

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDERRAHMANE MIRA DE BÉJAIA
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES
DÉPARTEMENT DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE
UNITÉ DE RECHERCHE LAMOS

THÈSE

Présentée par

AIT YALA Nabil

Pour l'obtention du grade de

DOCTEUR EN SCIENCES

Filière : Mathématiques Appliquées

Spécialité : Modélisation Mathématique et Techniques de Décision

Thème

Approximation des chaînes de Markov via la théorie des perturbations : Application aux systèmes et réseaux de files d'attente

Devant le jury composé de :

Mme	TAKHEDMIT Baya	MCA	Université de Bejaia	Présidente
Mr	ISSAADI Badredine	MCA	École ESTIN, Bejaia	Rapporteur
Mr	ABBAS Karim	Professeur	Université de Bejaia	Co-Rapporteur
Mr	ADJABI Yassine	Professeur	Université de Boumerdès	Examineur
Mr	DEBBOUCHE Amar	Professeur	Université de Guelma	Examineur

Année Universitaire : 2025/2026

DES JACQUES

À la mémoire de ma grand-mère

À ma mère

À ma sœur Esma

À mon épouse

Remerciements

Les remerciements ont toujours un parfum de convenu qui peut paraître parfois éculé et pourtant ils sont oh ! combien importants. En effet, un travail, quel qu'il soit, n'est jamais individuel, de nombreuses personnes m'ont aidé et ont contribué, chacune à sa manière, à la réalisation de ce travail :

Je tiens, avant tout, à exprimer toute ma gratitude envers Monsieur Badredine ISSAADI, Maître de Conférences à l'École Supérieure en Sciences et Technologies de l'Informatique et du Numérique, sans qui ce travail n'aurait, sans doute, pas pu voir le jour. Je le remercie pour son encadrement exceptionnel, sa disponibilité, ses qualités tant scientifiques qu'humaines et, surtout, sa patience. Tout simplement : MERCI Badre !

Ensuite, mes pensées vont à Monsieur Karim ABBAS, Professeur à l'Université de Béjaïa, pour m'avoir honoré d'être le co-encadreur de cette thèse, sa gentillesse et sa disponibilité. Qu'il trouve ici l'expression de mes vifs remerciements.

Je suis très reconnaissant à Madame Baya TAKHEDMIT, Maître de Conférences à l'université de Béjaïa, à Monsieur Yassine ADJABI, Professeur à l'université de Boumerdès, et à Monsieur Amar DEBBOUCHE, Professeur à l'université de Guelma, pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'être membres du jury de soutenance de cette thèse et pour avoir pris le temps de lire et de juger ce travail.

Il est important pour moi de remercier mes frères et mes sœurs, surtout Idir, qui ne ménagent aucun effort pour m'aider, non seulement dans mes études, dans la vie en général. Plus qu'important, je ne sais pas pourquoi ! je dois remercier toutes mes nièces (ici je dois citer les prénoms) : Alice, Nilia, Ryma, Malak et Maria, sans oublier mon neveu Mohamed.

Enfin, et sans citer les noms, je remercie tous ceux qui m'ont aidé, de près ou de loin, chacun à sa façon, dans la réalisation de ce travail. Qu'ils soient amis, collègues ou membres de ma famille.

Table des matières

Travaux réalisés	VI
Liste des tableaux	VIII
Table des figures	IX
Introduction générale	X
1 Préliminaires	1
Introduction	1
1.1 Chaines de Markov à temps continu	1
1.1.1 Matrice des probabilités de transition	2
1.1.2 Générateur infinitésimal	3
1.1.3 Chaîne de Markov induite	4
1.2 Processus quasi de naissance et de mort	4
1.2.1 Description générale	5
1.2.2 Générateur infinitésimal	5
1.2.3 Diagramme des taux de transition	6
1.2.4 Condition de stabilité	6
1.2.5 Méthode de la matrice géométrique	7
Conclusion	8
2 Systèmes de files d'attente	9
Introduction	9
2.1 Système de files d'attente classique	10
2.1.1 Description	10
2.1.2 Analyse mathématique	12
2.1.3 Notation de Kendall	12
2.1.4 Mesures de performance	14
2.1.5 Stabilité	15
2.2 Système de files d'attente avec rappels	15
2.2.1 Quelques références bibliographiques	16
2.2.2 Description générale	17
2.2.3 Notation de Kendall	18
2.3 Système de files d'attente $M/M/c$ avec rappels	18
2.3.1 Description du modèle	18
2.3.2 Taux de transition	19
2.3.3 Diagramme des taux de transition	20
2.3.4 Probabilités de transition de la chaîne induite	21

2.3.5	Condition d'ergodicité (stabilité du système)	22
2.3.6	Distribution stationnaire	22
2.3.7	Le modèle $M/M/2$ avec rappels	23
2.4	Modèle de Neuts et Rao	24
2.4.1	Description du modèle	25
2.4.2	Taux de transition	25
2.4.3	Diagramme des taux de transition	26
2.4.4	Probabilités de transition de la chaîne induite	27
2.4.5	Condition de stabilité	28
2.4.6	La distribution stationnaire	28
2.4.7	Calcul de la distribution stationnaire II	29
2.4.8	Algorithme de la distribution stationnaire II	31
	Conclusion	33
3	Bornes de perturbation du modèle $M/M/c$ avec rappels	34
	Introduction	34
3.1	Description du modèle et position du problème	34
3.2	Éléments de la méthode de stabilité forte	37
3.2.1	Notations et préliminaires	37
3.2.2	Stabilité forte	38
3.2.3	Condition drift	39
3.2.4	Bornes de stabilité forte	42
3.3	Analyse du modèle	42
3.3.1	Stabilité forte de la chaîne de Markov induite X	43
3.3.2	Bornes de perturbation	49
3.4	Calcul des bornes de stabilité forte	56
3.4.1	Calcul de SSB ₁	56
3.4.2	Calcul de SSB ₂	57
3.4.3	Calcul de h ₁	57
3.4.4	Calcul de h ₂	58
3.5	Algorithme de stabilité forte	58
3.6	Exemple d'application	59
3.6.1	Application du Théorème 3.4	60
3.6.2	Application du Corollaire 3.1	63
3.6.3	Interprétation des résultats	66
	Conclusion	66
	Conclusion générale et perspectives	67
	Bibliographie	69

Travaux réalisés

Publications

- AIT YALA, N., ISSAADI, B. and ABBAS, K. (2025) "Strong perturbation bounds for the stationary distribution of the main multi-server retrial queue model", *International Journal of Mathematics in Operational Research*, Vol. 31, No. 1, pp.1–40.

Manifestations scientifiques

Nationales

- **"Approximation for the stationary distributions of Markov chains via the strong stability approach"**, National Seminar on Mathematics, Mathematics and Society (NSMMS'2023), Octobre 25–26, 2023, M'sila University and Ecole Normale Supérieure de Bousaada, Algeria

Internationales

1. **"Perturbation bounds for the stationary distributions of Markov chains with application to queueing model"**, The First International Conference on Mathematical Sciences and Applications (ICMSA'2023), May 2–3, 2023, Guelma, Algeria
2. **"Approximation of the stationary distributions in queueing model"**, International Biomathematical Modeling Days (IBMD-2023), June 25–27, 2023, Biomathematics Laboratory, Djillali Liabes University, Sidi Bel Abbes, Algeria
3. **"Drift condition and strong stability with application to queueing model"**, Statistiques et Analyse Avancées, Domaines d'Interactions et Applications (SAADIA-1'2023), 20–22 Novembre 2023, Laboratoire de Mathématiques Appliquées, Université de Bejaia, Bejaia, Algérie

-
4. **"Perturbation bounds for the stationary distributions of Markov chains with application to queueing system"**, First International Conference on Nonlinear Mathematical Analysis and Its Applications (IC-NMAA'24), May 14–15, 2024, Bordj Bou Arréridj University, Algeria

Liste des tableaux

3.1	Tableau comparatif de \mathbf{SSB}_1 avec $\ \tilde{\Pi} - \Pi\ _v$	61
3.2	Tableau comparatif de \mathbf{SSB}_2 avec $\ \tilde{\Pi} - \Pi\ _v$	62
3.3	Les valeurs de \mathbf{h}_1 en fonction de N	65
3.4	Les valeurs de \mathbf{h}_2 en fonction de N	65

Table des figures

1.1	Diagramme des taux de transition d'un QBDP selon ses niveaux	6
2.1	Modèle d'un système de files d'attente classique	10
2.2	Structure générale d'un système de files d'attente avec rappels	17
2.3	Diagramme des taux de transition du modèle $M/M/3$ avec rappels	20
2.4	Diagramme des taux de transition du modèle de Neuts et Rao	27
3.1	Les bornes \mathbf{SSB}_1 et \mathbf{SSB}_2 en fonction du niveau de troncature N	62

Introduction générale

La modélisation est un outil de recherche scientifique qui vise à représenter un phénomène naturel complexe d'une façon claire et simple pour pouvoir prévoir son comportement dans le futur. En rendant le réel plus clair et plus simple, le modèle donne la possibilité de faire des prévisions à l'aide de méthodes mathématiques ou algorithmiques. On parle de modélisation stochastique, ou de modèles stochastiques, quand la modélisation fait intégrer des facteurs aléatoires. En particulier, une classe importante de modèles stochastiques découle de la théorie des files d'attente qui est développée, à l'origine, pour fournir aux décideurs des outils mathématiques qui rendent l'organisation d'un service à grande échelle plus facile, qu'il s'agisse de clients ou de phénomènes qui conduisent à la formation des files d'attente.

Les files d'attente ne sont pas une chose inconnue pour les humains. En effet, nous sommes tous coincés, un jour ou un autre, dans un embouteillage ou avons attendu devant un guichet d'un supermarché ou, encore, avons répété un appel téléphonique jusqu'à ce que la connexion souhaitée soit établie. Ce qui fait que la plupart des gens sont habitués quotidiennement à faire la queue. Mais l'étude de ces files d'attente d'un point de vue mathématique est une chose méconnue de la plupart de ces gens, et, en fait, cette étude constitue en elle-même une branche des mathématiques qu'on appelle « théorie des files d'attente ».

La première contribution scientifique à la théorie des files d'attente est, sans doute, l'article de JOANNSEN (1907) "Waiting time and number of calls" publié en 1910 dans "Post Office Electrical Engineers Journal". Cependant, les méthodes utilisées dans cet article étaient dépourvues de rigueur mathématique. Il est couramment admis aujourd'hui que le fondateur de la théorie des files d'attente est le mathématicien danois Agner Krarup ERLANG (1878-1929). Alors qu'il travaillait pour la compagnie de téléphone de Copenhague, il a été confronté au problème classique consistant à déterminer le nombre de circuits nécessaires pour fournir un service téléphonique acceptable. Il a mis au point la méthode mathématique permettant de déterminer le nombre d'opérateurs téléphoniques nécessaires pour traiter un volume d'appels donné. Il est le fondateur de la théorie du trafic téléphonique et, tout au long de sa carrière,

il a publié, à partir de 1909, des articles qui sont devenus les fondements de la théorie des files d'attente. Il a également développé la distribution de probabilité d'Erlang, qui joue un rôle important dans diverses applications de gestion des files d'attente.

Depuis les travaux de Agner Krarup ERLANG jusqu'à aujourd'hui, la théorie des files d'attente n'a cessé de prendre de l'importance dans le domaine de la recherche opérationnelle et de posséder de nombreuses applications. Elle mesure le flux de demandes entrant et sortant dans un système de files d'attente, permettant ainsi de prendre des décisions sur le nombre minimal de ressources nécessaires. Elle est utilisée dans les domaines du commerce, de l'ingénierie, de la fonction publique, de la circulation, de la santé, de la finance, de l'armée, etc. De nombreuses applications dans tous ces domaines ont été mises en œuvre et publiées depuis ERLANG.

Toutefois, la théorie des files d'attente "classique", telle qu'elle est léguée par ERLANG, stipule que lorsque un client arrive dans un système de files d'attente et trouve l'espace de service déjà occupé, soit quitte le système sans être servi, comme dans le modèle d'Erlang à demandes refusées, ou prend place dans la file d'attente et attend son tour pour être servi. Alors qu'en réalité, cette approche ne reflète pas fidèlement les phénomènes réels qu'on veut étudier. En général, un client qui choisit de quitter le système sans être servi ne le fait pas définitivement, il revient dans le système après une période aléatoire et tente à nouveau d'obtenir le service souhaité. Par exemple, un client dans un magasin qui constate que la file d'attente est trop longue, peut décider de faire autre chose et de revenir plus tard dans l'espoir de trouver la file moins longue. Un autre exemple consiste à ce qu'un abonné téléphonique recevant une tonalité occupée répète généralement son appel jusqu'à ce que la connexion souhaitée soit établie. Par conséquent, le flux d'appels circulant sur un réseau téléphonique se compose de deux parties : le flux d'appels primaires, qui reflète les souhaits réels des abonnés, et le flux d'appels répétés, qui résulte de l'échec des tentatives précédentes. Donc, les modèles standards des systèmes téléphoniques, à savoir les systèmes de files d'attente avec pertes définitives de clients, ne prennent pas en compte cette structure du flux réel d'appels et ne peuvent, donc, pas être appliqués à la résolution de nombreux problèmes pratiques importants.

En prenant en considération ce phénomène de répétition de demandes de service, les chercheurs ont introduit une nouvelle classe de systèmes de files d'attente qui reflète mieux la réalité, à savoir « **les systèmes de files d'attente avec rappels** ». Cette nouvelle classe est caractérisée par le fait qu'un client qui arrive dans le système alors que tous les serveurs qui lui sont accessibles sont occupés quitte le système, mais, après une certaine durée de temps aléatoire, peut renouveler sa demande de service. Durant l'intervalle entre deux tentatives successives, appelées « **rappels** », on dit que le client « **est en orbite** ».

Cette caractéristique, à savoir que le client est autorisé à quitter le système et à renouveler sa demande de service après une durée de temps aléatoire, joue un rôle important dans les réseaux téléphoniques, les systèmes informatiques et les réseaux de télécommunication. Parmi les autres applications, on peut citer les avions en attente d'atterrissage, les clients qui quittent une longue file d'attente en espérant revenir plus tard, lorsque la file sera plus courte, etc. Ce qui fait que le champ d'applications des systèmes de files d'attente avec rappels est vaste.

Les premières tentatives rigoureuses sur les systèmes de files d'attente avec rappels remontent aux travaux de KOSTEN (1947) [78], WILKINSON (1956) [129] et COHEN (1957) [42] qui ont mis en évidence les limites de la théorie classique des files d'attente dans un système téléphonique où les clients recomposent le numéro plusieurs fois jusqu'à ce qu'ils obtiennent la communication. Ils ont montré que les systèmes de files d'attente avec rappels sont des modèles mathématiques adaptés pour modéliser le comportement des abonnés dans les réseaux téléphoniques. Cependant, l'influence de ce phénomène de réptition des demandes de service a été longtemps négligée dans les décennies qui ont suivies, ce n'est que vers les années 1970 et 1980 que cette catégorie de modèles a connu un essor fulgurant avec l'avènement de nouvelles technologies, notamment dans les réseaux de télécommunication : réseaux ATM (Asynchronous Transfer Mode). Depuis les travaux pionniers publiés dans les années 1940 et 1950, beaucoup d'articles scientifiques ont été publiés dans des revues de mathématiques et de statistiques pour mettre en évidence les applications de la théorie des files d'attente avec rappels. Plusieurs ouvrages, comme KULKARNI (1995) [80], RIORDAN (1962) [115], SYSKI (1986) [124] et WOLFF (1989) [130], incluent des sections ou des chapitres consacrés aux systèmes de files d'attente avec rappel. Les progrès importants dans ce domaine sont résumés dans les articles de synthèse de YANG and TEMPLETON (1987) [131] et FALIN (1990) [50], parus dans la revue *Queueing Systems*. Une description mathématique complète des systèmes de files d'attente avec rappels peut être trouvée dans la monographie de FALIN and TEMPLETON (1997) [51] et dans le livre de ARTALEJO and GÓMEZ-CORRAL (2008) [21]. Une classification bibliographique est donnée dans les articles de ARTALEJO (1999a, 1999b, 2010) [16, 17, 19] et dans l'article de SHEKHAR, RAINA and KUMAR (2016) [120].

Parmi les modèles des systèmes de files d'attente avec rappels les plus étudiés (voir [51] et [21]), et auquel nous avons eu une attention particulière pour notre travail, est « **le modèle $M/M/c$ avec rappels** ». Ce modèle stipule que le système de files d'attente avec rappels est à plusieurs serveurs, dans lequel les clients primaires arrivent selon un processus de Poisson de taux λ . L'espace de service est composé de c serveurs identiques et les durées de service des clients sont des variables aléatoires indépendants qui suivent une loi de probabilité exponentielle de paramètre ν . Un client « **primaire** » qui trouve tous les serveurs occupés à son arrivée est contraint de quitter la zone de service pour devenir un client « **secondaire** » en renouvelant sa demande de service après une durée de temps aléatoire qui suit une loi de probabilité exponentielle de paramètre μ . Comme nous l'avons mentionné précédemment, entre deux tentatives d'avoir le service, on dit que le client « **est en orbite** ». De plus, nous supposons que les durées qui séparent deux arrivées successives, les durées de service et les durées qui séparent deux rappels successifs sont mutuellement indépendantes.

L'un des outils d'analyse les plus performants des systèmes dynamiques régis par le hasard, on trouve les chaînes de Markov. En effet, les chaînes de Markov, que ce soit à temps discret ou à temps continu, facilitent beaucoup l'étude et l'analyse des performances de ces systèmes dans beaucoup de domaines d'application. Elles sont, particulièrement, bien adaptées pour l'analyse des systèmes de files d'attente, que ce soit classiques ou avec rappels, et le système de files d'attente $M/M/c$ avec rappels ne fait pas exception. En effet, il a été démontré (voir [51]) que sous les conditions décrites ci-dessus, l'état de ce système peut être représenté par une chaîne de Markov

dont l'espace d'état est $\mathcal{S} = \{(i, j), \quad 0 \leq i \leq c \text{ et } j \in \mathbb{N}\}$, où i représente le nombre de serveurs occupés et j le nombre de clients dans l'orbite.

Parmi les problèmes qui se posent pour les concepteurs des modèles mathématiques, en particulier les modèles stochastiques, est que même si le modèle conçu est moins complexe que le réel, il en demeure pas sans complexité. Pour résoudre ce problème, les chercheurs ont, souvent, recours à des méthodes d'approximation qui consistent à trouver un modèle moins complexe pour pouvoir l'exploiter analytiquement, et assez proche du modèle initial pour pouvoir utiliser ses caractéristiques. Lorsque cette approximation est possible, il est aussi essentiel de pouvoir évaluer l'erreur commise sur les caractéristiques du modèle due à l'approximation.

La complexité du modèle $M/M/c$ avec rappels réside dans la difficulté de déterminer la distribution stationnaire de la chaîne de Markov qui lui est associée, et de laquelle découle ses caractéristiques de performance. Les causes principales de cette difficulté sont dues à l'hétérogénéité spatiale de la chaîne et son espace d'état infini, conséquence directe du mécanisme de rappels. En général, ces rappels suivent la politique classique des tentatives répétées où chaque client devient une source de requêtes répétées de service, indépendamment des autres clients qui se trouvent en orbite, la durée qui sépare deux rappels successifs suit une loi exponentielle et le taux global de rappels dépend du nombre total de clients en orbite. De ce fait, il n'existe que peu de résultats exacts concernant les caractéristiques de performance de ces modèles, à l'exception de cas particuliers (voir [59] et [108]), et de nombreuses recherches ont été menées ayant pour objectif de concevoir des méthodes algorithmiques efficaces (voir [21] et [18]). Pour remédier à cela, les chercheurs ont opté pour des méthodes qui donnent des solutions approximatives aux problèmes posés par ces modèles. Ces méthodes peuvent être classées en trois grandes catégories : « les approximations », « les modèles tronqués finis » et « les modèles tronqués généralisés ». Dans la première catégorie, nous incluons les études où le modèle initial, difficile à étudier, est remplacé par un modèle simplifié. Souvent, l'approximation n'est valable que dans des domaines précis ou dans des cas particuliers extrêmes (trafic important, faible intensité de rappels, etc.). Les modèles tronqués finis (voir [122] et [129]) consistent à remplacer l'espace d'état infini initial \mathcal{S} par un autre espace d'état fini tronqué. Une première possibilité simple est obtenue en imposant une limite fictive à la capacité de l'orbite (voir [129]). Ensuite, les chercheurs ont proposé des méthodes de troncature plus sophistiquées qui reposent sur l'exclusion des états dont les probabilités stationnaires sont négligeables (voir [122]). L'inconvénient de cette catégorie de méthodes est que lorsque les niveaux de troncature sont très élevés, les calculs deviennent trop compliqués et exigent beaucoup d'efforts. Dans la troisième catégorie, les modèles, dits tronqués généralisés (voir [47], [51], [105] et [22]), sont plus efficaces et offrent de meilleures précisions. L'idée principale d'une troncature généralisée est d'approximer le modèle initial, dont l'espace d'état \mathcal{S} est infini, sur lequel est difficile de manipuler les calculs par un autre modèle calculable dont l'espace d'état est le même que celui du modèle initial.

Non seulement le modèle $M/M/c$ avec rappels, mais beaucoup de modèles de systèmes de files d'attente, que ce soit classiques ou avec rappels, n'ont pas de solutions exactes simples ou des résultats analytiques directement exploitables. Comme pour le modèle $M/M/c$ avec rappels, sauf dans des cas particuliers où on peut obtenir les solutions exactes. Mais même dans ces cas, la complexité de ces solutions obtenues les

rend difficilement exploitables dans la pratique. C'est pour cette raison que lorsque on modélise un système réel, on est souvent contraint de remplacer les principaux éléments stochastique, supposés complexes, qui composent le modèle initial par d'autres éléments plus simples qui leurs sont proches d'une certaine façon. Le second modèle ainsi obtenu peut être considéré comme "une idéalisation" du modèle initial. Ainsi est apparu le problème de « **stabilité** ».

Les premiers résultats concernant la stabilité des modèles de files d'attente ont été obtenus par ROSSBERG (1965) [116], FRANKEN (1970) [53] et GNEDENKO (1970) [55]. Ensuite, les travaux de KENNEDY (1972) [73], BOROVKOV (1979) [31] (méthode de renouvellement), STOYAN (1972) [123] (méthode de convergence faible), KALASHNIKOV and TSITSIACHVILI (1972) [69] (méthode des fonctions tests), ZOLOTAREV (1975) [133] (méthode métrique), KLEBANOV (1980) [77], AÏSSANI and KARTASHOV (1983) [7] (méthode de stabilité forte), RACHEV (1989) [113], IPSEN and MEYER (1994) [62] (méthode de stabilité absolue). Tous ces travaux ont abordé le problème de stabilité sous différentes positions et selon diverses approches. Ainsi, un même modèle peut être stable par rapport une définition, mais non par rapport à une autre. Pour le reste, la majorité de ces méthodes constituent actuellement le centre de recherches scientifiques dans divers domaines : la finance, l'économie, la théorie de la décision, la recherche opérationnelle etc. Et en particulier, elles jouent un rôle important dans la théorie des files d'attente où elles trouvent des applications dans des différents secteurs tels la télécommunication, les réseaux informatiques, les systèmes de production, etc.

La méthode de « **stabilité forte** », qu'on nomme aussi par « **méthode des opérateurs de la théorie de stabilité** », a été introduite dans le début des années 1980 par AÏSSANI et KARTASHOV (voir [7]). Cette méthode nous offre la possibilité d'analyser qualitativement et quantitativement certains modèles stochastiques complexes. Elle sert aussi à déterminer les conditions de stabilité et d'ergodicité des chaînes de Markov induites (voir [5] et [6]). La méthode de stabilité forte se différencie des autres méthodes par le fait qu'elle exige, pour son application, que la perturbation du noyau de transition du modèle initial soit petite par rapport à une certaine norme donnée. Cette condition, beaucoup plus stricte par rapport aux conditions imposées par d'autres méthodes, fait que l'approche de stabilité forte donne de meilleures approximations des distributions stationnaires des modèles initiaux. En plus, en appliquant cette méthode, on peut obtenir les bornes de l'erreur due à l'approximation avec un calcul exact des constantes. Les principaux résultat de cette méthode ont été publiés dans la monographie de KARTASHOV (1996) [71].

Beaucoup de chercheurs ont utilisé la méthode de stabilité forte sur des différents modèles de files d'attente, et, à travers leurs travaux, ont mis en évidence l'efficacité de cette méthode. Nous pouvons citer : AÏSSANI and KARTASHOV (1984) [8], AÏSSANI (1990) [5], BOUALLOUCHE-MEDJKOUNE and AÏSSANI (2006,2006) [33, 34] et BENAOUICHA and AÏSSANI (2004) [28] (les modèles les plus classique de la théorie des files d'attente). BERDJOU DJ and AÏSSANI (2003) [30] (le modèle $M/G/1/1$ avec rappel). RAHMOUNE and AÏSSANI (2008) [114] (les modèles de files d'attente avec vacances). BOUALLOUCHE-MEDJKOUNE and AÏSSANI (2008) [35] et HAMADOUCHE (2006) [58] (les modèles de files d'attente avec priorité). BOUKIR, AÏSSANI and BOUALLOUCHE-MEDJKOUNE (2009) [36] (les modèles de files d'attente avec arrivées par groupes). LEKADIR and AÏSSANI (2007) [85] (les réseaux de files d'attente). RABTA

and AÏSSANI (2004,2005) [110, 111] (les modèles stochastiques de gestion des stocks). BENOURET and AÏSSANI (2010) [29] (les modèles de risques). MOUHOUBI and AÏSSANI (2005) [97] (pour l'estimation de la vitesse de convergence et de la stabilité dans le cas apériodique). RABTA and AÏSSANI (2008) [112] (afin d'obtenir des bornes de perturbation des chaînes de Markov discrètes à espace d'états fini ou dénombrable). BARECHE and AÏSSANI (2008,2011) [26, 27] (les modèles de files d'attente avec une loi générale). ABBAS and AÏSSANI (2010) [2] (les modèles de files d'attente à serveur non fiable). ISSAADI, ABBAS and AÏSSANI (2017) [66] (les modèles de files d'attente $GI/M/s$).

Cependant, tirer profit de la méthode de stabilité forte reste, pratiquement, moins évident, surtout lorsque les modèles stochastiques sont très complexes. En effet, il ne s'agit pas seulement d'identifier le paramètre stochastique à perturber (tel que la structure du modèle, le taux de service, le taux de rappels, etc.), mais les difficultés principales résident dans l'écriture des noyaux de transition et, surtout, la sélection d'une norme appropriée.

Parmi les modèles d'approximation du modèle $M/M/c$ avec rappels obtenu en utilisant la méthode de troncature généralisée, on trouve « **le modèle de Neuts et Rao** ». Ce modèle d'approximation a été proposé par NEUTS and RAO (1990) [105], et son idée est la suivante : limiter le nombre de clients en orbite, autorisés à renouveler leurs demandes de service, à un nombre approprié N . Ainsi, NEUTS et RAO ont obtenu un nouveau modèle qui ne diffère du modèle initial que dans le taux global de rappels. En effet, dans le nouveau modèle, à partir de N clients dans l'orbite, le taux global de rappels devient constant et ne dépend plus du nombre de clients qui se trouvent dans l'orbite. En faisant ainsi, NEUTS et RAO ont obtenu un modèle qui peut être décrit au moyen d'un processus quasi de naissance et de mort (Quasi Birth and Death Process "QBDP"), et L'avantage des QBDP réside dans le fait que les conditions de leurs ergodicité sont connues et les méthodes de calcul de leurs distributions stationnaires sont largement étudiées dans la littérature (voir [104]).

La difficulté qui se pose lorsque on utilise le modèle de Neuts et Rao comme une approximation du modèle $M/M/c$ avec rappels est dans le choix du seuil de troncature N . En effet, il ne faut pas que N soit très petit, pour que le modèle d'approximation soit suffisamment proche du modèle initial, et il ne faut pas qu'il soit très grand, pour que le modèle d'approximation ne soit pas complexe et tomber dans les mêmes difficultés de calcul qu'on a voulu éviter en faisant l'approximation. Intuitivement, le choix du seuil de troncature N peut se faire d'une façon à ce que les probabilités de transition stationnaires dues à la troncature soient suffisamment négligeables.

Dans ce travail, et comme il n'existe pas de méthodes analytiques pour le choix de N (voir [12], [22] et [105]), nous proposons une approche basée sur la méthode de stabilité forte. Nous commençons par une valeur initiale raisonnable de N , ensuite nous augmentons cette valeur progressivement jusqu'à ce que $\|\tilde{\Pi} - \Pi\|_v$ soit inférieur à une valeur positive déterminée d'avance, où $\tilde{\Pi}$ est la distribution stationnaire du modèle $M/M/c$ avec rappels, Π la distribution stationnaire du modèle de Neuts et Rao et $\|\cdot\|_v$ est une norme matricielle que nous préciserons dans Chapitre 3. Dans un premier temps, nous allons démontré l'applicabilité de la méthode de stabilité forte sur le modèle de files d'attente $M/M/c$ avec rappels, et cela en précisant les conditions

sous lesquelles la chaîne de Markov induite du modèle de Neuts et Rao est fortement stable. Ensuite, sous ces conditions et grâce à la méthode de stabilité forte, nous allons déterminer, avec un calcul exact des constantes, les bornes de l'erreur $\|\tilde{\Pi} - \Pi\|_v$ causée par l'approximation. Ces bornes qui dépendront, bien sûr, du niveau de troncature N vont nous préciser le degré d'approche qu'il y a entre la distribution stationnaire du modèle de $M/M/c$ avec rappels avec celle du modèle de Neuts et Rao. Chose qui va nous permettre, en faisant varier le niveau de troncature N , de déterminer le seuil de troncature dans le modèle de Neuts et Rao selon la précision de l'approximation voulue et qui doit être fixée d'avance.

Organisation de la thèse

Le travail que nous avons pu réaliser nous a permis de concevoir cette thèse en la composant d'une introduction générale et de trois chapitres :

- Dans le premier chapitre, nous avons donné un bref aperçu sur les résultats nécessaires pour notre travail, et qui concernent les chaînes de Markov à temps continu et, en particulier, les processus quasi de naissance et de mort.
- Le deuxième chapitre commence par une synthèse générale des résultats connus sur les systèmes de files d'attente classiques et les systèmes de files d'attente avec rappels. Ensuite, nous avons porté une attention particulière au modèle $M/M/c$ avec rappels, où nous avons donné sa description générale et sa description mathématique en mettant l'accent sur les difficultés rencontrées lors de l'analyse mathématique de ce type de modèles. Après, nous avons mis en évidence les avantages du modèle de Neuts et Rao qui facilitent l'étude et l'analyse du modèle $M/M/c$ avec rappels. Pour terminer ce chapitre avec la conception d'un algorithme qui permet de calculer la distribution stationnaire du modèle de Neuts et Rao.
- Le troisième chapitre comporte l'essentiel des résultats que nous avons obtenu dans notre travail. Il s'agit de l'application de la méthode de stabilité forte sur le modèle $M/M/c$ avec rappels. En effet, après avoir donné les conditions suffisantes pour lesquelles ça sera possible d'approcher la distribution stationnaire du modèle $M/M/c$ avec rappels avec celle du modèle de Neuts et Rao, nous avons déterminé les bornes de stabilité forte, avec un calcul exact des constantes, qui nous permettent d'évaluer l'erreur commise lors de l'approximation et qui peuvent nous permettre de déterminer le seuil de troncature dans le modèle de Neuts et Rao.

À la fin, nous avons terminé cette thèse par une conclusion générale dans laquelle nous avons mis l'accent sur les perspectives ouvertes et les axes de recherche suggérés par les résultats obtenus.

Chapitre 1

Préliminaires

Introduction

Ce chapitre constitue une brève introduction à la théorie des processus de Markov en temps continu, ainsi que les processus quasi de naissance et de mort qui constituent une classe particulière de ces processus, et cela afin de classer les modèles stochastiques présentés dans cette thèse. Les résultats classiques bien connus sur les chaînes de Markov en général, sont présentés dans beaucoup d'ouvrages dédiés à la théorie des probabilités et celle des files d'attente. Pour ceux qui sont présentés dans ce chapitre, ils sont tirés essentiellement des livres suivants : LATOUCHE and RAMASWAMI (1999) [82], ASMUSSEN (2000,2003) [23, 24], BRÉMAUD (2009,2020) [37, 38], NEUTS (1981) [104], NORRIS (1997) [106] et SENETA (1981) [119].

1.1 Chaines de Markov à temps continu

Dans cette section, nous donnons la définition et la structure de base d'une chaîne de Markov à temps continu sur un espace d'états dénombrable. Soit \mathcal{E} un ensemble dénombrable non vide, appelé « **espace d'état** », et soit $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ un processus stochastique sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans \mathcal{E} .

X est une chaîne de Markov à temps continu si, pour tout $t, s, s_1, s_2, \dots, s_n$ dans \mathbb{R}_+ ($n \in \mathbb{N}^*$) tel que $t \geq s \geq s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n$ et pour tout $j, i, i_1, i_2, \dots, i_n$ dans \mathcal{E} , on a :

$$\mathbf{P}(X(t) = j | X(s) = i, X(s_1) = i_1, \dots, X(s_n) = i_n) = \mathbf{P}(X(t) = j | X(s) = i) \quad (1.1)$$

L'égalité (1.1) est interprétée de la façon suivante : l'état j du processus à l'instant t ne dépend pas du déroulement passé i_1, i_2, \dots, i_n , mais seulement de l'état présent i . Autrement dit, le futur est le même quel que soit le passé si on se trouve dans le même état présent. Cette propriété s'appelle « **propriété de Markov** ».

Introduisons la notation

$$p_{ij}(t, s) = \mathbf{P}(X(t) = j | X(s) = i) \quad (1.2)$$

On appelle la probabilité $p_{ij}(t, s)$, « la probabilité de transition de l'état i à l'état j ». Lorsque cette probabilité ne dépend de t et s que par la différence $t - s$, on dit que X est une chaîne de Markov **homogène**. Dans ce cas, l'égalité donnée dans (1.2) peut s'écrire de la manière suivante :

$$p_{ij}(t, s) = p_{ij}(t - s) = \mathbf{P}(X(t) = j | X(s) = i)$$

Posons pour t, s dans \mathbb{R}_+ et i, j dans \mathcal{E} :

$$p_{ij}(t) = \mathbf{P}(X(t + s) = j | X(s) = i)$$

On appelle $p_{ij}(t)$ « probabilité de transition à l'instant t » de l'état i vers l'état j de la chaîne de Markov. Ces probabilités de transition vérifient, pour i et j dans \mathcal{E} , les équations, dites de Chapman-Kolmogorov, suivantes :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall s \in \mathbb{R}_+, \quad p_{ij}(t + s) = \sum_{k \in \mathcal{E}} p_{ik}(t) p_{kj}(s)$$

Remarque 1.1. Dans la suite de cette section, sauf mention du contraire, nous ne parlerons que des chaînes de Markov à temps continu qui sont homogènes définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à espace d'état \mathcal{E} .

1.1.1 Matrice des probabilités de transition

On appelle « matrice des probabilités de transition à l'instant t » de la chaîne de Markov X , la matrice $\mathbb{P}(t) = \{p_{ij}(t)\}_{(i,j) \in \mathcal{E}^2}$ générée par les probabilités de transition à l'instant t . Cette matrice vérifie, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout $s \in \mathbb{R}_+$, les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{P}(t)$ est une matrice stochastique.
2. $\mathbb{P}(0)$ est la matrice identité.
3. $\mathbb{P}(t + s) = \mathbb{P}(t)\mathbb{P}(s)$ (Équations de Chapman-Kolmogorov)

Remarque 1.2. La dynamique et l'évolution d'une chaîne de Markov homogène à temps continu peuvent être entièrement déterminées par la famille $\{\mathbb{P}(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ de ses matrices des probabilités de transition. Mais il n'est pas nécessaire de connaître $\mathbb{P}(t)$ pour tous les instants $t \in \mathbb{R}_+$ afin de caractériser la dynamique de la chaîne. Nous allons examiner deux manières différentes de caractériser complètement cette dynamique. La première est celle du « **générateur infinitésimal** », et la seconde est celle de « **la chaîne de Markov induite** ».

1.1.2 Générateur infinitésimal

Une manière fondamentale de caractériser une chaîne de Markov à temps continu est par son « générateur infinitésimal », ou ce qu'on appelle « matrice des taux de transition ». Revenons à la matrice des probabilités de transition $\mathbb{P}(t)$ à un instant quelconque $t \in \mathbb{R}_+$. Par définition, nous avons $\mathbb{P}(0)$ est la matrice identité. Supposons que $\mathbb{P}(t)$ soit continue à droite de $t = 0$ (ce n'est pas nécessairement le cas pour toutes les chaînes de Markov à temps continu, mais cela est vrai dans la plupart des applications), autrement dit :

$$\lim_{t \downarrow 0} \mathbb{P}(t) = \mathbb{P}(0)$$

Où la convergence est ponctuelle et pour chaque composante de $\mathbb{P}(t)$. Il a été démontré (voir [38]) que la continuité de $\mathbb{P}(t)$ à droite de $t = 0$ implique sa continuité en tout $t \in \mathbb{R}_+$ pour tout i et pour tout j dans \mathcal{E} , c'est-à-dire :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{P}(t+h) = \mathbb{P}(t) \quad (1.3)$$

Théorème 1.1. [38] Sous l'hypothèse (1.3) que $\mathbb{P}(t)$ est continue sur \mathbb{R}_+ , on a pour tout état $i \in \mathcal{E}$, il existe :

$$-q_{ii} = q_i = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t} \in [0, +\infty] \quad (1.4)$$

et pour tout état $i \in \mathcal{E}$ et tout état $j \in \mathcal{E}$ tel que $i \neq j$, il existe :

$$q_{ij} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{p_{ij}(t)}{t} \in [0, +\infty[\quad (1.5)$$

Définition 1.1. [38] On appelle les quantités q_{ij} ($i \in \mathcal{E}$ et $j \in \mathcal{E}$), données dans (1.4) et (1.5), « **les taux de transition** » de la chaîne de Markov X . Et on appelle la matrice $Q = \{q_{ij}\}_{(i,j) \in \mathcal{E}^2}$, générée par ces taux de transition, « **générateur infinitésimal** », ou « **matrice des taux de transition** », de cette chaîne.

Remarque 1.3. Sous forme matricielle, le générateur infinitésimal Q est défini comme suit :

$$Q = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathbb{P}(t) - \mathbb{P}(0)}{t}$$

Définition 1.2. [38] On dit que la matrice des taux de transition Q , ou la chaîne de Markov X , est « **conservatrice** » si :

$$\forall i \in \mathcal{E}, \quad \sum_{\substack{j \in \mathcal{E} \\ j \neq i}} q_{ij} = -q_{ii} < \infty$$

Ou, ce qui est équivalent :

$$\forall i \in \mathcal{E}, \quad \sum_{j \in \mathcal{E}} q_{ij} = 0$$

Interprétation

Comment peut-on interpréter les composantes du générateur infinitésimal Q ? Chaque composante q_{ij} peut être considéré comme le taux de « sauts » de l'état i à l'état j . Rappelons qu'un taux mesure le nombre moyen d'événements qui se produisent par unité de temps. Dans notre cas, un événement est une transition de l'état i vers l'état j . Les composantes diagonales q_{ii} du générateur infinitésimal Q sont les taux globaux de quitter chaque état i . Imaginons l'expérience qui commence en étant dans l'état i , et à chaque fois que nous sautons en dehors de cet état vers l'état j , nous reviendrons immédiatement vers lui. Alors q_{ij} est, approximativement, le nombre total de sauts que nous avons fait envers l'état j divisé par la durée totale pendant laquelle nous avons réalisé cette expérience.

Remarque 1.4. On entend par « saut » le fait que la chaîne de Markov X quitte un état pour aller vers un autre état : X saute de l'état i vers l'état j . C'est pour ça qu'on dit souvent que X est « un processus de Markov de sauts » au lieu de « une chaîne de Markov à temps continu ».

1.1.3 Chaîne de Markov induite

Supposons que X est conservatrice (ce qui est vrai dans la plupart des applications), et soient $0 = S_0 < S_1 < S_2 < \dots$ les instants des sauts successifs du processus X . Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = X_{S_n}$. Autrement dit, Y_n est l'état visité par X à l'instant S_n . Alors, il a été démontré (voir [106]) que le processus stochastique $Y = \{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$ à espace d'état \mathcal{E} , qui représente les états visités par X , est une chaîne de Markov homogène à temps discret, et c'est cette chaîne que l'on appelle « la chaîne de Markov induite du processus X ». Et il a, aussi, été démontré que pour tout i et tout j dans \mathcal{E} , les probabilités de transition p_{ij} de la chaîne Y sont en relation avec les taux de transition q_{ij} du processus X par :

$$p_{ii} = 0 \quad \text{et} \quad p_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i} \quad (i \neq j)$$

Remarque 1.5. Les concepts d'irréductibilité, de récurrence et de transience d'une chaîne de Markov à temps continu peuvent être définis via sa chaîne de Markov induite. Encore plus, une chaîne de Markov à temps continu possède la propriété correspondante si et seulement si sa chaîne de Markov induite la possède aussi.

1.2 Processus quasi de naissance et de mort

Les processus quasi de naissance et de mort (Quasi Birth and Death Processes "QBDP") sont une généralisation des processus de naissance et de mort. L'étude de cette classe de processus a été initiée pour la première fois par EVANS (1967) [46], ainsi que par WALLACE (1969) dans sa thèse de Doctorat [127]. Tandis que l'analyse rigoureuse et détaillée a été développée par NEUTS (1981) [104] et LATOUCHE and RAMASWAMI (1993,1999) [81, 82]. Ensuite, beaucoup de travaux ont été fait et dans lesquels ont été proposé des méthodes numériques pour le calcul de la distribution stationnaire

d'un QBDP. « **La méthode de la matrice géométrique** », introduite par NEUTS (1981) [104], a été la première méthode numérique qui sert à calculer la distribution stationnaire d'un QBDP. Ensuite, LATOUCHE and RAMASWAMI (1993,1999) [81, 81], NAUMOV, KRIEGER and WAGNER (1996) [100] et NAUMOV (2000) [99] ont proposé des améliorations de cette technique. Ces travaux ont permis une analyse approfondie des QBDP, accompagnée d'une interprétation probabiliste. Dans LATOUCHE and RAMASWAMI (1993) [81], les auteurs ont développé un algorithme pour calculer la matrice des taux, qui a, ensuite, été perfectionné dans NAUMOV, KRIEGER and WAGNER (1996) [100]. Ces différentes méthodes ont gagné en popularité et sont actuellement largement appliquées dans de nombreux domaines.

1.2.1 Description générale

Soit $X = \{(X_1(t), X_2(t)), t \in \mathbb{R}_+\}$ une chaîne de Markov bidimensionnelle à temps continu dont l'espace d'état \mathcal{S} est donné comme suit :

$$\mathcal{S} = \{0, 1, \dots, c\} \times \mathbb{N} \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{N}$$

La première composante $\{X_1(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ est appelée « **le processus phase** » de la chaîne X , et la seconde composante $\{X_2(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ est appelée « **le processus niveau** ». Pour $m \in \mathbb{N}$, soit $l(m)$ le niveau m de la chaîne X (l'ensemble des états qui se trouvent dans le niveau m) donné par :

$$l(m) = \{0, 1, \dots, c\} \times \{m\}$$

Définition 1.3. La chaîne de Markov X est un QBDP si les transitions sont limitées en une seule étape entre, seulement, les états qui se trouvent dans le même niveau et ceux qui se trouvent dans deux niveaux adjacents.

Remarque 1.6. Selon cette définition, les transitions de la chaîne X se limitent à des transitions en une seule étape, des états d'un niveau vers des états du même niveau ou vers des états des niveaux voisins. Autrement dit, les transitions des états du niveau $l(m)$ vers les états du niveau $l(m')$ peuvent se produire si et seulement si $m' = m - 1$ ou $m' = m$ ou, encore, $m' = m + 1$. De plus, nous supposons que les transitions sont indépendantes du niveau, c'est-à-dire que les taux de transition des états de $l(m)$ vers les états de $l(m')$ ne dépendent de m et m' que par la différence $m - m'$. Dans ce cas, on dit que le QBDP est **homogène**.

1.2.2 Générateur infinitésimal

En supposant que la chaîne de Markov X est un QBDP homogène, et ordonnant ses états comme suit :

$$(0, 0), (1, 0), \dots, (c, 0), (0, 1), (1, 1), \dots, (c, 1), (0, 2), (1, 2), \dots, (c, 2), \dots$$

son générateur infinitésimal Q aura la forme de la matrice par blocs suivante :

$$Q = \begin{pmatrix} B & A_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ A_2 & A_1 & A_0 & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & A_2 & A_1 & A_0 & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_2 & A_1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Où : B , A_0 , A_1 et A_2 sont des matrices carrées d'ordre $c+1$. Les matrices A_0 et A_2 sont non négatives. Les éléments des diagonales des matrices B et A_1 sont négatifs, et les éléments qui se trouvent en dehors de leurs diagonales son non négatifs. La somme des éléments de chaque ligne de la matrice Q est nulle, autrement dit :

$$(B + A_0) \cdot \mathbb{1} = (A_2 + A_1 + A_0) \cdot \mathbb{1} = \mathbf{0} \tag{1.6}$$

avec $\mathbb{1}$ et $\mathbf{0}$, qui apparaissent dans (1.6), sont, respectivement, le vecteur colonne unitaire et le vecteur colonne nul :

$$\mathbb{1} = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^{c+1} \quad \text{et} \quad \mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{c+1}$$

Remarque 1.7. La matrice B est composée des taux de transition des états du niveau $l(0)$ vers les états du niveau $l(0)$. La matrice A_1 est composée des taux de transition des états du niveau $l(m)$ vers les états du niveau $l(m)$ pour $m \geq 1$. Les matrices A_2 et A_0 sont générées, respectivement, par les taux de transition des états du niveau $l(m)$ vers les états du niveau $l(m - 1)$ pour $m \geq 1$ et par les taux de transition des états du niveau $l(m)$ vers les états du niveau $l(m + 1)$ pour $m \geq 0$.

1.2.3 Diagramme des taux de transition

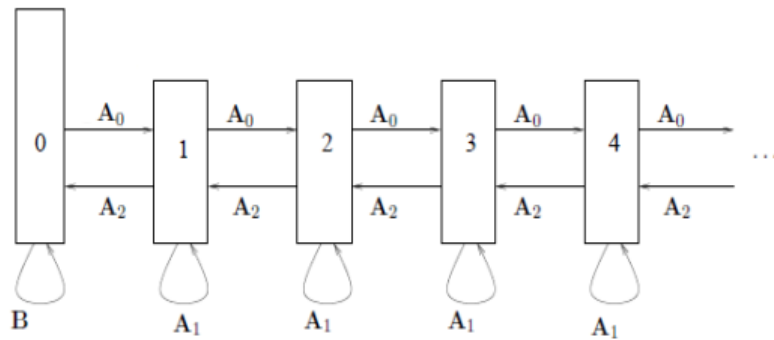


Figure 1.1. Diagramme des taux de transition d'un QBDP selon ses niveaux

1.2.4 Condition de stabilité

Le théorème de stabilité suivant, tiré du livre de NEUTS (1981) [104], donne une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité, l'existence et l'unicité d'une distribution stationnaire d'un QBDP. Pour sa démonstration, le lecteur peut la trouver dans le livre de NEUTS (1981) [104] ou celui de LATOUCHE and RAMASWAMI (1999) [82] :

Théorème 1.2. [82, 104] Supposons que la chaîne de Markov X est un QBDP irréductible, et supposons aussi que la matrice $A = A_0 + A_1 + A_2$ est irréductible. Alors, le processus X est **récurrent positif** si et seulement si :

$$\pi \cdot A_0 \cdot \mathbb{1} < \pi \cdot A_2 \cdot \mathbb{1} \quad (1.7)$$

Où : $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_c)$ est l'unique solution du système d'équations :

$$\begin{cases} \pi \cdot A = \mathbf{0} \\ \pi \cdot \mathbb{1} = 1 \end{cases}$$

et :

$$\mathbb{1} = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^{c+1} \quad \text{et} \quad \mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{c+1}$$

Remarque 1.8. La condition de stabilité (1.7) stipule que le taux moyen de transition du niveau $l(m)$ au niveau $l(m+1)$ doit être inférieur au taux moyen de transition du niveau $l(m)$ au niveau $l(m-1)$, pour tout $m \geq 1$.

1.2.5 Méthode de la matrice géométrique

Les QBDP appartiennent à la classe des processus stochastiques qui peuvent être analysés par « **la méthode analytique matricielle** ». Les origines de cette méthode remontent à Marcel NEUTS (voir [102], [103] et [104]), dont les recherches ont donné naissance aux distribution géométrique matricielle et aux processus de type phase. Le terme « **géométrique** » provient de la généralisation de la structure de la distribution de probabilité stationnaire du processus de naissance et de mort sur les entiers positifs au cas bidimensionnel.

Soit l'équation quadratique :

$$\mathbf{R}^2 A_2 + \mathbf{R} A_1 + A_0 = \mathbf{0} \quad (1.8)$$

avec \mathbf{R} et $\mathbf{0}$ qui apparaissent dans (1.8) sont des matrices de dimension $(c+1) \times (c+1)$ où toutes les composantes de la matrice $\mathbf{0}$ sont égales à zéro. Le théorème suivant illustre la structure géométrique de la distribution stationnaire d'un QBDP récurrent positif. Le théorème et sa démonstration sont disponibles dans NEUTS (1981) [104] :

Théorème 1.3. [104] Le QBDP est récurrent positif si et seulement si l'équation (1.8) admet une unique solution non négative \mathbf{R} de rayon spectral inférieur strictement à un ($\text{Sp}(\mathbf{R}) < 1$). Dans ce cas, le QBDP admet une unique distribution stationnaire Π donnée par :

$$\Pi = [\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2, \dots]$$

Et tel que :

$$\Pi_k = \Pi_0 \cdot \mathbf{R}^k \quad \text{pour} \quad k \geq 0$$

Remarque 1.9. Résoudre l'équation quadratique (1.8) pour déterminer la matrice \mathbf{R} n'est pas quelque chose d'évident, surtout lorsque le nombre de phases du QBDP est grand. Pour cela, beaucoup de méthodes numériques ont été proposées dans ce sens, et, dans le prochain chapitre, nous exposerons l'une d'elles.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons fait le survol de quelques résultats concernant les processus de Markov à temps continu et, en particulier, les processus quasi de naissance et de mort. Cela pour permettre au lecteur de mieux comprendre la structure des modèles stochastiques sur lesquels nous avons réalisé notre travail.

Systemes de files d'attente

Introduction

Les files d'attente illustrent une facette omniprésente de la vie moderne, que nous rencontrons à chaque étape de nos activités quotidiennes. Que ce soit devant le guichet d'une banque ou lors de l'accès à Internet, ce phénomène se manifeste dès qu'un serveur, qu'il s'agisse d'un guichet, d'un routeur ou autre, est sollicité par un grand nombre de clients ou de demandes.

La première publication sur la théorie des files d'attente est, vraisemblablement, l'article de JOANNSEN (1907) "Waiting time and number of calls" publié en 1910 dans "Post Office Electrical Engineers Journal". Cependant, les méthodes utilisées dans ce papier étaient dépourvues de rigueur mathématique. Il est couramment admis aujourd'hui que le fondateur de la théorie des files d'attente est le danois Agner Krarup ERLANG (1878-1929), qui a collaboré de 1908 à 1922 avec la compagnie danoise de téléphone pour mener des études en télétrafic (débit de transmission des réseaux de communication téléphonique). Son article de 1909 [45] est considéré comme la première contribution mathématique sérieuse à la théorie des files d'attente. Par la suite, ses travaux ont été intégrés à la recherche opérationnelle. Cependant, l'usage croissant d'un langage mathématique complexe dans les publications sur la théorie des files d'attente a temporairement limité son adoption. Cette tendance a toutefois évolué lorsque des chercheurs ont commencé à l'appliquer à l'évaluation des performances. Dans ce contexte, il est apparu que même des modèles relativement simples pouvaient produire des résultats très proches des observations réelles. Cela a alors conduit à un développement rapide de la théorie des files d'attente (lire [125]).

Toutefois, la théorie classique des files d'attente propose deux solutions pour gérer la situation où un client arrive dans le système et trouve l'espace de service déjà occupé : la première consiste à ce que le client quitte le système sans être servi, comme dans le modèle d'Erlang à demandes refusées, et la seconde option est que le client prend place dans la file d'attente et attend son tour pour être servi. Une autre approche possible

consiste à autoriser le client à quitter le système et à renouveler sa demande après une durée de temps aléatoire. Durant l'intervalle entre deux tentatives successives, appelées « **rappels** », on dit que le client « **est en orbite** ». Un tel système est désigné sous le nom de « **système de files d'attente avec rappels** ».

Ce chapitre est consacré à l'exposition de certains éléments fondamentaux ainsi qu'à certains résultats relatifs aux systèmes de files d'attente. Nous commencerons par une présentation des caractéristiques d'un système de files d'attente classique, avant de porter une attention particulière aux files d'attente avec rappels.

2.1 Système de files d'attente classique

2.1.1 Description

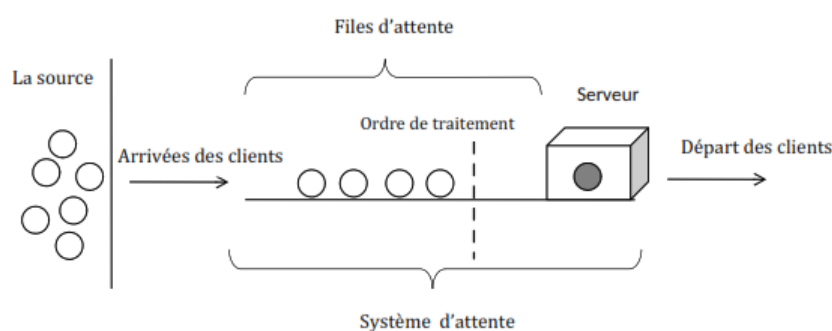


Figure 2.1. Modèle d'un système de files d'attente classique

Le modèle général d'un système de files d'attente classique, comme le montre bien Figure 2.1 ci-dessus, peut être décrit de la manière suivante : des clients, ou demandes de service, arrivent en un lieu précis pour solliciter une prestation. Si un serveur est disponible, le client est immédiatement pris en charge et servi. Dans le cas contraire, deux options s'offrent à lui : soit il quitte le système, soit il intègre une file d'attente. Par la suite, le client est choisi pour être servi selon une règle de sélection prédéfinie. Un système de file d'attente comprend, donc, un espace d'attente et un espace de service.

Pour identifier un système de file d'attente, on doit spécifier le processus stochastique qui décrit les arrivées des clients dans les système, le mécanisme de service et la règle selon laquelle un client est choisi pour être servi. Plus précisément, on doit spécifier :

- **Le processus d'arrivée des clients** : Ce processus spécifie les instants auxquels les clients arrivent dans le système. Dans la théorie classique des files d'attente, on fait le plus souvent l'hypothèse que les clients arrivent de manière isolée et indépendamment les uns des autres. Sous ces hypothèses, les intervalles de temps entre deux arrivées successives forment une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.
- **La durée de service** : Le temps de service d'un client correspond à la durée entre le début et la fin de la prestation qui lui est offerte. En règle générale, on considère que ces durées de service sont indépendantes, suivent la même distribution, et ne dépendent pas des intervalles de temps entre les arrivées successives des clients.

- **Le nombre de serveurs** : Ce nombre représente la nombre maximal de clients qui peuvent être servis en même temps. Tous les serveurs sont considérés comme équivalents, ce qui implique que les durées de service sont indépendantes d'un serveur à l'autre et suivent une même loi de probabilité.
- **La capacité d'accueil** : La capacité d'accueil d'un système de files d'attente désigne le nombre total de clients que le système peut contenir à un moment donné. Elle correspond à la somme du nombre de serveurs et des places disponibles dans la file d'attente. Si un client se présente alors que cette capacité maximale est atteinte, il est rejeté et quitte le système sans recevoir de service.
 Dans la plupart des cas, on suppose que le nombre de clients pouvant accéder au service est illimité et que leur fréquence d'arrivée reste constante. Cependant, certaines situations se distinguent par un nombre fixe et limité de clients. Dans ce contexte, chaque client déjà présent dans le système réduit le nombre de nouvelles arrivées possibles, ce qui rend le taux d'arrivée variable et dépendant du nombre de clients dans le système. Dans de telles conditions, le processus d'arrivée reflète le délai écoulé entre le départ d'un client et son retour dans le système.
- **La source des clients** : La source d'où proviennent les clients qui peut être finie ou infinie, unique ou multiple.
- **La discipline de service** : La discipline de service désigne la règle utilisée pour déterminer quel client sera pris en charge par le serveur après la fin du service du client actuel. Il existe plusieurs disciplines de service parmi lesquelles on trouve :
 - **FIFO (First In First Out)** : Les clients sont servis dans leur ordre d'arrivée. Cette règle, largement adoptée dans les entreprises de services, offre aux clients une impression d'équité, même si elle peut désavantager ceux qui nécessitent un temps de service réduit. On la retrouve dans des lieux tels que les banques, les magasins, les cinémas ou encore les restaurants.
 - **LIFO (Last In First Out)** : Le dernier client arrivé sera placé en tête de file pour être servi en premier. Cette discipline est généralement très utilisée dans les stocks non périssables.
 - **FIRO (First In Random Out)** : les clients sont choisis aléatoirement pour être servis. Cette discipline est généralement rencontrée et utilisée dans les serveurs informatiques.
 - **Priorité** : Avec cette discipline, les clients sont servis suivant leur importance dans la population. Une personne prioritaire sera servie avant une personne non-prioritaire, même si elle est arrivée avant. Cette discipline s'impose dans les services d'urgence, les aéroports, etc.
 - **RR (ROUND-ROBIN)** : Chaque client est servi à tour de rôle pendant un intervalle de temps fixe Q (Quantum). Si le client n'a pas terminé son service à la fin du quantum, il sera placé à la fin de la file d'attente pour attendre son prochain tour et il répète ce processus jusqu'à ce que le service soit terminé.
 - **PS (Processes Sharing)** : Cas limite de la discipline RR lorsque le quantum Q tend vers zéro. Tous les clients sont servis en même temps avec une vitesse inversement proportionnelle au nombre de clients simultanément présents.
 - etc.

2.1.2 Analyse mathématique

L'analyse mathématique d'un système de files d'attente repose généralement sur la définition d'un processus stochastique $\{X(t), t \geq 0\}$ adapté à sa structure, où t représente le temps (souvent $X(t)$ représente le nombre de clients dans le système à l'instant t). En fonction des paramètres qui caractérisent le système de files d'attente étudié, on cherche à déterminer les probabilités d'état associées au régime transitoire du processus, puis celles correspondant au régime stationnaire.

1. **Étude en régime transitoire** : L'analyse du régime transitoire permet de répondre à des questions de performance liées à des instants précis ou à des périodes de courte durée. Par exemple, on peut se demander : « Combien de clients sollicitant un certain service seront pris en charge au cours de la prochaine heure ? »
2. **Étude en régime stationnaire ou permanent (dit aussi à l'équilibre)** : Il s'agit de déterminer si le système atteint un état d'équilibre probabiliste à mesure que le temps progresse (à long terme). Cette étude permet de répondre à des questions comme : « Quel est le taux moyen d'occupation du serveur sur une période prolongée ? »

Pour étudier cela, on a souvent recouru à des méthodes stochastiques visant à estimer la distribution du processus stochastique généré par le modèle étudié. Cela peut se faire soit à un instant précis (analyse transitoire), soit à long terme (état d'équilibre). Ces méthodes permettent de déterminer les probabilités associées à chaque état du processus, lesquelles sont ensuite utilisées pour évaluer les mesures de performance du système.

2.1.3 Notation de Kendall

Le système de notations le plus répandu dans la théorie des files d'attente est celui introduit par KENDALL (1953) [72] et qui a été complété par LEE (1966) [83] :

$$\mathbf{A/B/c/s/n/d}$$

avec :

- A** : La loi de probabilité de la durée qui sépare deux arrivées successives.
- B** : Distribution de la durée de service d'un client.
- c** : Nombre de serveurs dans le système.
- s** : Capacité du système (longueur maximale de la file d'attente plus le nombre de serveurs).
- n** : Taille de la population qui est le nombre maximum de clients susceptibles d'arriver dans la file d'attente.
- d** : La discipline de service.

Dans sa version courte souvent utilisée, seuls les trois premiers symboles **A/B/c** sont pris en compte. Cela implique que le système suit une discipline FIFO avec un nombre infini de places disponibles dans la file d'attente et un nombre illimité de clients

susceptibles de demander le service offert par le système.

A et **B** peuvent être remplacées par plusieurs lettres qui, chacune, représente un type de loi de probabilité, en voici les plus répandues :

- M** (Markov) : La loi exponentielle qui vérifie la propriété de Markov (absence de mémoire), d'où la lettre **M**.
- E_k** (Erlang) : Distribution d'Erlang d'ordre k .
- G** (Générale) : Loi générale ou arbitraire qui peut être n'importe quelle loi de probabilité.
- D** (Déterministe) : Loi déterministe ou constante, c'est-à-dire la durée qui sépare deux arrivées successives est constante et, respectivement, la durée de service est la même pour tous les clients.

Quand les deux quantités stochastiques principales d'un système de files d'attente, à savoir la durée qui sépare deux arrivées successives **A** et la durée de service d'un client **B**, sont indépendantes et exponentiellement distribuées, on parle de « **modèles markoviens** ». Si ce n'est pas le cas, c'est-à-dire l'une ou les deux quantités ne sont pas markoviennes, on parle de « **modèles non markoviens** ».

Modèles markoviens

Le fait que les quantités **A** et **B** sont markoviennes fait en sorte que ces systèmes de files d'attente sont entièrement décrits par l'introduction d'un processus stochastique de Markov qui compte, souvent, le nombre de clients dans le système à un instant donné. Et comme beaucoup de résultats concernant les propriétés de performances des processus de Markov sont établis, cela rend ces modèles plus faciles à étudier et à analyser.

Modèles non markoviens

À la différence des modèles markoviens, l'une ou les deux quantités stochastiques principales des modèles non markoviens, à savoir **A** et **B**, ne sont pas distribuées exponentiellement. Cela rend l'étude de ces modèles un peu plus délicate, pour ne pas dire impossible. C'est pour ça qu'on essaye souvent de se ramener à des processus stochastiques de Markov judicieusement choisis à l'aide des méthodes d'analyse qui sont entre autres :

1. **Méthode des étapes d'Erlang** : Son principe consiste à approcher toute distribution de probabilité dotée d'une transformée de Laplace rationnelle par une loi de Cox, qui est un mélange de lois exponentielles. Cette loi se caractérise par une propriété d'absence de mémoire par étapes
2. **Méthode des variable supplémentaires** : Cette méthode consiste à compléter l'information sur le processus stochastique $\{X(t), t \geq 0\}$, qui décrit le système de files d'attente, en lui ajoutant une variable $\xi(t)$ qui lui donne un caractère Markovien. Ce qui nous ramène à l'étude du processus stochastique markovien $\{[X(t), \xi(t)], t \geq 0\}$, où $\xi(t)$ sont dites « variables supplémentaires ».

3. **Méthode de la chaîne de Markov induite** : La méthode de la chaîne de Markov induite ramène l'étude du processus non markovien $\{X(t), t \geq 0\}$, qui décrit le système de file d'attente, à celle d'une chaîne de Markov à temps discret. Et cela en considérant le processus $\{X(t), t \geq 0\}$ aux instants t_1, t_2, t_3, \dots où les clients terminent leurs service et quittent le système. Ainsi, on définit une chaîne de Markov à temps discret $\{X_n = X(t_n), n \in \mathbb{N}^*\}$ où t_n est l'instant de départ du $n^{\text{ème}}$ client.
4. **Méthode des événements fictifs** : Cette méthode repose sur l'introduction des événements fictifs, ce qui permet d'attribuer une interprétation probabiliste aux transformées de Laplace ainsi qu'aux variables aléatoires qui décrivent le système étudié.
5. **Simulation** : Il s'agit d'un processus de simulation informatique d'un système réel conçu pour analyser des systèmes complexes, anticiper leur comportement et déterminer leurs caractéristiques. Bien que les résultats obtenus ne soient qu'approximatifs, ils offrent une précision suffisante pour être exploitables. Cette méthode repose sur la génération de variables aléatoires.

2.1.4 Mesures de performance

Souvent, le calcul explicite des probabilités d'état définissant le régime transitoire du processus stochastique qui modélise le système de files d'attente s'avère pénible, voir impossible, pour la plupart des modèles. C'est pour ça qu'en général on évalue les mesures de performance d'un système de files d'attente en étudiant son régime stationnaire, des mesures qui sont entre autres :

L_q : Le nombre moyen de clients dans la file d'attente.

L_s : Le nombre moyen de clients dans le système.

W_q : Le temps moyen d'attente d'un client dans la file d'attente.

W_s : Le temps moyen de séjour d'un client dans le système.

λ : Le nombre moyen d'arrivées par unité de temps.

μ : Le nombre moyen de clients qu'un serveur peut traiter par unité de temps.

Formules de Little

En fait, les quantités ci-dessus ne sont pas indépendantes les unes des autres. En effet, LITTLE (1961) [88] a établi une loi, qui porte son nom, concernant le régime stationnaire de n'importe quel système de files d'attente, quel que soit les lois de probabilités qui le caractérisent, et qui s'énonce comme suit : « le nombre moyen de clients dans un système L_s (resp. le nombre moyen de clients dans une file d'attente L_q) est égal au produit du nombre moyen d'arrivées par unité de temps λ par le temps moyen de séjour d'un client dans le système W_s (resp. par le temps moyen d'attente d'un client dans la file W_q) » :

$$L_s = \lambda \cdot W_s \quad (\text{resp. } L_q = \lambda \cdot W_q)$$

Et on a aussi (voir [121]) :

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} \quad \text{et} \quad L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

Distribution stationnaire

Une mesure très importante qui nous intéresse particulièrement dans ce travail et qui décrit le régime stationnaire, quand il existe, d'un système de files d'attente tout entier est le vecteur de la distribution stationnaire du processus stochastique généré par ce système. Et la plupart des mesures de performance d'un système de files d'attente sont exprimées à l'aide de ce vecteur.

2.1.5 Stabilité

En général, un système de files d'attente est considéré comme stable lorsque le nombre moyen de clients qui arrivent dans le système est inférieur au nombre moyen de clients qui quittent ce système. Si on note λ le nombre moyen de clients qui arrivent dans le système par unité de temps, m le nombre de serveurs que le système dispose et μ le nombre moyen de clients qu'un serveur peut traiter par unité de temps, alors la condition de stabilité s'écrit :

$$\lambda < m\mu$$

Et si on note $\rho = \lambda/m\mu$, alors ρ est ce qu'on appelle **l'intensité de trafic d'un système de files d'attente**, et donc ce système est stable si et seulement si son intensité de trafic est strictement inférieure à 1 ($\rho < 1$).

2.2 Système de files d'attente avec rappels

Dans les systèmes des files d'attente classiques, on suppose généralement qu'un client qui ne peut pas être servi immédiatement après son arrivée dans le système, soit rejoint la file d'attente (et est ensuite servi selon une certaine discipline de la file), soit quitte le système définitivement. Parfois, des clients impatient quittent la file d'attente mais on suppose également qu'ils quittent le système de façon définitive. Cependant, en réalité, cette hypothèse concernant la perte définitive de clients qui choisissent de quitter le système n'est qu'une première approximation d'une situation réelle. En général, un tel client revient dans le système après une période aléatoire et tente à nouveau d'obtenir le service souhaité.

Voici quelques exemples qui illustrent cette observation en détail :

1. **Systèmes téléphoniques** : Tout le monde sait par expérience qu'un abonné téléphonique qui obtient le signal « occupé » répète l'appel jusqu'à ce que la connexion souhaitée soit établie. Par conséquent, le flux d'appels circulant dans un réseau téléphonique se compose de deux parties : le flux des appels primaires, qui reflète les véritables souhaits des abonnés, et le flux des appels répétés, qui est la conséquence de l'échec des tentatives précédentes.
2. **File d'attente dans un commerce de détail** : Dans un magasin, un client qui constate qu'une file d'attente est trop longue peut décider de faire autre

chose et de revenir plus tard dans l'espoir de trouver la file moins longue. Un comportement similaire peut être observé chez certains clients impatientes qui ont rejoint la file d'attente mais ont ensuite découvert que le temps d'attente restant était trop long.

3. **Systèmes informatiques et réseaux de télécommunication** : Considérons une ligne de communication, à temps divisé en créneaux, partagée par plusieurs stations (ordinateurs). La durée d'un créneau correspond au temps nécessaire pour la transmission d'un seul paquet de données. Si deux stations, ou plus, transmettent des paquets simultanément, une collision se produira et tous les paquets seront détruits et doivent être retransmis. Si les stations impliquées dans le conflit tentaient de retransmettre les paquets détruits dans le créneau suivant, une collision surviendrait à coup sur. Pour éviter cela, chaque station, indépendamment des autres, transmet le paquet avec une probabilité p et retarde son action jusqu'au créneau suivant avec une probabilité $1 - p$. Autrement dit, chaque station introduit un délai aléatoire avant la prochaine tentative de transmission du paquet.

Comme viennent de le montrer les exemples ci-dessus, l'hypothèse selon laquelle le client quitte le système et revient après un temps aléatoire se rencontre souvent dans nos activités quotidiennes. Les systèmes de files d'attente classiques qui ne prennent pas en compte ce phénomène de rappels, ou de répétitions de la demande de service, ne peuvent, donc, pas être appliqués pour résoudre un nombre considérable de problèmes d'importance pratique. KOSTEN L. (1973) [79] a noté ceci : "*any theoretical result that does not take into consideration this repetition effect should be considered suspect*". Pour cette raison, et en raison de ces hypothèses qui décrivent mieux la réalité, une nouvelle classe de files d'attente, « **les systèmes de files d'attente avec rappels** », a été introduite pour étudier ses caractéristiques.

2.2.1 Quelques références bibliographiques

Les premières tentatives rigoureuses sur les systèmes de files d'attente avec rappels remontent aux travaux de KOSTEN (1947) [78], WILKINSON (1956) [129] et COHEN (1957) [42] où ils ont montré que les systèmes de files d'attente avec rappels sont des modèles mathématiques adaptés pour modéliser le comportement des abonnés dans les réseaux téléphoniques. Depuis les travaux pionniers publiés dans les années 1950, beaucoup d'articles scientifiques ont été publiés dans des revues de mathématiques et de statistiques telles que *Journal of the Royal Statistical Society*, *Journal of Applied Probability*, *Advances in Applied Probability*, etc., dans plusieurs revues dédiées à la recherche opérationnelle telles que *Operations Research*, *Queueing Systems*, *European Journal of Operational Research*, etc., et dans des revues de télécommunications telles que *The Bell System Technical Journal*, *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, etc. Plusieurs ouvrages, comme KULKARNI (1995) [80], RIORDAN (1962) [115], SYSKI (1986) [124] et WOLFF (1989) [130], incluent des sections ou des chapitres consacrés aux systèmes de files d'attente avec rappels. Les progrès importants dans ce domaine sont résumés dans les articles de synthèse de YANG and TEMPLETON (1987) [131] et FALIN (1990) [50], parus dans la revue *Queueing Systems*. Une description mathématique complète des systèmes de files d'attente avec rappels peut être trouvée dans la monographie de FALIN and TEMPLETON (1997) [51]

et dans le livre de ARTALEJO and GÓMEZ-CORRAL (2008) [21]. Une classification bibliographique est donnée dans les articles de ARTALEJO (1999a, 1999b, 2010) [16, 17, 19] et dans l'article de SHEKHAR, RAINA and KUMAR (2016) [120].

2.2.2 Description générale

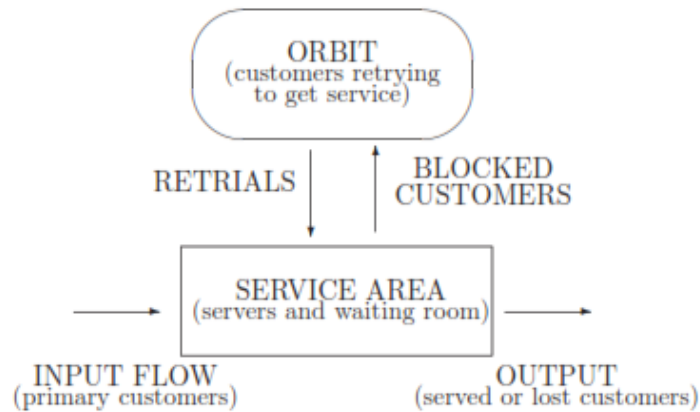


Figure 2.2. Structure générale d'un système de files d'attente avec rappels

Comme le montre Figure 2.2, les systèmes de files d'attente avec rappels peuvent être décrits d'une manière très générale comme suit : lorsqu'un client arrive dans le système, il est immédiatement pris en charge, si au moins un serveur est disponible, ou intègre la file d'attente, s'il reste une place libre dans la file. En revanche, si tous les serveurs et toutes les positions d'attente sont occupés, il quitte définitivement le système avec une probabilité $1 - H_0$ ou quitte temporairement le système avec une probabilité H_0 , revenant après un temps aléatoire pour tenter à nouveau d'obtenir le service. Entre deux tentatives, un client est dit « être en orbite » (la capacité O de l'orbite peut être finie ou infinie).

Si O est finie et que l'orbite est pleine, le client quitte définitivement le système. Chaque client présent dans l'orbite génère un processus d'arrivées secondaires et est traité de la même manière qu'un client initial : s'il trouve un serveur libre ou une place disponible dans la file d'attente, il est immédiatement pris en charge ou rejoint la file. En revanche, si tous les serveurs et les positions d'attente sont occupés, il quitte définitivement le système avec une probabilité $1 - H_k$ (s'il s'agit de la $k^{\text{ème}}$ tentative infructueuse) ou retourne dans l'orbite (si celle-ci n'est pas pleine) avec une probabilité H_k .

L'identification d'un système de files d'attente classique se fait avec ses composantes principales, à savoir : le processus d'arrivées des clients, la durée de service, le nombre de serveurs, la capacité d'accueil, la source des clients et la discipline de service. Pour un système avec rappels, on doit ajouter les composantes suivantes :

- **La capacité de l'orbite :** Le nombre total de clients que l'orbite peut contenir à un moment donné.
- **Le processus de répétition d'appels :** Il permet de définir le comportement du client (c'est à dire si le client quitte définitivement ou temporairement le système) devant une situation de blocage (le système est plein).

2.2.3 Notation de Kendall

La notation de Kendall qui décrit un système de file d'attente avec rappels est la suivante :

$$A/B/c/s/n/d/O/H$$

où $A/B/c/s/n/d$ représente les mêmes composantes d'un système de files d'attente classique vu dans la section précédente, et :

- O : Le nombre maximum de clients que l'orbite peut contenir.
- H : La fonction de persistance, ou de de persévérance, qui est une suite $H = \{H_k, k \geq 0\}$, où H_k est la probabilité qu'après la $k^{\text{ème}}$ tentative échouée, un client rappelle pour la $(k + 1)^{\text{ème}}$ fois.

Si s , n , d , O et H sont absents dans la notation de Kendall alors cela veut dire que $s = c$, $n = \infty$, $d = \text{FIFO}$, $O = \infty$ et $H_k = 1$ pour tout $k \geq 0$ (tous les clients sont persévérants).

Comme dans les systèmes de files d'attente classiques, quand les trois quantités stochastiques d'un système de files d'attente avec rappels, à savoir la durée qui sépare deux arrivées successives A , la durée de service d'un client B et la durée qui sépare deux rappels successifs, sont des variables aléatoires indépendantes et exponentiellement distribuées, on parle de « **modèles markoviens** ». Si ce n'est pas le cas, c'est-à-dire l'une ou les trois quantités ne sont pas markoviennes, on parle de « **modèles non markoviens** ».

2.3 Système de files d'attente $M/M/c$ avec rappels

Parmi les divers modèles de file d'attente avec rappels, qu'ils soient markoviens ou non markoviens (voir [16], [17], [21], [19] et [51]), nous nous concentrerons dans cette section sur une présentation détaillée du modèle $M/M/c$ avec rappels, qui constitue l'axe principal de notre travail dans cette thèse.

2.3.1 Description du modèle

Nous considérons un système de file d'attente à plusieurs serveurs dans lequel les clients arrivent selon un processus de Poisson de taux λ . L'espace de service est composé de c serveurs identiques et les durées de service des clients sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi de probabilité exponentielle de paramètre ν . Un client, dit « **primaire** », qui trouve tous les serveurs occupés à son arrivée est contraint de quitter la zone de service pour devenir un client « **secondaire** » en renouvelant sa demande de service après une durée de temps aléatoire suivant une loi de probabilité exponentielle de paramètre μ . Entre deux tentatives d'avoir le service, on dit que le client « **est en orbite** ». Comme d'habitude, nous supposons que les durées qui séparent deux arrivées successives, les durées de service et les durées qui séparent deux rappels successifs sont mutuellement indépendantes.

Ainsi, voir [51], l'état du système peut être décrit au moyen d'un processus bivarié

$\widehat{X}_1 = \{(\widehat{C}_1(t), \widehat{W}_1(t)), t \in \mathbb{R}_+\}$, où $\widehat{C}_1(t)$ représente le nombre de serveurs occupés et $\widehat{W}_1(t)$ le nombre de clients en orbite. Sous les hypothèses mentionnées ci-dessus, le processus \widehat{X}_1 est une chaîne de Markov à temps continu avec pour espace d'état :

$$\mathcal{S} = \{(i, j), \quad 0 \leq i \leq c \quad \text{et} \quad j \in \mathbb{N}\}$$

Les probabilités d'état du système à un instant t sont :

$$\mathbf{P}_{(i,j)}^{(1)}(t) = \mathbf{P}\{\widehat{C}_1(t) = i, \widehat{W}_1(t) = j\}, \quad (i, j) \in \mathcal{S}$$

Du point de vue des clients, les caractéristiques les plus importantes de la qualité de service pour les clients sont en régime stationnaire sont :

— La probabilité que tous les serveurs soient occupés :

$$\mathbf{P}_c = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\widehat{C}_1(t) = c\}$$

— Le nombre moyen de clients dans l'orbite :

$$L_o = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}\{\widehat{W}_1(t)\}$$

— Le nombre moyen de serveurs occupés :

$$N_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}\{\widehat{C}_1(t)\}$$

— La durée moyenne d'attente des clients dans l'orbite (formule de Little) :

$$W_o = \frac{L_o}{\lambda}$$

— La durée moyenne d'attente des clients qui veulent vraiment avoir le service :

$$W_r = \frac{W_o}{\mathbf{P}_c}$$

2.3.2 Taux de transition

La matrice des taux de transition $\tilde{Q} = [\tilde{q}((i, j), (i', j'))]_{(i,j),(i',j') \in \mathcal{S}^2}$ du processus \widehat{X}_1 est donnée par (voir [22]) :

Pour $0 \leq i \leq c - 1$:

$$\tilde{q}((i, j), (i', j')) = \begin{cases} \lambda & \text{si} & (i', j') = (i + 1, j) \\ i\nu & \text{si} & (i', j') = (i - 1, j) \\ j\mu & \text{si} & (i', j') = (i + 1, j - 1) \\ -(\lambda + i\nu + j\mu) & \text{si} & (i', j') = (i, j) \\ 0 & \text{sinon} & \end{cases}$$

Pour $i = c$:

$$\tilde{q}((i, j), (i', j')) = \begin{cases} \lambda & \text{si} & (i', j') = (c, j + 1) \\ c\nu & \text{si} & (i', j') = (c - 1, j) \\ -(\lambda + c\nu) & \text{si} & (i', j') = (c, j) \\ 0 & \text{sinon} & \end{cases}$$

En ordonnant les états comme suit :

$$\mathcal{S} = \{(0, 0), (1, 0), \dots, (c, 0), (0, 1), (1, 1), \dots, (c, 1), (0, 2), (1, 2), \dots, (c, 2), \dots\} \quad (2.1)$$

nous pouvons exprimer le générateur infinitésimal \tilde{Q} du processus \widehat{X}_1 sous forme de la matrice par blocs suivante (voir [20]) :

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} A_1^{(0)} & A_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ A_2^{(1)} & A_1^{(1)} & A_0 & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & A_2^{(2)} & A_1^{(2)} & A_0 & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_2^{(3)} & A_1^{(3)} & \ddots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

où A_0 , $A_1^{(j)}$ ($j \geq 0$) et $A_2^{(j)}$ ($j \geq 1$) sont les matrices $(c + 1) \times (c + 1)$ suivantes :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad A_2^{(j)} = \begin{pmatrix} 0 & j\mu & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j\mu & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & j\mu \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_1^{(j)} = \begin{pmatrix} -(\lambda + j\mu) & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \nu & -(\lambda + \nu + j\mu) & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2\nu & -(\lambda + 2\nu + j\mu) & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & & & -[\lambda + (c-1)\nu + j\mu] & \lambda \\ 0 & & & & c\nu & -(\lambda + c\nu) \end{pmatrix}$$

2.3.3 Diagramme des taux de transition

Le comportement stochastique du processus \widehat{X}_1 peut être représenté à l'aide du diagramme des taux de transition présenté dans Figure 2.3 pour le cas où $c = 3$:

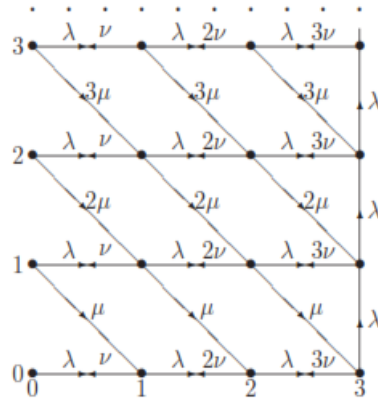


Figure 2.3. Diagramme des taux de transition du modèle $M/M/3$ avec rappels

2.3.4 Probabilités de transition de la chaîne induite

Soit $\widetilde{X} = \{\widetilde{X}_n, n \in \mathbb{N}\}$ la chaîne de Markov induite du processus \widehat{X}_1 , alors sa matrice des probabilités de transition $\widetilde{P} = [\tilde{p}((i, j), (i', j'))]_{((i,j),(i',j')) \in \mathcal{S}^2}$ est donnée comme suit (voir [51]) :

Pour $0 \leq i \leq c-1$:

$$\tilde{p}((i, j), (i', j')) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda + i\nu + j\mu} & \text{si } (i', j') = (i+1, j) \\ \frac{i\nu}{\lambda + i\nu + j\mu} & \text{si } (i', j') = (i-1, j) \\ \frac{j\mu}{\lambda + i\nu + j\mu} & \text{si } (i', j') = (i+1, j-1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $i = c$:

$$\tilde{p}((i, j), (i', j')) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda + c\nu} & \text{si } (i', j') = (c, j+1) \\ \frac{c\nu}{\lambda + c\nu} & \text{si } (i', j') = (c-1, j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme précédemment, en ordonnant les états comme dans (2.1), nous pouvons exprimer la matrice des probabilités de transition \widetilde{P} de la chaîne \widetilde{X} sous forme de la matrice par blocs suivante :

$$\widetilde{P} = \begin{pmatrix} B_1^{(0)} & B_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ B_2^{(1)} & B_1^{(1)} & B_0 & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & B_2^{(2)} & B_1^{(2)} & B_0 & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_2^{(3)} & B_1^{(3)} & \ddots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

où $B_0, B_1^{(j)}$ ($j \geq 0$) et $B_2^{(j)}$ ($j \geq 1$) sont les matrices $(c+1) \times (c+1)$ suivantes :

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\lambda}{\lambda + c\nu} \end{pmatrix}, \quad B_2^{(j)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{j\mu}{\lambda + j\mu} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{j\mu}{\lambda + \nu + j\mu} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{j\mu}{\lambda + (c-1)\nu + j\mu} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_1^{(j)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda}{\lambda + j\mu} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{\lambda + \nu + j\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda + \nu + j\mu} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\nu}{\lambda + 2\nu + j\mu} & 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & & & 0 & \frac{\lambda}{\lambda + (c-1)\nu + j\mu} \\ 0 & & & & \frac{c\nu}{\lambda + c\nu} & 0 \end{pmatrix}$$

2.3.5 Condition d'ergodicité (stabilité du système)

En 1995, ARTALEJO, dans [13], a démontré que la condition nécessaire et suffisante de l'ergodicité du processus \widehat{X}_1 , et par conséquent de la chaîne \widetilde{X} , est

$$\rho = \frac{\lambda}{c\nu} < 1 \quad (2.2)$$

et cette condition ne dépend pas du taux de rappels μ .

2.3.6 Distribution stationnaire

Les modèles de files d'attente avec rappels se caractérisent par l'hétérogénéité spatiale des processus de Markov qui leur sont associés, ainsi que par leurs espaces d'états infinis, conséquence directe du mécanisme de rappels. En règle générale, ces rappels suivent la politique classique des tentatives répétées où chaque client agit comme une source autonome de requêtes répétées de service, indépendamment des autres clients en orbite, et le taux global de rappels dépend du nombre total de clients en orbite. Par conséquent, il n'existe que peu de résultats exacts concernant les caractéristiques de performance de ces modèles, notamment en ce qui concerne leurs distributions stationnaires, à l'exception de cas particuliers (voir [59] et [108]). De nombreuses recherches ont donc été menées dans le but de concevoir des méthodes algorithmiques efficaces (voir [21] et [18]).

Mais théoriquement et sous l'hypothèse que notre système $M/M/c$ avec rappels est stable (le système atteint le régime stationnaire), c'est-à-dire (2.2) est vérifiée, la distribution stationnaire $\widetilde{\Pi} = [\widetilde{\pi}_{(i',j')}]_{(i',j') \in \mathcal{S}}$ de \widehat{X}_1 , avec

$$\widetilde{\pi}_{(i',j')} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}^{(1)}_{(i',j')}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\widehat{C}_1(t) = i', \widehat{W}_1(t) = j'\}, \quad (i', j') \in \mathcal{S}$$

existe et elle est l'unique solution du système d'équations

$$\begin{cases} \widetilde{\Pi} \cdot \widetilde{Q} = \mathbf{0}_{\mathcal{S}} \\ \widetilde{\Pi} \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{S}} = 1 \end{cases} \quad (2.3)$$

où $\mathbf{0}_{\mathcal{S}}$ est le vecteur nul dont toutes les composantes sont égales à 0 et $\mathbf{1}_{\mathcal{S}}$ est le vecteur unitaire dont toutes les composantes sont égales à 1.

En ordonnant les états du système comme dans (2.1), nous pouvons exprimer $\widetilde{\Pi}$ sous la forme suivante :

$$\widetilde{\Pi} = [\widetilde{\Pi}_0, \widetilde{\Pi}_1, \widetilde{\Pi}_2, \dots]$$

avec, pour $j \in \mathbb{N}$:

$$\widetilde{\Pi}_j = [\widetilde{\pi}_{(0,j)}, \widetilde{\pi}_{(1,j)}, \widetilde{\pi}_{(2,j)}, \dots, \widetilde{\pi}_{(c,j)}]$$

Remarque 2.1. En fait, et grace aux efforts considérables de la part des chercheurs (voir [51] et [59]), seules les distributions stationnaires des modèles $M/M/c$ avec rappels dont le nombre de serveurs est inférieur ou égal à 2 ($c \leq 2$) sont connues avec exactitude. Et dans la prochaine section, cause de nos besoins dans ce travail, nous donnerons la formule exacte de la distribution stationnaire du modèle $M/M/2$ avec rappels.

2.3.7 Le modèle $M/M/2$ avec rappels

Considérons le système de file d'attente $M/M/2$ avec rappels dans lequel les clients arrivent selon un processus de Poisson de taux λ . L'espace de service est composé de 2 serveurs identiques et les durées de service des clients sont des variables aléatoires indépendants qui suivent une loi de probabilité exponentielle de paramètre $\nu = 1$. Un client primaire qui trouve tous les serveurs occupés à son arrivée est contraint de quitter la zone de service et rejoindre l'orbite du système afin qu'il puisse renouveler sa requête de service après une durée de temps aléatoire qui suit une loi de probabilité exponentielle de paramètre μ . Nous supposons que les durées qui séparent deux arrivées successives, les durées de service et les durées qui séparent deux rappels successifs sont mutuellement indépendantes.

Comme on l'a expliqué précédemment, sous les hypothèses mentionnées ci-dessus, le système de file d'attente $M/M/2$ avec rappels peut être décrit par une chaîne de Markov bidimensionnelle dont l'espace d'état est

$$\mathcal{S} = \{(i, j), \quad 0 \leq i \leq 2 \quad \text{and} \quad j \in \mathbb{N}\} = \{0, 1, 2\} \times \mathbb{N}$$

où i représente le nombre de serveurs occupés et j le nombre de clients qui sont dans l'orbite du système.

Et sous l'hypothèse que $\lambda < 2$ et en ordonnant les états comme suit

$$\mathcal{S} = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 1), (0, 2), (1, 2), (2, 2), \dots\}$$

ce système atteint le régime stationnaire et admet la distribution stationnaire

$$\tilde{\Pi} = [\tilde{\pi}_{(i', j')}]_{(i', j') \in \mathcal{S}} = [\tilde{\Pi}_0, \tilde{\Pi}_1, \tilde{\Pi}_2, \dots]$$

avec, pour $j \in \mathbb{N}$:

$$\tilde{\Pi}_j = [\tilde{\pi}_{(0, j)}, \tilde{\pi}_{(1, j)}, \tilde{\pi}_{(2, j)}]$$

et dont les composantes sont les solutions des équations, dites d'équilibre, suivantes :

$$(\lambda + j\mu) \tilde{\pi}_{(0, j)} = \tilde{\pi}_{(1, j)} \quad (2.4)$$

$$(\lambda + 1 + j\mu) \tilde{\pi}_{(1, j)} = \lambda \tilde{\pi}_{(0, j)} + (j + 1) \mu \tilde{\pi}_{(0, j+1)} + 2 \tilde{\pi}_{(2, j)} \quad (2.5)$$

$$(\lambda + 2) \tilde{\pi}_{(2, j)} = \lambda \tilde{\pi}_{(1, j)} + (j + 1) \mu \tilde{\pi}_{(1, j+1)} + 2 \tilde{\pi}_{(2, j-1)} \quad (2.6)$$

et de l'équation de normalisation :

$$\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\pi}_{(0, j)} + \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\pi}_{(1, j)} + \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\pi}_{(2, j)} = 1 \quad (2.7)$$

En ce qui concerne les équations d'équilibre (2.4), (2.5) et (2.6) ainsi que l'équation de normalisation (2.7), elles ne sont que les équations qui composent le système d'équations (2.3) pour $c = 2$ et $\nu = 1$. Et dans la monographie de FALIN and TEMPLETON (1997) [51], les auteurs ont donné les solutions détaillées de ces équations qui sont les

suivantes :

$$\tilde{\pi}_{(0,j)} = \frac{\lambda^j}{j! \mu^j} \cdot \prod_{k=0}^{j-1} \frac{(\lambda + k \mu)^2 + k \mu}{2 + 3 \lambda + 2 \mu + 2 k \mu} \cdot \tilde{\pi}_{(0,0)} \quad (2.8)$$

$$\tilde{\pi}_{(1,j)} = (\lambda + j \mu) \frac{\lambda^j}{j! \mu^j} \cdot \prod_{k=0}^{j-1} \frac{(\lambda + k \mu)^2 + k \mu}{2 + 3 \lambda + 2 \mu + 2 k \mu} \cdot \tilde{\pi}_{(0,0)} \quad (2.9)$$

$$\tilde{\pi}_{(2,j)} = [1 + \lambda + (j + 1) \mu] \frac{\lambda^j}{j! \mu^j} \cdot \prod_{k=0}^j \frac{(\lambda + k \mu)^2 + k \mu}{2 + 3 \lambda + 2 \mu + 2 k \mu} \cdot \tilde{\pi}_{(0,0)} \quad (2.10)$$

où

$$\tilde{\pi}_{(0,0)}^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j! \mu^j} \cdot \prod_{k=0}^{j-1} \frac{(\lambda + k \mu)^2 + k \mu}{2 + 3 \lambda + 2 \mu + 2 k \mu} \cdot \left[1 + \lambda + j \mu + \frac{[1 + \lambda + (j + 1) \mu] [(\lambda + j \mu)^2 + j \mu]}{2 + 3 \lambda + 2 (j + 1) \mu} \right] \quad (2.11)$$

2.4 Modèle de Neuts et Rao

Comme nous l'avons mentionné précédemment, à cause de l'hétérogénéité spatiale des processus de Markov associés aux systèmes de files d'attente $M/M/c$ avec rappels et leurs espaces d'état infinis, conséquence directe du phénomène de rappels, une étude exacte et exhaustive de ces systèmes est une question qui nécessite de résoudre des problèmes analytiques très complexes. Des solutions explicites n'ont été obtenues que dans quelques cas particuliers. Nous soulignons l'absence de formules explicites pour les principales caractéristiques de performance (distribution stationnaire, longueur moyenne de la file d'attente, etc.) lorsque le nombre de serveurs est strictement supérieur à deux ($c > 2$).

Pour remédier à cela, les chercheurs ont opté pour des méthodes qui donnent des solutions approximatives aux problèmes posés par ces systèmes. Ces méthodes peuvent être classées en trois grandes catégories : « les approximations », « les modèles tronqués finis » et « les modèles tronqués généralisés ». Dans la première catégorie, nous incluons les études où le modèle original, difficile à étudier, est remplacé par un modèle simplifié. Souvent, l'approximation n'est valable que dans des domaines précis ou dans des cas particuliers extrêmes (trafic important, faible intensité de rappels, etc.). Les modèles tronqués finis (voir [122] et [129]) consistent à remplacer l'espace d'état infini initial \mathcal{S} par un autre espace d'état fini tronqué. Une première possibilité simple est obtenue en imposant une limite fictive à la capacité de l'orbite (voir [129]). Ensuite, les chercheurs ont proposé des méthodes de troncature plus sophistiquées qui reposent sur l'exclusion des états dont les probabilités stationnaires sont négligeables (voir [122]). L'inconvénient de cette catégorie de méthodes est que lorsque les niveaux de troncature sont très élevés, les calculs deviennent trop compliqués et exigent beaucoup d'efforts. Dans la troisième catégorie, les modèles, dits tronqués généralisés (voir [47], [51], [105] et [22]), sont plus efficaces et offrent de meilleures précision. L'idée principale d'une troncature généralisée est d'approximer le système initial, dont l'espace d'état \mathcal{S} est infini, sur lequel est difficile de manipuler les calculs par un autre système calculable dont l'espace d'état est le même que celui du système initial.

Dans cette section, comme modèle d'approximation du système de files d'attente $M/M/c$ avec rappels, nous proposons le modèle de Neuts et Rao élaboré dans l'article NEUTS and RAO (1990) [105]. Ce modèle d'approximation, qui s'inscrit dans la catégorie « les modèles tronqués généralisés », sera l'objet d'étude de sa stabilité forte dans le prochain chapitre.

2.4.1 Description du modèle

Pour donner une approximation du modèle $M/M/c$ avec rappels, NEUTS et RAO ont proposé une méthode de troncature où ils ont limité le nombre de clients en orbite, autorisés à effectuer des rappels, à un nombre approprié N . Cette méthode a donné naissance à un nouveau modèle, dit « modèle tronqué de Neuts et Rao », qui ne diffère du modèle initial $M/M/c$ avec rappels que dans le taux global de rappels. Le taux de rappels global de ce modèle est $\mu_j = \min(j, N) \cdot \mu$, pour $j \geq 0$, où j est le nombre de clients en orbite.

Ainsi, voir [105], l'état du modèle tronqué de Neuts et Rao peut être décrit au moyen d'un processus bivarié $\widehat{X}_2 = \{(\widehat{C}_2(t), \widehat{W}_2(t)), t \in \mathbb{R}_+\}$, où $\widehat{C}_2(t)$ représente le nombre de serveurs occupés et $\widehat{W}_2(t)$ le nombre de clients en orbite. Sous ces hypothèses, le processus \widehat{X}_2 est un processus quasi de naissance et de mort (Quasi Birth and Death Process "QBDP") dont l'espace d'état est le même que celui du modèle $M/M/c$ avec rappels :

$$\mathcal{S} = \{(i, j), \quad 0 \leq i \leq c \quad \text{et} \quad j \in \mathbb{N}\}$$

Les probabilités d'état à un instant t sont :

$$\mathbf{P}_{(i,j)}^{(2)}(t) = \mathbf{P}\{\widehat{C}_2(t) = i, \widehat{W}_2(t) = j\}, \quad (i, j) \in \mathcal{S}$$

Remarque 2.2. L'avantage des QBDP réside dans le fait que les méthodes permettant de déterminer leurs conditions de stabilité et de calculer leurs distributions stationnaire sont largement étudiées dans la littérature de la théorie des files d'attente (voir [104]).

Le seuil de troncature N peut être choisi d'une manière à ce que les probabilités de transition dues à la troncatures soient suffisamment négligeables. Comme il n'existe pas de méthodes analytiques pour le choix de N (voir [12], [22] et [105]), nous proposons dans notre travail une approche basée sur les bornes de perturbation de la stabilité forte. Nous commençons par une valeur initiale raisonnable de N , ensuite nous augmentons cette valeur progressivement jusqu'à ce que $\|\widetilde{\Pi} - \Pi\|_v$ soit inférieur à une valeur positive déterminée d'avance, où $\widetilde{\Pi}$ est la distribution stationnaire du processus \widehat{X}_1 , Π est la distribution stationnaire du processus \widehat{X}_2 et $\|\cdot\|_v$ est une norme matricielle que nous préciserons dans le prochain chapitre.

2.4.2 Taux de transition

La matrice des taux de transition $Q = [q((i, j), (i', j'))]_{(i,j),(i',j') \in \mathcal{S}^2}$ du processus \widehat{X}_2 est donnée par (voir [105]) :

Pour $0 \leq i \leq c-1$ et $0 \leq j \leq N-1$:

$$q((i, j), (i', j')) = \tilde{q}((i, j), (i', j'))$$

Pour $0 \leq i \leq c-1$ et $j \geq N$:

$$q((i, j), (i', j')) = \begin{cases} \lambda & \text{si } (i', j') = (i+1, j) \\ i\nu & \text{si } (i', j') = (i-1, j) \\ N\mu & \text{si } (i', j') = (i+1, j-1) \\ -(\lambda + i\nu + N\mu) & \text{si } (i', j') = (i, j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $i = c$:

$$q((i, j), (i', j')) = \tilde{q}((i, j), (i', j'))$$

En ordonnant les états comme dans (2.1), c'est-à-dire :

$$\mathcal{S} = \{(0, 0), (1, 0), \dots, (c, 0), (0, 1), (1, 1), \dots, (c, 1), (0, 2), (1, 2), \dots, (c, 2), \dots\}$$

nous pouvons exprimer le générateur infinitésimal \tilde{Q} du processus \widehat{X}_2 sous forme de la matrice par blocs suivante :

$$Q = \left(\begin{array}{cccc|cc} A_1^{(0)} & A_0 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ A_2^{(1)} & A_1^{(1)} & A_0 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & A_2^{(2)} & A_1^{(2)} & \ddots & & & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & & & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & & A_1^{(N-2)} & A_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & & A_2^{(N-1)} & A_1^{(N-1)} & A_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & & & \mathbf{0} & A_2 & A_1 & A_0 & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_2 & A_1 & A_0 & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_2 & A_1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots \end{array} \right) \quad (2.12)$$

où $A_0, A_1^{(j)}$ ($0 \leq j \leq N$) et $A_2^{(j)}$ ($1 \leq j \leq N$) sont les matrices définies dans Section 2.3.2, avec :

$$A_1 = A_1^{(N)} \quad \text{and} \quad A_2 = A_2^{(N)}$$

2.4.3 Diagramme des taux de transition

Le comportement stochastique du processus \widehat{X}_2 peut être représenté à l'aide du diagramme des taux de transition présenté dans Figure 2.4 pour le cas où $c = 4$:

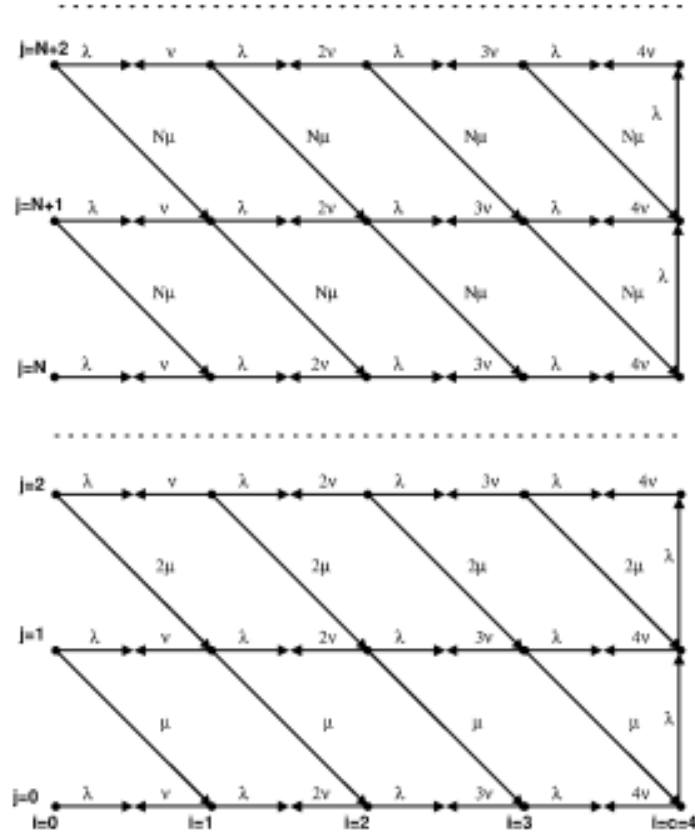


Figure 2.4. Diagramme des taux de transition du modèle de Neuts et Rao

2.4.4 Probabilités de transition de la chaîne induite

Soit $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ la chaîne de Markov induite du processus \widehat{X}_2 , alors sa matrice des probabilités de transition $P = [p((i, j), (i', j'))]_{((i,j),(i',j')) \in \mathcal{S}^2}$ est donnée comme suit :

Pour $0 \leq i \leq c-1$ et $0 \leq j \leq N-1$:

$$p((i, j), (i', j')) = \tilde{p}((i, j), (i', j'))$$

Pour $0 \leq i \leq c-1$ et $j \geq N$:

$$p((i, j), (i', j')) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda + i\nu + N\mu} & \text{si } (i', j') = (i+1, j) \\ \frac{i\nu}{\lambda + i\nu + N\mu} & \text{si } (i', j') = (i-1, j) \\ \frac{N\mu}{\lambda + i\nu + N\mu} & \text{si } (i', j') = (i+1, j-1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $i = c$:

$$p((i, j), (i', j')) = \tilde{p}((i, j), (i', j'))$$

Comme précédemment, en ordonnant les états comme dans (2.1), nous pouvons exprimer la matrice des probabilités de transition P de la chaîne X sous forme de la matrice par blocs suivante :

$$P = \left(\begin{array}{cccc|cc|cccc} B_1^{(0)} & B_0 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ B_2^{(1)} & B_1^{(1)} & B_0 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & B_2^{(2)} & B_1^{(2)} & \ddots & & & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & & & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & & B_1^{(N-2)} & B_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & & B_2^{(N-1)} & B_1^{(N-1)} & B_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & & & \mathbf{0} & B_2 & B_1 & B_0 & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_2 & B_1 & B_0 & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_2 & B_1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots \end{array} \right)$$

où $B_0, B_1^{(j)}$ ($0 \leq j \leq N$) et $B_2^{(j)}$ ($1 \leq j \leq N$) sont les matrices définie dans Section 2.3.4, avec :

$$B_1 = B_1^{(N)} \quad \text{and} \quad B_2 = B_2^{(N)}$$

2.4.5 Condition de stabilité

La codition de stabilité (2.2) du modèle $M/M/c$ avec rappels n'est plus la même pour le modèle de Neuts et Rao, car le taux de rappels global du modèle de Neuts et Rao devient constant à partir du niveau N , ce qui lui donne la structure d'un QBDP. Comme les QBDP ont été largement traités dans la littérature concernant les files d'attente (voir [104]), les méthodes de détermination de la condition d'ergodicité et de calcul de leurs distribution stationnaire sont donc bien étudiées. En se basant sur la théorie des QBDP (voir [105], [12] et [22]), la condition de stabilité du modèle de Neuts et Rao sera la suivante :

$$\frac{\lambda + N\mu}{c!} \left(\frac{\lambda + N\mu}{\nu} \right)^c < N\mu \sum_{k=0}^c \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda + N\mu}{\nu} \right)^k \quad (2.13)$$

2.4.6 La distribution stationnaire

Supposons, maintenant, que le modèle de Neuts et Rao est stable (le système atteint le régime stationnaire), c'est-à-dire (2.13) est vérifiée, alors sa distribution stationnaire $\Pi = [\pi_{(i', j')}]_{(i', j') \in \mathcal{S}}$, avec

$$\pi_{(i', j')} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}^{(2)}_{(i', j')}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{ \widehat{C}_2(t) = i', \widehat{W}_2(t) = j' \}, \quad (i', j') \in \mathcal{S}$$

existe et elle est l'unique solution du système d'équations

$$\begin{cases} \Pi \cdot \widetilde{Q} = \mathbf{0}_{\mathcal{S}} \\ \Pi \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{S}} = 1 \end{cases}$$

où $\mathbf{0}_S$ est le vecteur nul dont toutes les composantes sont égales à 0 et $\mathbb{1}_S$ est le vecteur unitaire dont toutes les composantes sont égales à 1.

En ordonnant les états du système comme dans (2.1), nous pouvons exprimer Π sous la forme suivante :

$$\Pi = [\Pi_j]_{j \in \mathbb{N}} = [\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2, \dots]$$

avec, pour $j \in \mathbb{N}$:

$$\Pi_j = [\pi_{(0,j)}, \pi_{(1,j)}, \pi_{(2,j)}, \dots, \pi_{(c,j)}]$$

2.4.7 Calcul de la distribution stationnaire Π

Pour calculer la distribution stationnaire $\Pi = [\Pi_j]_{j \in \mathbb{N}}$ (voir [105]), nous allons suivre les deux étapes suivantes :

1. Pour $j \geq N$, nous allons utiliser la méthode de calcul d'une distribution stationnaire d'un QBDP développée dans [104].
2. Pour $0 \leq j \leq N-1$, nous pouvons choisir n'importe quelle méthode itérative de résolution d'un système d'équations linéaires, comme, par exemple, la méthode de Gauss-Seidel. Dans notre cas, et à cause de ses propriétés de stabilité, nous avons choisi « la méthode des blocs diagonaux inverses » développée dans l'article GAVER, JACOBS and LATOUCHE (1984) [54].

a) Pour $j \geq N$:

Dans ce cas :

$$\Pi_{N+k-1} = \Pi_{N-1} \cdot \mathbf{R}^k \quad \text{for } k \geq 1 \quad (2.14)$$

où la matrice \mathbf{R} est l'unique solution non négative dont le rayon spectral est inférieur strictement à un ($\text{Sp}(\mathbf{R}) < 1$), c'est-à-dire le maximum des valeurs absolues de ses valeurs propres est inférieur strictement à un, de l'équation :

$$\mathbf{R}^2 A_2 + \mathbf{R} A_1 + A_0 = \mathbf{0} \quad (2.15)$$

avec \mathbf{R} et $\mathbf{0}$ qui apparaît dans (2.15) sont des matrices de dimension $(c+1) \times (c+1)$ où toutes les composantes de la matrice $\mathbf{0}$ sont égales à zéro.

Théoriquement, il a été établi (voir [104]) que la matrice \mathbf{R} est égale à $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{R}_n$, où $\{\mathbf{R}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite définie par :

$$\begin{cases} \mathbf{R}_0 = \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{n+1} = -A_0 A_1^{-1} - \mathbf{R}_n^2 A_2 A_1^{-1} \end{cases} \quad \text{pour } n \geq 0 \quad (2.16)$$

Pratiquement, il a été démontré (voir [104]) que la suite $\{\mathbf{R}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone, de sorte que la matrice \mathbf{R} peut être déterminée à partir de (2.16) par itérations successives. En commençant par $\mathbf{R}_0 = \mathbf{0}$, nous répétons les itérations jusqu'à ce que deux itérations consécutives de \mathbf{R} diffèrent de moins d'une constante positive ε fixée d'avance. Autrement dit, jusqu'à ce que $\|\mathbf{R}_{n+1} - \mathbf{R}_n\| < \varepsilon$ où $\|\cdot\|$ est une norme matricielle appropriée.

b) Pour $0 \leq j \leq N - 1$:

Soit le vecteur $\Pi^* = [\Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_{N-1}]$ la partie de Π qui correspond au bloc nord-ouest de la matrice Q , comme il est indiqué dans (2.12). Alors Π^* est le vecteur stationnaire du générateur infinitésimal U représenté ci-dessous (see [105]), qui vérifie l'équation de normalisation :

$$\Pi \cdot \mathbb{1}_S = 1 \tag{2.17}$$

$$U = \begin{pmatrix} A_1^{(0)} & A_0 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A_2^{(1)} & A_1^{(1)} & A_0 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2^{(2)} & A_1^{(2)} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & & A_1^{(N-2)} & A_0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & & A_2^{(N-1)} & A_1^{(N-1)} + \mathbf{R} A_2 \end{pmatrix}$$

Lemme 2.1. Étant donné (2.14) et puisque le rayon spectral de \mathbf{R} est strictement inférieur à un ($\text{Sp}(\mathbf{R}) < 1$), alors nous avons :

$$\Pi \cdot \mathbb{1}_S = 1 \iff \left(\sum_{j=0}^{N-2} \Pi_j + \Pi_{N-1} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \right) \cdot \mathbb{1} = 1$$

où $\mathbb{1}$ le $(c + 1)$ -vecteur colonne unitaire (toutes ses composantes sont égales à 1) et \mathbf{I} est la $(c + 1) \times (c + 1)$ -matrice identité.

Preuve. Nous avons :

$$\begin{aligned} \Pi \cdot \mathbb{1}_S &= \sum_{j=0}^{\infty} \Pi_j \cdot \mathbb{1} \\ &= \left(\sum_{j=0}^{N-2} \Pi_j + \sum_{j=N-1}^{\infty} \Pi_j \right) \cdot \mathbb{1} \end{aligned}$$

Et, d'après (2.14) :

$$\begin{aligned} \sum_{j=N-1}^{\infty} \Pi_j &= \sum_{k=0}^{\infty} \Pi_{N-1} \cdot \mathbf{R}^k \quad \text{avec} \quad \mathbf{R}^0 = \mathbf{I} \\ &= \Pi_{N-1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{R}^k \end{aligned}$$

Et comme $\text{Sp}(\mathbf{R}) < 1$, alors (voir série de Neumann dans [92]) :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{R}^k = (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}$$

Donc :

$$\Pi \cdot \mathbb{1}_S = \sum_{j=0}^{N-2} \Pi_j + \Pi_{N-1} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}$$

Par coséquent :

$$\Pi \cdot \mathbb{1}_S = 1 \iff \left(\sum_{j=0}^{N-2} \Pi_j + \Pi_{N-1} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \right) \cdot \mathbb{1} = 1$$

FIN DE LA PREUVE

En utilisant la méthode des blocs diagonaux inverses décrite dans [54], les composantes du vecteur Π^* seront calculés comme suit :

$$\Pi_{N-1} \cdot C_{N-1} = \mathbf{0} \quad (2.18)$$

$$\Pi_j = \Pi_{j+1} \cdot A_2^{(j+1)} \cdot \left(-C_j^{-1} \right) \quad \text{pour } 0 \leq j \leq N-2 \quad (2.19)$$

$$\left(\sum_{j=0}^{N-2} \Pi_j + \Pi_{N-1} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \right) \cdot \mathbb{1} = 1 \quad (2.20)$$

où :

$$\begin{cases} C_0 = A_1^{(0)} \\ C_j = A_1^{(j)} + A_2^{(j)} \cdot \left(-C_{j-1}^{-1} \right) \cdot A_0 \quad \text{pour } 1 \leq j \leq N-2 \\ C_{N-1} = A_1^{(N-1)} + \mathbf{R} \cdot A_2 + A_2^{(N-1)} \cdot \left(-C_{N-2}^{-1} \right) \cdot A_0 \end{cases} \quad (2.21)$$

Remarque 2.3. À partir de (2.18), Π_{N-1} sera déterminé de manière unique à une constante multiplicative près. Cette constante sera précisée par (2.19) et (2.20).

2.4.8 Algorithme de la distribution stationnaire Π

Dans cette section, nous donnerons l'algorithme qui précisera les étapes à suivre pour calculer la distribution stationnaire Π , et cela en utilisant n'importe quel logiciel de calcul (par exemple MATLAB) :

ÉTAPE 01 : INITIALISATION :

ÉTAPE 02 : Définir les entrées :

Le taux des arrivées : λ ,

Le taux de service : ν ,

Le taux de rappels : μ ,

Le nombre de serveurs : c ,

Le niveau de troncature : N ;

Aller à **03**.

ÉTAPE 03 : Vérifier les conditions de stabilité (2.2) et (2.13) :

SI : (2.2) et (2.13) sont vérifiées,

Aller à **04** ;

SINON :

Quitter.

ÉTAPE 04 : Déterminer les matrices :

A_0 ,

$A_1^{(j)}$ ($0 \leq j \leq N$),

$A_2^{(j)}$ ($1 \leq j \leq N$),

$A_1 = A_1^{(N)}$,

$A_2 = A_2^{(N)}$;

Aller à **05**.

ÉTAPE 05 : Déterminer la matrice \mathbf{R} en utilisant (2.16) ;

Aller à **06**.

ÉTAPE 06 : Déterminer les matrices C_j ($0 \leq j \leq N - 1$) en utilisant (2.21) ;

Aller à **07**.

ÉTAPE 07 : Déterminer le vecteur Π_{N-1} en résolvant le système d'équations :

$$\Pi_{N-1} \cdot C_{N-1} = \mathbf{0}$$

$$\Pi_{N-1} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \cdot \mathbf{1} = 1$$

Aller à **08**.

ÉTAPE 08 : Déterminer les vecteurs Π_j ($0 \leq j \leq N - 1$) en utilisant (2.19) ;

Aller à **09**.

ÉTAPE 09 : Normaliser le vecteur Π^* obtenu en utilisant (2.20) ;
Aller à 10.

ÉTAPE 10 : Déterminer les vecteurs Π_j ($j \geq N$) en utilisant (2.14) ;
Aller à 11

ÉTAPE 11 : FIN.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit quelques outils essentiels qui nous permettent d'étudier les systèmes de files d'attente, en particulier les systèmes avec rappels. Nous avons présenté une description générale du modèle $M/M/c$ avec rappels et mis en évidence les importantes difficultés analytiques rencontrées lors de l'analyse stochastique de ce modèle, notamment lorsque le nombre de serveurs c est supérieur ou égal à 3 (absence de formules explicites et des procédures récursives qui permettent de calculer la distribution stationnaire du processus qui décrit l'état de ce système). Par la suite, nous avons exposé les principales caractéristiques du modèle tronqué proposé par NEUTS et RAO (1990) [105] qui constitue une approximation du modèle $M/M/c$ avec rappels et qui fera l'objet d'une étude de sa stabilité dans le prochain chapitre. À la fin, nous avons donné un algorithme qui précise les étapes à suivre pour calculer la distribution stationnaire du modèle de Neuts et Rao.

Mais avant de clore ce chapitre, il est impératif pour nous de signaler que nous n'avons exposé dans ce chapitre que les résultats dont nous avons besoin, et cela sans entrer dans des détails techniques complexes qui peuvent nous éloigner de l'objectif de notre travail. Pour la plupart de ces résultats exposés, pour ne pas dire tous, ainsi que leurs démonstrations, le lecteur peut les trouver dans : l'article de FALIN (1983) [47], l'article de NEUTS and RAO (1990) [105], l'article de ARTALEJO (1995) [13], la monographie de FALIN and TEMPLETON (1997) [51], l'article de GÓMEZ-CORRAL and RAMALHOTO (1999) [57], l'article de ANISIMOV and ARTALEJO (2002) [12], l'article de ARTALEJO and FALIN (2002) [20], l'article de ARTALEJO and POZO (2002) [22] et le livre de ARTALEJO and GÓMEZ-CORRAL (2008) [21].

Pour une littérature pertinente sur les systèmes de files d'attente avec rappels, le lecteur peut se concentrer sur certains résultats spécifiques apparus dans les années 1950, ainsi que sur les articles de synthèse publiés par : YANG and TEMPLETON (1987) [131], FALIN (1986, 1990) [49, 50], ARTALEJO (1998, 1999a, 1999b, 2009, 2010) [15–19], ARTALEJO and FALIN (2002) [20], GÓMEZ-CORRAL (2006) [56], et plus récemment, KIM and KIM (2018) [75] ont proposé une enquête détaillée sur les systèmes de files d'attente avec rappels. Ces articles constituent une source de références très exhaustive sur ce sujet. Pour plus de détails sur les sources permettant d'étudier les systèmes de files d'attente avec rappels, le lecteur curieux est invité à consulter les textes mentionnés dans l'article SHEKHAR, RAINA and KUMAR (2016) [120].

Bornes de perturbation du modèle $M/M/c$ avec rappels

Introduction

Après avoir énoncé dans le chapitre précédent quelques notions, qui nous sont essentielles dans notre travail, sur les systèmes de files d'attente avec rappels, nous allons nous intéresser à l'application de la méthode de stabilité forte sur ces systèmes. En particulier, dans ce qui suit, nous considérerons le système de file d'attente $M/M/c$ avec rappels. Notre travail consiste à étudier la sensibilité de la distribution stationnaire de ce système relativement à ses paramètres. Autrement dit, nous allons étudier qualitativement et quantitativement le comportement stationnaire de ce système après avoir perturbé son paramètre de rappel global. Qualitativement, nous allons démontrer qu'une petite perturbation du paramètre de rappel global du système induit une petite perturbation de ses caractéristiques, et cela par rapport à une métrique donnée. En d'autres termes, le processus qui décrit l'état du système est fortement stable par rapport à cette métrique. Quantitativement, cela concerne l'obtention des bornes de stabilité forte (bornes de perturbation) après perturbation du taux de rappels global du système. Pour cela, nous commencerons par la description du modèle et donner quelques résultats fondamentaux de la méthode de stabilité forte. Ensuite, nous présenterons les résultats théoriques obtenus en appliquant cette méthode sur ce type de systèmes de files d'attente. Pour terminer avec l'exhibition des résultats numériques dans le but d'illustrer la pertinence de la méthode utilisée.

3.1 Description du modèle et position du problème

Considérons le système de file d'attente $M/M/c$ avec rappels (voir le chapitre précédent) dans lequel les clients primaires arrivent selon un processus de Poisson de taux λ . L'espace de service est composé de c serveurs identiques et les durées de service

des clients sont des variables aléatoires indépendants qui suivent une loi de probabilité exponentielle de paramètre ν . Un client primaire qui trouve tous les serveurs occupés à son arrivée est contraint de quitter la zone de service pour devenir un client secondaire en renouvelant sa demande de service après une durée de temps aléatoire qui suit une loi de probabilité exponentielle de paramètre μ . Entre deux tentatives d'avoir le service, on dit que le client est en orbite. Comme d'habitude, nous supposons que les durées qui séparent deux arrivées successives, les durées de service et les durées qui séparent deux rappels successifs sont mutuellement indépendantes. Sous ces hypothèses, ce système peut être décrit par une chaîne de Markov à temps continu \widehat{X}_1 avec pour espace d'état $\mathcal{S} = \{(i, j), 0 \leq i \leq c \text{ et } j \in \mathbb{N}\}$, où i représente le nombre de serveurs occupés et j le nombre de clients dans l'orbite, et sous la condition de stabilité (voir Chapitre 2)

$$\rho = \frac{\lambda}{c\nu} < 1 \quad (3.1)$$

ce système aura une distribution stationnaire qu'on va noter par $\tilde{\Pi}$.

Comme nous l'avons mentionné dans le chapitre précédent, dans la plupart des cas, ni la forme exacte de la distribution stationnaire de ce type de système et ni des méthodes algorithmiques qui permettent de la calculer ne sont connues (voir [14], [51] et [57]). Sans entrer dans les détails, on peut dire que les principales caractéristiques de performance de ces modèles de file d'attente, y compris la distribution stationnaire, ne sont connues que pour le cas où le nombre de serveurs est inférieur ou égal à 2 ($c \leq 2$). Pour remédier à cela, de nombreux travaux ont été réalisés dans ce sens et dans lesquels les auteurs ont proposé des méthodes d'approximation qui permettent de calculer approximativement la distribution stationnaire. Parmi ces méthodes, nous sommes concentrés dans notre travail à la méthode proposée par NEUTS and RAO (1990) [105] et qui s'inscrit dans la catégorie des méthodes qu'on appelle « méthodes de troncature généralisée » (voir [105], [51] et [21]), catégorie que beaucoup de chercheurs ont utilisée pour étudier les systèmes de file d'attente avec rappels (voir [47], [105], [41], [87] et [22]).

Dans l'article NEUTS and RAO (1990) [105], les auteurs ont proposé une méthode de troncature qui donne une approximation du système initial $M/M/c$ avec rappels et dont les caractéristiques de performance sont faciles à calculer numériquement. Ils ont limité le nombre de clients en orbite autorisés à effectuer de nouvelles tentatives pour avoir le service souhaité à un nombre approprié N , ce qui donne un processus approximatif pouvant être considéré comme un processus quasi de naissance et de mort (Quasi Birth and Death Process "QBDP"). L'avantage de ces processus réside dans le fait que les méthodes permettant de déterminer leurs conditions d'ergodicité et de calculer leurs distributions stationnaires sont bien étudiées dans la littérature (voir [104]). En effet, en faisant cela, NEUTS et RAO ont obtenu un nouveau système de file d'attente avec rappels dont le taux de rappels global est $\mu_j = \min(j, N) \cdot \mu$, pour $j \geq 0$, où j est le nombre de clients en orbite. La dynamique de ce nouveau système peut être décrite par un processus \widehat{X}_2 QBDP dont l'espace d'état est \mathcal{S} et dont la condition de stabilité (voir Chapitre 2) est

$$\frac{\lambda + N\mu}{c!} \left(\frac{\lambda + N\mu}{\nu} \right)^c < N\mu \sum_{k=0}^c \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda + N\mu}{\nu} \right)^k \quad (3.2)$$

et pour lequel on va noter sa distribution stationnaire, si la condition (3.2) est vérifiée, par Π .

Il est clair que plus N , nombre de clients en orbite qui sont autorisés à effectuer des rappels, est grand, plus le modèle de NEUTS et RAO décrit par le processus \widehat{X}_2 sera proche du modèle initial $M/M/c$ avec rappels décrit par le processus \widehat{X}_1 . La question qui s'impose est la suivante : comment choisir N de sorte que le modèle de NEUTS et RAO puisse décrire "fidèlement" le modèle $M/M/c$ avec rappels ? Nombre de chercheurs qui ont utilisé la méthode de troncature de NEUTS et RAO ont proposé, chacun par son approche, des méthodes pour répondre à cette question (voir, par exemple, [105] et [12]). Dans notre travail, nous avons proposé une nouvelle approche basée sur « la méthode de la stabilité forte » (voir [7], [70], [71], [89] et [68]).

L'objectif de la théorie de perturbation des chaînes de Markov (Perturbation Theory for Markov Chains "PTMC") est de connaître l'impact que peut avoir, sur la distribution stationnaire d'une chaîne de Markov, une légère perturbation de ses probabilités de transition. Initialement développée pour les chaînes de Markov à espace d'état fini, cette théorie a récemment suscité un vif intérêt pour les chaînes de Markov à espace état infini. Cet intérêt provient du fait qu'en pratique, de nombreux modèles importants ont un espace d'état infini. Par exemple, les chaînes de Markov induites du processus de longueur de nombreux systèmes de files d'attente à capacité d'accueil infinie ont un espace d'états infini, comme le montre le modèle $M/M/c$ avec rappels étudié dans ce travail. Pour une littérature plus pertinente sur la PTMC et ses applications, le lecteur peut se référer aux articles suivants : ANISIMOV (1988) [11], CHO and MEYER (2001) [40], KIRKLAND (2002) [76], NEUMANN and XU (2003) [101], MITROPHANOV (2005) [95], MOUHOUBI and AÏSSANI (2010) [96], IPSEN and SELEE (2011) [63], LIU (2012) [89], BORTOLUSSI and HAYDEN (2013) [32], CASWELL (2013) [39], LI, JIANG, CHING and CUI (2013) [86], HERVÉ and LEDOUX (2014) [60], JIANG, LIU and TANG (2017) [68], LIU and LI (2018) [90], RUDOLF and SCHWEIZER (2018) [117], CRUZ (2020) [43], MAO and SONG (2020) [91] and INFANGER and GLYNN (2022) [61].

Soit \tilde{P} la matrice des probabilité de transition de \tilde{X} la chaîne de Markov induite de \widehat{X}_1 , et soit P la matrice des probabilité de transition de X la chaîne de Markov induite de \widehat{X}_2 . L'objectif de la PTMC est de répondre à la question suivante : quel est l'effet que peut avoir le passage de \tilde{P} à P sur la distribution stationnaire $\tilde{\Pi}$? La réponse à cette question est exprimée par la différence $\tilde{\Pi} - \Pi$ entre les distributions stationnaires Π et $\tilde{\Pi}$. Plus précisément, soit $\|\cdot\|$ une certaine norme matricielle appropriée, alors le problème ci-dessus peut être reformulé comme suit : peut-on donner une approximation de $\|\tilde{\Pi} - \Pi\|$, ou cerner $\|\tilde{\Pi} - \Pi\|$, en termes de $\|\tilde{P} - P\|$?

Comme nous l'avons mentionné précédemment, pour répondre à la question posée ci-dessus, nous avons opté pour une approche basée sur la méthode de la stabilité forte. Plus précisément, nous avons utilisé la norme matricielle dite « v -norme » ou « norme poid du supremum (weighted supremum norm) » notée par $\|\cdot\|_v$ (voir [70], [89] et [68]), où v est une certaine fonction mesurable (vecteur colonne), dite « fonction test », définie sur \mathcal{S} et minorée par 1. En prenant en considération ces notations, le problème ci-dessus peut être reformulé comme suit : peut-on donner une approximation de $\|\tilde{\Pi} - \Pi\|_v$, ou cerner $\|\tilde{\Pi} - \Pi\|_v$, en termes de $\|\tilde{P} - P\|_v$?

Dans notre approche, nous allons établir une borne supérieure de $\tilde{\Pi} - \Pi$ selon la

v -norme. Cette norme sera basée sur la fonction test v définie sur \mathcal{S} par :

$$\forall (i, j) \in \mathcal{S}, \quad v(i, j) = \alpha^i \beta^j$$

pour un certain $\alpha > 1$ et un certain $\beta > 1$. Les deux étapes principales de notre analyse seront, premièrement, établir une borne supérieure de la v -norme de $\tilde{\Pi} - \Pi$ en fonction de la v -norme de $\tilde{P} - P$ et en fonction d'autres constantes que nous préciserons dans la suite de ce chapitre et, deuxièmement, déterminer les paramètres α et β pour lesquels la v -norme de $\tilde{\Pi} - \Pi$ soit la plus petite possible.

3.2 Éléments de la méthode de stabilité forte

La méthode de stabilité forte, connue également sous le nom de « méthode des opérateurs de la théorie de stabilité », a été élaborée au début des années 1980 dans l'article AÏSSANI and KARTASHOV (1983) [7]. Dans cette section, nous donnerons quelques définitions et concepts fondamentaux de cette méthode qui nous sont nécessaires pour son application dans notre travail. La plupart des notations utilisées dans ce chapitre sont introduites dans de nombreuses références, voir, par exemple, les articles : ABBAS and AÏSSANI (2010) [2], HERVÉ and LEDOUX (2014) [60] et ISSADI, ABBAS and AÏSSANI (2017) [64]). Pour les démonstrations et pour plus de détails sur ces résultats, le lecteur peut consulter les références suivantes : AÏSSANI and KARTASHOV (1983) [7], KARTASHOV (1986) [70], KARTASHOV (1996) [71], LIU (2012) [89] et JIANG, LIU and TANG (2017) [68].

3.2.1 Notations et préliminaires

Soit $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ une chaîne de Markov à espace d'état dénombrable (fini ou infini) \mathcal{S} , dont la matrice des probabilités de transition est $P = [p(s, t)]_{(s, t) \in \mathcal{S}^2}$ et dont la distribution stationnaire est $\Pi = [\pi(t)]_{t \in \mathcal{S}}$. Notons par $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ l'espace des mesures finies sur \mathcal{S} et par $\mathbb{R}_b^{\mathcal{S}}$ l'espace des fonctions mesurables bornées sur \mathcal{S} . Alors, pour toute mesure $\mathbf{w} = [w(t)]_{t \in \mathcal{S}} \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$ et toute fonction $f = [f(s)]_{s \in \mathcal{S}} \in \mathbb{R}_b^{\mathcal{S}}$, associons à la matrice des probabilités de transition P de la chaîne de Markov X les applications linéaires suivantes :

$$\forall t \in \mathcal{S}, \quad (\mathbf{w}P)_{(t)} = \sum_{s \in \mathcal{S}} \mathbf{w}_{(s)} \cdot p(s, t) \quad (3.3)$$

$$\forall s \in \mathcal{S}, \quad (Pf)_{(s)} = \sum_{t \in \mathcal{S}} f(t) \cdot p(s, t) \quad (3.4)$$

Et le produit $\mathbf{w}f$ de la mesure \mathbf{w} par la fonction f est donné comme suit :

$$\mathbf{w}f = \sum_{s \in \mathcal{S}} \mathbf{w}_{(s)} f(s) \quad (3.5)$$

Remarque 3.1. En termes matriciels, la mesure $\mathbf{w} = [w(t)]_{t \in \mathcal{S}} \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$ est considérée comme « un vecteur ligne » et la fonction $f = [f(s)]_{s \in \mathcal{S}} \in \mathbb{R}_b^{\mathcal{S}}$ comme « un vecteur colonne ».

La v -norme

L'outil principal de notre analyse est la norme poids, dite « v -norme », notée par $\|\cdot\|_v$, où $v = [v(s)]_{s \in \mathcal{S}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{S}}$ est une fonction mesurable définie sur \mathcal{S} (pas nécessairement bornée) minorée inférieurement par une constante strictement positive :

$$\inf_{s \in \mathcal{S}} v(s) > 0$$

Avec pour toute mesure $\mathbf{w} \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$, sa v -norme est donnée par :

$$\|\mathbf{w}\|_v = \sum_{t \in \mathcal{S}} v(t) \cdot |w(t)| \quad (3.6)$$

Pour toute fonction $f \in \mathbb{R}_{\mathbf{b}}^{\mathcal{S}}$, sa v -norme est donnée par :

$$\|f\|_v = \sup_{s \in \mathcal{S}} \frac{|f(s)|}{v(s)} \quad (3.7)$$

Et la v -norme de toute matrice $A = [a(s, t)]_{(s, t) \in \mathcal{S}^2} \in \mathbb{R}^{\mathcal{S} \times \mathcal{S}}$ est définie par :

$$\|A\|_v = \sup_{s \in \mathcal{S}} \frac{1}{v(s)} \sum_{t \in \mathcal{S}} v(t) \cdot |a(s, t)| \quad (3.8)$$

Remarque 3.2. D'après (3.5) et selon la définition de la v -norme donnée ci-dessus, il est clair que pour toute fonction (vecteur) $f \in \mathbb{R}^{\mathcal{S}}$ définie sur \mathcal{S} telle que $\|f\|_v < \infty$ et pour toutes mesures $\tilde{\mathbf{w}}$ et \mathbf{w} dans $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ ayant des v -normes finies :

$$|(\tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{w})f| = |\tilde{\mathbf{w}}f - \mathbf{w}f| \leq \|\tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{w}\|_v \cdot \|f\|_v \quad (3.9)$$

3.2.2 Stabilité forte

Après avoir introduit, dans la section précédente, les notations nécessaires et avoir défini l'outil principal de la méthode de stabilité forte, à savoir la v -norme, nous allons donner à présent la définition de la stabilité forte. Ensuite, nous donnerons les conditions nécessaires et suffisantes pour que la chaîne de Markov X soit fortement stable par rapport à la v -norme $\|\cdot\|_v$:

Définition 3.1. [70] La chaîne de Markov X est dite « fortement stable par rapport à la norme $\|\cdot\|_v$ », ou « fortement v -stable », si :

1. $\|P\|_v < \infty$
2. Tout noyau de transition \tilde{P} dans un certain voisinage $\{\tilde{P}, \|\tilde{P} - P\|_v < \varepsilon\}$ ($\varepsilon > 0$) admet une unique mesure invariante $\tilde{\Pi} = [\tilde{\pi}(t)]_{t \in \mathcal{S}}$ telle que

$$\exists C = C(P) \geq 0, \quad \|\tilde{\Pi} - \Pi\|_v \leq C \cdot \|\tilde{P} - P\|_v \quad (3.10)$$

Remarque 3.3. Il est à noter (voir [71]) que la deuxième condition de la définition ci-dessus est équivalente à dire que $\|\tilde{\Pi} - \Pi\|_v$ converge uniformément vers 0 lorsque $\|\tilde{P} - P\|_v$ converge vers 0.

Le théorème qui suit est l'un des résultats fondamentaux de la méthode de stabilité forte. Il nous donne les conditions nécessaires et suffisantes pour que la chaîne de Markov X soit fortement v -stable :

Théorème 3.1. [70] Pour que la chaîne de Markov X soit fortement v -stable, il est nécessaire et suffisant que les conditions suivantes soient vérifiées :

1. $\|P\|_v < \infty$
2. Il existe une mesure non-négative $\mathbf{c} = [c_t]_{t \in \mathcal{S}} \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$ et il existe une fonction mesurable non-négative et bornée $\mathbf{d} = [d(s)]_{s \in \mathcal{S}} \in \mathbb{R}_b^{\mathcal{S}}$ telles que la matrice $\Theta = P - \mathbf{d} \cdot \mathbf{c}$ soit non-négative.
3. $\exists m \geq 0, \exists \delta < 1, \forall s \in \mathcal{S}, (\Theta^m v)(s) \leq \delta \cdot v(s)$

où, dans la seconde condition, $\mathbf{d} \cdot \mathbf{c}$ représente le produit matriciel usuel.

Remarque 3.4. Il est évident que pour que la chaîne de Markov X soit fortement v -stable, il suffit que les deux premières conditions du théorème ci-dessus soient vérifiées et que :

$$\exists \delta \in]0, 1[, \forall s \in \mathcal{S}, (\Theta v)(s) \leq \delta \cdot v(s) \quad (3.11)$$

3.2.3 Condition drift

Dans la proposition suivante, très utile pour les applications réelles (voir [89] et [68]), nous allons donner une condition suffisante, appelée « condition drift » (voir [60], [93] et [94]), pour que la chaîne de Markov X soit fortement v -stable. Cette proposition est l'un des deux outils principaux de notre travail. Pour cela, soient $s_0 \in \mathcal{S}$ et $\mathcal{C} = \{s_0\}$ le singleton qui contient le seul élément s_0 , alors :

Proposition 3.1. [9] Supposons que $\inf_{s \in \mathcal{S}} v(s) \geq 1$, alors pour que la chaîne de Markov X soit fortement v -stable, il suffit que la condition suivante soit vérifiée :

$$\exists \delta \in]0, 1[, \exists L > 0, Pv \leq \delta \cdot v + L \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{C}} \quad (3.12)$$

où $\mathbb{1}_{\mathcal{C}} = [\mathbb{1}_{\mathcal{C}}(s)]_{s \in \mathcal{S}}$ est le vecteur colonne dont toutes les composantes sont nulles sauf la $s_0^{\text{ème}}$ composante qui est égale à 1. En d'autres termes :

$$\forall s \in \mathcal{S}, \mathbb{1}_{\mathcal{C}}(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s = s_0 \\ 0 & \text{si } s \neq s_0 \end{cases} \quad (3.13)$$

Preuve. Soit $v = [v(s)]_{s \in \mathcal{S}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{S}}$ une fonction mesurable (pas nécessairement bornée) telle que $\inf_{s \in \mathcal{S}} v(s) \geq 1$, et supposons que :

$$\exists \delta \in]0, 1[, \exists L > 0, Pv \leq \delta \cdot v + L \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{C}}$$

Cela veut dire :

$$\exists \delta \in]0, 1[, \exists L > 0, \forall s \in \mathcal{S}, (Pv)(s) \leq \delta \cdot v(s) + L \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{C}}(s) \quad (3.14)$$

Maintenant, il faut montrer que les trois conditions de la stabilité forte citées dans Théorème 3.1 sont vérifiées :

a) Pour la 1^{ère} condition :

Selon (3.4) and (3.8), nous avons :

$$\|P\|_v = \sup_{s \in \mathcal{S}} \frac{1}{v(s)} \sum_{t \in \mathcal{S}} v(t) \cdot p(s, t) = \sup_{s \in \mathcal{S}} \frac{1}{v(s)} (Pv)(s)$$

Et d'après (3.14) :

1. **Si** $s \neq s_0$:

Dans ce cas,

$$\mathbb{1}_c(s) = 0 \quad \text{et} \quad (Pv)(s) \leq \delta \cdot v(s)$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{v(s)} (Pv)(s) \leq \delta$$

2. **Si** $s = s_0$:

Dans ce cas,

$$\mathbb{1}_c(s_0) = 1 \quad \text{et} \quad (Pv)(s_0) \leq \delta \cdot v(s_0) + L$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{v(s_0)} (Pv)(s_0) \leq \delta + \frac{L}{v(s_0)}$$

De ce fait :

$$\forall s \in \mathcal{S}, \quad \frac{1}{v(s)} (Pv)(s) \leq \max \left\{ \delta, \delta + \frac{L}{v(s_0)} \right\}$$

D'où :

$$\sup_{s \in \mathcal{S}} \frac{1}{v(s)} (Pv)(s) \leq \delta + \frac{L}{v(s_0)}$$

Donc $\|P\|_v < \infty$.

1^{ère} condition vérifiée

b) Pour la 2^{ème} condition :

Soit $\mathbf{c} = [c(t)]_{t \in \mathcal{S}}$ le $s_0^{\text{ème}}$ vecteur ligne de P , c'est-à-dire $\mathbf{c} = [p(s_0, t)]_{t \in \mathcal{S}}$, et soit $\mathbf{d} = [d(s)]_{s \in \mathcal{S}}$ le vecteur colonne dont toutes les composantes sont nulles sauf la $s_0^{\text{ème}}$ composante qui est égale à 1, c'est-à-dire $\mathbf{d} = \mathbb{1}_c$. Il est clair que \mathbf{c} et \mathbf{d} sont non-négatifs.

Alors, la matrice $\Theta = P - \mathbf{d} \cdot \mathbf{c}$ définie sur $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ est non-négative. Effectivement, si nous supposons que $\Theta \in \mathbb{R}^{\mathcal{S} \times \mathcal{S}}$ est donnée par $\Theta = [\theta(s, t)]_{(s, t) \in \mathcal{S}^2}$, nous aurons :

$$\forall (s, t) \in \mathcal{S}^2, \quad \theta(s, t) = \begin{cases} p(s, t) & \text{si } (s, t) \in \mathcal{S}_{\setminus \mathcal{C}} \times \mathcal{S} \\ 0 & \text{si } (s, t) \in \mathcal{C} \times \mathcal{S} \end{cases}$$

En d'autres termes, Θ n'est que la matrice obtenue en remplaçant chaque élément dans la $s_0^{\text{ème}}$ ligne de P par 0.

2^{ème} condition vérifiée

c) Pour la 3^{ème} condition :

Selon (3.4), nous avons pour tout $s \in \mathcal{S}$:

$$\begin{aligned} (\Theta v)(s) &= \sum_{t \in \mathcal{S}} v(t) \cdot \theta(s, t) = \begin{cases} \sum_{t \in \mathcal{S}} v(t) \cdot p(s, t) & \text{si } (s, t) \in \mathcal{S}_{\setminus \mathcal{C}} \times \mathcal{S} \\ 0 & \text{si } (s, t) \in \mathcal{C} \times \mathcal{S} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (Pv)(s) & \text{si } (s, t) \in \mathcal{S}_{\setminus \mathcal{C}} \times \mathcal{S} \\ 0 & \text{si } (s, t) \in \mathcal{C} \times \mathcal{S} \end{cases} \end{aligned}$$

Et d'après (3.14) :

1. **Si** $s \neq s_0$:

Dans ce cas,

$$\mathbb{1}_{\mathcal{C}}(s) = 0 \quad \text{et} \quad (\Theta v)(s) = (Pv)(s)$$

Par conséquent,

$$(\Theta v)(s) \leq \delta \cdot v(s)$$

2. **Si** $s = s_0$:

Dans ce cas,

$$\mathbb{1}_{\mathcal{C}}(s_0) = 1 \quad \text{et} \quad (\Theta v)(s_0) = 0$$

Par conséquent,

$$(\Theta v)(s_0) \leq \delta \cdot v(s_0)$$

Donc :

$$\forall s \in \mathcal{S}, \quad (\Theta v)(s) \leq \delta \cdot v(s)$$

3^{ème} condition vérifiée

Conclusion Si la chaîne de Markov X vérifie la condition (3.12) donnée dans Proposition 3.1 pour v , $\delta \in]0, 1[$ et $L > 0$ alors X vérifie les trois conditions du Théorème 3.1 pour la même fonction v , pour $\mathbf{c} = [p(s_0, t)]_{t \in \mathcal{S}}$, pour $\mathbf{d} = \mathbb{1}_{\mathcal{C}}$, le même δ et pour $m = 1$. Par conséquent, X est fortement v -stable.

FIN DE LA PREUVE

3.2.4 Bornes de stabilité forte

Maintenant, nous donnerons dans le théorème suivant le deuxième outil principal dans notre travail, à savoir les bornes de stabilité forte :

Théorème 3.2. [70, 89] Supposons que la chaîne de Markov X vérifie la condition drift (3.12), alors :

1. Si

$$\|\tilde{P} - P\|_v < \frac{1 - \delta}{w} \quad (3.15)$$

alors

$$\|\tilde{\Pi} - \Pi\|_v \leq \frac{w \cdot \|\Pi\|_v \cdot \|\tilde{P} - P\|_v}{1 - \delta - w \cdot \|\tilde{P} - P\|_v} \quad (3.16)$$

où $w = 1 + \|\mathbb{1}_{\mathcal{S}}\|_v \cdot \|\Pi\|_v$

2. Et si

$$\|\tilde{P} - P\|_v < \frac{(1 - \delta)^2}{L + 1 - \delta} \quad (3.17)$$

alors

$$\|\tilde{\Pi} - \Pi\|_v \leq \frac{L(L + 1 - \delta) \cdot \|\tilde{P} - P\|_v}{(1 - \delta)^3 - (1 - \delta)(L + 1 - \delta) \cdot \|\tilde{P} - P\|_v} \quad (3.18)$$

Remarque 3.5. $\mathbb{1}_{\mathcal{S}}$, qui apparaît dans le théorème ci-dessus, est le vecteur colonne unitaire, autrement dit, $\mathbb{1}_{\mathcal{S}} = [\mathbb{1}_{\mathcal{S}}(s)]_{s \in \mathcal{S}}$ tel que $\mathbb{1}_{\mathcal{S}}(s) = 1$ pour tous $s \in \mathcal{S}$.

3.3 Analyse du modèle

Rappelons que \tilde{X} est la chaîne de Markov induite du modèle $M/M/c$ avec rappels à espace d'état $\mathcal{S} = \{(i, j), 0 \leq i \leq c \text{ et } j \in \mathbb{N}\}$, de matrice de probabilités de transition $\tilde{P} = [\tilde{p}((i, j), (i', j'))]_{((i,j),(i',j')) \in \mathcal{S}^2}$ et dont la distribution stationnaire est $\tilde{\Pi} = [\tilde{\pi}_{(i', j')}]_{(i', j') \in \mathcal{S}}$. D'autre part, X est la chaîne de Markov induite du modèle de Neuts et Rao avec le même espace d'état \mathcal{S} , de matrice de probabilités de transition $P = [p((i, j), (i', j'))]_{((i,j),(i',j')) \in \mathcal{S}^2}$ et dont la distribution stationnaire est $\Pi = [\pi_{(i', j')}]_{(i', j') \in \mathcal{S}}$ (voir Section 2.3 et Section 2.4 du chapitre précédent).

Mais avant de commencer notre analyse, faisons de sorte que les notations utilisées dans la section précédente soient adaptées au modèle que nous allons traiter. Pour cela, nous prenons comme fonction test la fonction $v \in [1, +\infty]^{\mathcal{S}}$ définie par :

$$\forall (i, j) \in \mathcal{S}, \quad v(i, j) = \alpha^i \beta^j \quad \text{for } \alpha > 1 \text{ and } \beta > 1$$

ce qui implique :

$$\inf_{(i,j) \in \mathcal{S}} v(i, j) = 1$$

Donc, d'après (3.9), pour toute fonction coût $f \in \mathbb{R}^{\mathcal{S}}$ définie sur \mathcal{S} et telle que $\|f\|_v < \infty$:

$$|\tilde{\Pi}f - \Pi f| \leq \|\tilde{\Pi} - \Pi\|_v \cdot \|f\|_v = \|\tilde{\Pi} - \Pi\|_v \cdot \sup_{(i,j) \in \mathcal{S}} \frac{|f(i, j)|}{\alpha^i \beta^j} \quad (3.19)$$

Les deux étapes principales de notre analyse seront, premièrement, établir une borne supérieure de la v -norme de $\tilde{\Pi} - \Pi$ en fonction de la v -norme de $\tilde{P} - P$ et en fonction d'autres constantes. Deuxièmement, déterminer les paramètres α et β pour lesquels la v -norme de $\tilde{\Pi} - \Pi$ soit la plus petite possible.

D'après (3.3), (3.4) et (3.5), nous aurons :

$$\forall (i', j') \in \mathcal{S}, \quad (\mathbf{w}P)_{(i', j')} = \sum_{i=0}^c \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{w}_{(i, j)} \cdot p((i, j), (i', j')) \quad (3.20)$$

$$\forall (i, j) \in \mathcal{S}, \quad (Pf)_{(i, j)} = \sum_{i'=0}^c \sum_{j'=0}^{\infty} f(i', j') \cdot p((i, j), (i', j')) \quad (3.21)$$

$$\mathbf{w}f = \sum_{i=0}^c \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{w}_{(i, j)} f(i, j) \quad (3.22)$$

Et d'après (3.6), (3.7) et (3.8) :

$$\|\mathbf{w}\|_v = \sum_{i'=0}^c \sum_{j'=0}^{\infty} \alpha^{i'} \beta^{j'} \cdot |w_{(i', j')}| \quad (3.23)$$

$$\|f\|_v = \sup_{(i, j) \in \mathcal{S}} \frac{|f(i, j)|}{\alpha^i \beta^j} \quad (3.24)$$

$$\|A\|_v = \sup_{(i, j) \in \mathcal{S}} \frac{1}{\alpha^i \beta^j} \sum_{i'=0}^c \sum_{j'=0}^{\infty} \alpha^{i'} \beta^{j'} \cdot |a((i, j), (i', j'))| \quad (3.25)$$

3.3.1 Stabilité forte de la chaîne de Markov induite X

Dans cette partie, en utilisant la condition drift (3.12), nous démontrerons la stabilité forte de la chaîne de Markov induite X du modèle de Neuts et Rao par rapport à la norme $\|\cdot\|_v$. Pour cela, soit $\mathcal{C} = \{(0, 0)\}$ le singleton qui contient l'élément $(0, 0) \in \mathcal{S}$.

Dans le théorème suivant, nous donnerons les conditions pour lesquelles cette stabilité forte peut avoir lieu. Donc, ces conditions seront celles qui nous permettront d'approcher les caractéristiques stationnaires du modèle $M/M/c$ avec rappels par celles du modèle de Neuts et Rao :

Théorème 3.3. [9] Supposons que $\lambda < \nu$, alors pour tout $\alpha > 1$ et pour tout $\beta > 1$ tels que :

$$\alpha < \frac{\nu}{\lambda}, \quad \alpha < \beta, \quad \alpha < \frac{\beta(\lambda + \mu)}{\beta\lambda + \mu}, \quad \beta < \alpha^2 \quad \text{et} \quad \beta < \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{c\nu}{\lambda} + 1 \quad (3.26)$$

il existe $\delta \in]0, 1[$ et il existe $L > 0$ pour lesquels

$$Pv \leq \delta \cdot v + L \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{C}} \quad (3.27)$$

où

$$\delta = \delta(\alpha, \beta) = \max \left\{ \frac{\alpha\lambda + \frac{1}{\alpha}\nu}{\lambda + \nu}, \frac{\alpha\lambda + \frac{\alpha}{\beta}\mu}{\lambda + \mu}, \frac{\beta\lambda + \frac{1}{\alpha}c\nu}{\lambda + c\nu} \right\}$$

$$L = L(\alpha, \beta) = \alpha - \delta(\alpha, \beta)$$

Démonstration. Notre objectif est de trouver, en fonction de α et β , les valeurs de δ et L pour lesquelles la condition (3.27) soit vérifiée. Nous savons que la condition (3.27) peut s'écrire comme suit :

Pour $(i, j) \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{C}$:

$$(Pv)(i, j) \leq \delta \cdot v(i, j) \quad (3.28)$$

Et pour $(i, j) \in \mathcal{C}$:

$$(Pv)(0, 0) = \delta \cdot v(0, 0) + L = \delta + L \quad (3.29)$$

Donc, la valeur de δ sera déterminée de (3.28) et la valeur de L de (3.29).

Selon (3.28), le vecteur colonne $Pv = [(Pv)(i, j)]_{(i, j) \in \mathcal{S}}$ est donné comme suit :

$$\begin{aligned} \forall (i, j) \in \mathcal{S}, \quad (Pv)(i, j) &= \sum_{i'=0}^c \sum_{j'=0}^{\infty} v(i', j') \cdot p((i, j), (i', j')) \\ &= \sum_{i'=0}^c \sum_{j'=0}^{\infty} \alpha^{i'} \beta^{j'} \cdot p((i, j), (i', j')) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Donc, en utilisant (3.30), nous avons les cas suivants :

(a) Pour $i = 0$ et $j = 0$:

$$\begin{aligned} (Pv)(0, 0) &= \sum_{i'=0}^c \sum_{j'=0}^{\infty} \alpha^{i'} \beta^{j'} \cdot p((0, 0), (i', j')) \\ &= \alpha^1 \beta^0 \cdot p((0, 0), (1, 0)) \\ &= \alpha \end{aligned} \quad (3.31)$$

(b) Pour $1 \leq i \leq c-1$ et $j = 0$:

$$\begin{aligned}
 (Pv)(i, 0) &= \sum_{i'=0}^c \sum_{j'=0}^{\infty} \alpha^{i'} \beta^{j'} \cdot p((i, 0), (i', j')) \\
 &= \alpha^{i-1} \beta^0 \cdot p((i, 0), (i-1, 0)) + \alpha^{i+1} \beta^0 \cdot p((i, 0), (i+1, 0)) \\
 &= \alpha^{i-1} \frac{i\nu}{\lambda + i\nu} + \alpha^{i+1} \frac{\lambda}{\lambda + i\nu} \\
 &= \left(\frac{1}{\alpha} \frac{i\nu}{\lambda + i\nu} + \alpha \frac{\lambda}{\lambda + i\nu} \right) \alpha^i \\
 &= \left(\frac{\alpha\lambda + \frac{1}{\alpha} i\nu}{\lambda + i\nu} \right) \cdot v(i, 0)
 \end{aligned}$$

Soit δ_1 la fonction définie, pour $1 \leq i \leq c-1$, par :

$$\delta_1(i) = \frac{\alpha\lambda + \frac{1}{\alpha} i\nu}{\lambda + i\nu}$$

Comme δ_1 est décroissante en i , alors pour tout $1 \leq i \leq c-1$, nous avons :

$$\delta_1(i) \leq \delta_1(1)$$

Donc, pour $j = 0$:

$$\forall 1 \leq i \leq c-1, \quad (Pv)(i, 0) \leq \delta_1(1) \cdot v(i, 0) \quad (3.32)$$

(c) Pour $i = 0$ et $1 \leq j \leq N-1$:

$$\begin{aligned}
 (Pv)(0, j) &= \sum_{i'=0}^c \sum_{j'=0}^{\infty} \alpha^{i'} \beta^{j'} \cdot p((0, j), (i', j')) \\
 &= \alpha^1 \beta^{j-1} \cdot p((0, j), (1, j-1)) + \alpha^1 \beta^j \cdot p((0, j), (1, j)) \\
 &= \alpha \beta^{j-1} \frac{j\mu}{\lambda + j\mu} + \alpha \beta^j \frac{\lambda}{\lambda + j\mu} \\
 &= \left(\frac{\alpha}{\beta} \frac{j\mu}{\lambda + j\mu} + \alpha \frac{\lambda}{\lambda + j\mu} \right) \beta^j \\
 &= \left(\frac{\alpha\lambda + \frac{\alpha}{\beta} j\mu}{\lambda + j\mu} \right) \cdot v(0, j)
 \end{aligned}$$

(d) Pour $1 \leq i \leq c-1$ et $1 \leq j \leq N-1$:

$$\begin{aligned}
 (Pv)(i, j) &= \sum_{i'=0}^c \sum_{j'=0}^{\infty} \alpha^{i'} \beta^{j'} \cdot p((i, j), (i', j')) \\
 &= \alpha^{i+1} \beta^{j-1} \cdot p((i, j), (i+1, j-1)) + \alpha^{i-1} \beta^j \cdot p((i, j), (i-1, j)) \\
 &\quad + \alpha^{i+1} \beta^j \cdot p((i, j), (i+1, j)) \\
 &= \alpha^{i+1} \beta^{j-1} \frac{j\mu}{\lambda + j\mu + i\nu} + \alpha^{i-1} \beta^j \frac{i\nu}{\lambda + j\mu + i\nu} + \alpha^{i+1} \beta^j \frac{\lambda}{\lambda + j\mu + i\nu} \\
 &= \left(\frac{\alpha}{\beta} \frac{j\mu}{\lambda + j\mu + i\nu} + \frac{1}{\alpha} \frac{i\nu}{\lambda + j\mu + i\nu} + \alpha \frac{\lambda}{\lambda + j\mu + i\nu} \right) \alpha^i \beta^j \\
 &= \left(\frac{\alpha\lambda + \frac{1}{\alpha}i\nu + \frac{\alpha}{\beta}j\mu}{\lambda + i\nu + j\mu} \right) \cdot v(i, j)
 \end{aligned}$$

Soit δ_2 la fonction définie, pour $0 \leq i \leq c-1$ et $1 \leq j \leq N-1$, par :

$$\delta_2(i, j) = \frac{\alpha\lambda + \frac{1}{\alpha}i\nu + \frac{\alpha}{\beta}j\mu}{\lambda + i\nu + j\mu}$$

Et soit $\Phi_{0,1}$ la fonction définie, pour $0 \leq i \leq c-1$ et $1 \leq j \leq N-1$, par :

$$\Phi_{0,1}(i, j) = \delta_2(0, 1) - \delta_2(i, j) = \frac{\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)i\lambda\nu + \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right)i\mu\nu + \alpha\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)(j-1)\lambda\mu}{(\lambda + \mu)(\lambda + i\nu + j\mu)}$$

Puisque $\alpha > 1$, $\beta > 1$ et $\beta < \alpha^2$, alors la fonction $\Phi_{0,1}$ est positive. Ce qui implique que pour tout $0 \leq i \leq c-1$ et $1 \leq j \leq N-1$:

$$\delta_2(i, j) \leq \delta_2(0, 1)$$

Par conséquent :

$$\forall 0 \leq i \leq c-1, \quad \forall 1 \leq j \leq N-1, \quad (Pv)(i, j) \leq \delta_2(0, 1) \cdot v(i, j) \quad (3.33)$$

(e) Pour $i = 0$ et $j \geq N$:

$$\begin{aligned}
 (Pv)(0, j) &= \sum_{i'=0}^c \sum_{j'=0}^{\infty} \alpha^{i'} \beta^{j'} \cdot p((0, j), (i', j')) \\
 &= \alpha^1 \beta^{j-1} \cdot p((0, j), (1, j-1)) + \alpha^1 \beta^j \cdot p((0, j), (1, j)) \\
 &= \alpha \beta^{j-1} \frac{N\mu}{\lambda + N\mu} + \alpha \beta^j \frac{\lambda}{\lambda + N\mu} \\
 &= \left(\frac{\alpha}{\beta} \frac{N\mu}{\lambda + N\mu} + \alpha \frac{\lambda}{\lambda + N\mu} \right) \beta^j \\
 &= \left(\frac{\alpha\lambda + \frac{\alpha}{\beta}N\mu}{\lambda + N\mu} \right) \cdot v(0, j)
 \end{aligned}$$

(f) Pour $1 \leq i \leq c-1$ et $j \geq N$:

$$\begin{aligned}
 (Pv)(i, j) &= \sum_{i'=0}^c \sum_{j'=0}^{\infty} \alpha^{i'} \beta^{j'} \cdot p((i, j), (i', j')) \\
 &= \alpha^{i+1} \beta^{j-1} \cdot p((i, j), (i+1, j-1)) + \alpha^{i-1} \beta^j \cdot p((i, j), (i-1, j)) \\
 &\quad + \alpha^{i+1} \beta^j \cdot p((i, j), (i+1, j)) \\
 &= \alpha^{i+1} \beta^{j-1} \frac{N\mu}{\lambda + N\mu + i\nu} + \alpha^{i-1} \beta^j \frac{i\nu}{\lambda + N\mu + i\nu} + \alpha^{i+1} \beta^j \frac{\lambda}{\lambda + N\mu + i\nu} \\
 &= \left(\frac{\alpha}{\beta} \frac{N\mu}{\lambda + N\mu + i\nu} + \frac{1}{\alpha} \frac{i\nu}{\lambda + N\mu + i\nu} + \alpha \frac{\lambda}{\lambda + N\mu + i\nu} \right) \alpha^i \beta^j \\
 &= \left(\frac{\alpha \lambda + \frac{\alpha}{\beta} N\mu + \frac{1}{\alpha} i\nu}{\lambda + N\mu + i\nu} \right) \cdot v(i, j)
 \end{aligned}$$

Soit δ_3 la fonction définie, pour $0 \leq i \leq c-1$, par :

$$\delta_3(i) = \frac{\alpha \lambda + \frac{\alpha}{\beta} N\mu + \frac{1}{\alpha} i\nu}{\lambda + N\mu + i\nu}$$

Comme δ_3 est décroissante en i , alors pour tout $0 \leq i \leq c-1$, nous avons :

$$\delta_3(i) \leq \delta_3(0)$$

Donc :

$$\forall 0 \leq i \leq c-1, \quad \forall j \geq N, \quad (Pv)(i, j) \leq \delta_3(0) \cdot v(i, j) \quad (3.34)$$

(g) Pour $i = c$ et $j \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
 (Pv)(c, j) &= \sum_{i'=0}^c \sum_{j'=0}^{\infty} \alpha^{i'} \beta^{j'} \cdot p((c, j), (i', j')) \\
 &= \alpha^{c-1} \beta^j \cdot p((c, j), (c-1, j)) + \alpha^c \beta^{j+1} \cdot p((c, j), (c, j+1)) \\
 &= \alpha^{c-1} \beta^j \frac{c\nu}{\lambda + c\nu} + \alpha^c \beta^{j+1} \frac{\lambda}{\lambda + c\nu} \\
 &= \left(\frac{1}{\alpha} \frac{c\nu}{\lambda + c\nu} + \beta \frac{\lambda}{\lambda + c\nu} \right) \alpha^c \beta^j \\
 &= \left(\frac{\beta \lambda + \frac{1}{\alpha} c\nu}{\lambda + c\nu} \right) \cdot v(c, j)
 \end{aligned}$$

Soit δ_4 tel que :

$$\delta_4 = \frac{\beta \lambda + \frac{1}{\alpha} c\nu}{\lambda + c\nu}$$

Alors, pour $i = c$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$(Pv)(c, j) = \delta_4 \cdot v(c, j) \quad (3.35)$$

De (3.32), (3.33), (3.34) et (3.35), nous déduisons que pour tout $(i, j) \in \mathcal{S} \setminus c$:

$$(Pv)(i, j) \leq \max\{\delta_1(1), \delta_2(0, 1), \delta_3(0), \delta_4\} \cdot v(i, j)$$

Soit g la fonction définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par :

$$g(x) = \frac{\alpha \lambda + \frac{\alpha}{\beta} x \mu}{\lambda + x \mu}$$

Puisque g est décroissante en x , alors pour tout $N \geq 1$, nous avons :

$$g(N) \leq g(1)$$

Ce qui implique :

$$\delta_3(0) \leq \delta_2(0, 1)$$

Par conséquent :

$$\forall (i, j) \in \mathcal{S} \setminus c, \quad (Pv)(i, j) \leq \max\{\delta_1(1), \delta_2(0, 1), \delta_4\} \cdot v(i, j)$$

Et selon (3.28), nous pouvons poser :

$$\delta = \delta(\alpha, \beta) = \max\{\delta_1(1), \delta_2(0, 1), \delta_4\} = \max\left\{\frac{\alpha \lambda + \frac{1}{\alpha} \nu}{\lambda + \nu}, \frac{\alpha \lambda + \frac{\alpha}{\beta} \mu}{\lambda + \mu}, \frac{\beta \lambda + \frac{1}{\alpha} c \nu}{\lambda + c \nu}\right\} \quad (3.36)$$

Et de (3.29) and (3.31), nous obtenons :

$$L = L(\alpha, \beta) = \alpha - \delta(\alpha, \beta) \quad (3.37)$$

Et pour terminer, sous les conditions imposées dans Théorème 3.3, il est facile de vérifier que :

$$0 < \delta(\alpha, \beta) < 1 \quad \text{et} \quad L(\alpha, \beta) > 0$$

FIN DE LA DÉMONSTRATION

L'une des étapes importantes dans les applications numériques du résultat donné dans le théorème précédent consiste à déterminer tout $\alpha > 1$ et tout $\beta > 1$ qui vérifient les conditions données dans (3.26). Autrement dit, il faut déterminer α_1 et α_2 tels que $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ et déterminer β_1 et β_2 tels que $\beta \in [\beta_1, \beta_2]$.

Avec :

$$\alpha_1 = \min \{ \alpha, \quad 0 < \delta(\alpha, \beta) < 1 \quad \text{et} \quad L(\alpha, \beta) > 0 \} \quad (3.38)$$

$$\beta_1 = \min \{ \beta, \quad 0 < \delta(\alpha, \beta) < 1 \quad \text{et} \quad L(\alpha, \beta) > 0 \} \quad (3.39)$$

$$\alpha_2 = \max \{ \alpha, \quad 0 < \delta(\alpha, \beta) < 1 \quad \text{et} \quad L(\alpha, \beta) > 0 \} \quad (3.40)$$

$$\beta_2 = \max \{ \beta, \quad 0 < \delta(\alpha, \beta) < 1 \quad \text{et} \quad L(\alpha, \beta) > 0 \} \quad (3.41)$$

3.3.2 Bornes de perturbation

Du Théorème 3.3, nous déduisons que la chaîne de Markov X satisfait la condition drift (3.12), donc X est fortement stable par rapport à $\|\cdot\|_v$. Par conséquent, nous pouvons établir une borne de $\|\tilde{\Pi} - \Pi\|_v$ en termes de $\|\tilde{P} - P\|_v$ et en termes des constantes δ et L .

Déviaton du noyau de transition

Pour pouvoir estimer numériquement l'écart entre les distributions stationnaires des chaînes de Markov \tilde{X} et X , calculons d'abord la v -norme de déviaton du noyau de transition P de la chaîne de Markov induite du modèle de Neuts et Rao par rapport au noyau de transition \tilde{P} de la chaîne de Markov induite du système $M/M/c$ avec rappels.

Proposition 3.2. [9] Pour tout $\alpha > 1$ et pour tout $\beta > 1$, nous avons :

$$\|\tilde{P} - P\|_v = \Delta \quad (3.42)$$

où :

$$\Delta = \Delta(\alpha, \beta) = \max \left\{ \frac{\alpha \left(\frac{1}{\beta} + 1 \right) \lambda}{\lambda + N\mu}, \frac{\alpha \left(\frac{1}{\beta} + 1 \right) \lambda + \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{\alpha} \right) (c-1) \nu}{\lambda + N\mu + (c-1) \nu} \right\} \quad (3.43)$$

Preuve. Selon (3.25), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \|\tilde{P} - P\|_v &= \sup_{(i,j) \in \mathcal{S}} \frac{1}{v(i,j)} \sum_{i'=0}^c \sum_{j'=0}^{\infty} \alpha^{i'} \beta^{j'} \cdot |\tilde{p}((i,j), (i',j')) - p((i,j), (i',j'))| \\ &= \sup_{(i,j) \in \mathcal{S}} \frac{\mathbf{E}(i,j)}{v(i,j)} \end{aligned} \quad (3.44)$$

où :

$$\mathbf{E}(i,j) = \sum_{i'=0}^c \sum_{j'=0}^{\infty} \alpha^{i'} \beta^{j'} \cdot |\tilde{p}((i,j), (i',j')) - p((i,j), (i',j'))| \quad (3.45)$$

Donc, en utilisant (3.45), nous avons les cas suivants :

(a) Pour $0 \leq i \leq c$ et $0 \leq j \leq N-1$:

$$\mathbf{E}(i,j) = 0$$

Donc pour tout $0 \leq i \leq c$ et pour tout $0 \leq j \leq N - 1$:

$$\frac{\mathbf{E}(i, j)}{v(i, j)} = 0 \quad (3.46)$$

(b) Pour $i = 0$ et $j \geq N$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(0, j) &= \sum_{i'=0}^c \sum_{j'=0}^{\infty} \alpha^{i'} \beta^{j'} \cdot |\tilde{p}((0, j), (i', j')) - p((0, j), (i', j'))| \\ &= \alpha^1 \beta^{j-1} \cdot |\tilde{p}((0, j), (1, j-1)) - p((0, j), (1, j-1))| \\ &\quad + \alpha^1 \beta^j \cdot |\tilde{p}((0, j), (1, j)) - p((0, j), (1, j))| \\ &= \alpha \beta^{j-1} \cdot \left| \frac{j\mu}{\lambda + j\mu} - \frac{N\mu}{\lambda + N\mu} \right| + \alpha \beta^j \cdot \left| \frac{\lambda}{\lambda + j\mu} - \frac{\lambda}{\lambda + N\mu} \right| \\ &= \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \left| \frac{j\mu}{\lambda + j\mu} - \frac{N\mu}{\lambda + N\mu} \right| + \alpha \cdot \left| \frac{\lambda}{\lambda + j\mu} - \frac{\lambda}{\lambda + N\mu} \right| \right) \cdot \beta^j \\ &= \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \left| \frac{j\mu}{\lambda + j\mu} - \frac{N\mu}{\lambda + N\mu} \right| + \alpha \cdot \left| \frac{\lambda}{\lambda + j\mu} - \frac{\lambda}{\lambda + N\mu} \right| \right) \cdot v(0, j) \end{aligned}$$

(c) Pour $1 \leq i \leq c - 1$ et $j \geq N$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(i, j) &= \sum_{i'=0}^c \sum_{j'=0}^{\infty} \alpha^{i'} \beta^{j'} \cdot |\tilde{p}((i, j), (i', j')) - p((i, j), (i', j'))| \\ &= \alpha^{i+1} \beta^{j-1} \cdot |\tilde{p}((i, j), (i+1, j-1)) - p((i, j), (i+1, j-1))| \\ &\quad + \alpha^{i-1} \beta^j \cdot |\tilde{p}((i, j), (i-1, j)) - p((i, j), (i-1, j))| \\ &\quad + \alpha^{i+1} \beta^j \cdot |\tilde{p}((i, j), (i+1, j)) - p((i, j), (i+1, j))| \\ &= \alpha^{i+1} \beta^{j-1} \cdot \left| \frac{j\mu}{\lambda + i\nu + j\mu} - \frac{N\mu}{\lambda + i\nu + N\mu} \right| \\ &\quad + \alpha^{i-1} \beta^j \cdot \left| \frac{i\nu}{\lambda + i\nu + j\mu} - \frac{i\nu}{\lambda + i\nu + N\mu} \right| \\ &\quad + \alpha^{i+1} \beta^j \cdot \left| \frac{\lambda}{\lambda + i\nu + j\mu} - \frac{\lambda}{\lambda + i\nu + N\mu} \right| \\ &= \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \left| \frac{j\mu}{\lambda + i\nu + j\mu} - \frac{N\mu}{\lambda + i\nu + N\mu} \right| + \frac{1}{\alpha} \cdot \left| \frac{i\nu}{\lambda + i\nu + j\mu} - \frac{i\nu}{\lambda + i\nu + N\mu} \right| \right. \\ &\quad \left. + \alpha \cdot \left| \frac{\lambda}{\lambda + i\nu + j\mu} - \frac{\lambda}{\lambda + i\nu + N\mu} \right| \right) \cdot \alpha^i \beta^j \\ &= \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \left| \frac{j\mu}{\lambda + i\nu + j\mu} - \frac{N\mu}{\lambda + i\nu + N\mu} \right| + \frac{1}{\alpha} \cdot \left| \frac{i\nu}{\lambda + i\nu + j\mu} - \frac{i\nu}{\lambda + i\nu + N\mu} \right| \right. \\ &\quad \left. + \alpha \cdot \left| \frac{\lambda}{\lambda + i\nu + j\mu} - \frac{\lambda}{\lambda + i\nu + N\mu} \right| \right) \cdot v(i, j) \end{aligned}$$

De **(b)** et **(c)**, nous déduisons que pour tout $0 \leq i \leq c-1$ et tout $j \geq N$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(i, j) &= \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \left| \frac{j\mu}{\lambda + i\nu + j\mu} - \frac{N\mu}{\lambda + i\nu + N\mu} \right| + \frac{1}{\alpha} \cdot \left| \frac{i\nu}{\lambda + i\nu + j\mu} - \frac{i\nu}{\lambda + i\nu + N\mu} \right| \right. \\ &\quad \left. + \alpha \cdot \left| \frac{\lambda}{\lambda + i\nu + j\mu} - \frac{\lambda}{\lambda + i\nu + N\mu} \right| \right) \cdot v(i, j) \end{aligned}$$

Donc, pour tout $0 \leq i \leq c-1$ et tout $j \geq N$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{E}(i, j)}{v(i, j)} &= \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left| \frac{j\mu}{\lambda + i\nu + j\mu} - \frac{N\mu}{\lambda + i\nu + N\mu} \right| + \frac{1}{\alpha} \cdot \left| \frac{i\nu}{\lambda + i\nu + j\mu} - \frac{i\nu}{\lambda + i\nu + N\mu} \right| \\ &\quad + \alpha \cdot \left| \frac{\lambda}{\lambda + i\nu + j\mu} - \frac{\lambda}{\lambda + i\nu + N\mu} \right| \end{aligned}$$

Soient φ_1 , φ_2 et φ_3 les fonctions de j définies pour tout $j \geq N$, avec $0 \leq i \leq c-1$, par :

$$\varphi_1(j) = \frac{j\mu}{\lambda + i\nu + j\mu}, \quad \varphi_2(j) = \frac{i\nu}{\lambda + i\nu + j\mu} \quad \text{et} \quad \varphi_3(j) = \frac{\lambda}{\lambda + i\nu + j\mu}$$

Alors, puisque φ_1 est croissante en j , nous avons pour tout $j \geq N$, avec $0 \leq i \leq c-1$:

$$\varphi_1(j) \geq \varphi_1(N)$$

Et puisque φ_2 et φ_3 sont décroissantes en j , nous avons pour tout $j \geq N$, avec $0 \leq i \leq c-1$:

$$\varphi_2(j) \leq \varphi_2(N) \quad \text{et} \quad \varphi_3(j) \leq \varphi_3(N)$$

Donc, pour tout $0 \leq i \leq c-1$ et pour tout $j \geq N$:

$$\begin{cases} |\varphi_1(j) - \varphi_1(N)| = \varphi_1(j) - \varphi_1(N) \\ |\varphi_2(j) - \varphi_2(N)| = \varphi_2(N) - \varphi_2(j) \\ |\varphi_3(j) - \varphi_3(N)| = \varphi_3(N) - \varphi_3(j) \end{cases}$$

Par conséquent, pour tout $0 \leq i \leq c-1$ et pour tout $j \geq N$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{E}(i, j)}{v(i, j)} &= \frac{\alpha}{\beta} [\varphi_1(j) - \varphi_1(N)] + \frac{1}{\alpha} [\varphi_2(N) - \varphi_2(j)] + \alpha [\varphi_3(N) - \varphi_3(j)] \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{j\mu}{\lambda + i\nu + j\mu} - \frac{N\mu}{\lambda + i\nu + N\mu} \right) + \frac{1}{\alpha} \cdot \left(\frac{i\nu}{\lambda + i\nu + N\mu} - \frac{i\nu}{\lambda + i\nu + j\mu} \right) \\ &\quad + \alpha \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda + i\nu + N\mu} - \frac{\lambda}{\lambda + i\nu + j\mu} \right) \end{aligned} \tag{3.47}$$

(d) Pour $i = c$ et $j \geq N$:

$$\mathbf{E}(c, j) = 0$$

Donc, pour $i = c$ et pour tout $j \geq N$:

$$\frac{\mathbf{E}(c, j)}{v(c, j)} = 0 \quad (3.48)$$

De (3.46), (3.47) and (3.48), nous déduisons que :

$$\begin{aligned} \sup_{(i,j) \in \mathcal{S}} \frac{\mathbf{E}(i, j)}{v(i, j)} &= \sup_{\substack{0 \leq i \leq c-1 \\ j \geq N}} \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{j\mu}{\lambda + i\nu + j\mu} - \frac{N\mu}{\lambda + i\nu + N\mu} \right) \right. \\ &\quad + \frac{1}{\alpha} \cdot \left(\frac{i\nu}{\lambda + i\nu + N\mu} - \frac{i\nu}{\lambda + i\nu + j\mu} \right) \\ &\quad \left. + \alpha \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda + i\nu + N\mu} - \frac{\lambda}{\lambda + i\nu + j\mu} \right) \right\} \\ &= \sup_{0 \leq i \leq c-1} \lim_{j \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{j\mu}{\lambda + i\nu + j\mu} - \frac{N\mu}{\lambda + i\nu + N\mu} \right) \right. \\ &\quad + \frac{1}{\alpha} \cdot \left(\frac{i\nu}{\lambda + i\nu + N\mu} - \frac{i\nu}{\lambda + i\nu + j\mu} \right) \\ &\quad \left. + \alpha \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda + i\nu + N\mu} - \frac{\lambda}{\lambda + i\nu + j\mu} \right) \right\} \\ &= \sup_{0 \leq i \leq c-1} \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(1 - \frac{N\mu}{\lambda + i\nu + N\mu} \right) + \frac{1}{\alpha} \cdot \left(\frac{i\nu}{\lambda + i\nu + N\mu} \right) \right. \\ &\quad \left. + \alpha \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda + i\nu + N\mu} \right) \right\} \\ &= \sup_{0 \leq i \leq c-1} \left\{ \frac{\alpha \left(\frac{1}{\beta} + 1 \right) \lambda + \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{\alpha} \right) i\nu}{\lambda + i\nu + N\mu} \right\} \quad (3.49) \end{aligned}$$

Soit φ_4 la fonction de i définie, pour tout $0 \leq i \leq c-1$, par :

$$\varphi_4(i) = \frac{\alpha \left(\frac{1}{\beta} + 1 \right) \lambda + \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{\alpha} \right) i\nu}{\lambda + i\nu + N\mu} \quad (3.50)$$

Et soient Φ_0 et Φ_{c-1} les fonctions de i définies, pour tout $0 \leq i \leq c-1$, par :

$$\Phi_0(i) = \varphi_4(0) - \varphi_4(i) \quad \text{et} \quad \Phi_{c-1}(i) = \varphi_4(c-1) - \varphi_4(i)$$

Alors, pour tout $0 \leq i \leq c-1$:

$$\Phi_0(i) = -i\nu \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{\alpha} \right) N\mu - \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right) \lambda}{(\lambda + N\mu) + (\lambda + i\nu + N\mu)} \quad (3.51)$$

Et pour tout $0 \leq i \leq c-1$:

$$\Phi_{c-1}(i) = [(c-1) - i] \nu \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{\alpha}\right) N\mu - \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) \lambda}{[\lambda + (c-1)\nu + N\mu] + (\lambda + i\nu + N\mu)} \quad (3.52)$$

De (3.51) et (3.52), nous pouvons constater que pour tout $0 \leq i \leq c-1$, $\Phi_0(i)$ et $\Phi_{c-1}(i)$ sont de signes opposés.

Donc :

$$\begin{cases} \Phi_0(i) \geq 0 \implies \varphi_4(0) \geq \varphi_4(i) \\ \Phi_0(i) \leq 0 \implies \Phi_{c-1}(i) \geq 0 \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\varphi_4(c-1) \geq \varphi_4(i)$$

Donc :

$$\sup_{0 \leq i \leq c-1} \varphi_4(i) = \max\{\varphi_4(0), \varphi_4(c-1)\}$$

Et, selon (3.44), (3.49) et (3.50), nous aurons :

$$\|\tilde{P} - P\|_v = \sup_{(i,j) \in \mathcal{S}} \frac{\mathbf{E}(i,j)}{v(i,j)} = \max\{\varphi_4(0), \varphi_4(c-1)\}$$

Pour terminer, et en concordance avec (3.42), nous pouvons poser :

$$\Delta = \Delta(\alpha, \beta) = \max\{\varphi_4(0), \varphi_4(c-1)\} = \max\left\{ \frac{\alpha \left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \lambda}{\lambda + N\mu}, \frac{\alpha \left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \lambda + \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{\alpha}\right) (c-1) \nu}{\lambda + N\mu + (c-1) \nu} \right\}$$

FIN DE LA PREUVE

Calculer $\|\mathbb{1}_{\mathcal{S}}\|_v$ et $\|\Pi\|_v$

Avant de pouvoir exploiter le résultat du Théorème 3.2 et donner une borne de $\|\tilde{\Pi} - \Pi\|_v$, nous devons calculer $\|\mathbb{1}_{\mathcal{S}}\|_v$ et $\|\Pi\|_v$. Pour rappel, $\mathbb{1}_{\mathcal{S}}$ est le vecteur unitaire de dimension infinie dont toutes les composantes sont égales à un (voir Théorème 3.2 et Remarque 3.5), et Π est la distribution stationnaire du modèle de Neuts et Rao (voir Section 2.4.6 et Section 2.4.7)

Pour $\|\mathbb{1}_{\mathcal{S}}\|_v$, nous avons, d'après (3.24) :

$$\|\mathbb{1}_{\mathcal{S}}\|_v = \sup_{(i,j) \in \mathcal{S}} \frac{1}{\alpha^i \beta^j} = 1 \quad (3.53)$$

Pour $\|\Pi\|_v$, la v -norme de la distribution stationnaire du modèle de Neuts et Rao, l'expression qui permette de calculer sa valeur est donnée dans le lemme suivant :

Lemme 3.1. [9] Supposons que la condition (3.2) est vérifiée, alors pour tout $\alpha > 1$ et pour tout $\beta > 1$ tels que $\beta < 1/\text{Sp}(\mathbf{R})$, nous avons :

$$\|\Pi\|_v = \sum_{j'=0}^{N-2} \beta^{j'} \cdot \Pi_{j'} \cdot \mathbf{A} + \beta^{N-1} \cdot \Pi_{N-1} \cdot (\mathbf{I} - \beta \cdot \mathbf{R})^{-1} \cdot \mathbf{A} \quad (3.54)$$

où $\mathbf{A} = (1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^c)^\top$, \mathbf{I} est la $(c+1) \times (c+1)$ -matrice identité et \mathbf{R} est la $(c+1) \times (c+1)$ -matrice définie dans Section 2.4.7 dont le rayon spectral est inférieur à un ($\text{Sp}(\mathbf{R}) < 1$).

Preuve. Supposons que la condition (3.2) est vérifiée, et soient $\alpha > 1$ et $\beta > 1$ tels que $\beta < 1/\text{Sp}(\mathbf{R})$, alors, selon (3.23), nous avons :

$$\begin{aligned} \|\Pi\|_v &= \sum_{i'=0}^c \sum_{j'=0}^{\infty} \alpha^{i'} \beta^{j'} \pi_{(i', j')} \\ &= \sum_{i'=0}^c \sum_{j'=0}^{N-2} \alpha^{i'} \beta^{j'} \pi_{(i', j')} + \sum_{i'=0}^c \sum_{j'=N-1}^{\infty} \alpha^{i'} \beta^{j'} \pi_{(i', j')} \\ &= \sum_{j'=0}^{N-2} \sum_{i'=0}^c \alpha^{i'} \beta^{j'} \pi_{(i', j')} + \sum_{j'=N-1}^{\infty} \sum_{i'=0}^c \alpha^{i'} \beta^{j'} \pi_{(i', j')} \\ &= \sum_{j'=0}^{N-2} \beta^{j'} \sum_{i'=0}^c \alpha^{i'} \pi_{(i', j')} + \sum_{j'=N-1}^{\infty} \beta^{j'} \sum_{i'=0}^c \alpha^{i'} \pi_{(i', j')} \end{aligned}$$

Or :

$$\sum_{i'=0}^c \alpha^{i'} \pi_{(i', j')} = \alpha^0 \pi_{(0, j')} + \alpha^1 \pi_{(1, j')} + \dots + \alpha^c \pi_{(c, j')} = \Pi_{j'} \cdot \mathbf{A}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \|\Pi\|_v &= \sum_{j'=0}^{N-2} \beta^{j'} \cdot \Pi_{j'} \cdot \mathbf{A} + \sum_{j'=N-1}^{\infty} \beta^{j'} \cdot \Pi_{j'} \cdot \mathbf{A} \\ &= \sum_{j'=0}^{N-2} \beta^{j'} \cdot \Pi_{j'} \cdot \mathbf{A} + \beta^{N-1} \cdot (\Pi_{N-1} + \beta \cdot \Pi_N + \beta^2 \cdot \Pi_{N+1} + \dots) \cdot \mathbf{A} \end{aligned}$$

Et selon (2.14), nous avons pour tout $k \geq 1$:

$$\Pi_{N+k-1} = \Pi_{N-1} \cdot \mathbf{R}^k$$

Et puisque (voir [92]) :

$$\begin{aligned} \beta < 1/\text{Sp}(\mathbf{R}) &\implies \beta \cdot \text{Sp}(\mathbf{R}) < 1 \\ &\implies \text{Sp}(\beta \cdot \mathbf{R}) < 1 \\ &\implies \sum_{k=0}^{\infty} (\beta \cdot \mathbf{R})^k = (\mathbf{I} - \beta \cdot \mathbf{R})^{-1} \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
 \|\Pi\|_v &= \sum_{j'=0}^{N-2} \beta^{j'} \cdot \Pi_{j'} \cdot \mathbf{A} \\
 &+ \beta^{N-1} \cdot (\Pi_{N-1} \cdot \mathbf{R}^0 + \beta \cdot \Pi_{N-1} \cdot \mathbf{R}^1 + \beta^2 \cdot \Pi_{N-1} \cdot \mathbf{R}^2 + \dots) \cdot \mathbf{A} \\
 &= \sum_{j'=0}^{N-2} \beta^{j'} \cdot \Pi_{j'} \cdot \mathbf{A} + \beta^{N-1} \cdot \Pi_{N-1} \cdot (\beta^0 \cdot \mathbf{R}^0 + \beta^1 \cdot \mathbf{R}^1 + \beta^2 \cdot \mathbf{R}^2 + \dots) \cdot \mathbf{A} \\
 &= \sum_{j'=0}^{N-2} \beta^{j'} \cdot \Pi_{j'} \cdot \mathbf{A} + \beta^{N-1} \cdot \Pi_{N-1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (\beta \cdot \mathbf{R})^k \cdot \mathbf{A} \\
 &= \sum_{j'=0}^{N-2} \beta^{j'} \cdot \Pi_{j'} \cdot \mathbf{A} + \beta^{N-1} \cdot \Pi_{N-1} \cdot (\mathbf{I} - \beta \cdot \mathbf{R})^{-1} \cdot \mathbf{A}
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

FIN DE LA PREUVE

Bornes de stabilité forte

Maintenant, nous énonçons le théorème qui nous permette d'estimer la ν -norme de déviation de la distribution stationnaire Π du modèle de Neuts et Rao par rapport à la distribution stationnaire $\tilde{\Pi}$ du modèle $M/M/c$ avec rappels :

Théorème 3.4. [9] Supposons que les conditions (3.1), (3.2) and $\lambda < \nu$ sont vérifiées, alors pour tout $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ et pour tout $\beta \in [\beta_1, \beta_2]$ tels que $\beta < 1/\text{Sp}(\mathbf{R})$, nous avons :

1. Si

$$\Delta < \frac{1 - \delta}{1 + \|\Pi\|_v} \tag{3.56}$$

alors

$$\|\tilde{\Pi} - \Pi\|_v \leq \mathbf{SSB}_1 = \frac{(1 + \|\Pi\|_v) \cdot \|\Pi\|_v \cdot \Delta}{(1 - \delta) - (1 + \|\Pi\|_v) \cdot \Delta} \tag{3.57}$$

2. Et si

$$\Delta < \frac{(1 - \delta)^2}{L + (1 - \delta)} \tag{3.58}$$

alors

$$\|\tilde{\Pi} - \Pi\|_v \leq \mathbf{SSB}_2 = \frac{L[L + (1 - \delta)] \cdot \Delta}{(1 - \delta)^3 - (1 - \delta)[L + (1 - \delta)] \cdot \Delta} \tag{3.59}$$

Avec : $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \Delta = \Delta(\alpha, \beta), \delta = \delta(\alpha, \beta), L = L(\alpha, \beta)$ et $\|\Pi\|_v$ sont donnés, respectivement, par les expressions (3.38), (3.39), (3.40), (3.41), (3.43), (3.36), (3.37) et (3.54).

Démonstration. Le résultat du théorème ci-dessus est une conséquence directe du Théorème 3.2 tenant compte des résultats obtenus dans Théorème 3.3, Proposition 3.2 et Lemme 3.1, et le fait que $\|\mathbb{1}_S\|_v = 1$. ■

Remarque 3.6. Pour les besoins des calculs numériques, nous allégeons les notations du théorème précédent en posant :

$$\bar{\delta} = \bar{\delta}(\alpha, \beta) = 1 - \delta = 1 - \delta(\alpha, \beta) \quad (3.60)$$

$$w = 1 + \|\Pi\|_v \quad (3.61)$$

Ce qui donne :

$$\mathbf{SSB}_1 = \mathbf{SSB}_1(\alpha, \beta) = \frac{w \cdot \|\Pi\|_v \cdot \Delta}{\bar{\delta} - w \cdot \Delta} \quad (3.62)$$

et

$$\mathbf{SSB}_2 = \mathbf{SSB}_2(\alpha, \beta) = \frac{L(L + \bar{\delta}) \cdot \Delta}{\bar{\delta}^3 - \bar{\delta}(L + \bar{\delta}) \cdot \Delta} \quad (3.63)$$

Corollaire 3.1. [9] Sous les conditions énoncées au Théorème 3.4, pour toute fonction $f \in \mathbb{R}^{\mathcal{S}}$ telle que $\|f\|_v < \infty$, nous avons :

$$|\tilde{\Pi}f - \Pi f| \leq \|f\|_v \cdot \mathbf{SSB}_k \quad \text{pour } k = 1, 2 \quad (3.64)$$

Preuve. Cette nouvelle borne se déduit à partir du Théorème 3.4 et du fait que pour toute mesure \mathbf{w} dans $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ nous avons $|\mathbf{w}f| \leq \|\mathbf{w}\|_v \cdot \|f\|_v$ (voir aussi (3.19)). ■

Remarque 3.7. Pour les besoins des calculs numériques, nous allégeons les notations du corollaire précédent en posant :

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_1(\alpha, \beta) = \|f\|_v \cdot \mathbf{SSB}_1 \quad (3.65)$$

et

$$\mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_2(\alpha, \beta) = \|f\|_v \cdot \mathbf{SSB}_2 \quad (3.66)$$

3.4 Calcul des bornes de stabilité forte

Notons que les bornes de stabilité forte \mathbf{SSB}_1 , \mathbf{SSB}_2 , \mathbf{h}_1 et \mathbf{h}_2 du Théorème 3.4 et du Corollaire 3.1, données, respectivement, par (3.62), (3.63), (3.65) et (3.66), s'expriment en fonction des paramètres α et β . Cela nous donne la possibilité de déterminer ces paramètres de sorte que ces bornes soient les plus petites possibles. Ce qui nous conduit à résoudre les problèmes d'optimisation suivants, où $\delta(\alpha, \beta)$, $L(\alpha, \beta)$, \mathbf{R} , $\Delta(\alpha, \beta)$, $\bar{\delta}(\alpha, \beta)$ et w qui vont apparaître sont données, respectivement, par (3.36), (3.37), Section 2.4.7, (3.43), (3.60) et (3.61) :

3.4.1 Calcul de \mathbf{SSB}_1

Cela revient à résoudre le problème suivant :

$$\mathbf{SSB}_1 = \mathbf{SSB}_1(\alpha_{\text{opt1}}, \beta_{\text{opt1}}) = \min_{\alpha, \beta} \mathbf{SSB}_1(\alpha, \beta) \quad (3.67)$$

$$\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}] \quad \text{et} \quad \beta \in [\beta_{\min}, \beta_{\max}]$$

Avec

$$\alpha_{\min} = \min \{ \alpha, \quad \alpha \in F \} \quad (3.68)$$

$$\beta_{\min} = \min \{ \beta, \quad \beta \in F \} \quad (3.69)$$

$$\alpha_{\max} = \max \{ \alpha, \quad \alpha \in F \} \quad (3.70)$$

$$\beta_{\max} = \max \{ \beta, \quad \beta \in F \} \quad (3.71)$$

où F est l'ensemble de $(\alpha, \beta) \in [1, +\infty[\times [1, +\infty[$ tel que :

$$0 < \delta(\alpha, \beta) < 1, \quad L(\alpha, \beta) > 0, \quad \beta < \frac{1}{\text{Sp}(\mathbf{R})} \quad \text{et} \quad \Delta(\alpha, \beta) < \frac{\bar{\delta}(\alpha, \beta)}{w}$$

3.4.2 Calcul de SSB_2

Pour SSB_2 , cela revient à résoudre le problème suivant :

$$\text{SSB}_2 = \text{SSB}_2(\alpha_{\text{opt}2}, \beta_{\text{opt}2}) = \min_{\alpha, \beta} \text{SSB}_2(\alpha, \beta) \quad (3.72)$$

$$\alpha \in [\alpha'_{\min}, \alpha'_{\max}] \quad \text{et} \quad \beta \in [\beta'_{\min}, \beta'_{\max}]$$

Avec

$$\alpha'_{\min} = \min \{ \alpha, \quad \alpha \in F' \} \quad (3.73)$$

$$\beta'_{\min} = \min \{ \beta, \quad \beta \in F' \} \quad (3.74)$$

$$\alpha'_{\max} = \max \{ \alpha, \quad \alpha \in F' \} \quad (3.75)$$

$$\beta'_{\max} = \max \{ \beta, \quad \beta \in F' \} \quad (3.76)$$

où F' est l'ensemble de $(\alpha, \beta) \in [1, +\infty[\times [1, +\infty[$ tel que :

$$0 < \delta(\alpha, \beta) < 1, \quad L(\alpha, \beta) > 0, \quad \beta < \frac{1}{\text{Sp}(\mathbf{R})} \quad \text{et} \quad \Delta(\alpha, \beta) < \frac{\bar{\delta}^2(\alpha, \beta)}{L(\alpha, \beta) + \bar{\delta}(\alpha, \beta)}$$

3.4.3 Calcul de \mathbf{h}_1

Calculer \mathbf{h}_1 revient à résoudre le problème suivant :

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_1(\alpha_{\text{opt}3}, \beta_{\text{opt}3}) = \min_{\alpha, \beta} \mathbf{h}_1(\alpha, \beta) \quad (3.77)$$

$$\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}] \quad \text{et} \quad \beta \in [\beta_{\min}, \beta_{\max}]$$

où α_{\min} , β_{\min} , α_{\max} et β_{\max} sont donnés, respectivement, dans (3.68), (3.69), (3.70) et (3.71).

3.4.4 Calcul de \mathbf{h}_2

Pour calculer \mathbf{h}_2 nous devons résoudre le problème suivant :

$$\mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_2(\alpha_{\text{opt4}}, \beta_{\text{opt4}}) = \min_{\alpha, \beta} \mathbf{h}_2(\alpha, \beta) \quad (3.78)$$

$$\alpha \in [\alpha'_{\min}, \alpha'_{\max}] \quad \text{et} \quad \beta \in [\beta'_{\min}, \beta'_{\max}]$$

où α'_{\min} , β'_{\min} , α'_{\max} et β'_{\max} sont donnés, respectivement, dans (3.73), (3.74), (3.75) et (3.76).

Remarque 3.8. Les problèmes d'optimisation (3.67), (3.72), (3.77) et (3.78) peuvent être résolus à l'aide de n'importe quelle technique standard.

3.5 Algorithme de stabilité forte

Dans cette section, nous donnerons l'algorithme qui précisera les étapes à suivre pour calculer les bornes de stabilité forte trouvées précédemment, et cela en utilisant n'importe quel logiciel de calcul (par exemple MATLAB).

ÉTAPE 01 : INITIALISATION :

ÉTAPE 02 : Calculer la distribution stationnaire Π du modèle de Neuts et Rao en utilisant l'algorithme décrit dans Section 2.4.8 ;

Aller à **03**.

ÉTAPE 03 : Déterminer $[\alpha_1, \alpha_2] \subset]1, +\infty[$ et $[\beta_1, \beta_2] \subset]1, +\infty[$ tels que :

$$0 < \delta(\alpha, \beta) < 1 \quad \text{et} \quad L(\alpha, \beta) > 0$$

Aller à **04**.

ÉTAPE 04 : Calculer $\text{Sp}(\mathbf{R})$;

Aller à **05**.

ÉTAPE 05 : Déterminer $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}] \subset [\alpha_1, \alpha_2]$ et $[\beta_{\min}, \beta_{\max}] \subset [\beta_1, \beta_2]$ tels que :

$$\beta < \frac{1}{\text{Sp}(\mathbf{R})} \quad \text{et} \quad \Delta(\alpha, \beta) < \frac{\bar{\delta}(\alpha, \beta)}{w}$$

Aller à **06**.

ÉTAPE 06 : Déterminer $[\alpha'_{\min}, \alpha'_{\max}] \subset [\alpha_1, \alpha_2]$ et $[\beta'_{\min}, \beta'_{\max}] \subset [\beta_1, \beta_2]$ tels que :

$$\beta < \frac{1}{\text{Sp}(\mathbf{R})} \quad \text{et} \quad \Delta(\alpha, \beta) < \frac{\bar{\delta}^2(\alpha, \beta)}{L(\alpha, \beta) + \bar{\delta}(\alpha, \beta)}$$

Aller à **07**.

ÉTAPE 07 : Déterminer $(\alpha_{\text{opt1}}, \beta_{\text{opt1}}) \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}] \times [\beta_{\min}, \beta_{\max}]$ tel que :

$$\mathbf{SSB}_1 = \mathbf{SSB}_1(\alpha_{\text{opt1}}, \beta_{\text{opt1}}) = \min_{\alpha, \beta} \mathbf{SSB}_1(\alpha, \beta)$$

$$\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}] \quad \text{et} \quad \beta \in [\beta_{\min}, \beta_{\max}]$$

Aller à **08**.

ÉTAPE 08 : Déterminer $(\alpha_{\text{opt2}}, \beta_{\text{opt2}}) \in [\alpha'_{\min}, \alpha'_{\max}] \times [\beta'_{\min}, \beta'_{\max}]$ tel que :

$$\mathbf{SSB}_2 = \mathbf{SSB}_2(\alpha_{\text{opt2}}, \beta_{\text{opt2}}) = \min_{\alpha, \beta} \mathbf{SSB}_2(\alpha, \beta)$$

$$\alpha \in [\alpha'_{\min}, \alpha'_{\max}] \quad \text{et} \quad \beta \in [\beta'_{\min}, \beta'_{\max}]$$

Aller à **09**.

ÉTAPE 09 : Déterminer $(\alpha_{\text{opt3}}, \beta_{\text{opt3}}) \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}] \times [\beta_{\min}, \beta_{\max}]$ tel que :

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_1(\alpha_{\text{opt3}}, \beta_{\text{opt3}}) = \min_{\alpha, \beta} \mathbf{h}_1(\alpha, \beta)$$

$$\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}] \quad \text{et} \quad \beta \in [\beta_{\min}, \beta_{\max}]$$

Aller à **10**.

ÉTAPE 10 : Déterminer $(\alpha_{\text{opt4}}, \beta_{\text{opt4}}) \in [\alpha'_{\min}, \alpha'_{\max}] \times [\beta'_{\min}, \beta'_{\max}]$ tel que :

$$\mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_2(\alpha_{\text{opt4}}, \beta_{\text{opt4}}) = \min_{\alpha, \beta} \mathbf{h}_2(\alpha, \beta)$$

$$\alpha \in [\alpha'_{\min}, \alpha'_{\max}] \quad \text{et} \quad \beta \in [\beta'_{\min}, \beta'_{\max}]$$

Aller à **11**.

ÉTAPE 11 : FIN.

3.6 Exemple d'application

Dans cette section, et pour donner une idée sur les performances de l'approche de stabilité forte que nous avons appliquée précédemment sur les modèles $M/M/c$ avec rappels, nous allons mettre en œuvre l'algorithme décrit dans Section 2.4.8 et l'algorithme décrit dans Section 3.5 sur un cas de modèle dont la distribution stationnaire est connue, et cela en élaborant un programme informatique qui va

déterminer l'erreur commise sur la distribuion stationnaire de ce modèle du à l'approximation de Neuts et Rao.

Pour cette fin, et puisque la forme exacte de sa distribution stationnaire est connue avec exactitude, nous avons choisi le modèle $M/M/2$ avec rappels (voir Section 2.4.7) dont les paramètres sont : $\lambda = 0.2$, $\mu = 10$, $\nu = 1$ et $c = 2$. L'espace d'état de ce modèle est $\mathcal{S} = \{0, 1, 2\} \times \mathbb{N}$ et il vérifie la condition de stabilité (3.1), donc il a une distribution stationnaire $\tilde{\Pi} = [\tilde{\pi}_{(i', j')}]_{(i', j') \in \{0, 1, 2\} \times \mathbb{N}}$ donnée par (2.8), (2.9), (2.10) et (2.11) comme suit :

$$\tilde{\pi}_{(0, j)} = \frac{(0.2)^j}{j! (10)^j} \cdot \prod_{k=0}^{j-1} \frac{(0.2 + 10k)^2 + 10k}{22.6 + 20k} \cdot \tilde{\pi}_{(0, 0)} \quad (3.79)$$

$$\tilde{\pi}_{(1, j)} = (0.2 + 10j) \frac{(0.2)^j}{j! (10)^j} \cdot \prod_{k=0}^{j-1} \frac{(0.2 + 10k)^2 + 10k}{22.6 + 20k} \cdot \tilde{\pi}_{(0, 0)} \quad (3.80)$$

$$\tilde{\pi}_{(2, j)} = [1.2 + 10(j + 1)] \frac{(0.2)^j}{j! (10)^j} \cdot \prod_{k=0}^j \frac{(0.2 + 10k)^2 + 10k}{22.6 + 20k} \cdot \tilde{\pi}_{(0, 0)} \quad (3.81)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_{(0, 0)}^{-1} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(0.2)^j}{j! (10)^j} \cdot \prod_{k=0}^{j-1} \frac{(0.2 + 10k)^2 + 10k}{22.6 + 20k} \\ &\times \left(1.2 + 10j + \frac{[1.2 + 10(j + 1)][(0.2 + 10j)^2 + 10j]}{2.6 + 20(j + 1)} \right) \end{aligned} \quad (3.82)$$

3.6.1 Application du Théorème 3.4

Le fait de connaitre explicitement la distribution stationnaire $\tilde{\Pi}$ du modèle $M/M/2$ avec rappels décrit ci-dessus nous donne l'opportunité de pouvoir calculer la valeur réelle $\|\tilde{\Pi} - \Pi\|_v$ de l'erreur commise sur sa distribution stationnaire lors de son approximation par la distribution stationnaire Π du modèle de Neuts et Rao qui lui est associé, ensuite comparer cette erreur avec les bornes de stabilité forte \mathbf{SSB}_1 et \mathbf{SSB}_2 données dans Théorème 3.4. Pour cela, nous avons élaboré un programme informatique sous l'environnement MATLAB en suivant les étapes suivantes :

ÉTAPE 01 : INITIALISATION :

ÉTAPE 02 : Déterminer $\tilde{\Pi}$ en utilisant (3.79), (3.80), (3.81) et (3.82) ;

Aller à **03**.

ÉTAPE 03 : Déterminer Π la distribution stationnaire du modèle de Neuts et Rao associé au modèle $M/M/2$ avec rappel décrit ci-dessus en utilisant l'algorithme donné dans Section 2.4.8 ;

Aller à **04**.

ÉTAPE 04 : Calculer $\|\tilde{\Pi} - \Pi\|_v$ en utilisant (3.23);

Aller à **05**.

ÉTAPE 05 : Calculer \mathbf{SSB}_1 et \mathbf{SSB}_2 suivant les étapes de l'algorithme décrit dans Section 3.5;

Aller à **06**.

ÉTAPE 06 : FIN.

Les résultats numériques concernant les bornes de stabilité forte \mathbf{SSB}_1 et \mathbf{SSB}_2 sont donnés, respectivement, dans Table 3.1 et Table 3.2, ainsi qu'une illustration graphique dans Figure 3.1.

Dans Table 3.1, nous présentons les valeurs de la borne de stabilité forte \mathbf{SSB}_1 du modèle $M/M/2$ avec rappels en faisant varier le niveau de troncature N dans son modèle d'approximation de Neuts et Rao, ainsi que les vraies valeurs de $\|\tilde{\Pi} - \Pi\|_v$:

$\lambda = 0.2, \mu = 10, \nu = 1$ and $c = 2$						
N	α_{opt1}	β_{opt1}	δ	L	\mathbf{SSB}_1	$\ \tilde{\Pi} - \Pi\ _v$
5	1.9700	3.1900	0.7515	1.2185	0.3029	0.0102
10	1.9500	3.1500	0.7526	1.1974	0.1034	0.0061
20	1.9200	3.0800	0.7540	1.1660	0.0298	0.0018
30	1.9200	3.0800	0.7540	1.1660	0.0119	6.1580 e-004
40	1.9100	3.0600	0.7546	1.1554	0.0051	2.2253 e-004
50	1.9100	3.0600	0.7546	1.1554	0.0023	9.9249 e-005
60	1.9100	3.0600	0.7546	1.1554	0.0012	5.3450 e-005
70	1.9100	3.0600	0.7546	1.1554	7.5498 e-004	3.1368 e-005
80	1.9100	3.0600	0.7546	1.1554	5.7090 e-004	2.0102 e-005
90	1.9100	3.0600	0.7546	1.1554	4.8258 e-004	1.2810 e-005
100	1.9100	3.0600	0.7546	1.1554	4.4987 e-004	9.0579 e-006
110	1.9100	3.0600	0.7546	1.1554	4.3072 e-004	7.2173 e-006
120	1.9100	3.0600	0.7546	1.1554	4.1069 e-004	6.0596 e-006
130	1.9100	3.0600	0.7546	1.1554	4.0024 e-004	5.1544 e-006
140	1.9100	3.0600	0.7546	1.1554	3.8764 e-004	4.4033 e-006
150	1.9100	3.0600	0.7546	1.1554	3.8563 e-004	3.9174 e-006

Table 3.1. Tableau comparatif de \mathbf{SSB}_1 avec $\|\tilde{\Pi} - \Pi\|_v$

Dans Table 3.2, nous présentons les valeurs de la borne de stabilité forte \mathbf{SSB}_2 du modèle $M/M/2$ avec rappels en faisant varier le niveau de troncature N dans son modèle d'approximation de Neuts et Rao, ainsi que les vraies valeurs de $\|\tilde{\Pi} - \Pi\|_v$:

$\lambda = 0.2, \mu = 10, \nu = 1$ and $c = 2$						
N	$\alpha_{\text{opt}2}$	$\beta_{\text{opt}2}$	δ	L	\mathbf{SSB}_2	$\ \tilde{\Pi} - \Pi\ _v$
5	1.6500	2.2400	0.7546	0.8954	1.0256	0.0096
10	1.6500	2.2400	0.7546	0.8954	0.6704	0.0052
20	1.5700	2.0900	0.7690	0.8010	0.3229	0.0014
30	1.5600	2.0700	0.7709	0.7891	0.1610	4.5360 e-004
40	1.5500	2.0500	0.7729	0.7771	0.0918	1.6808 e-004
50	1.5500	2.0500	0.7729	0.7771	0.0582	7.6383 e-005
60	1.5500	2.0500	0.7729	0.7771	0.0417	4.0548 e-005
70	1.5400	2.0300	0.7749	0.7651	0.0335	2.3296 e-005
80	1.5400	2.0300	0.7749	0.7651	0.0279	1.4554 e-005
90	1.5400	2.0300	0.7749	0.7651	0.0240	9.5832 e-006
100	1.5400	2.0300	0.7749	0.7651	0.0210	6.5664 e-006
110	1.5400	2.0300	0.7749	0.7651	0.0187	4.8572 e-006
120	1.5400	2.0300	0.7749	0.7651	0.0165	3.9778 e-006
130	1.5400	2.0300	0.7749	0.7651	0.0147	3.3684 e-006
140	1.5400	2.0300	0.7749	0.7651	0.0132	2.9171 e-006
150	1.5400	2.0300	0.7749	0.7651	0.0121	2.4797 e-006

Table 3.2. Tableau comparatif de \mathbf{SSB}_2 avec $\|\tilde{\Pi} - \Pi\|_v$

Figure 3.1 illustre le comportement des bornes de stabilité fortes \mathbf{SSB}_1 et \mathbf{SSB}_2 en fonction des valeurs du niveau de troncature N :

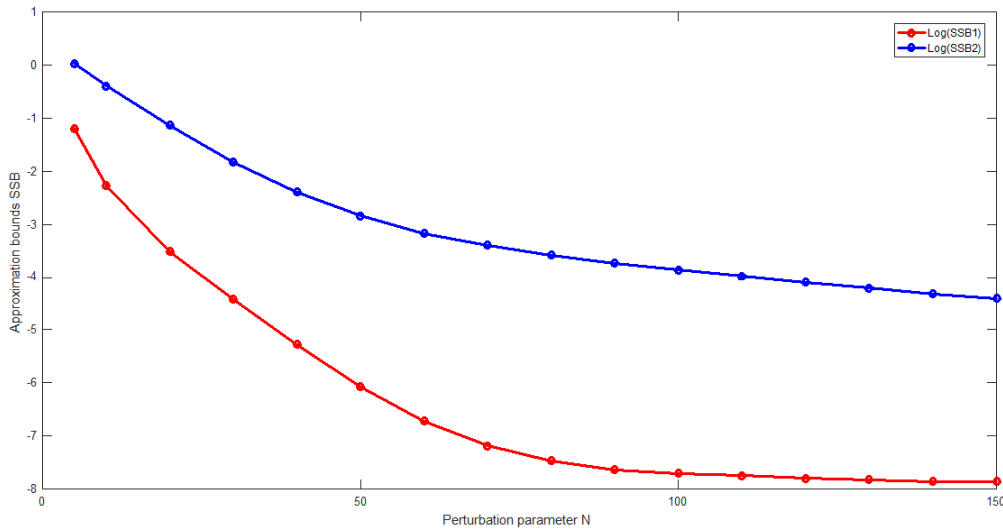


Figure 3.1. Les bornes \mathbf{SSB}_1 et \mathbf{SSB}_2 en fonction du niveau de troncature N

3.6.2 Application du Corollaire 3.1

Pour illustrer l'application du Corollaire 3.1 à une fonction particulière f , nous posons f la fonction identité de $\mathcal{S} = \{0, 1, 2\} \times \mathbb{N}$ définie par :

$$\forall (i, j) \in \{0, 1, 2\} \times \mathbb{N}, \quad f(i, j) = i + j \quad (3.83)$$

Autrement dit, nous nous intéressons à l'effet de la la perturbation du taux global du système $M/M/2$ avec rappels sur le nombre moyen de clients dans ce système. Pour cela, énonçons d'abord le lemme suivant :

Lemme 3.2. [9] Pour tout $\alpha > 1$ et pour tout $\beta > 1$, Nous avons :

$$\|f\|_v \leq \Lambda \quad (3.84)$$

où :

$$\Lambda = \Lambda(\alpha, \beta) = \min(c, 1/\ln \alpha) \cdot \alpha^{-\min(c, 1/\ln \alpha)} + \beta^{-1/\ln \beta} / \ln \beta \quad (3.85)$$

Preuve. Selon (3.24), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \|f\|_v &= \sup_{(i, j) \in \mathcal{S}} \frac{|f(i, j)|}{\alpha^i \beta^j} \\ &= \sup_{\substack{0 \leq i \leq c \\ j \geq 0}} \left(\frac{i + j}{\alpha^i \beta^j} \right) \\ &= \sup_{\substack{0 \leq i \leq c \\ j \geq 0}} \left(\frac{i}{\alpha^i \beta^j} + \frac{j}{\alpha^i \beta^j} \right) \\ &\leq \sup_{\substack{0 \leq i \leq c \\ j \geq 0}} \left(\frac{i}{\alpha^i \beta^j} \right) + \sup_{\substack{0 \leq i \leq c \\ j \geq 0}} \left(\frac{j}{\alpha^i \beta^j} \right) \\ &\leq \sup_{0 \leq i \leq c} \frac{i}{\alpha^i} + \sup_{j \geq 0} \frac{j}{\beta^j} \end{aligned}$$

Soit ψ_1 la fonction définie sur $[0, c]$ par :

$$\forall x \in [0, c], \quad \psi_1(x) = \frac{x}{\alpha^x} \quad (3.86)$$

Alors, une étude élémentaire des variations de ψ_1 sur $[0, c]$ montre que :

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0, c]} \psi_1(x) &= \begin{cases} \psi_1(c) & \text{si } c \leq 1/\ln \alpha \\ \psi_1(1/\ln \alpha) & \text{si } c \geq 1/\ln \alpha \end{cases} \\ &= \begin{cases} c \cdot \alpha^{-c} & \text{si } c \leq 1/\ln \alpha \\ \alpha^{-1/\ln \alpha} / \ln \alpha & \text{si } c \geq 1/\ln \alpha \end{cases} \\ &= \min(c, 1/\ln \alpha) \cdot \alpha^{-\min(c, 1/\ln \alpha)} \end{aligned}$$

Et soit ψ_2 la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad \psi_2(y) = \frac{y}{\beta^y}$$

Une étude des variations de ψ_2 sur $[0, +\infty[$ montre que :

$$\sup_{y \in [0, +\infty[} \psi_2(y) = \psi_2(1/\ln \beta) = \beta^{-1/\ln \beta} / \ln \beta$$

Donc :

$$\sup_{0 \leq i \leq c} \frac{i}{\alpha^i} + \sup_{j \geq 0} \frac{j}{\beta^j} \leq \sup_{x \in [0, c]} \psi_1(x) + \sup_{y \in [0, +\infty[} \psi_2(y)$$

Par conséquent :

$$\|f\|_v \leq \sup_{x \in [0, c]} \psi_1(x) + \sup_{y \in [0, +\infty[} \psi_2(y)$$

En concordance avec (3.84), nous pouvons poser :

$$\Lambda = \Lambda(\alpha, \beta) = \sup_{x \in [0, c]} \psi_1(x) + \sup_{y \in [0, +\infty[} \psi_2(y) = \min(c, 1/\ln \alpha) \cdot \alpha^{-\min(c, 1/\ln \alpha)} + \beta^{-1/\ln \beta} / \ln \beta$$

FIN DE LA PREUVE

Conséquence 3.1 En appliquant le résultat du Corollaire 3.1 sur la fonction f définie dans (3.83), et en tenant compte du résultat de Lemme 3.2, nous pouvons donner les expressions des bornes \mathbf{h}_k ($k = 1, 2$), l'écart entre la distribution stationnaire $\tilde{\Pi}$ du modèle $M/M/c$ avec rappels et la distribution stationnaire Π du modèle de Neuts et Rao, comme suit :

$$\mathbf{h}_k = \mathbf{h}_k(\alpha, \beta) = \Lambda \cdot \mathbf{SSB}_k \quad \text{pour } k = 1, 2 \quad (3.87)$$

Afin d'appliquer ce dernier résultat et calculer les bornes \mathbf{h}_1 et \mathbf{h}_2 pour le système $M/M/2$ avec rappels décrit ci-dessus, nous avons élaboré un programme informatique sous l'environnement MATLAB suivant les étapes de l'algorithme décrit dans Section 3.5. Les valeurs numériques de \mathbf{h}_1 et \mathbf{h}_2 sont données, respectivement, dans Table 3.3 et Table 3.4 en faisant varier le niveau de troncature N :

$$\lambda = 0.2, \mu = 10, \nu = 1 \text{ and } c = 2$$

N	α_{opt3}	β_{opt3}	δ	L	\mathbf{h}_1
5	2.4400	4.1300	0.7482	1.6918	0.2908
10	2.4900	4.2300	0.7497	1.7403	0.0964
20	2.5100	4.2700	0.7504	1.7596	0.0102
30	2.5100	4.2700	0.7504	1.7596	0.0085
40	2.5200	4.2900	0.7508	1.7692	0.0034
50	2.5200	4.2900	0.7508	1.7692	0.0013
60	2.5200	4.2900	0.7508	1.7692	9.6784 e-004
70	2.5200	4.2900	0.7508	1.7692	6.2594 e-004
80	2.5200	4.2900	0.7508	1.7692	4.9587 e-004
90	2.5200	4.2900	0.7508	1.7692	4.5582 e-004
100	2.5200	4.2900	0.7508	1.7692	4.3872 e-004
110	2.5300	4.3100	0.7511	1.7789	4.2132 e-004
120	2.5300	4.3100	0.7511	1.7789	4.0321 e-004
130	2.5300	4.3100	0.7511	1.7789	3.9077 e-004
140	2.5300	4.3100	0.7511	1.7789	3.7479 e-004
150	2.5300	4.3100	0.7511	1.7789	3.6442 e-004

Table 3.3. Les valeurs de \mathbf{h}_1 en fonction de N

$$\lambda = 0.2, \mu = 10, \nu = 1 \text{ and } c = 2$$

N	α_{opt4}	β_{opt4}	δ	L	\mathbf{h}_2
5	1.8400	2.9200	0.7596	1.0804	0.9037
10	1.8700	2.9800	0.7573	1.1127	0.5652
20	1.9000	3.0400	0.7553	1.1447	0.2358
30	1.9000	3.0400	0.7553	1.1447	0.1258
40	1.9100	3.0600	0.7546	1.1554	0.0781
50	1.9100	3.0600	0.7546	1.1554	0.0454
60	1.9100	3.0600	0.7546	1.1554	0.0351
70	1.9100	3.0600	0.7546	1.1554	0.0288
80	1.9100	3.0600	0.7546	1.1554	0.0230
90	1.9100	3.0600	0.7546	1.1554	0.0209
100	1.9100	3.0600	0.7546	1.1554	0.0197
110	1.9100	3.0600	0.7546	1.1554	0.0178
120	1.9100	3.0600	0.7546	1.1554	0.0154
130	1.9100	3.0600	0.7546	1.1554	0.0132
140	1.9100	3.0600	0.7546	1.1554	0.0126
150	1.9100	3.0600	0.7546	1.1554	0.0114

Table 3.4. Les valeurs de \mathbf{h}_2 en fonction de N

3.6.3 Interprétation des résultats

D'après les résultats numériques exposés dans Table 3.1, Table 3.2, Table 3.3 et Table 3.4, et d'après Figure 3.1, nous constatons que les erreurs d'approximation de stabilité forte \mathbf{SSB}_1 , \mathbf{SSB}_2 , \mathbf{h}_1 et \mathbf{h}_2 diminuent lorsque le niveau de troncature N augmente. Nous pouvons, alors, nous attendre à ce que lorsque le niveau de troncature est très grand, ces erreurs vont tendre vers 0 et deviennent négligeables. Et cela confirme, même, l'idée intuitive de la troncature proposée par NEUTS et RAO qui stipule que plus le niveau de troncature N est grand, plus le modèle de troncature généralisée de Neuts et Rao est proche du modèle $M/M/c$ avec rappels. En outre, on peut également remarquer que les vraies erreurs d'approximation $\|\Pi - \tilde{\Pi}\|_v$ sont toujours inférieures aux erreurs \mathbf{SSB}_1 et \mathbf{SSB}_2 obtenues par la méthode de stabilité forte. Ceci signifie que les bornes de stabilité forte sont réellement des seuils de l'erreur qu'on peut commettre lors de l'approximation. De plus, nous constatons que les valeurs de \mathbf{SSB}_1 sont toujours inférieures aux valeurs de \mathbf{SSB}_2 et plus proches des vraies valeurs de $\|\Pi - \tilde{\Pi}\|_v$, ce qui nous laisse à dire que l'utilisation de la borne \mathbf{SSB}_1 est plus efficace que l'utilisation de la borne \mathbf{SSB}_2 pour la détermination du seuil de troncature N le plus approprié.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons appliqué la méthode de stabilité forte sur le système de files d'attente $M/M/c$ avec rappels dont la distribution stationnaire du processus qui le décrit est, généralement, incalculable. Cette méthode sert à obtenir des bornes quantitatives qui permettent de discuter et de mieux voir le degré d'approximation d'un modèle simple, dont les caractéristiques de performance sont calculables, avec un modèle plus complexe qu'on veut étudier. Ainsi, nous avons donné les conditions suffisantes pour la stabilité forte de la chaîne de Markov induite du modèle de Neuts et Rao qui est une approximation du modèle $M/M/c$ avec rappels obtenu en perturbant le taux global de rappel. Ensuite, nous avons donné les bornes de perturbations de stabilité forte avec un calcul exact des constantes. Et pour terminer ce chapitre, nous avons donné un exemple d'un modèle $M/M/c$ avec rappels, dont la distribution stationnaire est calculable, sur lequel nous avons mis en œuvre des algorithmes qui nous a permis de déterminer les bornes de perturbation de stabilité forte et les comparer avec les vraies erreurs due à l'approximation.

Conclusion générale et perspectives

La plupart, pour ne pas dire la quasi-totalité, des problèmes liés à l'amélioration de la vie quotidienne des gens ne peuvent pas être résolus par des méthodes qui donnent des solutions exactes. C'est pourquoi les chercheurs ont souvent recours à des méthodes d'approximation (non seulement dans le domaine des mathématiques, mais aussi dans de nombreux autres domaines) qui donnent des solutions approximatives. Il existe plusieurs méthodes d'approximation qui donnent des techniques permettant d'estimer, d'une manière ou d'une autre, la solution du problème posé, bien que, souvent, la difficulté ne se limite pas seulement de trouver la solution mais de donner une forme précise et claire du problème.

Dans cette thèse, nous avons mis en évidence l'intérêt de l'application de la méthode de stabilité forte pour l'analyse de perturbation des systèmes de files d'attente avec rappels, et spécifiquement du modèle $M/M/c$ avec rappels. Dans un premier temps, nous avons donné une synthèse générale de ce qu'il faut connaître pour étudier les systèmes de files d'attente classiques et les systèmes de files d'attente avec rappels, pour, ensuite, porter une attention particulière sur le modèle $M/M/c$ avec rappels. En raison de la complexité de ce modèle, il n'existent pas, en général, de formes analytiques exactes qui donnent ses caractéristiques de performance, sauf dans des cas particuliers. Dans un deuxième temps, nous avons déterminé les conditions de stabilité forte du modèle de Neuts et Rao, qui est une approximation du modèle $M/M/c$ avec rappels, ce qui nous a permis d'évaluer la qualité de l'approximation en fournissant des bornes de perturbation précises qui permettent de quantifier l'erreur due à cette approximation. Les résultats numériques obtenus confirment que le modèle tronqué de Neuts et Rao devient de plus en plus précis et proche du modèle $M/M/c$ avec rappels à mesure que le niveau de troncature augmente.

Les résultats obtenus dans ce travail ouvrent la voie à de nombreuses perspectives de recherche parmi lesquelles nous pouvons mentionner les suivantes :

1. Comparer la méthode de stabilité forte avec d'autres méthodes utilisées dans la PTMC (Perturbation Theory for Markov Chains) pour évaluer leur pertinence dans différents contextes.
2. Appliquer la méthode de stabilité forte sur le modèle $M/M/c$ avec rappels pour étudier le degré de précision des autres modèles d'approximation autre que celui de Neuts et Rao.
3. Appliquer les résultats obtenus dans ce travail pour modéliser des systèmes réels de files d'attente avec rappels, comme, par exemple, les systèmes informatiques ou les réseaux de télécommunication, et cela dans le but d'améliorer leur performance.

Bibliographie

- [1] ABBAS, K. (2010) *Approximation dans les systèmes de files d'attente à serveur non fiable*, Thèse de Doctorat, Université Abderrahmane MIRA de Bejaia.
- [2] ABBAS, K. and AÏSSANI, D. (2010) "Strong stability of the embedded Markov chain in an $GI/M/1$ queue with negative customers", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 34, No. 10, pp.2806–2812.
- [3] ABBAS, K. and AÏSSANI, D. (2016) "Approximation of performance measures in an $M/G/1$ queue with breakdowns", *Quality Technology and Quantitative Management*, Vol. 7, No. 4, pp.353–363.
- [4] ABBAS, K., BERKHOUT, J. and HEIDERGOTT, B. (2016) "A critical account of perturbation analysis of Markov chains", *Markov Processes and Related Fields*, Vol. 22, No. 2, pp.227–265.
- [5] AÏSSANI, D. (1990) "Ergodicité uniforme et stabilité forte des chaînes de Markov", *Séminaire Mathématique de Rouen*, Édition C.N.R.S, pp.115–121.
- [6] AÏSSANI, D. (1992) "Strong stability of an imbedded Markov chain in an $G/M/\infty$ system", *Technologies Avancées*, Vol. 2, No. 1, pp.33–38.
- [7] AÏSSANI, D. and KARTASHOV, N.V. (1983) "Ergodicity and stability of Markov chains with respect to operator topology in the space of transition kernels", *Doklady Akademii Nauk Ukrainskoi S.S.R.*, Vol. A, No. 11, pp.3–5.
- [8] AÏSSANI, D. and KARTASHOV, N.V. (1984) "Strong stability of an imbedded Markov chains in an $M/G/1$ system", *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, Vol. 29, pp.1–5.
- [9] AIT YALA, N., ISSAADI, B. and ABBAS, K. (2025) "Strong perturbation bounds for the stationary distribution of the main multi-server retrial queue model", *International Journal of Mathematics in Operational Research*, Vol. 31, No. 1, pp.1–40.
- [10] ALMÁSI, B., BÉRCZES, T., SZTRIK, J. and WANG, J. (2016) "Performance modeling of finite-source cognitive radio networks", *Acta Cybernetica*, Vol. 22, No. 3, pp.617–631.

- [11] ANISIMOV, V.V. (1988) "Estimates for the deviations of the transition characteristics of nonhomogeneous Markov processes", *Ukrainian Mathematical Journal*, Vol. 40, No. 6, pp.588–592.
- [12] ANISIMOV, V.V. and ARTALEJO, J.R. (2002) "Approximation of multiserver retrial queues by means of generalized truncated models", *Sociedad de Estadística e Investigación Operativa*, Vol. 10, No. 1, pp.51–66.
- [13] ARTALEJO, J.R. (1995) "A queueing system with returning customers and waiting line", *Operations Research Letters*, Vol. 17, No. 4, pp.191–199.
- [14] ARTALEJO, J.R. (1996) "Stationary analysis of the characteristics of the $M/M/2$ queue with constant repeated attempts", *Opsearch*, Vol. 33, No. 2, pp.83–95.
- [15] ARTALEJO, J.R. (1998) "Retrial queues with a finite number of sources", *Journal of the Korean Mathematical Society*, Vol. 35, No. 3, pp.503–525.
- [16] ARTALEJO, J.R. (1999a) "Accessible bibliography on retrial queues", *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. 30, Nos. 3-4, pp.1–6.
- [17] ARTALEJO, J.R. (1999b) "A classified bibliography of research on retrial queues : progress in 1990–1999", *Sociedad de Estadística e Investigación Operativa*, Vol. 7, No. 2, pp.187–211.
- [18] ARTALEJO, J.R. (2009) "Retrial queues : An algorithmic approach", *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, Vol. 17, No. 1, pp.83–101.
- [19] ARTALEJO, J.R. (2010) "Accessible bibliography on retrial queues : progress in 2000–2009", *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. 51, Nos. 9-10, pp.1071–1081.
- [20] ARTALEJO, J.R. and FALIN, G. (2002) "Standard and retrial queueing systems : a comparative analysis", *Revista Matemática Complutense*, Vol. 15, No. 1, pp.101–129.
- [21] ARTALEJO, J.R. and GÓMEZ-CORRAL, A. (2008) *Retrial Queueing Systems : A Computational Approach*, Springer, Berlin.
- [22] ARTALEJO, J.R. and POZO, M. (2002) "Numerical calculation of the stationary distribution of the main multiserver retrial queue", *Annals of Operations Research*, Vol. 116, Nos. 1–4, pp.41–56.
- [23] ASMUSSEN, S. (2000) "Matrix-analytic Models and their Analysis", *Scandinavian Journal of Statistics : Theory and Applications*, Vol. 27, No. 2, pp.193–226.
- [24] ASMUSSEN, S. (2003) *Applied Probability and Queues*, 2nd edition, Springer Verlag New York, Inc., New York.
- [25] AVRACHENKOV, K. and YECHIALI, U. (2008) "Retrial Networks with finite buffers and their applications to internet data traffic", *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, Vol. 22, No. 4, pp.519–536.
- [26] BARECHE, A. and AÏSSANI, D. (2008) "Kernel density in the study of the strong stability of the $M/M/1$ queueing systems", *Operations Research Letters*, Vol. 36, No. 5, pp.535–538.
- [27] BARECHE, A. and AÏSSANI, D. (2011) "Statistical techniques for a numerical evaluation of the proximity of $G/G/1$ and $G/M/1$ queueing systems", *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 61, No. 5, pp.1296–1304.

-
- [28] BENAOUICHA, M. and AÏSSANI, D. (2004) "Strong stability in a $G/M/1$ queueing system", *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, Vol. 71, pp.22–32.
- [29] BENOURET, Z. and AÏSSANI, D. (2010) "Strong stability in a two-dimensional classical risk model with independant chains", *Scandinavian Actuarial Journal*, Vol. 2010(2010), No. 2, pp.83–92.
- [30] BERDJOU DJ, L. and AÏSSANI, D. (2003) "Strong stability in retrial queues", *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, Vol. 68, pp.11–17.
- [31] BOROVKOV, A.A. (1979) "Ergodic and stability theorems for a class of stochastic equations and their applications", *Theory of Probability and its Applications*, Vol. 23, No. 2, pp.227–247.
- [32] BORTOLUSSI, L. and HEYDEN, R. (2013) "Bounds on the deviation of discrete-time Markov chains from their mean-field model", *Performance Evaluation*, Vol. 70, No. 10, pp.736–749.
- [33] BOUALLOUCHE-MEDJKOUNE, L. and AÏSSANI, D. (2006) "Measurement and performance of the strong stability method", *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, Vol. 72, pp.1–9.
- [34] BOUALLOUCHE-MEDJKOUNE, L. and AÏSSANI, D. (2006) "Performance analysis approximation in a queueing system of type $M/G/1$ ", *Mathematical Methods of Operation Research*, Vol. 63, No. 2, pp.341–356.
- [35] BOUALLOUCHE-MEDJKOUNE, L. and AÏSSANI, D. (2008) "Quantitative estimates in an $M_2/G_2/1$ priority queue with non-preemptive priority : The method of Strong Stability", *Stochastic Models*, Vol. 24, No. 4, pp.626–646.
- [36] BOUKIR, L., BOUALLOUCHE-MEDJKOUNE, L. and AÏSSANI, D. (2009) "Strong stability of the batch arrival queueing systems", *Stochastic Analysis and Applications*, Vol. 28, No. 1, pp.8–25.
- [37] BRÉMAUD, P. (2009) *Introduction aux probabilités et aux chaines de Markov*, 2^{ème} édition, Springer Verlag, Berlin.
- [38] BRÉMAUD, P. (2020) *Markov Chains : Gibbs fields, Monte Carlo Simulation and Queues*, 2nd edition, Texts in Applied Mathematics 31, Springer Nature Switzerland AG, Switzerland.
- [39] CASWELL, H. (2013) "Sensitivity analysis of discrete Markov chains via Matrix calculus", *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 438, No. 4, pp.1727–1745.
- [40] CHO, G.E. and MEYER, C.D. (2001) "Comparison of perturbation bounds for the stationary distribution of a Markov chain", *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 335, Nos. 1-3, pp.137–150.
- [41] CHOI, B.D., CHANG, Y. and KIM, B. (1999) " $MAP1, MAP2/M/c$ retrial queue with guard channels and its application to cellular networks", *Top*, Vol. 7, No. 2, pp.231–248.
- [42] COHEN, J.W. (1957) "Basic problems of telephone traffic theory and the influence of repeated calls", *Phillips Telecommunication Review*, Vol. 18, No. 2, pp.49–100.
- [43] CRUZ, J.A.R. (2020) "Sensitivity of the stationary distributions of denumerable Markov chains", *Statistics and Probability Letters*, Vol. 166, p.108866.

- [44] DO, T.V. (2011) "Solution for a retrial queueing problem in cellular networks with the Fractional Guard Channel policy", *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. 53, Nos. 11-12, pp.2059–2066.
- [45] ERLANG, A.K. (1909) "The theory of probabilities and telephone conversations", *Nyt Tidsskrift for Matematik*, **B**, Vol. 20, p.33.
- [46] EVANS, R.V. (1967) "Geometric distribution in some two-dimensional queueing systems", *Operations Research*, Vol. 15, No. 5, pp.830–846.
- [47] FALIN, G.I. (1983) "Calculation of probability characteristics of a multiline system with repeat calls", *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*, Vol. 1, No. 1, pp.43–49.
- [48] FALIN, G.I. (1984) "On sufficient conditions for ergodicity of multichannel queueing systems with repeated calls", *Advances in Applied Probability*, Vol. 19, No. 2, pp.447–448.
- [49] FALIN, G.I. (1986) "Single line repeated orders queueing systems", *Optimization*, Vol. 17, No. 5, pp.649–667.
- [50] FALIN, G.I. (1990) "A survey of retrial queues", *Queueing Systems*, Vol. 7, No. 2, pp.127–168.
- [51] FALIN, G.I. and TEMPLETON, J.G.C. (1997) *Retrial Queues*, 1st edition, Chapman and Hall, London.
- [52] FORD, W. (2015) *Numerical Linear Algebra with Applications Using MATLAB*, Academic Press, Elsevier Inc., USA.
- [53] FRANKEN, P. (1970) "Ein Stetigkeitssatz für Verlustsysteme", *Operationsforschung und Mathematische Statistik*, II, pp.9–23.
- [54] GAVER, D.P., JACOBS, P.A. and LATOUCHE, G. (1984) "Finite birth-and-death models in randomly changing environments", *Advances in Applied Probability*, Vol. 16, No. 4, pp.715–731.
- [55] GNEDENKO, B.V. (1970) "On some non resolvable problems of the queueing theory", *Proceedings of the 6th International Telegraphic Congress*, Munich.
- [56] GÓMEZ-CORRAL, A. (2006) "A bibliographical guide to the analysis of retrial queues through matrix analytic techniques", *Annals of Operations Research*, Vol. 141, No. 1, pp.163–191.
- [57] GÓMEZ-CORRAL, A. and RAMALHOTO, M. F. (1999) "The stationary distribution of a Markovian process arising in the theory of multiserver retrial queueing systems", *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. 30, Nos. 3–4, pp.141–158.
- [58] HAMADOUCHE, N. (2006) "Stabilité forte dans un système $M_2/G_2/1$ avec priorité absolue", *Séminaire Mathématique de Béjaïa*, Vol. 4, No. 1, pp.61–67.
- [59] HANSCHKE, T. (1987) "Explicit formulas for the characteristics of the $M/M/2/2$ queue with repeated attempts", *Journal of Applied Probability*, Vol. 24, No. 2, pp.486–494.
- [60] HERVÉ, L. and LEDOUX, J. (2014) "Approximating Markov chains and V-geometric ergodicity via weak perturbation theory", *Stochastic Processes and their Applications*, Vol. 124, No. 1, pp.613–638.

-
- [61] INFANGER, A. and GLYNN, P.W. (2022) "A New Truncation for Markov Chain Equilibrium Distributions with Computable Error Bounds", arXiv : 2208.14406.
- [62] IPSEN, I.C.F. and MEYER, C.D. (1994) "Uniform stability of Markov chains", *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, Vol. 15, No. 4, pp.1061–1074.
- [63] IPSEN, I. and SELEE, T. (2011) "Ergodicity coefficients defined by vector norms", *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, Vol. 32, No. 1, pp.153–200.
- [64] ISSAADI, B. (2017) *Approximations des distributions stationnaires des chaînes de Markov : Application aux systèmes de files d'attente*, Thèse de Doctorat, Université Abderrahmane MIRA de Bejaia.
- [65] ISSAADI, B. (2020) "Weak stability bounds for approximations of invariant measures with applications to queueing", *Methodology and Computing in Applied Probability*, Vol. 22, No. 1, pp.371–400.
- [66] ISSAADI, B., ABBAS, K. and AÏSSANI, D. (2017) "Perturbation analysis of the $GI/M/s$ queue", *Methodology and Computing in Applied Probability*, Vol. 19, No. 3, pp.819–841.
- [67] ISSAADI, B., ABBAS, K. and AÏSSANI, D. (2018) "A weak perturbation theory for approximations of invariant measures in $M/G/1$ model", *RAIRO Operations Research*, Vol. 52, Nos. 4-5, pp.1411–1428.
- [68] JIANG, S., LIU, Y. and TANG, Y. (2017) "A unified perturbation analysis framework for countable Markov chains", *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 529, pp.413–440.
- [69] KALASHNIKOV, V.V. and TSITSIASHVILI, G.S. (1972) "Sur la stabilité des systèmes de files d'attente relativement à leurs fonctions de répartition perturbées", *Journal Izv AN USSR Technique Cybernétique*, Vol. 2, pp.41–49.
- [70] KARTASHOV, N.V. (1986) "Strongly stable Markov chains", *Journal of Soviet Mathematics*, Vol. 34, No. 2, pp.1493–1498.
- [71] KARTASHOV, N.V. (1996) *Strong Stable Markov Chains*, Edition VSP/TBIMC Scientific Publishers, Utrecht/Kiev.
- [72] KENDALL, D.G. (1953) "Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded Markov chain", *The Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 24, No. 3, pp.338–354.
- [73] KENNEDY, D.P. (1972) "The continuity of the single server queue", *Journal of Applied Probability*, Vol. 9, No. 2, pp.370–381.
- [74] KIM, Y.C. (1995) "On $M/M/3/3$ retrial queueing systems", *Honam Mathematical Journal*, Vol. 17, No. 1, pp.141–147.
- [75] KIM, J. and KIM, B. (2016) "A survey of retrial queueing systems", *Annals of Operations Research*, Vol. 247, No. 1, pp.3–36.
- [76] KIRKLAND, S. (2002) "On a question concerning condition numbers for Markov chain", *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, Vol. 23, No. 4, pp.1109–1119.
- [77] KLEBANOV, L.B. (1980) "Quelques résultats liés à la caractérisation de la distribution exponentielle", *Journal Theory of Probability and their Applications*, Vol. 25, No. 3, pp.628–633.

BIBLIOGRAPHIE

- [78] KOSTEN, L. (1947) "On the influence of repeated calls in the theory of probabilities of blocking", *De Ingenieur*, Vol. 59, pp.1–25.
- [79] KOSTEN, L. (1973) *Stochastic Theory of Service Systems*, Pergamon Press, Oxford.
- [80] KULKARNI, V.G. (1995) *Modeling and Analysis of Stochastic Systems*, Chapman and Hall, London.
- [81] LATOUCHE, G. and RAMASWAMI, V. (1993) "A logarithmic reduction algorithm for quasi-birth-death processes", *Journal of Applied Probability*, Vol. 30, No. 3, pp.650–674.
- [82] LATOUCHE, G. and RAMASWAMI, V. (1999) *Introduction to Matrix Analytic Methods in Stochastic Modeling*, American Statistical Association and the Society for Industrial and Applied Mathematics, Alexandria, Virginia.
- [83] LEE, A.M. (1966) *Applied Queueing Theory*, Mac Millan, New York.
- [84] LEEUWAARDEN, J.S.H. and WINANDS, E.M.M. (1993) "Quasi-birth-and-death processes with an explicit rate matrix", *Stochastic Models*, Vol. 22, No. 1, pp.77–98.
- [85] LEKADIR, O. and AÏSSANI, D. (2007) "Strong stability in a Jackson queueing network", *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, Vol. 77, pp.86–98.
- [86] LI, W., JIANG, L., CHING, W.K. and CUI, L.B. (2013) "On perturbation bounds for the joint stationary distribution of multivariate Markov chain models", *East Asian Journal on Applied Mathematics*, Vol. 3, No. 1, pp.1–17. Vol. 3, No. 1, pp.1–17.
- [87] LI, H. and YANG, T. (1999) "Steady-state queue size distribution of discrete-time *PH/Geo/1* retrial queues", *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. 30, Nos. 3-4, pp.51–63.
- [88] LITTLE, J.D.C. (1961) "A proof for the queueing formula : $L = \lambda W$ ", *Operations Research*, Vol. 9, No. 3, pp.383–387.
- [89] LIU, Y. (2012) "Perturbation bounds for the stationary distributions of Markov chains", *SIAM Journal of Matrix Analysis and its Applications*, Vol. 33, No. 4, pp.1057–1074.
- [90] LIU, Y. and LI, W. (2018) "Error bounds for augmented truncation approximations of Markov chains via the perturbation method", *Advances in Applied Probability*, Vol. 50, No. 2, pp.645–669.
- [91] MAO, Y-H. and SONG, Y-H (2020) "Perturbation Theory and Uniform Ergodicity for Discrete-time Markov Chains", arXiv : 2003.06978.
- [92] MEYER, C.D. (2001) *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM : Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
- [93] MEYN, S.P. and TWEEDIE, R.L. (1994) "Computable bounds for geometric convergence rates of Markov chains", *The Annals of Applied Probability*, Vol. 4, No. 4, pp.981–1011.
- [94] MEYN, S.P. and TWEEDIE, R.L. (2009) *Markov Chains and Stochastic Stability*, 2nd edition, Cambridge University Press, New York.

-
- [95] MITROPHANOV, A.Y. (2005) "Sensitivity and convergence of uniformly ergodic Markov chains", *Journal of Applied Probability*, Vol. 42, No. 4, pp.1003–1014.
- [96] MOUHOUBI, Z. (2010) *Bornes de perturbation des caractéristiques transitoires et stationnaires des chaînes de Markov à espace d'états général. Application aux systèmes avec impatience et aux modèles de production et de gestion des stocks*, Thèse de Doctorat, Université Abderrahmane MIRA de Bejaia.
- [97] MOUHOUBI, Z. and AÏSSANI, D. (2005) "Some inequalities of uniform ergodicity and strong stability of homogeneous Markov chains", *Pliska Studia Mathematica Bulgarica*, Vol. 17, pp.171–186.
- [98] MOUHOUBI, Z. and AÏSSANI, D. (2010) "New perturbation bounds for denumerable Markov chains", *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 432, No. 7, pp.1627–1649.
- [99] NAUMOV, V. (2000) *Modified matrix-geometric solution for finite QBD processes*, In : *Advances in Algorithmic Methods for Stochastic Models*, Eds. Latouche and Taylor, Notable Publications.
- [100] NAUMOV, V., KRIEGER, U.R. and WAGNER, D. (1996) *Analysis of a Multiserver Delay-Loss System with a General Markovian Arrival Process*, In : *Matrix-Analytic Methods in Stochastic Models*, Eds. Chakravathy and Alfa.
- [101] NEUMANN, M. and XU, J. (2004) "Improved bounds for a condition number of Markov chains", *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 386, pp.225–241.
- [102] NEUTS, M.F. (1973) *Computer Power or the Liberation of Applied Probability*, Technical Report 312, Department of Statistics, Purdue University, West Lafayette, Indiana.
- [103] NEUTS, M.F. (1975) *Probability distributions of phase type*, In : *Liber Amicorum Professor Emeritus FLORIN, H.*, Department of Mathematics, University of Louvain, Belgium, pp.173–206
- [104] NEUTS, M.F. (1981) *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models : An Algorithmic Approach*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore.
- [105] NEUTS, M.F. and RAO, B.M. (1990) "Numerical investigation of a multiserver retrial model", *Queueing Systems*, Vol. 7, No. 2, pp.169–190.
- [106] NORRIS, J.R. (1997) *Markov Chains*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [107] PHUNG-DUC, T. and KAWANISHI, K. (2014) "Performance analysis of call centers with abandonment, retrial and after-call work", *Performance Evaluation*, Vol. 80(C), pp.43–62.
- [108] PHUNG-DUC, T., MASUYAMA, H., KASAHARA, S. and TAKAHASHI, Y. (2010) "State-dependent $M/M/c/c + r$ retrial queues with Bernoulli abandonment", *Journal of Industrial and Management Optimization*, Vol. 6, No. 3, pp.517–540.
- [109] RABTA, B. (2006) *Nouvelles conditions et nouvelles estimations de la stabilité des chaînes de Markov avec application aux modèles stochastiques de gestion des stocks*, Thèse de Doctorat, Université Abderrahmane MIRA de Bejaia.
- [110] RABTA, B. and AÏSSANI, D. (2004) "Stability analysis in an inventory model", *Theory of Stochastic Processes*, Vol. 10(26), No. 3, pp.129–135.

BIBLIOGRAPHIE

- [111] RABTA, B. and AÏSSANI, D. (2005) "Strong stability in an (R, s, S) inventory model", *International Journal of Production Economics*, Vol. 97, No. 2, pp.159–171.
- [112] RABTA, B. and AÏSSANI, D. (2008) "Strong stability and perturbation bounds for discrete Markov chains", *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 428, Nos. 8-9, pp.1921–1927.
- [113] RACHEV, S.T. (1989) "The problem of stability in queueing theory", *Queueing Systems*, Vol. 4, No. 4, pp.287–318.
- [114] RAHMOUNE, F. and AÏSSANI, D. (2008) "Strong stability of queues with multiple vacation of the server", *Stochastic Analysis and Applications*, Vol. 26, No. 3, pp.665–678.
- [115] RIORDAN, J. (1962) *Stochastic Service Systems*, Wiley and Sons, Inc, New York.
- [116] ROSSBERG, H.J. (1965) "Über die Verteilung von Wartezeiten", *Mathematische Nachrichten*, Vol. 30, Nos. 1-2, pp.1–16.
- [117] RUDOLF, D. and SCHWEIZER, N. (2018) "Perturbation theory for Markov chains via Wasserstein distance", *Bernoulli*, Vol. 24, No. 4A, pp.2610–2639.
- [118] SENDFELD, W.P. (2009) *Two-dimensional Overflow Queueing Systems*, Doctoral Thesis, Institute for Mathematics, Department of Mathematics and Computer Science, University of Osnabrück.
- [119] SENETA, E. (1981) *Non-negative Matrices and Markov Chains*, 2nd edition, Springer Science + Business Media, New York.
- [120] SHEKHAR, C., RAINA, A.A. and KUMAR, A. (2016) "A brief review on retrieval queues : progress in 2010–2015", *International Journal of Applied Sciences and Engineering Research*, Vol. 5, No. 4, pp.324–336.
- [121] SHORTLE, J.F., THOMPSON, J.M., GROSS, D. and HARRIS, C.M. (2018) *Fundamentals of Queueing Theory*, 5th edition, John Wiley and Sons, Inc.
- [122] STEPANOV, S.N. (1999) "Markov models with retrials : the calculation of stationary performance measures based on the concept of truncation", *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. 30, Nos. 3-4, pp.207–228.
- [123] STOYAN, D. (1972) "Ein stetigkeitssatz für einlinige wartemodelle der bedienungstheorie", *Mathematische Operationsforschung Statistik*, Vol. 3, No. 2, pp.103–111.
- [124] SYSKI, R. (1986) *Introduction to Congestion in Telephone Systems*, Elsevier Science Publishers, Amsterdam.
- [125] THOMOPOULOS, N.T. (2012) *Fundamentals of Queueing Systems : Statistical Methods for Analyzing Queueing Models*, 1st edition, Springer Science + Business Media, New York.
- [126] UPADHYAYA, S. (2014) "Performance analysis of a batch arrival retrieval queue with Bernoulli feedback", *International Journal of Mathematics in Operational Research*, Vol. 6, No. 6, pp.680–703.
- [127] WALLACE, V.L. (1969) *The Solution of Quasi Birth and Death Processes Arising from Multiple Access Computer Systems*, Doctoral Thesis, College of Engineering, Department of Electrical Engineering, Systems Engineering Laboratory, The University of Michigan.

- [128] WATKINS, D.S. (2007) *The Matrix Eigenvalue Problem : GR and Krylov Subspace Methods*, SIAM : Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
- [129] WILKINSON, R.I. (1956) "Theories for toll traffic engineering in the USA", *The Bell System Technical Journal*, Vol. 35, No. 2, pp.421–514.
- [130] WOLFF, R.W. (1989) *Stochastic Modeling and the Theory of Queues*, Prentice-Hall, New Jersey.
- [131] YANG, T. and TEMPLETON, J.G.C. (1987) "A survey on retrial queues", *Queueing Systems*, Vol. 2, No. 3, pp.203–233.
- [132] ZIDANI, N. (2017) *Les approximations dans l'analyse stochastique des systèmes de files d'attente avec rappels et multiserveurs*, Thèse de Doctorat, Université BADJI Mokhtar de Annaba.
- [133] ZOLOTAREV, V.M. (1975) "Quantitative estimations in problems of continuity of queueing systems", *Theory of Probability and its Applications*, Vol. 20, No. 1, pp.211–213.

Résumé

De nombreux modèles de files d'attente sont représentés par des chaînes de Markov à espace d'état dénombrable infini. Nous souhaitons souvent connaître leurs distributions stationnaires afin d'en déduire leurs caractéristiques. Cependant, le calcul direct de ces distributions est généralement difficile, pour ne pas dire impossible, et ne propose pas de solutions exactes et complètes en raison de la complexité et du nombre infini d'équations à résoudre. C'est pourquoi les chercheurs s'efforcent d'obtenir des approximations convergeant rapidement vers ces distributions. Dans cette thèse, nous avons utilisé la méthode de stabilité forte pour établir des bornes d'erreur analytiques pour le modèle de troncature généralisée de Neuts et Rao associé au modèle $M/M/c$ avec rappels, afin de voir le degré d'approximation entre ces deux modèles. À la fin, nous avons donné un exemple numérique afin de montrer la qualité des bornes d'erreur obtenues.

Mots clés : Chaînes de Markov, théorie de perturbation des chaînes de Markov, troncature, stabilité forte, files d'attente avec rappels.

Abstract

In queuing theory, many models are represented by Markov chains with infinite countable state spaces. To determine their characteristics, we are required, in most cases, to determine the stationary distribution of the Markov chains that represent them. However, directly calculating these distributions is generally difficult, if not impossible, and does not provide exact and complete solutions due to the complexity and infinite number of equations to be solved. Therefore, researchers strive to obtain approximations that converge quickly to these distributions. In this thesis, we used the strong stability method to establish analytical error bounds for the $M/M/c$ retrial queuing model, in order to determine the degree of approximation between this model and the Neuts and Rao truncated model. Finally, we provided a numerical example to demonstrate the quality of the error bounds obtained.

Keywords : Markov chains, Perturbation theory for Markov chains, truncation, strong stability, retrial queuing systems.

ملخص

تمثل العديد من نماذج الطوابير بسلاسل ماركوف ذات فضاء حالة لانهائي قابل للعد. و كثيرا ما نرغب في معرفة توزيعات الحالة المستقرة لهذه السلاسل لاستنتاج خصائص نماذج الطوابير. و مع ذلك، فإن الحساب المباشر لهذه التوزيعات صعب عموما، إن لم يكن مستحيلا، و لا يوفر حولا دقيقة و كاملة نظرا لتعقيدها و العدد اللانهائي للمعادلات المطلوب حلها. لذلك، يسعى الباحثون جاهدين للحصول على تقريبات تقتارب بسرعة إلى هذه التوزيعات. في هذه الرسالة، استخدمنا طريقة الاستقرار القوي لتحديد حدود الخطأ التحليلي عند مقارنة نموذج الطابور مع التذكير بنموذج الإقتطاع المعمم لنوتز و راو، و ذلك لتقييم درجة التقارب بين النموذجين. و أخيرا، قدمنا مثلا عدديا لإثبات جودة حدود الخطأ التي تم الحصول عليها.

المصطلحات : سلاسل ماركوف، نظرية الإضطراب لسلاسل ماركوف، الإقتطاع، الاستقرار القوي، الطوابير مع التذكير.