L'effet de variation de  $\lambda$  et  $\mu$  sur le profit optimal  $F^*$  et la politique optimale  $(s^*, S^*, K^*)$ , ainsi que le niveau de service associé à chaque politique optimale pour  $n = \overline{1, 2}$ .

D'après le Tableau 3.4, on remarque que le profit optimal  $F^*$  est une fonction croissante par rapport au taux de demandes  $\lambda \forall \mu = \overline{1, 2}$  et pour  $n = \overline{1, 2}$ . Ce qui s'explique par le fait que le taux

de service  $\lambda_{serv}$  qui est croissant par rapport à  $\lambda$ . De plus, on remarque que le taux de perte  $\lambda_p$  est aussi une fonction croissante par rapport à  $\lambda$ , mais il reste tout de même négligeable (d'ordre  $10^{-5}$ ) par rapport au taux de service  $\lambda_{serv}$ . Néanmoins, relativement au taux de réapprovisionnement  $\mu$ , d'une part, on peut remarquer que lorsque le taux de demande est assez petit, un  $\mu = 2$  est moins profitable pour l'entreprise,  $\forall n = \overline{1, 2}$ , car un délai moyen de réapprovisionnement  $\frac{1}{\mu}$  court (c'est-à-dire un réapprovisionnement excessif) risque de conduire à un sur-stockage (des ressources oisives) pour l'entreprise ce qui mène à la diminution de son profit. D'autre part, quand le taux de demande est plus intéressant, un délai moyen de réapprovisionnement court (i.e.  $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{2}$ ) est plus profitable pour l'entreprise car ce denier joue un rôle important dans le service des demandes d'où l'augmentation du taux de service  $\lambda_{serv}$  ce qui engendre l'augmentation du profit optimal  $F^*$ .

Du même Tableau 3.4, on constate clairement que les demandes unitaires sont profitables lorsque le taux de demande est assez important (à partir de  $\lambda = 2.5$ ) lorsque le délai moyen de réapprovisionnement est long (i.e.  $\frac{1}{\mu} = 1$ ). Ce même constat est remarqué lorsque  $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{2}$ , à partir de  $\lambda = 3.5$ , ceci s'explique toujours par le fait que le taux de service des demandes primaires  $\lambda_{serv}$  est croissant par rapport à  $\lambda$  et  $\mu$ .

Toujours du même Tableau 3.4, on interprète le comportement de la politique optimale ( $s^*$ ,  $S^*$ ) par rapport aux deux paramètres  $\lambda$  et  $\mu$ , d'ailleurs on constate que le niveau optimal du stock maximal  $S^*$  et le niveau de stock de sécurité optimal  $s^*$  sont plus élevés, quand le taux de demandes  $\lambda$  plus grand, car dans ce cas les demandes exige nécessairement un stock plus élevé. Cependant, lorsque le taux de réapprovisionnement  $\mu$  est plus grand (i.e. lorsque le délai moyen  $\frac{1}{\mu}$  est plus court), les valeurs optimales  $S^*$  et  $s^*$  décroissent. Une interprétation logique pour cette dernière observation est que les livraisons sont plus fréquentes, donc l'entreprise n'a pas intérêt ni à sur-stocker, ni fixer un niveau de sécurité élevé. De plus, on remarque que les deux variables  $s^*$  et  $S^*$  sont plus sensibles aux variations des deux paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  dans le cas des demandes de taille deux ( $n = 2$ ), car ce type de demandes consomme plus d'articles en stock qui se rapproche du stock de sécurité. Aussi, on remarque que pour un délai moyen de réapprovisionnement court (i.e.  $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{2}$ ), le seuil maximal de demandes arriérées  $K^*$  est une fonction croissante par rapport au taux de demande  $\lambda$  et ce pour  $n = \overline{1, 2}$ , car dans ce cas les livraisons sont plus fréquentes, ce qui encourage l'arriération des demandes en orbite quelque soit leurs tailles. Or, lorsque le taux de réapprovisionnement  $\mu = 1$  (i.e. un délai moyen  $\frac{1}{\mu}$  est long),  $K^*$  décroît lorsque la taille des demandes passe de  $n = 1$  à  $n = 2$  et ce à partir de  $\lambda = 0.5$ , car les livraisons sont moins fréquentes, alors c'est plus intéressant d'arriérer des demandes unitaires qui nécessitent qu'une unité en stock, plutôt que d'arriérer des demandes de taille deux.

Du même Tableau 3.4, on constate que le niveau de service  $\mathbb{P}_{ser}$  reste assez satisfaisant dans tous les cas considérés ( $\mathbb{P}_{ser} \geq 73\%$ ). De plus, on peut voir que  $\mathbb{P}_{ser}$  diminue lorsque le taux de demandes  $\lambda$  augmente pour  $\mu = \overline{1, 2}$  et pour  $n = \overline{1, 2}$ . Ce résultat s'explique par le fait que lorsque  $\lambda$  est plus grand, la probabilité de rupture de stock (probabilité d'indisponibilité de stock)

$(\mathbb{P}_b = 1 - \mathbb{P}_{ser})$  augmente et par conséquent le niveau de service  $\mathbb{P}_{ser}$  diminue. De plus, le niveau de service  $\mathbb{P}_{ser}$  est une fonction croissante de  $\mu$ , car pour un délai moyen de réapprovisionnement  $\frac{1}{\mu}$  court, les livraisons sont plus fréquentes donc le stock est continuellement régénéré ce qui diminue la probabilité de blocage  $\mathbb{P}_b$ , c'est à dire augmente le niveau de service  $\mathbb{P}_{ser}$ . Enfin, une autre remarque intéressante est qu'un niveau de service plus satisfaisant est garanti encore une fois pour les demandes unitaires i.e.  $n = 1$ , car ces dernières ne nécessitent qu'une unité en stock, ce qui influe moins sur la disponibilité du stock qui représente la mesure du niveau de service.

En résumé, on conclut du Tableau 3.4, qu'un taux de demandes  $\lambda$  grand et qu'un délai moyen de réapprovisionnement  $\frac{1}{\mu}$  court garantissent un profit  $F^*$  plus intéressant et un niveau de service  $\mathbb{P}_{ser}$  plus satisfaisant pour les demandes unitaires.

### 3.5.3 Analyse de sensibilité des valeurs optimales par rapport au taux de rappels et au taux de réapprovisionnement

Dans le Tableau 3.5, nous avons étudié la sensibilité des valeurs optimales (le profit optimal et la politique optimale) en variant le taux de rappel  $\theta = \{0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4\}$  pour un taux de réapprovisionnement  $\mu = \overline{1, 2}$ , tout en fixant le taux de demande  $\lambda = 3$  pour les deux variantes de la taille de demandes  $n = 1$  et  $n = 2$ . De plus, nous avons calculé le niveau de service  $\mathbb{P}_{ser}$ , associé à chacune des politiques optimales  $(s^*, S^*, K^*)$ .

A partir du Tableau 3.5, on remarque que le profit optimal  $F^*$  est une fonction croissante par rapport au taux de rappels  $\theta \forall \mu$ , car lorsque le nombre de tentatives d'accéder au service  $\theta$  augmente, alors la probabilité qu'elles soient servies augmente et  $\theta_{ser}$  augmente à son tour. Or, on remarque que le taux de demandes primaires servies  $\lambda_{ser}$  est une fonction décroissante de  $\theta$ , pour  $\mu = \overline{1, 2}$  et  $n = \overline{1, 2}$ , car lorsque le nombre de rappels par unité de temps  $\theta$  augmente, la charge du système devient plus grande d'où les demandes primaires peuvent être bloquées suite au service des demandes qui rappellent ce qui diminue le taux de demandes primaires servies immédiatement  $\lambda_{ser}$ . Cependant, pour les valeurs de  $\theta$ ,  $\mu$  et  $n$  données dans ce tableau, le taux de service des demandes primaires est plus grand que le taux de rappels-servis ( $\lambda_{ser} > \theta_{ser}$ ), par conséquent le profit de l'entreprise augmente pour les deux tailles des demandes  $n = \overline{1, 2}$ . De plus, le profit optimal  $F^*$  est toujours une fonction croissante de  $\mu$ , et ce  $\forall \theta$  et pour les deux différentes taille de demandes  $n = \overline{1, 2}$  (même explication que le Tableau 3.4).

Du même Tableau 3.5, on constate d'une part, que lorsque le délai moyen de réapprovisionnement  $\frac{1}{\mu} = 1$  i.e. les livraisons sont moins fréquentes donc le stock est régénéré moins vite, alors les demandes unitaires ( $n = 1$ ) sont plus profitables et ce quelque soit le taux de rappel  $\theta$ . Ce dernier résultat est justifié par le fait que les demandes unitaires coûtent moins cher et consomment qu'une unité en stock. D'autre part, lorsque le délai moyen de réapprovisionnement

$n = 1$	$\theta$	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$\mu = 1$	$F^*$	6.8693	7.5159	7.7901	7.9528	8.0508	8.1198	8.1790	8.2234
	$(s^*, S^*, K^*)$	(3,18,20)	(2,18,40)	(1,18,40)	(1,18,40)	(1,18,40)	(0,18,40)	(0,18,40)	(0,18,40)
	$\theta_{ser}$	0.2626	0.3223	0.3994	0.3989	0.3986	0.5000	0.5000	0.5000
	$\lambda_{ser}$	2.7363	2.6777	2.6006	2.6011	2.6014	2.5000	2.5000	2.5000
	$\mathbb{P}_{ser}$	0.912103	0.892555	0.866859	0.867037	0.867132	0.833334	0.833334	0.833334
$\mu = 2$	$F^*$	7.7349	8.1038	8.3064	8.4092	8.4713	8.5128	8.5425	8.5648
	$(s^*, S^*, K^*)$	(1,18,40)	(0,18,40)	(0,18,40)	(0,18,40)	(0,18,40)	(0,18,40)	(0,18,40)	(0,18,40)
	$\theta_{ser}$	0.1600	0.2500	0.2500	0.2500	0.2500	0.2500	0.2500	0.2500
	$\lambda_{ser}$	2.8400	2.7500	2.7500	2.7500	2.7500	2.7500	2.7500	2.7500
	$\mathbb{P}_{ser}$	0.946656	0.916667	0.916667	0.916667	0.916667	0.916667	0.916667	0.916667
$n = 2$	$\theta$	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$\mu = 1$	$F^*$	5.7801	6.8289	7.2770	7.5180	7.6620	7.7725	7.8560	7.9186
	$(s^*, S^*, K^*)$	(6,26,10)	(4,26,20)	(2,26,30)	(2,26,30)	(2,26,30)	(0,26,35)	(0,26,35)	(0,26,40)
	$\theta_{ser}$	0.3739	0.4813	0.5733	0.5717	0.5707	0.6923	0.6923	0.6923
	$\lambda_{ser}$	2.5941	2.5166	2.4266	2.4282	2.4291	2.3077	2.3077	2.3077
	$\mathbb{P}_{ser}$	0.864685	0.838861	0.808864	0.809386	0.809711	0.769234	0.769234	0.769231
$\mu = 2$	$F^*$	7.5722	8.0809	8.3417	8.4817	8.5665	8.6234	8.6659	8.6989
	$(s^*, S^*, K^*)$	(6,26,40)	(2,26,40)	(0,26,40)	(0,26,40)	(0,26,40)	(0,26,40)	(0,24,40)	(0,24,40)
	$\theta_{ser}$	0.1003	0.2272	0.3462	0.3462	0.3462	0.3750	0.3750	0.3750
	$\lambda_{ser}$	2.8997	2.7728	2.6538	2.6538	2.6538	2.6250	2.6250	2.6250
	$\mathbb{P}_{ser}$	0.966553	0.924253	0.884615	0.884615	0.884615	0.884615	0.875000	0.875000

Tableau 3.5 – L'effet de variation de  $\theta$  et  $\mu$  sur le profit optimal  $F^*$  et la politique optimale  $(s^*, S^*, K^*)$ , ainsi que le niveau de service associé à chaque politique optimale pour  $n = 1, 2$ .

( $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{2}$ ), c'est plutôt les demandes lots qui sont plus profitables à partir de  $\theta = 1.5$  car dans ce cas il y'a une forte demande depuis l'orbite en plus les livraisons sont fréquentes pour réapprovisionner le stock, donc c'est plus profitable de servir des demandes lots pour éviter un sur-stockage.

Relativement à la politique optimale  $(s^*, S^*, K^*)$ , on constate que quand  $\theta$  croît, le stock de sécurité optimal  $s^*$  décroît, pour  $\mu = \overline{1,2}$  et  $n = \overline{1,2}$ . Cependant, quand  $\frac{1}{\mu}$  est plus court,  $s^*$  décroît plus rapidement indépendamment de la taille des demandes  $n = \overline{1,2}$ , car quand les livraisons sont plus fréquentes, l'entreprise n'est pas contrainte à fixer un  $s^*$  haut. Par contre, la valeur optimale du stock maximal  $S^*$  reste insensible par rapport à  $\theta$  et  $\mu$ , en effet elle prend la valeur  $S^* = 18$  pour les demandes unitaires et la valeur  $S^* = 26$  pour les demandes de taille deux et ce  $\forall \theta$  et pour  $\mu = \overline{1,2}$ . De plus, on constate que les valeurs du niveau de stock de sécurité optimal  $s^*$  et du niveau de stock maximal  $S^*$  restent plus hauts quand les demandes sont de taille deux (même remarque que celle donnée dans le Tableau 3.4). Ce dernier résultat est logique car pour éviter la rupture de stock dû à l'arrivée des demandes lots de taille deux ( $n = 2$ ), il vaut mieux fixer les valeurs de  $s^*$  et  $S^*$  plus grandes.

Enfin, on remarque que l'augmentation du taux de rappel  $\theta$  incite l'entreprise à fixer un seuil d'arriération des demandes en orbite  $K^*$  plus grand dû à la croissance du taux de rappels-servis  $\theta_{ser}$  en fonction de  $\theta$ , donc pour que l'entreprise garantisse un niveau un taux rappels servis plus grand, elle a tendance à arriérer plus de demandes en orbite. Toutefois, un délai moyen de réapprovisionnement  $\frac{1}{\mu}$  plus court, i.e. des réapprovisionnements rapprochés encourage l'entreprise à augmenter  $K^*$ , en conséquence du service rapide des demandes primaires  $\lambda_{ser}$ . Par conséquent, augmenter sa capacité de l'orbite ne fait que lui procurer plus de clientèle pour la servir ultérieurement. En plus, le seuil  $K^*$  est plus grand pour les demandes unitaires, que pour les demandes lots de taille deux, spécialement lorsque le délai moyen de réapprovisionnement  $\frac{1}{\mu}$  est plus long. Dans ce cas, les livraisons sont moins fréquentes, alors l'entreprise a intérêt à arriérer les demandes unitaires qui ne réclament qu'une unité du stock. Par contre, ce résultat n'est pas observé lorsque  $\frac{1}{\mu}$  est plus court, quand le seuil maximal des demandes à arriérer  $K^*$  reste indifférent par rapport aux deux tailles de demandes  $n = \overline{1,2}$ , ceci est dû au fait que les livraisons sont plus fréquentes, par conséquent le niveau de stock reste assez élevé et arriérer des demandes lots, ou bien des demandes unitaires n'influe pas sur le choix du seuil  $K^*$  fixé par l'entreprise.

Du même Tableau 3.5, on constate que le niveau de service  $\mathbb{P}_{ser}$  est satisfaisant dans tout les cas numériques considérés ( $\mathbb{P}_{ser} \geq 77\%$ ). De plus, on peut observer que  $\mathbb{P}_{ser}$  est une fonction décroissante par rapport au taux de rappels  $\theta$ , car lorsque le nombre de tentatives d'accéder au service (rappels) devient plus grand, la probabilité de service des demandes rappelant augmente et par conséquent le stock va chuté beaucoup plus rapidement (i.e. la probabilité de disponibilité du stock  $\mathbb{P}_{ser}$  diminue). De plus, on peut voir que le niveau de service observé pour un délai moyen de réapprovisionnement plus court ( i.e.  $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{2}$ ) est plus satisfaisant que quand ce dernier est plus

long ( i.e.  $\frac{1}{\mu} = 1$ ), et ce quelque soit le taux de rappel  $\theta$ , et pour les deux variantes de taille de demandes  $n = \overline{1, 2}$ , (l'interprétation reste la même que celle donnée dans le Tableau 3.4).

Enfin, on constate que le niveau de service  $\mathbb{P}_{ser}$  est toujours plus satisfaisant pour les demandes unitaires  $\forall \theta$  et pour  $\frac{1}{\mu} = 1$  ( c'est-à-dire pour un délai moyen de réapprovisionnement plus long), car c'est mieux que c'est les demandes unitaires qui seront servies car elles consomment moins en stock. Néanmoins, lorsque le délai moyen de réapprovisionnement est plus court (i.e.  $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{2}$ ), les demandes unitaires garantissent encore une fois un niveau de service plus satisfaisant quand le taux de rappels est assez grand  $\theta \geq 1.5$ . Ce dernier résultat est dû au fait que lorsque  $\theta$  augmente la probabilité de disponibilité du stock (le niveau de service  $\mathbb{P}_{ser}$ ) a tendance à décroître. Par conséquent, l'entreprise a intérêt à mettre en avant les demandes unitaires pour garantir un niveau de service plus satisfaisant.

Pour conclure, on va dire qu'un taux de rappels  $\theta$  plus élevé et un délai moyen de réapprovisionnement plus court  $\frac{1}{\mu}$  se traduisent par un profit plus important pour les demandes unitaires pour une valeur réduite du niveau des stocks ( $S^*$  et  $s^*$ ) et une valeur plus intéressante du seuil des demandes arriérées  $K^*$ . Là encore, un meilleur niveau de service est garanti pour les demandes unitaires, en particulier lorsque le réapprovisionnement moyen  $\frac{1}{\mu}$  est plus court et pour un taux de demandes provenant de l'orbite moins important  $\theta$ .

### 3.5.4 Analyse de sensibilité des valeurs optimales par rapport au coût de perte et au taux de demandes

En premier lieu, nous avons étudié l'effet de variation du coût de perte  $c_l \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  sur les valeurs optimales  $F^*$ ,  $s^*$ ,  $S^*$  et  $K^*$ , tout en fixant le coût d'attente d'une demande en orbite  $c_w = 2$  et les autres coûts prennent les mêmes valeurs que celles données dans toute l'application précédente. De plus, deux taux de réapprovisionnement  $\mu = \overline{1, 2}$  sont considérés, et pour chaque valeur de  $\mu$ , on considère trois taux de demandes différents  $\lambda = \{1.5, 3, 4.5\}$ , avec le taux de rappel  $\theta = 2$ . De plus, cette étude on l'a réalisée pour les deux variantes de tailles de demande  $n = 1$  et  $n = 2$  (voir le Tableau 3.6).

D'après le Tableau 3.6, on constate que le profit optimal  $F^*$  est peu sensible par rapport à la variation du coût dû à une demande perdue  $c_l \forall \lambda, \mu = \overline{1, 2}$  et pour  $n = \overline{1, 2}$ . D'une part, on peut voir clairement que pour un taux de demande petit  $\lambda = 1.5$ ,  $F^*$  reste assez stable (i.e. il y'a une décroissance négligeable) lorsque  $c_l$  augmente pour  $\mu = \overline{1, 2}$  et pour  $n = \overline{1, 2}$ . D'autre part, lorsque le taux de demande  $\lambda = \{3, 4.5\}$  et le délai moyen de réapprovisionnement  $\frac{1}{\mu} = 1$ , on constate que  $F^*$  décroît plus considérablement car le taux de demandes est important mais les livraisons sont moins fréquentes donc le service n'est pas rapide. En plus, on a déjà constaté d'après le Tableau 4.2 que le taux de perte est plus considérable au delà de  $\lambda = 2.5$  et  $\mu = 1$ , et ce pour  $n = \overline{1, 2}$ .

$n = 1$	$(c_w, c_l)$	(2,0)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
$\mu = 1$	$\lambda = 1.5$	2.0481 (0,18,25)	2.0481 (0,18,25)	2.0481 (0,18,40)	2.0481 (0,18,40)	2.0481 (0,18,40)	2.0481 (0,18,40)
	$\lambda = 3$	7.9550 (1,18,15)	7.9531 (1,18,25)	7.9529 (1,18,30)	7.9528 (1,18,35)	7.9528 (1,18,40)	7.9528 (1,18,40)
	$\lambda = 4.5$	13.2697 (2,22,20)	13.2597 (2,22,25)	13.2572 (2,22,35)	13.2567 (2,22,40)	13.2564 (2,22,40)	13.2562 (2,22,40)
$\mu = 2$	$\lambda = 1.5$	1.9854 (0,18,30)	1.9854 (0,18,30)	1.9854 (0,18,30)	1.9854 (0,18,30)	1.9854 (0,18,40)	1.9854 (0,18,40)
	$\lambda = 3$	8.4092 (0,18,40)	8.4092 (0,18,40)	8.4092 (0,18,40)	8.4092 (0,18,40)	8.4092 (0,18,40)	8.4092 (0,18,40)
	$\lambda = 4.5$	14.5259 (0,18,40)	14.5259 (0,18,40)	14.5259 (0,18,40)	14.5259 (0,18,40)	14.5259 (0,18,40)	14.5259 (0,18,40)
$n = 2$	$(c_w, c_l)$	(2,0)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
$\mu = 1$	$\lambda = 1.5$	2.8613 (0,20,10)	2.8599 (0,20,15)	2.8598 (0,20,15)	2.8598 (0,20,20)	2.8598 (0,20,25)	2.8598 (0,20,30)
	$\lambda = 3$	7.5621 (2,26,10)	7.5299 (2,26,15)	7.5215 (2,26,15)	7.5190 (2,26,20)	7.5182 (2,26,25)	7.5180 (2,26,30)
	$\lambda = 4.5$	11.3568 (2,26,15)	11.0057 (2,26,10)	10.8178 (2,26,15)	10.7329 (2,26,15)	10.6865 (2,26,20)	10.6597 (2,26,25)
$\mu = 2$	$\lambda = 1.5$	3.0971 (0,18,20)	3.0971 (0,18,30)	3.0971 (0,18,30)	3.0971 (0,18,30)	3.0971 (0,18,30)	3.0971 (0,18,30)
	$\lambda = 3$	8.4817 (0,26,30)	8.4817 (0,26,40)	8.4817 (0,26,40)	8.4817 (0,26,40)	8.4817 (0,26,40)	8.4817 (0,26,40)
	$\lambda = 4.5$	13.8267 (0,26,30)	13.8267 (2,26,10)	13.8267 (2,26,15)	13.8267 (2,26,15)	13.8267 (2,26,20)	13.8267 (2,26,25)

Tableau 3.6 – L'effet de de variation du coût de perte  $c_l$ , pour  $\lambda = \{1.5, 3, 4.5\}$  et  $\mu = \overline{1, 2}$ , sur les valeurs optimales pour  $n = 1, 2$ .

Du même Tableau 3.6, on remarque que les demandes unitaires sont plus profitables lorsque le taux de demande  $\lambda = \overline{3, 4.5}$ , quand  $\mu = 1$ . Or, lorsque  $\mu = 2$ , cette remarque n'est observée que pour  $\lambda = 4.5$ , ce qui peut être justifié par rapport au taux de service  $\lambda_{ser}$  acquis par le service des demandes unitaires qui est généralement plus important  $\forall \lambda$ , et  $\forall \mu$  (voir le tableau 3.4), et qui prend ces plus grandes valeurs lorsque le taux de demande  $\lambda$  est plus important, et le délai moyen de réapprovisionnement  $\frac{1}{\mu}$  est plus petit.

En plus, d'après le Tableau 3.6, on analysant l'effet de variation de  $c_l$  par rapport à la politique optimale  $(s^*, S^*, K^*)$ , pour  $\lambda = \overline{1.5, 3, 4.5}$ ,  $\mu = \overline{1, 2}$  et  $n = \overline{1, 2}$ . D'abord, on constate que les valeurs optimales  $s^*$  et  $S^*$  sont peu sensibles par rapport à  $c_l$ , mais plus sensible par rapport à  $\lambda$  et  $\mu$  (ce dernier résultat est déjà interprété dans le Tableau. 3.4). Ensuite, on constate aussi que les valeurs de  $s^*$  et  $S^*$  sont plus grandes pour les demandes de taille deux que pour les demandes unitaires. En plus, on remarque que le seuil de demandes à arriérer  $K^*$  est croissant lorsque  $c_l$  augmente, et plus particulièrement quand le taux de demandes  $\lambda$  et le délai moyen de réapprovisionnement  $\frac{1}{\mu}$  sont plus grands. Ceci peut être interprété par le fait que un taux de demandes important et des livraisons moins fréquentes engendrent un taux de perte  $\lambda_p$  plus considérable, donc l'entreprise va tenter de réduire les pertes en augmentant le seuil de demandes à arriérer en mettant en avant les demandes unitaires car celles-ci sont moins coûteuses.

### 3.5.5 Analyse de sensibilité des valeurs optimales par rapport au coût d'attente en orbite et au taux de rappels

Dans cette partie, nous avons étudié l'effet de variation du coût d'attente d'une demande en orbite  $c_w \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  sur les valeurs optimales  $F^*$ ,  $s^*$ ,  $S^*$  et  $K^*$ . De plus, nous avons varié le taux de rappels  $\theta = \overline{2, 5, 10}$  pour un taux de réapprovisionnement  $\mu = \overline{1, 2}$  et  $\lambda = 3$ . Cependant, nous avons fixé le coût de perte  $c_l = 5$  ainsi que les autres coûts liés à la politique de gestion de stocks considérée  $(c_h, c_p, f, R_c) = (0.5, 0.1, 10, 5)$ . Cette étude est également réalisée pour deux variantes de taille de demandes  $n = \overline{1, 2}$  (voir le Tableau 3.7).

D'après les résultats du Tableau 3.7, on remarque que le profit optimal  $F^*$  est une fonction décroissante du coût d'attente d'une demande en orbite  $c_w$ ,  $\forall \theta = \overline{2, 5, 10}$  et  $\forall \mu = \overline{1, 2}$  ainsi que pour les deux tailles de demandes  $n = \overline{1, 2}$ . Néanmoins, l'effet de l'augmentation de  $c_w$ , sur le profit optimal  $F^*$  apparaît moins lorsque  $\theta$  est plus grand, car dû au rappels successifs des demandes en orbite (i.e des inter-rappels qui se rapprochent), le taux de rappels-servis  $\theta_{ser}$  augmente, par conséquent le nombre moyen de demandes en orbite  $\overline{M}(P_{orbit})$  va chuter, d'où malgré que le coût d'attente  $c_w$  augmente, le coût moyen d'attente des demandes orbite  $c_w \overline{M}(P_{orbit})$ , n'est pas si important, ce qui influe moins sur le profit.

Du même Tableau 3.7, on constate une différence dans l'effet de variation du taux de

$n = 1$	$(c_w, c_l)$	(0,5)	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)
$\mu = 1$	$\theta = 2$	9.4319 (0,18,40)	8.6725 (0,18,40)	7.9528 (1,18,40)	7.4103 (2,18,25)	6.9799 (3,18,15)	6.6338 (4,19,10)
	$\theta = 5$	9.4948 (0,18,40)	8.8902 (0,18,40)	8.2856 (0,18,40)	7.7649 (1,18,35)	7.3573 (2,18,20)	7.0180 (3,18,15)
	$\theta = 10$	9.5174 (0,18,40)	8.9638 (0,18,40)	8.4102 (0,18,40)	7.9044 (1,18,35)	7.5011 (2,18,25)	7.1584 (3,18,15)
$\mu = 2$	$\theta = 2$	8.9098 (0,18,40)	8.6595 (0,18,40)	8.4092 (0,18,40)	8.1590 (0,18,40)	7.9713 (1,18,40)	7.8122 (1,18,35)
	$\theta = 5$	8.9461 (0,18,40)	8.7710 (0,18,40)	8.5960 (0,18,40)	8.4209 (0,18,40)	8.2459 (0,18,40)	8.0739 (1,18,40)
	$\theta = 10$	8.9585 (0,18,40)	8.8084 (0,18,40)	8.6584 (0,18,40)	8.5084 (0,18,40)	8.3584 (0,18,40)	8.2083 (0,18,40)
$n = 1$	$(c_w, c_l)$	(0,5)	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)
$\mu = 1$	$\theta = 2$	9.7004 (0,22,40)	8.6583 (0,26,40)	7.5180 (2,26,30)	6.6644 (4,26,15)	5.9622 (6,26,10)	5.5178 (6,26,5)
	$\theta = 5$	9.7634 (0,22,40)	8.8646 (0,26,40)	8.0061 (0,26,40)	7.2384 (2,26,20)	6.5986 (4,26,10)	6.0650 (4,26,10)
	$\theta = 10$	9.7898 (0,22,40)	8.9650 (0,26,40)	8.1809 (0,26,40)	7.4430 (2,26,20)	6.8147 (4,26,15)	6.3248 (4,26,10)
$\mu = 2$	$\theta = 2$	9.2396 (0,22,40)	8.8480 (0,24,40)	8.4817 (0,26,40)	8.1330 (0,26,40)	7.8887 (2,26,30)	7.6608 (2,26,20)
	$\theta = 5$	9.2856 (0,22,40)	9.0089 (0,24,40)	8.7454 (0,24,40)	8.4947 (0,26,40)	8.2518 (0,26,40)	8.0332 (2,26,30)
	$\theta = 10$	9.3038 (0,22,40)	9.0642 (0,24,40)	8.8385 (0,24,40)	8.6157 (0,26,40)	8.4076 (0,26,40)	8.1996 (2,26,35)

Tableau 3.7 – L'effet de variation du coût d'attente en orbite  $c_w$ , pour  $\theta = \{2, 5, 10\}$  et  $\mu = \overline{1, 2}$  sur les valeurs optimales pour  $n = \overline{1, 2}$ .

réapprovisionnement  $\mu$  sur le profit  $F^*$  pour les deux différentes tailles des demandes  $n = \overline{1, 2}$ . En effet, lorsque le coût est nul ( $c_w = 0$ ), alors le  $\mu = 1$  est plus profitable que  $\mu = 2$ ,  $\forall n = \overline{1, 2}$ , car dans ce cas le coût moyen d'attente des demandes en orbite est négligeable ce qui n'influe pas sur le profit. Or, quand  $c_w \geq 2$ , c'est le taux de réapprovisionnement  $\mu = 2$  qui devient plus profitable pour les demandes unitaires, où on constate une variation dans la politique optimale à partir de  $c_w = 2$ , en effet le niveau de stock de sécurité  $s^*$  ainsi que le stock maximal  $S^*$  augmentent, et le seuil de demandes à arriérées  $K^*$  diminue. Ces décisions sont opérationnelles pour éviter une attente trop longue pour les demandes en orbite spécialement lorsque le coût d'attente est élevé. Ce constat reste valable pour les demandes de taille deux, mais pour un coût  $c_w \geq 1$ .

En revanche, on constate que le stock maximal  $S^*$  ainsi que le stock de sécurité  $s^*$  restent plus hauts pour les demandes lots de taille deux ( $n = 2$ ), et ce  $\forall \theta$  et  $\mu = \overline{1, 2}$ , car les demandes de taille deux consomment plus en stock. De plus, on remarque aussi que le seuil maximal de demandes arriérées  $K^*$  est une fonction décroissante de  $c_w$  pour  $n = \overline{1, 2}$ ,  $\forall \theta$  et  $\forall \mu$ , mais la valeur de  $K^*$  reste plus grande pour les demandes unitaires que pour les demandes de taille deux, car les demandes unitaires sont mieux gérées par l'entreprise à cause de leurs tailles, ce qui l'incite à les mettre en attente pour les servir ultérieurement.

En résumé, on conclut à partir des deux Tableaux 4.4 et 3.7 que les deux coûts liés à l'hypothèse partiellement arriérées, à savoir le coût de perte d'une demande  $c_l$  et le coût d'attente d'une demande en orbite  $c_w$  diminuent le profit de l'entreprise car se sont des charges à prendre en considération. De plus, on peut aussi conclure que l'augmentation de ces coûts incite l'entreprise à augmenter le niveau des deux stocks (maximal et stock de sécurité), mais l'augmentation de  $c_l$  encourage l'entreprise à augmenter son seuil de demandes arriérées (et inversement lorsqu'on augmente  $c_w$ ). Néanmoins, les coûts considérés dans cette étude ( $c_l$  et  $c_w$  resp.) sont liés par rapport aux paramètres du système ( $\lambda$  et  $\theta$  resp.), en effet la variation de chacun des paramètres joue un rôle dans le choix de la politique optimale.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons utilisé l'outil des RdPSG dans le but de modéliser un système de gestion de stocks de type  $(s, Q)$  avec rappels classiques et demandes partiellement arriérées. Dans le cas où le temps d'inter-rappels dépend du nombre de demandes en orbite. Après modélisation, nous avons analysé le modèle établi en se basant sur la propriété d'isomorphisme entre les RdPSG et les CMTG, qui nous a permis de conclure le processus stochastique décrivant le système étudié. Ensuite, nous avons calculé la distribution stationnaire du modèle avec rappels classiques suivant une approche récursive, et nous avons dégagé les mesures de performance du système étudié.

Enfin, nous avons proposé un problème d'optimisation d'une fonction dite récompense-coûts, qui est un compromis entre la récompense attribuée au système dû au service des clients et les différents coûts encourus. Pour sa résolution, nous avons établi une approche qui a été appliquée à notre modèle de gestion de stocks avec rappels classiques. Pour illustrer cette approche, nous avons fait une analyse de sensibilité du profit optimal et de la politique optimale en fonction des paramètres du système et de quelques paramètres économiques.

Dans le chapitre suivant, nous allons modéliser et analyser à l'aide du même formalisme RdPSG le système de gestion de stocks déjà étudié dans ce chapitre, mais en considérant que les inter-rappels ne dépendent pas du nombre de demandes en orbite qui se définit dans la littérature par "*la politique de rappels constants*". Pour ce même système, nous allons faire une analyse stochastique permettant de retrouver l'expression de la distribution stationnaire, pour dériver ensuite les diverses mesures de performance de ce système. Enfin, nous allons réadapter la formulation du problème d'optimisation de la fonction récompense-coûts du modèle avec rappels classiques au modèle avec rappels constants. Ainsi, nous allons étudier numériquement l'optimalité de cette fonction en fonction des paramètres du système.

# Chapitre 4

## Modélisation et Analyse d'un système de gestion de stocks de type (s,Q) avec rappels constants : Approche par les RdPSG

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Modélisation du système de gestion de stocks avec rappels constants via les RdPSG . . . . .</b>	<b>82</b>
4.1.1	Modèle RdPSG . . . . .	82
<b>4.2</b>	<b>Analyse stochastique du modèle RdPSG établi avec rappels constants</b>	<b>84</b>
4.2.1	Processus stochastique associé au RdPSG . . . . .	84
4.2.2	Distribution stationnaire du modèle établi . . . . .	87
<b>4.3</b>	<b>Mesures de performances du système étudié . . . . .</b>	<b>90</b>
<b>4.4</b>	<b>Système de gestion de stocks avec demandes perdues . . . . .</b>	<b>93</b>
<b>4.5</b>	<b>Analyse de la fonction récompense-coûts associé au système étudié .</b>	<b>96</b>
<b>4.6</b>	<b>Étude de sensibilité du profit optimal et de la politique optimale . .</b>	<b>97</b>
4.6.1	Analyse de sensibilité des valeurs optimales par rapport à la récompense	97
4.6.2	Analyse de sensibilité des valeurs optimales par rapport au taux de demandes et au taux de réapprovisionnement . . . . .	99
4.6.3	Analyse de sensibilité des valeurs optimales par rapport au taux de rappels et au taux de réapprovisionnement . . . . .	100
4.6.4	Analyse de sensibilité des valeurs par rapport au coût de perte et au taux de demandes . . . . .	101
4.6.5	Analyse de sensibilité des valeurs optimales par rapport au coût d'attente d'une demande en orbite et au taux de rappels . . . . .	103

---

---

## Introduction

Lors de la rupture de stocks, les clients qui arrivent au système ne sont pas servis instantanément et attendent le prochain cycle de réapprovisionnement pour tenter de joindre le serveur. Dans ce cas, l'entreprise peut gérer les clients en attente (en orbite) en contrôlant les instants de leurs rappels, où un seul client dans l'orbite tente de joindre la zone de service *First Come First Served* (FCFS), indépendamment du nombre de clients présents dans l'orbite. Par conséquent, la probabilité qu'un seul client rappelle dans un intervalle  $(t, t + dt)$  est donnée par  $(\theta dt + o(dt))$ . Cette politique dite *politique de rappels constants* a été initialement introduite par Fayolle dans [41] pour définir le protocole de rappels dans une file d'attente  $M/M/1$ , où seulement le client en tête de la file en orbite peut accéder au serveur. Pour voir des applications de cette politique dans des situations réelles voir [40].

Depuis plusieurs années, cette politique de rappels est répandue dans plusieurs domaines et théories. Par exemple, dans la théorie des files d'attentes, Artalejo a analysé dans [7] une file d'attente  $M/G/1$  avec rappels constants et vacances du serveur. Cependant, dans la théorie des systèmes de gestion de stocks avec rappels, la politique de rappels constants est largement appliquée car elle facilite l'analyse mathématique du système étudié, où on peut trouver plusieurs travaux considérant cette politique de rappels, voir [101, 100, 4, 5, 58] pour les systèmes de gestion de stocks avec temps de service nul, et voir [59, 66] pour ceux avec temps de service positif.

Dans ce chapitre, nous allons modéliser et analyser à l'aide du formalisme des RdPSG un système de gestion de stocks sous les mêmes hypothèses que celles posées dans le chapitre précédent (sous-section 3.2.1), mais avec la politique de rappels constants. Pour ce système, nous allons faire une analyse stochastique permettant de retrouver l'expression de la distribution stationnaire, pour dériver ensuite plusieurs indices de performance de ce système. Pour une gestion optimale de stock, la fonction récompense-coûts engendrée par ce modèle, sous contraintes aux hypothèses du système étudié sera formulée tel un problème d'optimisation à maximiser. Pour sa résolution, nous allons faire appel à la même approche de résolution établie pour le système de gestion de stocks avec rappels classiques. Pour une application numérique, nous allons faire une analyse de sensibilité de la politique optimale et du profit optimal en fonction des paramètres exogènes au système et de quelques paramètres économiques. Une partie de ce travail a été présentée dans une conférence internationale (voir [18]).

---

## 4.1 Modélisation du système de gestion de stocks avec rappels constants via les RdPSG

Dans cette section, nous avons étudié le même système de gestion de stocks décrit dans le chapitre 3 (sous section 3.2.1), tout en considérant des rappels constants. Cependant, on suppose qu'un seul client dans l'orbite tente de joindre la zone de service. Cette hypothèse signifie que dans un intervalle  $(t, t + dt)$ , la probabilité qu'une demande en orbite tente de rappeler est donnée par  $(\theta dt + o(dt))$ .

La description du système de gestion de stocks de type  $(s, Q)$  avec rappels constants et demandes partiellement arriérées est donné dans le schéma représenté dans la Figure 4.1 :

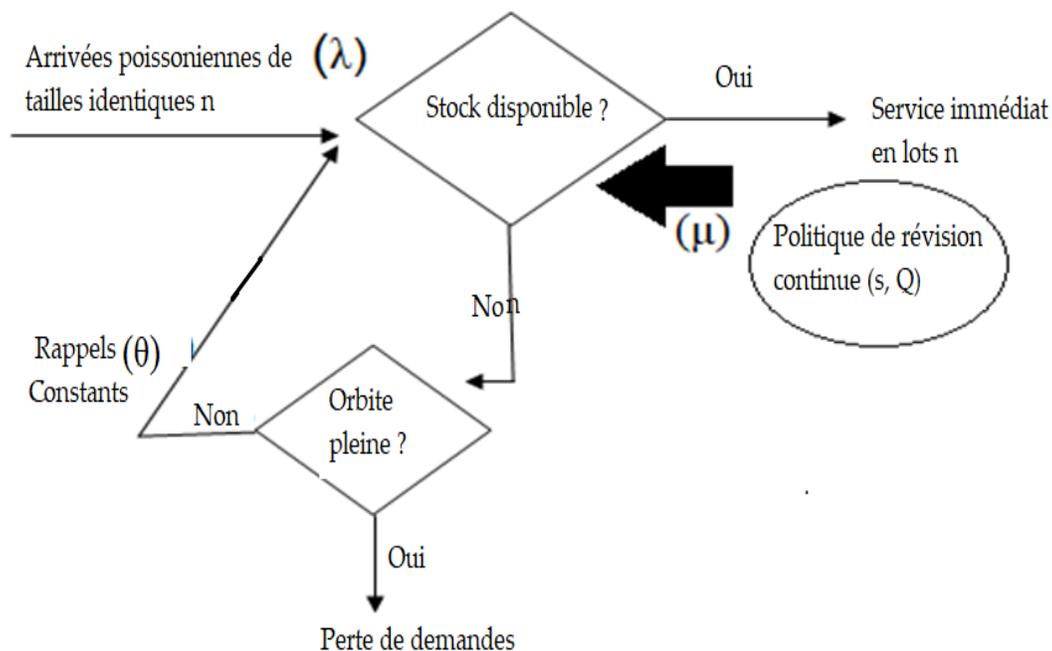
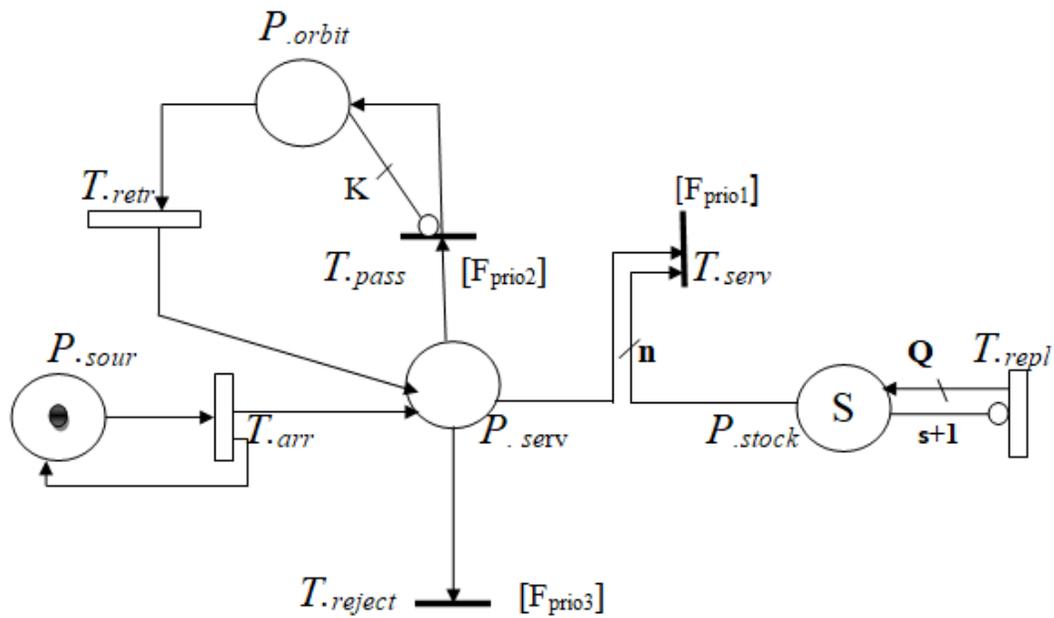


FIGURE 4.1 – Le schéma du système de gestion de stocks avec rappels constants et demandes partiellement arriérées.

### 4.1.1 Modèle RdPSG

Le RdPSG modélisant le système de gestion de stocks  $(s, Q)$  avec rappels constants décrit dans la Figure 4.1 est illustré dans la Figure 4.2.

Le modèle RdPSG, on représente les mêmes conditions et les mêmes événements déjà définis dans le cas du système de gestion de stocks avec rappels classiques. Ces conditions et ces événements sont représentées respectivement par les places et les transitions qui sont déjà interprétés(es) dans le Tableau. 3.1 resp. le Tableau. 3.2. De plus, la dynamique du modèle RdPSG donné en Figure



Fonctions guards	condition
$[F_{prio1}]$	If $(M(P.serv) \neq 0) \ \& \ (M(P.stock) \geq n)$ .
$[F_{prio2}]$	If $(M(P.serv) \neq 0) \ \& \ (M(P.stock) = 0)$ .
$[F_{prio3}]$	If $(M(P.serv) \neq 0) \ \& \ (M(P.stock) = 0) \ \& \ (M(P.orbit) = K)$ .

FIGURE 4.2 – Le modèle RdPSG associé au système de gestion de stocks avec rappels constants.

4.2 est similaire à celle du modèle RdPSG avec rappels classiques donné en Figure 3.2. Par contre, dans le cas de la politique de rappels constants, la transition  $T_{repl}$  qui modélise le rappel d'une demande en orbite n'est pas précédée par le signe #, ce qui signifie que le taux de franchissement de cette transition est indépendant du marquage de la place  $P_{orbit}$ . La politique de service de cette transition est une politique mono-serveur, i.e. cette transition est franchie une seule fois avec une durée de franchissement exponentiellement distribué avec un taux  $\theta$ .

## 4.2 Analyse stochastique du modèle RdPSG établi avec rappels constants

### 4.2.1 Processus stochastique associé au RdPSG

Le processus stochastique associé au RdPSG donné dans la Figure 4.2 est obtenu en suivant les étapes détaillées ci-après :

- D'abord, nous avons généré le graphe de marquages accessibles (marquages tangibles et marquages évanescents) du modèle RdPSG pour les valeurs suivantes  $S = 6$ ,  $s = 2$ ,  $n = 2$ , et  $K = 2$ . On aboutit au graphe de marquages donné dans la Figure 3.3.
- Ensuite, nous avons réduit le graphe de marquages accessibles (Figure 3.3), en éliminant les marquages évanescents issus de transitions immédiates (rectangles discontinus). Ce graphe réduit est donné dans la Figure 4.3.
- Enfin, nous avons généralisé pour des valeurs des paramètres du système quelconques  $S, s, n \in \mathbb{N}$

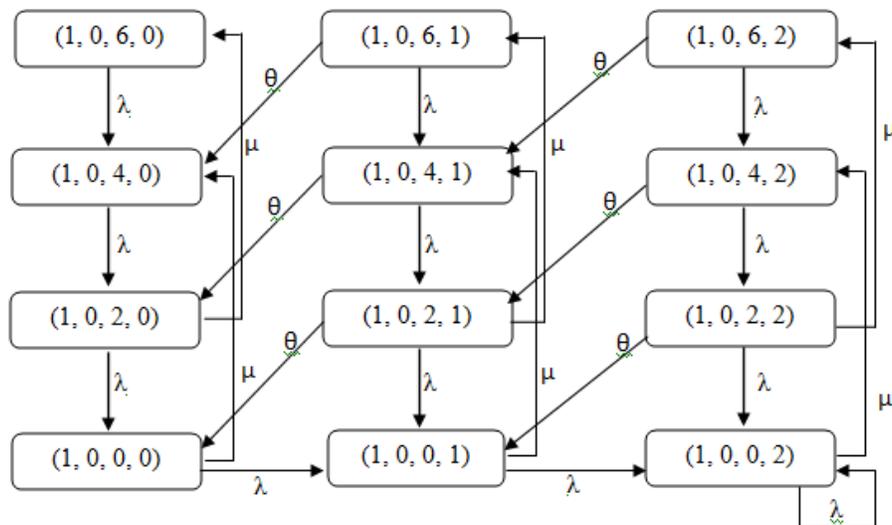


FIGURE 4.3 – Le graphe de marquages réduit pour  $(S, s, n, K) = (6, 2, 2, 2)$ .

et  $K \in \mathbb{N}^*$ , nous avons obtenu le graphe d'accessibilité du RdPSG. Ensuite par éliminations des



Avec :

$$P_{\infty}(l, m) = \begin{cases} A_0, & \text{si } m = l = 0; \\ A_1, & \text{si } m = l, \forall l \in \{1, \dots, K\}; \\ C, & \text{si } m = l + 1, \forall l \in \{0, \dots, K - 1\}; \\ B, & \text{si } m = l - 1, \forall l \in \{1, \dots, K\}; \\ \mathbf{0}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sachant que  $A_0, A_1, C$  et  $B$  sont des matrices carrées d'ordre  $(\alpha + 1)$ ,  
et  $\mathbf{0}$  est une matrice nulle d'ordre  $(\alpha + 1)$ .

- Pour  $l = 0$ ,  $A_0$  est donnée comme suit :

$$[A_0]_{ni;nj} = P_{\infty}(ni, 0); (nj, 0) = \begin{cases} \lambda, & \text{si } j = i - 1, i \in \{\alpha, \alpha - 1, \dots, 1\}; \\ \mu, & \text{si } j = \alpha - \beta + i, i \in \{\beta, \beta - 1, \dots, 0\}; \\ -\lambda, & \text{si } j = i, i \in \{\alpha, \dots, \beta + 1\}; \\ -(\lambda + \mu), & \text{si } j = i, i \in \{\beta, \beta - 1, \dots, 1\}; \\ -\mu, & \text{si } j = i = 0; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

- $\forall l \in \{1, \dots, K\}$ ,  $A_1$  est donné comme suit :

$$[A_1]_{ni;nj} = P_\infty(ni, l); (nj, l) = \begin{cases} \lambda, & \text{si } j = i - 1, i \in \{\alpha, \alpha - 1, \dots, 1\}; \\ \mu, & \text{si } j = \alpha - \beta + i, i \in \{\beta, \beta - 1, \dots, 0\}; \\ -(\lambda + \theta), & \text{si } j = i, i \in \{\alpha, \dots, \beta + 1\}; \\ -(\lambda + \mu + \theta), & \text{si } i = j, i \in \{\beta, \dots, 1\}; \\ -((1 - \delta_{l,K})\lambda + \mu), & \text{si } i = j = 0; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

- $\forall l \in \{0, \dots, K - 1\}$ ,  $C$  est donné comme suit :

$$[C]_{ni;nj} = P_\infty(ni, l); (nj, l + 1) = \begin{cases} (1 - \delta_{K,0})\lambda, & \text{si } i = j = 0; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

- $\forall l \in \{1, \dots, K\}$ ,  $B$  est donné comme suit :

$$[B]_{ni;nj} = P_\infty(ni, l); (nj, l - 1) = \begin{cases} \theta, & \text{si } j = i - 1, i \in \{\alpha, \alpha - 1, \dots, 1\}; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

### 4.2.2 Distribution stationnaire du modèle établi

Le réseau RdPSG donné dans la Figure 4.2 est borné, i.e. le graphe de marquages réduit (Figure. 4.4) est fini. De plus, il est réinitialisable i.e. le marquage initial  $(\alpha n, 0)$  est un état d'accueil. Par conséquent, la distribution stationnaire de la CMTC bi-dimensionnelle représentant la position du stock et le nombre de demandes en orbite existe et est unique et elle est donnée par :  $\Pi = (\Pi^0, \Pi^1, \Pi^2, \dots, \Pi^K)$ , avec  $\Pi^l = (\pi_0^l, \pi_1^l, \dots, \pi_\alpha^l)$ ,  $\forall l \in \{0, 1, \dots, K\}$ . Le calcul de la distribution stationnaire se fait en résolvant le système linéaire suivant :

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \Pi P_\infty = 0; \\ \sum_{l=0}^K \sum_{i=0}^{\alpha} \pi_i^l = 1. \end{cases}$$

Après insertion des matrices  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $B$  et  $C$ , le système  $(I)$ , on a aboutit à la forme suivante :

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} A_0 \Pi^0 + B \Pi^1 = 0; \\ C \Pi^{l-1} + A_1 \Pi^l + B \Pi^{l+1} = 0, \quad \forall l \in \{1, 2, \dots, K-1\}; \\ C \Pi^{K-1} + A_1 \Pi^K = 0. \\ \sum_{l=0}^K \sum_{i=0}^{\alpha} \pi_i^l = 1. \end{cases}$$

La résolution du système  $(I)$ , nécessite la résolution de  $(\alpha + 1) \times (K + 1)$  équations linéairement indépendantes, qui sont formulés ci-après :

$$\begin{cases} (\lambda + \mu)\pi_0^l = (1 - \delta_{l,0})\lambda\pi_0^{l-1} + \lambda\pi_1^l + \theta\pi_1^{l+1}, l \in \{0, \dots, K-1\}; \\ (\lambda + (1 - \delta_{l,0})\theta + \mu)\pi_i^l = \lambda\pi_{i+1}^l + \theta\pi_{i+1}^{l+1}, i \in \{1, \dots, \beta\}, l \in \{0, \dots, K-1\}; \\ (\lambda + (1 - \delta_{l,0})\theta)\pi_i^l = \lambda\pi_{i+1}^l + \theta\pi_{i+1}^{l+1}, i \in \{\beta + 1, \dots, \alpha - \beta - 1\}, l \in \{0, \dots, K-1\}; \\ (\lambda + (1 - \delta_{l,0})\theta)\pi_i^l = (1 - \delta_{i,\alpha})\lambda\pi_{i+1}^l + (1 - \delta_{i,\alpha})\theta\pi_{i+1}^{l+1} + \mu\pi_{i-\alpha-\beta}^l, i \in \{\alpha - \beta, \dots, \alpha\}, l \in \{0, \dots, K-1\}; \\ \mu\pi_0^K = (1 - \delta_{K,0})\lambda\pi_0^{K-1} + \lambda\pi_1^K; \\ (\lambda + \theta + \mu)\pi_i^K = \lambda\pi_{i+1}^K, i \in \{1, \dots, \beta\}; \\ (\lambda + \theta)\pi_i^K = \lambda\pi_{i+1}^K, i \in \{\beta + 1, \dots, \alpha - \beta - 1\}; \\ (\lambda + \theta)\pi_i^K = (1 - \delta_{i,\alpha})\lambda\pi_{i+1}^K + \mu\pi_{i-\alpha-\beta}^K, i \in \{\alpha - \beta, \dots, \alpha\}; \\ \sum_{l=0}^K \sum_{i=0}^{\alpha} \pi_i^l = 1. \end{cases}$$

L'approche de résolution de ces équations est inspirée de la même approche qu'on a établi pour le système de gestion de stocks avec rappels classiques (sous-section 3.3.2.1), tout en l'adaptant avec des rappels constants. Cette approche peut être résumée comme suit :

#### 4.2.2.1 Approche de résolution récursive

- Initialement, les variables  $\pi_i^l$  ont été changées par les variables  $r_i^l$  suivant la formule donnée ci-après :

$$r_i^l = \frac{\pi_i^l}{\pi_0^K}, \forall (i, l) \in \{0, 1, \dots, \alpha\} \times \{0, 1, \dots, K\}. \quad (4.1)$$

- Ensuite, nous avons suivi les étapes données comme suit :

- **Étape.0** : Calculer pour  $l \in \{1, \dots, K\}$ ,  $T_{i,l}$ , telle que :

$$T_{i,l} = \begin{cases} -(1 - \delta_{l,0}) \left(\frac{\lambda+\theta+\mu}{\lambda}\right)^i, & \text{si } i \in \{0, 1, \dots, \beta\}; \\ -(1 - \delta_{l,0}) \left(\frac{\lambda+\theta+\mu}{\lambda}\right)^\beta \left(\frac{\lambda+\theta}{\lambda}\right)^{i-\beta}, & \text{si } i \in \{\beta + 1, \dots, \alpha - \beta - 1\}; \\ \left(\frac{\lambda+\theta}{\lambda}\right) T_{i-1,l}, & \text{si } i = \alpha - \beta; \\ \left(\frac{\lambda+\theta}{\lambda}\right) T_{i-1,l} - \frac{\mu}{\lambda} T_{i-(\alpha-\beta)-1,l}, & \text{si } i \in \{\alpha - \beta + 1, \dots, \alpha - 1\}. \end{cases} \quad (4.2)$$

- **Étape.1** : Calculer pour  $l = K$ ,  $M_{i,K}$ , telle que :

$$M_{i,K} = \begin{cases} \frac{\mu}{\lambda} \left(\frac{\lambda+\theta+\mu}{\lambda}\right)^i, & \text{si } i \in \{0, 1, \dots, \beta\}; \\ \frac{\mu}{\lambda} \left(\frac{\lambda+\theta+\mu}{\lambda}\right)^\beta \left(\frac{\lambda+\theta}{\lambda}\right)^{i-\beta}, & \text{si } i \in \{\beta + 1, \dots, \alpha - \beta - 1\}; \\ \left(\frac{\lambda+\theta}{\lambda}\right) M_{i-1,K} - \frac{\mu}{\lambda}, & \text{si } i = \alpha - \beta; \\ \left(\frac{\lambda+\theta}{\lambda}\right) M_{i-1,K} - \frac{\mu}{\lambda} M_{i-(\alpha-\beta)-1,K}, & \text{si } i \in \{\alpha - \beta + 1, \dots, \alpha - 1\}. \end{cases} \quad (4.3)$$

- Calculer  $r_0^{K-1}$  par la formule suivante :

$$r_0^{K-1} = \frac{\theta \sum_{i=0}^{\alpha-1} M_{i,K}}{\lambda - \theta \sum_{i=0}^{\alpha-1} T_{i,K}}. \quad (4.4)$$

- Ensuite, calculer  $r_{i+1}^K$ ,  $\forall i \in \{0, \dots, \alpha - 1\}$ , en utilisant la formule suivante :

$$r_{i+1}^K = M_{i,K} + T_{i,K} r_0^{K-1}, \forall i \in \{0, \dots, \alpha - 1\}. \quad (4.5)$$

- **Étape.2** : Poser  $l = l - 1$ , ensuite calculer  $M_{i,l}$  pour :

$$M_{i,l} = \begin{cases} r_0^l \left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda}\right) \left(\frac{\lambda+\theta+\mu}{\lambda}\right)^i - \frac{\theta}{\lambda} \sum_{m=0}^i \left(\frac{\lambda+\theta+\mu}{\lambda}\right)^{i-m} r_{m+1}^{l+1}, & \text{si } i \in \{0, 1, \dots, \beta\}; \\ r_0^l \left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda}\right) \left(\frac{\lambda+\theta+\mu}{\lambda}\right)^\beta \left(\frac{\lambda+\theta}{\lambda}\right)^{i-\beta} - \frac{\theta}{\lambda} \left[ \left(\frac{\lambda+\theta}{\lambda}\right)^{i-\beta} \sum_{m=0}^{\beta} \left(\frac{\lambda+\theta+\mu}{\lambda}\right)^{\beta-m} r_{m+1}^{l+1} + \sum_{m=\beta+1}^i \left(\frac{\lambda+\theta}{\lambda}\right)^{i-m} r_{m+1}^{l+1} \right], & \text{si } i \in \{\beta + 1, \dots, \alpha - \beta - 1\}; \\ \left(\frac{\lambda+\theta}{\lambda}\right) M_{i-1,l} - \frac{\theta}{\lambda} r_{i+1}^{l+1} - \frac{\mu}{\lambda} r_0^l, & \text{si } i = \alpha - \beta; \\ \left(\frac{\lambda+\theta}{\lambda}\right) M_{i-1,l} - \frac{\theta}{\lambda} r_{i+1}^{l+1} - \frac{\mu}{\lambda} M_{i-(\alpha-\beta)-1,l}, & \text{si } i \in \{\alpha - \beta + 1, \dots, \alpha - 1\}. \end{cases} \quad (4.6)$$

- Calculer  $r_0^{l-1}$  par la formule ci-dessous :

$$r_0^{l-1} = \frac{\theta \sum_{i=0}^{\alpha-1} M_{i,l}}{\lambda - \theta \sum_{i=0}^{\alpha-1} T_{i,l}}. \quad (4.7)$$

- Ensuite, calculer récursivement  $r_{i+1}^l$  comme suit :

$$r_{i+1}^l = M_{i,l} + T_{i,l} r_0^{l-1}, \forall i \in \{0, \dots, \alpha - 1\}. \quad (4.8)$$

- **Étape.3** : Enfin, pour  $l = 0$  calculer  $M_{i,0}$ , avec :

$$M_{i,0} = \begin{cases} r_0^0 \left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda}\right)^{i+1} - \frac{\theta}{\lambda} \sum_{m=0}^i \left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda}\right)^{i-m} r_{m+1}^1, & \text{si } i \in \{0, 1, \dots, \beta\}; \\ r_0^0 \left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda}\right)^{\beta+1} - \frac{\theta}{\lambda} \left( \sum_{m=0}^{\beta} \left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda}\right)^{\beta-m} r_{m+1}^1 + \sum_{m=\beta+1}^i r_{m+1}^1 \right), & \\ \text{si } i \in \{\beta + 1, \dots, \alpha - \beta - 1\}; \\ M_{i-1,0} - \frac{\theta}{\lambda} r_{i+1}^1 - \frac{\mu}{\lambda} r_0^0, & \text{si } i = \alpha - \beta; \\ M_{i-1,0} - \frac{\theta}{\lambda} r_{i+1}^1 - \frac{\mu}{\lambda} M_{i-(\alpha-\beta)-1,0}, & \text{si } i \in \{\alpha - \beta + 1, \dots, \alpha - 1\}. \end{cases} \quad (4.9)$$

- Ainsi, on aura :

$$r_{i+1}^0 = M_{i,0} \forall i \in \{0, 1, \dots, \alpha - 1\}. \quad (4.10)$$

- Les variables  $r_i^l \forall (i, l) \in \{0, 1, \dots, \alpha\} \times \{0, 1, \dots, K\}$  sont ensuite remplacées dans la relation (4.1) et on aboutit à la distribution stationnaire  $\pi_i^l, \forall (i, l) \in \{0, 1, \dots, \alpha\} \times \{0, 1, \dots, K\}$  donnée par :

$$\pi_i^l = r_i^l \left( \sum_{j=0}^K \sum_{i=0}^{\alpha} r_i^l \right)^{-1}, \quad \forall (i, l) \in \{0, 1, \dots, \alpha\} \times \{0, 1, \dots, K\}. \quad (4.11)$$

### 4.3 Mesures de performances du système étudié

A partir de la distribution stationnaire, nous avons calculé quelques indices de performance du système de gestion de stocks avec rappels constants, qui sont donnés par les formules suivantes :

1. **Le niveau moyen du stock (le nombre moyen de jetons discrets dans la place  $P_{.stock}$ )** noté  $\overline{M}(P_{.stock})$  est donné par :

$$\overline{M}(P_{.stock}) = \sum_{M_j \in \Omega_n} M_j(P_{.stock}) \pi_{M_j} = n \sum_{l=0}^K \sum_{i=1}^{\alpha} i \pi_i^l; \quad (4.12)$$

où :  $M_j(P_{.stock})$  est le nombre de jetons dans la place  $P_{.stock}$  dans le marquage  $M_j$ , et  $\pi_{M_j}$  est la probabilité qu'à l'état stationnaire le processus se trouve à l'état  $M_j$  de l'ensemble des marquages tangibles  $\Omega_n$ .

2. **Le nombre moyen de demandes en orbite (le nombre moyen de jetons dans la place  $P_{.orbit}$ )** noté  $\overline{M}(P_{.orbit})$  est donné par :

$$\overline{M}(P_{.orbit}) = \sum_{M_j \in \Omega_n} M_j(P_{.orbit}) \pi_{M_j} = \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{l=1}^K l \pi_i^l; \quad (4.13)$$

où :  $M_j(P_{.orbit})$  est le nombre de jetons dans la place  $P_{.orbit}$  dans le marquage  $M_j$ , et  $\pi_{M_j}$  est la probabilité qu'à l'état stationnaire le processus soit à l'état  $M_j$  de l'ensemble des marquages tangibles  $\Omega_n$ .

3. **La probabilité d'avoir un stock nul dite aussi la probabilité de blocage (la probabilité que la place  $P_{.stock}$  soit vide)** notée  $P_b$  est donnée par :

$$P_b = \mathbb{P}\{M(P_{.stock}) = 0\} = \sum_{M_j \in A_0} \pi_{M_j} = \sum_{l=0}^K \pi_0^l; \quad (4.14)$$

avec  $A_0 = \{M_j \in \Omega_n : [M(P_{.stock}) = 0] \text{ soit vrai dans } M_j\}$ .

4. **La probabilité d'avoir un stock disponible, qui correspond au niveau de service (la probabilité que la place  $P_{.stock}$  n'est pas vide)** notée  $P_{ser}$  est donnée par :

$$P_{ser} = \mathbb{P}\{M(P_{.stock}) > 0\} = 1 - \mathbb{P}[M(P_{.stock}) = 0] = \sum_{l=0}^K \sum_{i=1}^{\alpha} \pi_i^l. \quad (4.15)$$

5. **Le taux d'arrivée des demandes primaires à l'orbite (la fréquence de franchissement de la transition  $T_{.arr}$  quand le stock est nul et que la place  $P_{.orbit}$  ne soit pas pleine)** noté  $\lambda_o$  donné par :

$$\lambda_o = \sum_{M_j \in S(T_{.arr})_{orbite}} = \lambda \pi_{M_j} = \lambda \sum_{l=0}^{K-1} \pi_0^l, \quad (4.16)$$

telque :

$S(T_{.arr})_{orbite} = \{M_j \in \Omega_n : T_{arr} \in E(M_j) \wedge [(M(P_{.stock}) = 0) \& (M(P_{.orbit}) \leq K-1)] \text{ soit vrai dans } M_j\}$

est l'ensemble de marquages tangibles dans lesquels la transition  $T_{.arr}$  est validée et que les deux conditions  $[M(P_{.stock}) = 0]$  et  $[M(P_{.orbit}) \leq K - 1]$  soient vraies dans le marquage  $M_j$ .

6. Le taux de service des demandes primaires (la fréquence de franchissement de la transition  $T_{arr}$  quand la place  $P_{stock}$  est non vide) noté  $\lambda_{ser}$  et est donné par :

$$\lambda_{ser} = \sum_{M_j \in S(T_{arr})_{serv}} \lambda \pi_{M_j} = \lambda \sum_{l=0}^K \sum_{i=1}^{\alpha} \pi_i^l; \quad (4.17)$$

où :

$S(T_{arr})_{serv} = \{M_j \in \Omega_n : T_{arr} \in E(M_j) \wedge [(M(P_{stock}) > 0)]$  soit vrai dans le marquage  $M_j\}$  est l'ensemble de marquages tangibles à partir des quels la transition  $T_{arr}$  est validée, en plus la condition  $[M(P_{stock}) > 0]$  est vraie.

7. Le taux d'entrée des demandes au système (le taux de service des demandes primaires + Le taux d'arrivée des demandes primaires à l'orbite) noté  $\lambda_e$  :

$$\lambda_e = \sum_{M_j \in S(T_{arr})_{orbite} \cup S(T_{arr})_{serv}} \lambda \pi_{M_j} = \lambda_o + \lambda_{ser}. \quad (4.18)$$

8. Le taux de demandes perdues (la fréquence de franchissement de la transition  $T_{arr}$  quand la place  $P_{stock}$  est vide et la place  $P_{orbit}$  est pleine) noté  $\lambda_p$  est donné par :

$$\lambda_p = \lambda \sum_{M_j \in A_2} \pi_{M_j} = \lambda \pi_0^K; \quad (4.19)$$

où :  $\pi_0^K = (\sum_{l=0}^K \sum_{i=0}^{\alpha} r_i^l)^{-1}$  est la probabilité qu'une demande primaire soit perdue, et :

$$A_2 = \{M_j \in \Omega_n : T_{arr} \in E(M_j) \wedge [(M(P_{stock}) = 0) \& (M(P_{orbit}) = K)] \text{ est vrai dans } M_j\}$$

9. Le temps moyen de séjour de  $n$  articles en stock (le temps moyen de séjour de  $n$  jetons dans la place  $P_{stock}$ ) noté  $\overline{TS}_{P_{stock}}$ , donné selon la formule de Little par :

$$\overline{TS}_{P_{stock}} = \frac{M(P_{stock})}{\lambda_e}. \quad (4.20)$$

10. Le temps moyen de séjour d'une demande en orbite (le temps moyen de séjour d'un jeton dans la place  $P_{orbit}$ ) noté  $\overline{TS}_{P_{orbit}}$  est donné par :

$$\overline{TS}_{P_{orbit}} = \frac{\overline{M}(P_{orbit})}{\lambda_o}. \quad (4.21)$$

11. Le niveau moyen de commande (la fréquence de franchissement de la transition  $T_{repl}$ ) noté  $\mu_r$  est donné par :

$$\mu_r = \sum_{M_j \in S(T_{repl})} \mu \pi_{M_j} = \sum_{l=0}^K \sum_{i=0}^{\beta} \mu \pi_i^l; \quad (4.22)$$

où :  $S(T_{\cdot repl})$  est l'ensemble de marquages tangibles dans lesquels la transition  $T_{\cdot repl}$  est validée.

12. **Le taux de rappels servis (la fréquence de franchissement de la transition  $T_{\cdot retr}$  aboutissant à un service)** noté  $\theta_{ser}$  est donné par :

$$\theta_{ser} = \sum_{M_j \in S(T_{\cdot retr})_{serv}} \theta \pi_{M_j} = \theta \sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{l=1}^K \pi_i^l; \quad (4.23)$$

tel que :

$S(T_{\cdot retr})_{serv} = \{M_j \in \Omega_n : T_{\cdot retr} \in E(M_j) \wedge [M(P_{\cdot stock}) > 0] \text{ est vrai } M_j\}$  est l'ensemble des marquages tangibles dans les quels la transition  $T_{\cdot retr}$  est validée et que  $[M(P_{\cdot stock}) > 0]$  soit vrai.

13. **Le taux de rappels-non-servis (le nombre moyen de franchissements par unité de temps de la transition  $T_{\cdot retr}$ , quand l'événement  $[M(P_{\cdot stock}) = 0]$  est vrai)** noté  $\theta_b$  est donné par :

$$\theta_b = \sum_{j/M_j \in S(T_{\cdot retr})_{bloque}} \theta \mathbb{P}_b = \theta \sum_{l=0}^K l \pi_0^l; \quad (4.24)$$

Où :  $S(T_{\cdot retr})_{bloque} = \{M_j \in \Omega_n : T_{\cdot retr} \in E(M_j) \wedge [M(P_{\cdot stock}) = 0] \text{ est vrai dans } M_j\}$ , est un sous-ensemble de marquages tangibles dans les quels la transition  $T_{\cdot retr}$  est franchissable est que l'événement  $[M(P_{\cdot stock}) = 0]$  soit vrai dans  $M_j$ .

## 4.4 Système de gestion de stocks avec demandes perdues

Dans le cas où  $K = 0$ , le modèle RdPSG avec rappels classiques (constants) n'a pas totalement la même dynamique que le RdPSG quand ( $K > 0$ ) . Dans ce cas, la taille de l'orbite est supposée nulle (i.e. l'existence d'une orbite est absurde), et c'est ce qu'on va démontrer dans ce qui suit.

Cependant, lorsque le poids de l'arc inhibiteur reliant la transition  $T_{\cdot pass}$  à la place  $P_{\cdot orbit}$  est égale à zéro (i.e.  $H(T_{\cdot pass}, P_{\cdot orbit}) = 0$ , et que initialement aucune demande n'est présente en orbite ( $M_0(P_{\cdot orbit}) = 0$ ). Quand la place  $P_{\cdot stock}$  est vide ( $M(P_{\cdot stock}) = 0$ ), aucune demande ne peut accéder en orbite, i.e. la transition immédiate  $T_{\cdot pass}$  ne sera jamais franchie, car la place représentant l'orbite  $P_{\cdot orbit}$  ne possède pas de place libre pour une nouvelle arrivée. Par conséquent, la transition stochastique  $T_{\cdot retr}$  ne sera jamais franchie (aucun rappel depuis l'orbite ne peut être effectué). Par contre, lors d'un stock nul ( $M(P_{\cdot stock}) = 0$ ), le jeton (demande) présent(e) dans la place  $P_{\cdot serv}$  sera immédiatement rejeté(e) après le franchissement de la transition  $T_{\cdot reject}$ .

### Propriété 4.4.1. (Processus stochastique)[19]

Dans le système de gestion de stocks de type  $(s, Q)$  avec rappels (rappels classiques et rappels

constants) et demandes partiellement arriérées, le graphe de marquages tangibles (réduit) donné dans la Figure 3.5 et Figure 4.4 sont réduits aux derniers blocs, quand  $(M(P_{orbit}) = K)$  avec la capacité de l'orbite  $K = 0$ . Dans les graphes d'accessibilité réduits résultant, l'évolution du marquage de la place  $P_{serv}$  décrit le processus stochastique lorsque la capacité d'orbite ( $K = 0$ ). Ces marquages sont les états du nouveau processus stochastique, et ils sont énumérés dans l'ensemble  $\Omega_n(K = 0) = \{(in, 0); 0 \leq i \leq \alpha\}$ .

La propriété d'isomorphisme qui existe entre le graphe d'accessibilité réduit et le graphe de la CMTC prouvé dans [73], nous a permis de retrouver la CTMC décrivant le processus stochastique qui représente le niveau du stock. La représentation matricielle du générateur infinitésimal de la CMTC obtenue est donnée par  $P_{\infty(K=0)} = A_{(K=0)}$  pour le modèle de gestion de stocks avec rappels classiques (rappels constants).

**Propriété 4.4.2.** (Distribution stationnaire pour le système avec pertes)[19]

Dans le système de gestion de stocks de type  $(s, Q)$  avec rappels et demandes partiellement arriérées avec  $K = 0$ , la distribution stationnaire du processus stochastique représentant le niveau du stock, notée  $\pi^0 = (\pi_0^0, \pi_1^0, \dots, \pi_\alpha^0)$  est obtenue en résolvant le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \pi^0 P_{\infty(K=0)} = \mathbf{0}; \\ \sum_{i=0}^{\alpha} \pi_i^0 = 1. \end{cases}$$

Après introduction du générateur infinitésimal, on a aboutit au système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \mu\pi_0^0 = \lambda\pi_1^0; \\ (\lambda + \mu)\pi_i^0 = \lambda\pi_{i+1}^0, \text{ pour } i \in \{1, \dots, \beta\}; \\ \lambda\pi_i^0 = \lambda\pi_{i+1}^0, \text{ pour } i \in \{\beta + 1, \dots, \alpha - \beta - 1\}; \\ \lambda\pi_i^0 = (1 - \delta_{i,\alpha})\lambda\pi_{i+1}^0 + \mu\pi_{i-\alpha-\beta}^0, \text{ pour } i \in \{\alpha - \beta, \dots, \alpha\}; \\ \sum_{i=0}^{\alpha} \pi_i^0 = 1. \end{cases}$$

En résolvant ce système linéaire, nous avons obtenu la distribution stationnaire pour le système de gestion de stocks avec rappels ( $K = 0$ ), qui est exprimée comme suit :

$$\pi_i^0 = \begin{cases} \frac{\mu}{\lambda} \left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda}\right)^{(i-1)} \pi_0^0, \text{ si } i \in \{1, \dots, \beta + 1\}; \\ \frac{\mu}{\lambda} \left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda}\right)^{\beta} \pi_0^0, \text{ si } i \in \{\beta + 2, \dots, (\alpha - \beta)\}; \\ \frac{\mu}{\lambda} \left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda}\right)^{\beta} \left(1 - \left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda}\right)^{(i-\alpha-1)}\right) \pi_0^0, \text{ si } i \in \{\alpha - \beta + 1, \dots, \alpha\}; \end{cases} \quad (4.25)$$

avec :

$$\pi_0^0 = \left[1 + (\alpha - \beta) \frac{\mu}{\lambda} \left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda}\right)^\beta\right]^{-1}.$$

**Propriété 4.4.3.** (*Mesures de performance du système avec pertes*)[19]

D'après l'expression de la distribution stationnaire, nous avons dérivé les mesures de performance les plus importantes dans le cas  $K = 0$ , et elles sont données ci-dessous :

1. **Le niveau moyen du stock** noté  $\bar{M}(P_{.stock})(K = 0)$  donné par :

$$\bar{M}(P_{.stock})(K = 0) = \sum_{M_j \in \Omega_n(K=0)} M_j(P_{.stock}) \pi_{M_j} = \sum_{i=1}^{\alpha} i \pi_i^0; \quad (4.26)$$

telque :  $\Omega_n(K = 0) = \{(in, 0); 0 \leq i \leq \alpha\}$ , est l'ensemble de marquages tangibles dans le cas  $K = 0$ .

2. **Le nombre moyen de demandes en orbite** noté  $\bar{M}(P_{.orbit})(K=0)$  donné par :

$$\bar{M}(P_{.orbit})(K=0) = \sum_{M_j \in \Omega_n(K=0)} M_j(P_{.orbit}) \pi_{M_j}; \quad (4.27)$$

3. **La probabilité que le stock est indisponible (le stock nul)** notée  $P_{b(K=0)}$  donnée par :

$$\mathbb{P}_{b(K=0)} = \mathbb{P}[M(P_{.stock}) = 0] = \pi_0^0; \quad (4.28)$$

avec :  $\pi_0^0$  est aussi la probabilité de perte d'une demande.

4. **La probabilité que le stock est disponible** noté  $\mathbb{P}_{ser(K=0)}$  est donnée par :

$$\mathbb{P}_{ser(K=0)} = 1 - \mathbb{P}_{b(K=0)}. \quad (4.29)$$

5. **Le taux de demandes perdues** noté  $\lambda_{p(K=0)}$  est donné par :

$$\lambda_{p(K=0)} = \lambda \mathbb{P}_{b(K=0)} = \lambda \pi_0^0; \quad (4.30)$$

6. **Le taux de service des demandes primaires** noté  $\lambda_{ser(K=0)}$  est donné par :

$$\lambda_{ser(K=0)} = \lambda \mathbb{P}_{ser(K=0)} = \lambda \sum_{i=1}^{\alpha} \pi_i^0; \quad (4.31)$$

**Conséquence 4.4.1.** On a pu facilement démontré que le nombre moyen de demandes en orbite dans le cas ( $K = 0$ ) noté  $\bar{M}(P_{.orbit}) = \sum_{M_j \in \Omega_n(K=0)} M_j(P_{.orbit}) \pi_{M_j}$  est nul, car  $M_j(P_{.orbit}) = 0$  pour  $i = \{0, \dots, S\}$ . Par conséquent, le système étudié devient un système avec demandes perdues, d'où le taux de perte de demandes primaires  $\lambda_{p(K=0)}$  est logiquement supérieur à  $\lambda_{p(K>0)}$ , ce qui démontre l'intérêt de considérer les rappels dans ce modèle.

## 4.5 Analyse de la fonction récompense-coûts associé au système étudié

Le problème d'optimisation ayant comme objectif la maximisation de la fonction récompense-coûts notée  $F$ , qui assure un compromis entre le revenu attribué dû au service des demandes primaires  $\lambda_{ser}$  et secondaires (rappels-servis)  $\theta_{ser}$  (voir formules (4.17) et (4.23) respectivement) et la fonction coût total  $C_T(s, S, K)$  donnée dans la formule (4.33), sous les contraintes du modèle. Le problème d'optimisation est formulé comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} F(s, S, K) = R_c \cdot (\lambda_{ser} + \theta_{ser}) - C_T(s, S, K); \rightarrow \max \\ \text{sous contraintes à.} \\ S \geq 2s + 1; \\ S = \alpha n; s = \beta n; \\ (\alpha, \beta, K) \in \mathbb{N}^3, n \in \mathbb{N}^*; (R_c \in \mathbb{R}_*^+); \end{array} \right. \quad (4.32)$$

où :

$$C_T(s, S, K) = c_h \cdot \overline{M}(P_{stock}) + c_w \cdot \overline{M}(P_{orbit}) + c_r \cdot \mu_r + c_l \cdot \lambda_p; \quad (4.33)$$

où :

- $c_h$  :le coût de maintien d'une unité en stock/unité de temps ;
- $c_r = c_p * Q + f$  : ( $c_p$  le coût d'achat d'un article/unité de temps, et  $f$  est un coût fixe/ordre de commande ;
- $c_w$  :le coût dû à l'attente d'une demande en orbite/unité de temps ;
- $c_l$  :le coût dû à une demande perdue/unité de temps.

Dans le problème (4.32), la première contrainte exprime le fait qu'un seul ordre de commande peut avoir lieu en même temps, et la deuxième contrainte exprime que le stock peut satisfaire  $\alpha$  demandes lots de taille fixe  $n$ , et  $\beta$  dans le cas d'un stock de sécurité. Enfin, la dernière contrainte du problème représente le domaine de définition des variables de décision  $s, S$  et  $K$ , et celui de la récompense  $R_c$ .

### Approche de résolution du problème d'optimisation

L'approche de résolution du problème (4.32) est la même approche que celle déjà élaborée pour la résolution du problème d'optimisation pour le modèle de gestion de stocks avec rappels classiques (voir chapitre. 3, sous section 5.1). Cette approche nous a permis de trouver un optimum (profit maximal  $F^*$ ) assuré pour la politique optimale (le niveau de sécurité optimal  $s^*$ , la valeur

optimale du niveau maximal du stock  $S^*$  et le seuil de demandes à arriérer optimal  $K^*$ ) dans des intervalles de variation de ces paramètres  $s \in I_s$ ,  $S \in I_S$  et  $K \in I_K$ , avec  $I_s, I_S, I_K \subset \mathbb{N}$ .

## 4.6 Étude de sensibilité du profit optimal et de la politique optimale

Dans cette section, nous avons analysé la sensibilité des valeurs optimales, à savoir : la politique optimale (le niveau de sécurité optimal  $s^*$ , la valeur optimale du niveau maximal du stock  $S^*$ , le seuil de demandes à arriérer optimal  $K^*$ ) et le profit optimal  $F^*$ ), par rapport aux paramètres du modèle en appliquant la même approche qui est adaptée dans le chapitre 3, la section 3.5). Ensuite, nous avons déduit la valeur du niveau de service associée à chaque politique optimale. D'abord, rappelons les objectifs visés par cette application numérique et qui peuvent être résumés dans les points suivants :

1. L'effet de la variation de la récompense  $R_c$  pour les deux différentes tailles des demandes  $n = 1$  et  $n = 2$  sur les valeurs optimales. Ensuite, déduire le niveau de service associé  $\mathbb{P}_{ser}$  à chaque politique optimale (voir Tableau 4.1).
2. Analyse de sensibilité de la politique optimale ( $s^*$ ,  $S^*$ ,  $K^*$ ) et du profit optimal  $F^*$  en fonction des paramètres exogènes au système, à savoir  $\lambda$ ,  $\theta$  et  $\mu$ . Par la suite, déduire le niveau de service associé à chaque politique optimale obtenue par la variation de ces paramètres (voir Tableau 4.2 et Tableau 4.3).
3. L'effet de la variation des coûts liés à l'hypothèse des demandes partiellement arriérées qui sont  $c_w$  et  $c_l$  sur les valeurs optimales (voir Tableau 4.4 et Tableau 4.5).

Dans toute l'application numérique, nous avons considéré les instances suivantes :  $I_s = [0 : n : 8]$ ,  $I_S = [18 : n : 26]$  et  $I_K = [5 : 5 : 40]$ . Les valeurs initiales des paramètres exogènes au système sont données par  $(\lambda, \theta, \mu) = (3, 2, 1)$ , les coûts liés à la politique de gestion de stocks sont donnés par  $(c_h, c_p, f) = (0.5, 0.1, 10)$  et les coûts liés à l'hypothèse des demandes partiellement arriérées sont fixés comme suit :  $(c_w, c_l) = (2, 5)$ .

### 4.6.1 Analyse de sensibilité des valeurs optimales par rapport à la récompense

Dans le Tableau 4.1, nous avons donné les résultats de l'étude de sensibilité des valeurs optimales à savoir : profit optimal  $F^*$ , stock optimal  $S^*$ , niveau de stock de sécurité optimal  $s^*$  et le seuil optimal des demandes arriérées  $K^*$  par rapport à la variation de la récompense  $R_c = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

pour  $n = \overline{1, 2}$ . En plus, nous avons calculé pour chaque politique optimale  $(s^*, S^*, K^*)$  la mesure du niveau de service  $\mathbb{P}_{ser}$ .

		$R_c = 1$	$R_c = 2$	$R_c = 3$	$R_c = 4$	$R_c = 5$
$n = 1$	$F^*$	-4.6627	1.7339	1.2050	4.1438	7.0827
	$(s^*, S^*, K^*)$	(2,18,5)	(3,18,5)	(3,18,5)	(3,18,5)	<b>(3, 18, 5)</b>
	$\mathbb{P}_{ser}$	0.896180	0.915926	0.915926	0.915926	0.915926
$n = 2$	$F^*$	-8.0526	-5.1893	-2.3075	0.5742	3.4560
	$(s^*, S^*, K^*)$	(2,26,5)	(4,26,5)	(4,26,5)	(4,26,5)	<b>(4, 26, 5)</b>
	$\mathbb{P}_{ser}$	0.818487	0.847629	0.847629	0.847629	0.847629

Tableau 4.1 – L'effet de l'augmentation de la récompense sur le profit optimal  $F^*$  et sur la politique optimale  $(s^*, S^*, K^*)$  ainsi que le niveau de service associé à chaque politique optimale pour  $n = \overline{1, 2}$ .

A partir du Tableau 4.1, on constate que le profit optimal  $F^*$  est une fonction croissante par rapport à la récompense  $R_c$  et ce pour les deux tailles des demandes  $n = \overline{1, 2}$ , ce qui est tout à fait logique. Néanmoins, le profit optimal  $F^*$  obtenu pour les demandes unitaires ( $n = 1$ ) est plus important que pour les demandes de taille deux ( $n = 2$ ), car le service dans le cas des demandes unitaires est toujours plus rentable car celles-ci consomment qu'une unité du stock.

Du même Tableau 4.1, on a pu conclure sur le comportement de la politique optimale  $(s^*, S^*, K^*)$  par rapport à  $R_c$ . Cependant, on constate que pour les deux tailles de demandes ( $n = \overline{1, 2}$ ), l'influence de l'augmentation de  $R_c$  sur les deux stocks (stock maximal  $S^*$  et le stock de sécurité  $s^*$ ) est négligeable ( $S^* = 18$  pour les demandes unitaires et  $S^* = 26$  pour les demandes de taille deux). Ce résultat est lié directement au type de demandes qui arrive au système indépendamment de la récompense attribuée au service de ces demandes, car les demandes lots de taille deux ( $n = 2$ ) ont tendance à consommer plus en stock que les demandes unitaires ( $n = 1$ ). De plus, le seuil de demandes arriérées reste constant  $K^* = 5$  pour les deux types de demande unitaires et pour les demandes lots de taille deux et ce pour  $R_c = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , autrement dit ni la récompense ni la taille de la demande influe sur le choix du seuil de demandes à arriérer.

Dans le même Tableau 4.1, on a évalué les différentes politiques optimales  $(s^*, S^*, K^*)$  obtenues en calculant la mesure du niveau de service  $\mathbb{P}_{ser}$ . Cependant, on constate que le niveau de service est satisfaisant ( $\mathbb{P}_{ser}$  entre 87% et 92%) pour  $R_c = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  et ce pour les deux types demandes  $n = \overline{1, 2}$ . Sauf que les demandes unitaires garantissent un niveau de service plus intéressant, car elles consomment qu'une seule unité en stock ce qui assure à l'entreprise une disponibilité du stock (niveau de service) plus durable. En plus, on constate une augmentation du niveau de service associé à chaque politique optimale pour  $n = \overline{1, 2}$  en fonction de récompense  $R_c$  attribuée à chaque demande servie, car quand on augmente la récompense de l'entreprise, ceci l'encourage à assurer un niveau de service plus élevé (un stock disponible plus de temps que possible).

### 4.6.2 Analyse de sensibilité des valeurs optimales par rapport au taux de demandes et au taux de réapprovisionnement

Dans le Tableau 4.2, nous avons analysé l'effet de variation de  $\lambda = \{0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4\}$  et  $\mu = \overline{1}, \overline{2}$  sur les valeurs optimales (le profit optimal  $F^*$  et la politique optimale  $(s^*, S^*, K^*)$ ) pour  $n = \overline{1}, \overline{2}$ . Ensuite, nous avons calculé le niveau de service associé  $\mathbb{P}_{ser}$  pour évaluer chaque politique optimale. On note que le niveau de service  $\mathbb{P}_{ser}$  mesure la disponibilité du stock à satisfaire les demandes des deux types  $n = \overline{1}, \overline{2}$  en fonction de la politique optimale  $(s^*, S^*, K^*)$  et du taux de demande  $\lambda$  pour  $\mu = \overline{1}, \overline{2}$ .

$n = 1$	$\lambda$	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$\mu = \overline{1}$	$F^*$	-2.3874	-0.1827	1.8265	3.6984	5.4571	7.0827	8.6084	10.1460
	$(s^*, S^*, K^*)$	(0,18,5)	(0,18,5)	(0,18,5)	(1,18,5)	(2,18,5)	(3,18,5)	(4,20,5)	(5,22,5)
	$\mathbb{P}_{ser}$	0.972225	0.944541	0.917203	0.922310	0.921024	0.915925	0.920028	0.922838
$\mu = \overline{2}$	$F^*$	-2.4778	-0.2424	1.9271	4.0241	6.0370	8.0052	9.9255	11.7984
	$(s^*, S^*, K^*)$	(0,18,10)	(0,18,10)	(0,18,10)	(0,18,10)	(0,18,10)	(1,18,10)	(1,18,5)	(2,18,5)
	$\mathbb{P}_{ser}$	0.986111	0.972222	0.958334	0.944447	0.930569	0.946837	0.934706	0.955592
$n = 2$	$\lambda$	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$\mu = \overline{1}$	$F^*$	-2.8006	-0.9543	0.4806	1.4670	2.4599	3.4560	4.2581	4.7415
	$(s^*, S^*, K^*)$	(0,18,5)	(0,18,5)	(0,18,5)	(2,20,5)	(2,22,5)	(4,26,5)	(4,26,5)	(6,26,5)
	$\mathbb{P}_{ser}$	0.944457	0.889277	0.835569	0.852235	0.824437	0.847628	0.811903	0.798214
$\mu = \overline{2}$	$F^*$	-2.9524	-1.0175	0.7819	2.4237	3.8775	5.1944	6.5859	7.9996
	$(s^*, S^*, K^*)$	(0,18,5)	(0,18,10)	(0,18,5)	(0,18,5)	(0,18,5)	(0,20,5)	(2,22,5)	(2,26,5)
	$\mathbb{P}_{ser}$	0.972222	0.944444	0.916769	0.889305	0.862285	0.852034	0.888027	0.889027

Tableau 4.2 – L'effet de variation de  $\lambda$  et  $\mu$  sur le profit optimal  $F^*$  et la politique optimale  $(s^*, S^*, K^*)$  ainsi que le niveau de service associé à chaque politique optimale pour  $n = \overline{1}, \overline{2}$ .

D'après le Tableau 4.2, plusieurs remarques peuvent être constatées. Premièrement, on constate que le profit optimal  $F^*$  est une fonction croissante du taux de demande  $\lambda$ , pour  $\mu = \overline{1}, \overline{2}$  quelque soit le type de demande  $n = \overline{1}, \overline{2}$ . De plus, on constate que le profit est une fonction croissante par rapport au taux de réapprovisionnement  $\mu$ , à partir de  $\lambda = 1.5$  pour les deux types de demandes  $n = \overline{1}, \overline{2}$ , car lorsque le taux de demandes  $\lambda$  est plus important, un délai moyen de livraison  $\frac{1}{\mu}$  joue un rôle crucial dans le service des demandes.

Deuxièmement, on a pu conclure sur le comportement de la politique optimale  $(s^*, S^*, K^*)$  vis à vis l'augmentation de  $\lambda$  pour  $\mu = \overline{1}, \overline{2}$  et  $n = \overline{1}, \overline{2}$ . En effet, on constate que le stock maximal  $S^*$  et le stock de sécurité  $s^*$  croient progressivement et au fur et à mesure que le taux de demandes  $\lambda$  devient important et que le délai moyen de réapprovisionnement  $\frac{1}{\mu}$  demeure grand. De plus, on peut voir que la valeur de  $K^*$  reste constante dans la plupart des exemples numériques ( $K^* = 5$  et  $K^* = 10$ ). Par contre, on constate une légère décroissance de  $K^*$  quand le délai moyen de réapprovisionnement est court i.e.  $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{2}$ , à partir de  $\lambda = 3.5$  dans le des demandes sont unitaires, ceci peut être justifié par la disponibilité du stock qui est mesurée par  $\mathbb{P}_{ser}$  et par conséquent les

demandes sont servies (pas d'intérêt de les arriérer).

Du même Tableau 4.2, on constate que le niveau de service  $\mathbb{P}_{ser}$  est très satisfaisant pour chaque politique optimale issue de la variation de  $\lambda$  et  $\mu$  pour  $n = \overline{1, 2}$  (sa valeur varie entre 81% à 98%). En plus, on peut déduire que  $\mathbb{P}_{ser}$  est une fonction décroissante du taux de demande, car la disponibilité du stock chute lorsque des demandes arrivent au système. Cependant, le niveau de service  $\mathbb{P}_{ser}$  (i.e. la disponibilité du stock) croit lorsque  $\mu$  augmente, ici les réapprovisionnements se rapprochent lorsque  $\mu$  augmente ce qui conduit à l'alimentation du stock, pour que ce dernier soit disponible plus de temps.

### 4.6.3 Analyse de sensibilité des valeurs optimales par rapport au taux de rappels et au taux de réapprovisionnement

Dans le Tableau 4.3, nous avons étudié la sensibilité du profit optimal et de la politique optimale par rapport à  $\theta$  et  $\mu$ , pour les deux types de demandes  $n = 1$  et  $n = 2$ . Ensuite, nous avons évalué chaque politique en calculant le niveau de service associé, en plus nous avons étudié l'influence de la variation de ces deux paramètres sur cette mesure de performance.

$n = 1$	$\theta$	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$\mu = 1$	$F^*$	5.8952	6.5705	6.8847	7.0827	7.2004	7.3149	7.4424	7.5368
	$(s^*, S^*, K^*)$	(5,20,5)	(4,19,5)	(3,18,5)	(3,18,5)	(3,18,5)	(2,18,10)	(2,18,10)	(2,18,10)
	$\mathbb{P}_{ser}$	0.951364	0.935633	0.915403	0.915925	0.916349	0.893167	0.893402	0.893609
$\mu = 2$	$F^*$	7.2582	7.6669	7.8802	8.0052	8.1047	8.2057	8.2774	8.3325
	$(s^*, S^*, K^*)$	(3,18,5)	(2,18,5)	(1,18,5)	(1,18,10)	(0,18,10)	(0,18,10)	(0,18,10)	(0,18,15)
	$\mathbb{P}_{ser}$	0.978053	0.965960	0.947069	0.946837	0.916711	0.916709	0.916709	0.916670
$n = 2$	$\theta$	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$\mu = 1$	$F^*$	0.8570	2.3757	3.0463	3.4560	3.7034	3.9062	4.0603	4.2269
	$(s^*, S^*, K^*)$	(8,26,5)	(6,26,5)	(4,26,5)	(4,26,5)	(4,26,5)	(2,26,5)	(2,26,5)	(2,26,10)
	$\mathbb{P}_{ser}$	0.891597	0.870899	0.847220	0.847629	0.848202	0.819198	0.819502	0.811075
$\mu = 2$	$F^*$	3.4590	4.3898	4.8790	5.1944	5.4540	5.6457	5.8036	5.9197
	$(s^*, S^*, K^*)$	(4,24,5)	(2,22,5)	(2,22,5)	(0,20,5)	(0,20,5)	(0,20,10)	(0,20,10)	(0,20,10)
	$\mathbb{P}_{ser}$	0.944589	0.908920	0.909133	0.852035	0.851908	0.850183	0.850171	0.850163

Tableau 4.3 – L'effet de variation de  $\theta$  et  $\mu$  sur le profit optimal  $F^*$  et la politique optimale  $(s^*, S^*, K^*)$ , ainsi que sur le niveau de service associé à chaque politique optimale pour  $n = \overline{1, 2}$ .

A partir du Tableau 4.3, on constate que le profit optimal est une fonction croissante par rapport à  $\theta$ ,  $\forall \mu = \overline{1, 2}$  et ce pour les deux types de demandes considérées, à cause du nombre de tentatives d'accéder au service qui augmente, alors leurs chance qu'elles soient servies augmente à son tour. De plus, on constate que le profit optimal est une fonction croissante par rapport à  $\mu$ ,  $\forall \theta$  et ce résultat est valable pour les deux types de demandes  $n = \overline{1, 2}$ . Ce résultat est logique car pour un délai moyen de réapprovisionnement plus court, la disponibilité du stock est plus grande d'où la satisfaction des demandes primaires  $\lambda_{ser}$  et demandes secondaires  $\theta_{ser}$  augmentent.

D'après le même Tableau 4.3, un autre résultat intéressant se constate par rapport au profit vis-à-vis les deux types de demandes  $n = \overline{1, 2}$ , où on observe clairement que les demandes unitaires sont encore une fois plus profitables pour l'entreprise  $\forall \theta$  que les demandes de taille deux,  $\forall \mu = \overline{1, 2}$ .

Du même Tableau 4.3, on analysant l'effet de variation du taux de rappels  $\theta$  sur la politique optimale  $(s^*, S^*, K^*)$ , on constate que le stock maximal  $S^* = 18$  pour les demandes unitaires et il prend une valeur plus importante  $S^* = \overline{20, 22, 24, 26}$  pour les demandes de taille deux, mais le seuil du stock de sécurité optimal  $s^*$  décroît au fur à mesure que  $\theta$  augmente et ce  $\forall \mu = \overline{1, 2}$  et  $n = \overline{1, 2}$ . En effet,  $s^*$  chute plus rapidement lorsque les réapprovisionnements sont plus fréquents ( $\mu = 2$ ), car dans ce cas l'entreprise n'a pas besoin de fixer un seuil de sécurité grand. De plus, on remarque que la valeur du seuil de demandes à arriérer  $K^*$  augmente lorsque le taux de rappels  $\theta$  augmente pour  $n = \overline{1, 2}$ , et ce  $\forall \theta$  et  $\mu$ , car dans ce cas la chance de service des demandes depuis l'orbite  $\theta_{ser}$  est plus importante.

Du même Tableau 4.3, on constate que le niveau de service  $\mathbb{P}_{ser}$  est très satisfaisant  $\forall \theta, \mu, n$  (sa valeur varie entre 89% et 98%). De plus, on remarque que  $\mathbb{P}_{ser}$  est une fonction décroissante de  $\theta$ , pour les deux types de demandes  $n = \overline{1, 2}$ , et pour  $\mu = \overline{1, 2}$ , car plus la demande depuis l'orbite augmente, la probabilité de rupture  $\mathbb{P}_b = 1 - \mathbb{P}_{ser}$  augmente, et par conséquent la probabilité de disponibilité du stock  $\mathbb{P}_{ser}$  diminue. En outre, le niveau de service est toujours une fonction croissante par rapport à  $\mu$ . Une interprétation logique de ce résultat est que quand la fréquence des réapprovisionnements augmente, alors la probabilité de disponibilité du stock augmente à son tour.

#### 4.6.4 Analyse de sensibilité des valeurs par rapport au coût de perte et au taux de demandes

Dans le Tableau 4.4, nous avons montré l'effet de variation du coût de perte  $c_l = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  sur les valeurs optimales (profit optimal  $F^*$  et la politique optimale  $(s^*, S^*, K^*)$ ). Les autres coûts prennent les mêmes valeurs que celles données dans toute l'application précédente. De plus, on a considéré deux taux de réapprovisionnement  $\mu = \overline{1, 2}$ , et pour chaque valeur de  $\mu$ , on a considéré trois taux de demandes différents  $\lambda = \{1.5, 3, 4.5\}$ , avec le taux de rappel  $\theta = 2$ . De plus, cette étude on l'a réalisée pour les deux variantes de tailles de demandes  $n = \overline{1, 2}$ .

A partir du Tableau 4.4, on voit clairement que le profit optimal est une fonction décroissante du coût de perte  $c_l$  et ce pour  $\lambda = \{1.5, 3, 4.5\}$  et pour  $n = \overline{1, 2}$ , ce résultat est tout à fait logique car si le coût augmente le profit va diminuer automatiquement. En plus, on remarque que lorsque le taux de demande  $\lambda$  augmente, le profit  $F^*$  croît car le taux de service des demandes primaires  $\lambda_{ser}$  est aussi une fonction croissante de  $\lambda$ .

Du même Tableau 4.4, on remarque que le comportement de la politique optimale  $(s^*, S^*, K^*)$  n'est

$n = 1$	$(c_w, c_l)$	(2,0)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
$\mu = 1$	$\lambda = 1.5$	1.8748 (0,18,5)	1.8651 (0,18,5)	1.8554 (0,18,5)	1.8458 (0,18,5)	1.8361 (0,18,5)	1.8265 (0,18,5)
	$\lambda = 3$	7.4126 (2,18,5)	7.3373 (2,18,5)	7.2661 (3,18,5)	7.2050 (3,18,5)	7.1438 (3,18,5)	7.0827 (3,18,5)
	$\lambda = 4.5$	12.4349 (4,23,5)	12.2687 (5,23,5)	12.1144 (5,23,5)	11.9677 (5,24,5)	11.8226 (5,24,5)	11.6938 (6,24,5)
$\mu = 2$	$\lambda = 1.5$	1.9305 (0,18,5)	1.9296 (0,18,5)	1.9287 (0,18,5)	1.9278 (0,18,5)	1.9271 (0,18,10)	1.9271 (0,18,10)
	$\lambda = 3$	8.0668 (1,18,5)	8.0543 (1,18,5)	8.0419 (1,18,5)	8.0294 (1,18,5)	8.0169 (1,18,5)	8.0052 (1,18,10)
	$\lambda = 4.5$	13.8598 (2,18,5)	13.8087 (2,18,5)	13.7575 (2,18,5)	13.7064 (2,18,5)	13.6552 (2,18,5)	13.6074 (2,19,5)
$n = 2$	$(c_w, c_l)$	(2,0)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
$\mu = 1$	$\lambda = 1.5$	0.5812 (0,18,5)	0.5611 (0,18,5)	0.5410 (0,18,5)	0.5209 (0,18,5)	0.5007 (0,18,5)	0.4806 (0,18,5)
	$\lambda = 3$	4.1016 (2,24,5)	3.9474 (2,26,5)	3.8107 (4,26,5)	3.6925 (4,26,5)	3.5742 (4,26,5)	3.4560 (4,26,5)
	$\lambda = 4.5$	7.2912 (4,26,5)	6.7929 (4,26,5)	6.2946 (4,26,5)	5.8165 (6,26,5)	5.3500 (6,26,5)	4.8834 (6,26,5)
$\mu = 2$	$\lambda = 1.5$	0.7913 (1,18,5)	0.7894 (1,18,5)	0.7876 (1,18,5)	0.7857 (1,18,5)	0.7839 (1,18,5)	0.7820 (1,18,5)
	$\lambda = 3$	5.3979 (0,20,5)	5.3572 (0,20,5)	5.3165 (0,20,5)	5.7347 (0,20,5)	5.6611 (0,20,5)	5.6457 (0,20,10)
	$\lambda = 4.5$	10.4092 (2,26,5)	10.3100 (2,26,5)	10.2109 (2,26,5)	10.1118 (2,26,5)	10.0126 (2,26,5)	9.9370 (2,26,10)

Tableau 4.4 – L'effet de de variation du coût de perte  $c_l$ , pour  $\lambda = \{1.5, 3, 4.5\}$  et  $\mu = 2$ , sur les valeurs optimales.

$n = 1$	$(c_w, c_l)$	(0,5)	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)
$\mu = 1$	$\theta = 2$	9.2628 (0,18,40)	7.7354 (2,18,10)	7.0827 (3,18,5)	6.6737 (4,18,5)	6.3460 (4,18,5)	6.0737 (5,20,5)
	$\theta = 5$	9.3958 (0,18,40)	8.4513 (0,18,25)	7.6671 (2,18,10)	7.1676 (3,18,10)	6.8678 (3,18,5)	6.6150 (4,18,5)
	$\theta = 10$	9.4610 (0,18,40)	8.7457 (0,18,40)	8.0466 (1,18,20)	7.5265 (2,18,15)	7.1387 (3,18,10)	6.8412 (3,18,5)
$\mu = 2$	$\theta = 2$	8.8445 (0,18,40)	8.3917 (0,18,15)	8.0052 (1,18,10)	7.7782 (1,18,5)	7.60611 (2,18,5)	7.4614 (2,18,5)
	$\theta = 5$	8.9121 (0,18,40)	8.6609 (0,18,35)	8.4098 (0,18,15)	8.1606 (0,18,10)	7.9753 (1,18,10)	7.8289 (1,18,5)
	$\theta = 10$	8.9405 (0,18,40)	8.7528 (0,18,40)	8.5650 (0,18,30)	8.3773 (0,18,20)	8.1898 (0,18,15)	8.0309 (1,18,10)
$n = 2$	$(c_w, c_l)$	(0,5)	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)
$\mu = 1$	$\theta = 2$	7.7063 (0,18,40)	4.4414 (2,26,10)	3.4560 (4,26,5)	2.6507 (4,26,5)	1.9633 (6,26,5)	1.2800 (6,26,5)
	$\theta = 5$	7.9918 (0,18,40)	5.8704 (0,22,15)	4.5070 (2,26,10)	3.6981 (2,26,5)	3.1707 (4,26,5)	2.6588 (4,26,5)
	$\theta = 10$	8.1074 (0,18,40)	6.5061 (0,20,25)	5.2890 (0,24,15)	4.3214 (2,26,10)	3.5950 (2,26,10)	3.1706 (4,26,5)
$\mu = 2$	$\theta = 2$	7.0490 (0,18,40)	5.9554 (0,20,10)	5.1944 (0,20,5)	4.7153 (2,22,5)	4.3121 (2,22,5)	3.9418 (4,22,5)
	$\theta = 5$	7.1734 (0,18,40)	6.6346 (0,18,25)	6.0994 (0,18,10)	5.6191 (0,20,5)	5.2033 (0,20,5)	4.8591 (2,20,5)
	$\theta = 10$	7.2410 (0,18,40)	6.8523 (0,18,40)	6.4637 (0,18,20)	6.0759 (0,18,15)	5.7184 (0,20,10)	5.3804 (0,20,5)

Tableau 4.5 – L'effet de variation du coût d'attente d'une demande en orbite  $c_w$ , pour  $\theta = \{2, 5, 10\}$  et  $\mu = \overline{1, 2}$  sur le profit optimal et la politique optimale pour  $n = \overline{1, 2}$ .

pas influencé par l'augmentation du coût de perte  $c_l$ , pour  $\lambda = \{1.5, 3, 4.5\}$ ,  $\mu = \overline{1, 2}$  et  $n = \overline{1, 2}$ . Ce résultat peut être justifié par la perte qui n'est pas si importante, donc l'entreprise n'a pas besoin d'augmenter son niveau du stock ni d'arriérer un grand nombre de demandes en orbite. Par contre, la politique optimale est influencée par le taux de demande  $\lambda$ , où une croissance dans le taux de demande incite à augmenter le niveau de stock maximal, le niveau du seuil de sécurité et le seuil de demandes à arriérer.

#### 4.6.5 Analyse de sensibilité des valeurs optimales par rapport au coût d'attente d'une demande en orbite et au taux de rappels

Dans le Tableau 4.5, nous avons étudié l'effet de variation du coût d'attente d'une demande en orbite  $c_w$  pour  $\theta = \{2, 5, 10\}$  et  $\mu = \overline{1, 2}$  sur le profit optimal et la politique optimale pour les deux types de demandes  $n = \overline{1, 2}$ . De plus, nous avons fixé le coût de perte d'une demande  $c_l = 5$ .

D'après le Tableau 4.5, on peut voir que le profit optimal est une fonction décroissante par rapport au coût d'attente d'une demande en orbite, et ce pour  $\theta = \overline{2, 5, 10}$ ,  $\mu = \overline{1, 2}$  et pour les deux types de demandes considérées. Par contre, le profit optimal est une fonction croissante du taux de rappels, ce qui est déjà remarqué dans le Tableau 4.3.

D'après le même Tableau 4.5, on analysant l'effet de variation du coût d'attente  $c_w$  sur la politique optimale  $(s^*, S^*, K^*)$ , on a constaté plusieurs remarques. Premièrement, on constate que l'influence du coût d'attente d'une demande en orbite sur la politique optimale est insignifiante lorsque on considère que ce dernier est nul (i.e.  $c_w = 0$ ), où  $(s^*, S^*, K^*) = (0, 18, 40)$ ,  $\forall \mu = \overline{1, 2}$  et  $n = \overline{1, 2}$ . Ce résultat est tout à fait logique car dans ce cas l'arriération des demandes n'a pas de coût considéré ce qui explique le fait que  $K^*$  prend sa valeur maximale. Deuxièmement, l'effet de  $c_w$  sur la politique optimale devient plus significatif lorsque ce dernier est positif, où on constate que les valeurs du stock ( $s^*$  et  $S^*$ ) augmentent au fur à mesure que le coût d'attente augmente, particulièrement pour  $\mu = 1$  car dans ce cas le délai moyen de réapprovisionnement i.e.  $\frac{1}{\mu}$  est plus grand. Ceci est une décision opérationnelle pour garder un stock positif longtemps, ce qui va éviter une attente trop longue pour les demandes arriérées. Par contre, ces deux valeurs diminuent lorsque le taux de rappel devient plus important (ce résultat peut être interprété d'après le Tableau 4.3).

De plus, on observe que le seuil optimal des demandes arriérées  $K^*$  diminue lorsque le coût d'attente en orbite  $c_w$  augmente, pour  $c_w \geq 1$ , ce qui s'explique par le fait que l'arriération des demandes devient plus coûteuse donc une décision opérationnelle pour l'entreprise est de diminuer son seuil d'arriération.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons modélisé et analysé le même système de gestion de stocks de type  $(s, Q)$  étudié dans le chapitre 3, tout en considérant cette fois-ci des rappels constants. Pour ce système, nous avons obtenu la CMTC décrivant la dynamique du système étudié représentant le niveau du stock et le nombre de demandes arriérées. Pour le calcul de la distribution stationnaire, nous avons réadapté la procédure recursive élaborée dans le cas des rappels classiques. Ensuite, nous avons exploité les résultats obtenus pour dériver diverses mesures de performance du système étudié avec rappels constants.

Dans le but de réaliser l'objectif de l'entreprise dans le cas des rappels constants, que nous avons défini par la maximisation de la fonction récompense-coûts formulé mathématiquement dans le problème d'optimisation déjà défini dans le chapitre.3, tout en considérant les résultats obtenus dans ce chapitre. Pour l'étude de ce problème, nous avons fait appel à l'approche de résolution établie dans le contexte du système avec "rappels classiques". Enfin, pour illustrer cette approche,

nous avons fait une analyse de sensibilité du profit optimal et de la politique optimale par rapport aux différents paramètres du système.

D'après les différentes interprétations de l'étude de sensibilité réalisée pour le système de gestion de stocks avec rappels (classiques et constants) considéré, nous avons constaté que généralement les demandes unitaires sont plus profitables que les demandes lots de taille deux, ceci est dû principalement au fait que le service des demandes unitaires se fait par unités. Pour tenir compte de cette interprétation, nous allons considérer dans le chapitre suivant un autre système de gestion de stocks avec deux types demandes (type-1 (unitaires) et type-2 (lots de taille 2)). Ces demandes arrivent au système suivant un processus de Poisson et qui partagent la même ressource (le stock) et qui sont servies immédiatement. Dans la situation de rupture de stock, nous allons supposer que les demandes de type-1 sont partiellement arriérées, tandis que les demandes de type-2 sont complètement rejetées du système. Ce système de gestion de stocks sera modélisé via le formalisme des RdPSG. Ensuite, nous allons effectuer une analyse qualitative du modèle, à savoir (la bornitude, la vivacité et l'état d'accueil). Malheureusement, l'énumération de tout les marquages accessibles depuis le marquage initial n'est pas une tâche évidente. Par conséquent, nous allons faire appel à l'approche de simulation pour calculer quelques mesures de performance du système considéré. En fait, nous allons faire une analyse de sensibilité des mesures de performances en fonction des paramètres du système sous un simulateur appelé GRIF.

# Chapitre 5

## Modélisation et Simulation d'un système de gestion de stocks avec rappels et deux types de demandes

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Description du système de gestion de stocks considéré . . . . .</b>	<b>107</b>
<b>5.2</b>	<b>Modélisation du système considéré via les RdPSG . . . . .</b>	<b>108</b>
5.2.1	Analyse qualitative du modèle RdPSG établi . . . . .	110
<b>5.3</b>	<b>Simulation du système de gestion de stocks considéré avec le simulateur GRIF . . . . .</b>	<b>112</b>
5.3.1	A propos du simulateur GRIF . . . . .	112
5.3.2	Simulation du modèle sous le simulateur GRIF . . . . .	112

---

## Introduction

L'étude des systèmes de gestion de stocks avec rappels devient de plus en plus complexe où chaque système nécessite une étude appropriée. En effet, si on considère que les demandes arrivent suivant deux types différents (de tailles différentes), où encore si on prend en compte un nouveau paramètre, l'étude du système devient plus complexe. C'est pourquoi à chaque changement une nouvelle modélisation s'impose. Cependant, pour concevoir un modèle compatible avec le système réel considéré, on doit faire en sorte qu'ils se rapprochent le plus possible, ensuite on doit développer les différentes caractéristiques pour mesurer la performance du modèle établi. Par ailleurs, pour l'étape de modélisation plusieurs approches existent comme celles définies dans le chapitre 1.

Le système de gestion de stocks considéré dans ce chapitre est un système qui prend en compte deux types de demandes. Ces demandes sont distinguées selon leurs tailles, à savoir : demandes unitaires (type 1) et demandes lots de taille deux (type 2). Leurs arrivées suivant deux flux différents (processus poissonniens) et qui sont immédiatement servies du stock en main. En cas de rupture de stock, nous allons poser deux hypothèses. La première porte sur l'arriération partielle des demandes de type 1 dans une orbite virtuelle de taille limitée, et qui rappellent après une durée aléatoire suivant la politique de rappels constants. La deuxième concerne les demandes de type 2 qui sont immédiatement rejetées du système. En prenant en considération toutes ces hypothèses, nous allons proposer un modèle de gestion de stocks en faisant appel encore une fois au formalisme des RdPSG. Ce formalisme nous a permis de modéliser les deux mécanismes que présente le système considéré, à savoir : le parallélisme et le partage de ressources, ainsi que les autres hypothèses qui sont impliquées au système étudié. Une étape préliminaire dans l'analyse des systèmes modélisés via les RdPSG est l'étape de vérification des propriétés qualitatives du modèle (la bornitude, la vivacité, etc). Ensuite, nous pouvons passer à l'étude quantitative, en utilisant la méthode d'énumération des états (marquages) accessibles à partir du marquage initial, mais il s'est avéré que la généralisation du graphe des marquages pour l'obtention de la chaîne de Markov n'est pas une tâche simple. Pour cette raison, nous allons faire appel à l'approche de simulation dans le but de réaliser une analyse de sensibilité des mesures de performance du système étudié.

## 5.1 Description du système de gestion de stocks considéré

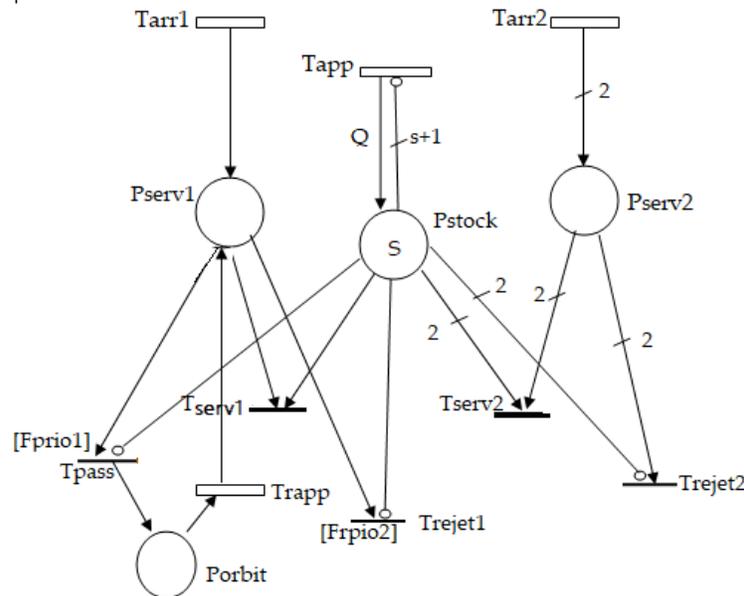
Dans le système de gestion de stocks considéré, plusieurs hypothèses sont considérées, et elles sont données comme suit :

- Les demandes unitaires (type 1) resp. les demandes lots de taille deux (type 2) arrivent au système suivant deux flux différents (processus poissonniens) de taux  $\lambda_1$  resp. de taux  $\lambda_2$ .
- Les deux types de demandes (type 1 et type 2) sont immédiatement servies du stock en main ;

- Dans le cas du stock indisponible, les demandes de type 2 sont immédiatement rejetées du système, tandis que les demandes de type 1 rejoignent une orbite à capacité limitée  $K$ , et rappellent après une durée aléatoire exponentiellement distribuée suivant un taux  $\theta$  (rappels constants). Au delà du seuil  $K$ , les demandes de type 1 sont complètement rejetées du système.
- La révision du stock se fait suivant la politique de réapprovisionnement  $(s, Q)$  à revue continue, où le délai de réapprovisionnement est exponentiellement distribué suivant un taux  $\mu > 0$ . Initialement, on considère que le niveau du stock maximal est égal à  $(S > 2s)$ . Cette dernière hypothèse assure que deux réapprovisionnements successifs ne se croisent pas dans le temps.

## 5.2 Modélisation du système considéré via les RdPSG

Dans le modèle représenté par la Figure 5.1, nous avons modélisé les événements stochastiques et immédiats resp. par les transitions stochastiques et immédiates resp. et qui sont représentées par des rectangles et des barres resp. Les conditions sont symbolisées par des cercles dites places. L'interprétation des places et des transitions du RdPSG de la Figure 5.1 sont données dans les deux Tableaux (Tableau 5.1 et Tableau 5.2).



Fonctions	Guards	condition
$[F_{prio1}]$		Si $(M(P_{serv}) \neq 0) \ \& \ (M(P_{orbit}) < K)$ .
$[F_{prio2}]$		Si $(M(P_{serv}) \neq 0) \ \& \ (M(P_{orbit}) = K)$ .

FIGURE 5.1 – Le RdPSG associé au système de gestion de stocks avec rappels et deux types demandes.

Place	Interprétation	marquage initial
$P_{serv1}$	Les demandes de type 1 réclamant le service.	0
$P_{serv2}$	Les demandes de type 2 réclamant le service.	0
$P_{stock}$	L'état du stock à l'instant $t$ .	S
$P_{orbit}$	L'orbite virtuelle des demandes de type 1.	0

Tableau 5.1 – L'interprétation des places du RdPSG de la Figure 5.1.

- La Dynamique du RdPSG présenté dans la Figure 5.1 est décrite comme suit :
- L'arrivée des demandes de type 1 et celles de type 2 sont resp. est déclenchée par le franchissement de l'une des deux transitions stochastiques ( $T_{arr1}$  resp.  $T_{arr2}$ ). Ces deux transitions sont des transitions sources qui sont toujours franchissables (validées). Le franchissement de  $T_{arr1}$  déclenche l'arrivée d'une demande de type 1 et un jeton est déposé dans la place  $P_{serv1}$ . Le franchissement de la transition  $T_{arr2}$  indique l'arrivée d'une demande de type 2 (lot de taille 2) et deux jetons sont déposés dans la place  $P_{serv2}$ .
  - La présence d'une demande de type 1 dans la place  $P_{serv1}$  et d'une demande de type 2 dans la place  $P_{serv2}$  respectivement, en plus de la disponibilité d'une ressource dans la place  $P_{stock}$  (un jeton pour la demande de type 1 et deux jetons pour la demande de type 2 respectivement), déclenchent le franchissement des deux transitions immédiates  $T_{serv1}$  et  $T_{serv2}$  respectivement.
  - Une demande présente dans la place  $P_{serv1}$  quand la place  $P_{stock}$  est vide, peut déclencher simultanément deux transitions immédiates  $T_{pass}$  et  $T_{rejet1}$ . Pour régler ce conflit, nous avons associé à chacune des deux transitions  $T_{pass}$  resp.  $T_{rejet1}$  une fonction guard  $[F_{prio1}]$  resp.  $[F_{prio2}]$  définissant l'ordre de priorité entre ces deux transitions immédiates et qui sont exprimées dans le modèle RdPSG de la Figure 5.1.
  - Si la condition dans la fonction guard  $[F_{prio1}]$  est remplie, alors la transition  $T_{pass}$  sera validée. Le franchissement de cette transition conduit au passage de la demande de type 1 à la place  $P_{orbit}$ . La présence d'une demande de type 1 dans la place  $P_{orbit}$  active la transition stochastique  $T_{rapp}$ , ce qui signifie qu'une demande en orbite tente de rappeler après une durée aléatoire exponentiellement distribuée avec un taux  $\theta$  (politique de rappels constants).
  - Sinon, si c'est la condition dans la fonction guard  $[F_{prio2}]$  qui est remplie, alors c'est la transition immédiate  $T_{rejet1}$  qui sera validée. Le franchissement de cette transition immédiate retire un jeton (demande) de la place  $P_{serv1}$ , c'est-à-dire qu'une demande de type 1 est immédiatement rejetée du système.
  - La présence d'une demande de type 2 (deux jetons) dans la place  $P_{serv2}$  quand la place  $P_{stock}$  ne possède pas au moins deux jetons, valide le franchissement de la transition immédiate  $T_{rejet2}$ . Le franchissement de cette transition immédiate retire la demande de type 2 (deux jetons) de la place  $P_{serv2}$ , c'est-à-dire qu'une demande de type 2 est immédiatement rejetée

Transition	Interprétation	Nature de transition	Taux
$T_{arr1}$	Arrivée d'une demande de type 1.	stochastique	$\lambda_1$
$T_{arr2}$	Arrivée d'une demande de type 2.	stochastique	$\lambda_2$
$T_{serv1}$	Service des demandes de type 1.	immédiate	/
$T_{serv2}$	Service des demandes de type 2.	immédiate	/
$T_{app}$	Approvisionnement du stock.	stochastique	$\mu$
$T_{pass}$	Passage d'une demande de type 1 à l'orbite.	immédiate	/
$T_{rapp}$	Rappel d'une demande de type 1.	stochastique	$\theta$
$T_{rejet1}$	Rejet (abondant) d'une demande de type 1.	immédiate	/
$T_{rejet2}$	Rejet (abondant) d'une demande de type 2.	immédiate	/

Tableau 5.2 – L'interprétation des transitions du RdPSG de la Figure 5.1.

du système.

- L'approvisionnement du stock est représenté par la transition stochastique  $T_{app}$ , qui n'est validée que si le nombre de jetons (articles) dans la place  $P_{stock}$  est inférieur ou égal à un seuil de commande  $s$ . Cette condition est modélisée par l'arc inhibiteur reliant cette place à la transition  $T_{app}$  ayant un poids égal à  $s + 1$ . Une fois cette transition est franchie, une quantité fixe ( $Q = S - s$ ) est ajoutée à la place  $P_{stock}$  après une durée aléatoire exponentiellement distribuée de paramètre  $\mu$ .

### 5.2.1 Analyse qualitative du modèle RdPSG établi

Une fois le modèle est établi, nous entamons son analyse. Tout d'abord, on doit vérifier les propriétés qualitatives du RdPSG, à savoir : sa bornitude, sa vivacité et son état d'accueil. Ceci est une étape préliminaire avant de passer à la construction du graphe de marquages correspondant au modèle. D'ailleurs, si sa bornitude n'est pas vérifiée, donc sûrement son graphe de marquages serait infini. De plus, il faut voir si le RdPSG est vivant, i.e. absence de blocage, alors dans ce cas on peut vérifier si le RdPSG est ergodique, si de plus l'état initial est un état d'accueil ou encore que le RdPSG est réinitialisable. Ces conditions assure l'existence de la distribution stationnaire d'après le théorème énoncé dans le chapitre 2 (Théorème 2.2). Une fois l'existence de la distribution stationnaire est garantie, on peut entamer l'analyse quantitative soit par l'étude

analytique (obtention de la chaîne de Markov à partir du graphe de marquages réduit) soit par la simulation si l'obtention de la chaîne est difficile.

Cependant, en analysant le modèle donné dans la Figure 5.1, on conclut que l'évolution du RdPSG modélisant le système de gestion de stocks considéré se réduit à l'évolution des deux places ( $P_{stock}$  et  $P_{orbit}$ ) qui sont des places bornées, d'où le RdPSG est borné, donc il admet un nombre d'états fini. De plus, le RdPSG est réinitialisable, car on peut toujours revenir à l'état initial  $M_0 = (0, 0, S, 0)$  (l'état initial est un état d'accueil) (voir la Figure 5.2). De ce fait, l'existence et l'unicité de la distribution stationnaire est garantie.

La méthode d'énumération des marquages accessibles à partir du marquage initial est réalisée pour l'exemple numérique suivant :  $S = 6$ ,  $s = 2$  et  $K = 2$ .

Après élimination des états évanescents, nous avons obtenu le graphe de marquages réduit donné dans la Figure 5.2 :

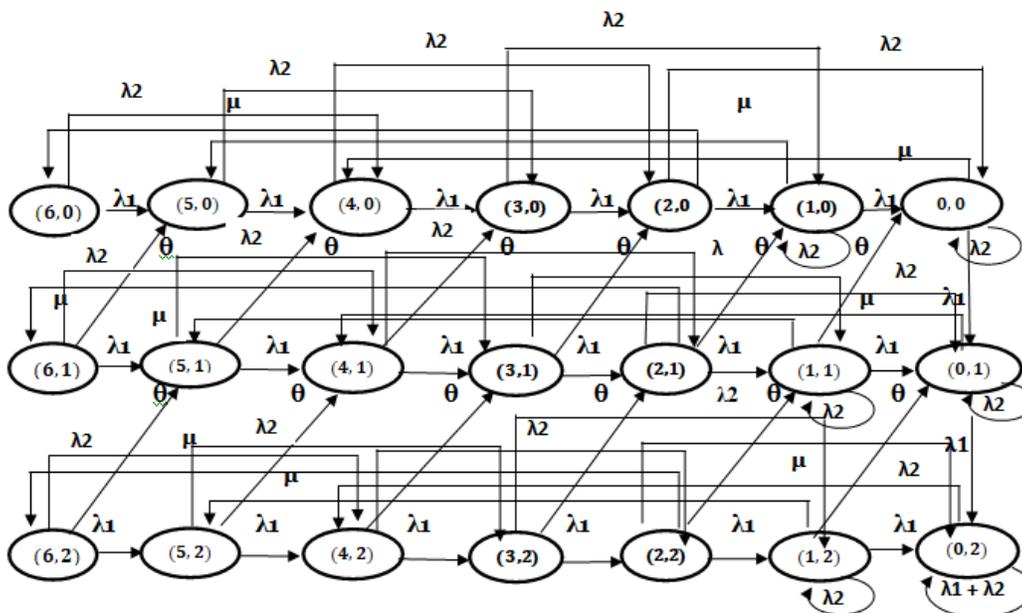


FIGURE 5.2 – Graphe de marquages réduit associé au RdPSG pour  $(S, s, K) = (6, 2, 2)$ .

La généralisation du graphe de marquages réduit pour des les valeurs  $S$ ,  $s$  et  $K$  quelconques s'est avéré difficile. Pour remédier à ce problème et pour obtenir quelques résultats quantitatifs (mesures de performances), nous avons fait appel à l'approche de simulation.

Entre plusieurs simulateurs dédiés au RdPS, nous avons sélectionné un logiciel de simulation mise en place par l'entreprise TOTAL Energies depuis les années 80 dénommé GRIF (Graphiques Interactifs pour la Fiabilité). Ce simulateur est doté d'un moteur de calcul très rapide basé sur la simulation de Monte-Carlo qui facilite l'obtention des différents indices de performances. De plus, nous avons réalisé un analyse de sensibilité de quelques mesures de performance du système de

gestion de stocks considéré en fonction des paramètres du système qui est détaillée dans la section suivante.

### 5.3 Simulation du système de gestion de stocks considéré avec le simulateur GRIF

#### 5.3.1 A propos du simulateur GRIF

GRIF (GRaphiques Interactifs pour la Fiabilité) est une suite logicielle d'excellence créée par l'entreprise TotalEnergies, et elle permet aux ingénieurs de déterminer les indicateurs fondamentaux de la sûreté de fonctionnement FMDS (Fiabilité - Maintenabilité- Disponibilité - Sécurité). GRIF est composé de 3 packages (package Booléen, package simulation et package Markovien) et de 12 modules permettant à l'utilisateur de choisir la technique de modélisation la plus adéquate à la résolution du système étudié (blocs diagrammes, arbres de défaillance, graphes de Markov, réseaux de Petri...).

La simulation se fait à l'aide du package simulation qui comporte quatre modules selon l'outil de modélisation choisi pour l'étude du système.

- **Petri** : ce module est dédié à la modélisation via l'outil de "réseaux de Petri stochastiques à prédicats".
- **Bstock** : ce module sert à la construction de blocs de diagrammes stochastiques en utilisant des bibliothèques de composants basés sur les réseaux de Petri.
- **Petro** : ce module est dédié à modéliser des systèmes multi-flux orientés sur les activités de procédés.
- **Flex** : ce module aide à l'élaboration de diagrammes multi-flux et offre la possibilité de créer ses propres prototypes en réseaux de Petri.

Tous les modules du package Simulation sont dotés de Moca-RP (pour MONte-CARlo-Réseaux de Petri), propriété de TotalEnergies : qui est un moteur de calculs ultra rapide basé, comme son nom l'indique, sur la simulation de Monte-Carlo.

#### 5.3.2 Simulation du modèle sous le simulateur GRIF

Dans cette partie, nous avons simulé le système de stocks avec deux type de demandes décrit dans la section 5.2 sous le package simulation dédié pour les systèmes modélisés via les réseaux de Petri (module **Petri**) donné dans la Figure 5.3. En effet, nous avons déroulé plusieurs scénarios (histoires) sous le moteur de calcul MOCA-RP qui est basé sur la simulation de Monte Carlo.

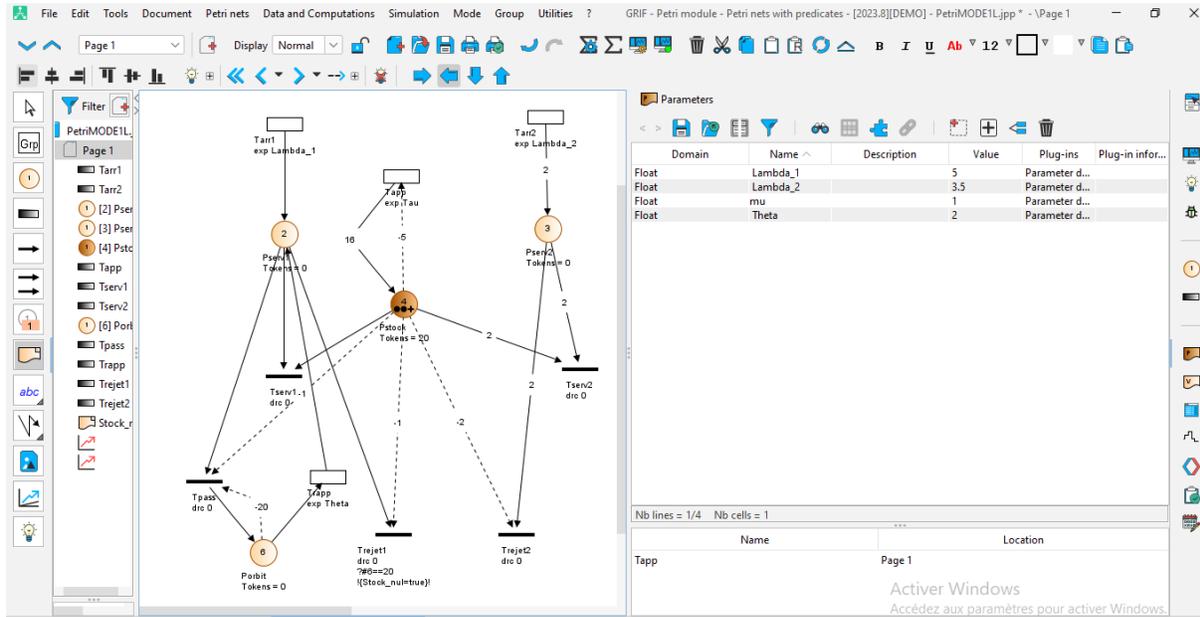


FIGURE 5.3 – Le modèle RdPSG de la Figure 5.1 sous l’interface du module petri de GRIF.

Pour observer le déroulement du système étudié dans un Horizon fini nous avons limitée le temps de simulation à  $100heures/histoire$  et le nombre d’histoires à 1 000. Nous avons initié le premier nombre au hasard pour la simulation  $N_{hasard}=12345681$ . Ces paramètres sont initiés pour simuler le modèle RdPSG avec le moteur de calcul MOCA-RP.

Pour les valeurs initiales des paramètres du système, elles sont données comme suit : Les variables  $S = 20$ ,  $s = 4$ ,  $K = 20$ . Les taux des différentes distributions exponentielles sont initiés aux valeurs de paramètres suivants :  $\lambda_1 = 5$ ,  $\lambda_2 = 3.5$ ,  $\theta = 2$  et  $\mu = 1$ .

### 5.3.2.1 Résultats de simulation

Dans cette partie, nous avons calculé les indices de performance les plus importants pour notre étude en variant les paramètres du système  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\theta$  et  $\mu$ , et qui sont donnés par :

- Le marquage moyen de la place  $P_{orbit}$ , qui est le nombre de demandes de type 1 en orbite.
- La fréquence de franchissement de  $T_{rejet1}$  et  $T_{rejet2}$  respectivement, qui représentent respectivement le taux de rejet (perte) de la demande de type 1 et de la demande de type 2.
- La probabilité de disponibilité du stock, qu’on a considéré comme mesure du niveau de service notée  $\mathbb{P}_{serv}$ .

### L’effet de variation du taux de demandes type 1 et type 2 sur les indices de performances

Dans les exemples numériques suivants, nous avons varié le taux de demandes de type 1  $\lambda_1 = \{0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4\}$ , pour voir l’effet de cette variation sur les indices de performances considérés (Figure 5.4, Figure 5.5 et Figure 5.6). Ensuite nous avons varié  $\lambda_2 =$

$\{0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4\}$  par rapport aux mêmes indices de performances (Figure 5.7, Figure 5.8 et Figure 5.9).

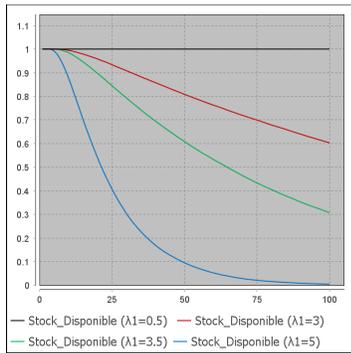


FIGURE 5.4 – La probabilité de disponibilité du stock dans une période de 100h par rapport à  $\lambda_1$ .

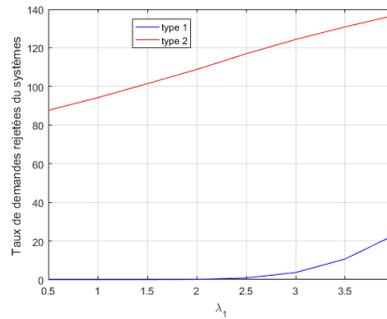


FIGURE 5.5 – Le taux de pertes des deux types de demandes par rapport à  $\lambda_1$ .

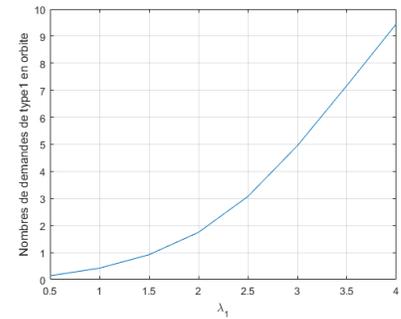


FIGURE 5.6 – Le nombre moyen de demandes de type 1 en orbite par rapport à  $\lambda_1$ .

D’après la Figure 5.4, on constate que la probabilité de disponibilité de stock chute quand le taux de demandes de type 1 augmente, car le service des demandes réduit la disponibilité du stock. Ce résultat nous a permis d’interpréter les résultats donnés dans les deux figures (Figure 5.5 et Figure 5.6). En effet, l’augmentation du taux de demandes de type 1 augmente la perte des deux types de demandes à cause de l’indisponibilité du stock (d’après Figure 5.4), mais cette perte est plus considérable dans le cas des demandes de type 2 (taille 2) car ces demandes sont immédiatement rejetées du système. D’autre part, les demandes de type 1 (demandes unitaires) sont privilégiées, car elles sont misent en orbite ce qui est montré dans la Figure 5.6 et par conséquent le taux de perte de ce type de demandes est négligeable.

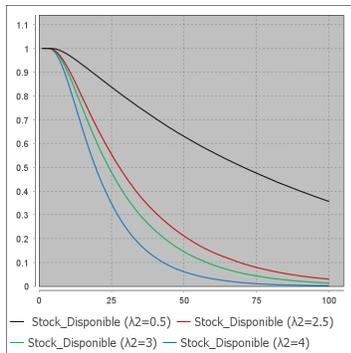


FIGURE 5.7 – La probabilité de disponibilité du stock dans une période de 100h par rapport à  $\lambda_2$ .

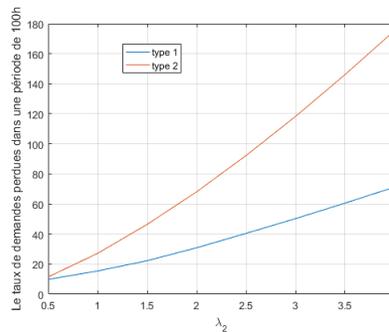


FIGURE 5.8 – Le taux de pertes des deux types de demandes par rapport à  $\lambda_2$ .

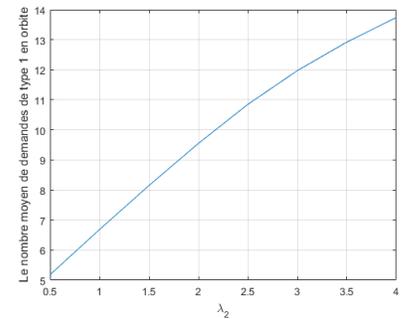


FIGURE 5.9 – Le nombre moyen de demandes de type 1 en orbite par rapport  $\lambda_2$ .

D’après la Figure 5.7, on constate que la probabilité de disponibilité de stock  $\mathbb{P}_{serv}$  diminue quand le taux des demandes de type 2 augmente, ce qui est le même comportement observé par rapport aux taux des demandes de type 1. Cependant, si on compare la Figure 5.4 et la Figure 5.7, on constate que l’arrivée des demandes de type 2 (taille 2) influe plus sur la disponibilité du stock, où cette probabilité chute plus rapidement pour les demandes de type 2. Par conséquent, quand

$\lambda_2$  augmente, la perte des deux types demandes devient plus importante que lorsque c'est  $\lambda_1$  qui augmente (voir Figure 5.5 et Figure 5.8), malgré que la perte des demandes de type 2 reste toujours plus grande car ces demandes sont immédiatement rejetées du système en cas d'indisponibilité du stock. Néanmoins, cette perte est moins considérable pour les demandes de type 1, car elles sont arriérées (mise en orbite), ce qui est montré dans la Figure 5.9.

En résumé, on conclut les deux paramètres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  ont la même influence sur les mesures des performances car l'arrivée des demandes soit de type 1 soit de type 2 augmente l'indisponibilité du stock, ce qui augmente davantage la perte de demandes (type 1 et type 2), mais cette perte est moins considérable dans le cas de type 1, car elles sont mises en attente pour être servies ultérieurement.

**L'effet de variation du taux de rappels sur les indices de performances**

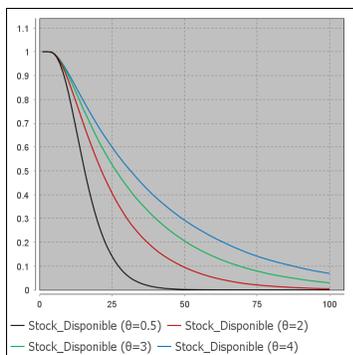


FIGURE 5.10 – La probabilité de disponibilité du stock dans une période de 100h par rapport à  $\theta$ .

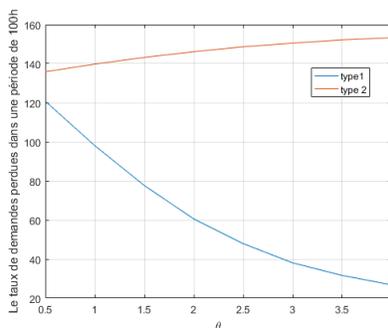


FIGURE 5.11 – Le taux de pertes des deux types de demandes par rapport à  $\theta$ .

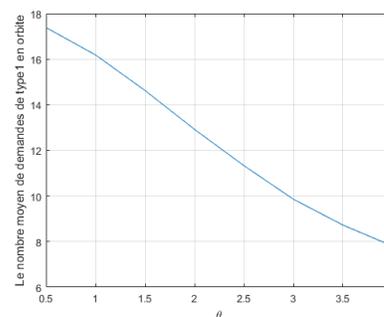


FIGURE 5.12 – Le nombre moyen de demandes de type 1 en orbite par rapport à  $\theta$ .

D'après la figure 5.10, on constate que la disponibilité du stock augmente quand le taux de rappels  $\theta$  augmente, car dans ce cas le nombre de tentatives à joindre la zone de service devient grand, donc la probabilité qu'une demande de type 1 trouve le stock disponible devient plus grande. Par conséquent, le nombre moyen de demandes de type 1 en orbite va diminuer car celles-ci quittent l'orbite continuellement pour être servies dès que le stock soit à nouveau disponible, ce qui est montré dans la Figure 5.12.

D'après la Figure 5.11, on constate que la perte de demandes de type 1 diminue par rapport à  $\theta$ , car ces demandes seront servies suite à la disponibilité du stock qui devient plus importante. Par contre, la perte des demandes de type 2 augmente malgré que la disponibilité du stock augmente, car en plus des arrivées primaires des demandes de type 1, d'autres en orbite (demandes secondaires) rappellent continuellement, ce qui augmente leurs chances d'être servies.

**L'effet de variation du taux de réapprovisionnement sur les indices de performances**

D'après la Figure 5.13, on constate que la probabilité de disponibilité du stock augmente lorsque le taux de réapprovisionnement  $\mu$  augmente, car dans ce cas les inter-réapprovisionnements deviennent plus fréquents, donc le stock est disponible longtemps. Par conséquent, dû à la disponi-

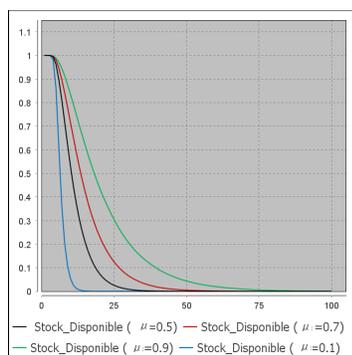


FIGURE 5.13 – La probabilité de disponibilité du stock dans une période de 100h par rapport à  $\mu$ .

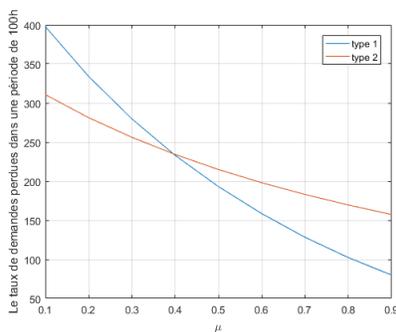


FIGURE 5.14 – Le taux de pertes des deux types de demandes par rapport à  $\mu$ .

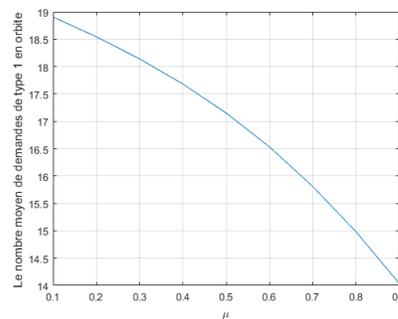


FIGURE 5.15 – Le nombre moyen de demandes de type 1 en orbite par rapport à  $\mu$ .

bilité qui est assurée par les réapprovisionnements  $\mu$ , le taux de perte des deux types de demandes diminue, ce qui est observé dans la figure 5.14. De plus, le nombre moyen des demandes de type 1 quittent l'orbite et elles seront servies du stock, ce qui montré dans la figure 5.15.

**Remarque 5.3.1.** • Toutes ces interprétations nous font que confirmer les hypothèses du système, plus précisément le fait que les demandes de type 1 sont privilégiées par rapport aux demandes de type 2, car elles sont partiellement arriérées ce qui fait que leurs perte est négligeable par rapport à la perte des demandes de type 2. Cependant, le modèle de gestion de stocks proposé dans ce chapitre n'est qu'une proposition basée sur les interprétations numériques du chapitre 3 et chapitre 4. Néanmoins, il existe des situations réelles, où notre modèle peut être exploité, comme le cas des systèmes de gestion de stocks avec produits périssables, où on privilégie plutôt l'unité que le lot pour éviter une perte. Par contre, il existe d'autres situations où c'est les lots qui sont plus rentables que les unités, par exemple dans les grandes familles (ménages), où généralement l'arriération des produits se fait par lots, donc le modèle proposé dans ce chapitre ne peut être compatible que si on privilégie les demandes lots par leurs arriération au lieu des demandes unitaires.

• Dans l'étude numérique faite sous une analyse de sensibilité de quelques mesures de performances par rapport aux paramètres du système, on ne peut pas parler de la profitabilité des demandes, sauf si on arrive à dégager une forme explicite de la fonction profit.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons modélisé un système de gestion de stocks avec deux types de demandes distinguées par leurs tailles, arrivées poissonniennes et temps de service négligeable (service immédiat). En situation de rupture de stock, les deux types de demandes sont traités différemment dans le système, où on privilège les demandes unitaires qui sont partiellement arriérées et qui rappellent après durée de temps exponentiellement distribuée (rappels constants), tandis que les demandes unitaires sont complètement rejetées du système. Cependant, nous n'avons pas ef-

fectué d'analyse mathématique pour ce modèle, car la généralisation du graphe de marquages nous empêche d'aller plus loin, i.e. Extraire la chaîne de Markov associé au processus de marquage (marquages tangibles). Pour palier à cette difficulté, nous avons fait recours au simulateur "GRIF". Ce simulateur, nous a permis de réaliser une analyse de sensibilité de quelques performances du système par rapport aux différents paramètres du système. Enfin, l'étude réalisée dans ce chapitre n'est qu'une proposition en prenant en compte les interprétations liées à la taille des demandes données dans les deux précédents chapitres (elle n'est pas basée sur un système réel), mais ce modèle nous guide à plusieurs perspectives de recherche liées aux systèmes de gestion de stocks avec deux classes de clients qui seront données juste après la conclusion générale.

---

# Conclusion générale

La gestion de stocks est un sujet d'intérêt dans le domaine de la recherche opérationnelle ce qui a donné naissance à plusieurs travaux d'actualité. Le sujet de cette thèse de doctorat concerne la modélisation et l'analyse de quelques systèmes de gestion de stocks via l'approche des RdP. En premier lieu, nous avons présenté les éléments essentiels d'un système de gestion de stocks. Selon l'hypothèse de ruptures de stock permises, nous avons pu classer ces systèmes, à savoir la classe des systèmes avec arriération partielle des demandes et aussi la classe des systèmes avec rappels. La particularité de ces deux classes nous a motivé à considérer des systèmes de gestion de stocks avec demandes partiellement arriérées et rappels.

Dans cette thèse, nous avons exposé un état de l'art de quelques travaux récents sur les modèles de gestion de stocks avec rappels où chaque travail peut être distingué par les différents paramètres qui sont pris en compte (le processus d'arrivée, le temps de service, la politique de gestion de stocks, etc). Notre travail se différencie des autres travaux par rapport aux nombreuses hypothèses considérées, en plus de la politique d'arriération des demandes et les rappels, on trouve aussi le type de la demande (lot). Dans le cas d'un stock en rupture, ces demandes ne sont arriérées que partiellement, i.e. un seuil est fixé pour le nombre de demandes qui sont misent en attente (en orbite) et au delà de ce seuil les demandes seront complètement rejetées (perdus). Cette politique d'arriération partielle répond aux objectifs d'une entreprise qui n'a pas la capacité de recevoir un grand nombre de demandes spécialement lorsque l'approvisionnement de son stock est incertain (délai de livraison aléatoire).

En deuxième lieu, nous avons fait appel à l'outil de modélisation des RdP, plus précisément le formalisme des réseaux de Petri stochastiques généralisés (RdPSG). Notre choix s'est porté sur ce formalisme pour la modélisation et l'analyse de quelques systèmes de gestion de stocks avec rappels considérés, à savoir : Les systèmes de gestion de stocks de type  $(s, Q)$  avec demandes partiellement arriérées et rappels classiques (rappels constants) et aussi sur un autre système de gestion de stocks avec rappels et deux types de demandes.

En utilisant cet outil, nous avons pu représenter les systèmes de gestion de stocks considérés avec une représentation à la fois simple et détaillée. Un intérêt majeur de ce formalisme est qu'il

combine entre l'analyse qualitative et quantitative. D'abord, l'analyse qualitative qui nous a permis de s'assurer du bon fonctionnement des systèmes considérés, tels que l'absence de blocage, la réinitialisabilité et la bornitude. Des conditions qui nous garantissent l'existence d'un régime stationnaire pour pouvoir compléter cette analyse qualitative. En effet, grâce à la propriété d'isomorphisme entre le graphe réduit d'un RdPSG et le graphe d'états d'une CMTC, nous avons caractérisé la dynamique des systèmes étudiés avec rappels classiques et constants par une CMTC décrivant le niveau du stock et le nombre de demandes arriérées (en orbite). A l'état stationnaire, les probabilités d'états sont obtenus par la résolution d'un système d'équations qu'on a pu exprimé sous une forme recursive. De plus, les RdPSG nous offrent une étude de performance des systèmes étudiés en utilisant des formules simples mais qui peuvent parfois être difficiles voir impossible à obtenir avec l'approche des modèles markoviens ou encore les modèles de files d'attente.

Pour répondre aux exigences d'une entreprise ayant comme objectif maximiser sa rentabilité tout en tenant compte des différents coûts encourus, nous avons proposé une fonction dite "récompense-coûts" à maximiser par rapport à une politique de gestion qui est donnée par : Le stock maximal, le niveau de commande et le seuil de demandes à arriérer. La fonction "récompense-coûts" a été définie comme un compromis entre la récompense (revenu) attribuée au système à chaque accomplissement d'un service et la fonction "coût total" à maximiser sous des contraintes du modèle qui est formulé tel un problème d'optimisation. La solution de ce problème n'est retrouvée que numériquement en raison de la forme recursive de la distribution stationnaire. Pour illustrer cette approche numérique, nous avons pensé à une analyse de sensibilité des valeurs optimales, à savoir la politique optimale et le profit optimal en fonction des paramètres exogènes au système et de quelques paramètres économiques.

L'étude de sensibilité des valeurs optimales en fonction des différents paramètres du système engendrés par les deux modèles avec rappels (classiques et constants) peut servir dans la prise de décision de l'entreprise pour répondre à son objectif qui est de maximiser sa rentabilité en fonction du choix des paramètres (contrôlables et non contrôlables), tout en prenant en compte la politique de rappels des clients en cas de rupture de stock (politique de rappels classiques et la politique de rappels constants).

Ainsi, nous arrivons à la dernière contribution dans cette thèse qui s'appuie essentiellement sur les interprétations de l'étude numérique de la fonction récompense-coûts proposée pour les deux modèles avec rappels classiques et constants, où nous avons constaté que les demandes unitaires sont les demandes profitables pour l'entreprise. En effet, nous avons proposé un système de gestion de stocks avec deux types de demandes distinguées selon leurs tailles (taille 1 et taille 2). Ces demandes arrivent au système suivants deux flux d'arrivées et elles sont servies immédiatement. Dans ce système, nous avons privilégié les demandes unitaires lors de rupture de stock, telles que ces demandes (type 1) sont partiellement arriérées, tandis que les demandes de taille 2 (type 2) sont

complètement rejetées du système. Pour sa modélisation, nous avons fait appel au formalisme de RdPSG. Pour ce modèle, nous avons pu effectuer une analyse qualitative du système pour un cas d'étude du graphe de marquages, mais la généralisation de ce graphe s'est avérée compliquée. Par conséquent, notre étude n'a pas pu aboutir à des formules explicites des mesures de performances du système étudié, donc nous avons fait appel au simulateur GRIF. Les résultats de la simulation ont été présentés sous forme d'une analyse de sensibilité de quelques mesures de performances en fonction des paramètres du système. Cette analyse nous a permis de confirmer certains aspects considérés dans le système étudié, à savoir : l'hypothèse d'arriération partielle des demandes de type 1 et de perte des demandes de type 2.

Enfin, pour enrichir ce travail, plusieurs perspectives de recherche nous sont intéressantes à exploiter dans de prochains travaux, à savoir :

- Pour les systèmes étudiés, nous pouvons prendre en compte les autres politiques de rappels, tout en considérant un service aléatoire, ou encore la recherche orbitale.
  - Par rapport aux articles stockés, on peut considérer un ou plusieurs types, tout en introduisant la durée de vie de l'article.
  - Voir la possibilité de considérer une demande aléatoire (de taille aléatoire) au lieu de déterministe.
  - Exploiter d'autres formalises des RdP, par exemples les RdPS à prédicats ou les RdPSG colorés dans la modélisation des systèmes à étudier.
-

# Bibliographie

- [1] N. Aiane, F. Rahmoune, and D. Aïssani. Modelling and performance evaluation in the  $(R, s, l_n Q)$  inventory system. *International Journal of Mathematics in Operational Research.*, 22, no. 3 :363–402, 2022.
- [2] M. Alimardani, F. Jolai, and H. Rafiei. Bi-product inventory planning in a three-echelon supply chain with backordering, poisson demand and limited warehouse space. *Journal of Industrial Engineering International*, 9 :1–22, 2013.
- [3] E. Alvarez and M. van der Heijden. On two-echelon inventory systems with poisson demand and lost sales. *European Journal of Operational Research*, 334 :334–338, 2014.
- [4] N. Anbazhagan and K. Jeganathan. Perishable inventory system with a finite population and repeated attempts. *International Journal of Applied Operational Research*, 3 :25–42, 2013.
- [5] N. Anbazhagan, J. Wang, and D. Gomathi. Base stock policy with retrial demands. *International Journal of Applied Operational Research*, 37(6) :4464–4473, 2013.
- [6] J. Andersson and P. Melchior. A two-echelon inventory model with lost sales. *International Journal of Production Economics*, 69(3) :307–315, 2001.
- [7] J. R. Artalejo. Analysis of an M/G/1 queue with constant repeated attempts and server vacations. *Computers Ops Res.*, 24 :493–504, 1997.
- [8] J. R. Artalejo. Retrial queues with a finite number of sources. *Journal of the Korean Mathematical Society*, 35 :503–525, 1998.
- [9] J. R. Artalejo, A. A. Gómez-Corral, and M. F. Neuts. Analysis of multiserver queues with constant retrial rate. *European Journal of Operational Research*, 135 :569–581, 2001.
- [10] J. R. Artalejo and A. Gómez-Corral. Steady state solution of single server queue with linear repeated requests. *Journal of Applied Probability*, 34(3-4) :223–233, 1997.
- [11] J. R. Artalejo and A. Gómez-Corral. On a single server queue with negative arrivals and request repeated. *Journal of Applied Probability*, 36 :907–918, 1999.
- [12] J. R. Artalejo and A. Gómez-Corral. *Retrial queueing system : A computation approach*. Springer Edition, Berlin, 2nd edition, 2008.

- [13] J. R. Artalejo, A. Krishnamoorthy, and M.J. Lopez-Herrero. Numerical analysis of  $(s, S)$  inventory systems with repeated attempts. *Annals of Operations Research*, 141(1) :67–83, 2006.
- [14] J. R. Artalejo and M. J. López-Herrero. On the  $m/g/1$  queue with quadratic repeated attempts. *Statistical Methods*, 3 :60–78, 2001.
- [15] G. Balbo, G. Chiola, G. Franceschinis, and G. Molina Roet. On the efficient construction of the tangible reachability graph of generalized stochastic petri nets, madison, wisconsin. In *Proc. International Workshop on Petri Nets and Performance Models (PNPM 87)*, pages 136–145. ACM Transactions on Computer Systems, 1987.
- [16] L. Bazizi, F. Rahmoune, and O. Lekadir. Optimisation of batch stochastic  $(s, Q)$  continuous review inventory system with retrial demands. In *Colloque International MOAD'22 METHODES ET OUTILS d'AIDE A LA DECISION*, 2022.
- [17] L. Bazizi, F. Rahmoune, O. Lekadir, and K. Labadi. Modélisation et simulation discrète d'un système de gestion des stocks avec deux types de demandes et rappels. In *Conférence internationale MOFA'19, université de Bejaia*, 2019.
- [18] L. Bazizi, F. Rahmoune, O. Lekadir, and K. Labadi. Stochastic analysis of the  $(s, Q)$  continuous review inventory system with retrial demands. In *IEEE International Conference on Recent Advances in Mathematics and Informatics (ICRAMI-2021)*, pages 1–6, 2021.
- [19] L. Bazizi, F. Rahmoune, O. Lekadir, and K. Labadi. Modeling, performance evaluation and optimization of  $(s, Q)$  retrial inventory system with partial backlogging demands : A gspn approach. *European journal of industrial engineering (EJIE)*, 17 (4) :529–569, 2023.
- [20] E. Bazsa, J. Frenk, and P. Den Iseger. Modeling of inventory control with regenerative processes. *International Journal of Production Economics*, 71 :263–276, 2001.
- [21] A. Bensoussan, M. Çakanyildirim, Minjárez-Sosa J.A., A. A. Royal, and S.P. Sethi. problems with partially observed demands and lost sales. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 136 :321–340, 2008.
- [22] O. Berman and E. Kim. Dynamic inventory strategies for profit maximization in a service facility with stochastic service, demand and lead time. *Journal of Mathematical Methods of Operations Research*, 60(3) :497–521, 2004.
- [23] D. Beyer, F. Cheng, and S.P Sethi M.I Taksar. *Markovian Demand Inventory Models*. Springer, New York, 2nd edition, 2010.
- [24] J. Billington, M. Diaz, and G. Rozenberg. Application of petri nets to communication networks. *Springer Verlag Lecture Notes in Computer Science, editor, Advances in Petri nets*, 1605, 1999.
-

- [25] O. Bounou, A. El Barkany, and A. El Biyaali. Modelization of the spare parts supply performance by petri nets. In *12th International Colloquium of Logistics and Supply Chains Management LOGISTIQUA 2019, IUT de Montreuil, France*. IEEE, 12–14 June.
- [26] O. Bounou, A. El Barkany, and A. El Biyaali. Stochastic and deterministic petri networks model for joint management model for spare parts and maintenance : Simulation study. *International Journal of Engineering Research in Africa*, 46 :180–188, 2020.
- [27] G.W. Brams. *Réseaux de Petri : Théorie et Pratique*. Masson, Paris, 1983.
- [28] F. Brissaud, C. Folleau, and B.D. Cournaud. Modélisation de maintenances imparfaites avec réseaux de petri stochastiques à prédicats. In *22e Congrès de Maîtrise des Risques et de Sûreté de Fonctionnement Lambda Mu 22, Le Havre, France*, pages hal–03483408, 12-15 Octobre 2020.
- [29] S. R. Chakravarthy, A. Maity, and U. C. Gupta. An  $(s, s)$  inventory in a queueing system with batch service facility. *Annals of Operations Research*, 258 :263–283, 2017.
- [30] R. Champagnat and R. vallette. *définition d'un modèle hybride et pilotage en temps-réel*. Thèse de doctorat, Université de Toulouse, France, 1998.
- [31] H. Chen, L. Amodeo, and L. Boudjeloud. Supply chain optimization with petri nets and genetic algorithms. In *International Conference on Industrial Engineering and Production Management*, page 49–58., 2003.
- [32] B. D. Choi, Y.W. Shin, and W. C. Ahn. Retrial queues with collision arising from unslotted csma/cd protocol. *Queueing Systems*, 11 :335–356, 1992.
- [33] R. David and H. Alla. Petri nets for modeling of dynamic systems : A survey. *Automatica*, 30(2) :175–202, 1994.
- [34] A.A. Desrochers and R.Y. Al-Jaar. Applications of petri nets in manufacturing systems : Modeling, control and performance analysis. *The Institute of Electrical and Electronics Engineers*, Corpus ID : 57835081, 1995.
- [35] M. Diaz. *Les réseaux de Petri - Modèles Fondamentaux*. Hermès Science Publications, Paris, 2001.
- [36] T. Dosda, J.-Y. Brandelet, H. Brunelière, P. Lacaille, N. Playez, and F. Aubert. Etude probabiliste de sûreté dynamique par la méthode des réseaux de petri. In *21e Congrès de Maîtrise des Risques et Sûreté de Fonctionnement*, 2018.
- [37] C. Dutheillet. *Symétrie dans le réseaux colorées - Définition, analyse et application à l'évaluation des performances*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, France, 1992.
- [38] B. Mandal et al. An eoq inventory model for time-varying deteriorating items with cubic demand under salvage value and shortages. *International Journal of Systems Science and Applied Mathematics*, 5 :36–42, 2020.
-

- 
- [39] G. I. Falin. Model of coupled switching in presence of recurrent calls. *Eng. Cybernet. Rev*, 17 :53–59, 1979.
- [40] K. Farahmand. Single line queue with repeated demands. *Queueing Systems*, 6 :223–228, 1990.
- [41] G. Fayolle. *A simple telephone exchange with delayed feedbacks*, In *Teletraffic Analysis and Computer Performance Evaluation*. Boxma, O.J. Cohen, J.W. Tijms, H.C.(Eds.), Elsevier, Amsterdam, 2nd edition, 1986.
- [42] A. Finkel. The minimal coverability graph for petri nets. In *Int. Conf. on Appl. and Theory of Petri nets APN '91 Proc. of 12th*, pages 210–243, 1993.
- [43] G. Florin and S. Natkin. Les réseaux de petri stochastiques. *Technique et Science Informatiques*, 4(1) :61–94, 1985.
- [44] J. Frenk and M. Kleijn. On regenerative processes and inventory control. *Pure Math. Appl.*, 9 :61–94, 1998.
- [45] G. Geeraerts, J. F. Raskin, and L. Van Begin. Expand, enlarge and check : New algorithms for the coverability problem of wsts. *Journal of Computer and System Sciences*, 72(1) :180–203, 2006.
- [46] A. C. Geniet. *Les réseaux de Petri : Un outil de modélisation*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [47] N. Gharbi. *Évaluation des Performances et de la Fiabilité des Systèmes Multi-classes avec Rappel à l'aide des Réseaux de Petri Stochastiques Colorés*. Thèse de doctorat, Université USTHB d'alger, Algérie, 2007.
- [48] L. Ghomri and H. Alla. Continuous petri nets and hybrid automata for the analysis of manufacturing systems. *IFAC-PapersOnLine*, 28(3) :1024–1029, 2015.
- [49] F. Harris. How many parts to make at once. *Factory(The Magazine of Management)*, 10 :135–136, 1913.
- [50] B.R. Haverkort. Approximate performability and dependability modelling using generalized stochastic petri nets. *Performance Evaluation*, 18 :61–78, 1993.
- [51] R.M. Hill, M. Seifbarghy, and D.K. Smith. A two-echelon inventory model with lost sales. *European Journal of Operational Research*, 181 :753–766, 2007.
- [52] L. Ikhlef, S. Hakmi, O. Lekadir, and D. Aïssani. Petri net analysis of a queueing inventory system with orbital search by the server. *Demonstratio Mathematica*, 56(1) :20220207, 2023.
- [53] M. Ioualalen and A. Aïssani. Les symétries dans les réseaux de petri stochastiques (rdps) construction du graphe de symbolique. *RAIRO Operations Research*, 34 :237–249, 2000.
- [54] S. Jain and S.N.R Raghavan. A queueing approach for inventory planning with batch ordering in multi-echelon supply chains. *Central European Journal of Operations Research*, 17(1) :95–110, 2009.
-

- [55] J.S.A. Jenifer and B. Sivakumar. A continuous review ( $s, S$ ) inventory system with postponed demands at service facility. *European J. of Industrial Engineering*, 13 :1–28, 2019.
- [56] K.P. Jose and P. Beena. On a retrial production inventory system with vacation and multiple servers. *International J. of Computational Mathematics*, 6 :108, 2020.
- [57] R. M. Karp and R. E. Miller. Parallel program schemata. *Journal of Computer and System Sciences*, 3(2) :147–195, 1969.
- [58] T. Karthick, B. Sivakumar, and G. Arivarignan. An inventory system with two types of customers and retrial demands. *International Journal of Systems Science Operations & Logistics*, 2 :90–112, 2015.
- [59] A. Krishnamoorthy and Viswanath C Narayanan. Stochastic decomposition in retrial queueing inventory systems. *European Journal of Operational Research*, 228 :358–366, 2016.
- [60] A. Krishnamoorthy, D. Shadjin, and Viswanath C. Narayanan. *Inventory with Positive Service Time : a Survey*. ISTE Editions 2020, 2021.
- [61] K. Labadi. *Contribution à la modélisation et l'analyse des chaines logistique à l'aide de réseaux de Petri*. Thèse de doctorat, Troyes University, Troyes, France, 2005.
- [62] K. Labadi, H. Chen, and L. Amadeo. Modeling and performance evaluation of inventory systems using batch deterministic and stochastic petri nets. *IEEE Transactions On Systems, Man, and Cybernetics-part C :ART C : Applications and Reviews*, 37(6) :1287–1302, 2007.
- [63] A. Sophia Lawrence, B. Sivakumar, and G. Arivarignan. A perishable inventory system with service facility and finite source. *Applied Mathematical Modelling*, 37(7) :4771–4786, 2013.
- [64] C. Lindemann, G. Ciardo, R. German, and G. Hommel. Performability modeling of an automated manufacturing system with deterministic and stochastic petri nets, atlanta. In *IEEE Press, editor, Proc. IEEE Inter. Conf. on Robotics and Automation*, pages 576–581, May 1993.
- [65] J. D. C. Little. A proof of the formula :  $l = \lambda w$ . *Operations Research*, 9(3) :383–387, 1961.
- [66] R. Manikandan and S. Sajeev Nair.  $M/M/1/1$  queueing-inventory system with retrial of unsatisfied customers. *Communications in Applied Analysis*, 21 :217–236, 2017.
- [67] M. Ajmone Marsan, G. Balbo, and G. Conte. A class of generalized stochastic petri nets for the performance evaluation of multiprocessor systems. *ACM Transactions on Computer Systems*, 2(2) :93–122, 1984.
- [68] M. Ajmone Marsan, G. Balbo, G. Conte S. Donatelli, and G. Franceschinis. *Modelling with Generalized Stochastic Petri Nets*. John Wiley & Sons, New York, 1995.
- [69] M. Ajmone Marsan, M. Meo, and M. Sereno. Gspn analysis of dual-band mobile telephony networks. In *IEEE Computer Society Press, editor, Proc. of the International Workshop on Petri Nets and Performance Models (PNPM'99)*, pages 54–63, 1999.
-

- [70] M.A. Marsan, G. Balbo, G. Chiola, S. Donatelli G. Conte, and G. Franceschinis. An introduction to generalized stochastic petri nets. *Microelectronics and Reliability*, 31(4) :699–725, 1991.
- [71] M. Merlin and D. J. Farber. Recoverability of communication protocols : Implications of a theoretical study. In *IEEE Transactions on Communications*, page 1036–1043, 1976.
- [72] M.K. Molloy. *On the integration of delay and throughput measures in distributed operating models*. Thèse de doctorat, University of California, Los Angeles, 1981.
- [73] M.K. Molloy. Performance analysis using stochastic petri nets. *IEEE Transaction on Computers*, C-31(9) :913–917, 1982.
- [74] D. C. Montgomery, M. S. Bazaraa, and A. K. Keswani. Inventory models with a mixture of backorders and lost sales. *Naval Research Logistics journal*, 20 :255–263, 1981.
- [75] S. Salini Nair and K. P. Jose. Solution to production inventory systems with orbit, buffer and different service rates. *Journal of Mathematics*, 8 :328–347, 2019.
- [76] S.O. Natkin. *Les réseaux de Petri stochastiques et leur application à l'évaluation des systèmes informatiques*. Thèse de doctorat, Conservatoire National des Arts et Metiers (CNAM), Paris, Juin 1980.
- [77] D.W. Pentico and M.J. Drake. A survey of deterministic models for the eoq and epq with partial backordering. *European Journal of Operational Research*, 14 :179–198, 2011.
- [78] C. J. Pérez-Jiménez and J. Campos. On state space decomposition for the numerical analysis of stochastic petri nets. In *IEEE Computer Society Press, editor, Proc. of the International Workshop on Petri Nets and Performance Models (PNPM'99)*, pages 54–63, 1999.
- [79] C. Periyasamy. A finite population discrete time inventory system with postponed demands. *International Journal of Mathematical Archive*, 8 :86–90, 2017.
- [80] C.A. Petri. *Kommunikation mit Automaten*. Thèse de doctorat, Institut für Instrumentelle Mathematik, University of Bonn, , 1962, West Germany 1962.
- [81] T. Phung-Duc. Retrial queueing models : A survey on theory and applications. <https://arxiv.org/abs/1906.09560>, 2019.
- [82] E.L. Porteus. *The Newsvendor Problem*. In : Chhajed, D., Lowe, T.J. (eds) Building Intuition. International Series in Operations Research & Management Science, Boston, 2008.
- [83] G. Rabinowitz, M. Abraham, C. Ching-Wu, and B. Eddy Patuwo. A partial backorder control for continuous review  $(r, Q)$  inventory system with poisson demand and constant lead time. *Computers and Operations Research*, 22 :689–700, 1995.
- [84] B. Rabta. *Nouvelles conditions et nouvelles estimations de la stabilité des chaînes de Markov, Application aux modèles stochastiques de gestion des stocks, SCHOOL = Université de Bejaia, Bejaia, YEAR = 2006, type = Thèse de doctorat*,. PhD thesis.
-

- 
- [85] B. Rabta and D. Aissani. Strong stability in an  $(R, s, S)$  inventory model. *International Journal of Production Economics*, 97(2) :159–171, 2005.
- [86] Radasanu and Alin Constantin. Inventory management, service level and safety stock. *Journal of Public Administration, Finance and Law*, 9(9) :145–153, 2016.
- [87] N.R.S. Raghavan and D. Roy. A stochastic petri net approach for inventory rationing in multi-echelon supply chains. *Journal of Heuristics*, 11(5-6) :421–446, 2005.
- [88] N.R.S. Raghavan and N. Viswanadham. Performance analysis and design of supply chains : A petri net approach. *Journal of the Operational Research Society*, 51 :1158–1169, 2000.
- [89] C. Ramchandani. *Analysis of Asynchronous Concurrent Systems by Timed Petri nets*. Thèse de doctorat, Massachusetts Institute of Technology, Department of Electrical Engineering, Cambridge, Massachusetts, 1974.
- [90] D. Rosenberg. A new analysis of lot-size model with partial backlogging. *Naval Research logistics*, 26 :349–353, 1979.
- [91] M. Saffari, S. Mohsen, and F. Hassanzadeh. A queuing system with inventory and competing suppliers. *European J. of Industrial Engineering*, 13(3) :420–433, 2019.
- [92] M.Reni Sagayaraj, D. Moganraj, and C. Periyasamy. A finite population discrete time inventory system with retrial demands. *International Journal of Modern Engineering Research*, 5 :52–56, 2015.
- [93] L.A. San-José, J. Sicilia, and J. Garcia-Laguna. A general model for eoq inventory systems with partial backlogging and linear shortage costs. *International Journal of Systems Science*, 40 :59–71, 2009.
- [94] L.A. San-José, J. Sicilia, V. Pando, and D. Alcaide-López de Pablo. Optimization of an inventory system with partial backlogging from a financial investment perspective. *International Transactions in Operational Research*, 29(2) :1–23, 2021.
- [95] N. Sangeetha, B. Sivakumar, and G. Arivarignan. Optimal control of production time of perishable inventory system with finite source of customers. *OPSEARCH*, 52 :412–430, 2015.
- [96] M. Schwarz and H. Daduna. queuing systems with inventory management with random lead times and with backordering. *Mathematical Methods of Operations Research*, 64 :383–414, 2006.
- [97] S. M. Seyedhoseini, R. Rashid, I. Kamalpour, and E. Zangeneh. Application of queuing theory in inventory systems with substitution flexibility. *Journal Industrial Engineering International*, 11 :37–44, 2015.
- [98] D. Shajin and A. Krishnamoorthy. Stochastic decomposition in retrial queuing-inventory system. *RAIRO Operations research*, 54 :81–99, 2020.
-

- [99] E. Silver. Some ideas related to the inventory control of items having erratic demand patterns. *Journal of the Canadian Operations Research Society*, 8 :87–100, 1970.
- [100] B. Sivakumar. An inventory system with retrial demands and multiple server vacation. *Quality Technology and Quantitative Management*.
- [101] B. Sivakumar. Two-commodity inventory system with retrial demand. *European Journal of Operational Research*, 187 :70–83, 2008.
- [102] B. Sivakumar. A perishable inventory system with retrial demands and a finite population. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 224(1) :29–38, 2009.
- [103] E. Teimoury, A. Mazlomi, R. Nadafioun, G. Khondabi, Iman G., and M. Fathi. Inventory planning with batch ordering in multi-echelon multi-product supply chain by queuing approach. In *Proceeding of the international Multiconference of Engineering and Computer Scientists*, pages 2, Hong Kong, 2011.
- [104] P.V. Ushakumari. On  $(s, s)$  inventory system with randomlead time and repeated demands. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, 2006 :1–22, 2006.
- [105] W-T. Wang, H-M. Wee, Y. L. Cheng, Chin Lin Wen, and E.C-B. Leopoldo. EOQ model for imperfect quality items with partial backorders and screening constraint. *European J. Industrial Engineering*, 9 :1–12, 2015.
- [106] V.S.S. Yadavalli, J. Kathiresan, and N. Anbazhagan. A continuous review inventory system with retrial customers and two-stage service. *Applied Mathematics and Information Sciences*, 12 :441–449, 2018.
- [107] A. Zenie. *Les réseaux de Petri stochastiques colorés : Application à l'analyse des systèmes répartis en temps réel*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, France, 1987.
- [108] P. Ziegler and H. Szczerbicka. A structure based decomposition approach for gspn. In *Proc. of the 6th Int. Workshop on Petri Nets & Performance Models PNPM'95*, pages Durham, North–Carolina USA, October 1995.

## Résumé :

Dans cette thèse, nous avons proposé quelques modèles de gestion de stocks de type  $(s,Q)$  avec rappels et demandes partiellement arriérées à étudier en usant de l'outil des réseaux de Petri stochastiques généralisés (RdPSG). Dans ces modèles étudiés plusieurs hypothèses ont été envisagées, à savoir : une taille de demande lot déterministe, une source infinie de demandes potentielles, un délai de livraison aléatoire et des rappels suivant deux politiques "rappels classiques" et "rappels constants". Après une modélisation appropriée pour ces deux systèmes aux différentes politiques de rappels, nous avons pu faire une analyse stochastique, qui nous a donné la distribution stationnaire et les mesures de performances de ces systèmes étudiés. Pour une gestion optimale du stock, nous avons formulé un problème d'optimisation dont la fonction objectif est une fonction récompense-coûts engendrés par les modèles de gestion de stocks considérés. Pour résoudre ce problème, nous avons proposé une approche numérique. Dans le but d'illustrer les résultats de cette approche, nous avons présenté quelques exemples numériques et une analyse de sensibilité des valeurs optimales en fonction des paramètres du système ainsi que quelques paramètres économiques a été réalisée. Enfin, nous avons proposé l'étude d'un système avec deux types de demandes (demandes type-1 de taille unitaire et demandes type-2 de taille lot). Dans la situation de rupture de stock, nous avons privilégié d'arriérer partiellement les demandes de type 1 et les demandes de type 2 sont complètement rejetées du système. Pour analyser ce modèle, nous avons fait appel au simulateur GRIF.

**Mots clés :** Gestion de stocks ; Réseau de Petri Stochastiques Généralisés ; Politique Partiellement arriérées ; Gestion Optimale ; Analyse Stochastique ; Fonction Récompense-coûts.

## ABSTRACT :

In this thesis, we have proposed different  $(s,Q)$  inventory models with retrials and partially backlogged demands, using the stochastic and generalized Petri nets modelling tool (GSPN). In the studied models, several hypotheses are considered, namely: a deterministic batch demand size, an infinite source of potential demands, a random delivery time and retrials according to the two policies: "constant retrials" and "classic retrials". For the established models, we have investigated a stochastic analysis, as the stationary distribution and the performances measures. For optimal inventory management, we have formulated an optimization problem whose objective function is a reward-cost function elaborated for the studied inventory models. To solve the optimization problem, we have proposed a numerical approach. In order to illustrate the results of this approach, we have presented some numerical examples as a sensitivity analysis of optimal values versus the system parameters and some economic parameters. Finally, we proposed to study an inventory model with two types of demands. In the out-of-stock situation, we have opted for a partial backlogging for the type 1 of demands that are partially backlogged, while type 2 of demands is completely rejected from the system. To analyze the model, we used GRIF simulator.

Key -words: Inventory management system; Generalized Stochastic Petri net; Partially backlogged policy; Optimal management; Stochastic analysis; reward-cost Function.

## ملخص:

في هذه الأطروحة قمنا باقتراح نماذج جرد مختلفة مع إعادة المحاكمة والطلبات المتراكمة جزئياً، وذلك باستخدام أداة نمذجة شبكات بيتري العشوائية. في النماذج المدروسة تم أخذ عدة فرضيات بعين الاعتبار وهي: حجم الطلب الحتمي، المصدر اللانهائي للطلبات المحتملة، زمن التسليم العشوائي وإعادة المحاكمات وفق أسياستين "إعادة المحاكمات المتسمة" و "إعادة المحاكمات الكلاسيكية". بالنسبة للنماذج المعمول بها، قمنا بالتحقق من التحليل العشوائي مثل توزيع الاحتمالات الثابتة ومقاييس الأداء. من أجل الإدارة المثلى للمخزون، قمنا بصياغة مشكلة التحسين التي تكون وظيفتها الموضوعية هي دالة تكاليف و المكافأة التي تم تفصيلها لنماذج المخزون المدروسة. لحل هذه المشكلة، اقترحنا نهجاً عددياً. ومن أجل توضيح نتائج هذا المنهج قدمنا بعض الأمثلة العددية كتحليل حساسية القيم المثلى مقابل متغيرات النظام وبعض المتغيرات الاقتصادية. أخيراً، استخدمنا شبكة بيتري العشوائية لنمذجة نظام يحتوي على نوعين من المتطلبات. في حالة نفاد المخزون، يتم النظر في فرضيتين: الأولى تتعلق بالطلب من النوع الأول، المتراكم جزئياً. أما الثاني، فيتعلق بالطلب من النوع الثاني. والذي يتم فقده تماماً في هذه الحالة، لجأنا إلى المحاكاة.

**الكلمات المفتاحية:** نظام إدارة المخزون؛ شبكة بيتري العشوائية المعممة؛ سياسة متراكمة جزئياً؛ الإدارة المثلى؛ التحليل العشوائي؛ دالة تكلفة المكافأة.