

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université A.MIRA-BEJAIA



Faculté des Sciences Exactes  
Département de Recherche Opérationnelle  
Unité de Recherche de rattachement LaMOS

**THÈSE**  
**EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE**  
**DOCTORAT**

**Domaine : Mathématiques et Informatique. Filière : Mathématiques Appliquées.**  
**Spécialité : Recherche Opérationnelle et Aide à la Décision.**

Présentée par  
**ALIOUA Imane**

*Thème*

Méthode de résolution de la norme en contrôle optimal  
et application au problème en temps minimal

**Soutenue le : 19 Octobre 2025**

**Devant le Jury composé de :**

**Nom et Prénom**

**Grade**

Mr Mohammed Said RADJEF	Professeur	Univ. de Béjaïa	Président
Mr Mohand Ouamer BIBI	Professeur	Univ. de Béjaïa	Rapporteur
Mr Mohamed AIDENE	Professeur	Univ. de Tizi Ouzou	Examineur
Mr Boubekeur MENDIL	Professeur	Univ. de Béjaïa	Examineur
Mr Abdelkader MERAKEB	Professeur	Univ. de Tizi Ouzou	Examineur
Mr Noureddine KHIMOUM	MCA	Univ. de Béjaïa	Invité

**Année Universitaire : 2025-2026**

## *\* Remerciements \**

Tout d'abord, je rends grâce à Dieu, le Tout-Puissant, de m'avoir accordé la santé, la volonté et la patience nécessaires pour entreprendre et mener à bien ce travail. Cette thèse marque l'aboutissement de plusieurs années de recherche, d'apprentissage et de défis. Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à toutes les personnes qui m'ont soutenue, accompagnée et encouragée tout au long de ce parcours.

Je remercie tout particulièrement mon directeur de thèse, le Professeur Mohand Ouamer BIBI, pour la confiance qu'il m'a accordée, la richesse de ses orientations, ainsi que pour sa rigueur scientifique et son encadrement bienveillant tout au long de ces années. Ses conseils avisés et sa disponibilité ont été essentiels à la réalisation et à l'aboutissement de ce travail.

Je tiens à remercier Monsieur Mohammed Said RADJEF, Professeur à l'Université de Béjaïa, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant la présidence du jury de ma soutenance. Ma gratitude va aussi aux Professeurs Mohamed AIDENE et Abdelkader MERAKEB de l'Université de Tizi-Ouzou, ainsi qu'au Professeur Boubekour MENDIL de l'Université de Béjaïa, pour avoir accepté d'évaluer mon travail au sein du jury.

Je remercie également Monsieur Noureddine KHIMOUM, Maître de conférences à l'Université de Béjaïa, pour avoir accepté mon invitation et d'avoir rejoint le jury en tant qu'examinateur. Je lui suis reconnaissante pour sa contribution et son appui scientifique.

J'adresse mes sincères remerciements à tous les membres de l'unité de recherche LaMOS (Modélisation et Optimisation des Systèmes) de l'Université de Béjaïa, qui m'ont entourée durant cette thèse.

Mes remerciements vont aussi à toute l'équipe du laboratoire IRIT-ENSEEIH, qui m'a accueillie chaleureusement lors de mon stage à Toulouse.

## ※ *Dédicaces* ※

Avec l'expression de ma profonde reconnaissance, je dédie ce modeste travail à tous ceux qui me sont chers :

À mon père, l'homme à qui je dois la vie, ma réussite et tout mon respect.

À ma mère, cette femme exceptionnelle qui a souffert en silence sans jamais me laisser souffrir, et qui n'a jamais refusé de répondre à mes besoins.

À mes sœurs, pour leur soutien constant, leur affection et leurs encouragements qui ont accompagné chaque étape de ce travail.

À mon mari, pour sa patience, son soutien précieux et sa présence bienveillante.

À toutes mes amies, que je remercie sincèrement pour leur aide, de près ou de loin.

**Imane ALIOUA**

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>I</b>
<b>Table des figures</b>	<b>IV</b>
<b>Listes des tableaux</b>	<b>V</b>
<b>Notations et symboles</b>	<b>VI</b>
<b>Liste des contributions</b>	<b>VII</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Introduction au contrôle optimal</b>	<b>4</b>
1.1 Préliminaires et définitions . . . . .	4
1.1.1 Les solutions des systèmes linéaires de commande . . . . .	5
1.2 Contrôlabilité et observabilité d'un système dynamique . . . . .	9
1.2.1 Contrôlabilité d'un système dynamique . . . . .	10
1.2.1.1 Critère implicite de contrôlabilité . . . . .	11
1.2.1.2 Critère explicite de contrôlabilité . . . . .	11
1.2.2 Observabilité d'un système dynamique . . . . .	12
1.2.2.1 Critère explicite d'observabilité . . . . .	12
<b>2 Méthodes numériques en contrôle optimal</b>	<b>14</b>
2.1 Position du problème et définitions . . . . .	15
2.2 Principe du Maximum de Pontryaguine (PMP) . . . . .	16
2.2.1 Accroissement de la fonctionnelle . . . . .	16
2.2.2 Principe du Maximum de Pontryaguine (PMP) . . . . .	18
2.3 Méthode de tir simple . . . . .	21

2.4	Résolution d'un exemple numérique par la méthode de tir . . . . .	23
2.5	Reformulation du PMP par un critère d'optimalité . . . . .	25
2.5.1	Calcul de l'estimation de suboptimalité et critère d' $\epsilon$ -optimalité . . . . .	28
2.6	Méthode de support . . . . .	31
2.6.1	Conditions de passage à la procédure finale . . . . .	31
2.6.2	Changement de la commande . . . . .	32
2.6.3	Procédure finale . . . . .	34
2.6.4	Schéma de l'algorithme . . . . .	37
2.7	Résolution d'un exemple numérique par la méthode de support, suivie de sa résolution par la méthode de tir . . . . .	39
2.8	Comparaison des résultats obtenus par la méthode de support et la méthode de tir	51
<b>3</b>	<b>Contrôle optimal avec un temps terminal libre</b>	<b>55</b>
3.1	Position du problème . . . . .	55
3.2	Principe du Maximum pour un problème de contrôle optimal avec un temps terminal libre . . . . .	56
3.3	Transformation du problème à temps terminal libre en un problème à temps terminal fixé . . . . .	59
3.4	Lien avec le problème de contrôle optimal en temps minimal . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Contrôle optimal en temps minimal</b>	<b>62</b>
4.1	Position du problème . . . . .	63
4.2	Principe du Maximum de Pontryaguine . . . . .	64
4.3	Résolution du problème originel par une méthode hybride . . . . .	65
4.3.1	Première phase : résolution du problème auxiliaire avec un temps terminal fixé . . . . .	65
4.3.2	Deuxième phase : application de la procédure finale pour la résolution du problème originel . . . . .	66
4.3.3	Schéma de l'algorithme hybride . . . . .	71
4.4	Résolution d'un exemple numérique sur le temps minimal . . . . .	72
4.4.1	Construction du problème auxiliaire de contrôle optimal . . . . .	72
4.4.2	Transformation du problème auxiliaire à temps terminal libre en un pro- blème à temps terminal fixe et sa résolution . . . . .	72
4.4.3	Application de la procédure finale pour le problème originel . . . . .	74
	<b>Conclusion générale</b>	<b>81</b>

**Bibliographie**

**83**

# Table des figures

1.1	Représentation des équations de l'état du système. . . . .	6
1.2	Les différentes trajectoires $x(t)$ pour différentes commandes $u(t)$ , $t \in T = [0, t_1]$ . . . . .	8
1.3	Problème de contrôlabilité. . . . .	9
1.4	Problème de contrôle optimal. . . . .	9
4.1	La co-commande $E^0(t)$ , et la quasi-commande $\omega^0(t)$ , $t \in [0, t_* = 7.5155]$ . . . . .	75
4.2	Commande optimale $u^*(t)$ et les composantes de la trajectoire optimale $x^*(t)$ , $t \in T = [0, 8]$ . . . . .	80

# Liste des tableaux

2.1	Résultats numériques de la méthode de tir simple utilisant MATLAB (ode45 et fsolve) . . . . .	24
2.2	Itérations de la méthode de Newton à partir de l'approximation initiale $\tau^0 = [2.1624, 6.4546]$ . . . . .	45
2.3	L'état terminal $x(8)$ , l'état adjoint terminal $\psi(8)$ , la valeur de la fonctionnelle $J(u)$ , et les points de commutation $\tau_1^*$ , $\tau_2^*$ obtenus par la méthode de tir avec $\epsilon = 10^{-12}$ . . . . .	49
2.4	Comparaison des performances des deux méthodes de résolution en fonction des paramètres $\alpha$ , $c$ et des valeurs de $\epsilon$ . . . . .	53
4.1	Résultats de la méthode de Newton à partir de l'approximation initiale $v^0 = (y^0, \tau_*^0 = t^*, T_s^0) = (0.2687, -0.9140, 7.5155, 2.0833, 6.1454)^T$ , avec $\epsilon = 10^{-4}$ . . .	79

# Notations et symboles

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$()^T$	Symbole de la transposition.
$\ x\ $	Norme euclidienne de $x \in \mathbb{R}^n$ .
$\frac{d f(x)}{d x}$	Dérivée d'une fonction $f$ en $x$ .
$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = f(t, x)$	Équation différentielle ordinaire (EDO).
$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$	Gradient de $f$ au point $x$ .
$JF(x) = (\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_n(x))^T$	
$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$	Matrice Jacobienne de $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^T \in \mathbb{R}^n$ ,
où	
$\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$	Dérivée partielle de la $i^{\text{ème}}$ fonction composante $f_i$ par rapport à la variable $x_j$ .
$I_n$	Matrice identité d'ordre $n$ .
$f^{-1}(x)$	Fonction inverse de la fonction réelle $f(x)$ .
$\partial f(x^0)$	Sous-différentiel de la fonction $f(x)$ en $x^0$ .

# Liste des contributions

Dans le cadre de cette thèse, nous avons réalisé les contributions scientifiques suivantes :

## **Publication dans une revue internationale**

ALIOUA Imane, BIBI Mohand Ouamer. : Method for solving the norm in an optimal control problem. Numerical Algebra, Control and Optimization (2025).

doi : 10.3934/naco.2025002

## **Présentation dans des conférences internationales**

1. ALIOUA Imane, BIBI Mohand Ouamer. : Méthode hybride pour le problème de contrôle optimal en temps minimal. Actes du 14<sup>ème</sup> Colloque International sur l'Optimisation et les Systèmes d'Information (COSI'17), Université de Bouira, 14 - 16 Mai, pp. 56 - 67 (2017).
2. ALIOUA Imane, BIBI Mohand Ouamer. : Calcul du temps minimal dans un problème de contrôle optimal par une méthode hybride. Actes de la Conférence Internationale sur les Mathématiques Financières, Outils et Applications (MFOA'2019), Université de Béjaïa, 28 - 29 Octobre, pp. 265 - 274 (2019).

## **Présentation dans des manifestations scientifiques**

1. ALIOUA Imane : Algorithme de résolution d'un problème de contrôle optimal en temps minimal. Séminaire Hebdomadaire de l'Unité de Recherche LaMOS (Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes), Université de Béjaïa, 31 Mai 2016.
2. ALIOUA Imane : Méthode hybride de résolution d'un problème de contrôle optimal en temps minimal. Journée Mondiale des Mathématiques (Béjaïa IDM'2023), organisée par l'Unité de Recherche LaMOS, Université de Béjaïa, 14 Mars 2023.

# Introduction générale

La dynamique est impliquée lorsque les choses se passent au fil du temps, renvoyant à des systèmes dynamiques. Nous devons alors étudier ces derniers pour comprendre comment les optimiser puisqu'ils font partie intégrante de notre vie quotidienne. Étudier un système dynamique est souvent synonyme d'améliorer son comportement [15]. Le contrôle optimal offre un cadre idéal pour évaluer les performances d'un système dynamique. Ceci est réalisé en optimisant sa fonction objective dont la valeur est déterminée par le comportement du système sur lequel on agit au moyen d'un contrôle [44, 35].

La théorie du contrôle optimal a commencé à se développer en tant que discipline mathématique vers la fin des années 1950, généralisant ainsi le calcul des variations élaboré pour la résolution du problème du brachistochrone, posé par le mathématicien suisse Jean Bernoulli en 1696. Elle se compose de deux parties : le principe du maximum prouvé par le mathématicien soviétique Lev Pontriaguine en 1956 [44] et l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman dûe aux travaux du mathématicien américain Richard Bellman dans les années 50 [10]. En raison de l'importance de cette théorie, plusieurs chercheurs se sont consacrés au développement de méthodes numériques efficaces pour résoudre les problèmes de contrôle optimal.

Certains problèmes de contrôle optimal se modélisent avec un temps terminal fixé à l'avance, tandis que dans d'autres, le temps terminal n'est pas fixé et il sera donc considéré comme une variable inconnue à trouver. On parle alors d'un problème de contrôle optimal en temps terminal libre, étudié de manière approfondie dans la littérature. Les auteurs de [6] résolvent un problème de contrôle optimal en temps terminal libre par une méthode basée sur une technique de transformation et de quasi-linéarisation modifiée. Des conditions suffisantes d'optimalité de second ordre pour le problème de contrôle optimal en temps terminal libre avec des contraintes mixtes sur l'état et le contrôle sont présentées dans [38], utilisant une transformation du problème de contrôle optimal en temps terminal libre en un problème de contrôle optimal en temps terminal fixe, basée sur l'approche de Riccati. Dans [36], les auteurs traitent d'un problème de contrôle optimal avec retard dans lequel le temps terminal est un paramètre libre et ils ont

utilisé une méthode d'optimisation basée sur le gradient. En outre, un problème de contrôle optimal en temps terminal libre est traité dans [48], où les auteurs ont transformé le problème de contrôle optimal en temps terminal libre, via une stratégie hybride de mise à l'échelle temporelle, en un problème équivalant à temps terminal fixe. À l'aide des techniques de transcription de contraintes et d'approximation de lissage local, ils ont approximé des contraintes d'inégalités d'état continu par des contraintes d'inégalités conventionnelles, et le problème approché est résolu par un algorithme parallèle basé sur la méthode de la fonction remplie (filled function method).

Nous traitons un problème de contrôle optimal en temps minimal lorsqu'il s'agit essentiellement de conduire un système à un état souhaité en un temps minimal. Il s'agit donc d'un cas particulier des problèmes de contrôle optimal en temps terminal libre, et ce, de manière à minimiser le temps de transfert. Depuis la publication des premiers travaux sur ce sujet dans les années soixante pour les systèmes linéaires [34], plusieurs chercheurs ont étudié ce modèle [40, 17, 20, 42, 39, 19].

La méthode de support [22] est à l'origine de plusieurs travaux traitant de la résolution numérique des problèmes de contrôle optimal. Les intérêts théoriques et pratiques ont fait que le problème du contrôle optimal en temps minimal reste l'un des sujets les plus attractifs en contrôle optimal. Sur la base du concept de support, une méthode numérique a été décrite dans [27] en utilisant les équations différentielles pour le support optimal et la valeur optimale de la fonction de coût. Dans [31], en prenant la valeur de l'état initial en fonction d'un paramètre, les auteurs ont étudié le problème de l'identification de la structure de la solution pour de petites perturbations du paramètre.

Des procédés basés sur d'autres concepts sont également proposés pour résoudre le problème de contrôle optimal en temps minimal. Les auteurs de [43] ont considéré le problème de stabilité structurelle pour le problème en temps minimal, dans le cas où il y aurait une commande optimale, fortement bang-bang et qui présente un double commutateur. Un problème de contrôle optimal en temps minimal avec un système linéaire est traité dans [37], où les auteurs ont obtenu le temps minimal en résolvant une séquence de problèmes de contrôle optimal de norme par la stratégie itérative des moindres carrés (Iteratively Reweighted Least-Squares algorithms 'IRLS'), après les avoir transformés en leurs problèmes duaux lagrangiens. D'autres cas de problèmes de contrôle optimal en temps minimal ont été traités, tels que les systèmes dynamiques discrets et multivariables [16, 52, 41].

L'objectif de cette thèse est de faire et de compléter la synthèse sur l'optimisation des systèmes dynamiques linéaires en temps terminal libre, puis de proposer une méthode hybride pour résoudre le problème de contrôle optimal en temps minimal. Cette méthode combine

la méthode directe de support pour un problème bilinéaire-quadratique de contrôle optimal [24, 25, 26] et une procédure finale indirecte, s'apparentant à la méthode de tir ou shooting method [23, 11, 12, 13, 29, 30, 49, 51, 8, 9]. Pour cela, on procède en deux étapes : dans la première, on transforme un problème auxiliaire de contrôle optimal à temps terminal libre en un problème bilinéaire-quadratique à temps terminal fixe, résolu en minimisant la norme de l'état final du système dynamique au moyen d'un algorithme qu'on a élaboré, permettant ainsi d'obtenir une idée assez précise de la structure des commutations avec une approximation du temps minimal et de l'état terminal nul. Dans la deuxième étape, on utilise une procédure finale similaire à la méthode de tir [46], pour calculer le temps minimal d'une manière plus précise. Cette dernière consiste à résoudre un système d'équations par la méthode de Newton, où l'itération initiale est déduite des approximations obtenues à la première étape, qui sont proches de la solution optimale.

Le plan de la thèse est le suivant : dans le premier chapitre, on s'intéresse à donner les fondements mathématiques du contrôle optimal. Le deuxième chapitre est consacré aux méthodes de résolution pour un problème de contrôle optimal d'un système dynamique linéaire avec un temps terminal fixe, à savoir la méthode indirecte appelée méthode de tir et la méthode directe appelée méthode de support. Dans ce chapitre, notre première contribution consiste à élaborer un algorithme de résolution de la norme en contrôle optimal, afin de l'appliquer ensuite pour le problème en temps minimal. Au troisième chapitre, on étudie le problème de contrôle optimal d'un système dynamique linéaire avec un temps terminal libre, servant de soubassement pour aborder le problème de transfert en temps minimal. Au quatrième et dernier chapitre, notre deuxième contribution porte sur une méthode hybride pour résoudre le problème de contrôle optimal en temps minimal. Cette méthode proposée combine la méthode directe de support, et une procédure finale indirecte, s'apparentant à la méthode de tir (Shooting Method). On termine par une conclusion générale et quelques perspectives de recherche future.

# 1

## Introduction au contrôle optimal

La théorie du contrôle optimal est apparue dans les années 1950 comme une partie spéciale de la littérature des équations différentielles (voir [7, 14, 47]).

Ce chapitre est consacré à l'introduction des notions de base en contrôle optimal.

### 1.1 Préliminaires et définitions

La théorie d'optimisation d'un processus physique joue un rôle important en automatique et dans plusieurs autres sciences appliquées.

Un processus est un système dynamique dépendant du temps et des paramètres qui caractérisent son état. Si le processus est continu, son modèle mathématique est généralement décrit par une équation différentielle de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), & t \geq t_0, \\ x(t_0) = x^0, \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$ ,  $x(t)$  est un vecteur d'état de  $\mathbb{R}^n$ ,  $x(t_0) = x^0$  étant l'état initial du système ;  $u(t)$  est une fonction continue par morceaux à valeurs dans  $\mathbb{R}^k$ , appelée commande du système, et admettant un nombre fini  $s$  de points de discontinuité de première espèce. Cela veut dire

qu'aux points de discontinuité  $t_i$  de  $u(t)$ ,  $t \geq t_0$ , les limites à gauche et à droite existent mais différentes. De plus, on considère que la commande  $u(t)$ ,  $t \geq t_0$ , est continue à droite et on écrit :

$$\lim_{t \rightarrow t_i, t < t_i} u(t) = u(t_i - 0), \quad \lim_{t \rightarrow t_i, t > t_i} u(t) = u(t_i + 0) = u(t_i), \quad i = 1, \dots, s.$$

La fonction  $f$  définie de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$  dans  $\mathbb{R}^n$  est supposée assez régulière pour assurer l'existence et l'unicité de la solution du système (1.1).

Commander le système (1.1), c'est déterminer les commandes  $u(t)$ ,  $t \geq t_0$ , à appliquer afin de faire évoluer son état dans un sens souhaité. Dans la commande des processus, les objectifs à atteindre sont variés :

- L'état final du système à l'instant  $t_1$  doit atteindre une cible fixée (problème de commandabilité ou d'atteignabilité) ;
- certains paramètres dépendant de l'état  $x(t)$ ,  $t \geq t_0$ , doivent être aussi proches que possibles d'une valeur de consigne  $H_c$  :

$$H(x(t)) \simeq H_c.$$

C'est le problème de la régulation qui soulève des questions de stabilité et de sensibilité inhérentes aux différentes perturbations extérieures qui sont toujours présentes dans un contexte réel ;

- un certain critère  $J(u)$  dépendant de la commande appliquée, de la trajectoire suivie, et de l'état final atteint à l'instant  $t_1$ , doit être minimisé :

$$\min J(u) = \varphi(x(t_1), t_1) + \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t)) dt. \quad (1.2)$$

Il s'agit d'un problème de contrôle optimal. La fonctionnelle  $J(u)$  peut représenter concrètement le temps, la consommation du carburant, l'énergie cinétique du système, ou tout autre critère préalablement choisi. Les valeurs de la commande  $u(t)$ ,  $t \geq t_0$ , doivent appartenir à un certain ensemble  $U \subset \mathbb{R}^k$ , en général compact et convexe :

$$u(t) \in U \subset \mathbb{R}^k, \quad t \geq t_0.$$

### 1.1.1 Les solutions des systèmes linéaires de commande

Dans cette partie, on se limite aux systèmes dynamiques linéaires décrits par le système suivant :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \geq t_0, \quad x(t_0) = x^0, \quad (1.3)$$

où  $A(t)$  et  $B(t)$  sont respectueusement des matrices d'ordre  $n$  et  $(n \times k)$ , dépendantes du temps, avec

$$A(t) = (a_{ij}(t), \quad 1 \leq i, j \leq n), \quad B(t) = (b_{ij}(t), \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq k).$$

Le système (1.3) est dit non stationnaire, car les paramètres  $A(t)$  et  $B(t)$  dépendent de la variable temps.

Dorénavant, on ne s'intéresse qu'à des systèmes dynamiques dont les paramètres ne dépendent pas du temps. Ils sont alors dits stationnaires et régis par l'équation d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x^0, \quad t \geq 0, \quad (1.4)$$

où  $A = (a_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n)$ ,  $B = (b_{ij}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq k)$ ;  $x(t)$  est le vecteur d'état de dimension  $n$  du système à l'instant  $t$ , le vecteur  $x^0$  étant l'état initial du système à l'instant  $t_0 = 0$ . Pour  $t \geq 0$ , la valeur de la commande  $u(t)$  appartient à un ensemble compact  $U \subset \mathbb{R}^k$ . On peut schématiquement représenter le système (1.4) par la figure suivante :

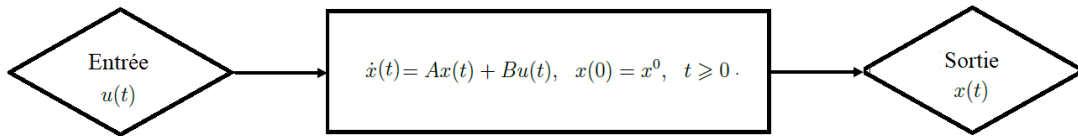


FIGURE 1.1 – Représentation des équations de l'état du système.

Les commandes  $u(t)$ ,  $t \geq 0$ , sont alors appelées variables d'entrée, et les états  $x(t)$ ,  $t \geq 0$ , les variables de sortie.

Pour tout état initial  $x^0$ , et pour toute commande  $u(t)$ ,  $t \geq 0$ , la solution du problème de Cauchy (1.4) existe d'une manière unique. Pour la trouver, on doit considérer le problème homogène, obtenu après avoir posé  $u = u(t) \equiv 0$ ,  $t \geq 0$  :

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad t \geq 0. \quad (1.5)$$

Soit alors le système fondamental des solutions du système (1.5), noté  $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ , défini par les relations différentielles suivantes :

$$\frac{df_i(t)}{dt} = Af_i(t), \quad f_i(0) = e_i, \quad t \geq 0,$$

où  $e_i$  est le vecteur unitaire de  $\mathbb{R}^n$ . Avec ces  $n$  solutions linéairement indépendantes, on forme la matrice :

$$F(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)), \quad t \geq 0,$$

appelée matrice fondamentale du système (1.5). Par définition, la matrice fondamentale est non dégénérée pour tout  $t \geq 0$ , et satisfait l'équation différentielle matricielle suivante :

$$\frac{dF}{dt} = AF, \quad F(0) = I_n, \quad t \geq 0,$$

où  $I_n$  est la matrice identité d'ordre  $n$ .

En effet, on a :

$$\begin{cases} \frac{dF}{dt} = \left( \frac{df_1}{dt}, \frac{df_2}{dt}, \dots, \frac{df_n}{dt} \right) = (Af_1, Af_2, \dots, Af_n) = A(f_1, f_2, \dots, f_n) = AF, \\ F(0) = (f_1(0), f_2(0), \dots, f_n(0)) = (e_1, e_2, \dots, e_n) = I_n. \end{cases}$$

La matrice  $F^{-1}(t)$ ,  $t \geq 0$ , vérifie l'équation différentielle matricielle suivante :

$$\frac{dF^{-1}(t)}{dt} = -F^{-1}(t)A, \quad F^{-1}(0) = I_n, \quad t \geq 0.$$

En effet, en dérivant le produit  $F^{-1}(t)F(t) = I_n$ , on trouve :

$$\frac{dF^{-1}(t)}{dt}F(t) + F^{-1}(t)\frac{dF(t)}{dt} = \frac{dF^{-1}(t)}{dt}F(t) + F^{-1}(t)AF(t) = 0,$$

et en multipliant à droite par  $F^{-1}(t)$ ,  $t \geq 0$ , on obtient :

$$\frac{dF^{-1}(t)}{dt}F(t)F^{-1}(t) + F^{-1}(t)AF(t)F^{-1}(t) = 0,$$

d'où

$$\frac{dF^{-1}(t)}{dt} = -F^{-1}(t)A, \quad t \geq 0.$$

À l'aide de la matrice fondamentale  $F(t)$ ,  $t \geq 0$ , on trouve la solution du système (1.4). En effet, on peut écrire :

$$\int_0^s F^{-1}(t) \frac{dx}{dt} dt = \int_0^s F^{-1}(t)Ax(t)dt + \int_0^s F^{-1}(t)Bu(t)dt, \quad s \geq 0,$$

et en intégrant par parties le membre de gauche, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^s F^{-1}(t) \frac{dx}{dt} dt &= \left[ F^{-1}(t)x(t) \right]_0^s - \int_0^s \frac{dF^{-1}(t)}{dt}x(t)dt \\ &= F^{-1}(s)x(s) - F^{-1}(0)x(0) - \int_0^s -F^{-1}(t)Ax(t)dt \\ &= F^{-1}(s)x(s) - x^0 + \int_0^s F^{-1}(t)Ax(t)dt, \end{aligned}$$

d'où

$$F^{-1}(s)x(s) = x^0 + \int_0^s F^{-1}(t)Bu(t)dt, \quad s \geq 0.$$

En multipliant à gauche par  $F(s)$ , on trouve :

$$x(s) = F(s)x^0 + F(s) \int_0^s F^{-1}(t)Bu(t)dt, \quad s \geq 0.$$

La solution du système (1.4) s'écrit donc sous la forme suivante :

$$x(t) = F(t)x^0 + F(t) \int_0^t F^{-1}(\tau)Bu(\tau)d\tau, \quad t \geq 0. \quad (1.6)$$

Comme la matrice  $A$  ne dépend pas du temps, alors la matrice fondamentale  $F(t)$ ,  $t \geq 0$ , n'est autre que la matrice exponentielle suivante :

$$F(t) = e^{At}, \quad t \geq 0,$$

où  $e^{At}$  est une fonction matricielle définie par :

$$e^{At} = I_n + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{t^p A^p}{p!}, \quad t \geq 0.$$

La formule (1.6) devient alors :

$$x(t) = e^{At}x^0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau, \quad t \geq 0. \quad (1.6')$$

Pour tout  $t \in T = [0, t_1]$ ,  $x(t)$  dépend de la commande  $u(t)$ , donc si on change  $u(t)$ , on obtient une autre trajectoire  $x(t)$  dans  $\mathbb{R}^n$ , comme indiqué dans la figure suivante :

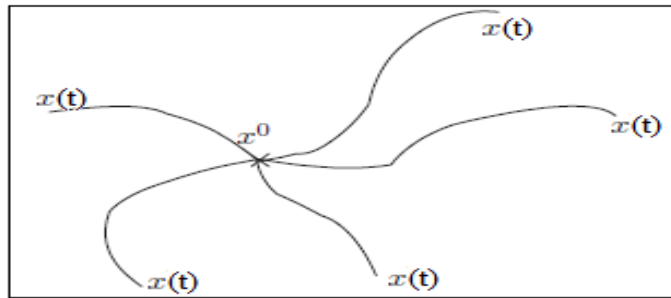


FIGURE 1.2 – Les différentes trajectoires  $x(t)$  pour différentes commandes  $u(t)$ ,  $t \in T = [0, t_1]$ .

Deux questions se posent naturellement :

1. Étant donné un état final  $x^1 \in \mathbb{R}^n$ , y a-t-il une commande  $u(t)$  de telle sorte que la trajectoire associée  $x(t)$  à cette commande joigne  $x^0$  à  $x^1$  en un temps fini  $t_1$ ? On parle alors de problème de contrôlabilité (voir la figure 1.3).

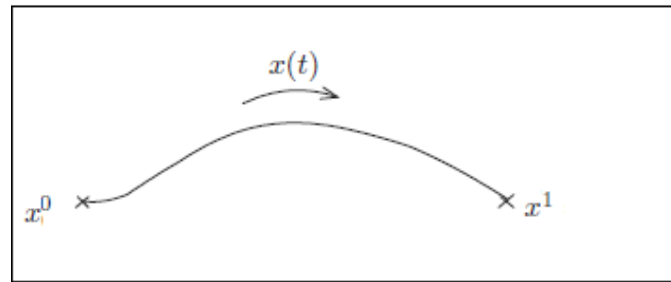


FIGURE 1.3 – Problème de contrôlabilité.

2. Si la condition précédente est remplie, y a-t-il une commande  $u(t)$  de telle sorte que la trajectoire associée  $x(t)$  joigne  $x^0$  à  $x^1$ , et qui de plus minimise une certaine fonctionnelle  $J(u)$  (1.2)? C'est le problème de contrôle optimal (voir la figure 1.4).

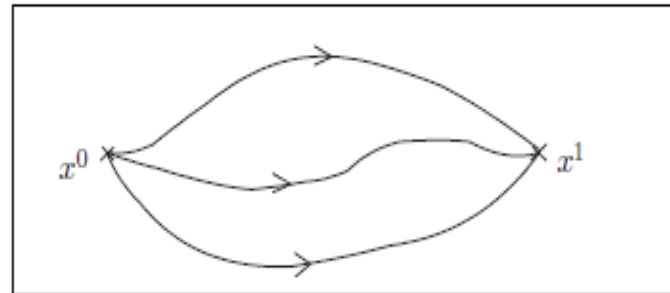


FIGURE 1.4 – Problème de contrôle optimal.

La fonctionnelle  $J(u)$  est un critère d'optimisation, appelé coût. Par exemple, ce coût peut être égal au temps de parcours. On parle alors d'un problème en temps minimal, qui fait l'objet de notre étude, et que l'on va considérer par la suite.

## 1.2 Contrôlabilité et observabilité d'un système dynamique

La contrôlabilité et l'observabilité sont des concepts clé de la théorie du contrôle optimal (voir [18]). En effet, la contrôlabilité est liée à la possibilité d'influencer l'état du système en manipulant les commandes. Quant à l'observation, elle est liée à la possibilité d'observer l'état du système à travers des mesures, et ce, afin de le stabiliser.

Les deux notions de contrôlabilité et d'observabilité ont été introduites en 1960 par Kalman [28] pour des systèmes linéaires stationnaires en dimension finie.

### 1.2.1 Contrôlabilité d'un système dynamique

Soit un système dynamique linéaire stationnaire défini sur un intervalle de temps  $T = [0, t_1]$  :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x^0, \quad t \in T = [0, t_1], \quad (1.7)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  représente le vecteur d'état à l'instant  $t$ ,  $x(0) = x^0$  étant l'état initial du système,  $x(t_1)$  étant l'état final du système ;  $u(t)$ ,  $t \in T$ , est une fonction continue par morceaux, définie de  $T = [0, t_1]$  dans  $\mathbb{R}^k$ .

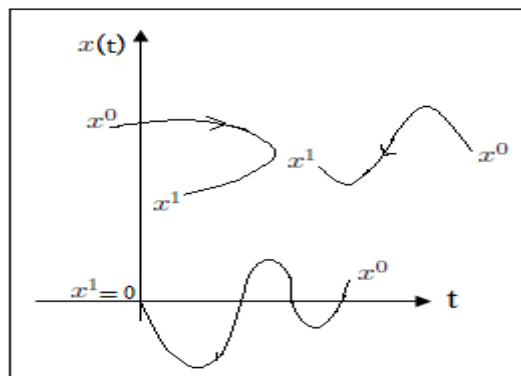
Soit  $x^1 \in \mathbb{R}^n$ . On se pose la question de savoir s'il existe une commande  $u(t)$ ,  $t \in T = [0, t_1]$ , telle que  $x(t_1) = x^1$ . C'est le problème de contrôlabilité du système dynamique (1.7) en temps  $t_1$ . On a alors les définitions suivantes :

**Définition 1.2.1.** Soit  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ . On dit que le vecteur  $x^0$  est contrôlable, si on peut trouver une fonction continue par morceaux  $u(t)$ ,  $0 \leq t \leq t_1$ , telle que la trajectoire  $x(t)$ ,  $t \geq 0$ , du système (1.7) avec la condition initiale  $x(0) = x^0$  satisfait la condition terminale  $x(t_1) = x^1$ . On dit alors que  $u(t)$  envoie  $x^0$  à la cible  $S = \{x^1\}$ .

**Définition 1.2.2.** Soit  $x^1 \in \mathbb{R}^n$ . On dit que  $x^1$  est atteignable si on peut trouver une fonction continue par morceaux  $u(t)$ ,  $0 \leq t \leq t_1$ , telle que la trajectoire  $x(t)$ ,  $t \geq 0$ , du système (1.7) avec  $x(0) = x^0$  vérifie la condition terminale  $x(t_1) = x^1$ .

**Définition 1.2.3.** (contrôlabilité au sens de KALMAN)

Le système (1.7) est complètement contrôlable ou contrôlable, si pour deux vecteurs quelconques  $x^0$  et  $x^1$  de  $\mathbb{R}^n$ , on peut trouver un temps fini  $t_1$  et une commande  $u(t)$ ,  $0 \leq t \leq t_1$ , telle que la trajectoire  $x(t)$ ,  $t \geq 0$ , du système (1.7) satisfait les conditions :  $x(0) = x^0$  et  $x(t_1) = x^1$ . Ainsi, on peut toujours astreindre un système contrôlable à passer par deux vecteurs quelconques  $x^0$ ,  $x^1 \in \mathbb{R}^n$ , comme le montre la figure suivante :



### 1.2.1.1 Critère implicite de contrôlabilité

Pour établir le critère implicite de contrôlabilité, on se place ici dans le cas où l'intervalle de temps  $T = [0, t_1]$  est fixe avec un ensemble cible  $S(t_1) = \{0\}$ . On a alors les théorèmes suivants :

**Théorème 1.2.1.** *Tout état initial  $x^0$  est contrôlable si et seulement si pour tout vecteur  $g \in \mathbb{R}^n$ ,  $g \neq 0$ , la fonction :*

$$\psi(\tau) = g^T F^{-1}(\tau)B, \quad \tau \in T,$$

*où  $F^{-1}(\tau) = e^{-A\tau}$ , n'est pas identiquement nulle. Cette dernière est appelée fonction de contrôlabilité.*

**Théorème 1.2.2.** *Soit  $x^0$  un état initial fixé mais quelconque. Alors tout état  $x^1$  est atteignable à partir de  $x^0$  si et seulement si,  $\forall g \neq 0$ ,  $g \in \mathbb{R}^n$ , la fonction*

$$\psi(\tau) = g^T F^{-1}(\tau)B, \quad \tau \in T,$$

*n'est pas identiquement nulle.*

**Théorème 1.2.3.** *Le système (1.7) est complètement contrôlable si et seulement si pour tout vecteur  $g \neq 0$ , la fonction*

$$\psi(\tau) = g^T F^{-1}(\tau)B, \quad \tau \in T,$$

*n'est pas identiquement nulle.*

Les concepts de contrôlabilité et d'atteignabilité sont équivalents, car ils sont caractérisés par le même critère. Il est difficile, cependant, d'appliquer ce critère implicite dans la pratique. On cherche alors à exprimer ce concept de contrôlabilité d'un système dynamique à travers ses paramètres intrinsèques, i.e., les deux matrices A et B.

### 1.2.1.2 Critère explicite de contrôlabilité

**Théorème 1.2.4.** [28]

*Le système (1.7) est contrôlable si et seulement si :*

$$\text{rang } Q = \text{rang}(B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B) = n,$$

*où Q est une matrice d'ordre  $n \times nk$ , appelée matrice de contrôlabilité de Kalman.*

## 1.2.2 Observabilité d'un système dynamique

Dans beaucoup de problèmes pratiques, il arrive souvent que l'état du système (1.7) ne soit pas directement mesurable. Il n'est donc observable qu'à travers d'autres variables définies par l'équation des sorties suivantes :

$$y(t) = Cx(t), \quad t \in T = [0, t_1], \quad (1.8)$$

où  $C$  est une matrice constante d'ordre  $(p \times n)$ , avec  $p \leq n$ .

Dans le problème du contrôle automatique en boucle fermée (feedback control), la connaissance de la trajectoire  $x(t)$ ,  $t \geq 0$ , est nécessaire. Le problème d'observabilité consiste alors à déterminer d'une manière unique la trajectoire  $x(t)$ ,  $t \geq 0$ , à partir de la commande  $u(t)$ , et des quantités mesurées  $y(t)$  sur l'intervalle du temps considéré  $T = [0, t_1]$ .

On rappelle que la solution du système de l'équation (1.7) s'écrit d'une manière unique :

$$x(t) = e^{At}x^0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$

Pour cela, il suffit de déterminer le vecteur initial  $x^0$  à partir de la commande  $u(t)$  et de l'observation  $y(t)$  dans  $T = [0, t_1]$ . Lorsqu'on peut retrouver d'une manière unique tout état initial  $x^0$ , on dit alors que le système dynamique (1.7) est observable par la sortie (1.8).

### 1.2.2.1 Critère explicite d'observabilité

Soit un système dynamique couplé :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & t \in T = [0, t_1], \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (1.9)$$

où la commande  $u(t)$  et l'observation  $y(t)$  sont connues tandis que l'état initial  $x^0$  est ignoré. On peut donc écrire :

$$y(t) = Cx(t) = Ce^{At}x^0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \quad t \in T,$$

d'où

$$Ce^{At}x^0 = y(t) - \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \quad t \in T.$$

Comme l'observation  $y(t)$ ,  $t \in T$ , est supposée quelconque, alors cette dernière relation est équivalente à l'équation

$$Ce^{At}x^0 = y(t), \quad t \in T, \quad (1.10)$$

en posant  $u(t) \equiv 0$ ,  $t \in T$ .

Le système dynamique couplé (1.9) consiste en l'existence d'un seul état initial  $x^0$  vérifiant (1.10).

Pour le système (1.9), on définit la matrice d'observabilité d'ordre  $(np \times n)$  :

$$S = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}.$$

On a alors le théorème suivant :

**Théorème 1.2.5.** [28]

*Le système dynamique couplé (1.9) est observable si et seulement si :*

$$\text{rang } S = n.$$

# 2

## Méthodes numériques en contrôle optimal

Il existe deux types de méthodes numériques en contrôle optimal : les méthodes indirectes et les méthodes directes. Ce chapitre se compose de deux parties : la première partie introduit la définition et l'application de la méthode de tir en contrôle optimal, qui consiste à résoudre numériquement un problème aux valeurs limites d'équations différentielles, et ce, après avoir appliqué le principe du maximum de Pontryaguine. En effet, la méthode de tir (Shooting Method) est une méthode indirecte qui utilise les conditions nécessaires du principe du maximum pour sélectionner la trajectoire optimale parmi une famille de trajectoires extrémales (solutions du système hamiltonien). La deuxième partie est consacrée à la présentation de la méthode de support pour un problème linéaire-quadratique de contrôle optimal. Cette méthode directe consiste à trouver une solution optimale, et ce, sans discrétisation au préalable du système dynamique. En utilisant la méthode de support d'une manière séquentielle, on termine la résolution par une procédure finale basée sur la méthode de Newton, pour trouver la solution d'une manière plus précise.

## 2.1 Position du problème et définitions

Sur un intervalle de temps  $T = [0, t_1]$ , on considère le problème linéaire - quadratique de contrôle optimal avec un temps terminal fixe :

$$\min J(u) = \frac{\alpha}{2} \|x(t_1) - x^1\|^2 + c^T x(t_1), \quad (2.1)$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) + r(t), \quad x(0) = x^0, \quad (2.2)$$

$$u(t) \in U = [-L, L], \quad t \in T = [0, t_1], \quad (2.3)$$

où la fonctionnelle  $J(u)$  est appelée coût du processus ou critère de qualité du type Mayer ;  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$  est un  $n$ -vecteur qui représente l'état du système à l'instant  $t$ ,  $x^0$  étant l'état initial du système,  $x^1$  représente l'état désiré ;  $u(t)$ ,  $t \in T = [0, t_1]$ , est une fonction scalaire continue par morceaux et à valeurs dans  $U = [-L, L]$ , appelée commande du système ;  $r(t) \in \mathbb{R}^n$  est une fonction de perturbation que l'on peut considérer éventuellement nulle ;  $A$  représente une matrice carrée d'ordre  $n$ , qui caractérise le système ;  $c$ ,  $b$  sont deux vecteurs de dimension  $n$ , tandis que  $L$  et  $\alpha$  sont deux constantes positives.

Pour le système dynamique ci-dessus, diverses commandes engendrent des trajectoires différentes, c'est-à-dire, des processus différents  $(u(t), x(t))$ ,  $t \in T$ . Par conséquent, on peut influencer sur le choix de  $u(t)$ ,  $t \in T$ , pour obtenir une trajectoire désirée, satisfaisant le critère de qualité (2.1). On parle alors d'un processus optimal  $(u^*(t), x^*(t))$  au sens de ce critère.

Dans ce chapitre, on considère que le temps terminal  $t_1$  est fixe ; si le temps terminal n'est pas fixe, on parle alors d'un problème de contrôle optimal avec un temps terminal libre, que l'on va considérer dans le chapitre suivant.

**Définition 2.1.1.** (*Commande admissible*)

La commande  $u(t)$ ,  $t \in T$ , est dite commande admissible du problème (2.1)-(2.3) si :

- (i) Elle est continue par morceaux sur  $T$  ;
- (ii) elle est continue à droite en ses points de discontinuité :

$$\lim_{t \rightarrow t_j, t > t_j} u(t) = u(t_j + 0) = u(t_j), \quad j = \overline{1, s};$$

- (iii)  $-L \leq u(t) \leq L$ ,  $t \in T$ .

**Définition 2.1.2.** (*Commande optimale*)

Une commande admissible  $u^*(t)$ ,  $t \in T$ , est dite optimale si elle réalise le minimum du critère de qualité (2.1) sur l'ensemble de commandes admissibles :

$$J(u^*) = \min_u J(u),$$

où  $u$  parcourt l'ensemble de toutes les commandes admissibles. La trajectoire correspondante  $x^*(t)$ ,  $t \in T$ , est dite trajectoire optimale.

**Définition 2.1.3.** (Commande suboptimale)

En outre, on appelle commande suboptimale (ou  $\epsilon$ -optimale), toute commande admissible  $u^\epsilon(t)$ ,  $t \in T$ , satisfaisant l'inégalité

$$J(u^\epsilon) - J(u^*) \leq \epsilon,$$

où  $u^*$  est une commande optimale, et  $\epsilon$  un nombre positif ou nul choisi comme précision.

## 2.2 Principe du Maximum de Pontryaguine (PMP)

### 2.2.1 Accroissement de la fonctionnelle

Soit  $u(t)$ ,  $t \in T$ , une commande admissible du problème (2.1)-(2.3), engendrant une trajectoire  $x(t)$ ,  $t \in T$ . Considérons une autre commande admissible quelconque  $\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$ ,  $t \in T$ , et sa trajectoire correspondante  $\bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t)$ ,  $t \in T = [0, t_1]$ , où  $\Delta x(0) = 0$ . On a :

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{\alpha}{2} \|x(t_1) - x^1\|^2 + c^T x(t_1) \\ &= \frac{\alpha}{2} \|x(t_1)\|^2 - \alpha(x^1)^T x(t_1) + \frac{\alpha}{2} \|x^1\|^2 + c^T x(t_1) \\ &= \frac{\alpha}{2} \|x(t_1)\|^2 + (c - \alpha x^1)^T x(t_1) + K, \end{aligned}$$

où  $K = \frac{\alpha}{2} \|x^1\|^2$ . L'accroissement de la fonctionnelle (2.1) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \Delta J(u) &= J(\bar{u}) - J(u) \\ &= \frac{\alpha}{2} \|\bar{x}(t_1)\|^2 + (c - \alpha x^1)^T \bar{x}(t_1) + K - \frac{\alpha}{2} \|x(t_1)\|^2 - (c - \alpha x^1)^T x(t_1) - K \\ &= \frac{\alpha}{2} \bar{x}^T(t_1) \bar{x}(t_1) + (c - \alpha x^1)^T \bar{x}(t_1) - \frac{\alpha}{2} x^T(t_1) x(t_1) - (c - \alpha x^1)^T x(t_1) \\ &= \frac{\alpha}{2} \bar{x}^T(t_1) (x(t_1) + \Delta x(t_1)) + (c - \alpha x^1)^T (x(t_1) + \Delta x(t_1)) - \frac{\alpha}{2} x^T(t_1) x(t_1) - (c - \alpha x^1)^T x(t_1) \\ &= \frac{\alpha}{2} \left[ x^T(t_1) x(t_1) + x^T(t_1) \Delta x(t_1) + \Delta x^T(t_1) x(t_1) + \Delta x^T(t_1) \Delta x(t_1) \right] + c^T x(t_1) + c^T \Delta x(t_1) \\ &\quad - \alpha(x^1)^T x(t_1) - \alpha(x^1)^T \Delta x(t_1) - \frac{\alpha}{2} x^T(t_1) x(t_1) - c^T x(t_1) + \alpha(x^1)^T x(t_1) \\ &= \alpha x^T(t_1) \Delta x(t_1) + \Gamma + c^T \Delta x(t_1) - \alpha(x^1)^T \Delta x(t_1) \\ &= (\alpha x(t_1) + c - \alpha x^1)^T \Delta x(t_1) + \Gamma, \end{aligned} \tag{2.4}$$

où  $\Gamma = \frac{\alpha}{2} \|\Delta x(t_1)\|^2 \geq 0$ .

La solution du système (2.2) est donnée par la formule de Cauchy :

$$x(t) = F(t)x^0 + F(t) \int_0^t F^{-1}(\tau)[bu(\tau) + r(\tau)]d\tau, \quad t \in T,$$

où  $F(t) = e^{At}$  est une matrice carrée d'ordre  $n$ , solution du système différentiel matriciel suivant :

$$\begin{cases} \dot{F}(t) = AF(t), \\ F(0) = I_n, \end{cases}$$

$I_n$  étant la matrice identité d'ordre  $n$ . L'état final s'écrit alors :

$$x(t_1) = e^{At_1}x^0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-t)}[bu(t) + r(t)]dt,$$

d'où

$$\Delta x(t_1) = \bar{x}(t_1) - x(t_1) = \int_0^{t_1} e^{A(t_1-t)}b\Delta u(t)dt.$$

Si l'on note  $q(t) = e^{A(t_1-t)}b$ , on obtient :

$$\Delta x(t_1) = \int_0^{t_1} q(t)\Delta u(t)dt.$$

L'accroissement (2.4) devient alors :

$$J(\bar{u}) - J(u) = (\alpha x(t_1) + c - \alpha x^1)^T \int_0^{t_1} q(t)\Delta u(t)dt + \Gamma. \quad (2.5)$$

Soit la fonction  $\psi(t)$  définie de la manière suivante :

$$\psi(t) = -e^{A^T(t_1-t)}(\alpha x(t_1) + c - \alpha x^1), \quad t \in T.$$

La fonction  $\psi(t)$  satisfait l'équation différentielle :

$$\dot{\psi}(t) = A^T e^{A^T(t_1-t)}(\alpha x(t_1) + c - \alpha x^1) = -A^T \psi(t), \quad \psi(t_1) = -(\alpha x(t_1) + c - \alpha x^1). \quad (2.6)$$

Cette dernière équation est appelée système conjugué ou adjoint du système (2.2). Les composantes  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$  de la fonction vectorielle  $\psi(t)$ ,  $t \in T$ , sont appelées variables conjuguées. Alors l'accroissement de la fonctionnelle (2.5) prend la forme suivante :

$$\Delta J(u) = J(\bar{u}) - J(u) = - \int_0^{t_1} \psi^T(t)b\Delta u(t)dt + \Gamma. \quad (2.7)$$

La fonction

$$H(x, \psi, u) = \psi^T(Ax + bu + r) \quad (2.8)$$

est dite hamiltonien du problème (2.1)-(2.3), et on note :

$$\Delta_{\bar{u}}H(x, \psi, u) = H(x, \psi, \bar{u}) - H(x, \psi, u), \quad (2.9)$$

d'où l'on déduit :

$$\Delta_{\bar{u}}H(x, \psi, u) = \psi^T b \Delta u. \quad (2.10)$$

Grâce à cette dernière relation, l'accroissement (2.7) prend la forme finale suivante :

$$J(\bar{u}) - J(u) = - \int_0^{t_1} \Delta_{\bar{u}}H(x(t), \psi(t), u(t)) dt + \Gamma. \quad (2.11)$$

Le hamiltonien (2.8) permet d'écrire d'une manière compacte et symétrique le système dynamique (2.2) et son conjugué (2.6) :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \psi} = Ax + bu + r, & x(0) = x^0; \\ \dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -A^T \psi, & \psi(t_1) = -(\alpha x(t_1) + c - \alpha x^1). \end{cases}$$

Si on pose  $\alpha = 0$ , on tombe sur le cas linéaire [14] :  $\psi(t_1) = -c$ .

## 2.2.2 Principe du Maximum de Pontryaguine (PMP)

D'après l'accroissement (2.11), dire que la commande admissible  $u(t)$ ,  $t \in T$ , est optimale suggère qu'il est logique de penser que la relation  $\Delta_{\bar{u}}H(x(t), \psi(t), u(t)) \leq 0$ ,  $t \in T$ , est vérifiée pour toute autre commande admissible  $\bar{u}(t)$ ,  $t \in T$ . En utilisant la relation (2.9), on aura alors :

$$H(x(t), \psi(t), \bar{u}(t)) \leq H(x(t), \psi(t), u(t)), \quad t \in T. \quad (2.12)$$

Puisque  $u(t)$ ,  $t \in T$ , appartient au compact  $U = [-L, +L]$ ,  $\forall t \in T$ , et  $\bar{u}(t) = v$  est quelconque dans  $U$ , alors la relation (2.12) peut être écrite de manière équivalente suivante :

$$H(x(t), \psi(t), u(t)) = \max_{v \in U} H(x(t), \psi(t), v), \quad t \in T.$$

Cette dernière formule est appelée condition du Maximum de Pontryaguine. Pour la montrer, on utilise le concept de la variation - aiguille d'une commande admissible  $u(t)$ ,  $t \in T$ , qui s'écrit de la manière suivante :

$$\Delta u(t) = \begin{cases} v - u(t), & t \in T_{\theta\epsilon} = [\theta, \theta + \epsilon[, \quad v \in U, \quad \theta \in [0, t_1[, \quad \epsilon > 0, \quad \theta + \epsilon < t_1, \\ 0, & t \in T \setminus T_{\theta\epsilon}. \end{cases} \quad (2.13)$$

Pour  $\theta = t_1$ , on posera  $T_{\theta\epsilon} = [t_1 - \epsilon, t_1]$ . On a alors le théorème suivant, appelé Principe du Maximum de Pontryaguine :

**Théorème 2.2.1.** (Principe du Maximum de Pontryaguine (PMP))

La commande  $u^*(t)$ ,  $t \in T$ , est optimale dans le problème (2.1)-(2.3), si et seulement si le long de  $u^*(t)$  et des trajectoires correspondantes  $x^*(t)$  et  $\psi^*(t)$  du système direct (2.2) et du système conjugué (2.6), le hamiltonien (2.8) atteint son maximum :

$$H(x^*(t), \psi^*(t), u^*(t)) = \max_{v \in U} H(x^*(t), \psi^*(t), v), \quad t \in T. \quad (2.14)$$

**Preuve. Suffisance :** Soit  $u^*(t)$ ,  $t \in T$ , une commande admissible satisfaisant la condition (2.14) :

$$H(x^*(t), \psi^*(t), v) \leq H(x^*(t), \psi^*(t), u^*(t)), \quad \forall v \in U, \quad t \in T.$$

Pour toute autre commande admissible  $\bar{u}(t)$ ,  $t \in T$ , on aura alors :

$$\Delta_{\bar{u}}H(x^*(t), \psi^*(t), u^*(t)) \leq 0, \quad t \in T.$$

De la formule d'accroissement (2.11), on déduit donc :

$$J(\bar{u}) - J(u^*) = - \int_0^{t_1} \Delta_{\bar{u}}H(x^*(t), \psi^*(t), u^*(t))dt + \Gamma \geq 0,$$

ce qui prouve que la commande  $u^*(t)$ ,  $t \in T$ , est optimale dans le problème (2.1)-(2.3).

**Nécessité :** Soit une commande optimale  $u^*(t)$ ,  $t \in T$ , et  $x^*(t)$ ,  $\psi^*(t)$ ,  $t \in T$ , sont les trajectoires correspondantes des systèmes (2.2) et (2.6) respectivement. Supposons que la relation (2.14) n'est pas vérifiée, c-à-d :  $\exists \theta \in [0, t_1] \cup \{t_1\}$  et  $v \in U$  tels que :

$$H(x^*(\theta), \psi^*(\theta), v) - H(x^*(\theta), \psi^*(\theta), u^*(\theta)) = \Delta_v H(x^*(\theta), \psi^*(\theta), u^*(\theta)) = \gamma > 0.$$

Soit  $\theta \in [0, t_1[$  et pour  $\epsilon > 0$  assez petit, on considère une autre commande admissible :

$$\bar{u}(t) = u^*(t) + \Delta u^*(t), \quad t \in T,$$

où  $\Delta u^*(t)$ ,  $t \in T$ , est la variation - aiguille (2.13), correspondant à  $u(t) = u^*(t)$ ,  $t \in T$ .

D'après la relation (2.10), l'accroissement (2.11) donne alors :

$$J(\bar{u}) - J(u^*) = - \int_{\theta}^{\theta+\epsilon} \Delta_v H(x^*(t), \psi^*(t), u^*(t))dt + \Gamma, \quad (2.15)$$

$$\text{où } \Gamma = \frac{\alpha}{2} \|\Delta x^*(t_1)\|^2, \quad \Delta x^*(t_1) = \int_0^{t_1} q(t)\Delta u^*(t)dt = \int_{\theta}^{\theta+\epsilon} q(t)(v - u^*(t))dt.$$

Les fonctions  $\Delta_v H(t)$  et  $q(t)(v - u^*(t))$  sont continues à droite par rapport à la variable  $t$ , en

particulier pour  $t = \theta$ . En faisant au voisinage de  $\theta$  le développement de Taylor à l'ordre 1, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\theta}^{\theta+\epsilon} \Delta_v H(x^*(t), \psi^*(t), u^*(t)) dt &= \epsilon \Delta_v H(x^*(\theta), \psi^*(\theta), u^*(\theta)) + o(\epsilon) \\ &= \epsilon \left[ \gamma + \frac{o(\epsilon)}{\epsilon} \right], \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Delta x^*(t_1) &= \int_{\theta}^{\theta+\epsilon} q(t)(v - u^*(t)) dt = \epsilon q(\theta)(v - u^*(\theta)) + o_n(\epsilon) \\ &= \epsilon \left[ q(\theta)(v - u^*(\theta)) + \frac{o_n(\epsilon)}{\epsilon} \right] \\ &= \epsilon f(\epsilon), \end{aligned}$$

où  $f(\epsilon)$  est une fonction bornée au voisinage de  $\epsilon = 0$ , avec  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{o(\epsilon)}{\epsilon} = 0$  et  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{o_n(\epsilon)}{\epsilon} = 0$ .

L'accroissement (2.15) peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} J(\bar{u}) - J(u^*) &= \epsilon \left[ -\gamma + \frac{o(\epsilon)}{\epsilon} \right] + \frac{\alpha \epsilon^2}{2} \|f(\epsilon)\|^2 \\ &= \epsilon \left[ -\gamma + \frac{o(\epsilon)}{\epsilon} + \frac{\alpha \epsilon}{2} \|f(\epsilon)\|^2 \right]. \end{aligned}$$

Puisque  $\gamma > 0$ , il en résulte que pour  $\epsilon > 0$  assez petit, on obtient  $J(\bar{u}) < J(u^*)$ , ce qui contredit l'optimalité de la commande  $u^*(t)$ ,  $t \in T$ .

Pour le cas  $\theta = t_1$ , on utilise la variation - aiguille (2.13) pour  $T_{\theta\epsilon} = [t_1 - \epsilon, t_1] = [\theta - \epsilon, \theta]$ ,  $u(t) = u^*(t)$ ,  $t \in T$ , et on aura :

$$J(\bar{u}) - J(u^*) = \int_{\theta}^{\theta-\epsilon} \Delta_v H(x^*(t), \psi^*(t), u^*(t)) dt + \frac{\alpha}{2} \|\Delta x^*(t_1)\|^2,$$

où

$$\Delta x^*(t_1) = - \int_{\theta}^{\theta-\epsilon} q(t)(v - u^*(t)) dt = \epsilon f(\epsilon),$$

et pour  $\epsilon > 0$  assez petit, on obtient donc :

$$\begin{aligned} J(\bar{u}) - J(u^*) &= -\epsilon \gamma + o(\epsilon) + \frac{\alpha \epsilon^2}{2} \|f(\epsilon)\|^2 \\ &= \epsilon \left[ -\gamma + \frac{o(\epsilon)}{\epsilon} + \frac{\alpha \epsilon}{2} \|f(\epsilon)\|^2 \right] < 0, \end{aligned}$$

aboutissant ainsi à une autre contradiction.

Par conséquent, dans tous les cas, la relation (2.14) est forcément vérifiée.  $\square$

**Remarque 2.2.1.** La condition du maximum (2.14) est vraie même pour un ensemble  $U$  fermé, contrairement au théorème classique du calcul des variations, applicable seulement à des ensembles ouverts. Cet avantage s'avère essentiel pour les applications aux problèmes pratiques.

## 2.3 Méthode de tir simple

Cette méthode est basée sur le principe du maximum et aboutit à la résolution d'un système différentiel de  $2n$  équations à  $2n$  inconnues, appelée système différentiel aux deux bouts :  $t = 0$  et  $t = t_1$ .

En effet, lorsque la condition nécessaire et suffisante d'optimalité du principe du maximum de Pontryaguine nous permet d'avoir  $u = u(x, \psi)$ , alors cela nous conduit à résoudre un système différentiel de  $2n$  équations avec  $2n$  inconnues, après avoir posé  $r(t) \equiv 0, t \in T = [0, t_1]$  :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + b u(x(t), \psi(t)), & x(0) = x^0, & t \in T = [0, t_1], \\ \dot{\psi}(t) = -A^T \psi(t), & \psi(t_1) = \psi^1 = -(\alpha x(t_1) + c - \alpha x^1). \end{cases} \quad (2.16)$$

Ainsi, lorsqu'on peut exprimer la commande optimale en fonction de  $(x(t), \psi(t))$  à partir de la condition de maximisation du hamiltonien, alors on obtient un système différentiel de la forme :

$$\dot{z}(t) = \varphi(t, z(t)),$$

où  $z(t) = (x(t), \psi(t))$ , et  $\varphi$  représente la dynamique du couple (état-état adjoint) donnée par le hamiltonien (2.8).

Résoudre le problème (2.1)-(2.3) équivaut alors à résoudre le problème aux deux bouts suivant :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \begin{pmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{z}_n(t) \\ \dot{z}_{n+1}(t) \\ \vdots \\ \dot{z}_{2n}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax(t) + b u(x(t), \psi(t)) \\ -A^T \psi(t) \end{pmatrix}, & t \in T = [0, t_1], \\ z^0 = z(0) = (x(0), \psi(0)), & x(0) = x^0, \\ z^1 = z(t_1) = (x(t_1), \psi(t_1)), & \psi(t_1) = \psi^1 = -(\alpha x(t_1) + c - \alpha x^1), \end{cases}$$

où  $z^0$  et  $z^1$  correspondent aux conditions initiales et finales du système (2.16).

Pour résoudre ce problème, on essaie de déterminer un vecteur de départ :

$$z^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0, \psi_1^0, \dots, \psi_n^0)^T$$

pour le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \varphi(t, z(t)) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax(t) + b u(x(t), \psi(t)) \\ -A^T \psi(t) \end{pmatrix}, & t \in T = [0, t_1], \\ z(0) = z^0 = (x(0), \psi(0)) = (x^0, \psi^0), \end{cases} \quad (2.17)$$

de telle sorte que la solution  $z(t) = z(t, z^0)$  satisfait les conditions aux limites du système (2.16). En effet, la condition initiale  $x^0$  du problème (2.1)-(2.3) est fixée déjà pour une partie de  $z^0$ , et l'inconnue de la fonction de tir, notée  $F$ , est ainsi réduite à la partie manquante, qui représente la valeur de l'état adjoint initial  $\psi(0) = \psi^0$ . Dépendant de la solution  $z(t_1, z^0)$  du problème de Cauchy (2.17), la condition au temps terminal  $t_1$  détermine la valeur de la fonction de tir, qui est définie comme suit :

$$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ z \mapsto F(z^0, z(t_1, z^0)),$$

où dans notre problème, la fonction de tir s'écrit alors :

$$F(z^0, z(t_1, z^0)) = \psi(t_1) + \alpha x(t_1) + c - \alpha x^1 \\ = e^{-A^T t_1} \psi^0 + \alpha \left( e^{A t_1} x^0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-t)} b u(t) dt \right) + c - \alpha x^1.$$

La commande  $u(t)$  maximise le hamiltonien :

$$H(x, \psi, u) = \max_{v \in U} H(x, \psi, v),$$

d'où

$$u(t) = L \operatorname{sign}(\psi(t)^T b) = L \sigma(t, \psi^0).$$

Si l'on note  $\psi^0 = s$ , la fonction de tir devient donc :

$$F(s) = e^{-A^T t_1} s + \alpha \left( e^{A t_1} x^0 + L \int_0^{t_1} e^{A(t_1-t)} b \sigma(t, s) dt \right) + c - \alpha x^1. \quad (2.18)$$

La commande optimale  $u^*(t)$  du problème (2.1)-(2.3) est alors celle qui correspond à la condition initiale  $\psi^0 = s^*$ , telle que  $F(s^*) = 0$ . Ainsi, déterminer un zéro  $s^*$  de la fonction  $F(s)$  équivaut à la résolution du problème aux deux bouts (2.16), ce qui permet de trouver ainsi une solution du problème (2.1)-(2.3). Ceci peut alors se faire par la méthode de Newton, en commençant par l'approximation initiale  $s^0 = \psi^0$ , qui est le vecteur de départ pour le problème à valeur initiale (2.17). On doit calculer itérativement les valeurs  $s^i$  selon la formule :

$$s^{i+1} = s^i - J^{-1} F(s^i) F'(s^i),$$

où

$$JF(s) = e^{-A^T t_1} + \partial \varphi(s), \quad \varphi(s) = \alpha L \int_0^{t_1} e^{A(t_1-t)} b \sigma(t, s) dt.$$

## 2.4 Résolution d'un exemple numérique par la méthode de tir

**Exemple 2.4.1.** Soit le problème linéaire-quadratique de contrôle optimal suivant :

$$\min J(u) = \frac{1}{2} \|x(t_1)\|^2, \quad (2.19)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 2, \\ \dot{x}_2 = u, & x_2(0) = 4, \end{cases} \quad (2.20)$$

$$|u(t)| \leq 2, \quad t \in T = [0, t_1] = [0, 2], \quad (2.21)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le hamiltonien du système est donné par :

$$H(x, \psi, u) = \psi_1 x_2 + \psi_2 u. \quad (2.22)$$

Le principe du maximum de Pontryaguine nous conduit à un système différentiel aux deux bouts de 4 équations à 4 inconnues suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(x(t), \psi(t)) \\ \dot{\psi}_1(t) = 0 \\ \dot{\psi}_2(t) = -\psi_1(t) \\ x(0) = (2, 4) \\ \psi(2) = -x(2), \end{cases} \quad (2.23)$$

où la commande  $u(t)$  maximise le hamiltonien (2.22). D'où

$$u(t) = 2 \operatorname{sign}(\psi_2(t)).$$

Résoudre le problème (2.19)-(2.21) équivaut à résoudre le problème aux deux bouts suivant :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \begin{pmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \dot{z}_3(t) \\ \dot{z}_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{\psi}_1(t) \\ \dot{\psi}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ 2 \operatorname{sign}(\psi_2(t)) \\ 0 \\ -\psi_1(t) \end{pmatrix}, \quad t \in T = [0, 2], \\ z^0 = z(0) = (x(0), \psi(0)), \quad x(0) = x^0 = (2, 4)^T, \\ z^1 = z(2) = (x(2), \psi(2)), \quad \psi(2) = -x(2), \end{cases}$$

où  $z^0$  et  $z^1$  correspondent aux conditions initiales et finales du système (2.23).

Si l'on note  $\psi(0) = \psi^0 = s$ , le problème de Cauchy correspondant, ainsi que l'équation de la fonction de tir sont :

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{z}_2(t) = 2 \operatorname{sign}(\psi_2(t)) \\ \dot{z}_3(t) = 0 \\ \dot{z}_4(t) = -\psi_1(t) \\ z(0) = z^0 = (2, 4, s_1, s_2), \end{cases} \quad (2.24)$$

et

$$F(s) = \psi(2, x^0, s) + x(2, x^0, s) = \begin{pmatrix} \psi_1(2, 2, 4, s_1, s_2) \\ \psi_2(2, 2, 4, s_1, s_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1(2, 2, 4, s_1, s_2) \\ x_2(2, 2, 4, s_1, s_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le programme de la méthode de tir simple est implémenté avec le logiciel MATLAB, en utilisant les fonctions `ode45` et `fsolve`. La condition initiale optimale de l'état adjoint  $s^* \in \mathbb{R}^2$ , l'état terminal  $x^*(2)$ , l'état adjoint terminal  $\psi^*(2)$ , la valeur de la fonctionnelle  $J(u^*)$ , et la commande optimale  $u^*(t)$ , sont présentés dans le tableau ci-dessous :

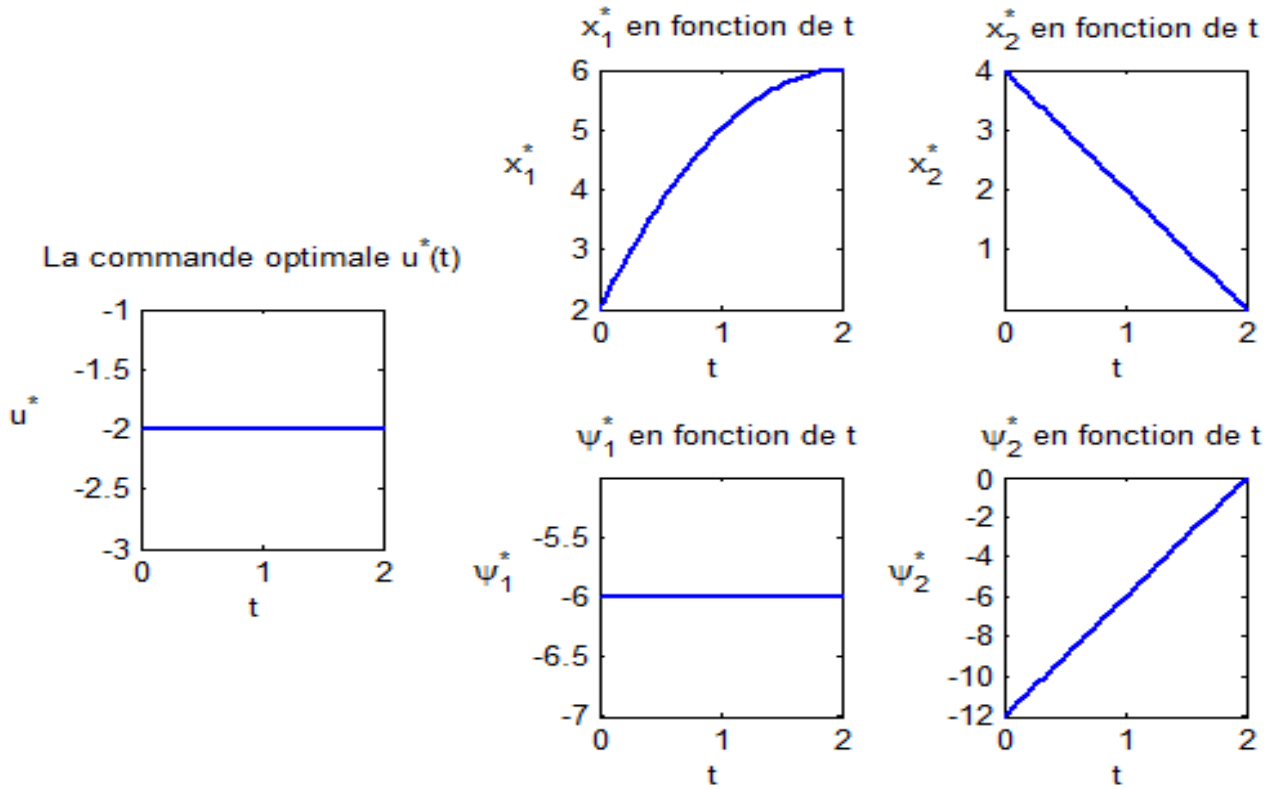
$s^* = \psi^*(0)$	$x^*(2, x^0, s^*)$	$\psi^*(2, x^0, s^*) = -x^*(2, x^0, s^*)$	$J(u^*)$	$u^*(t), t \in [0, 2]$
$\begin{pmatrix} -6 \\ -12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}$	18	-2

TABLE 2.1 – Résultats numériques de la méthode de tir simple utilisant MATLAB (`ode45` et `fsolve`)

Dans la figure suivante, on représente la commande optimale  $u^*(t)$ , les composantes de la trajectoire optimale  $x^*(t)$  du système direct (2.20), et aussi les composantes de la trajectoire optimale  $\psi^*(t)$  du système conjugué :

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, & \psi_1(2) = -6, \\ \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1, & \psi_2(2) = 0, \end{cases}$$

d'où  $\psi_1(t) = -6$ ,  $\psi_2(t) = 6t - 12 = 6(t - 2)$ .



## 2.5 Reformulation du PMP par un critère d'optimalité

On peut exprimer le principe du maximum sous forme d'un critère d'optimalité en introduisant la notion de co-commande suivante :

$$E(t) = \psi^T(t)b = -(\alpha x(t_1) + c - \alpha x^1)^T q(t), \quad t \in T = [0, t_1], \quad (2.25)$$

où  $q(t) = e^{A(t_1-t)}b$ , appelée aussi fonction de commutation. Alors l'accroissement de la fonctionnelle (2.7) prend la forme suivante :

$$\Delta J(u) = J(\bar{u}) - J(u) = - \int_0^{t_1} E(t)\Delta u(t)dt + \Gamma, \quad (2.26)$$

où  $\Gamma = \frac{\alpha}{2} \|\Delta x(t_1)\|^2 \geq 0$ .

On a le théorème suivant :

**Théorème 2.5.1.** Soit  $u(t)$  une commande admissible du problème (2.1)-(2.3). Alors les relations :

$$\begin{cases} E(t) \geq 0, & \text{si } u(t) = +L; \\ E(t) \leq 0, & \text{si } u(t) = -L; \\ E(t) = 0, & \text{si } -L < u(t) < L, t \in T, \end{cases} \quad (2.27)$$

sont nécessaires et suffisantes pour l'optimalité de la commande  $u(t)$ .

**Preuve. Suffisance :** Soit  $u(t)$  une commande admissible vérifiant (2.27). Pour toute autre commande admissible  $\bar{u}(t)$  du problème (2.1)-(2.3), la formule de l'accroissement (2.26) donne alors :

$$J(\bar{u}) - J(u) = - \int_0^{t_1} E(t)\Delta u(t)dt + \Gamma \geq - \int_0^{t_1} E(t)\Delta u(t)dt,$$

car  $\Gamma = \frac{\alpha}{2} \|\Delta x(t_1)\|^2 \geq 0$ .

Soit

$$T^+ = \{t \in T : E(t) > 0\}, \quad T^- = \{t \in T : E(t) < 0\},$$

d'où

$$J(\bar{u}) - J(u) \geq \int_0^{t_1} E(t)(u(t) - \bar{u}(t))dt = \int_{T^+} E(t)(u(t) - \bar{u}(t))dt + \int_{T^-} E(t)(u(t) - \bar{u}(t))dt.$$

Comme  $-L \leq \bar{u}(t) \leq L$ ,  $t \in T$ , alors les relations (2.27) nous permettent d'écrire :

$$J(\bar{u}) - J(u) \geq \int_{T^+} E(t)(L - \bar{u}(t))dt + \int_{T^-} E(t)(-L - \bar{u}(t))dt \geq 0,$$

d'où  $J(\bar{u}) \geq J(u)$ . Par conséquent,  $u(t)$  est une commande optimale du problème (2.1)-(2.3).

**Nécessité :** Soit  $u(t)$  une commande optimale du problème (2.1)-(2.3), et on suppose que les relations (2.27) ne sont pas vérifiées. Deux cas peuvent alors se présenter :

- (i)  $\exists \theta \in T = [0, t_1[ \cup \{t_1\}$  tel que :  $E(\theta) > 0$  et  $u(\theta) < L$  ;
- (ii)  $\exists \theta \in T = [0, t_1[ \cup \{t_1\}$  tel que :  $E(\theta) < 0$  et  $u(\theta) > -L$ .

Supposons qu'on a le cas (i) et soit  $\theta \in [0, t_1[$ . La fonction  $E(t)$ ,  $t \in T = [0, t_1]$ , étant continue et la commande  $u(t)$ ,  $t \in [0, t_1[$ , étant continue à droite de  $\theta$ , alors  $\exists \epsilon > 0$  tel que :

$$E(t) > 0, \quad \text{et} \quad u(t) < L, \quad t \in [\theta, \theta + \epsilon], \quad \theta + \epsilon < t_1.$$

Construisons alors une nouvelle commande admissible  $\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$ ,  $t \in [0, t_1]$ , où

$$\Delta u(t) = \begin{cases} L - u(t), & \text{si } t \in [\theta, \theta + \epsilon[; \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (2.28)$$

En vertu de la formule (2.28), la nouvelle commande  $\bar{u}(t)$ ,  $t \in [0, t_1]$ , est admissible pour tout  $\epsilon > 0$  suffisamment petit. Soit alors  $\bar{x}(t)$ ,  $t \in [0, t_1]$ , la trajectoire du système (2.2) correspondant à la commande  $\bar{u}(t)$ ,  $t \in [0, t_1]$ . Posons  $\Delta x(t) = \bar{x}(t) - x(t)$ ,  $t \in [0, t_1]$ . Alors

pour  $\epsilon > 0$  assez petit, il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}\Delta x(t_1) &= \int_0^{t_1} q(t)\Delta u(t)dt = \int_{\theta}^{\theta+\epsilon} q(t)(L - u(t))dt \\ &= \epsilon q(\theta)(L - u(\theta)) + o_n(\epsilon) \\ &= \epsilon \left[ q(\theta)(L - u(\theta)) + \frac{o_n(\epsilon)}{\epsilon} \right] \\ &= \epsilon f(\epsilon),\end{aligned}$$

où  $f(\epsilon)$  est une fonction bornée au voisinage de  $\epsilon = 0$  et  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{o_n(\epsilon)}{\epsilon} = 0$ . D'où

$$\Gamma = \frac{\alpha}{2} \|\Delta x(t_1)\|^2 = \frac{\alpha}{2} \Delta x^T(t_1)\Delta x(t_1) = \frac{\alpha\epsilon^2}{2} f^T(\epsilon)f(\epsilon) = \frac{\alpha\epsilon^2}{2} \|f(\epsilon)\|^2.$$

Calculons alors l'accroissement de la fonctionnelle :

$$\begin{aligned}\Delta J(u) = J(\bar{u}) - J(u) &= - \int_0^{t_1} E(t)\Delta u(t)dt + \Gamma \\ &= \epsilon \left[ E(\theta)(u(\theta) - L) + \frac{0(\epsilon)}{\epsilon} + \frac{\alpha\epsilon}{2} \|f(\epsilon)\|^2 \right].\end{aligned}$$

Comme  $E(\theta)(u(\theta) - L) < 0$ , alors pour  $\epsilon > 0$  suffisamment petit, on obtient l'inégalité  $J(\bar{u}) < J(u)$ , contredisant l'optimalité de la commande  $u(t)$ .

Si  $\theta = t_1$ ,  $E(t)$ ,  $t \in T = [0, t_1]$ , étant continue, et la commande  $u(t_1)$  étant continue à gauche de  $\theta$ , alors  $\exists \epsilon > 0$  tel que :

$$E(t) > 0, \text{ et } u(t) < L, \quad t \in [t_1 - \epsilon, t_1].$$

Construisons la nouvelle commande admissible  $\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$ ,  $t \in T = [0, t_1]$ , où

$$\Delta u(t) = \begin{cases} L - u(t), & \text{si } t \in [t_1 - \epsilon, t_1]; \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Calculons l'accroissement de la fonctionnelle :

$$\begin{aligned}\Delta J(u) = J(\bar{u}) - J(u) &= - \int_0^{t_1} E(t)\Delta u(t)dt + \Gamma \\ &= \int_{t_1-\epsilon}^{t_1} E(t)(u(t) - L)dt + \Gamma \\ &= - \int_{t_1}^{t_1-\epsilon} E(t)(u(t) - L)dt + \Gamma \\ &= \epsilon \left[ E(\theta)(u(\theta) - L) + \frac{0(\epsilon)}{\epsilon} + \frac{\alpha\epsilon}{2} \|f(\epsilon)\|^2 \right].\end{aligned}$$

Comme  $E(\theta)(u(\theta) - L) < 0$ , alors pour  $\epsilon > 0$  suffisamment petit, on obtient l'inégalité  $J(\bar{u}) < J(u)$ , contredisant l'optimalité de la commande  $u(t)$ . Par conséquent, dans tous les cas, les relations (2.27) sont forcément vérifiées.  $\square$

**Remarque 2.5.1.** La preuve pour le cas (ii) se fait de manière analogue que pour le cas (i).

### 2.5.1 Calcul de l'estimation de suboptimalité et critère d' $\epsilon$ -optimalité

Soit  $u(t)$ ,  $t \in T = [0, t_1]$ , une commande admissible du problème (2.1)-(2.3), engendrant une trajectoire  $x(t)$ ,  $t \in T$ . Considérons une autre commande admissible quelconque  $\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$ ,  $t \in T$ , et sa trajectoire correspondante

$$\bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t), \quad t \in T, \quad \Delta x(0) = 0,$$

avec

$$-L - u(t) \leq \Delta u(t) \leq +L - u(t), \quad t \in T. \quad (2.29)$$

Le minimum de la partie linéaire de l'accroissement (2.26) sous la contrainte (2.29) est atteint pour :

$$\Delta u(t) = \begin{cases} -L - u(t), & \text{si } E(t) < 0; \\ +L - u(t), & \text{si } E(t) > 0; \\ \in [-L - u(t), +L - u(t)], & \text{si } E(t) = 0, \quad t \in T. \end{cases}$$

On introduit l'expression :

$$\beta(u) = \int_{T^+} E(t)(L - u(t))dt + \int_{T^-} E(t)(-L - u(t))dt,$$

où

$$T^+ = \{t \in T : E(t) > 0\}, \quad T^- = \{t \in T : E(t) < 0\}, \quad T = [0, t_1].$$

Le nombre  $\beta(u)$  est appelé estimation de suboptimalité de la commande  $u(t)$  du problème (2.1)-(2.3). On a la condition suffisante d' $\epsilon$ -optimalité suivante :

**Théorème 2.5.2.** *Pour  $\epsilon \geq 0$ , la commande admissible  $u(t)$ ,  $t \in T$ , est  $\epsilon$ -optimale si*

$$\beta(u) \leq \epsilon.$$

**Preuve.** *Tout d'abord, montrons l'inégalité :*

$$J(u) - J(u^*) \leq \beta(u).$$

*En effet, en remplaçant dans la formule d'accroissement (2.26) la commande  $\bar{u}(t)$  par une commande optimale  $u^*$ , et en minorant l'expression, on aura alors :*

$$\begin{aligned} J(u^*) - J(u) &= - \int_0^{t_1} E(t) \Delta u(t) dt + \frac{\alpha}{2} \|\Delta x(t_1)\|^2 \\ &= - \int_0^{t_1} E(t)(u^*(t) - u(t)) dt + \frac{\alpha}{2} \|\Delta x(t_1)\|^2 \\ &\geq - \int_0^{t_1} E(t)(u^*(t) - u(t)) dt, \end{aligned}$$

d'où

$$J(u) - J(u^*) \leq \int_0^{t_1} E(t)(u^*(t) - u(t))dt.$$

On a

$$-L \leq u^*(t) \leq L, \quad t \in T,$$

donc :

$$\begin{cases} -L - u(t) \leq u^*(t) - u(t) \leq L - u(t), \\ E(t)(u^*(t) - u(t)) \leq E(t)(L - u(t)), \quad \text{si } E(t) > 0, \\ E(t)(u^*(t) - u(t)) \leq E(t)(-L - u(t)), \quad \text{si } E(t) < 0. \end{cases}$$

D'où

$$J(u) - J(u^*) \leq \int_{T^+} E(t)(L - u(t))dt + \int_{T^-} E(t)(-L - u(t))dt.$$

Par conséquent, on obtient :

$$J(u) - J(u^*) \leq \beta(u) \leq \epsilon,$$

ce qui veut dire que la commande  $u(t)$ ,  $t \in T$ , est  $\epsilon$  - optimale.  $\square$

**Exemple 2.5.1.** Soit  $u(t) = -2$ ,  $t \in [0, 2]$ , la commande du problème (2.19)-(2.21), trouvée dans l'exemple 2.4.1. Montrons que cette commande est optimale dans le problème considéré. La commande  $u(t)$  étant une commande admissible, il reste à montrer que le critère d'optimalité est vérifié. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= u = -2, \quad x_2(0) = 4 \Rightarrow x_2(t) = -2t + 4, \\ \dot{x}_1(t) &= x_2(t) = -2t + 4, \quad x_1(0) = 2 \Rightarrow x_1(t) = -t^2 + 4t + 2, \end{aligned}$$

donc  $x_1(2) = 6$ ,  $x_2(2) = 0$ , et  $x(2) = (x_1(2), x_2(2))^T = (6, 0)^T$ .

On forme le hamiltonien :

$$H(x, \psi, u) = \psi_1 x_2 + \psi_2 u.$$

La solution du système conjugué se déduit des équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \quad \psi_1(2) = -x_1(2) = -6, \\ \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1, \quad \psi_2(2) = -x_2(2) = 0, \end{cases}$$

d'où  $\psi_1(t) = -6$ ,  $\psi_2(t) = 6(t - 2)$ .

Introduisons la fonction de co-commande  $E(t)$ ,  $t \in T = [0, 2]$  :

$$E(t) = \psi^T(t)b = (-6, 6t - 12) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 6(t - 2).$$

Pour la commande considérée  $u(t) = -2, t \in [0, 2]$ , on a  $E(t) \leq 0, \forall t \in [0, 2]$ . Alors

$$\begin{aligned} \beta(u) &= \int_{T^-} E(t)(-L - u(t))dt \\ &= \int_0^2 (6t - 12)(-2 + 2)dt = 0. \end{aligned}$$

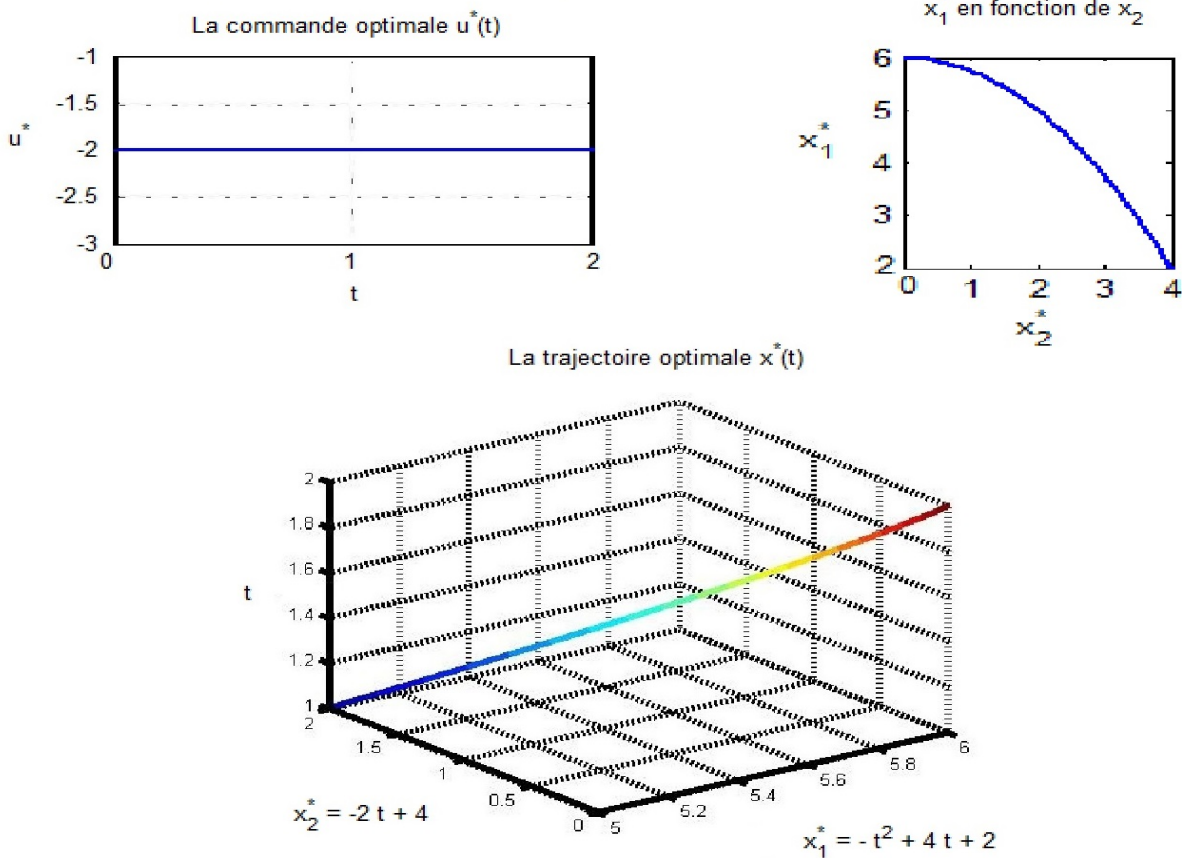
Le critère d'optimalité étant vérifié, la commande  $u^*(t) = -2, t \in [0, 2]$ , est donc optimale, avec

$$J(u^*) = \frac{1}{2} \|x^*(2)\|^2 = \frac{1}{2} \|(6, 0)\|^2 = 18.$$

On a :

$$x^*(t) = \begin{pmatrix} x_1^*(t) \\ x_2^*(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^2 + 4t + 2 \\ -2t + 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1^* = -\frac{1}{4}(x_2^*)^2 + 6.$$

Dans la figure suivante, on représente la commande optimale  $u^*(t), t \in T = [0, 2]$ , la composante optimale  $x_1^*$  en fonction de la composante optimale  $x_2^*$ , et la trajectoire optimale  $x^*(t), t \in [0, 2]$ .



## 2.6 Méthode de support

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'application dans un problème de contrôle optimal d'une méthode directe issue de la programmation linéaire-quadratique, appelée méthode de support ou méthode adaptée. Cette dernière est une méthode intermédiaire entre la méthode des points intérieurs et celle d'activation des contraintes. L'application de la méthode adaptée en contrôle optimal consiste en deux procédures : le changement de commande et la procédure finale. Nous renvoyons les lecteurs intéressés par cette méthode à [23, 13, 29, 3, 5].

Soient  $\epsilon \geq 0$  et  $u(t)$  une commande initiale du problème (2.1)-(2.3). Le but de l'algorithme est de construire une commande  $\epsilon$ -optimale  $u^\epsilon(t)$  ou carrément optimale  $u^*(t)$ , en faisant des itérations permettant le passage de  $u(t)$  à  $\bar{u}(t)$  tel que :

$$J(\bar{u}) \leq J(u).$$

Pour cela, l'algorithme se décompose en deux procédures :

1. Changement de commande :  $u(t) \rightarrow \bar{u}(t)$  ;
2. procédure finale pour construire de manière précise la commande optimale.

Au début de chaque itération, les informations suivantes sont stockées :

- ↔ Une commande admissible  $u(t)$  ;
- ↔ la valeur de suboptimalité  $\beta(u)$ .

### 2.6.1 Conditions de passage à la procédure finale

On considère une commande admissible  $u(t)$  telle que  $\beta(u) > \epsilon$ , la co-commande correspondante  $E(t)$ ,  $t \in T$ , est donnée par la formule (2.25). On construit la quasi-commande  $\omega$ , avec

$$\omega(t) = \begin{cases} -L, & \text{si } E(t) < 0, \\ +L, & \text{si } E(t) > 0, \end{cases} \quad t \in T,$$

et sa quasi-trajectoire correspondante  $\kappa = (\kappa(t), t \in T)$ , du système dynamique suivant :

$$\dot{\kappa} = A\kappa + b\omega, \quad \kappa(0) = x^0.$$

On définit l'ensemble suivant :

$$T^* = \{t \in T : \text{sign}E(t) \neq \text{sign}E(t, \omega)\},$$

où  $E(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , est la co-commande correspondant à la quasi-commande  $\omega$ . On choisit  $\eta > 0$ , un paramètre de la méthode. Si l'inégalité

$$|T^*| \leq \eta, \tag{2.30}$$

est vérifiée, alors on passe à la procédure finale.

### 2.6.2 Changement de la commande

Soit  $\epsilon > 0$  donné et une commande admissible  $u(t)$  vérifiant  $\beta(u) > \epsilon$ . Soient  $\mu > 0$ ,  $h > 0$ , deux autres paramètres de l'algorithme. On construit les ensembles suivants :

$$T_\mu = \{t \in T : |E(t)| \leq \mu\}, \quad T_* = T \setminus T_\mu = \{t \in T : |E(t)| > \mu\}.$$

Subdivisons l'ensemble  $T_\mu$  en sous - intervalles

$$[\tau_i, \tau^i], \quad i = \overline{1, M}, \quad \tau_i < \tau^i \leq \tau_{i+1}, \quad T_\mu = \bigcup_{i=1}^M [\tau_i, \tau^i],$$

de telle façon que nous ayons

$$\tau^i - \tau_i \leq h, \quad u(t) = u_i = \text{const}, \quad t \in [\tau_i, \tau^i], \quad i = \overline{1, M}.$$

On pose  $K = \{1, \dots, M, M+1\}$ ,  $l = (l_i, i \in K)$ , et on construit une nouvelle commande  $\bar{u}(t)$  telle que :

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u_i + l_i, & t \in [\tau_i, \tau^i], \quad l_i^- \leq l_i \leq l_i^+ \quad i = \overline{1, M}, \\ u(t) + l_{M+1}(\omega(t) - u(t)), & t \in T_*, \quad l_{M+1}^- \leq l_{M+1} \leq l_{M+1}^+, \end{cases}$$

où

$$l_i^- = -L - u_i, \quad l_i^+ = L - u_i, \quad i = \overline{1, M}, \quad l_{M+1}^- = 0, \quad l_{M+1}^+ = 1.$$

L'accroissement (2.26) de la fonctionnelle est donnée par :

$$J(\bar{u}) - J(u) = - \int_0^{t_1} E(t) \Delta u(t) dt + \frac{\alpha}{2} \Delta x(t_1)^T \Delta x(t_1). \quad (2.31)$$

On calcule :

$$\begin{aligned} \Delta x(t_1) &= \int_0^{t_1} q(t) \Delta u(t) dt \\ &= \sum_{i=1}^M \int_{\tau_i}^{\tau^i} q(t) l_i dt + l_{M+1} \int_{T_*} q(t) [\omega(t) - u(t)] dt; \end{aligned}$$

$$\int_0^{t_1} E(t) \Delta u(t) dt = \sum_{i=1}^M \int_{\tau_i}^{\tau^i} E(t) l_i dt + l_{M+1} \int_{T_*} E(t) [\omega(t) - u(t)] dt.$$

Si l'on note :

$$q_i = \int_{\tau_i}^{\tau^i} q(t) dt, \quad \xi_i = - \int_{\tau_i}^{\tau^i} E(t) dt, \quad i = \overline{1, M}, \quad (2.32)$$

$$q_{M+1} = \int_{T_*} q(t) [\omega(t) - u(t)] dt, \quad \xi_{M+1} = - \int_{T_*} E(t) [\omega(t) - u(t)] dt, \quad (2.33)$$

alors on obtient :

$$\begin{aligned}\Delta x(t_1) &= \sum_{i=1}^M q_i l_i + l_{M+1} q_{M+1} = \sum_{i=1}^{M+1} q_i l_i, \\ - \int_0^{t_1} E(t) \Delta u(t) dt &= \sum_{i=1}^{M+1} \xi_i l_i,\end{aligned}$$

et l'accroissement de la fonctionnelle (2.31) devient :

$$\Delta J(u) = \sum_{i=1}^{M+1} \xi_i l_i + \frac{\alpha}{2} \left( \sum_{i=1}^{M+1} q_i l_i \right)^T \left( \sum_{j=1}^{M+1} q_j l_j \right) = \xi^T l + \frac{\alpha}{2} l^T D l,$$

où  $\xi = (\xi_i, i \in K)$ , est un vecteur de dimension  $K$ , et  $D = (d_{ij} = q_i^T q_j, 1 \leq i, j \leq M+1)$ .

Pour trouver le vecteur d'accroissement  $l = (l_i, i \in K)$ , on considère le problème de programmation quadratique suivant :

$$\min \Delta J(u) = \min \varphi(l) = \frac{\alpha}{2} l^T D l + \xi^T l, \quad (2.34)$$

$$l_i^- \leq l_i \leq l_i^+, \quad i = \overline{1, M}, \quad l_{M+1}^- \leq l_{M+1} \leq l_{M+1}^+, \quad (2.35)$$

où

$$l_i^- = -L - u_i, \quad l_i^+ = L - u_i, \quad i = \overline{1, M}, \quad l_{M+1}^- = 0, \quad l_{M+1}^+ = 1.$$

Notons que le vecteur  $l = 0$  est une solution réalisable du problème (2.34) - (2.35), avec  $\varphi(0) = 0$ .

Donc la valeur minimale vérifie :

$$\varphi(l^*) = \varphi^* \leq 0.$$

En résolvant ce problème par la méthode de support de programmation quadratique [32], on obtient une solution  $\epsilon$ -optimale  $l^\epsilon$ . La nouvelle commande  $\bar{u}(t)$  se construit alors de la manière suivante :

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u_i(t) + l_i^\epsilon, & t \in [\tau_i, \tau^i], \quad i = \overline{1, M}, \\ u(t) + l_{M+1}^\epsilon (\omega(t) - u(t)), & t \in T_*, \end{cases}$$

et elle satisfait ainsi l'inégalité :  $J(\bar{u}) \leq J(u)$ .

En calculant la nouvelle valeur de suboptimalité  $\beta(\bar{u})$ , on distingue trois cas :

1. si  $\beta(\bar{u}) = 0$ , alors  $\bar{u}(t)$  est une commande optimale pour le problème (2.1)-(2.3) ;
2. si  $\beta(\bar{u}) \leq \epsilon$ , alors  $\bar{u}(t)$  est une commande  $\epsilon$ -optimale, et on arrête l'algorithme ;
3. sinon, cette procédure de changement de commande sera répétée jusqu'à ce que la condition de passage à la procédure finale (2.30) soit vérifiée.

### 2.6.3 Procédure finale

Soit  $u(t)$  la commande obtenue dans la phase précédente, avec les fonctions correspondantes  $x(t)$ ,  $E(t)$ ,  $\omega(t)$ ,  $\kappa(t)$ ,  $E(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, t_1]$ , et on considère que la condition (2.30) est satisfaite, ainsi que l'ensemble des racines de  $E(t)$  est égal à  $n - 1$  :

$$T^0 = \{t \in T : E(t) = 0\} = \{\theta_i, i = \overline{1, n-1}\},$$

et en supposant de plus que :

$$\dot{E}(\theta_i) \neq 0, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

On sait que

$$\omega(t) = L \operatorname{sign} E(t), \quad t \in T = [0, t_1],$$

et  $\kappa(t)$ ,  $t \in T = [0, t_1]$ , est la trajectoire correspondant à  $\omega(t)$ ,  $t \in T$ .

La procédure finale consiste à trouver la solution  $\tau = T_s = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1})^T \in \mathbb{R}^{n-1}$ , de  $(n - 1)$  équations à  $(n - 1)$  inconnues :

$$F(\tau) = F(T_s) = E(T_s) = (E(\tau_i) = 0, \quad i = \overline{1, n-1}) = \begin{pmatrix} F_1(\tau) \\ F_2(\tau) \\ \vdots \\ F_{n-1}(\tau) \end{pmatrix},$$

où

$$E(T_s) = -(\alpha \kappa(t_1, T_s) + c - \alpha x^1)^T q(T_s),$$

avec

$$q(T_s) = (e^{A(t_1 - \tau_i)} b, \quad i = \overline{1, n-1}),$$

et  $\kappa(t, T_s)$ ,  $t \in [0, t_1]$  est la trajectoire (2.2) correspondant à la quasi-commande  $\omega(t, T_s)$ ,  $t \in [0, t_1]$  :

$$\omega(t, T_s) = \begin{cases} -L \operatorname{sign} \dot{E}(\theta_1), & \text{si } t \in [0, \tau_1[; \\ -L \operatorname{sign} \dot{E}(\theta_i), & \text{si } t \in [\tau_{i-1}, \tau_i[, \quad i = \overline{2, n-1}; \\ +L \operatorname{sign} \dot{E}(\theta_{n-1}), & \text{si } t \in [\tau_{n-1}, t_1]. \end{cases} \quad (2.36)$$

De (2.36), on déduit le système d'équations :

$$E(T_s) = -(\alpha \kappa(t_1, T_s) + c - \alpha x^1)^T q(T_s) = 0,$$

avec

$$\begin{aligned}\kappa(t_1, T_s) &= e^{At_1}x^0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-t)}b\omega(t, T_s)dt \\ &= e^{At_1}x^0 + \int_0^{\theta_1} q(t)\omega(t, T_s)dt + \int_{\theta_1}^{\tau_1} q(t)\omega(t, T_s)dt + \int_{\tau_1}^{\theta_2} q(t)\omega(t, T_s)dt + \int_{\theta_2}^{\tau_2} q(t)\omega(t, T_s)dt \\ &\quad + \cdots + \int_{\tau_{n-2}}^{\theta_{n-1}} q(t)\omega(t, T_s)dt + \int_{\theta_{n-1}}^{\tau_{n-1}} q(t)\omega(t, T_s)dt + \int_{\tau_{n-1}}^{t_1} q(t)\omega(t, T_s)dt,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\kappa(t_1, T_s) &= e^{At_1}x^0 - L \int_0^{\theta_1} q(t)\text{sign}\dot{E}(\theta_1)dt - L \int_{\theta_1}^{\tau_1} q(t)\text{sign}\dot{E}(\theta_1)dt - L \int_{\tau_1}^{\theta_2} q(t)\text{sign}\dot{E}(\theta_2)dt \\ &\quad - L \int_{\theta_2}^{\tau_2} q(t)\text{sign}\dot{E}(\theta_2)dt - \cdots - L \int_{\tau_{n-2}}^{\theta_{n-1}} q(t)\text{sign}\dot{E}(\theta_{n-1})dt - L \int_{\theta_{n-1}}^{\tau_{n-1}} q(t)\text{sign}\dot{E}(\theta_{n-1})dt \\ &\quad + L \int_{\tau_{n-1}}^{t_1} q(t)\text{sign}\dot{E}(\theta_{n-1})dt, \\ &= e^{At_1}x^0 - L \int_0^{\theta_1} q(t)\text{sign}\dot{E}(\theta_1)dt + L \int_{\theta_1}^{\tau_1} q(t)\text{sign}\dot{E}(\theta_1)dt - 2L \int_{\theta_1}^{\tau_1} q(t)\text{sign}\dot{E}(\theta_1)dt \\ &\quad - L \int_{\tau_1}^{\theta_2} q(t)\text{sign}\dot{E}(\theta_2)dt + L \int_{\theta_2}^{\tau_2} q(t)\text{sign}\dot{E}(\theta_2)dt - 2L \int_{\theta_2}^{\tau_2} q(t)\text{sign}\dot{E}(\theta_2)dt - \cdots \\ &\quad - L \int_{\tau_{n-2}}^{\theta_{n-1}} q(t)\text{sign}\dot{E}(\theta_{n-1})dt + L \int_{\theta_{n-1}}^{\tau_{n-1}} q(t)\text{sign}\dot{E}(\theta_{n-1})dt - 2L \int_{\theta_{n-1}}^{\tau_{n-1}} q(t)\text{sign}\dot{E}(\theta_{n-1})dt \\ &\quad + L \int_{\tau_{n-1}}^{t_1} q(t)\text{sign}\dot{E}(\theta_{n-1})dt, \\ &= e^{At_1}x^0 + \int_0^{\theta_1} q(t)\omega(t)dt + \int_{\theta_1}^{\theta_2} q(t)\omega(t)dt + \cdots + \int_{\theta_{n-1}}^{t_1} q(t)\omega(t)dt - 2L \sum_{k=1}^{n-1} \text{sign}\dot{E}(\theta_k) \int_{\theta_k}^{\tau_k} q(t)dt \\ &= \kappa(t_1) - 2L \sum_{k=1}^{n-1} \text{sign}\dot{E}(\theta_k) \int_{\theta_k}^{\tau_k} q(t)dt.\end{aligned}$$

On peut alors écrire :

$$E(T_s) = - \left( \alpha\kappa(t_1) + c - \alpha x^1 - 2\alpha L \sum_{k=1}^{n-1} \text{sign}\dot{E}(\theta_k) \int_{\theta_k}^{\tau_k} q(t)dt \right)^T q(T_s) = 0. \quad (2.37)$$

On résout le système (2.37) avec la méthode de Newton, en commençant par l'approximation initiale

$$\tau^0 = \theta = (\theta_i, \quad i = \overline{1, n-1}).$$

La  $(k+1)^{\text{ème}}$  approximation  $\tau^{k+1}$  est égale à

$$\tau^{k+1} = \tau^k - J^{-1}F(\tau^k)F(\tau^k),$$

où

$$JF(\tau) = \frac{\partial E(T_s)}{\partial T_s} = \left( \frac{\partial F_i(\tau)}{\partial \tau_j}, 1 \leq i, j \leq n-1 \right)$$

est la matrice Jacobienne du système (2.37). Pour calculer cette matrice, nous devons déterminer les dérivées partielles de chaque équation  $F_i(\tau)$  par rapport à chaque variable  $\tau_j$ . Pour ce faire, nous utilisons la règle de dérivation pour le produit scalaire de deux fonctions, comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i(\tau)}{\partial \tau_j} &= - \frac{\partial}{\partial \tau_j} \left( (\alpha \kappa(t_1, T_s) + c - \alpha x^1)^T q(\tau_i) \right), \\ &= - \frac{\partial}{\partial \tau_j} \left( \left( \alpha \kappa(t_1) + c - \alpha x^1 - 2\alpha L \sum_{k=1}^{n-1} \text{sign} \dot{E}(\theta_k) \int_{\theta_k}^{\tau_k} q(t) dt \right)^T q(\tau_i) \right), \\ &= - \left( \frac{\partial}{\partial \tau_j} \left( \alpha \kappa(t_1) + c - \alpha x^1 - 2\alpha L \sum_{k=1}^{n-1} \text{sign} \dot{E}(\theta_k) \int_{\theta_k}^{\tau_k} q(t) dt \right) \right)^T q(\tau_i) \\ &\quad - \left( \alpha \kappa(t_1) + c - \alpha x^1 - 2\alpha L \sum_{k=1}^{n-1} \text{sign} \dot{E}(\theta_k) \int_{\theta_k}^{\tau_k} q(t) dt \right)^T \frac{\partial q(\tau_i)}{\partial \tau_j}, \\ &= \left( 2\alpha L \text{sign} \dot{E}(\theta_j) \frac{\partial}{\partial \tau_j} \left( \int_{\theta_j}^{\tau_j} q(t) dt \right) \right)^T q(\tau_i) \\ &\quad - \left( \alpha \kappa(t_1) + c - \alpha x^1 - 2\alpha L \sum_{k=1}^{n-1} \text{sign} \dot{E}(\theta_k) \int_{\theta_k}^{\tau_k} q(t) dt \right)^T \frac{\partial q(\tau_i)}{\partial \tau_j}. \end{aligned}$$

Pour compléter ces dérivées partielles, nous utilisons la définition de  $q(\tau_i)$  :

$$q(\tau_i) = e^{A(t_1 - \tau_i)} b,$$

ce qui nous donne les résultats suivants :

$$\frac{\partial}{\partial \tau_j} \int_{\theta_j}^{\tau_j} q(t) dt = q(\tau_j) = e^{A(t_1 - \tau_j)} b;$$

$$\frac{\partial q(\tau_i)}{\partial \tau_j} = \frac{\partial}{\partial \tau_j} (e^{A(t_1 - \tau_i)} b) = \begin{cases} -Aq(\tau_i), & \text{si } j = i; \\ 0, & \text{si } j \neq i. \end{cases}$$

En utilisant ces dérivées partielles, nous pouvons maintenant écrire l'expression complète pour

la dérivée partielle  $\frac{\partial F_i(\tau)}{\partial \tau_j}$ , et nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F_i(\tau)}{\partial \tau_j} \\ &= \begin{cases} \left( 2\alpha L \operatorname{sign} \dot{E}(\theta_j) q^T(\tau_j) \right) q(\tau_i) - \left( \alpha \kappa(t_1) + c - \alpha x^1 - 2\alpha L \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{sign} \dot{E}(\theta_k) \int_{\theta_k}^{\tau_k} q(t) dt \right)^T (-Aq(\tau_i)), & \text{si } j = i \\ 2\alpha L \operatorname{sign} \dot{E}(\theta_j) q^T(\tau_j) q(\tau_i), & \text{si } j \neq i \end{cases} \\ &= \begin{cases} \left( 2\alpha L \operatorname{sign} \dot{E}(\theta_j) q(\tau_j) + A^T \left( \alpha \kappa(t_1) + c - \alpha x^1 - 2\alpha L \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{sign} \dot{E}(\theta_k) \int_{\theta_k}^{\tau_k} q(t) dt \right) \right)^T q(\tau_i), & \text{si } j = i \\ 2\alpha L \operatorname{sign} \dot{E}(\theta_j) q^T(\tau_j) q(\tau_i), & \text{si } j \neq i \end{cases} \end{aligned}$$

La commande optimale  $u^*(t)$  du problème (2.1)-(2.3) aura alors la forme suivante :

$$u^*(t) = \omega(t, T_s), \quad t \in T = [0, t_1].$$

## 2.6.4 Schéma de l'algorithme

La méthode de support est résumée dans l'algorithme suivant :

### Début

- (1) On suppose en premier que le système est contrôlable.
- (2) Soit  $u(t)$  une commande admissible initiale du problème (2.1)-(2.3), avec  $\mu$ ,  $\eta$ , et  $h$  des paramètres de l'algorithme :
  - Déterminer la trajectoire admissible  $x(t)$ ,  $t \in T = [0, t_1]$ ;
  - calculer  $q(t) = e^{A(t_1-t)}b$ ;
  - déterminer la co-commande  $E(t) = -(\alpha x(t_1) + c - \alpha x^1)^T q(t)$ ;
  - calculer la valeur de la fonctionnelle

$$J(u) = \frac{\alpha}{2} \|x(t_1) - x^1\|^2 + c^T x(t_1).$$

- (3) Test d'optimalité de la commande de départ
  - Calculer la valeur de suboptimalité  $\beta(u)$ , où

$$\beta(u) = \int_{T^+} E(t)(L - u(t))dt + \int_{T^-} E(t)(-L - u(t))dt;$$

**Si**  $\beta(u) = 0$ , alors la commande  $u(t)$  est optimale, aller à **Fin**;

**Si**  $\beta(u) \leq \epsilon$ , alors la commande  $u(t)$  est  $\epsilon$ -optimale, aller à **Fin**;

**Sinon**, aller en (4).

**Fin SI.**

**(4)** Changement de la commande  $u(t)$  en  $\bar{u}(t)$ 

— Construire la quasi-commande  $\omega$  avec

$$\omega(t) = \begin{cases} -L, & \text{si } E(t) < 0, \\ +L, & \text{si } E(t) > 0, \end{cases} \quad t \in T = [0, t_1],$$

et sa quasi-trajectoire correspondante  $\kappa = (\kappa(t), t \in T = [0, t_1])$ ;

— définir l'ensemble suivant :

$$T^* = \{t \in T = [0, t_1] : \text{sign}E(t) \neq \text{sign}E(t, \omega)\},$$

où  $E(t, \omega)$  est la co-commande correspondant à la quasi-commande  $\omega(t)$ ,  $t \in T$ .

**SI**  $|T^*| \leq \eta$ , alors aller à la procédure finale **(6)**;

**Sinon**,

— construire les ensembles :

$$T_\mu = \{t \in T = [0, t_1] : |E(t)| \leq \mu\}, \quad T_* = \{t \in T = [0, t_1] : |E(t)| > \mu\};$$

— subdiviser l'ensemble  $T_\mu$  en sous - intervalles  $[\tau_i, \tau^i]$ ,  $i = \overline{1, M}$ ;

— calculer les quantités suivantes :  $q_i, \xi_i$ ,  $i \in K = \{1, \dots, M, M+1\}$ , données par les formules (2.32), (2.33) ;

— résoudre le problème (2.34) - (2.35) par la méthode de support [32] ;

**Fin SI.**

**(5)** Test d'optimalité de la nouvelle commande  $\bar{u}(t)$ 

— calculer la nouvelle valeur de suboptimalité  $\beta(\bar{u})$  ;

**Si**  $\beta(\bar{u}) = 0$ , alors  $\bar{u}(t)$  est une commande optimale, aller à **Fin** ;

**Si**  $\beta(\bar{u}) \leq \epsilon$ , alors  $\bar{u}(t)$  est une commande  $\epsilon$ -optimale, aller à **Fin** ;

**Sinon**, aller en **(4)** ;

**Fin SI** ;

**(6)** procédure finale.**(7)** résoudre le système (2.37) par la méthode de Newton, en prenant comme approximation initiale le vecteur :

$$\tau^0 = \theta = (\theta_i, i = \overline{1, n-1});$$

**(8)** déterminer la commande optimale  $u^*(t)$  qui s'écrit :

$$u^*(t) = \omega(t, T_s), \quad t \in T = [0, t_1].$$

**Fin.**

## 2.7 Résolution d'un exemple numérique par la méthode de support, suivie de sa résolution par la méthode de tir

Soit le problème linéaire-quadratique de contrôle optimal suivant :

$$\min J(u) = \frac{\alpha}{2} \|x(t_1)\|^2 + c^T x(t_1) \quad (2.38)$$

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = x_3, \quad (2.39)$$

$$\dot{x}_3 = u, \quad |u| \leq 1, \quad t \in T = [0, 8],$$

$$x = (x_1, x_2, x_3)^T, \quad x^0 = x(0) = (16, 0, 0)^T, \quad (2.40)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = (0, 0, 0)^T, \quad \alpha = 1, \quad L = 1.$$

Notons que le système (2.48) est contrôlable vu que  $\text{rang } Q = 3$ , où  $Q$  est une matrice d'ordre 3, appelée matrice de contrôlabilité. En effet, on a

$$Q = (b, Ab, A^2b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(Q) = -1 \neq 0.$$

Commençons par la méthode de support pour résoudre cet exemple. La commande  $u(t) \equiv 0$ ,  $t \in [0, 8]$ , est admissible. La solution du système dynamique (2.48) est donnée par la formule de Cauchy :

$$x(t) = e^{At}x^0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau, \quad t \in T = [0, 8].$$

Nous avons ainsi

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad u(t) = 0, \quad t \in T = [0, 8] \Rightarrow x(8) = e^{8A}x^0,$$

d'où

$$x(8) = \begin{pmatrix} x_1(8) \\ x_2(8) \\ x_3(8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 32 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calculons

$$q(t) = e^{A(8-t)}b = \begin{pmatrix} 1 & 8-t & \frac{1}{2}(8-t)^2 \\ 0 & 1 & 8-t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(8-t)^2 \\ 8-t \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$J(u) = \frac{1}{2} \|x(8)\|^2 = 128.$$

Calculons la fonction de co-commande  $E(t)$ ,  $t \in T = [0, 8]$  :

$$\begin{aligned} E(t) &= -(x(8) + c - x^1)^T q(t) \\ &= (-16, 0, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(t-8)^2 \\ 8-t \\ 1 \end{pmatrix} = -8t^2 + 128t - 512, \end{aligned}$$

dont le discriminant  $\Delta$  est nul. L'équation  $E(t) = 0$ , a une solution réelle double  $t = 8$ . D'où

$$E(t) \leq 0, \quad t \in T = [0, 8] \quad \Rightarrow \quad T^+ = \emptyset, \quad T^- = [0, 8[.$$

Choisissons  $\epsilon = 10^{-4}$  et calculons l'estimation de suboptimalité :

$$\begin{aligned} \beta(u) &= \int_{T^+} E(t)(L - u(t))dt + \int_{T^-} E(t)(-L - u(t))dt \\ &= - \int_0^8 (-8t^2 + 128t - 512) dt = \frac{4096}{3} \approx 1365.3333 > \epsilon. \end{aligned}$$

On construit la quasi-commande  $\omega$ , avec  $\omega(t) \equiv -1$ ,  $t \in T = [0, 8]$ , et sa quasi-trajectoire correspondante :

$$\kappa(t) = e^{At}x^0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}b\omega(\tau)d\tau.$$

Pour calculer  $\kappa(t)$ ,  $t \in [0, 8]$ , on a :

$$\begin{cases} \dot{\kappa}_3(t) = -1, & \kappa_3(0) = 0; \\ \dot{\kappa}_2(t) = \kappa_3(t) = -t, & \kappa_2(0) = 0; \\ \dot{\kappa}_1(t) = \kappa_2(t) = -\frac{1}{2}t^2, & \kappa_1(0) = 16, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \kappa(t) = \begin{pmatrix} \kappa_1(t) \\ \kappa_2(t) \\ \kappa_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}t^3 + 16 \\ -\frac{1}{2}t^2 \\ -t \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \kappa(8) &= (\kappa_1(8), \kappa_2(8), \kappa_3(8))^T = \left(-\frac{208}{3} \approx -69.3333, -32, -8\right)^T; \\ J(\omega) &= \frac{1}{2} \|\kappa(8)\|^2 = \frac{26528}{9} \approx 2947.5556. \end{aligned}$$

Calculons la fonction de co-commande  $E(t, \omega)$ ,  $t \in T = [0, 8]$  :

$$E(t, \omega) = -\kappa(8)^T q(t) = \left( \frac{208}{3}, 32, 8 \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(t-8)^2 \\ 8-t \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{104}{3} t^2 - \frac{1760}{3} t + \frac{7448}{3}, \Delta = -85.3 < 0.$$

Puisque le discriminant  $\Delta$  est négatif, il n'y a pas de solutions réelles, donc

$$E(t, \omega) > 0, \quad t \in T = [0, 8] \Rightarrow T^+ = [0, 8], \quad T^- = \emptyset.$$

Choisissons  $\eta = 3.5$  et définissons l'ensemble

$$T^* = \{t \in T : \text{sign}E(t) \neq \text{sign}E(t, \omega)\} = T = [0, 8], \quad |T^*| = 8 > \eta.$$

Pour la première étape de l'algorithme, posons  $\mu = 300$ . Pour construire une nouvelle commande admissible, nous avons :

$$\begin{aligned} |E(t)| \leq 300 &\Rightarrow |-8t^2 + 128t - 512| \leq 300 \\ &\Leftrightarrow -300 \leq -8t^2 + 128t - 512 \leq 300. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Pour trouver l'intervalle qui satisfait (2.41), nous devons résoudre les deux inégalités suivantes :

$$\begin{cases} -8t^2 + 128t - 512 - 300 \leq 0, \\ -8t^2 + 128t - 512 + 300 \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8t^2 + 128t - 812 \leq 0, \\ -8t^2 + 128t - 212 \geq 0. \end{cases}$$

Les solutions aux deux inégalités sont les suivantes :

1. L'inégalité  $-8t^2 + 128t - 812 \leq 0$  est toujours vérifiée, car son discriminant est négatif :  $\Delta = (128)^2 - 4(-8)(-812) = -9600 < 0$  ;
2. Pour  $-8t^2 + 128t - 212 \geq 0$ , l'intervalle trouvé est :  $[1.8819, 14.1237]$ .

D'où  $T_\mu = [1.8819, 8]$ , et  $T_* = [0, 1.8819]$ .

Soit  $h = \frac{(8-1.8819)}{6} = 1.0197$ , et subdivisons  $T_\mu$  en 6 intervalles  $T_\mu = \bigcup_1^{M=6} [\tau_i, \tau^i]$  tels que :

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 1.8819, \quad \tau^1 = \tau_2 = 2.9016, \quad \tau^2 = \tau_3 = 3.9213, \quad \tau^3 = \tau_4 = 4.9410, \quad \tau^4 = \tau_5 = 5.9606, \\ \tau^5 &= \tau_6 = 6.9803, \quad \tau^6 = 8. \end{aligned}$$

Calculons les quantités suivantes :

$$\xi^T = (257.2800, 172.4624, 104.6084, 53.7178, 19.7908, 2.8273, -754.6467),$$

$$q_i (1 \leq i \leq 7) = \begin{pmatrix} 16.0800 & 10.7789 & 6.5380 & 3.3574 & 1.2369 & 0.1767 & -47.1654 \\ 5.7186 & 4.6789 & 3.6391 & 2.5994 & 1.5596 & 0.5199 & -13.2844 \\ 1.0197 & 1.0197 & 1.0197 & 1.0197 & 1.0197 & 1.0197 & -1.8819 \end{pmatrix},$$

$$D = (d_{ij} = q_i^T q_j, 1 \leq i, j \leq 7),$$

$$D = \begin{pmatrix} 292.3092 & 201.1215 & 126.9821 & 69.8911 & 29.8485 & 6.8541 & -836.3079 \\ 201.1215 & 139.1165 & 88.5396 & 49.3907 & 21.6698 & 5.3769 & -572.4668 \\ 126.9821 & 88.5396 & 57.0288 & 32.4498 & 14.8025 & 4.0869 & -358.6314 \\ 69.8911 & 49.3907 & 32.4498 & 19.0684 & 9.2466 & 2.9844 & -194.8017 \\ 29.8485 & 21.6698 & 14.8025 & 9.2466 & 5.0022 & 2.0691 & -80.9777 \\ 6.8541 & 5.3769 & 4.0869 & 2.9844 & 2.0691 & 1.3413 & -17.1595 \\ -836.3079 & -572.4668 & -358.6314 & -194.8017 & -80.9777 & -17.1595 & 2404.5940 \end{pmatrix}.$$

Déterminons le vecteur  $l^\epsilon$ , solution du problème du support suivant :

$$\min \Delta J(u) = \min \varphi(l) = \frac{1}{2} l^T D l + \xi^T l,$$

$$-1 \leq l_i \leq 1, i = \overline{1, 6}, 0 \leq l_7 \leq 1,$$

et ce, en utilisant la méthode de support de programmation quadratique [33]. Alors nous obtenons :

$$l^\epsilon = ((l_i)_{i=\overline{1, 7}}) = (0.7289, 1, 1, 1, -0.8435, -1, 1)^T, \text{ avec } \varphi(l^\epsilon) = -127.9985 < 0.$$

La nouvelle commande admissible prend alors la forme suivante :

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, 1.8819]; \\ 0.7289, & t \in [1.8819, 2.9016]; \\ 1, & t \in [2.9016, 5.9606]; \\ -0.8435, & t \in [5.9606, 6.9803]; \\ -1, & t \in [6.9803, 8]. \end{cases}$$

L'état final  $\bar{x}(8)$ , la valeur de  $J(\bar{u})$ , la co-commande  $\bar{E}(t)$ ,  $t \in T = [0, 8]$ , et l'estimation de

suboptimalité sont :

$$\bar{x}(8) = (0.0094, -0.0343, 0.0405)^T, \quad J(\bar{u}) = 0.0015,$$

$$\bar{E}(t) = -0.0047t^2 + 0.0405t - 0.0656, \quad T^+ = [2.1624, 6.4546], \quad T^- = [0, 2.1624] \cup [6.4546, 8],$$

$$\begin{aligned} \beta(\bar{u}) &= \int_{T^+} \bar{E}(t)(L - \bar{u}(t)) dt + \int_{T^-} \bar{E}(t)(-L - \bar{u}(t)) dt \\ &= \int_{2.1624}^{6.4546} \bar{E}(t)(L - \bar{u}(t)) dt + \int_0^{2.1624} \bar{E}(t)(-L - \bar{u}(t)) dt + \int_{6.4546}^8 \bar{E}(t)(-L - \bar{u}(t)) dt \\ &= (1 - 0.7289) \int_{2.1624}^{2.9016} \bar{E}(t) dt + (1 + 0.8435) \int_{5.9606}^{6.4546} \bar{E}(t) dt \\ &\quad + (-1 - 0.7289) \int_{1.8819}^{2.1624} \bar{E}(t) dt + (-1 + 0.8435) \int_{6.4546}^{6.9803} \bar{E}(t) dt = 0.0074 > \epsilon. \end{aligned}$$

On construit la quasi-commande  $\bar{\omega}$ , avec

$$\bar{\omega}(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, 2.1624[; \\ 1, & t \in [2.1624, 6.4546[; \\ -1, & t \in [6.4546, 8]. \end{cases}$$

L'état final  $\bar{\kappa}(8)$ , la valeur de  $J(\bar{\omega})$ , et la co-commande  $\bar{E}(t, \bar{\omega})$ ,  $t \in T = [0, 8]$ , sont :

$$\bar{\kappa}(8) = (-4.2532, -0.3107, 0.5844)^T, \quad J(\bar{\omega}) = 9.2638,$$

$$\bar{E}(t, \bar{\omega}) = 2.1266t^2 - 34.3362t - 138.0032,$$

$$T^+ = [0, 7.5439], \quad T^- = ]7.5439, 8].$$

Alors,  $\bar{E}(t, \bar{\omega}) \geq 0$ , si  $t \in T = [0, 7.5439]$ , et  $\bar{E}(t, \bar{\omega}) < 0$ , si  $t \in T = ]7.5439, 8]$ . On définit l'ensemble  $T^*$  :

$$T^* = \{t \in T : \text{sign } \bar{E}(t) \neq \text{sign } \bar{E}(t, \bar{\omega})\} = [0, 2.1624] \cup [6.4546, 7.5439], \quad |T^*| \approx 3.2517 < 3.5 = \eta.$$

La condition  $|T^*| \leq \eta$  étant satisfaite, nous passons alors à la procédure finale. On désigne par :

$$u(t) := \bar{u}(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, 1.8819[; \\ 0.7289, & t \in [1.8819, 2.9016[; \\ 1, & t \in [2.9016, 5.9606[; \\ -0.8435, & t \in [5.9606, 6.9803[; \\ -1, & t \in [6.9803, 8]. \end{cases}$$

$$E(t) := \bar{E}(t) = -0.0047 t^2 + 0.0405 t - 0.0656;$$

$$T^0 = \{t \in T : E(t) = 0\} = \{\theta_1 = 2.1624, \theta_2 = 6.4546\};$$

$$\omega(t) = \text{sign}E(t), t \in T = [0, 8].$$

La procédure finale consiste à trouver la solution  $\tau = T_s = (\tau_1, \tau_2)^T \in \mathbb{R}^2$  de l'équation :

$$F(\tau) = F(T_s) = E(T_s) = -(\alpha\kappa(t_1, T_s) + c - \alpha x^1)^T q(T_s) = 0,$$

où  $\kappa(t, T_s)$ ,  $t \in [0, 8]$ , est la trajectoire correspondant à la quasi-commande  $\omega(t, T_s)$ ,  $t \in [0, 8]$  :

$$\omega(t, T_s) = \begin{cases} -1, & t \in [0, \tau_1[; \\ 1, & t \in [\tau_1, \tau_2[; \\ -1, & t \in [\tau_2, 8]. \end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned} \kappa(8, T_s) &= \kappa(8) - 2L \text{sign}\dot{E}(\theta_1) \int_{\theta_1=2.1624}^{\tau_1} q(t)dt - 2L \text{sign}\dot{E}(\theta_2) \int_{\theta_2=6.4546}^{\tau_2} q(t)dt \\ &= \kappa(8) - 2 \int_{\theta_1=2.1624}^{\tau_1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(8-t)^2 \\ 8-t \\ 1 \end{pmatrix} dt + 2 \int_{\theta_2=6.4546}^{\tau_2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(8-t)^2 \\ 8-t \\ 1 \end{pmatrix} dt. \end{aligned}$$

Après intégration, on obtient :

$$\kappa(8, T_s) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\tau_1^3 + 8\tau_1^2 - 64\tau_1 + \frac{1}{3}\tau_2^3 - 8\tau_2^2 + 64\tau_2 - \frac{208}{3} \\ \tau_1^2 - 16\tau_1 - \tau_2^2 + 16\tau_2 - 32 \\ -2\tau_1 + 2\tau_2 - 8 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$E = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(\tau_1) \\ E(\tau_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\kappa(8, T_s)^T q(\tau_1) \\ -\kappa(8, T_s)^T q(\tau_2) \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\tau_1^5 - \frac{20}{3}\tau_1^4 + \frac{323}{3}\tau_1^3 - \frac{1}{6}\tau_1^2\tau_2^3 + 4\tau_1^2\tau_2^2 - 32\tau_1^2\tau_2 - \frac{2272}{3}\tau_1^2 + \frac{8}{3}\tau_1\tau_2^3 - \\ 65\tau_1\tau_2^2 + 528\tau_1\tau_2 + \frac{4774}{3}\tau_1 - \frac{32}{3}\tau_2^3 + 264\tau_2^2 - 2178\tau_2 + \frac{7448}{3}; \\ \frac{1}{6}\tau_1^3\tau_2^2 - \frac{8}{3}\tau_1^3\tau_2 + \frac{32}{3}\tau_1^3 - 4\tau_1^2\tau_2^2 + 65\tau_1^2\tau_2 - 264\tau_1^2 + 32\tau_1\tau_2^2 - \\ 528\tau_1\tau_2 + 2178\tau_1 - \frac{1}{6}\tau_2^5 + \frac{20}{3}\tau_2^4 - \frac{323}{3}\tau_2^3 + \frac{2480}{3}\tau_2^2 - \frac{8294}{3}\tau_2 + \frac{7448}{3}. \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

On forme la matrice Jacobienne :

$$JF(\tau) = \frac{\partial E(T_s)}{\partial T_s} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_1}{\partial \tau_1} & \frac{\partial E_1}{\partial \tau_2} \\ \frac{\partial E_2}{\partial \tau_1} & \frac{\partial E_2}{\partial \tau_2} \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial T_s} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6}\tau_1^4 - \frac{80}{3}\tau_1^3 + 323\tau_1^2 - \frac{1}{3}\tau_1\tau_2^3 + 8\tau_1\tau_2^2 - 64\tau_1\tau_2 - \frac{4544}{3}\tau_1 + \frac{8}{3}\tau_2^3 - 65\tau_2^2 + 528\tau_2 + \frac{4774}{3} \\ -\frac{1}{2}\tau_1^2\tau_2^2 + 8\tau_1^2\tau_2 + 8\tau_1\tau_2^2 - 32\tau_1^2 - 32\tau_2^2 - 130\tau_1\tau_2 + 528\tau_1 + 528\tau_2 - 2178 \end{pmatrix}^T,$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial T_s} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\tau_1^2\tau_2^2 - 8\tau_1^2\tau_2 - 8\tau_1\tau_2^2 + 32\tau_1^2 + 32\tau_2^2 + 130\tau_1\tau_2 - 528\tau_1 - 528\tau_2 + 2178 \\ \frac{1}{3}\tau_1^3\tau_2 - \frac{8}{3}\tau_1^3 - 8\tau_1^2\tau_2 + 65\tau_1^2 + 64\tau_1\tau_2 - 528\tau_1 - \frac{5}{6}\tau_2^4 + \frac{80}{3}\tau_2^3 - 323\tau_2^2 + \frac{4960}{3}\tau_2 - \frac{8294}{3} \end{pmatrix}^T.$$

On résout l'équation (2.42) avec la méthode de Newton, en commençant par l'approximation initiale  $\tau^0 = [\theta_1, \theta_2] = [2.1624, 6.4546]$ , ce qui donne le tableau suivant :

$k$	$\tau^k$	$J(\tau^k)^{-1}F(\tau^k)$	$\tau^{k+1}$	$ \tau^{k+1} - \tau^k $
0	$\begin{pmatrix} 2.1624 \\ 6.4546 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.1377 \\ 0.2053 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.0247 \\ 6.2493 \end{pmatrix}$	0.2472
1	$\begin{pmatrix} 2.0247 \\ 6.2493 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0265 \\ 0.2967 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.9981 \\ 5.9526 \end{pmatrix}$	0.2979
2	$\begin{pmatrix} 1.9981 \\ 5.9526 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0014 \\ -0.0434 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.9996 \\ 5.9960 \end{pmatrix}$	0.0434
3	$\begin{pmatrix} 1.9996 \\ 5.9960 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0004 \\ -0.0040 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.9999 \\ 5.9999 \end{pmatrix}$	0.0040
4	$\begin{pmatrix} 1.9999 \\ 5.9999 \end{pmatrix}$	$10^{-4} \begin{pmatrix} -0.0058 \\ -0.1101 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.9999 \\ 5.9999 \end{pmatrix}$	$1.1027 \times 10^{-5}$

TABLE 2.2 – Itérations de la méthode de Newton à partir de l'approximation initiale  $\tau^0 = [2.1624, 6.4546]$ .

Dans la quatrième itération, on obtient  $\tau = (\tau_1, \tau_2)^T = (1.9999, 5.9999)^T$ . Ainsi, avec la commande admissible :

$$u(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, 1.9999[; \\ 1, & t \in [1.9999, 5.9999[; \\ -1, & t \in [5.9999, 8], \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{aligned} x(8) &= 10^{-9}(2, -8.0002, 12.0008)^T; \\ J(u) &= 1.0601 \cdot 10^{-16}; \quad E(t) = 10^{-9}(-t^2 + 7.9998t - 11.9992); \\ \beta(u) &= 4.2667 \cdot 10^{-8}. \end{aligned}$$

Comme  $\beta(u) < 10^{-4} = \epsilon$ , la commande  $\epsilon$ -optimale  $u^\epsilon(t)$ ,  $t \in T = [0, 8]$ , du problème (2.47)-(2.49) s'écrit :

$$u^\epsilon(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, 1.9999[; \\ 1, & t \in [1.9999, 5.9999[; \\ -1, & t \in [5.9999, 8], \end{cases}$$

avec les points de commutation  $\tau_1^\epsilon = 1.9999$  et  $\tau_2^\epsilon = 5.9999$ . L'état final  $x^\epsilon(8)$ , et la valeur de la fonctionnelle  $J(u^\epsilon)$ , sont :

$$\begin{aligned} x^\epsilon(8) &= 10^{-9}(2, -8.0002, 12.0008)^T; \\ J(u^\epsilon) &= 1.0601 \cdot 10^{-16}. \end{aligned}$$

Il est à noter que la commande optimale exacte s'écrit :

$$u^0(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, 2[; \\ +1, & t \in [2, 6[; \\ -1, & t \in [6, 8], \end{cases}$$

avec

$$x^0(8) = (x_1^0(8), x_2^0(8), x_3^0(8)) = (0, 0, 0)^T \quad \text{et} \quad J(u^0) = 0.$$

## Résolution du problème par la méthode de tir

Nous résolvons maintenant cet exemple par la méthode de tir. Le principe du maximum de Pontryaguine nous conduit à un système différentiel de 6 équations à 6 inconnues aux deux

bouts, avec les conditions initiales et finales suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = u(x(t), \psi(t)) \\ \dot{\psi}_1(t) = 0 \\ \dot{\psi}_2(t) = -\psi_1(t) \\ \dot{\psi}_3(t) = -\psi_2(t) \\ x(0) = x^0 = (16, 0, 0) \\ \psi(8) = -x(8) - c + x^1, \end{array} \right. \quad (2.43)$$

où la commande  $u(t)$  maximise le hamiltonien

$$H(x, \psi, u) = \psi_1 x_2 + \psi_2 x_3 + \psi_3 u, \quad (2.44)$$

d'où

$$u(t) = \text{sign}(\psi_3(t)).$$

Résoudre le problème (2.47)-(2.49) équivaut à résoudre le problème aux deux bouts suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}(t) = \begin{pmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \dot{z}_3(t) \\ \dot{z}_4(t) \\ \dot{z}_5(t) \\ \dot{z}_6(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{\psi}_1(t) \\ \dot{\psi}_2(t) \\ \dot{\psi}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \\ \text{sign}(\psi_3(t)) \\ 0 \\ -\psi_1(t) \\ -\psi_2(t) \end{pmatrix}, \quad t \in T = [0, 8], \\ z^0 = z(0) = (x(0), \psi(0)), \quad x(0) = x^0 = (16, 0, 0)^T, \\ z^1 = z(8) = (x(8), \psi(8)), \quad \psi(8) = -x(8) - c + x^1, \end{array} \right. \quad (2.45)$$

où  $z^0$  et  $z^1$  correspondent aux conditions initiales et finales du système (2.43). Pour résoudre ce système, on essaie de déterminer un vecteur de départ :

$$z^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, \psi_1^0, \psi_2^0, \psi_3^0)^T,$$

pour le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1(t) = z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) = z_3(t) \\ \dot{z}_3(t) = \text{sign}(z_6(t)) \\ \dot{z}_4(t) = 0 \\ \dot{z}_5(t) = -z_4(t) \\ \dot{z}_6(t) = -z_5(t), \quad t \in T = [0, 8], \\ z^0 = z(0) = (16, 0, 0, \psi_1^0, \psi_2^0, \psi_3^0), \end{array} \right. \quad (2.46)$$

de telle sorte que la solution  $z(t) = z(t, z^0)$  satisfait les conditions aux limites du système (2.43). En effet, la condition initiale  $x^0 = (16, 0, 0)^T$  du problème (2.47)-(2.49) est fixée déjà pour une partie de  $z^0$ , et l'inconnue de la fonction de tir, notée  $F$ , est ainsi réduite à la partie manquante, qui représente la valeur initiale de l'état adjoint  $\psi(0) = \psi^0$ , notée  $s^0$ . Soit  $u(t) \equiv 0$ ,  $t \in [0, 8]$ , commande admissible, et  $x(8) = (16, 0, 0)^T$ , l'état final correspondant. La solution du système conjugué se déduit des équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, & \psi_1(8) = -(x_1(8) + c_1 - x_1^1) = -16, \\ \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1, & \psi_2(8) = -(x_2(8) + c_2 - x_2^1) = 0, \\ \dot{\psi}_3 = -\frac{\partial H}{\partial x_3} = -\psi_2, & \psi_3(8) = -(x_3(8) + c_3 - x_3^1) = 0, \end{cases}$$

nous permet d'obtenir

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \psi_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 16t - 128 \\ -8t^2 + 128t - 512 \end{pmatrix}.$$

Cela nous amène à trouver la condition initiale de l'état adjoint  $s^0 = \psi(0) = (-16, -128, -512)^T$ , qui correspond à la partie manquante de  $z^0 = (x^0, s^0)^T = (16, 0, 0, -16, -128, -512)^T$ , afin de commencer l'algorithme de tir.

Pour le problème de Cauchy (2.46), la condition au temps terminal  $t_1 = 8$ , détermine la valeur de la fonction de tir, qui est définie comme suit :

$$\begin{aligned} F(s) &= \psi(8, x^0, s^0) + x(8, x^0, s^0) + c - x^1 \\ &= \begin{pmatrix} \psi_1(8, 0, 0, 0, s_1^0, s_2^0, s_3^0) \\ \psi_2(8, 0, 0, 0, s_1^0, s_2^0, s_3^0) \\ \psi_3(8, 0, 0, 0, s_1^0, s_2^0, s_3^0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1(8, 0, 0, 0, s_1^0, s_2^0, s_3^0) \\ x_2(8, 0, 0, 0, s_1^0, s_2^0, s_3^0) \\ x_3(8, 0, 0, 0, s_1^0, s_2^0, s_3^0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La commande optimale  $u^*(t)$ ,  $t \in [0, 8]$ , du problème (2.47)-(2.49) est alors celle qui correspond à la condition initiale  $\psi^0 = s^*$ , telle que  $F(s^*) = 0$ . Ainsi, déterminer un zéro  $s^*$  de la fonction  $F(s)$  équivaut à la résolution du problème aux deux bouts (2.43), ce qui permet de trouver ainsi une solution du problème (2.47)-(2.49).

Le programme de la méthode de tir simple est implémenté par le logiciel MATLAB, en utilisant les fonctions `ode45` et `fsolve`.

Nous avons obtenu le vecteur des valeurs de la fonction de tir :

$$F(s^*) \approx (-85.1486, -32.0777, -5.6975)^T,$$

qui n'est pas proche de zéro. L'algorithme s'est arrêté avant d'atteindre une solution. Cela indique que la méthode de tir diverge lorsque nous choisissons  $u = 0$  pour  $\epsilon = 10^{-4}$ .

En revanche, en choisissant  $\epsilon = 10^{-12}$ , la méthode converge après 42 itérations, avec un total de 130 évaluations de la fonction pour atteindre la solution. La valeur obtenue de la fonction de tir est

$$F(s^*) \approx 10^{-10} \cdot (-0.108111800762, -0.048862164315, -0.002396000065)^T,$$

où  $s^0 = \psi(0) = (-0.012074234797, -0.048782276258, -0.073016600560)^T$ . Cela indique que la méthode de tir converge mieux avec une valeur plus petite de  $\epsilon$ , soulignant l'importance du choix de  $\epsilon$  dans la convergence de la méthode de tir. L'état terminal  $x(8)$ , l'état adjoint terminal  $\psi(8)$ , la valeur de la fonctionnelle  $J(u)$ , les points de commutation  $\tau^* = (\tau_1^*, \tau_2^*)^T$ , sont présentés dans le tableau ci-dessous :

$x(8, x^0, s^*)$	$\psi(8, x^0, s^*) = -x(8, x^0, s^*) - c + x^1$	$J(u^*)$	$\tau^*$
$\begin{pmatrix} 0.012074234786 \\ -0.047811602123 \\ 0.069133903999 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.012074234797 \\ 0.047811602118 \\ -0.069133903999 \end{pmatrix}$	0.003605616563	$\begin{pmatrix} 1.981682626760 \\ 6.093634422021 \end{pmatrix}$

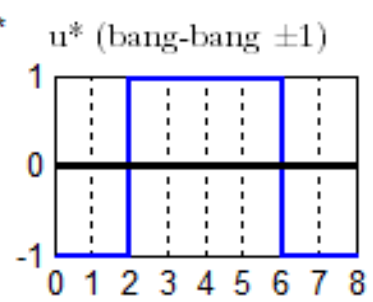
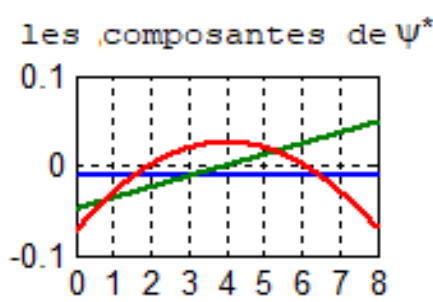
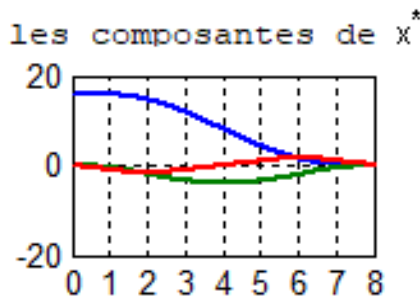
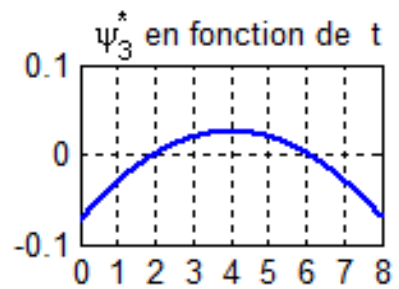
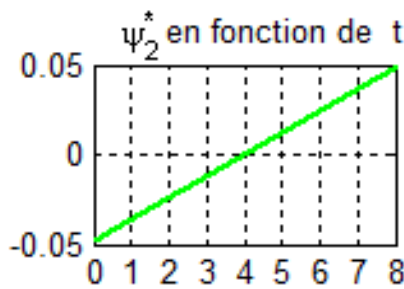
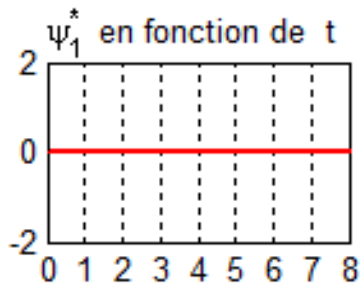
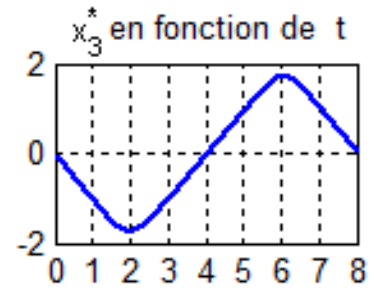
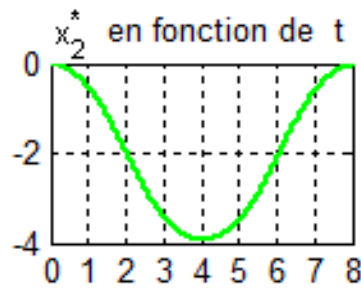
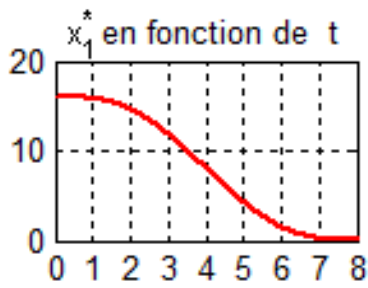
TABLE 2.3 – L'état terminal  $x(8)$ , l'état adjoint terminal  $\psi(8)$ , la valeur de la fonctionnelle  $J(u)$ , et les points de commutation  $\tau_1^*, \tau_2^*$  obtenus par la méthode de tir avec  $\epsilon = 10^{-12}$ .

La commande optimale trouvée par la méthode de tir est

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, 1.981682626760]; \\ 1, & t \in [1.981682626760, 6.093634422021]; \\ -1, & t \in [6.093634422021, 8]. \end{cases}$$

Dans la figure suivante, on représente la commande optimale  $u^*(t)$ ,  $t \in [0, 8]$ , les composantes de la trajectoire optimale  $x^*(t)$  du système direct (2.48), ainsi que les composantes de la trajectoire optimale  $\psi^*(t)$  du système conjugué :

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, & \psi_1(0) = -0.012074234797; \\ \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1, & \psi_2(0) = -0.0487822762580; \\ \dot{\psi}_3 = -\frac{\partial H}{\partial x_3} = -\psi_2, & \psi_3(0) = -0.073016600560. \end{cases}$$



## 2.8 Comparaison des résultats obtenus par la méthode de support et la méthode de tir

Nous allons maintenant comparer les résultats obtenus par la méthode de support et la méthode de tir avec la solution optimale exacte du problème linéaire-quadratique de contrôle optimal suivant :

$$\min J(u) = \frac{\alpha}{2} \|x(t_1)\|^2 + c^T x(t_1) \quad (2.47)$$

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = x_3, \quad (2.48)$$

$$\dot{x}_3 = u, \quad |u| \leq 1, \quad t \in T = [0, 6],$$

$$x = (x_1, x_2, x_3)^T, \quad x^0 = x(0) = (0, 0, 0)^T, \quad (2.49)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = (-18, -4, -\frac{14}{3})^T, \quad \alpha = 1, \quad L = 1.$$

1. **Convergence :** la convergence des méthodes de support et de tir peut être analysée en examinant les temps de commutation obtenus pour différentes valeurs de  $\epsilon$ . En effet, pour la méthode de support, nous avons testé plusieurs valeurs de  $\epsilon$  allant de  $10^{-3}$  à  $10^{-12}$ . Pour chacune de ces valeurs, les temps de commutation  $\tau_1^\epsilon$  et  $\tau_2^\epsilon$  sont très proches de ceux de la solution optimale exacte  $\tau_1^* = 2$  et  $\tau_2^* = 4$ . Par exemple, pour  $\epsilon = 10^{-6}$ , nous avons obtenu les temps de commutation suivants :

$$\tau_1^\epsilon = 1.999999999999945, \quad \tau_2^\epsilon = 3.999999999999781.$$

Cela indique que la méthode de support est stable par rapport à  $\epsilon$  et que les itérations convergent rapidement vers la solution optimale, même pour des valeurs relativement grandes de  $\epsilon$ . Cette stabilité montre que la méthode de support est bien de support aux problèmes nécessitant une grande précision, car elle fournit des résultats précis même pour des valeurs relativement grandes de  $\epsilon$ . En revanche, la méthode de tir présente un comportement différent. Nous avons observé que cette méthode ne converge correctement que pour  $\epsilon = 10^{-12}$ , avec les temps de commutation suivants :

$$\tau_1^\epsilon = 2.000000000041882, \quad \tau_2^\epsilon = 4.000000000012032.$$

Pour des valeurs relativement plus grandes de  $\epsilon$ , la méthode de tir ne converge pas correctement. Cela suggère que la méthode de tir est plus sensible aux variations relativement grandes de  $\epsilon$  et nécessite une plus grande précision dans le choix de  $\epsilon$  pour obtenir une convergence correcte. Cette sensibilité peut être expliquée par une dépendance plus forte de la méthode aux conditions initiales et une dynamique plus complexe qui rend la convergence moins stable.

2. **Optimalité :** en termes d'optimalité, nous comparons ici les états finaux et les valeurs de la fonctionnelle  $J(u)$  obtenus par les deux méthodes avec la solution optimale. En effet, pour la méthode de support avec  $\epsilon = 10^{-6}$ , nous pouvons observer que l'état final  $x^\epsilon(6)$  et la valeur de  $J(u^\epsilon)$  sont très proches des valeurs optimales. Cela montre que la méthode de support permet d'obtenir une solution  $\epsilon$ -optimale, avec des écarts négligeables par rapport à la solution exacte.

Pour la méthode de tir avec  $\epsilon = 10^{-12}$ , les résultats obtenus sont également très proches de la solution optimale. Cependant, il est important de noter que la méthode de tir ne converge correctement que pour des valeurs très faibles de  $\epsilon$ , ce qui peut poser un problème dans les situations où une telle précision n'est pas accessible.

3. **Sensibilité à la condition initiale :** Pour illustrer la sensibilité de la condition initiale, nous considérons trois cas en faisant varier  $\alpha$  et  $c$ , tels que :

**Cas 1**  $\alpha = 1, c = (-18, -4, -\frac{14}{3})^T$  ;

**Cas 2**  $\alpha = \frac{1}{2}, c = (4, 5, -1)^T$  ;

**Cas 3**  $\alpha = 2, c = (-8, 9, 1)^T$ .

Le tableau suivant présente une comparaison détaillée des performances des deux méthodes de résolution, en faisant varier les paramètres  $\alpha$  et  $c$ , et en analysant leur convergence avec des valeurs de  $\epsilon$  variées.

Méthode de Support							
Cas	$u^0$	$\theta$	$\tau^c$	$x^c(6)$	$J(u^c)$	$\epsilon$	CV (Nbr)
Cas 1	0	$\begin{pmatrix} 1.7711 \\ 4.0090 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{52}{3} \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$	-175.1111	$10^{-1}$	Oui(3)
						$10^{-3}$	Oui(4)
						$10^{-6}$	Oui(5)
						$10^{-9}$	Oui(6)
						$10^{-12}$	Oui(6)
Cas 2	0	$\begin{pmatrix} 1.5876 \\ 3.2945 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.9740 \\ 4.1790 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4.3081 \\ -3.9451 \\ -0.4101 \end{pmatrix}$	-27.9748	$10^{-1}$	Oui(7)
						$10^{-3}$	Oui(9)
						$10^{-6}$	Oui(10)
						$10^{-9}$	Oui(11)
						$10^{-12}$	Oui(11)
Cas 3	0	$\begin{pmatrix} 2.4896 \\ 5.8536 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.4798 \\ 5.7537 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5.2188 \\ -2.3717 \\ -2.5479 \end{pmatrix}$	-26.2910	$10^{-1}$	Oui(6)
						$10^{-3}$	Oui(7)
						$10^{-6}$	Oui(8)
						$10^{-9}$	Oui(9)
						$10^{-12}$	Oui(9)
Méthode de Tir							
$s^0$	Cas		$10^{-1}$	$10^{-3}$	$10^{-6}$	$10^{-9}$	$10^{-12}$
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	Cas 1	CV(Nbr)	Non	Non	Non	Non	Non
	Cas 2		Non	Non	Non	Non	Non
	Cas 3		Non	Non	Non	Non	Non
$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	Cas 1	CV(Nbr)	Non	Non	Non	Non	Oui(9)
	Cas 2		Non	Non	Non	Non	Oui(9)
	Cas 3		Non	Non	Non	Non	Oui(12)
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	Cas 1	CV(Nbr)	Non	Non	Non	Non	Oui(13)
	Cas 2		Non	Non	Non	Non	Oui(11)
	Cas 3		Non	Non	Non	Non	Oui(10)
$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$	Cas 1	CV(Nbr)	Non	Non	Non	Non	Oui(13)
	Cas 2		Non	Non	Non	Non	Oui(63)
	Cas 3		Non	Non	Non	Non	Oui(12)
$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	Cas 1	CV(Nbr)	Non	Non	Non	Non	Oui(7)
	Cas 2		Non	Non	Non	Non	Oui(9)
	Cas 3		Non	Non	Non	Non	Oui(7)
$\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$	Cas 1	CV(Nbr)	Non	Non	Non	Non	Oui(63)
	Cas 2		Non	Non	Non	Non	Oui(9)
	Cas 3		Non	Non	Non	Non	Oui(12)

TABLE 2.4 – Comparaison des performances des deux méthodes de résolution en fonction des paramètres  $\alpha$ ,  $c$  et des valeurs de  $\epsilon$

Les résultats présentés dans le tableau mettent en évidence une différence notable en termes de convergence entre les deux méthodes. Il est à noter que la convergence est représentée par l'abréviation "CV", tandis que "Nbr" désigne le nombre d'itérations de la fonction de tir.

La méthode de support s'avère plus robuste, convergeant de manière cohérente dans presque tous les cas analysés, indépendamment de la précision choisie  $\epsilon$ , ce qui démontre sa fiabilité sous des conditions variées.

En revanche, la méthode de tir présente des performances moins régulières, ne parvenant à converger que pour des valeurs de  $\epsilon$  inférieures à  $10^{-10}$ , et ce, de manière irrégulière selon les cas étudiés. Cette variabilité indique que la méthode de tir est plus sensible aux conditions initiales et au choix des paramètres, nécessitant ainsi une optimisation plus précise des paramètres pour garantir la convergence.

Il est donc évident que la méthode de support est préférable pour obtenir une solution approximative, permettant l'initialisation de la procédure finale visant à garantir des solutions convergentes pour le problème de contrôle en temps minimal, car elle présente une moindre sensibilité aux conditions initiales.

# 3

## Contrôle optimal avec un temps terminal libre

Certains problèmes de contrôle optimal se modélisent avec un temps terminal fixé à l'avance, tandis que dans d'autres le temps terminal n'est pas fixé, et il sera donc considéré comme une variable inconnue à trouver. On parle alors d'un problème de contrôle optimal avec un temps terminal libre. Dans ce cas, il s'agit de déterminer à la fois le contrôle et le temps terminal de manière à minimiser un critère choisi à l'avance, comme en particulier le problème du transfert en temps minimal, qui sera considéré dans le chapitre suivant.

### 3.1 Position du problème

Soit un système dynamique linéaire stationnaire défini sur un intervalle de temps  $T = [0, t_*]$  :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu_1(t), \quad x(0) = x^0, \quad t \in T = [0, t_*].$$

Si le temps terminal n'est pas fixé, on a alors un problème de contrôle optimal avec un temps terminal libre. Dans ce cas, le critère de qualité du problème considéré peut explicitement

dépendre de la variable  $t_*$ . Concrètement, considérons le problème de contrôle optimal suivant :

$$\min J(u_1, t_*) = \frac{1}{2} \|x(t_*)\|^2 + t_*, \quad (3.1)$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu_1(t), \quad x(0) = x^0, \quad (3.2)$$

$$u_1(t) \in U = [-L, L], \quad t \in T = [0, t_*], \quad (3.3)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  représente le vecteur d'état à l'instant  $t$ ,  $x(0) = x^0$  étant l'état initial du système ;  $u_1(t)$  est une fonction scalaire continue par morceaux à valeurs dans  $U$ , appelée commande du système. La fonctionnelle  $J(u)$  est appelée critère de qualité du type Mayer.

Ici, le problème d'optimisation consiste à chercher un temps  $\hat{t}_* > 0$ , et une commande admissible  $\hat{u}_1(t)$ ,  $t \in [0, \hat{t}_*]$ , réalisant le minimum de la fonctionnelle (3.1).

## 3.2 Principe du Maximum pour un problème de contrôle optimal avec un temps terminal libre

**Proposition 3.2.1.** *Soient  $\hat{t}_*$  et  $\hat{u}_1(t)$ ,  $t \in [0, \hat{t}_*]$ , une solution optimale du problème (3.1)-(3.3). Pour un tel temps fixé  $\hat{t}_*$ , la commande  $\hat{u}_1(t)$ ,  $t \in [0, \hat{t}_*]$ , est une solution optimale du problème suivant :*

$$\min J(u_1) = \frac{1}{2} \|x(\hat{t}_*)\|^2 + \hat{t}_*, \quad (3.4)$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu_1(t), \quad x(0) = x^0, \quad (3.5)$$

$$|u_1(t)| \leq L, \quad t \in T = [0, \hat{t}_*]. \quad (3.6)$$

**Preuve.** En effet, si l'on suppose qu'il existe une autre commande admissible  $\tilde{u}_1(t)$ ,  $t \in T = [0, \hat{t}_*]$ , telle que

$$J(\tilde{u}_1) < J(\hat{u}_1),$$

alors cette dernière inégalité contredirait l'optimalité du couple  $(\hat{u}_1, \hat{t}_*)$  dans le problème (3.1)-(3.3). On conclut que pour un tel temps fixé  $\hat{t}_*$ , la commande  $\hat{u}_1(t)$ ,  $t \in T = [0, \hat{t}_*]$ , est optimale aussi dans le problème (3.4)-(3.6). □

Donc pour la commande  $\hat{u}_1(t)$ , le principe du maximum suivant est vérifié, si l'on remplace le temps terminal libre  $t_*$  par le temps terminal fixé  $\hat{t}_*$  :

**Théorème 3.2.1** (Principe du Maximum [21]). *La commande  $\hat{u}_1(t)$ ,  $t \in T = [0, \hat{t}_*]$ , est optimale dans le problème (3.4)-(3.6), si et seulement si le long de  $\hat{u}_1(t)$  et des trajectoires correspondantes  $\hat{x}(t)$  et  $\hat{\psi}(t)$  du système direct (3.5) et du système conjugué :*

$$\dot{\psi} = -A^T \psi, \quad \psi(\hat{t}_*) = -x(\hat{t}_*), \quad (3.7)$$

le hamiltonien  $H(x, \psi, u_1) = \psi^T(Ax + bu_1)$  atteint son maximum :

$$H(\widehat{x}(t), \widehat{\psi}(t), \widehat{u}_1(t)) = \max_{v \in U} H(\widehat{x}(t), \widehat{\psi}(t), v), \quad t \in T = [0, \widehat{t}_*].$$

Pour trouver la condition que doit satisfaire l'instant optimal  $\widehat{t}_*$  dans le problème (3.1)-(3.3), comparons le processus optimal engendré par la commande optimale  $\widehat{u}_1(t)$ ,  $t \in T = [0, \widehat{t}_*]$ , à deux autres processus dont la durée de l'un est supérieure à la durée optimale  $\widehat{t}_*$ , et l'autre inférieure à  $\widehat{t}_*$ .

En effet, considérons tout d'abord la commande :

$$\widetilde{u}_1(t) = \begin{cases} \widehat{u}_1(t), & t \in [0, \widehat{t}_*], \\ \widehat{u}_1(\widehat{t}_*), & t \in [\widehat{t}_*, \widehat{t}_* + \epsilon], \quad \epsilon > 0. \end{cases}$$

De l'équation (3.5), on obtient la trajectoire correspondant à la commande  $\widetilde{u}_1(t)$  :

$$\begin{cases} \widetilde{x}(t) = \widehat{x}(t), & t \in [0, \widehat{t}_*], \\ \widetilde{x}(\widehat{t}_* + \epsilon) = \widetilde{x}(\widehat{t}_*) + \epsilon \frac{d\widetilde{x}(\widehat{t}_*)}{dt} + o(\epsilon) = \widehat{x}(\widehat{t}_*) + \epsilon [A\widehat{x}(\widehat{t}_*) + b\widehat{u}_1(\widehat{t}_*)] + o(\epsilon). \end{cases}$$

Par conséquent, on aura :

$$\begin{aligned} 0 \leq \Delta J(\widehat{u}_1, \widehat{t}_*) &= J(\widetilde{u}_1, \widehat{t}_* + \epsilon) - J(\widehat{u}_1, \widehat{t}_*) \\ &= \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\widehat{x}(\widehat{t}_*), \widehat{t}_*) \frac{dx}{dt}(\widehat{x}(\widehat{t}_*), \widehat{t}_*) + \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\widehat{x}(\widehat{t}_*), \widehat{t}_*) + o(\epsilon) \\ &= \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\widehat{x}(\widehat{t}_*), \widehat{t}_*) [A\widehat{x}(\widehat{t}_*) + b\widehat{u}_1(\widehat{t}_*)] + \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\widehat{x}(\widehat{t}_*), \widehat{t}_*) + o(\epsilon), \end{aligned}$$

où  $\varphi(x, t) = \frac{1}{2} \|x\|^2 + t$ , avec  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = x$  et  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 1$ .

D'où

$$\begin{aligned} \Delta J(\widehat{u}_1, \widehat{t}_*) &= J(\widetilde{u}_1, \widehat{t}_* + \epsilon) - J(\widehat{u}_1, \widehat{t}_*) = \epsilon \widehat{x}^T(\widehat{t}_*) [A\widehat{x}(\widehat{t}_*) + b\widehat{u}_1(\widehat{t}_*)] + \epsilon + o(\epsilon) \\ &= \epsilon \left[ \widehat{x}^T(\widehat{t}_*) [A\widehat{x}(\widehat{t}_*) + b\widehat{u}_1(\widehat{t}_*)] + 1 + \frac{o(\epsilon)}{\epsilon} \right] \geq 0. \end{aligned}$$

Pour  $\epsilon > 0$  assez petit, on en déduit que :

$$\widehat{x}^T(\widehat{t}_*) [A\widehat{x}(\widehat{t}_*) + b\widehat{u}_1(\widehat{t}_*)] + 1 \geq 0.$$

Comme  $\widehat{\psi}(\widehat{t}_*) = -\widehat{x}(\widehat{t}_*)$ , on peut alors écrire :

$$\widehat{\psi}(\widehat{t}_*) [A\widehat{x}(\widehat{t}_*) + b\widehat{u}_1(\widehat{t}_*)] \leq 1,$$

c'est-à-dire

$$H(\widehat{x}(\widehat{t}_*), \widehat{\psi}(\widehat{t}_*), \widehat{u}_1(\widehat{t}_*)) \leq 1. \quad (3.8)$$

D'autre part, considérons la commande :

$$\bar{u}_1(t) = \hat{u}_1(t), \quad t \in [0, \hat{t}_* - \epsilon], \quad \epsilon > 0.$$

La trajectoire correspondante vérifie alors :

$$\bar{x}(t) = \hat{x}(t), \quad t \in [0, \hat{t}_* - \epsilon].$$

En particulier, on a pour  $\epsilon > 0$  assez petit :

$$\bar{x}(\hat{t}_* - \epsilon) = \hat{x}(\hat{t}_* - \epsilon) = \hat{x}(\hat{t}_*) - \epsilon \frac{d\hat{x}(\hat{t}_*)}{dt} + o(\epsilon).$$

Par conséquent, on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta J(\hat{u}_1, \hat{t}_*) &= J(\bar{u}_1, \hat{t}_* - \epsilon) - J(\hat{u}_1, \hat{t}_*) \\ &= -\epsilon \hat{x}^T(\hat{t}_*) [A\hat{x}(\hat{t}_*) + b\hat{u}_1(\hat{t}_*)] - \epsilon + o(\epsilon) \\ &= \epsilon \left[ -\hat{x}^T(\hat{t}_*) [A\hat{x}(\hat{t}_*) + b\hat{u}_1(\hat{t}_*)] - 1 + \frac{o(\epsilon)}{\epsilon} \right] \geq 0, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit :

$$H(\hat{x}(\hat{t}_*), \hat{\psi}(\hat{t}_*), \hat{u}_1(\hat{t}_*)) \geq 1. \quad (3.9)$$

D'après les inégalités (3.8) et (3.9), on conclut que l'instant optimal  $\hat{t}_*$  dans le problème (3.1)-(3.3) doit vérifier l'égalité suivante :

$$H(\hat{x}(\hat{t}_*), \hat{\psi}(\hat{t}_*), \hat{u}_1(\hat{t}_*)) = 1. \quad \square \quad (3.10)$$

On a ainsi démontré le théorème suivant :

**Théorème 3.2.2.** *Pour que l'instant  $\hat{t}_*$  et le contrôle admissible  $\hat{u}_1(t)$ ,  $t \in T = [0, \hat{t}_*]$ , réalisent le minimum dans le problème (3.1)-(3.3), il est nécessaire et suffisant que les conditions suivantes soient vérifiées :*

- (i)  $H(\hat{x}(t), \hat{\psi}(t), \hat{u}_1(t)) = \max_{v \in U} H(\hat{x}(t), \hat{\psi}(t), v)$ ,  $t \in T = [0, \hat{t}_*]$ ,
- (ii)  $H(\hat{x}(\hat{t}_*), \hat{\psi}(\hat{t}_*), \hat{u}_1(\hat{t}_*)) = 1$ ,

où  $\hat{x}(t)$  est la trajectoire du système direct (3.2) correspondant à  $\hat{u}_1(t)$ , et  $\hat{\psi}(t)$  étant la solution du système conjugué (3.7), avec  $\hat{\psi}(\hat{t}_*) = -\hat{x}(\hat{t}_*)$ .

### 3.3 Transformation du problème à temps terminal libre en un problème à temps terminal fixé

Pour utiliser les conditions d'optimalité du problème (3.1)-(3.3), nous commençons d'abord par transformer la formulation de Mayer à temps terminal libre en une formulation de Mayer à temps terminal fixé.

Dans cette transformation, il s'agit de se débarrasser de la variable  $t_* > 0$  dans le système (3.1)-(3.3), et de se ramener à une situation d'un problème de commande optimale, où le temps terminal est fixé.

On va traiter la variable inconnue  $t_* > 0$  comme une commande supplémentaire  $u_2$ ; la connaissance de  $u_1(t)$  et de  $u_2$  permet ensuite de reconstruire l'état  $x(t)$ ,  $\forall t \in T = [0, t_*]$ . Deux observations vont alors guider notre démarche :

- (i)  $s = t/t_*$  est une quantité comprise entre 0 et 1, et ce, quelle que soit la valeur de  $t_*$ ,
- (ii)  $u_2 = t_*$  est une constante positive arbitraire.

Cela nous conduit à tout formuler en termes de la nouvelle variable  $s \in [0, 1]$ . La relation  $t = st_*$  nous conduit à poser :

$$\begin{cases} \tilde{x}(s) = x(st_*), & s \in [0, 1]; \\ \tilde{u}_1(s) = u_1(st_*), & s \in [0, 1]; \\ \tilde{u}_2(s) = t_* \equiv \text{const}, & s \in [0, 1]. \end{cases}$$

Après ce changement de variables,  $\tilde{x}(\cdot)$  et  $\tilde{u}_1(\cdot)$  ont les mêmes dimensions que  $x(\cdot)$  et  $u_1(\cdot)$  respectivement. De plus, on a :

$$\tilde{x}(0) = x(0) = x^0, \quad \text{et} \quad \tilde{x}(1) = x(t_*).$$

Soit une nouvelle variable définie par  $\tilde{x}_{n+1}(s) = st_*$ . Cette variable vérifie donc

$$\frac{d\tilde{x}_{n+1}}{ds} = \dot{\tilde{x}}_{n+1}(s) = t_* = \tilde{u}_2, \quad s \in [0, 1], \quad \tilde{x}_{n+1}(0) = 0.$$

Pour définir le nouveau problème de commande optimale, on va considérer :

$$\begin{aligned} z(s) &= (\tilde{x}(s), \tilde{x}_{n+1}(s)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \\ \tilde{u}(s) &= (\tilde{u}_1(s), \tilde{u}_2) \in U \times \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

En augmentant ainsi la dimension du vecteur d'état et celui de la commande, via le changement de variables  $t = st_*$ , on va reformuler le problème (3.1)-(3.3) en un problème de commande

optimale équivalent, posé sur  $[0, 1]$ . Commençons par la fonction critère. Soit la fonction  $\varphi$  définie par

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ z = (\tilde{x}, \tilde{x}_{n+1}) &\rightarrow \varphi(z) = \frac{1}{2}\|\tilde{x}\|^2 + \tilde{x}_{n+1}.\end{aligned}$$

On a donc

$$\varphi(z(1)) = \frac{1}{2}\|\tilde{x}(1)\|^2 + \tilde{x}_{n+1}(1) = \frac{1}{2}\|x(t_*)\|^2 + t_*.$$

Ecrivons le système dynamique en fonction de la nouvelle variable  $s \in [0, 1]$  :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(s) = \frac{d}{ds}x(st_*) = \dot{x}(st_*)t_* = [A\tilde{x}(s) + b\tilde{u}_1(s)]\tilde{u}_2, & \tilde{x}(0) = x^0, \\ \dot{\tilde{x}}_{n+1}(s) = \tilde{u}_2, & \tilde{x}_{n+1}(0) = 0. \end{cases}$$

On est ainsi conduit à un problème bilinéaire-quadratique du contrôle optimal avec un temps terminal fixé suivant :

$$\min \tilde{J}(\tilde{u}) = \frac{1}{2}z^T(1)\tilde{D}z(1) + \tilde{c}^T z(1), \quad (3.11)$$

$$\dot{z}(s) = \begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}(s) \\ \dot{\tilde{x}}_{n+1}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [A\tilde{x}(s) + b\tilde{u}_1(s)]\tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_2 \end{pmatrix}, \quad z^0 = z(0) = \begin{pmatrix} x^0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

$$\tilde{u}(s) = (\tilde{u}_1(s), \tilde{u}_2) \in [-L, L] \times \mathbb{R}^+, \quad s \in [0, 1], \quad (3.13)$$

où  $\tilde{D} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\tilde{c} = (0, 1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , représentent respectivement une matrice carrée d'ordre  $(n+1)$  et un vecteur de dimension  $(n+1)$ , dont les  $n$  premières composantes sont nulles et la dernière vaut 1; le vecteur  $z(s) \in \mathbb{R}^{n+1}$  représente le vecteur d'état à l'instant  $s$ ,  $z^0$  étant l'état initial du système;  $\tilde{u}(s) = (\tilde{u}_1(s), \tilde{u}_2)$ ,  $s \in [0, 1]$ , est la commande du système, où  $\tilde{u}_1(s)$  est une fonction scalaire continue par morceaux, à valeurs dans  $U = [-L, L]$  et  $\tilde{u}_2 > 0$  est une constante arbitraire.

### 3.4 Lien avec le problème de contrôle optimal en temps minimal

On a le lemme suivant :

**Lemme 3.4.1.** Soient  $\hat{t}_*$  et  $\hat{u}_1(t)$ ,  $t \in [0, \hat{t}_*]$ , un couple optimal du problème (3.1)-(3.3). Deux cas peuvent se présenter :

a) Si  $\hat{x}(\hat{t}_*) = 0$ , alors  $\hat{t}_*$  est le temps minimal du problème de contrôle optimal suivant :

$$\min J(u_1, t_*) = t_*, \quad (3.14)$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu_1(t), \quad x(0) = x^0, \quad (3.15)$$

$$x(t_*) = 0, \quad (3.16)$$

$$u_1(t) \in U = [-L, L], \quad t \geq 0. \quad (3.17)$$

b) Si  $\widehat{x}(\widehat{t}_*) \neq 0$ , alors le couple  $(\widehat{u}_1, \widehat{t}_*)$  n'est pas admissible dans le problème (3.14)-(3.17). On a alors :

$$\tau_* \geq \frac{1}{2} \|\widehat{x}(\widehat{t}_*)\|^2 + \widehat{t}_*, \quad (3.18)$$

où  $\tau_*$  est le temps minimal du problème (3.14)-(3.17).

**Preuve.** a) Supposons que  $\widehat{t}_*$  n'est pas le temps minimal dans le problème (3.14)-(3.17). Il existe alors un temps  $\bar{t}_* > 0$ , et une commande  $\bar{u}_1(t)$  tels que  $\bar{x}(\bar{t}_*) = 0$ , et  $\bar{t}_* < \widehat{t}_*$ . Donc

$$J(\bar{u}_1, \bar{t}_*) = \frac{1}{2} \|\bar{x}(\bar{t}_*)\|^2 + \bar{t}_* < \frac{1}{2} \|\widehat{x}(\widehat{t}_*)\|^2 + \widehat{t}_* = J(\widehat{u}_1, \widehat{t}_*),$$

ce qui contredit l'optimalité de  $(\widehat{u}_1, \widehat{t}_*)$  dans le problème (3.1)-(3.3). Par conséquent,  $\widehat{t}_*$  est le temps minimal du problème (3.14)-(3.17).

b) Soit un couple  $(u_1^*, \tau_*)$  tel que  $x^*(\tau_*) = 0$ , solution du problème (3.14)-(3.17). En vertu de l'optimalité du couple  $(\widehat{u}_1, \widehat{t}_*)$  dans le problème (3.1)-(3.3), on aura alors :

$$J(u_1^*, \tau_*) = \frac{1}{2} \|x^*(\tau_*)\|^2 + \tau_* \geq \frac{1}{2} \|\widehat{x}(\widehat{t}_*)\|^2 + \widehat{t}_*.$$

Comme  $x^*(\tau_*) = 0$ , on obtient donc

$$\tau_* \geq \frac{1}{2} \|\widehat{x}(\widehat{t}_*)\|^2 + \widehat{t}_*. \square$$

**Remarque 3.4.1.** Le cas a) du lemme 3.4.1 ne peut pas avoir lieu, car la condition terminale (3.7) aurait donné  $H(\widehat{x}(\widehat{t}_*), \widehat{\psi}(\widehat{t}_*), \widehat{u}_1(\widehat{t}_*)) = 0$ , ce qui contredirait la relation (3.10).

# 4

## Contrôle optimal en temps minimal

Le problème d'optimisation, cherchant à minimiser le temps de transfert d'un état initial à un état final, est appelé problème en temps minimal. Ce problème est un cas particulier important de la théorie générale du contrôle optimal, développée depuis les années 1950. Il correspond à la recherche d'une commande d'un système dynamique qui minimise le temps de transfert entre l'état initial  $x(0) = x^0 \neq 0$  et l'état final, supposé être l'origine, i.e.,  $x(t_*) = x^1 = 0$ . La donnée de ce temps minimal est très importante puisqu'elle indique simplement qu'en un temps inférieur, le transfert n'est pas possible. Pour cette raison, plusieurs chercheurs se sont intéressés au développement de méthodes numériques efficaces pour résoudre ce type de problèmes.

Premièrement, le problème de contrôle optimal en temps minimal a été étudié par des chercheurs tels que : Lasalle (1960) ; Neustadt (1960) ; Eaton (1962) ; Fodden (1964) ; Fedorenko (1978). D'autres cas du problème de contrôle optimal en temps minimal ont été traités, tels que les systèmes dynamiques non linéaires : Shevchenko (2007), discrets : Carvallo et al. (1990) ; Zaslavski (2014) et multivariées : Olsder (1975). Le principal outil théorique pour traiter ce modèle analytiquement est le principe du maximum de Pontryaguine : Pontryaguine (1962), Eaton (1962), Pshenichny (1968) et Moisseev (1971). Cependant, les problèmes pratiques

deviennent généralement trop complexes pour l'utilisation des techniques analytiques seules. Ainsi, les méthodes numériques pour résoudre ces problèmes complexes ont attiré de plus en plus l'attention des chercheurs, utilisant notamment la méthode de support : Gabasov et al. (1984, 1998), Gnevko (1986) ; la programmation linéaire : Fedorenko (1978), Carvallo et al (1990) ; la programmation dynamique : Lu et al (2017) ; ainsi que d'autres approches : Zaslavski (2014), Poggiolini et al.(2016), etc.

Dans ce chapitre, on présente un algorithme hybride pour résoudre le problème de contrôle optimal en temps minimal. Cet algorithme combine une méthode directe de support d'un problème de contrôle optimal bilinéaire-quadratique et une procédure finale indirecte, s'apparentant à la méthode de tir (shooting method).

## 4.1 Position du problème

Comme dans le chapitre précédent, on considère un système dynamique décrit par des équations différentielles linéaires à coefficients constants, défini sur un intervalle de temps  $T = [0, t_*]$ , où  $t_*$  est indéfini :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu_1(t), \quad x(0) = x^0,$$

où  $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$ ,  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$  est un  $n$ -vecteur qui représente l'état du système à l'instant  $t$ ,  $x^0$  étant l'état initial du système ;  $A$  représente une matrice carrée d'ordre  $n$ , qui caractérise le système ;  $b$  est un vecteur de dimension  $n$  ;  $u_1(t)$ ,  $t \in T = [0, t_*]$ , est une fonction scalaire continue par morceaux et à valeurs dans  $U = [-L, L]$ , appelée commande du système ;  $L$  représente une constante positive. L'ensemble des valeurs des commandes est donc compact, convexe et symétrique :

$$|u_1(t)| \leq L, \quad t \in T = [0, t_*].$$

Considérons le problème de minimisation de la fonctionnelle :

$$J(u_1, t_*) = \int_0^{t_*} 1 \, dt = t_*,$$

où la fonctionnelle  $J(u_1, t_*)$  est appelée critère de qualité du type Lagrange. Ainsi, le problème de contrôle optimal qu'on étudiera se présente sous la forme suivante :

$$\min J(u_1, t_*) = t_*, \tag{4.1}$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu_1(t), \quad x(0) = x^0, \tag{4.2}$$

$$x(t_*) = 0, \tag{4.3}$$

$$u_1(t) \in U = [-L, L], \quad t \geq 0, \tag{4.4}$$

Dans ce chapitre, on ne fixe plus le temps terminal  $t_*$ , mais l'état terminal. On va alors considérer  $t_*$  comme une variable inconnue à trouver. Notre but est de déterminer une commande  $u_1(t)$ ,  $t \in T = [0, t_*]$ , qui :

- satisfait la contrainte (4.4) ;
- transfère au moyen de l'équation (4.2) l'état  $x^0$  à l'état terminal  $x^1 = x(t_*) = 0$ , en temps minimal  $t_*$ .

**Définition 4.1.1.** (*Commande admissible*)

La commande  $u_1(t)$ ,  $t \in T = [0, t_*]$ , est dite commande admissible du problème (4.1)-(4.4) si :

- (i) elle est continue par morceaux sur  $T$  et continue à droite en ses points de discontinuité :

$$\lim_{t \rightarrow t_j, t > t_j} u_1(t) = u_1(t_j + 0) = u_1(t_j), \quad j = \overline{1, s};$$

- (ii)  $-L \leq u_1(t) \leq L$ ,  $t \in T = [0, t_*]$ ,

- (iii) la trajectoire engendrée vérifie :  $x(t_*) = 0$ .

**Définition 4.1.2.** (*Commande optimale et commande suboptimale*)

Une commande admissible  $u_1^*(t)$ ,  $t \in T = [0, \tau_*]$ , est dite optimale si elle réalise le minimum du critère de qualité :

$$J(u_1^*, \tau_*) = \min_{u_1, t_*} J(u_1, t_*),$$

où  $u_1$  parcourt l'ensemble de toutes les commandes admissibles et  $t_* > 0$ . La trajectoire correspondante  $x^*(t)$ ,  $t \in [0, \tau_*]$  est dite trajectoire optimale.

En outre, on appelle commande suboptimale (ou  $\epsilon$ -optimale), toute commande admissible  $u_1^\epsilon(t)$ ,  $t \in [0, t_*^\epsilon]$ , satisfaisant l'inégalité

$$J(u_1^\epsilon, t_*^\epsilon) - J(u_1^*, \tau_*) \leq \epsilon,$$

où le couple  $(u_1^*, \tau_*)$  est optimal, et  $\epsilon$  un nombre positif ou nul choisi comme précision.

## 4.2 Principe du Maximum de Pontryaguine

Pour le problème classique du temps minimal, nous rappelons le principe du maximum bien connu de Pontryaguine. Ainsi, on a le théorème suivant :

**Théorème 4.2.1.** (*Principe du Maximum de Pontryaguine [44]*)

Pour que l'instant  $\tau_*$  et la commande admissible  $u_1^*(t)$ ,  $t \in T = [0, \tau_*]$ , réalisent le minimum dans le problème (4.1)-(4.4), il est nécessaire et suffisant que les conditions suivantes soient vérifiées :

(i) Le hamiltonien  $H(x, \psi, u_1) = \psi^T(Ax + bu_1)$  atteint son maximum :

$$H(x^*(t), \psi^*(t), u_1^*(t)) = \max_{v \in U} H(x^*(t), \psi^*(t), v), \quad t \in T = [0, \tau_*],$$

(ii) et doit être égal à zéro à l'instant final  $\tau_*$  :

$$H(x^*(\tau_*), \psi^*(\tau_*), u_1^*(\tau_*)) = 0,$$

où  $x^*(t)$  est la trajectoire du système direct (4.2) correspondant à  $u_1^*(t)$ ,  $\psi^*(t)$  étant une solution non identiquement nulle du système conjugué :

$$\dot{\psi} = -A^T \psi = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

### 4.3 Résolution du problème original par une méthode hybride

La première phase de résolution consiste à considérer un problème auxiliaire de contrôle optimal à temps terminal libre, et le résoudre par la méthode de support de programmation quadratique, sans discrétisation au préalable du système dynamique bilinéaire, et ce, après l'avoir transformé en un problème bilinéaire-quadratique à temps terminal fixe. On obtient ainsi une idée assez précise de la structure des commutations avec une approximation du temps minimal et de l'état terminal nul.

La deuxième phase consiste à appliquer une procédure finale similaire à la méthode de tir [46], pour calculer le temps minimal du problème (4.1)-(4.4) avec une grande précision. Cette dernière phase consiste donc à résoudre un système d'équations en utilisant la méthode de Newton, où l'itération initiale est déduite des approximations obtenues à la première étape, qui sont proches de la solution optimale.

#### 4.3.1 Première phase : résolution du problème auxiliaire avec un temps terminal fixé

Considérons le problème auxiliaire de contrôle optimal avec un temps terminal libre suivant :

$$\min J_a(u_1, t_*) = \frac{1}{2} \|x(t_*)\|^2 + t_*, \quad (4.5)$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu_1(t), \quad x(0) = x^0, \quad (4.6)$$

$$u_1(t) \in U = [-L, L], \quad t \in T = [0, t_*]. \quad (4.7)$$

Une commande admissible du problème (4.5)-(4.7) est une commande qui vérifie les conditions

(i) et (ii) de la définition 4.1.1.

Ici, le problème d'optimisation consiste à chercher un temps  $\hat{t}_* > 0$ , et une commande admissible  $\hat{u}_1(t)$ ,  $t \in [0, \hat{t}_*]$ , réalisant le minimum de la fonctionnelle (4.5). Pour utiliser les conditions d'optimalité du problème (4.5)-(4.7), nous commençons d'abord par transformer le problème de contrôle optimal avec un temps terminal libre en un problème de contrôle optimal avec un temps terminal fixe .

Dans cette transformation, il s'agit de se débarrasser de la variable  $t_* > 0$  dans le système (4.5)-(4.7) et de se ramener à une situation d'un problème de contrôle optimal, où le temps terminal est fixe (voir la section 3.3 du chapitre précédent).

On obtient alors le problème bilinéaire-quadratique de contrôle optimal avec un temps terminal fixe suivant :

$$\min \tilde{J}(\tilde{u}) = \frac{1}{2} z^T(1) \tilde{D} z(1) + \tilde{c}^T z(1), \quad (4.8)$$

$$\dot{z}(s) = \begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}(s) \\ \dot{\tilde{x}}_{n+1}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [A\tilde{x}(s) + b\tilde{u}_1(s)]\tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_2 \end{pmatrix}, \quad z^0 = z(0) = \begin{pmatrix} x^0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

$$\tilde{u}(s) = (\tilde{u}_1(s), \tilde{u}_2) \in [-L, L] \times \mathbb{R}^+, \quad s \in [0, 1], \quad (4.10)$$

où  $\tilde{D} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\tilde{c} = (0, 1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ .

En résolvant ce problème par la méthode de support [24], on obtient une solution optimale  $\tilde{u}^*(s) = (\tilde{u}_1^*(s), \tilde{u}_2^* = t_*^*)$ , avec la trajectoire optimale  $\tilde{x}^*(s)$ ,  $s \in [0, 1]$ .

### 4.3.2 Deuxième phase : application de la procédure finale pour la résolution du problème originel

La procédure finale de la méthode de support [23, 29, 30], similaire à la méthode de tir, constitue la deuxième phase de l'approche élaborée. Elle consiste à calculer le temps minimal du problème (4.1)-(4.4) avec une grande précision.

Soit  $\tilde{u}^*(s) = (\tilde{u}_1^*(s), \tilde{u}_2^* = t_*^*)$  la commande optimale du problème (4.8)-(4.10) et  $\tilde{x}^*(s)$ ,  $s \in [0, 1]$ , la trajectoire correspondante. Ici, on considère que le problème (4.8)-(4.10) est simple et que la commande optimale  $\tilde{u}_1^*(s)$  possède  $(n - 1)$  points de commutation tels que  $0 < s_1^0 < \dots < s_{n-1}^0 < 1$ . On pose alors en revenant à la variable  $t$  :

$$t_* = \frac{1}{2} \|\tilde{x}^*(1)\|^2 + t_*^*, \quad (4.11)$$

$$\tau_i^0 = s_i^0 t_*, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \tau^0 = (\tau_1^0, \tau_2^0, \dots, \tau_{n-1}^0), \quad \text{et} \quad \tau_*^0 = t_* \leq \tau_*, \quad (4.12)$$

où  $\tau_*$  est le temps minimal du problème originel.

On forme la matrice d'ordre  $n \times (n - 1)$ , supposée être de rang complet :

$$Q_0 = (q(t_*, \tau_i^0), \quad i = \overline{1, n-1}), \quad \text{avec } q(t_*, t) = e^{A(t_*-t)}b, \quad t \in [0, t_*]. \quad (4.13)$$

On calcule le vecteur des potentiels :

$$\lambda^0 = (y^0, 1) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}, \quad (4.14)$$

tel que  $Q_0^T \lambda^0 = 0$ , et la co-commande  $E^0(t) = (\psi^0)^T(t)b$ , où  $\psi^0(t)$ ,  $t \in T = [0, t_*]$ , est la solution du système conjugué :

$$\dot{\psi} = -A^T \psi, \quad \psi(t_*) = \lambda^0.$$

D'où

$$E^0(t) = (\lambda^0)^T e^{A(t_*-t)}b = (\lambda^0)^T q(t_*, t) = ((y^0)^T, 1)q(t_*, t), \quad t \in [0, t_*]. \quad (4.15)$$

En outre, on calcule la quasi-commande :

$$\omega^0(t) = L \operatorname{sign} E^0(t), \quad t \in T = [0, t_*], \quad (4.16)$$

et la trajectoire  $\kappa^0(t)$ ,  $t \in T = [0, t_*]$ , correspondant à  $\omega^0(t)$ ,  $t \in T$ . On suppose de plus que

$$\dot{E}^0(\tau_i^0) \neq 0, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

La procédure finale consiste alors à trouver la solution  $v = (y, \tau_*, T_s) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $\tau_* \in \mathbb{R}^+$ ,  $T_s = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1})$  de  $(2n - 1)$  équations :

$$F(v) = \begin{pmatrix} F_1(v) \\ F_2(v) \end{pmatrix} = 0,$$

où

$$\begin{cases} F_1(v) = F_1(y, \tau_*, T_s) = \kappa(\tau_*, T_s) = (\kappa_j(\tau_*, T_s) = 0, \quad j = \overline{1, n}), \\ F_2(v) = F_2(y, \tau_*, T_s) = E(y, \tau_*, T_s) = (E(y, \tau_*, \tau_i) = 0, \quad i = \overline{1, n-1}), \end{cases} \quad (4.17)$$

où  $E(y, \tau_*, t) = (y^T, 1)e^{A(\tau_*-t)}b$ ,  $t \in [0, \tau_*]$ , et  $\kappa(t, T_s)$ ,  $t \in [0, \tau_*]$  est la trajectoire (4.2) correspondant à la quasi-commande  $\omega(t, T_s)$ ,  $t \in [0, \tau_*]$  :

$$\omega(t, T_s) = \begin{cases} -L \operatorname{sign} \dot{E}^0(\tau_1^0), & \text{si } t \in [0, \tau_1[; \\ -L \operatorname{sign} \dot{E}^0(\tau_i^0), & \text{si } t \in [\tau_{i-1}, \tau_i[, \quad i = \overline{2, n-1}; \\ L \operatorname{sign} \dot{E}^0(\tau_{n-1}^0), & \text{si } t \in [\tau_{n-1}, \tau_*]. \end{cases} \quad (4.18)$$

De (4.18), on déduit les  $n$  premières équations par la formule de Cauchy :

$$F_1(y, \tau_*, T_s) = \kappa(\tau_*, T_s) = e^{A\tau_*}x^0 + \int_0^{\tau_*} e^{A(\tau_*-t)}b\omega(t, T_s)dt.$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}\kappa(\tau_*, T_s) &= e^{A(\tau_*-t_*+t_*)}x^0 + \int_0^{t_*} e^{A(\tau_*-t_*+t_*-t)}b\omega(t, T_s)dt + \int_{t_*}^{\tau_*} e^{A(\tau_*-t_*+t_*-t)}b\omega(t, T_s)dt \\ &= e^{A(\tau_*-t_*)}[e^{At_*}x^0 + \int_0^{t_*} e^{A(t_*-t)}b\omega(t, T_s)dt + \int_{t_*}^{\tau_*} e^{A(t_*-t)}b\omega(t, T_s)dt] \\ &= e^{A(\tau_*-t_*)}X(\tau_*, T_s),\end{aligned}$$

où en appliquant (4.18), on aura :

$$\begin{aligned}X(\tau_*, T_s) &= e^{At_*}x^0 + \int_0^{\tau_1^0} q(t_*, t)\omega(t, T_s)dt + \int_{\tau_1^0}^{\tau_1} q(t_*, t)\omega(t, T_s)dt + \int_{\tau_1}^{\tau_2^0} q(t_*, t)\omega(t, T_s)dt \\ &\quad + \int_{\tau_2^0}^{\tau_2} q(t_*, t)\omega(t, T_s)dt + \cdots + \int_{\tau_{n-2}}^{\tau_{n-1}^0} q(t_*, t)\omega(t, T_s)dt + \int_{\tau_{n-1}^0}^{\tau_{n-1}} q(t_*, t)\omega(t, T_s)dt \\ &\quad + \int_{\tau_{n-1}}^{t_*} q(t_*, t)\omega(t, T_s)dt + \int_{t_*}^{\tau_*} q(t_*, t)\omega(t, T_s)dt.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}X(\tau_*, T_s) &= e^{At_*}x^0 - L \int_0^{\tau_1^0} q(t_*, t)\text{sign}\dot{E}^0(\tau_1^0)dt - L \int_{\tau_1^0}^{\tau_1} q(t_*, t)\text{sign}\dot{E}^0(\tau_1^0)dt - L \int_{\tau_1}^{\tau_2^0} q(t_*, t)\text{sign}\dot{E}^0(\tau_2^0)dt \\ &\quad - L \int_{\tau_2^0}^{\tau_2} q(t_*, t)\text{sign}\dot{E}^0(\tau_2^0)dt - \cdots - L \int_{\tau_{n-2}}^{\tau_{n-1}^0} q(t_*, t)\text{sign}\dot{E}^0(\tau_{n-1}^0)dt \\ &\quad - L \int_{\tau_{n-1}^0}^{\tau_{n-1}} q(t_*, t)\text{sign}\dot{E}^0(\tau_{n-1}^0)dt + L \int_{\tau_{n-1}}^{t_*} q(t_*, t)\text{sign}\dot{E}^0(\tau_{n-1}^0)dt + L \int_{t_*}^{\tau_*} q(t_*, t)\text{sign}\dot{E}^0(\tau_{n-1}^0)dt \\ &= e^{At_*}x^0 + \int_0^{\tau_1^0} q(t_*, t)\omega^0(t)dt + \int_{\tau_1^0}^{\tau_2^0} q(t_*, t)\omega^0(t)dt + \cdots + \int_{\tau_{n-2}^0}^{\tau_{n-1}^0} q(t_*, t)\omega^0(t)dt \\ &\quad + \int_{\tau_{n-1}^0}^{t_*} q(t_*, t)\omega^0(t)dt + L \int_{t_*}^{\tau_*} q(t_*, t)\text{sign}\dot{E}^0(\tau_{n-1}^0)dt - 2L \sum_{k=1}^{n-1} \text{sign}\dot{E}^0(\tau_k^0) \int_{\tau_k^0}^{\tau_k} q(t_*, t)dt.\end{aligned}$$

D'où

$$X(\tau_*, T_s) = \kappa^0(t_*) + L \int_{t_*}^{\tau_*} q(t_*, t)\text{sign}\dot{E}^0(\tau_{n-1}^0)dt - 2L \sum_{k=1}^{n-1} \text{sign}\dot{E}^0(\tau_k^0) \int_{\tau_k^0}^{\tau_k} q(t_*, t)dt.$$

Comme  $e^{A(\tau_*-t_*)}$  est toujours inversible, alors après avoir appliqué (4.18), les  $n$  premières équations (4.17) sont équivalentes à :

$$X(\tau_*, T_s) = \kappa^0(t_*) + L \int_{t_*}^{\tau_*} q(t_*, t)\text{sign}\dot{E}^0(\tau_{n-1}^0)dt - 2L \sum_{k=1}^{n-1} \text{sign}\dot{E}^0(\tau_k^0) \int_{\tau_k^0}^{\tau_k} q(t_*, t)dt = 0.$$

On obtient alors le système simplifié suivant :

$$\begin{cases} F_1(v) = F_1(y, \tau_*, T_s) = X(\tau_*, T_s) = (X_j(\tau_*, T_s) = 0, \quad j = \overline{1, n}), \\ F_2(v) = F_2(y, \tau_*, T_s) = E(y, \tau_*, T_s) = (E_i(y, \tau_*, \tau_i) = E_i = 0, \quad i = \overline{1, n-1}). \end{cases} \quad (4.19)$$

En particulier, on obtient pour  $X(t_*, T_s)$  :

$$X(t_*, T_s) = \kappa^0(t_*) - 2L \sum_{k=1}^{n-1} \text{sign} \dot{E}^0(\tau_k^0) \int_{\tau_k^0}^{\tau_k} q(t_*, t) dt.$$

Pour  $\kappa(t_*, T_s)$ , on aura alors :

$$\kappa(t_*, T_s) = e^{A(t_* - t_*)} X(t_*, T_s) = X(t_*, T_s),$$

et on retrouve la formule classique pour  $\tau_* = t_*$  fixé [23, 24, 29, 30].

On résout le système (4.19) avec la méthode de Newton, en commençant par l'approximation initiale  $v^0 = (y^0, \tau_*^0 = t_*, \tau^0 = T_s^0)$ . La  $(k+1)^{\text{ème}}$  approximation  $v^{k+1}$  est égale à

$$v^{k+1} = v^k - J^{-1} F(v^k) F'(v^k), \quad (4.20)$$

où

$$\begin{aligned} JF(v) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(v)}{\partial y} & \frac{\partial F_1(v)}{\partial \tau_*} & \frac{\partial F_1(v)}{\partial T_s} \\ \frac{\partial F_2(v)}{\partial y} & \frac{\partial F_2(v)}{\partial \tau_*} & \frac{\partial F_2(v)}{\partial T_s} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial X(\tau_*, T_s)}{\partial y} & \frac{\partial X(\tau_*, T_s)}{\partial \tau_*} & \frac{\partial X(\tau_*, T_s)}{\partial T_s} \\ \frac{\partial E(y, \tau_*, T_s)}{\partial y} & \frac{\partial E(y, \tau_*, T_s)}{\partial \tau_*} & \frac{\partial E(y, \tau_*, T_s)}{\partial T_s} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X(\tau_*, T_s)}{\partial y_1} &= \frac{\partial X(\tau_*, T_s)}{\partial y_2} = \dots = \frac{\partial X(\tau_*, T_s)}{\partial y_{n-1}} = 0_n, \\
\frac{\partial X(\tau_*, T_s)}{\partial \tau_*} &= (L \operatorname{sign} \dot{E}^0(\tau_{n-1}^0) e^{A(t_* - \tau_*)} b)_n, \\
\frac{\partial X(\tau_*, T_s)}{\partial \tau_i} &= (-2L \operatorname{sign} \dot{E}^0(\tau_i^0) e^{A(t_* - \tau_i)} b)_n, \quad i = \overline{1, n-1}, \\
\frac{\partial E(y, \tau_*, T_s)}{\partial y_i} &= (e^{A(\tau_* - \tau_i)} b)_{(n-1)}, \quad i = \overline{1, n-1}, \\
\frac{\partial E(y, \tau_*, T_s)}{\partial \tau_*} &= (y^T ((A e^{A(\tau_* - \tau_1)} b)_{(n-1)}, \dots, (A e^{A(\tau_* - \tau_{n-1})} b)_{(n-1)}))^T, \\
\frac{\partial E(y, \tau_*, T_s)}{\partial \tau_1} &= (-y^T (A e^{A(\tau_* - \tau_1)} b)_{(n-1)}, 0_{(n-2)}), \\
&\vdots \\
\frac{\partial E(y, \tau_*, T_s)}{\partial \tau_i} &= (0_{(i-1)}, -y^T (A e^{A(\tau_* - \tau_i)} b)_{(n-1)}, 0_{(n-i-1)}), \\
&\vdots \\
\frac{\partial E(y, \tau_*, T_s)}{\partial \tau_{n-1}} &= (0_{(n-2)}, -y^T (A e^{A(\tau_* - \tau_{n-1})} b)_{(n-1)}).
\end{aligned}$$

En utilisant la définition  $q(\tau_*, t) = e^{A(\tau_* - t)} b$ , introduisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
Q(\tau_*, T_s) &= (q(\tau_*, \tau_1), \dots, q(\tau_*, \tau_{n-1})) \in \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^{n-1}, \\
\vartheta(\tau_*, T_s) &= (A q(\tau_*, \tau_1), \dots, A q(\tau_*, \tau_{n-1})) \in \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^{n-1}, \\
\nu(\tau_*, T_s) &= y^T (\vartheta(\tau_*, T_s))_{(n-1) \times (n-1)},
\end{aligned}$$

et  $Q(\tau_*, T_s)_{(n-1) \times (n-1)}$  et  $\vartheta(\tau_*, T_s)_{(n-1) \times (n-1)}$  représentent deux matrices carrées d'ordre  $(n-1)$ , constituées des  $(n-1)$  premières lignes de  $Q(\tau_*, T_s)$  et  $\vartheta(\tau_*, T_s)$  respectivement ;  $\nu(\tau_*, T_s)$  est un vecteur ligne de dimension  $(n-1)$ . Alors, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X(\tau_*, T_s)}{\partial y} &= 0_{n \times (n-1)}, \\
\frac{\partial X(\tau_*, T_s)}{\partial \tau_*} &= (L \operatorname{sign} \dot{E}^0(\tau_{n-1}^0) q(t_*, \tau_*))_{n \times 1}, \\
\frac{\partial X(\tau_*, T_s)}{\partial T_s} &= (-2L \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{sign} \dot{E}^0(\tau_k^0) Q(t_*, T_s))_{n \times (n-1)}, \\
\frac{\partial E(y, \tau_*, T_s)}{\partial y} &= \left( \frac{\partial E_1(y, \tau_*, T_s)}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial E_{n-1}(y, \tau_*, T_s)}{\partial y_{n-1}} \right) = (Q^T(\tau_*, T_s))_{(n-1) \times (n-1)}, \\
\frac{\partial E(y, \tau_*, T_s)}{\partial \tau_*} &= (\nu^T(\tau_*, T_s))_{(n-1) \times 1},
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial E(y, \tau_*, T_s)}{\partial T_s} = (\text{diag}(-\nu(\tau_*, T_s)))_{(n-1) \times (n-1)},$$

où  $\text{diag}(-\nu(\tau_*, T_s))$  est une matrice diagonale d'ordre  $(n-1)$ , dont les éléments diagonaux sont les composantes du vecteur  $(-\nu(\tau_*, T_s))$ . La Jacobienne s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} 0_{(n,n-1)} & (L \text{ sign} \dot{E}^0(\tau_{n-1}^0) q(t_*, \tau_*))_{n \times 1} & (-2L \sum_{k=1}^{n-1} \text{sign} \dot{E}^0(\tau_k^0) Q(t_*, T_s))_{n \times (n-1)} \\ (Q^T(\tau_*, T_s))_{(n-1) \times (n-1)} & (\nu^T(\tau_*, T_s))_{(n-1) \times 1} & (\text{diag}(-\nu(\tau_*, T_s)))_{(n-1) \times (n-1)} \end{pmatrix}.$$

### 4.3.3 Schéma de l'algorithme hybride

La méthode hybride est résumée dans l'algorithme suivant :

#### Début

- (1) Construire le problème auxiliaire de contrôle optimal avec un temps terminal libre (4.5)-(4.7) ;
- (2) Transformer le problème auxiliaire de contrôle optimal à temps terminal libre en un problème bilinéaire-quadratique à temps terminal fixe (4.8)-(4.10) ;
- (3) Résoudre le problème (4.8)-(4.10) par la méthode de support [24] , pour obtenir une solution optimale  $\tilde{u}^*(s) = (\tilde{u}_1^*(s), \tilde{u}_2^* = t_*^*)$ , avec la trajectoire optimale  $\tilde{x}^*(s)$ ,  $s \in [0, 1]$ .

#### (4) Procédure finale :

— À l'aide des équations (4.11), (4.12), (4.13), (4.14), (4.15), et (4.16), on calcule : le temps  $t_* = \frac{1}{2} \|\tilde{x}^*(1)\|^2 + t_*^*$ , les points de commutation  $\tau_i^0$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ , la matrice  $Q_0$ , le vecteur des potentiels  $\lambda^0$ , la co-commande  $E^0(t)$ , la quasi-commande  $\omega^0(t)$ , et sa trajectoire correspondante  $\kappa^0(t)$ ,  $t \in T = [0, t_*]$ .

— Résoudre le système (4.19) avec la méthode de Newton, en commençant par l'approximation initiale  $v^0 = (y^0, \tau_*^0 = t_*, \tau^0 = T_s^0)$ .

- (5) La commande optimale du problème (4.1)-(4.4) s'écrit sous la forme suivante :

$$u^*(t) = \omega(t, T_s), \quad t \in T^* = [0, \tau_*], \quad (4.21)$$

où  $\omega(t, T_s)$  est la quasi-commande (4.18) et  $\tau_*$  est le temps minimal du problème originel.

**Fin.**

## 4.4 Résolution d'un exemple numérique sur le temps minimal

Soit le problème de contrôle optimal en temps minimal suivant :

$$\begin{aligned}
 \min J(u, t_*) &= t_*, & (4.22) \\
 \dot{x}_1 &= x_2, \\
 \dot{x}_2 &= x_3, \\
 \dot{x}_3 &= u_1, \quad |u_1| \leq 1, \quad t \in T(t_*) = [0, t_*], \\
 x &= (x_1, x_2, x_3)^T, \quad x^0 = x(0) = (16, 0, 0), \quad x(t_*) = 0.
 \end{aligned}$$

On définit les matrices et les vecteurs suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = 0, \quad \text{donc}$$

$$e^{At} = I_3 + tA + \frac{t^2}{2}A^2 = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad q(t_*, t) = e^{A(t_*-t)}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(t_* - t)^2 \\ t_* - t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

### 4.4.1 Construction du problème auxiliaire de contrôle optimal

On considère le problème linéaire-quadratique de contrôle optimal avec un temps terminal libre suivant :

$$\begin{aligned}
 \min J_a(u_1, t_*) &= \frac{1}{2} \|x(t_*)\|^2 + t_*, & (4.23) \\
 \dot{x}_1 &= x_2, \\
 \dot{x}_2 &= x_3, \\
 \dot{x}_3 &= u_1, \quad |u_1| \leq 1, \quad t \in T(t_*) = [0, t_*], \\
 x &= (x_1, x_2, x_3)^T, \quad x^0 = x(0) = (16, 0, 0).
 \end{aligned}$$

### 4.4.2 Transformation du problème auxiliaire à temps terminal libre en un problème à temps terminal fixe et sa résolution

Avec la variable  $s \in [0, 1]$ , on considère le problème bilinéaire-quadratique de contrôle optimal avec un temps terminal fixe suivant :

$$\min \tilde{J}_a(\tilde{u}) = \frac{1}{2} z^T(1) \tilde{D} z(1) + \tilde{c}^T z(1), \quad (4.24)$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 \tilde{u}_2, \\ \dot{z}_2 = \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{x}_3 \tilde{u}_2, \\ \dot{z}_3 = \dot{\tilde{x}}_3 = \tilde{u}_1 \tilde{u}_2, \\ \dot{z}_4 = \dot{\tilde{x}}_4 = \tilde{u}_2, \end{cases} \quad (4.25)$$

$$z = (\tilde{x}, \tilde{x}_4) = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4), \quad z^0 = z(0) = (16, 0, 0, 0), \quad (4.26)$$

$$\tilde{u}(s) = (\tilde{u}_1(s), \tilde{u}_2) \in U \times \mathbb{R}^+, \quad s \in [0, 1], \quad U = [-1, 1], \quad (4.27)$$

où

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{c} = (0, 0, 0, 1).$$

On définit les matrices et les vecteurs suivants :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}_1 = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le système (4.25)-(4.26) peut s'écrire :

$$\dot{z}(s) = \begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}(s) \\ \dot{\tilde{x}}_4(s) \end{pmatrix} = \tilde{A}z(s)\tilde{u}_2 + \tilde{b}_1\tilde{u}_1(s)\tilde{u}_2 + \tilde{b}_2\tilde{u}_2, \quad z^0 = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

En utilisant le logiciel MATLAB, on obtient la commande optimale  $\tilde{u}^*(s) = (\tilde{u}_1^*(s), \tilde{u}_2^*)$  du problème transformé (4.24)-(4.27), telle que :

$$\tilde{u}_1^*(s) = \begin{cases} -1, & t \in [0, s_1^0[, \\ +1, & t \in [s_1^0, s_2^0[, \\ -1, & t \in [s_2^0, 1], \end{cases} \quad \tilde{u}_2^* = 7.1771,$$

avec  $s_1^0 = 0.2772$ ,  $s_2^0 = 0.8177$  et

$$\begin{aligned} \tilde{J}_a(\tilde{u}^*) &= \frac{1}{2} \|\tilde{x}^*(1)\|^2 + \tilde{x}_4^*(1) \\ &= \frac{(0.8226)^2}{2} + \tilde{u}_2^* \\ &= \frac{0.6767}{2} + 7.1771 \\ &= 0.3383 + 7.1771 = 7.5155. \end{aligned}$$

### 4.4.3 Application de la procédure finale pour le problème original

En revenant à la variable  $t$ , on obtient :

$$\begin{aligned}\tau_*^0 &= t_* = \tilde{J}_a(\tilde{u}^*) = 7.5155 \\ \tau_1^0 &= s_1^0 \times t_* = 2.0833 \\ \tau_2^0 &= s_2^0 \times t_* = 6.1454.\end{aligned}$$

On calcule :

$$\begin{aligned}e^{At_*} &= I_3 + t_*A + \frac{t_*^2}{2}A^2 = \begin{pmatrix} 1 & t_* & \frac{t_*^2}{2} \\ 0 & 1 & t_* \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7.5155 & 28.2410 \\ 0 & 1 & 7.5155 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ q(t_*, t) &= \begin{pmatrix} 1 & t_* - t & \frac{1}{2}(t_* - t)^2 \\ 0 & 1 & t_* - t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(t_* - t)^2 \\ t_* - t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(7.5155 - t)^2 \\ 7.5155 - t \\ 1 \end{pmatrix}, \\ q(t_*, \tau_1^0) &= \begin{pmatrix} 14.7542 \\ 5.4322 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad q(t_*, \tau_2^0) = \begin{pmatrix} 0.9385 \\ 1.3701 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q_0 = \begin{pmatrix} 14.7542 & 0.9385 \\ 5.4322 & 1.3701 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

et on résout le système

$$Q_0^T \lambda^0 = \begin{pmatrix} 14.7542 & 5.4322 & 1 \\ 0.9385 & 1.3701 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 14.7544 y_1^0 + 5.4322 y_2^0 + 1 = 0 \\ 0.9386 y_1^0 + 1.3701 y_2^0 + 1 = 0, \end{cases}$$

on trouve  $\lambda^0 = (y_1^0, y_2^0, 1)^T = (0.2687, -0.9140, 1)^T$ . On calcule la co-commande  $E^0$ , et la quasi-commande  $\omega^0(t)$ ,  $t \in [0, t_*]$  :

$$\begin{aligned}E^0(t) &= -(y_1^0, y_2^0, 1)^T q(t_*, t) \\ &= -(0.2687, -0.9140, 1) \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(7.5155 - t)^2 \\ 7.5155 - t \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= -0.1344t^2 + 1.1056t - 1.7202, \\ \omega^0(t) &= \begin{cases} -1, & t \in [0, 2.0833[, \\ +1, & t \in [2.0833, 6.1454[, \\ -1, & t \in [6.1454, 7.5155]. \end{cases}\end{aligned}$$

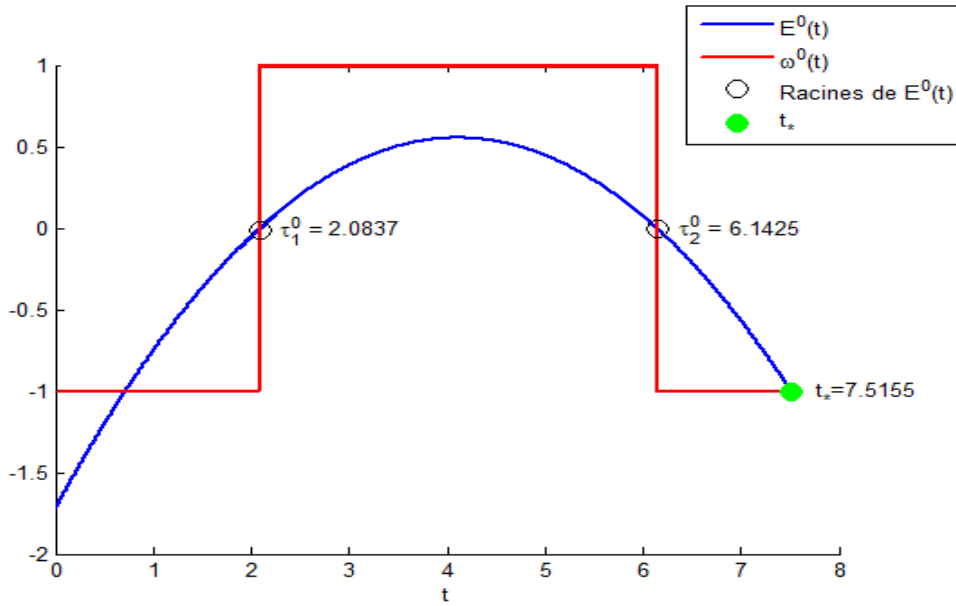


FIGURE 4.1 – La co-commande  $E^0(t)$ , et la quasi-commande  $\omega^0(t)$ ,  $t \in [0, t_* = 7.5155]$ .

La procédure finale consiste à trouver la solution  $v = (y, \tau_*, T_s = (\tau_1, \tau_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  de 5 équations :

$$F(v) = \begin{pmatrix} F_1(v) \\ F_2(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa(\tau_*, T_s) \\ E(y, \tau_*, t) \end{pmatrix}.$$

D'une part, on a :

$$\kappa(\tau_*, T_s) = e^{A(\tau_* - t_*)} X(\tau_*, T_s),$$

avec

$$\begin{aligned} X(\tau_*, T_s) &= \kappa^0(t_*) + L \int_{t_*=7.5155}^{\tau_*} q(t_*, t) \text{sign} \dot{E}^0(\tau_2^0) dt - 2L \sum_{k=1}^2 \text{sign} \dot{E}^0(\tau_i^0) \int_{\tau_i^0}^{\tau_i} q(t_*, t) dt \\ &= \kappa^0(t_*) - \int_{t_*=7.5155}^{\tau_*} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(7.5155 - t)^2 \\ 7.5155 - t \\ 1 \end{pmatrix} dt - 2 \int_{\tau_1^0=2.0833}^{\tau_1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(7.5155 - t)^2 \\ 7.5155 - t \\ 1 \end{pmatrix} dt \\ &\quad + 2 \int_{\tau_2^0=6.1454}^{\tau_2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(7.5155 - t)^2 \\ 7.5155 - t \\ 1 \end{pmatrix} dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X(\tau_*, T_s) &= \kappa^0(t_*) + \begin{bmatrix} \frac{1}{6}(7.5155 - t)^3 \\ \frac{1}{2}t^2 - 7.5155t \\ -t \end{bmatrix}_{7.5155}^{\tau_*} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(7.5155 - t)^3 \\ t^2 - 15.0309t \\ -2t \end{bmatrix}_{2.0833}^{\tau_1} - \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(7.5155 - t)^3 \\ t^2 - 15.0309t \\ -2t \end{bmatrix}_{6.1454}^{\tau_2} \\
&= \kappa^0(t_*) + \begin{pmatrix} \frac{1}{6}(7.5155 - \tau_*)^3 + \frac{1}{3}(7.5155 - \tau_1)^3 - \frac{1}{3}(7.5155 - \tau_2)^3 - 26.2876 \\ \frac{1}{2}\tau_*^2 - 7.5155\tau_* + \tau_1^2 - 15.0310\tau_1 - \tau_2^2 + 15.0310\tau_2 + 0.6097 \\ -\tau_* - 2\tau_1 + 2\tau_2 - 0.6087 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\kappa^0(t_*) &= e^{At_*} x^0 + \int_0^{t_*=7.5155} e^{At_*-t} b \omega^0(t) dt \\
&= e^{At_*} x^0 - \int_0^{2.0833} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(7.5155 - t)^2 \\ 7.5155 - t \\ 1 \end{pmatrix} dt + \int_{2.0833}^{6.1454} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(7.5155 - t)^2 \\ 7.5155 - t \\ 1 \end{pmatrix} dt \\
&\quad - \int_{6.1454}^{7.5155} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(7.5155 - t)^2 \\ 7.5155 - t \\ 1 \end{pmatrix} dt \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 7.5155 & 28.2410 \\ 0 & 1 & 7.5155 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{6}(7.5155 - t)^3 \\ \frac{1}{2}t^2 - 7.5155t \\ -t \end{bmatrix}_0^{2.0833} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{6}(7.5155 - t)^3 \\ -\frac{1}{2}t^2 + 7.5155t \\ t \end{bmatrix}_{2.0833}^{6.1454} \\
&\quad + \begin{bmatrix} \frac{1}{6}(7.5155 - t)^3 \\ \frac{1}{2}t^2 - 7.5155t \\ -t \end{bmatrix}_{6.1454}^{7.5155} \\
&= \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -44.0331 \\ -13.4870 \\ -2.0833 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 26.2876 \\ 13.8158 \\ 4.0621 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.4287 \\ -0.9386 \\ -1.3701 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.1742 \\ -0.6098 \\ 0.6087 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
X(\tau_*, T_s) &= \kappa^0(t_*) + L \int_{t_*=7.5155}^{\tau_*} q(t_*, t) \text{sign} \dot{E}^0(\tau_2^0) dt - 2L \sum_{k=1}^2 \text{sign} \dot{E}^0(\tau_k^0) \int_{\tau_k^0}^{\tau_k} q(t_*, t) dt \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{6}(7.5155 - \tau_*)^3 + \frac{1}{3}(7.5155 - \tau_1)^3 - \frac{1}{3}(7.5155 - \tau_2)^3 - 28.4618 \\ \frac{1}{2}\tau_*^2 - 7.5155\tau_* + \tau_1^2 - 15.0310\tau_1 - \tau_2^2 + 15.0310\tau_2 \\ -\tau_* - 2\tau_1 + 2\tau_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.29)
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} E(y, \tau_*, t) &= (y^T, 1)q(\tau_*, t) = (y_1, y_2, 1) \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\tau_* - t)^2 \\ \tau_* - t \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}y_1(\tau_* - t)^2 + y_2(\tau_* - t) + 1. \end{aligned}$$

D'où

$$E = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(y, \tau_*, \tau_1) \\ E(y, \tau_*, \tau_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y_1(\tau_* - \tau_1)^2 + y_2(\tau_* - \tau_1) + 1 \\ \frac{1}{2}y_1(\tau_* - \tau_2)^2 + y_2(\tau_* - \tau_2) + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.29')$$

On forme la matrice Jacobienne :

$$JF(v) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial X(\tau_*, T_s)}{\partial y} \end{pmatrix}_{3 \times 2} & \begin{pmatrix} \frac{\partial X(\tau_*, T_s)}{\partial \tau_*} \end{pmatrix}_{3 \times 1} & \begin{pmatrix} \frac{\partial X(\tau_*, T_s)}{\partial T_s} \end{pmatrix}_{3 \times 2} \\ \begin{pmatrix} \frac{\partial E(y, \tau_*, T_s)}{\partial y} \end{pmatrix}_{2 \times 2} & \begin{pmatrix} \frac{\partial E(y, \tau_*, T_s)}{\partial \tau_*} \end{pmatrix}_{2 \times 1} & \begin{pmatrix} \frac{\partial E(y, \tau_*, T_s)}{\partial T_s} \end{pmatrix}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad T_s = (\tau_1, \tau_2).$$

En effet, on calcule :

$$\frac{\partial X(\tau_*, T_s)}{\partial y} = 0_{3 \times 2},$$

$$\frac{\partial X(\tau_*, T_s)}{\partial \tau_*} = L \operatorname{sign} \dot{E}^0(\tau_2^0) q(7.5155, \tau_*) = -q(7.5155, \tau_*) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(7.5155 - \tau_*)^2 \\ \tau_* - 7.5155 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial X(\tau_*, T_s)}{\partial T_s} = -2L \sum_{k=1}^2 \operatorname{sign} \dot{E}^0(\tau_k^0) Q_0(7.5155, T_s) = \begin{pmatrix} -(7.5155 - \tau_1)^2 & (7.5155 - \tau_2)^2 \\ -2(7.5155 - \tau_1) & 2(7.5155 - \tau_2) \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial E(y, \tau_*, T_s)}{\partial y} = (Q^T(\tau_*, T_s))_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\tau_* - \tau_1)^2 & \tau_* - \tau_1 \\ \frac{1}{2}(\tau_* - \tau_2)^2 & \tau_* - \tau_2 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial E(y, \tau_*, T_s)}{\partial \tau_*} = \nu^T(\tau_*, T_s) = \begin{pmatrix} y_1(\tau_* - \tau_1) + y_2 \\ y_1(\tau_* - \tau_2) + y_2 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial E(y, \tau_*, T_s)}{\partial T_s} = \operatorname{diag}(-\nu(\tau_*, T_s)) = \begin{pmatrix} -(y_1(\tau_* - \tau_1) + y_2) & 0 \\ 0 & -(y_1(\tau_* - \tau_2) + y_2) \end{pmatrix},$$

où

$$Q(\tau_*, T_s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\tau_* - \tau_1)^2 & \frac{1}{2}(\tau_* - \tau_2)^2 \\ \tau_* - \tau_1 & \tau_* - \tau_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vartheta(\tau_*, T_s) = \begin{pmatrix} \tau_* - \tau_1 & \tau_* - \tau_2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\nu(\tau_*, T_s) = y^T (\vartheta(\tau_*, T_s))_{2 \times 2} = (y_1, y_2) \begin{pmatrix} \tau_* - \tau_1 & \tau_* - \tau_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (y_1(\tau_* - \tau_1) + y_2, y_1(\tau_* - \tau_2) + y_2).$$

Donc

$$JF(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2}(7.5155 - \tau_*)^2 & -(7.5155 - \tau_1)^2 & (7.5155 - \tau_2)^2 \\ 0 & 0 & \tau_* - 7.5155 & -2(7.5155 - \tau_1) & 2(7.5155 - \tau_2) \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ \frac{1}{2}(\tau_* - \tau_1)^2 & \tau_* - \tau_1 & y_1(\tau_* - \tau_1) + y_2 & -(y_1(\tau_* - \tau_1) + y_2) & 0 \\ \frac{1}{2}(\tau_* - \tau_2)^2 & \tau_* - \tau_2 & y_1(\tau_* - \tau_2) + y_2 & 0 & -(y_1(\tau_* - \tau_2) + y_2) \end{pmatrix}.$$

On résout le système (4.29)-(4.29') avec la méthode de Newton, en commençant par l'approximation initiale :

$$v^0 = (y^0, \tau_*^0 = t^*, T_s^0) = (0.2687, -0.9140, 7.5155, 2.0833, 6.1454)^T,$$

Pour  $\epsilon = 10^{-4}$ , on trouve les résultats présentés dans le tableau ci-dessous :

Ces itérations convergent vers la solution :  $v^* = (y, \tau_*, T_s)^T = (0.1667, -0.6667, 8, 2, 6)^T$ . Pour cet exemple considéré,  $y = (0.1667, -0.6667)^T$ , le temps minimal du problème (4.1)-(4.4) est  $\tau_* = 8$ , avec les points de commutation  $\tau_1 = 2$  et  $\tau_2 = 6$ , correspondant au contrôle optimal exact du problème [27], où

$$u_1^*(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, 2[, \\ 1, & t \in [2, 6[, \\ -1, & t \in [6, 8], \end{cases}$$

$k$	$v^k$	$J(v^k)^{-1}F(v^k)$	$v^{k+1}$	$\ v^{k+1} - v^k\ $
0	$\begin{pmatrix} 0.2687 \\ -0.9140 \\ 7.5155 \\ 2.0833 \\ 6.1454 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.1651 \\ -0.3820 \\ -0.5818 \\ 0.0796 \\ 0.0931 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.1036 \\ -0.5320 \\ 8.0973 \\ 2.0037 \\ 6.0523 \end{pmatrix}$	0.7257
1	$\begin{pmatrix} 0.1036 \\ -0.5320 \\ 8.0973 \\ 2.0037 \\ 6.0523 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0610 \\ 0.1323 \\ 0.0951 \\ 0.0034 \\ 0.0509 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.1647 \\ -0.6643 \\ 8.0022 \\ 2.0003 \\ 6.0014 \end{pmatrix}$	0.1813
2	$\begin{pmatrix} 0.1647 \\ -0.6643 \\ 8.0022 \\ 2.0003 \\ 6.0014 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0020 \\ 0.0024 \\ 0.0022 \\ 0.0003 \\ 0.0014 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.1667 \\ -0.6667 \\ 8.0000 \\ 2.0000 \\ 6.0000 \end{pmatrix}$	0.0041
3	$\begin{pmatrix} 0.1667 \\ -0.6667 \\ 8.0000 \\ 2.0000 \\ 6.0000 \end{pmatrix}$	$10^{-5} \begin{pmatrix} -0.1224 \\ 0.0656 \\ 0.0905 \\ 0.0160 \\ 0.0613 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.1667 \\ -0.6667 \\ 8.0000 \\ 2.0000 \\ 6.0000 \end{pmatrix}$	$1.7747 \times 10^{-6}$

TABLE 4.1 – Résultats de la méthode de Newton à partir de l'approximation initiale  $v^0 = (y^0, \tau_*^0 = t_*, T_s^0) = (0.2687, -0.9140, 7.5155, 2.0833, 6.1454)^T$ , avec  $\epsilon = 10^{-4}$ .

et sa trajectoire correspondante s'écrit :

$$\begin{aligned}
 x^*(t) &= \begin{pmatrix} x_1^*(t) \\ x_2^*(t) \\ x_3^*(t) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}t^3 + 4t^2 - 32t + \frac{256}{3} \\ -\frac{1}{2}t^2 + 8t - 32 \\ -t + 8 \end{pmatrix}, \quad t = [0, 8], \quad \text{avec } x^*(8) = \begin{pmatrix} x_1^*(8) \\ x_2^*(8) \\ x_3^*(8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Dans la figure suivante, on représente la commande optimale  $u^*(t)$ ,  $t \in T = [0, 8]$ , et les composantes de la trajectoire correspondante  $x^*(t)$ ,  $t \in [0, 8]$ .

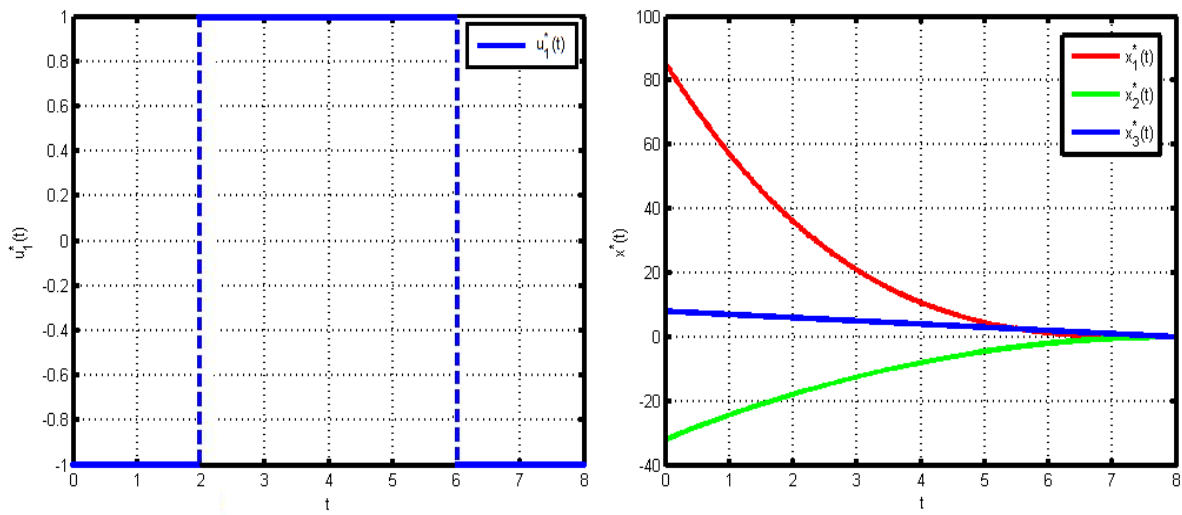


FIGURE 4.2 – Commande optimale  $u^*(t)$  et les composantes de la trajectoire optimale  $x^*(t)$ ,  $t \in T = [0, 8]$ .

## Conclusion générale

Le contrôle optimal est l'un des domaines d'application les plus importants de la vie réelle, ayant pour but de faire évoluer l'état d'un système dynamique de manière à le ramener à un état désiré, tout en minimisant un certain critère donné : énergétique, économique, temporel, etc. Dans notre thèse, il s'agit de déterminer à la fois le contrôle et le temps terminal de manière à minimiser un critère choisi à l'avance, comme en particulier le problème de transfert en temps minimal. Les méthodes directes, telles que la méthode adaptée, et les méthodes indirectes, comme la méthode de tir, peuvent offrir des avantages considérables pour résoudre un tel problème, mais comportent également des inconvénients.

La méthode adaptée de programmation quadratique permet de commencer l'itération à partir d'une commande admissible. Elle est facile à appliquer et relativement robuste face à l'initialisation, mais elle fournit une trajectoire et une commande en boucle ouverte ( $u$  en fonction du temps), ce qui la rend moins adaptée à certains cas spécifiques, comme celui des systèmes d'équations non linéaires. La méthode du tir repose sur le principe du maximum, qui fournit une condition nécessaire et suffisante d'optimalité. Bien qu'elle assure une convergence rapide avec une bonne précision pour résoudre des problèmes de contrôle optimal, elle est fortement dépendante de l'initialisation. En effet, elle transforme le problème de contrôle optimal en la résolution d'un système d'équations non linéaires en utilisant la méthode de Newton. Ces deux approches visent à trouver une commande optimale et suboptimale, mais elles nécessitent de nombreux calculs, ce qui les rend invalidantes.

Une méthode hybride est également présentée dans cette thèse pour résoudre le problème de contrôle optimal en temps minimal, afin de pallier l'inconvénient majeur des méthodes indirectes, à savoir la sensibilité par rapport à l'itération initiale [3]. Pour cela, on considère un problème auxiliaire avec un temps terminal libre et on le résout par la méthode adaptée de programmation quadratique en minimisant la norme de l'état final du système dynamique, et ce, après l'avoir transformé en un problème bilinéaire-quadratique à temps terminal fixe [5]. La méthode adaptée présente une sensibilité réduite aux conditions initiales, la rendant idéale pour

initialiser la procédure finale. Ainsi, il est intéressant de bénéficier de l'excellente précision numérique fournie par la méthode de Newton, tout en réduisant considérablement le désavantage dû à la petitesse de son domaine de convergence, et ce, grâce au point de départ fourni par la méthode adaptée. On obtient ainsi une idée assez précise de la structure des commutations avec une approximation du temps minimal et de l'état terminal nul. Pour calculer le temps minimal du problème originel avec une grande précision, on met alors en œuvre une procédure finale indirecte, s'apparentant à la méthode de tir (shooting method).

Le contrôle optimal est une spécialité des mathématiques appliquées en pleine expansion, bénéficiant d'avancées méthodologiques qui améliorent efficacement son application dans différents domaines, tels que la technologie, l'économie, la biologie, la finance, etc. En particulier, le contrôle optimal en temps minimal suscite un intérêt croissant en raison de sa grande diversité d'applications. Ce domaine de recherche offre de nombreuses perspectives, qu'elles soient théoriques, numériques ou pratiques :

- Il est intéressant d'appliquer cette méthode à des problèmes de contrôle optimal en temps minimal, en traitant des systèmes non linéaires ou avec des contraintes générale ;
- Appliquer l'algorithme qu'on a élaboré pour traiter les systèmes non linéaires, avec une commande multivariable ou une fonctionnelle dépendant à la fois de l'état final et du temps terminal libre ;
- Appliquer la méthode hybride pour résoudre des problèmes concrets de contrôle optimal en temps minimal en combinant différentes techniques de contrôle dans un contexte réel. En particulier, dans le domaine de l'aviation, gérer la trajectoire de deux avions afin de prévenir tout risque de collision en vol. Les variables à contrôler correspondent aux paramètres que l'on peut ajuster pour guider les avions d'une manière optimale, au moyen de la vitesse et de la direction. L'objectif est de minimiser le temps nécessaire pour que les avions suivent des trajectoires qui respectent les règles de sécurité.

# Bibliographie

- [1] Alioua, I. : Algorithme de résolution d'un problème de contrôle optimal en temps minimal. Séminaire Hebdomadaire de l'Unité de Recherche LaMOS (Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes), Université de Béjaïa (2016).
- [2] Alioua, I., Bibi, M. O. : Méthode hybride pour le problème de contrôle optimal en temps minimal. Actes du 14<sup>ème</sup> Colloque International sur l'Optimisation et les Systèmes d'Information (COSI'17), Université de Bouira, 56-67 (2017).
- [3] Alioua, I., Bibi, M. O. : Calcul du temps minimal dans un problème de contrôle optimal par une méthode hybride. Actes de la Conférence Internationale sur les Mathématiques Financières, Outils et Applications (MFOA'2019), Université de Béjaïa, 265-274 (2019).
- [4] Alioua, I. : Méthode hybride de résolution d'un problème de contrôle optimal en temps minimal. Journée Mondiale des Mathématiques (Béjaïa IDM'2023), organisée par l'Unité de Recherche LaMOS, Université de Béjaïa (2023).
- [5] Alioua, I., Bibi, M. O. : Method for solving the norm in an optimal control problem, à paraître, Numerical Algebra, Control and Optimization (2025).
- [6] Aly G. M., Chan W. C. : Numerical Computation of Optimal Control Problems with Unknown Final Time. Journal of Mathematical Analysis and Applications **45**(2), 274-284 (1974).
- [7] Aschepkov, L. T., Dolgy, D. V., Kim, T. and Agarwal, R. P. : Optimal control. Cham, Switzerland : Springer International Publishing (2016).
- [8] Azi, M. : Optimisation des systèmes dynamiques et application en économie financière. Thèse de doctorat, Université de Béjaïa (2021).
- [9] Azi, M., Bibi, M. O. : Optimal Control Of A Dynamical System With Intermediate Phase Constraints And Applications In Cash Management. Numerical Algebra, Control and Optimization, **12**(2), 279-291 (2022).
- [10] Bellman, R. : Dynamic Programming. Princeton University Press, Princeton (1957).

## Bibliographie

---

- [11] Bibi, M. O. : Methods for solving linear-quadratic problems of optimal control. PhD thesis, Minsk University, 1985 (in russian).
- [12] Bibi, M. O. : Optimization of a Linear Dynamic System with Double Terminal Constraint on the Trajectories. *Optimization* **30**(4), 359-366 (1994).
- [13] Bibi, M. O. : Support Method for Solving a Linear-quadratic Problem with Polyhedral Constraints on Control. *Optimization* **37**(2), 139-147 (1996).
- [14] Bibi, M.O. : Cours de Post-Graduation sur le Contrôle Optimal. Université de Béjaïa (2010).
- [15] Bonnans, F., Rouchon, P. : Analyse et Commande de Systèmes Dynamiques. Edition de l'Ecole Polytechnique, Paris (2006).
- [16] Carvallo, F. D., Westerberg, A. W. and Morari, M. : MILP Formulation for Solving Minimum Time Optimal Control Problems. *International Journal of Control* **51**(4), 943-947 (1990).
- [17] Eaton, J. H. : An Iterative Solution to Time-optimal Control. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **5**(2), 329-344 (1962).
- [18] Evangelisti, E. : Controllability and Observability : Lectures given at a Summer School of the Centro Internazionale Matematico Estivo (CIME) held in Pontecchio (Bologna), Italy, July 1-9, 1968. Springer Science and Business Media (2011).
- [19] Fedorenko, R. P. : Approximate Solution of Optimal Control Problems. Nauka, Moscow (1978).
- [20] Fodden, E. J., Gilbert, E. G. : Computational Aspects of the Time-optimal Control Problem. In : Computing Methods in Optimization Problems. Academic Press, New York, 167-192 (1964).
- [21] Gabasov, R., Kirillova, F.M. : Maximum principle in optimal control theory. Nauka i Tekhnika, Minsk (1974).
- [22] Gabasov, R., Kirillova, F. M. : Constructive Methods Of Optimization. Part 2 : Control Problems. University Press, Minsk (1984).
- [23] Gabasov, R., Kirillova, F. M., Kostyukova, I. O, Raketsky, V. M. : Constructive Methods Of Optimization. Part 4 : Convex Problems. University Press, Minsk (1987).
- [24] Gabasov, R., Kirillova, F. M., Kostyukova, I. O., Pokatayev, A.V. : Constructive Methods Of Optimization. Part 5 : Nonlinear Problems. University Press, Minsk (1998).
- [25] Ghellab, F. : Principe du maximum de support dans un problème de controle optimal quadratique avec une entrée non linéaire. Thèse de doctorat, Université de Béjaïa (2020).

## Bibliographie

---

- [26] Ghellab, F., Bibi, M. O. : Optimality and suboptimality criteria in a quadratic problem of optimal control with a piecewise linear entry. *International Journal of Mathematics in Operational Research* **19**(1), 1-18 (2021).
- [27] Gnevko, S. V. : Numerical Method for Solving the Linear Time Optimal Control Problem. *International Journal of control* **44**(1), 251-258 (1986).
- [28] Kalman, R. E. : Mathematical description of linear dynamical systems. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series A : Control* **1**(2), 152-192 (1963).
- [29] Khimoum, N., Bibi, M. O. : Primal-dual Method for Solving a Linear-quadratic Multi-input Optimal Control Problem. *Optimization Letters* **14**(3), 653-669 (2020).
- [30] Khimoum, N. : Contrôle Optimal Multivariable et Applications à un Jeu Différentiel Linéaire-Quadratique. Thèse de doctorat, Université de Béjaïa (2019).
- [31] Kostyukova, O., Kostina, E. : Analysis of Properties of the Solutions to Parametric Time-Optimal Problems. *Computational Optimization and Applications* **26**, 285-326 (2003).
- [32] Laouar, A., Bibi, M. O. : An adaptive hybrid direction algorithm for convex box-QP problems with enhanced pre-solving, to appear, *International Journal of Mathematics in Operational Research*. DOI : 10.1504/IJMOR.2023.10062725
- [33] Laouar, A. : Sur la théorie des contraintes actives en programmation mathématique et applications algorithmiques. Thèse de doctorat, Université de Béjaïa (2025).
- [34] Lasalle, J. P. : The Time Optimal Control Problem. *Ann. Math. Studies.* **5**(45), 1-24 (1960).
- [35] Lee, E. B., Markus, L. : *Foundations of Optimal Control Theory*. John Wiley, New York (1967).
- [36] Liu, C. Y., Loxton, R., Teo, K. L. : A Computational Method for Solving Time-delay Optimal Control Problems with Free Terminal Time. *Systems and Control Letters* **72**, 53-60 (2014).
- [37] Lu, X., Wang, L., Yan, Q. : Computation of Time Optimal Control Problems Governed by Linear Ordinary Differential Equations. *Journal of Scientific Computing* **73**, 1-25 (2017).
- [38] Maurer, H., Oberle, H.J. : Second Order Sufficient Conditions for Optimal Control Problems with Free Final Time : The Riccati Approach. *SIAM Journal on Control and Optimization* **41**(2), 380-403 (2002).
- [39] Moiseev, N. N. : *Numerical Methods in Optimal Systems Theory*. Nauka, Moscow (1971).
- [40] Neustadt, L. W. : Synthesizing Time Optimal Control Systems. *J. Math. anal. and Appl.* **1**(4), 484-493 (1960).

## Bibliographie

---

- [41] Olsder, G. J. : Time-optimal Control of Multivariable Systems Near the Origin. *J. Optim. Theory and Appl.* **15**, 497-517 (1975).
- [42] Pshenichny, B. N. : Numerical Method for Time Optimal Linear Control Systems. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics* **8**(6), 1345-1351 (1968).
- [43] Poggiolini, L., Spadini, M. : Bang-bang Trajectories with a Double Switching Time in the Minimum Time Problem. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations* **22**(3), 688-709 (2016).
- [44] Pontryagin, L. S., Boltyansky, V. G., Gamkrelidze, R. V., Mishchenko, E. F. : *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Interscience, NewYork (1962).
- [45] Shevchenko, G. V. : Numerical method for solving a nonlinear time-optimal control problem with additive control. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 47, 1768-1778 (2007).
- [46] Stoer, J., Bulirsch, R. : *Introduction to Numerical Analysis*. Springer-Verlag, Berlin (1980).
- [47] Trélat, E. : *Contrôle optimal : Théorie et Applications*. Editions Vuibert, Paris (2005).
- [48] Yuan, J., Liu, C. Y., Zhang, X., Xie, J., Feng, E. M., Yin, H. and Xiu, Z. : Optimal Control of a Batch Fermentation Process with Nonlinear Time-delay and Free Terminal Time and Cost Sensitivity Constraint. *Journal of Process Control* **44**, 41-52 (2016).
- [49] Zaitri, M. A., Bibi, M. O. and Bentobache, M. : A hybrid direction algorithm for solving optimal control problems. In *Mathematical Analysis of Cogent Mathematics and Statistics* **6**(1), 1-12 (2019).
- [50] Zaitri, M. A., Bibi, M. O. and Torres, D. F. : Transport and optimal control of vaccination dynamics for COVID-19. *Mathematical Analysis of Infectious Diseases*. Academic Press, 27-39 (2022).
- [51] Zaitri, M. A. : *Minimisation d'un problème linéaire-quadratique de controle optimal avec des contraintes de phase terminales et une application à un modèle épidémiologique de type covid-19*. Thèse de doctorat, Université de Béjaïa (2023).
- [52] Zaslavski, A. J. : Agreeable Solutions of Discrete Time Optimal Control Problems. *Optimization Letters* **8**, 2173-2184 (2014).

## RÉSUMÉ

Dans cette thèse, on présente une méthode hybride pour résoudre le problème de contrôle optimal en temps minimal. Pour cela, on considère un problème auxiliaire à temps terminal libre qu'on transforme en temps terminal fixe. La méthode proposée combine la méthode directe de support et une procédure finale indirecte, s'apparentant à la méthode de tir.

Cette approche par le problème auxiliaire peut être considérée comme une méthode de contrôle optimal à deux phases, où on essaie à la fois de faire tendre la norme vers zéro tout en minimisant le temps.

**Mots clés:** Contrôle Optimal avec Temps Terminal Libre; Temps Minimal; Principe du Maximum; Méthode Directe de Support; Procédure Finale; Méthode de Tir.

## ABSTRACT

In this thesis, a hybrid method is presented to solve a minimum time optimal control problem. For this, we consider an auxiliary problem with free terminal time which is transformed into another one with a fixed terminal time. The proposed method combines the direct support method for optimal control problems with a fixed terminal time and an indirect finishing procedure, similar to the shooting method.

This approach by the auxiliary problem can be considered as a two-phase optimal control method, where we try to make the norm tending to zero while minimizing the time.

**Key words :** Optimal Control with Free Terminal Time; Minimum Time; Maximum Principle; Direct Support Method; Finishing Procedure; Shooting Method.

## AGZUL

Deg ugemmir ayi, nsumer-ed yiwet n tarrayt taregnayt i wakken ad'nefru yiwen wegnu n weswad akkay deg wakud adday. Ilmend n waya, ad'nmuqel yiwen wegnu amalel es wakud aneggar d ilelli, ara nbeddel  $\gamma$ er wakud aneggar ireşşan. Tarrayt i d-ittwasumren teddes tarrayt tusridt n usalel aked yiwen umecwar usali arusrud, icuban tarrayt n welday.

Tayazt agi  $\gamma$ ur agnu amalel nezmer ad'tt-nmuqel amzun d-tarrayt n weswad akkay mm sin imecwaren, anda n $\epsilon$ erred ad'nessiz alugen  $\gamma$ er wayru mi'ara nessemzay akud.

**Awalen n tsura:** Aswad akkay es wakud aneggar d ilelli; Akud adday; Azwir afellay; Tarrayt tusridt n usalel; Amecwar n usali; Tarrayt n welday.

## ملخص

في هذه الأطروحة، نقدم طريقة هجينة لحل مشكلة التحكم الأمثل في أقل وقت ممكن. لذلك، نعتبر مشكلة مساعدة بزمن نهائي حر ونحولها إلى زمن نهائي ثابت. الطريقة المقترحة تجمع بين طريقة الدعم المباشرة وإجراء نهائي غير مباشر، يشبه طريقة الرماية.

يمكن اعتبار هذا النهج من خلال المشكلة المساعدة كطريقة تحكم أمثل ذات مرحلتين، حيث نحاول تحقيق تقارب القيمة نحو الصفر وفي نفس الوقت تقليل الزمن.

**المصطلحات الرئيسية:** التحكم الأمثل مع الوقت النهائي الحر؛ الوقت الأدنى؛ مبدأ الحد الأقصى؛ طريقة الدعم المباشرة؛ الإجراء النهائي؛ طريقة الرماية.