

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Université Abderrahmane MIRA de Béjaïa  
Faculté des Sciences Exactes

---

**Département de Recherche Opérationnelle**



Mémoire Présenté pour L'obtention du Diplôme de Master  
en Mathématiques Appliquées

**Spécialité : Mathématiques Financière**

---

**Gestion de portefeuille optimal : une approche basé sur le  
modèle Markowitz**

---

Présenté par :  
**LAIB Kahina**  
**TISSOUKAI Leticia**

Défendu le 30/06/2025, devant le jury composé de :

M <sup>r</sup> M. SOFIT	M.C.A	Président	UAM - Bejaia.
M <sup>r</sup> L. ASLI	M.C.A	Examineur	UAM - Bejaia
M <sup>r</sup> Y.A. BENNAI	M.C.A	Examineur	UAM - Bejaia.
M <sup>mm</sup> e K. KRIMAT	M.C.B	Examineur	UAM - Bejaia.
M <sup>mm</sup> e K. HASSAINI	M.A.A	Encadrant	UAM - Bejaia.
M <sup>mm</sup> e Z. BOUZRIA	Doctorante	Examineur	UAM - Bejaia.

**Année Universitaire 2024 – 2025**

# Remerciements

Au terme de ce parcours universitaire, nous souhaitons exprimer notre sincère gratitude à toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce mémoire et à l'enrichissement de notre expérience académique.

Nous adressons tout d'abord nos remerciements les plus chaleureux à nos familles, véritables piliers de soutien et de réconfort. Leur présence constante, leur bienveillance et leur confiance ont été des sources précieuses de motivation tout au long de notre cheminement.

Nous remercions également nos amis et collègues pour leur écoute, leur solidarité et les moments partagés, qui ont su apporter équilibre et convivialité dans les périodes de travail intense.

Nos plus vifs remerciements vont à nos enseignants, pour la qualité de leur encadrement, la richesse de leurs enseignements et leur engagement à transmettre le savoir. Leur accompagnement rigoureux et bienveillant a été déterminant dans l'élaboration de ce travail.

Enfin, à toutes les personnes qui, par un conseil, une lecture, un mot d'encouragement ou une aide ponctuelle, ont contribué à ce projet, nous témoignons notre reconnaissance la plus sincère.

Que ces lignes traduisent l'estime et la gratitude que nous portons à chacun. Merci à toutes et à tous.

# Table des matières

Remerciments . . . . .	I
Liste des figures . . . . .	V
Liste des algorithmes . . . . .	V
Liste des tables . . . . .	VII
Liste d'abréviations et notations . . . . .	VIII
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Présentation de la Banque d'Agriculture et de Développement Rural BADR</b>	<b>4</b>
Introduction . . . . .	4
1.1 Historique de la BADR . . . . .	4
1.1.1 Première étape . . . . .	5
1.1.2 Deuxième étape . . . . .	5
1.1.3 Troisième étape . . . . .	5
1.2 Les missions de la BADR . . . . .	6
1.3 Les objectifs de la BADR . . . . .	6
1.4 Présentation de l'agence BADR El-Kseur 369 . . . . .	7
1.4.1 Les ressources et les emplois de l'agence . . . . .	7
1.4.2 L'effectif de l'agence . . . . .	7
1.5 L'organigramme de la BADR . . . . .	7
1.5.1 Direction d'agence . . . . .	7
1.5.2 Pôle de transactions . . . . .	7
1.5.3 Back-Office . . . . .	8
1.5.4 Front-Office . . . . .	8
1.6 Les crédits bancaire . . . . .	9
1.6.1 Crédit bancaire . . . . .	9
1.6.2 Crédit bonifié . . . . .	9
1.7 La typologie des crédits en BADR Banque . . . . .	9
1.7.1 Crédits d'exploitation . . . . .	9
1.7.2 Crédits d'Investissement . . . . .	10
1.8 Conclusion . . . . .	12
<b>2 Optimisation Convexe : Théorie et Outils Mathématiques</b>	<b>13</b>
Introduction . . . . .	13
2.1 Convexité et Analyse Convexe . . . . .	14
2.1.1 Analyse convexe . . . . .	14
2.1.2 Convexité d'un ensemble . . . . .	14

2.1.3	Propriétés des ensembles convexes . . . . .	15
2.1.4	Fonctions convexes . . . . .	15
2.1.5	Propriétés des fonctions convexes . . . . .	16
2.2	Formes quadratiques . . . . .	17
2.2.1	Gradient et Hessien d'une forme quadratique [34] . . . . .	17
2.2.2	Formes quadratiques définies et non définies . . . . .	18
2.2.3	Caractérisation des formes quadratiques . . . . .	18
2.2.4	Propriétés des formes quadratiques définies et semi-définies positives . . . . .	20
2.3	Optimisation convexe . . . . .	20
2.4	Programmation non linéaire . . . . .	21
2.4.1	Conditions d'optimalité pour un problème non linéaire sans contraintes . . . . .	22
2.4.2	Conditions d'optimalité pour un problème non linéaire avec contraintes . . . . .	23
2.5	Méthodes de résolution des programmes quadratiques convexes . . . . .	28
2.5.1	Méthode SQP . . . . .	28
	Conclusion . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Le modèle de Markowitz</b> . . . . .	<b>31</b>
	Introduction . . . . .	31
3.1	Notions de bases . . . . .	32
3.1.1	Le marché financier . . . . .	32
3.1.2	La bourse . . . . .	32
3.1.3	Indice boursier . . . . .	32
3.1.4	Actif financier . . . . .	33
3.1.5	Action . . . . .	33
3.1.6	Obligation . . . . .	33
3.1.7	Portefeuille Financier . . . . .	33
3.1.8	La rentabilité . . . . .	34
3.1.9	Le rendement espéré d'un actif . . . . .	35
3.1.10	Le Risque . . . . .	36
3.1.11	La Variance . . . . .	36
3.1.12	Covariance . . . . .	36
3.2	Cadre théorique de l'optimisation de portefeuille . . . . .	37
3.2.1	Introduction à la théorie moderne du portefeuille . . . . .	37
3.2.2	Le modèle moyenne-variance de Markowitz . . . . .	37
3.2.3	Les hypothèses du modèle . . . . .	38
3.3	Portefeuille optimal et frontière efficiente selon le modèle de Markowitz . . . . .	39
3.3.1	Le rôle de la diversification dans un portefeuille optimal . . . . .	41
3.4	Les limites du modèle Markowitz . . . . .	42
	Conclusion . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Optimisation de portefeuille : application du modèle de Markowitz</b> . . . . .	<b>44</b>
	Introduction . . . . .	44
4.1	Language Python . . . . .	45
4.2	Application du modèle Markowitz dans un cas boursier . . . . .	46
4.2.1	La présentation de l'indice Français CAC40 . . . . .	46
4.2.2	Les données utilisées . . . . .	46

4.2.3	Algorithme de résolution . . . . .	48
4.2.4	Matrice de variance-covariance . . . . .	49
4.2.5	Méthodologie d'optimisation . . . . .	49
4.2.6	Implémentation et analyse des résultats . . . . .	50
4.3	Adaptation du modèle Markowitz à un cas bancaire . . . . .	53
4.3.1	Description du portefeuille de crédits . . . . .	53
4.3.2	Fréquence et période Données utilisées . . . . .	54
4.3.3	Modélisation mathématique du portefeuille crédit . . . . .	54
4.3.4	Formulation mathématique du problème . . . . .	55
4.4	Résolution numérique . . . . .	56
4.4.1	Méthodologie d'optimisation utilisée . . . . .	56
4.4.2	Données utilisées . . . . .	56
4.4.3	Méthodologie de calcul des rendements et des risques . . . . .	57
4.4.4	Algorithme de résolution . . . . .	58
4.4.5	Implémentation et Analyse des Résultats . . . . .	58
4.4.6	Analyse comparative entre le portefeuille réel et les portefeuilles optimisés . . . . .	61
	Conclusion . . . . .	62
	<b>Conclusion générale</b>	<b>64</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>68</b>
	<b>Résumé</b>	<b>69</b>

# Table des figures

1.1	Organigramme de la Banque d'Agriculture et de Développement Rural (BADR)	8
2.1	Ensemble convexe . . . . .	14
2.2	Fonction convexe . . . . .	15
2.3	Épigraphe d'une fonction convexe . . . . .	16
3.1	frontière efficiente . . . . .	40
4.1	L'évolution des prix de clôture des actions . . . . .	47
4.2	Rendement vs. Risque selon l'aversion au risque $A$ . . . . .	52
4.3	Évolution des poids optimaux selon l'aversion au risque $A$ . . . . .	52
4.4	Frontière rendement-risque pour différentes valeurs de $A$ . . . . .	60
4.5	Évolution des poids optimaux par type de crédit selon $A$ . . . . .	61

# Liste des Algorithmes

1	Algorithme général de la méthode SQP. . . . .	29
2	Optimisation de portefeuille selon l'aversion au risque $A$ . . . . .	48
3	Optimisation de portefeuille selon l'aversion au risque (fonction d'utilité quadratique). . . . .	58

# Liste des tableaux

1.1	Crédit RFIG . . . . .	10
1.2	Crédit ETTAHADDI . . . . .	10
1.3	Crédit Bail . . . . .	11
1.4	Crédit Habitat Rural . . . . .	11
1.5	Crédit Equipement . . . . .	12
1.6	Crédit Dispositifs Aidés . . . . .	12
4.1	Classification des bibliothèques Python utilisées . . . . .	45
4.2	Entreprises sélectionnées du CAC 40 . . . . .	46
4.3	Rendement moyen annuel par action . . . . .	49
4.4	Matrice de covariance annualisée entre les rendements des actions . . . . .	49
4.5	Poids optimaux, rendements et risques du portefeuille pour différentes valeurs d'aversion au risque $A$ (résultats de la méthode SLSQP) . . . . .	51
4.6	Comparaison des portefeuilles optimisés avec le benchmark équipondéré . . . . .	53
4.7	Poids optimaux, rendements espérés et risques associés pour différentes valeurs d'aversion au risque $A$ (résultats obtenus via la méthode SLSQP) . . . . .	59
4.8	Répartition réelle des crédits dans le portefeuille de la BADR (2019–2024) . . . . .	61
4.9	Portefeuilles optimisés selon différents niveaux d'aversion au risque . . . . .	62

## Liste d'abréviations et notations

- **ALE** : Agence Locale d'Exploitation ;
- **ANEM** : Agence Nationale de l'Emploi ;
- **ANGEM** : Agence Nationale de Gestion du Micro-crédit ;
- **BADR** : Banque d'Agriculture et de Développement Rural ;
- **BNA** : Banque Nationale d'Algérie ;
- **CAC** : Cotation Assistée en Continu ;
- **CLT** : Crédit à Long Terme ;
- **CMT** : Crédit à Moyen Terme ;
- **CNAC** : Caisse Nationale d'Assurance Chômage ;
- **ENSEJ** : Encouragement National à la Création d'Emploi pour les Jeunes ;
- **GAB** : Guichet Automatique de Banque ;
- **GRE** : Groupe Régional d'Exploitation ;
- **KKT** : Conditions de Karush-Kuhn-Tucker ;
- **LSP** : Logement Social Participatif ;
- **MEDAF** : Modèle d'Évaluation des Actifs Financiers ;
- **PME/PMI** : Petites et Moyennes Entreprises / Industries ;
- **RFIG** : Remboursement Forfaitaire Intégral Global ;
- **SNMG** : Salaire National Minimum Garanti ;
- **SLSQP** : Sequential Least Squares Quadratic Programming ;
- **SQP** : Sequential Quadratic Programming ;
- **SWIFT** : Society for Worldwide Interbank Financial Telecommunication ;
- **SYBU** : Système d'Information Bancaire Utilisé ;
- **TMP** : Théorie Moderne de Portefeuille ;
- **VaR** : Value-at-Risk.

# Introduction générale

Dans un contexte économique caractérisé par une intensification de la concurrence et une complexification croissante des marchés financiers, la gestion optimale des ressources constitue un levier stratégique incontournable pour les établissements bancaires. Cette gestion s'inscrit dans une logique d'allocation efficiente des capitaux, tenant compte simultanément du rendement espéré et du risque associé.

La **Banque d'Agriculture et de Développement Rural (BADR)**, acteur essentiel du financement agricole en Algérie, gère un portefeuille diversifié de produits de crédit. Ces produits diffèrent par leur durée, leur mode de remboursement, leur rentabilité et leur niveau de risque. Cette diversité appelle une réflexion méthodique sur la structuration et l'optimisation des portefeuilles de crédits afin d'en améliorer la performance globale tout en respectant les contraintes institutionnelles et réglementaires.

Le modèle de Markowitz, élaboré initialement pour la gestion des portefeuilles d'actions, repose sur la théorie moyenne-variance et offre un cadre analytique solide. Bien que conçu pour les marchés boursiers, il peut être transposé à la gestion des portefeuilles de crédits. Cette adaptation, encore peu explorée dans la littérature, soulève des interrogations théoriques et pratiques qui justifient l'intérêt de ce travail.

Ce mémoire a pour objectif d'étudier l'adaptation du modèle de Markowitz à la gestion des portefeuilles de crédits bancaires, à travers :

- une analyse critique des approches classiques de gestion de portefeuille et de modélisation du risque crédit, en identifiant leurs limites face aux produits bancaires non cotés ;
- une étude des fondements théoriques et des implications pratiques du modèle de Markowitz dans ce nouveau contexte ;
- une évaluation de l'impact d'une telle approche sur la stratégie de gestion de portefeuille d'un établissement comme la BADR, notamment en termes de rendement ajusté au risque ;
- des recommandations quantitatives pour une répartition optimale des crédits, tenant compte des contraintes spécifiques à la BADR.

La démarche adoptée dans ce travail repose sur l'intégration d'outils d'optimisation convexe, notamment la programmation quadratique, dans un cadre d'analyse adapté aux spécificités des crédits bancaires. Elle s'appuie sur une double approche :

- D'une part, une revue approfondie de la littérature sur l'optimisation de portefeuille et la gestion du risque crédit, afin d'identifier les modèles pertinents et leurs limites ;
- D'autre part, une application empirique à partir de données réelles issues du portefeuille

de crédits de la BADR, couvrant différentes catégories de financement (Crédit-Bail, Habitat Rural, Équipement, RFIG, Dispositifs Aidés), avec une modélisation du rendement fondée sur les flux de remboursement et les taux appliqués.

Les résultats attendus de cette étude consistent en des contributions à la fois théoriques, en enrichissant la compréhension de l'adaptation du modèle moyenne-variance ; pratiques, en formulant des recommandations pour une gestion optimisée du portefeuille de crédits.

- Le **premier chapitre** est consacré à la présentation institutionnelle de la BADR, en mettant en lumière ses missions, son organisation et la typologie de ses produits de crédit ;
- Le **deuxième chapitre** introduit les concepts mathématiques fondamentaux liés à l'optimisation convexe. Ces notions sont indispensables pour appréhender rigoureusement la démarche adoptée dans le cadre de l'optimisation de portefeuille. Il s'agit notamment des ensembles et fonctions convexes, des formes quadratiques et des principales méthodes de résolution des problèmes d'optimisation non linéaire sous contraintes. Ce socle théorique constitue la base sur laquelle repose le modèle de Markowitz ;
- Le **troisième chapitre** développe le cadre théorique du modèle moyenne-variance de Markowitz. Ce modèle, fondé sur une formalisation mathématique de la relation entre le rendement attendu et le risque d'un portefeuille, est présenté à travers ses hypothèses fondamentales, sa formulation mathématique détaillée et ses principales limites. Cette partie permet de comprendre les mécanismes internes du modèle et prépare son application concrète ;
- Enfin, le **quatrième chapitre** est consacré à l'implémentation pratique du modèle dans deux contextes distincts : d'une part, un portefeuille composé d'actions cotées sur le marché financier (indice CAC 40) ; d'autre part, un portefeuille constitué de crédits bancaires octroyés par la BADR. L'analyse de ces deux cas permet de confronter la théorie à la pratique, d'identifier les spécificités propres au contexte bancaire et de proposer des recommandations opérationnelles pour une gestion optimale des portefeuilles étudiés.

Cette structuration progressive vise ainsi à articuler solidement les fondements théoriques et les applications empiriques, dans le but de répondre de manière cohérente à la problématique de recherche posée.

## Position du problème

Dans un environnement bancaire marqué par une intensification de la concurrence et des exigences accrues en matière de gestion des risques, la maîtrise des portefeuilles de crédits constitue un enjeu stratégique majeur. Pour la Banque d'Agriculture et de Développement Rural (BADR), acteur central du financement agricole en Algérie, la diversité des produits de crédit accordés (Crédit-Bail, Habitat Rural, Équipement, RFIG, Dispositifs Aidés) se traduit par une forte hétérogénéité des caractéristiques : durées d'engagement, profils de remboursement, rentabilités attendues et niveaux de risque.

Dès lors, la gestion optimale de ces portefeuilles implique de modéliser de manière rigoureuse à la fois le rendement espéré et le risque global, tout en respectant des contraintes multiples : réglementaires, économiques et propres aux politiques internes de l'institution.

Dans ce contexte, le modèle de Markowitz, fondé sur la théorie moyenne-variance, pourrait offrir un cadre analytique pertinent, bien qu'il ait été initialement conçu pour les portefeuilles d'actifs financiers cotés. Sa transposition aux portefeuilles de crédits soulève cependant des interrogations essentielles :

- Le modèle de Markowitz peut-il réellement être adapté aux spécificités des portefeuilles de crédits bancaires ?
- Si une telle adaptation est possible, quelles approches méthodologiques et quels ajustements théoriques seraient nécessaires pour optimiser la répartition des ressources tout en minimisant le risque et en maximisant le rendement global ?

Ces questions constituent le cœur de la réflexion menée dans ce mémoire et orientent l'ensemble de la démarche proposée.

## 1

# Présentation de la Banque d'Agriculture et de Développement Rural BADR

## Sommaire

<b>Introduction</b> . . . . .	4
<b>1.1 Historique de la BADR</b> . . . . .	4
<b>1.2 Les missions de la BADR</b> . . . . .	6
<b>1.3 Les objectifs de la BADR</b> . . . . .	6
<b>1.4 Présentation de l'agence BADR El-Kseur 369</b> . . . . .	7
<b>1.5 L'organigramme de la BADR</b> . . . . .	7
<b>1.6 Les crédits bancaire</b> . . . . .	9
<b>1.7 La typologie des crédits en BADR Banque</b> . . . . .	9
<b>1.8 Conclusion</b> . . . . .	12

## Introduction

Omniprésente dans le marché financier, la Banque d'Agriculture et de Développement Rural (BADR) a su en quelques années d'existence devenir l'une des banques les plus sollicitées en matière de crédit d'investissement. Dans ce chapitre nous ferons plus ample connaissance avec cette institution financière bancaire de façon générale, et plus particulièrement avec l'agence (ALE) d'EL-KSEUR indice 369.

### 1.1 Historique de la BADR

La banque de l'agriculture et de développement Rural (BADR) est un établissement public issu de la restauration de la Banque Nationale d'Algérie (BNA), elle est née le 13 mars 1982

par un décret 88-105 du 13 mai 1988. La BADR était opérationnelle en novembre 1989 avec un capital social de 22 milliards de DA, augmenté ensuite à cinquante-quatre milliards de dinars (54 000 000 000 DA) divisé en actions détenu par :

- Fonds de participation des industries agro-alimentaire.
- Fonds de participation des biens d'équipement.
- Fonds de participation des industries divers.
- Fonds de participation des services.

La BADR n'a pas toujours été, comme on pourrait le croire, une institution exclusivement tournée vers le financement de l'agriculture. Son évolution est caractérisée par trois étapes distinctes :

### 1.1.1 Première étape

Cette étape est marquée par la spécialisation de la BADR dans le financement de l'activité agricole et la promotion du développement rural. Grâce à la BADR, plusieurs régions ont connu un essor significatif grâce à l'aide de cette banque dans le domaine agricole.

### 1.1.2 Deuxième étape

La loi 90/10 du 14 avril 1990, relative à la monnaie et au crédit, a mis un terme à la spécialisation des banques. La BADR a alors élargi son champ d'intervention vers d'autres secteurs d'activité, notamment les PME/PMI, tout en restant un partenaire privilégié du secteur agricole. Sur le plan technique, cette étape a été celle de l'introduction des technologies informatiques :

- **1991** : Mise en place d'un système (SWIFT) pour l'exécution des opérations de commerce international.
- **1992** : Mise en place du logiciel (SYBU) avec ses différents modules de traitement des opérations bancaires (gestion des prêts, gestion des opérations de caisse, gestion des placements, consultation à distance des comptes clientèles).
- **1993** : Achèvement de l'information de l'ensemble des opérations bancaires au niveau du réseau.

### 1.1.3 Troisième étape

Durant cette période, l'institution a su se moderniser et s'adapter aux normes et aux données de la nouvelle politique économique.

À partir de 2005, la BADR s'est recentrée sur le financement du secteur agro-alimentaire. Forte de la densité de son réseau et de l'importance de ses effectifs, la BADR a été classée par BANKERS ALMANACH dans son édition 2001 comme la première banque en Algérie. Au niveau mondial, elle occupait le 668<sup>ème</sup> rang sur quelque 4100 banques classées. En 2003, la publication spécialisée du groupe Jeune Afrique ECOFINANCE a positionné la BADR au 13<sup>ème</sup> rang, soit une progression de deux places par rapport au précédent classement sur 500 établissements financiers.

Parmi les caractéristiques de la BADR, on peut citer :

- La BADR est la première banque algérienne à avoir concrétisé le concept de "banque assise" avec "service personnalisé".
- L'informatisation totale du réseau, basée sur un logiciel propriété de la BADR, développé par ses propres informaticiens.
- La BADR effectue les traitements en temps réel, à distance, des opérations bancaires grâce à la télétransmission, ainsi que la consultation à distance des comptes par la clientèle via "BADR consulte".
- La BADR est une banque qui intervient à hauteur de 30% dans le financement du commerce extérieur.
- Elle met en place des crédits documentaires en 24 heures.

Actuellement, la BADR dispose de 286 agences qui couvrent les régions et les localités les plus éloignées et les plus enclavées du territoire national.

## 1.2 Les missions de la BADR

Les principales missions de la BADR sont les suivantes :

- Gérer l'ensemble des opérations de crédit, de change et de trésorerie ;
- Ouvrir des comptes bancaires pour toute personne en faisant la demande ;
- Recevoir et gérer les dépôts à vue et à terme ;
- Participer à la collecte et à la mobilisation de l'épargne ;
- Contribuer au développement du secteur agricole à travers le financement et l'accompagnement des acteurs concernés ;
- Assurer la promotion des activités agricoles, agroalimentaires, agro-industrielles et artisanales ;
- Contrôler, en collaboration avec les autorités de tutelle, la conformité des mouvements financiers des entreprises domiciliées.

## 1.3 Les objectifs de la BADR

Les objectifs de la BADR s'articulent autour des axes suivants :

- Optimiser l'accès aux ressources financières à des coûts compétitifs et assurer leur rentabilisation à travers des crédits productifs et diversifiés, tout en respectant les normes en vigueur ;
- Assurer une gestion rigoureuse et efficace de la trésorerie de la banque, tant en monnaie nationale qu'en devises étrangères ;
- Favoriser un développement équilibré et cohérent de la banque dans ses différents domaines d'activité ;
- Étendre et restructurer son réseau afin d'améliorer sa couverture et son accessibilité ;

- Répondre aux attentes des clients en proposant des produits et services adaptés à leurs besoins spécifiques ;
- Adopter une approche proactive et dynamique en matière de recouvrement des créances ;
- Stimuler le développement commercial en intégrant de nouvelles stratégies managériales, notamment le marketing, et en diversifiant l'offre de produits financiers.

## **1.4 Présentation de l'agence BADR El-Kseur 369**

La wilaya de Bejaïa est dotée d'une succursale BADR (Groupe régional d'exploitation GRE) et de Traize (13) agences, parmi les quelles on cite l'agence d'EL-KSEUR (indice 369) qui a été ouverte le 20 Janvier 2019, au lieu dite Cité des 20 Logement LSP EL-KSEUR wilaya de Bejaïa.

### **1.4.1 Les ressources et les emplois de l'agence**

Les emplois de cette agence proviennent essentiellement des crédits d'exploitation (RFIG), et les crédits d'investissement (dispositifs aidée et crédit d'investissements LEASING). Pour ce qui est des ressources, elles proviennent des différentes comptes des clients tel que les comptes chèques, comptes courant, , comptes d'épargnes, des dépôts à terme.

### **1.4.2 L'effectif de l'agence**

- Directeur d'agence,
- Superviseur Back office,
- Superviseur Front office,
- Un (01) assistant de crédit,
- Un (01) assistant de moyen de paiement,
- Vérificatrice de la journée comptable,
- Deux (02) assistant clientèle,
- Un (1) assistante juridique,
- Un guichetier,
- Un caissier,
- Un (01) agent de sécurité appartenant à une société privée en convention avec la BADR.

## **1.5 L'organigramme de la BADR**

### **1.5.1 Direction d'agence**

La direction de l'agence est un managère opérationnel qui à pour mission principal l'application de la stratégie de développement de la banque.

### **1.5.2 Pôle de transactions**

Ce pôle a pour mission :

- De coordonner les activités guichetier du service rapide, du poste comptabilisation des versements et des caissiers ;
- D'assurer le bon fonctionnement de l'alimentation du Guichet Automatique de Banque (GAB) en billets de banque ;
- Assurer en générale les mouvements de fonds enveillant à l'équilibre des liquidités en dépôt.

**1.5.3 Back-Office**

- Il constitue le prolongement de Front-Office. Il lui apporte l'assistance, les conseils et les informations nécessaires à la bonne exécution des opérations de la clientèle.
- Il regroupe les potentialités techniques et humaines nécessaires pour traiter les ordres et les opérations reçus du Front-Office, du Réseau de la Télé-compensation.
- Il est chargé du traitement des tâches administratives, techniques et des opération nécessitant des délais ou impliquant le recours à d'autres structures internes ou externes à la banque (études, recherches d'informations, recouvrement d'appoints.
- Il assure ainsi le lien entre les différents services de l'agence et les organismes extérieurs (Confrères, Banque d'Algérie, Administration fiscale, ..).

**1.5.4 Front-Office**

A pour mission :

- Accueil et orientation ;
- Chargé de la clientèle : particuliers et entreprise.

La figure ci-dessous représente l'organigramme de la banque BADR.

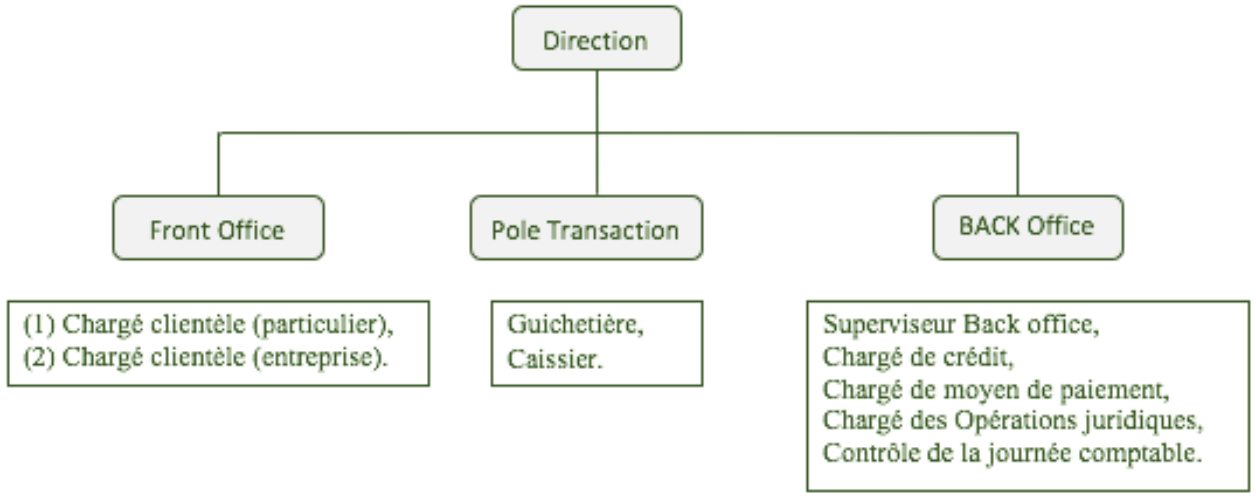


FIGURE 1.1 – Organigramme de la Banque d'Agriculture et de Développement Rural (BADR)

## **1.6 Les crédits bancaire**

### **1.6.1 Crédit bancaire**

Le crédit bancaire est une opération financière par laquelle une banque met des fonds à la disposition d'un client, en contrepartie d'un engagement de remboursement échelonné, majoré d'intérêts. Il constitue un outil essentiel de financement permettant aux agents économiques de couvrir leurs besoins de trésorerie ou d'investissement.

### **1.6.2 Crédit bonifié**

Le prêt bonifié est un dispositif de financement dont le principal objectif est de faciliter l'accès au crédit à certaines catégories sociales ou économiques, en réduisant le coût du financement. Cette réduction s'opère par la prise en charge partielle ou totale des intérêts par un organisme public, généralement l'État. Le prêt bonifié permet ainsi à l'emprunteur de diminuer le montant du prêt principal à rembourser et, dans certains cas, de compléter son apport personnel. Ce type de prêt s'inscrit dans une logique d'aide ciblée, souvent dans des secteurs prioritaires comme l'agriculture.

## **1.7 La typologie des crédits en BADR Banque**

La BADR propose à ses clients (personnes physiques ou morales) une gamme complète de crédits. Les crédits octroyés par la banque ont pour objectif le financement du cycle d'exploitation de l'entreprise, des investissements et des opérations de commerce extérieur. On distingue trois catégories différentes :

- Crédits d'exploitation ;
- Crédits d'Investissement ;
- Crédits ou engagement par Signature.

### **1.7.1 Crédits d'exploitation**

Consiste au financement du cycle d'exploitation d'une entreprise, c'est en fait aborder le domaine du crédit à court terme qui est classiquement considéré comme n'excédant pas deux ans, tel que crédit RFIG.

#### **1.7.1.1 Les crédits RFIG**

Crédit R'FIG est un crédit d'exploitation totalement bonifié destiné au financement des agriculteurs et éleveurs activant à titre individuel, organisés en coopératives ou en groupements économiques.

<b>Crédit RFIG</b>	
Type de crédit	Crédit RFIG agricole
Le montant	Selon le volume d'activité développé par l'entreprise
Différé	Néant
La durée	De 06 à 24 mois
Date limite d'utilisation	De 03 à 09 mois
Taux de bonification	5.50% bonifiée à 100%

TABLE 1.1 – Crédit RFIG

## 1.7.2 Crédits d'Investissement

Consiste au financement des dépenses d'équipement ou des projets à moyen ou long terme cela peut comporter plusieurs type de crédits :

### 1.7.2.1 Le crédit ETTAHADDI

Crédit d'investissement partiellement bonifié, destiné aux nouvelles exploitations agricoles et d'élevage créées dans le cadre de la mise en valeur des terres dont les projets sont implantées sur des terres agricoles non exploitées relevant de la propriété privée ou du domaine privé de l'état, aux exploitations agricoles existantes ainsi que les entités économiques implantées sur des terrains autres qu'agricoles.

<b>Crédit ETTAHADDI</b>		
<b>Type de crédit</b>	Crédit à moyen terme (CMT)	Crédit à long terme (CLT)
<b>Le montant</b>	1 000 000.00 DA à 100 000 000.00 DA .	
<b>Différé</b>	De 01 à 02 ans	De 01 à 05 ans
<b>La durée</b>	De 03 à 07 ans	De 08 à 15 ans
<b>Date limite d'utilisation</b>	De 06 à 12 mois à partir de la date de la mise en place de crédit	De 06 à 24 mois à partir de la date de la mise en place de crédit
<b>Taux de bonification</b>	5.5% bonifié à la charge du client comme suit : 2.5% les trois premières années A partir de la quatrième année intérêt non bonifié	5.5% bonifié à la charge du client comme suit : 2.5% les cinq premières années A partir de la sixième année intérêt non bonifié

TABLE 1.2 – Crédit ETTAHADDI

### 1.7.2.2 Le Crédit-bail (LEASING)

Opération commerciale, mettant en relation la banque avec des opérateurs économiques, dans le cadre de location des biens rentrants directement dans la réalisation de projets d'investissements.

<b>Crédit LEASING</b>	
<b>Type de crédit</b>	<b>CMT LEASING</b>
<b>Le montant</b>	Peut atteindre <b>100%</b> du coût des équipements à acquérir
<b>Différé</b>	6 mois à 12 mois (en fonction de la typologie et la nature du projet)
<b>La durée</b>	3 à 5 ans avec ou sans différé, et ce, en fonction de la nature de l'investissement.
<b>Apport personnel</b>	de 20% à 30% du coût global dans le cadre de son intervention de l'aide publique et 10% dans le cas où il y a une intervention de l'aide publique
<b>Taux d'intérêt</b>	9%

TABLE 1.3 – Crédit Bail

### 1.7.2.3 Le Crédit habitat rural

Est un crédit immobilier hypothécaire destiné aux particuliers et réservé exclusivement à l'habitat rural, conformément à la nomenclature des communes rurales arrêtée par le ministère de l'agriculture et du développement rural.

<b>Crédit immobilier</b>		
<b>Type de crédit</b>	Crédit hypothécaire rural	Crédit à long terme équipements (CLT)
<b>Le montant</b>	1 000 000.00 DA avec présentation de certificat de possession 3 000 000.00 DA avec présentation d'un acte de propriété	
<b>La durée</b>	15 ans maximum avec application de la règle durée du crédit + âge ≤ 65 ans	
<b>Date limite d'utilisation</b>	12 mois après l'encaissement de la première tranche	
<b>Taux de bonification</b>	6% bonifié à la charge du bénéficiaire comme suit : 01% si le revenu ≤ 6 fois le SNMG, 3% si le revenu entre 6 fois et 12 fois le SNMG	

TABLE 1.4 – Crédit Habitat Rural

### 1.7.2.4 Le Crédit Equipement

Financements à moyen ou long terme accordés par la BADR pour l'acquisition de biens durables (matériels agricoles, équipements, infrastructures) destinés à moderniser et développer les activités agricoles et rurales.

### 1.7.2.5 Les crédits spécifiques «dispositifs aidés»

Dans le cadre de sa politique de soutien à l'économie, le gouvernement algérien, en collaboration avec les banques, a mis en place plusieurs dispositifs de financement en faveur des porteurs de projets, notamment le crédit **ENSEJ**, le crédit **CNAC** et les crédits **ANGEM** destinés aux anciens agents de la garde communale.

<b>Crédit Equipement</b>	
<b>Type de crédit</b>	<b>CMT Equipement</b>
<b>Différé</b>	1 à 2 ans
<b>La durée</b>	3 à 5 ans
<b>Date limite d'utilisation</b>	6 mois après l'encaissement de la première tranche
<b>Taux d'intérêt</b>	5.5% à la charge du client.

TABLE 1.5 – Crédit Equipement

<b>Crédit Dispositifs Aidés</b>		
<b>Crédit ENSEJ</b>	<b>Crédit CNAC</b>	<b>Crédit ANGEM</b>
Son objectif est de favoriser la création de micro-entreprises par des jeunes qualifiés âgés de 19 à 35 ans.	Destinée aux chômeurs de 35 à 50 ans inscrits à l'ANEM ou allocataires de la CNAC, sans activité au moment de la demande.	Vise à créer des activités génératrices de revenus par l'acquisition de petits équipements et matières premières pour favoriser l'intégration sociale et économique, pour toute personne de 18 ans et plus.
<b>Montant de prêt :</b> Le cout maximum de l'investissement est de DA 10 000 000.00		<b>Montant de prêt :</b> Le cout maximum de l'investissement est de DA 1 000 000.00
<b>Différé :</b> 03 ans		
<b>La Durée :</b> 08 ans		
100% bonifié à la charge du bénéficiaire		

TABLE 1.6 – Crédit Dispositifs Aidés

## 1.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons pu appréhender le fonctionnement, les missions et les principales activités de la BADR, avec un accent particulier sur son rôle crucial dans le financement du secteur agricole. Cette présentation exhaustive de l'institution établit le cadre institutionnel nécessaire à notre étude. Elle permet de situer précisément le contexte dans lequel seront abordées les problématiques d'optimisation de portefeuille, notamment via l'approche de Markowitz, qui feront l'objet des développements futurs de ce mémoire.

## 2

# Optimisation Convexe : Théorie et Outils Mathématiques

## Sommaire

---

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>13</b>
<b>2.1 Convexité et Analyse Convexe</b> . . . . .	<b>14</b>
<b>2.2 Formes quadratiques</b> . . . . .	<b>17</b>
<b>2.3 Optimisation convexe</b> . . . . .	<b>20</b>
<b>2.4 Programmation non linéaire</b> . . . . .	<b>21</b>
<b>2.5 Méthodes de résolution des programmes quadratiques convexes</b> . . . . .	<b>28</b>
<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>29</b>

---

## Introduction

Ce chapitre est essentiel pour établir les bases mathématiques nécessaires à ce mémoire. Il commence par un rappel sur les concepts fondamentaux de la convexité et de l'analyse convexe, englobant les ensembles convexes ainsi que les fonctions convexes et non convexes. Ensuite, il est important de revoir les notions relatives aux formes quadratiques définies (ou semi-définies) positives, en mettant l'accent sur leurs propriétés, qui sont fondamentales dans le contexte de l'optimisation non linéaire. La dernière partie du chapitre est dédiée aux résultats fondamentaux en optimisation non linéaire. Nous y abordons les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité, tant pour des problèmes sans contraintes que pour des problèmes avec contraintes. Ces résultats sont cruciaux pour comprendre comment aborder et résoudre efficacement des problèmes de programmation non linéaire.

## 2.1 Convexité et Analyse Convexe

La convexité est une propriété géométrique qui s'applique aux ensembles et aux fonctions ; elle constitue un concept fondamental en mathématiques, en particulier en analyse et en optimisation.

### 2.1.1 Analyse convexe

L'analyse convexe se situe à l'interface entre l'algèbre linéaire et l'analyse non linéaire. Elle porte sur des objets non linéaires satisfaisant des conditions de convexité, lesquelles leur confèrent des propriétés particulièrement utiles en optimisation. Ainsi, la linéarisation de l'ensemble admissible conduit fréquemment à un cône, objet central de l'analyse convexe. Par ailleurs, dans les problèmes d'optimisation convexe, tout point stationnaire est également un minimum global, ce qui simplifie considérablement leur résolution.

### 2.1.2 Convexité d'un ensemble

**Définition 2.1.** Soit  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  un ensemble. On dit que  $C$  est **convexe** si, pour tous  $x, y \in C$  et pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ , le point  $\lambda x + (1 - \lambda)y$  appartient également à  $C$ , autrement dit :

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0, 1], \quad \lambda x + (1 - \lambda)y \in C.$$

Cela signifie que le segment  $[x, y]$  est entièrement contenu dans  $C$ . [29]. La figure suivante illustre cette notion :

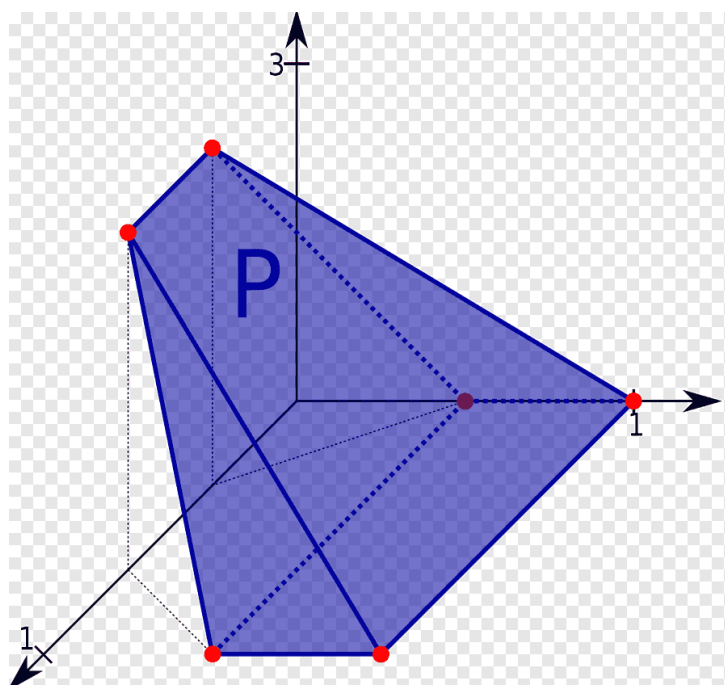


FIGURE 2.1 – Ensemble convexe

### 2.1.3 Propriétés des ensembles convexes

1. Si  $C$  est convexe, et  $\alpha \in \mathbb{R}$ , alors l'ensemble  $E = \{y : y = \alpha x, x \in C\}$  est également convexe.
2. Si  $C_1$  et  $C_2$  sont deux ensembles convexes de  $\mathbb{R}^n$ , alors l'ensemble  $C = C_1 \cap C_2$  est convexe et l'ensemble  $C = C_1 + C_2 = \{x : x = x_1 + x_2, x_1 \in C_1 \text{ et } x_2 \in C_2\}$  est convexe.
3. L'intersection de n'importe quelle collection d'ensembles convexes est convexe.

**Définition 2.2.** Un point  $x$  d'un ensemble convexe  $C$  est dit un point extrême s'il n'y a pas de points distincts  $x_1, x_2 \in C$  tels que :

$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in C, \quad 0 < \lambda < 1.$$

### 2.1.4 Fonctions convexes

La convexité est un concept clé en optimisation traditionnelle, jouant un rôle essentiel dans l'établissement des critères d'optimalité simultanément nécessaires et suffisants. En effet, la majorité des algorithmes de minimisation convexe s'avèrent particulièrement efficaces. Dans cette section, nous présenterons un bref aperçu des propriétés des fonctions convexes.

**Définition 2.3.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction.

La fonction  $f$  est dite **convexe** si, pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^n$  et pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ , l'inégalité suivante est vérifiée :

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \quad (2.1)$$

Cela signifie que la valeur de la fonction en tout point du segment  $[x, y]$  est inférieure ou égale à la valeur de la corde reliant  $f(x)$  et  $f(y)$ . [29]

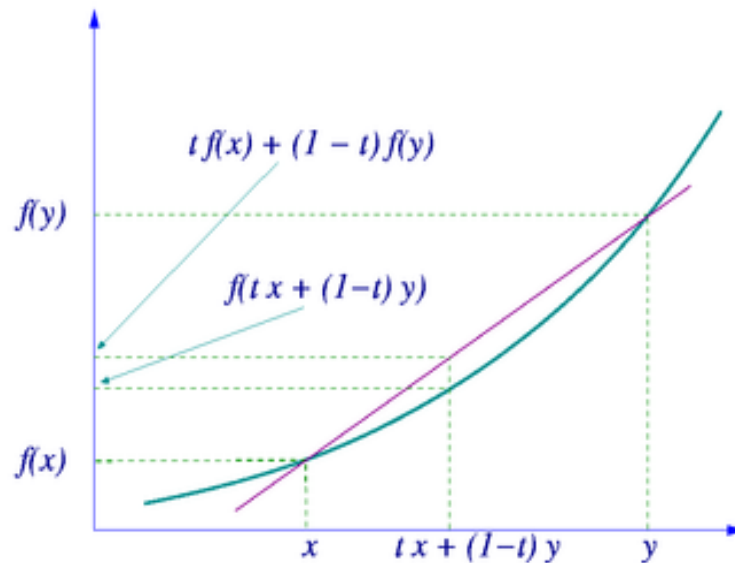


FIGURE 2.2 – Fonction convexe

**Définition 2.4.** Une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est dite strictement convexe, si l'inégalité (2.1) est stricte pour tous les points  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , tels que  $x \neq y$ , avec  $0 < \lambda < 1$ . Cette propriété signifie que le segment de droite reliant les points  $(x, f(x))$  et  $(y, f(y))$  est toujours situé au-dessus du graphe de la fonction  $f(x)$ . [29]

Remarque 1.

- 1- Une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est dite concave si la fonction  $-f$  est convexe.
- 2- Une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est dite strictement concave si la fonction  $-f$  est strictement convexe.

### 2.1.5 Propriétés des fonctions convexes

La notion de la convexité peut se généraliser de la façon suivante :

**Propriété 2.1.** Soit  $f$  une fonction réelle définie sur un ensemble convexe  $C \subset \mathbb{R}^n$ . Alors  $f$  est convexe si et seulement si son épigraphe :

$$\text{epi}(f) = \{(x, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in C, r \geq f(x)\}$$

est un ensemble convexe.

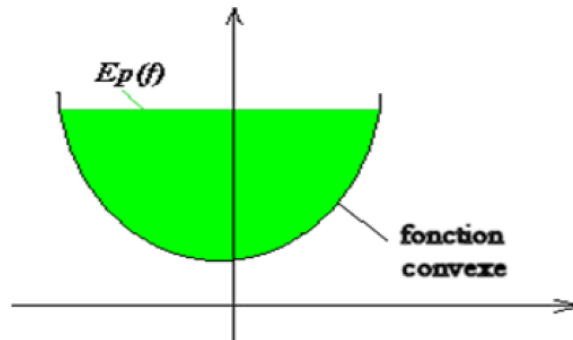


FIGURE 2.3 – Épigraphe d'une fonction convexe

#### Définition 2.5. Combinaison convexe

On dit qu'un vecteur  $X$  est une combinaison convexe des points  $x_1, x_2, \dots, x_p \in \mathbb{R}^n$  si on a

$$X = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i, \quad \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = \overline{1, p}. \quad (2.2)$$

#### Propriété 2.2. Inégalité de Jensen

Pour une fonction convexe  $f$  et des points  $x_1, x_2, \dots, x_p \in \mathbb{R}^n$  et des poids  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  tels que  $\lambda_i \geq 0$  et  $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$ , l'inégalité de Jensen s'énonce comme suit :

$$f\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i f(x_i). \quad (2.3)$$

**Propriété 2.3. Convexité et différentiabilité**

— Soit  $f$  une fonction réelle, définie sur un ensemble convexe  $C \subset \mathbb{R}^n$ , et de classe  $C^1$ . Alors  $f$  est convexe si et seulement si :

$$f(y) - f(x) \geq \nabla f^T(x)(y - x), \quad \forall y, x \in C. \quad (2.4)$$

— Soit  $f$  une fonction réelle deux fois continûment différentiable. Alors  $f$  est convexe sur  $C$  si et seulement si le hessien  $H(x) = \nabla^2 f(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in C$  (i.e. le hessien de  $f$  est semi-défini positif).

## 2.2 Formes quadratiques

**Définition 2.6.** [35] Une fonction réelle  $F(x)$ , définie sur  $\mathbb{R}^n$  et exprimée sous la forme :

$$F(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_i x_j, \quad (2.5)$$

est appelée **forme quadratique** à  $n$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , où  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T = x(J) = (x_i, i \in J)$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ , et  $J = \{1, 2, \dots, n\}$  désigne l'ensemble des indices des variables. L'expression (2.5) peut également être écrite sous forme matricielle :

$$F(x) = \frac{1}{2} x^T D x, \quad (2.6)$$

où  $D = (d_{ij}, 1 \leq i, j \leq n)$  peut être choisie comme une matrice symétrique d'ordre  $n$ , i.e.,  $D^T = D$ .

### 2.2.1 Gradient et Hessien d'une forme quadratique [34]

**Définition 2.7.** Soit  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction réelle continûment différentiable, représentée sous la forme (2.6). Le gradient de la forme quadratique  $F$  au point  $x$  est défini par :

$$g(x) = \nabla F(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{pmatrix} = D x, \quad (2.7)$$

où  $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ ,  $i \in J$ , est la dérivée partielle de  $F(x)$  par rapport à la variable  $x_i$ .

**Définition 2.8.** Soit  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  la forme quadratique (2.6). Le hessien de  $F$  est défini par :

$$H(x) = \nabla^2 F(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} = D. \quad (2.8)$$

**Définition 2.9.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction réelle de classe  $C^1$ . La dérivée directionnelle de  $f$  dans la direction  $d$  au point  $x$  est :

$$\begin{aligned} f'(x, d) = \frac{\partial f(x)}{\partial d} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x + td) - f(x)}{t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x + td) \Big|_{t=0^+} \cdot d_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x + td) \Big|_{t=0^+} \cdot d_n \\ &= \nabla f^T(x) d. \end{aligned}$$

### 2.2.2 Formes quadratiques définies et non définies

Soit la fonction quadratique  $F(x) = \frac{1}{2}x^T D x$ , où  $D$  est une matrice symétrique dimension  $n \times n$ [37].

**Définition 2.10.** La fonction quadratique  $F(x)$  est dite définie positive (DP) si  $x^T D x > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  et  $x \neq 0$ . Elle est dite semi définie positive (SDP) si  $x^T D x \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  et  $x \neq 0$ .

**Définition 2.11.** La fonction quadratique  $F(x)$  est dite définie négative (DN) si  $x^T D x < 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  et  $x \neq 0$ . Elle est dite semi-définie négative (SDN) si  $x^T D x \leq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  et  $x \neq 0$ .

**Définition 2.12.** Une matrice symétrique  $D$  est dite matrice Définie Positive (Semi-Définie Positive) et on note (DP) (SDP), si elle est associée à une forme quadratique Définie Positive (Semi-Définie Positive).

**Définition 2.13.** Une forme quadratique  $F(x)$  est dite non-définie si  $F(x)$  est positive pour certaines valeurs de  $x$  et négative pour d'autres.

### 2.2.3 Caractérisation des formes quadratiques

Pour déterminer si une matrice symétrique est définie ou semi-définie positive, le critère de Sylvester est particulièrement utile. Ce critère offre une condition nécessaire et suffisante, en se basant sur les déterminants des sous-matrices principales, également appelés mineurs principaux de la matrice[42].

**Définition 2.14.** Considérons la matrice symétrique suivante :

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Le mineur d'ordre  $p$  de la matrice  $D$ , constitué des lignes  $i_1, i_2, \dots, i_p$  et des colonnes  $j_1, j_2, \dots, j_p$ , est noté comme suit :

$$D \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_p \\ j_1, j_2, \dots, j_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} d_{i_1 j_1} & d_{i_1 j_2} & \cdots & d_{i_1 j_p} \\ d_{i_2 j_1} & d_{i_2 j_2} & \cdots & d_{i_2 j_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{i_p j_1} & d_{i_p j_2} & \cdots & d_{i_p j_p} \end{vmatrix}.$$

Ce mineur est dit principal si  $i_1 = j_1, i_2 = j_2, \dots, i_p = j_p$ ; c-à-d s'il est formé de lignes et de colonnes portant les mêmes numéros. Les mineurs suivants

$$D_1 = d_{11}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix}, \dots, \quad D_n = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{vmatrix} = |D|,$$

sont appelés mineurs principaux successifs.

Alors, le critère de Sylvester se formule comme suit :

**Théorème 2.1. (Critère de Sylvester)[3]**

1. Pour qu'une matrice symétrique  $D$  soit définie positive, il est nécessaire et suffisant que tous ses mineurs principaux successifs soient positifs :

$$D_1 > 0, \quad D_2 > 0, \dots, \quad D_n > 0. \quad (2.9)$$

2. Pour que la matrice  $D$  soit semi-définie positive, il est nécessaire et suffisant que tous ses mineurs principaux soient non négatifs :

$$D \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_p \\ i_1, i_2, \dots, i_p \end{pmatrix} \geq 0, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n, \quad p = 1, 2, \dots, n. \quad (2.10)$$

Remarque 2. La condition

$$D_1 \geq 0, \quad D_2 \geq 0, \dots, \quad D_n \geq 0,$$

n'est pas suffisante pour garantir que la matrice  $D$  soit définie non négative.

En effet, pour la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$$

on obtient

$$D_1 = 0, \quad D_2 = 0.$$

La forme quadratique associée à  $D$  s'écrit alors :

$$F(x) = \frac{1}{2}(d_{11}x_1^2 + 2d_{12}x_1x_2 + d_{22}x_2^2) = -\frac{1}{2}x_2^2.$$

Cette forme n'est pas comme on voudrait semi-définie positive (sdpos) (elle est semi-définie négative dsdn). La raison est que le mineur principal  $D \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -1 < 0$ .

Les formes quadratiques définies et semi-définies positives peuvent également être liées aux valeurs propres.

**Théorème 2.2.** Soit  $D$  une matrice symétrique d'ordre  $n$ , et soient  $\{\lambda_i\}_{i=1, \dots, n}$  ses valeurs propres réelles. Les équivalences suivantes sont vérifiées :

1.  $D \geq 0 \Leftrightarrow \lambda_i \geq 0$ , pour tout  $i = 1, \dots, n$ .
2.  $D > 0 \Leftrightarrow \lambda_i > 0$ , pour tout  $i = 1, \dots, n$ .
3.  $D$  est indéfinie si et seulement si certaines valeurs  $\lambda_i$  sont positives et d'autres négatives.

### 2.2.4 Propriétés des formes quadratiques définies et semi-définies positives

Les matrices symétriques définies (semi-définies) positives ont des propriétés très intéressantes, dont nous citons quelques unes les plus usuelles[42] :

**Propriété 2.4.** Soit la matrice  $D$  partitionnée de la manière suivante :

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} m & k \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} & \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad m + k = n.$$

Si  $D > 0$  ( $D \geq 0$ ), alors les sous-matrices principales  $D_{11}$  et  $D_{22}$  sont aussi définies positives (DP) (semi-définies positives (SDP)). D'une façon générale, toute sous-matrice principale d'une matrice DP (SDP) est aussi DP (SDP).

**Proposition 2.1.** Un élément de la diagonale d'une matrice symétrique  $D$  semi-définie positive ne peut s'annuler que si tous les autres éléments de la même ligne et colonne s'annulent aussi.

**Proposition 2.2.** Soient  $D$  une matrice symétrique semi-définie positive, et  $x \in \mathbb{R}^n$  un point quelconque tel que  $x \neq 0$ . Alors  $x^T D x = 0 \Leftrightarrow D x = 0$ .

## 2.3 Optimisation convexe

La convexité est un concept clé dans divers domaines de la programmation mathématique. Par exemple, lorsque la fonction est convexe, les conditions nécessaires d'optimalité deviennent également suffisantes pour garantir l'existence d'un minimum. De plus, un minimum local est toujours un minimum global, ce qui permet d'appliquer tous les résultats d'optimisation locale à l'optimisation globale. Ci-dessous, nous présentons quelques définitions et résultats associés à la minimisation convexe.

**Définition 2.15.** Un problème de programmation mathématique est qualifié de convexe (respectivement strictement convexe) lorsqu'il consiste à minimiser une fonction convexe (respectivement strictement convexe) sur un ensemble convexe.

L'hypothèse de convexité joue un rôle essentiel en optimisation. Il est important de souligner que cette hypothèse est fondamentale. Notons que :

- Les problèmes convexes sont synonymes de la minimisation ;
- Les problèmes convexes sont beaucoup plus faciles à résoudre, ceux pour lesquels il existe des algorithmes de résolution efficaces ;
- L'hypothèse de convexité ne suffit pas à assurer l'existence ou l'unicité d'une éventuelle solution.

Pour tout problème de minimisation convexe, nous avons les propriétés suivantes :

**Propriété 2.5.** Soit  $f$  une fonction convexe définie sur un ensemble convexe  $C \subset \mathbb{R}^n$ . Alors l'ensemble des points où  $f$  atteint son minimum sur  $C$  est convexe.

**Propriété 2.6.** *Tout minimum local dans  $C$  est un minimum global.*

**Propriété 2.7.** *Si la fonction  $f$  est strictement convexe, alors son minimum global sur  $C$  est unique.*

Plus particulièrement, considérons un problème de minimisation convexe sans contraintes donné sous la forme suivante :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), \quad (2.11)$$

où  $f$  est une fonction réelle convexe de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Théorème 2.3.** *Soit  $f$  une fonction convexe et continûment différentiable sur  $\mathbb{R}^n$ . Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $x^0$  est un minimiseur global de  $f$  sur  $\mathbb{R}^n$  ;
- (ii)  $x^0$  est un minimiseur local de  $f$  ;
- (iii)  $x^0$  est un point stationnaire de  $f$ , c'est-à-dire que  $\nabla f(x^0) = 0$ .

## 2.4 Programmation non linéaire

On parle d'un problème d'optimisation non linéaire lorsque la fonction objectif à minimiser est non linéaire et/ou lorsque l'ensemble  $S$  des contraintes est non linéaire. Un tel modèle peut être formulé sans contraintes ( $S = \mathbb{R}^n$ ) ou avec des contraintes linéaires ou non, sous forme d'équations ou d'inéquations. Dans cette section, nous présentons d'abord un problème de minimisation non linéaire sans contraintes, puis avec contraintes.

Un problème d'optimisation non linéaire sans contraintes consiste à minimiser une fonction non linéaire  $f$  sans imposer de restrictions sur le vecteur  $x$ . Il se formule généralement comme suit :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x). \quad (2.12)$$

Nous nous concentrons sur ces problèmes sans contraintes, car les conditions d'optimalité des problèmes avec contraintes sont une extension logique de celles sans contraintes. D'ailleurs, une stratégie courante pour résoudre un problème avec contraintes est de traiter une série de problèmes sans contraintes, avec des fonctions de pénalité.

La programmation quadratique qui est un cas particulier de la programmation non linéaire, dans lequel la fonction objectif est une fonction polynomiale de degré deux (quadratique), et les contraintes sont généralement linéaires.

Ce type de problème de programmation quadratique (Quadratic Programming, QP) se formule généralement sous (2.6).

Nous rappelons ci-dessous quelques définitions d'un minimum local et global pour un problème sans contraintes, ainsi que les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité locale.

**Définition 2.16.**

1. Un vecteur  $x^* \in \mathbb{R}^n$  est dit *solution optimale* du problème (2.12) si :

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

On note alors :

$$f(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x).$$

Le vecteur  $x^*$  est également appelé **minimum global** de  $f$  sur  $\mathbb{R}^n$ .

2. Un vecteur  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  est dit **minimum local** du problème (2.12) s'il existe un réel  $r > 0$  tel que :

$$f(x^0) \leq f(x), \quad \forall x \in B(x^0, r),$$

où la boule  $B(x^0, r)$  de centre  $x^0$  et de rayon  $r$  est définie par :

$$B(x^0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x^0\| \leq r\}.$$

3. Un vecteur  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  est appelé **minimum local strict** du problème (2.12) s'il existe un réel  $r > 0$ , tel que :

$$f(x^0) < f(x), \quad \forall x \in B(x^0, r), x \neq x^0.$$

**Définition 2.17.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$ . La dérivée directionnelle de  $f$  au point  $x$  dans la direction  $d$  est :

$$\begin{aligned} f'(x, d) &= \frac{\partial f}{\partial d}(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x + hd) - f(x)}{h} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x + hd) \Big|_{h=0^+} \cdot d_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x + hd) \Big|_{h=0^+} \cdot d_n \\ &= \nabla f^T(x) d. \end{aligned}$$

Si  $\|d\| = 1$ , la dérivée directionnelle exprime le taux de variation de  $f$  en  $x$  selon la direction  $d$ . Il convient de noter que ce taux est maximal dans la direction du gradient de  $f$ .

### 2.4.1 Conditions d'optimalité pour un problème non linéaire sans contraintes

Soit le problème non linéaire et sans contraintes (2.12) donné ci-dessus, où la fonction  $f$  est supposée au moins deux fois continûment différentiable.

**Théorème 2.4.** [2] Si  $x^*$  est un minimum local (ou global) pour le problème (2.12), alors

$$\nabla f(x^*) = 0. \tag{2.13}$$

*Remarque 3.* Un point vérifiant la condition (2.13) est appelé un point stationnaire.

La condition (2.13) utilise le vecteur gradient dont les composantes sont les premières dérivées partielles de  $f$ . Par conséquent, elle s'appelle la condition nécessaire du premier ordre. Les conditions nécessaires peuvent également être énoncées en termes de la matrice hessienne  $H$ , dont les coefficients sont les deuxièmes dérivées partielles de  $f$ ; elles sont alors appelées les conditions nécessaires de second ordre, présentées comme suit :

### Conditions nécessaires d'optimalité de second ordre

**Théorème 2.5.** [2] Soit la fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $f \in C^2$ . Si  $x^0$  est un minimum local (ou global) pour le problème (2.12), alors

- (i)  $\nabla f(x^0) = 0$  (stationnarité),
  - (ii)  $H(x^0)$  est semi-définie positive,
- où  $H(x^0) = \nabla^2 f(x^0)$  est la matrice hessienne de  $f$  au point  $x^0$ .

### Conditions suffisantes d'optimalité du second ordre

Les conditions nécessaires énoncées ci-dessus sont insuffisantes pour déterminer si un point est un minimum local (ou global). Par conséquent, un point qui satisfait ces conditions n'est pas forcément un minimum local (ou global). Le théorème qui suit donne une condition suffisante pour un minimum local strict.

**Théorème 2.6.** [2] Soit la fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $f$  est supposée deux fois différentiable au point  $x^0$ . Si les conditions suivantes

- (i)  $\nabla f(x^0) = 0$  (stationnarité),
  - (ii)  $H(x^0)$  est définie positive,
- sont vérifiées, alors  $x^0$  est un minimum local strict pour le problème (2.12).

## 2.4.2 Conditions d'optimalité pour un problème non linéaire avec contraintes

Un problème d'optimisation non linéaire avec contraintes générales se formule de la manière suivante :

$$\min_{x \in \mathcal{S}} f(x), \quad (2.14)$$

où  $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, k, g_i(x) \leq 0, i = k + 1, \dots, m\}$  désigne l'ensemble des solutions réalisables. On suppose que les fonctions  $f$  et  $g_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) sont de classe  $C^1$ , i.e, continûment différentiables sur  $\mathbb{R}^n$ .

### Définition 2.18.

1. Un vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$  est appelé solution réalisable du problème (2.14) s'il vérifie toutes les contraintes du problème, c'est-à-dire, que  $x \in \mathcal{S}$ .
2. Une solution réalisable  $x^*$  est appelée solution optimale du problème (2.14) si

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in \mathcal{S},$$

et on note  $f(x^*) = \min_{x \in \mathcal{S}} f(x)$ .

3. Un vecteur  $x^0 \in \mathcal{S}$  est appelé minimum local du problème (2.14) s'il existe un réel  $r > 0$ , tel que :

$$f(x^0) \leq f(x), \quad \forall x \in \mathcal{S} \cap B(x^0, r),$$

où  $B(x^0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^0\| \leq r\}$  est la boule de centre  $x^0$  et de rayon  $r$ .

**Définition 2.19.** Un vecteur  $d \in \mathbb{R}^n$ ,  $d \neq 0$ , est appelé direction admissible en un point  $x \in \mathcal{S}$  s'il existe un réel  $\alpha > 0$  tel que  $x + \theta d \in \mathcal{S}$ ,  $\forall \theta \in [0, \alpha]$ . Si  $x$  est un point intérieur, alors toutes les directions sont admissibles.

**Théorème 2.7.** [2] Soit la fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ . Si  $x^0$  est un point de minimum local (ou global) du problème (2.14), alors pour toute direction admissible  $d \in \mathbb{R}^n$  en  $x^0$ , on a

$$d^T \nabla f(x^0) \geq 0. \tag{2.15}$$

**2.4.2.1 Conditions d’optimalité pour le cas des contraintes linéaires de type égalités**

Le problème se formule sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \min f(x), \\ \text{s.c. } Ax = b, \end{cases} \tag{2.16}$$

où  $x \in \mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) = A_i^T x - b_i = 0, i \in I = \{1, 2, \dots, m\}\}$ ,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continûment différentiable,  $A = A(I, J) = (a_{ij}, i \in I, j \in J)$  est une matrice d’ordre  $m \times n$ , formée des vecteurs colonnes et lignes suivants :

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_n), \quad A = \begin{pmatrix} A_1^T \\ A_2^T \\ \vdots \\ A_i^T \\ \vdots \\ A_m^T \end{pmatrix},$$

où  $a_j = (a_{1j}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{mj})^T$  est la  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $A$ ,  $j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$ ;  $A_i^T = (a_{i1}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{in})^T$  est la  $i^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $A$ . Le vecteur  $b = (b_1, \dots, b_i, \dots, b_m)^T$  est un vecteur-colonne de  $\mathbb{R}^m$ .

**Proposition 2.3.** Un vecteur  $d \in \mathbb{R}^n$  est une direction admissible au point  $x \in \mathcal{S}$  si et seulement si

$$Ad = 0. \tag{2.17}$$

De plus, on a

$$x(\theta) = x + \theta d \in \mathcal{S}, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

*Remarque 4.* Pour que l’ensemble des solutions réalisables  $\mathcal{S}$  ne soit pas vide ou ne soit pas réduit à un point isolé, on considère que  $\text{rang} A = m < n$ .

**Définition 2.20.** La fonction  $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T (Ax - b) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$  est appelée fonction de **Lagrange** associée au problème (2.16), où  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_m)^T \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange.

**Condition nécessaire d’optimalité du premier ordre**

**Théorème 2.8.** Soit  $x^0$  un minimum local (ou global) du problème (2.16). Alors il existe nécessairement un vecteur  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  vérifiant

$$\nabla f(x^0) + A^T \lambda = 0. \tag{2.18}$$

La condition (2.18) peut être donnée autrement, en utilisant la fonction de Lagrange :

$$\nabla_x L(x, \lambda) = \nabla f(x) + A^T \lambda = 0. \quad (2.19)$$

De plus, un minimum local est tout d'abord un point réalisable, qui vérifie

$$Ax = b \Rightarrow \nabla_\lambda L(x, \lambda) = Ax - b = 0. \quad (2.20)$$

En combinant les relations (2.19) et (2.20), on obtient alors la condition nécessaire d'optimalité de premier ordre pour le problème (2.16). On a alors le théorème suivant :

**Théorème 2.9.** (Théorème de Lagrange)

Soit  $f$  une fonction continûment différentiable sur  $\mathbb{R}^n$ . Si  $x^0$  est un minimum local (ou global) du problème (2.16), alors il existe un vecteur multiplicateur de Lagrange  $\lambda^0 \in \mathbb{R}^m$ , tel que :

$$\nabla L(x^0, \lambda^0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla_x L(x^0, \lambda^0) = 0, \\ \nabla_\lambda L(x^0, \lambda^0) = 0. \end{cases} \quad (2.21)$$

Le couple  $(x^0, \lambda^0)$  est appelé point stationnaire de la fonction de Lagrange.

Le vecteur  $\lambda^0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_i^0, \dots, \lambda_m^0)^T \in \mathbb{R}^m$ , formé des multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_i^0$ , est unique grâce à la **remarque 4**.

**Condition nécessaire d'optimalité du second ordre**

La condition nécessaire de second ordre est donnée dans le théorème suivant :

**Théorème 2.10.** Soit  $x^0$  est un minimum local (ou global) du problème (2.16), où  $f$  est de classe  $C^2$  et  $\lambda^0$  un vecteur multiplicateur de Lagrange, tel que le couple  $(x^0, \lambda^0)$  vérifie la condition (2.21). Alors

$$d^T \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x^0, \lambda^0) d \geq 0, \quad \forall d \in V_0, \quad d \neq 0, \quad (2.22)$$

où  $V_0 = \{d \in \mathbb{R}^n : Ad = 0\}$  et  $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x^0, \lambda^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^0) = \nabla^2 f(x^0)$ .

**Condition suffisante d'optimalité du second ordre**

La condition suffisante de second ordre est donnée dans le théorème suivant :

**Théorème 2.11.** Soit  $f$  une fonction deux fois continûment différentiable sur  $\mathbb{R}^n$  et soit  $(x^0, \lambda^0)$  un couple de vecteurs vérifiant la condition nécessaire d'optimalité de premier ordre du problème (2.16), c-à-d :

$$\nabla L(x^0, \lambda^0) = 0.$$

Pour que  $x^0$  soit un minimum local du problème (2.16), il est suffisant que la matrice  $\nabla^2 f(x^0)$  soit définie positive sur le sous-espace vectoriel  $V_0 = \{d \in \mathbb{R}^n : Ad = 0\}$ .

### Cas d'une fonction convexe

Considérons maintenant le problème de minimisation (2.16) donné ci-dessus avec contraintes linéaires de type égalités, où  $f$  est supposée convexe de classe  $C^1$ .

**Théorème 2.12.** *Considérons  $(x^*, \lambda^*)$  un couple de vecteurs vérifiant les conditions d'optimalité de KKT du premier ordre :*

$$\nabla L_x(x^*, \lambda^*) = \nabla f(x^*) + A^T \lambda^* = 0, \quad \nabla L_\lambda(x^*, \lambda^*) = Ax^* - b = 0.$$

Alors le vecteur  $x^*$  est un minimum global du problème (2.16).

*Preuve.* Soit  $(x^*, \lambda^*)$  un couple de vecteurs vérifiant les conditions d'optimalité de KKT du premier ordre et soit  $x$  une solution réalisable quelconque du problème (2.16). Comme  $f$  est convexe, alors on a

$$f(x) - f(x^*) \geq \nabla f^T(x^*)(x - x^*), \quad \forall x \in \mathcal{S},$$

i.e.,

$$f(x) - f(x^*) \geq [-A^T \lambda^*]^T (x - x^*), \quad \forall x \in \mathcal{S},$$

d'où

$$f(x) - f(x^*) \geq - \sum_{i=1}^m \lambda_i^* A_i^T (x - x^*), \quad \forall x \in \mathcal{S},$$

et donc

$$f(x) - f(x^*) \geq - \sum_{i=1}^m \lambda_i^* (b_i - b_i) = 0, \quad \forall x \in \mathcal{S}.$$

Par conséquent,  $x^*$  est un minimum global du problème (2.16). ■

Les conditions d'optimalité de KKT sont donc à la fois nécessaires et suffisantes dans le cas où  $f$  est convexe.

#### 2.4.2.2 Conditions d'optimalité pour le cas des contraintes linéaires de type inégalités

Considérons maintenant un problème de minimisation non linéaire avec contraintes linéaires de type inégalités :

$$\begin{cases} \min f(x), \\ \text{s.c } Ax \leq b, \end{cases} \quad (2.23)$$

où  $x \in \mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) = A_i^T x - b_i \leq 0, i \in I = \{1, 2, \dots, m\}\}$ ,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continûment différentiable,  $A$  est une matrice d'ordre  $m \times n$ , formée des vecteurs colonnes et lignes définis précédemment et  $b$  est un vecteur colonne de  $\mathbb{R}^m$ .

**Définition 2.21.** *Soit  $x$  une solution réalisable du problème (2.23). L'ensemble des contraintes actives (saturées) au point  $x$  est l'ensemble d'indices suivants :*

$$I_a = I_a(x) = \{i \in I : g_i(x) = A_i^T x - b_i = 0\}.$$

**Lemme 2.1.** *Pour les contraintes d'inégalités du problème (2.23), un vecteur  $d \in \mathbb{R}^n$  est une direction admissible au point  $x$  si et seulement si*

$$A_i^T d \leq 0, \quad \forall i \in I_a(x). \quad (2.24)$$

**Lemme 2.2.** (Lemme de *Farkas* [2])

Soit  $(m + 1)$  vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  :  $c, A_i, i = 1, 2, \dots, m$ , avec  $m < n$ .

Si l'on a l'implication suivante

$$A_i^T x \leq 0, i = 1, \dots, m, \Rightarrow c^T x \leq 0, \quad (2.25)$$

alors il existe des multiplicateurs  $\lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, m$ , tels que  $c = \sum_{i=1}^m \lambda_i A_i$ .

**Condition nécessaire d'optimalité du premier ordre**

Le lemme de **Farkas** est souvent utilisé pour démontrer le théorème suivant :

**Théorème 2.13.** (Théorème de *Karush-Kuhn-Tucker* [1])

Soit  $x^0$  un minimum local (ou global) du problème (2.23). Alors il existe un vecteur

$\lambda^0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_i^0, \dots, \lambda_m^0)^T \geq 0$  tel que :

(i) Pour la fonction de Lagrange  $L(x^0, \lambda^0) = f(x^0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 (A_i^T x^0 - b_i)$ , la condition de stationnarité suivante

$$\nabla L_x(x^0, \lambda^0) = \nabla f(x^0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 A_i = 0, \quad (2.26)$$

est vérifiée.

(ii) La condition de complémentarité (écarts complémentaires) suivante

$$\lambda_i^0 (A_i^T x^0 - b_i) = 0, \quad \forall i \in I, \quad (2.27)$$

est satisfaite.

**Conditions nécessaires d'optimalité du second ordre**

**Théorème 2.14.** [2] Soit  $f$  une fonction continûment différentiable sur  $\mathbb{R}^n$  et soit  $x^0$  un minimum local (ou global) du problème (2.23). Alors il existe un vecteur multiplicateur de Lagrange  $\lambda^0 \geq 0$  tel que le couple  $(x^0, \lambda^0)$  de vecteurs vérifie les conditions (2.26) et (2.27) et de plus on a :

$$d^T \nabla^2 f(x^0) d \geq 0, \quad \forall d \in H_0, d \neq 0, \quad (2.28)$$

où  $H_0 = \{d \in \mathbb{R}^n : A_i^T d = 0, \forall i \in I_a(x^0)\}$ , c'est à dire que la matrice  $\nabla^2 f(x^0)$  est semi-définie positive sur le sous-espace vectoriel  $H_0$ .

**Cas d'une fonction convexe**

Considérons maintenant le problème de minimisation (2.23) donné précédemment avec contraintes linéaires de type inégalités, où  $f$  est supposée convexe de classe  $C^1$ .

**Théorème 2.15.** [2] Soient  $x^*$  une solution réalisable du problème (2.23) et  $(x^*, \lambda^*)$  un couple de vecteurs vérifiant les conditions d'optimalité de KKT du premier ordre :

(i)  $\nabla L_x(x^*, \lambda^*) = \nabla f(x^*) + A^T \lambda^* = 0$ ;

(ii)  $\lambda_i^* \geq 0, \forall i \in I$ ;

(iii)  $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \forall i \in I$ .

Alors le vecteur  $x^*$  est un minimum global du problème (2.23).

## 2.5 Méthodes de résolution des programmes quadratiques convexes

La résolution des problèmes d'optimisation quadratique convexe repose sur diverses méthodes numériques développées au fil du temps. Ces méthodes incluent notamment les techniques de points intérieurs, les méthodes de gradient projeté, ainsi que les algorithmes de type Newton modifié. Chacune de ces approches présente des avantages spécifiques en fonction de la structure du problème, de la nature des contraintes et des exigences en termes de précision ou de rapidité [6].

Dans le cadre de notre application, nous avons retenu la méthode de **programmation quadratique séquentielle** (SQP, pour Sequential Quadratic Programming).

3

### 2.5.1 Méthode SQP

La Programmation Quadratique Séquentielle (PQS), ou *Sequential Quadratic Programming* (SQP), est une méthode d'optimisation numérique performante pour résoudre des problèmes non linéaires sous contraintes d'égalités et d'inégalités [33, 23]. Cette méthode est particulièrement adaptée aux problèmes quadratiques rencontrés dans le domaine de la finance, notamment dans le cadre de l'optimisation de portefeuille.

Le principe fondamental consiste à approximer le problème non linéaire par une succession de problèmes quadratiques, résolus itérativement, de manière à converger localement vers une solution optimale.

#### Formulation mathématique

Soit le problème général d'optimisation sous contraintes :

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ \text{sous les contraintes} \quad & \\ c_i(x) = 0, \quad & i = 1, \dots, m, \\ c_j(x) \geq 0, \quad & j = m + 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{2.29}$$

où :

- $f(x)$  est la fonction objectif, généralement non linéaire,
- $c_i(x)$  représente les contraintes d'égalité,
- $c_j(x)$  représente les contraintes d'inégalité.

À chaque itération  $k$ , ce problème est remplacé par un sous-problème quadratique d'approximation :

$$\begin{aligned} \min_{p \in \mathbb{R}^n} \quad & \frac{1}{2} p^\top H_k p + \nabla f(x_k)^\top p \\ \text{sous les contraintes} \quad & \\ \nabla c(x_k)^\top p + c(x_k) = 0, \quad & \end{aligned} \tag{2.30}$$

où :

- $p$  est la direction de recherche (l'incrément de  $x$ ),
- $H_k$  est une approximation de la matrice Hessienne du Lagrangien,
- $\nabla f(x_k)$  est le gradient de la fonction objectif au point  $x_k$ ,
- $\nabla c(x_k)$  est la matrice Jacobienne des contraintes.

### Algorithme général

---

**Algorithme 1 :** Algorithme général de la méthode SQP.

---

**Données :** Fonction objectif  $f(x)$ , contraintes  $c(x) = 0$ ;

**Résultat :** Solution optimale  $x^* = x_k$ , multiplicateurs  $\lambda^*$ ;

1 **Initialisation :** Choisir :

2 ▶ un point initial admissible  $x_0$ ;

3 ▶ la matrice Hessienne initiale  $H_0$ ;

4 ▶ une tolérance  $\epsilon$  et poser  $k \leftarrow 0$ ;

5 **Tant que** le critère d'arrêt non satisfait **Faire**

6     ▶ Calculer le gradient  $\nabla f(x_k)$  et le Jacobien des contraintes  $\nabla c(x_k)$ ;

7     ▶ Résoudre le sous-problème quadratique :

$$\begin{aligned} \min_p \quad & \nabla f(x_k)^T p + \frac{1}{2} p^T H_k p \\ \text{s.c.} \quad & c(x_k) + \nabla c(x_k)^T p = 0. \end{aligned}$$

8     ▶ Obtenir la direction  $p_k$  et les multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_k$ ;

9     ▶ Effectuer une recherche linéaire pour trouver  $\alpha_k \in (0, 1]$  satisfaisant une condition de décroissance sur le Lagrangien;

10    ▶ Mettre à jour la solution :  $x_{k+1} \leftarrow x_k + \alpha_k p_k$ ;

11    ▶ Mettre à jour la Hessienne  $H_k \rightarrow H_{k+1}$  (ex. : méthode BFGS);

12 **fin ;**

13

14  $k \leftarrow k + 1$ ;

---

### Avantages et propriétés

- Convergence locale quadratique sous certaines conditions, en particulier si  $H_k$  constitue une bonne approximation de la hessienne de la fonction objectif.
- Haute précision, notamment pour les problèmes fortement contraints.
- Capacité à traiter simultanément des contraintes d'égalités et d'inégalités.

Cependant, la méthode peut s'avérer coûteuse en ressources pour les problèmes de grande taille ou lorsque la matrice hessienne est difficile à approximer ou à stocker efficacement.

## Conclusion

Ce chapitre a posé les bases mathématiques nécessaires à la compréhension des problématiques d'optimisation étudiées par la suite, en s'appuyant sur la théorie de la convexité. Nous avons d'abord défini les ensembles convexes et les fonctions convexes, dont les propriétés jouent

un rôle central dans l'efficacité des méthodes d'optimisation, en assurant que toute solution locale constitue également une solution globale.

Nous avons ensuite examiné les formes quadratiques et leur classification (définies positives, semi-définies positives ou négatives, indéfinies), en mettant en évidence le rôle du critère de Sylvester pour les caractériser rigoureusement.

Enfin, le chapitre a abordé les conditions d'optimalité nécessaires et suffisantes dans le cadre des problèmes d'optimisation sans contrainte et sous contraintes. Ces concepts fondamentaux constituent un socle indispensable pour la compréhension et la résolution des problèmes d'optimisation, notamment dans le domaine financier.

## 3

## Le modèle de Markowitz

**Sommaire**

---

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>31</b>
<b>3.1 Notions de bases</b> . . . . .	<b>32</b>
<b>3.2 Cadre théorique de l'optimisation de portefeuille</b> . . . . .	<b>37</b>
<b>3.3 Portefeuille optimal et frontière efficiente selon le modèle de Markowitz</b> .	<b>39</b>
<b>3.4 Les limites du modèle Markowitz</b> . . . . .	<b>42</b>
<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>43</b>

---

**Introduction**

L'univers financier, caractérisé par l'incertitude, l'évolution dynamique des marchés et la diversité croissante des produits, a poussé chercheurs et praticiens à développer des modèles pour aider les investisseurs à prendre des décisions éclairées. L'objectif principal de ces modèles est d'optimiser l'allocation de la richesse des investisseurs, en répartissant leur capital afin de maximiser le rendement attendu tout en minimisant le risque associé.

Dans ce contexte, la Théorie Moderne de Portefeuille (TMP), développée par l'Américain **Harry Markowitz en 1952** [25, 32], est une référence majeure en finance. Ce modèle est un outil fondamental pour la gestion d'investissements, particulièrement dans l'analyse des portefeuilles d'actifs financiers. Il repose sur l'idée que l'investisseur cherche à optimiser son portefeuille en considérant à la fois le rendement des actifs et leur risque, ce dernier étant modélisé par la variance ou l'écart-type des rendements.

Le modèle classique de Markowitz, pierre angulaire de la finance moderne, est basé sur le principe de diversification des actifs pour réduire le risque global du portefeuille. Il postule que le risque total d'un portefeuille n'est pas une simple somme des risques individuels des actifs,

mais qu'il dépend aussi de la corrélation entre leurs rendements. L'idée clé est qu'une combinaison d'actifs peu ou négativement corrélés peut significativement diminuer le risque global du portefeuille.

Dans ce chapitre, nous aborderons les concepts fondamentaux du portefeuille, puis nous détaillerons le modèle de Markowitz, ses hypothèses et sa méthode pour déterminer un portefeuille optimal. Nous discuterons également de ses extensions et de ses critiques, notamment concernant l'hypothèse de normalité des rendements et la rationalité des investisseurs.

## 3.1 Notions de bases

### 3.1.1 Le marché financier

Le marché financier désigne un espace d'échange, physique ou virtuel, où se rencontrent les agents économiques disposant d'un excédent de capitaux (investisseurs) et ceux ayant des besoins de financement (entreprises, institutions publiques, etc).

Ces échanges portent sur des instruments financiers tels que les actions, les obligations, les matières premières ou encore les produits dérivés, et se réalisent à des prix déterminés par le jeu de l'offre et de la demande [43].

### 3.1.2 La bourse

La Bourse représente l'un des principaux segments du marché financier. Il s'agit d'un marché public organisé où s'échangent des titres financiers dont la valeur fluctue en fonction des anticipations des investisseurs, influencées par les mécanismes de l'offre et de la demande. Ainsi, un titre fortement demandé verra son prix augmenter, tandis qu'un titre délaissé subira une baisse de valeur[7].

La Bourse joue un rôle central dans le bon fonctionnement de l'économie. Elle permet notamment :

**Financement des entreprises** : la Bourse permet aux entreprises de lever des fonds en émettant des actions ou obligations pour financer leurs projets.

**Dynamisme économique** : elle facilite la rencontre entre épargne et investissement, assurant une allocation efficace des ressources sous régulation.

### 3.1.3 Indice boursier

Un indice boursier est un outil statistique qui reflète l'évolution de la valeur d'un groupe spécifique de titres cotés en bourse. Il est construit à partir d'un échantillon représentatif d'actions sélectionnées selon des critères précis (capitalisation boursière, secteur d'activité, zone géographique, etc.)[45]. L'indice sert de référence pour évaluer la performance des marchés financiers et permet aux investisseurs de suivre les tendances économiques de manière synthétique. Parmi les indices les plus connus figurent le CAC 40 en France, le Dow Jones aux États-Unis et le Nikkei 225 au Japon.

### 3.1.4 Actif financier

Appelé aussi (titre financier), est un contrat généralement négociable sur un marché financier, produisant à son propriétaire des revenus ou un gain en capital. Il y en a de très nombreuses sortes d'actifs, des plus simples : actions, obligations, aux plus complexes : options[7].

### 3.1.5 Action

Une action est un titre de propriété sur une fraction du capital qu'une entreprise décide de vendre aux investisseurs. Dans sa forme traditionnelle, elle donne à son détenteur le droit :

- à la gestion de la société (une action = une voix dans les votes en assemblée générale);
- aux bénéfices sous formes de dividendes
- à l'information de l'entreprise. Le prix d'une action cotée en bourse est exprimée en valeur monétaire (bourse d'Alger : Dinar Algérien et Bourse de Paris en Euro (€)). Notons que l'action est l'actif le plus négocié sur les marchés financiers. [21]

### 3.1.6 Obligation

Une obligation est un titre d'endettement. L'émetteur de l'obligation s'engage à rembourser à terme son porteur et lui verse des intérêts à des dates spécifiées. Les obligations peuvent être émises par l'État, les intermédiaires financiers, les sociétés et des organismes publics[9].

- Obligations d'entreprise : Ce sont des titres de créance négociables, émis sur le marché par une entreprise désirent obtenir des capitaux nécessaires pour le financement de son développement.
- Obligations de l'État : titres de créance émis par le trésor public pour couvrir les besoins financiers de l'État et combler le déficit au niveau des budgets.

### 3.1.7 Portefeuille Financier

Dans le cadre de la finance moderne, un **portefeuille financier** désigne l'ensemble des actifs financiers détenus par un investisseur, qu'il s'agisse d'une personne physique ou morale. Ces actifs peuvent appartenir à diverses catégories, telles que les actions, les obligations, les matières premières, les produits dérivés ou encore les fonds d'investissement.

La composition d'un portefeuille repose sur une répartition en proportions variables des différents actifs. Cette diversification a pour objectif principal de *réduire le risque global du portefeuille*, tout en maximisant le rendement espéré, conformément aux principes de la gestion optimale des actifs [21, 7].

Mathématiquement, un portefeuille est représenté par un vecteur de proportions  $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , où chaque  $x_i$  désigne *la part relative du capital total investi dans l'actif  $i$* . Cette proportion est définie par :

$$x_i = \frac{\text{Capital investi dans l'actif } i}{\text{Capital total}}, \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1,$$

où  $n$  désigne le nombre total de titres financiers composant le portefeuille.

Cette modélisation constitue la base de nombreuses théories en finance, notamment la théorie du portefeuille de Markowitz, qui étudie le compromis rendement-risque en fonction de la composition du portefeuille.

### 3.1.8 La rentabilité

Le taux de rentabilité ou le rendement est une notion fondamentale en finance et apparaît dans l'expression de la plupart des modèles de gestion de portefeuille : elle mesure l'appréciation (ou la dépréciation) relative de la valeur d'un actif financier ou d'un portefeuille d'actifs financiers entre deux instants successifs.

Le rendement d'un actif financier est une variable aléatoire. Par extension, le rendement d'un portefeuille, étant une combinaison linéaire pondérée des rendements des actifs qui le composent, est également une variable aléatoire. Il possède donc une **espérance** (rendement moyen attendu) et une **variance** (mesure du risque ou de la volatilité). Ces deux éléments sont essentiels pour l'analyse et la construction d'un portefeuille optimal dans le cadre de la théorie moderne du portefeuille. Il reflète la performance de l'investissement sur une période donnée. On distingue généralement deux types de rendement pour mesurer le rendement d'un actif financier : le rendement arithmétique et le rendement géométrique (ou logarithmique)[24].

#### Rendement arithmétique

Le rendement arithmétique [4, 7] périodique d'un actif  $R_{i,t}$  est défini par la formule :

$$R_{i,t} = \frac{(P_{i,t} - P_{i,t-1}) + D_{i,t}}{P_{i,t-1}} \quad (3.1)$$

avec :

- $P_{i,t}$  : prix de l'actif  $i$  à la fin de la période  $t$  ;
- $P_{i,t-1}$  : prix de l'actif  $i$  au début de la période  $(t - 1)$  ;
- $D_{i,t}$  : dividende (pour une action) ou intérêt (pour une obligation) perçu durant la période  $t$ .

#### Définition du rendement arithmétique sur une période $[0; T]$

Le **rendement arithmétique cumulé** d'un actif financier sur une période  $[0; T]$  est défini comme suit :

$$R_{[0;T]} = \frac{P_T - P_0}{P_0} = \prod_{t=1}^T (1 + R_t) - 1 \quad (3.2)$$

où :

- $P_0$  est le prix de l'actif au début de la période  $t = 0$  ;
- $P_T$  est le prix de l'actif à la fin de la période  $t = T$  ;
- $R_t$  est le rendement simple de l'actif au cours de la période  $t$ .

### Rendement géométrique

Le rendement géométrique [4, 7] (ou logarithmique) périodique d'un actif est donné par :

$$R_{i,t} = \ln \left( \frac{P_{i,t} + D_{i,t}}{P_{i,t-1}} \right) \quad (3.3)$$

#### Remarques :

- La **moyenne arithmétique** est généralement utilisée pour estimer le rendement espéré d'un actif à partir de données historiques, ainsi que pour le calcul de la variance et de l'écart-type.
- La **moyenne géométrique** est privilégiée pour l'évaluation de la performance d'un actif sur une période prolongée.

### 3.1.9 Le rendement espéré d'un actif

Le rendement espéré d'un actif financier est la valeur moyenne que l'on s'attend à obtenir comme rendement futur, pondérée par les probabilités associées à chaque scénario possible [13]. Il s'agit d'une mesure centrale utilisée dans l'évaluation de la performance attendue d'un actif ou d'un portefeuille.

- **Calcul du rendement espéré à partir des probabilités**

Le rendement espéré d'un actif est défini comme la moyenne pondérée de ses rendements possibles :

$$\mathbb{E}(R) = \sum_{i=1}^n p_i R_i \quad (3.4)$$

où :

- $R_i$  est le rendement associé à l'issue  $i$  ;
- $p_i$  est la probabilité de réalisation de l'issue  $i$  ;
- $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ .

- **Calcul du rendement espéré à partir des rendements historiques.**

Le rendement espéré d'un actif financier  $i$  peut être estimé à l'aide de la moyenne arithmétique des rendements réalisés au cours des  $T$  dernières périodes :

$$\mu_i = \mathbb{E}(R_i) \approx \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_{i,t}$$

où :

- $\mu_i$  est le rendement espéré de l'actif  $i$  ;
- $R_{i,t}$  représente le rendement de l'actif  $i$  à la fin de la période  $t$  ;
- $T$  est le nombre total de périodes observées.

Cette estimation suppose que les rendements historiques sont représentatifs du comportement futur de l'actif.

### 3.1.10 Le Risque

Le risque financier se définit comme la variabilité des rendements futurs d'un actif ou d'un portefeuille d'actifs, traduisant l'incertitude quant à la réalisation effective de la rentabilité attendue[9].

D'un point de vue probabiliste, il peut être mesuré par la variance ou l'écart type du rendement aléatoire de l'actif, autour de son espérance mathématique. Plus cette dispersion est élevée, plus le risque associé à l'investissement est important.

### 3.1.11 La Variance

La Variance est un outil fondamental dans l'étude du risque financier. Selon la définition classique, elle représente la moyenne des carrés des écarts par rapport à la moyenne[7, 9]. Mathématiquement, elle est considérée comme une mesure servant à caractériser la dispersion d'une distribution ou d'un échantillon autour de sa moyenne.

La variance du rendement d'un actif  $i$ , notée  $\sigma_i^2$ , est donnée par :

$$\sigma_i^2 = \text{Var}(R_i) = \mathbb{E}[(R_i - \mathbb{E}(R_i))^2] = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T R_{i,t}^2 - \bar{R}_i^2$$

avec :

- $R_{i,t}$  : le rendement de l'actif  $i$  à l'instant  $t$  ;
- $T$  : le nombre de périodes
- $\bar{R}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_{i,t}$  : le rendement moyen de l'actif  $i$ .

Plus la variance est élevée, plus les rendements sont dispersés autour de la moyenne, ce qui signifie un risque plus important. À l'inverse, une faible variance indique que les rendements sont relativement stables.

### 3.1.12 Covariance

La covariance permet d'étudier les variations simultanées de deux variables par rapport à leurs moyennes respectives. Elle peut être interprétée comme le produit des écarts de deux variables par rapport à leurs moyennes[7]. Mathématiquement, la covariance entre les rendements de deux actifs  $i$  et  $j$  sur  $T$  périodes est exprimée par :

$$\text{Cov}(R_i, R_j) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_{i,t} - \bar{R}_i)(R_{j,t} - \bar{R}_j)$$

où  $R_{i,t}$  et  $R_{j,t}$  représentent les rendements des actifs  $i$  et  $j$  à la période  $t$ , et  $\bar{R}_i$  et  $\bar{R}_j$  leurs rendements moyens respectifs[14].

**Remarque**

- Une covariance faible indique que les séries sont relativement indépendantes.
- Une covariance élevée signifie que les séries sont fortement liées.
- Une covariance nulle suggère que les deux variables sont totalement indépendantes.

## 3.2 Cadre théorique de l'optimisation de portefeuille

### 3.2.1 Introduction à la théorie moderne du portefeuille

Le problème posé par l'économiste Américain Harry Markowitz consiste à déterminer la composition optimale d'un portefeuille d'actifs financiers de manière à minimiser la variance (le risque) du rendement du portefeuille pour un niveau donné d'espérance de rentabilité. Autrement dit, il s'agit de sélectionner les proportions investies dans chaque actif de sorte que le portefeuille soit le moins risqué possible pour un rendement attendu fixé[16].

Un portefeuille est dit efficace (ou optimal au sens de Markowitz) s'il offre la rentabilité espérée la plus élevée parmi tous les portefeuilles présentant une même variance, ou la plus faible variance pour une rentabilité donnée[28].

L'ensemble de tous ces portefeuilles efficaces forme ce que l'on appelle la frontière efficiente ou frontière efficace de Markowitz. Cette courbe, généralement convexe, représente l'arbitrage optimal entre risque et rendement. En pratique, tout investisseur rationnel devrait choisir un portefeuille situé sur cette frontière, en fonction de sa tolérance au risque[25].

### 3.2.2 Le modèle moyenne-variance de Markowitz

Considérons un portefeuille constitué de  $n$  actifs financiers. On note :

- $w_i$  : la proportion du capital investi dans l'actif  $i$ , avec  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$  ;
- $R_i$  : le rendement aléatoire de l'actif  $i$
- $\mu_i = \mathbb{E}(R_i)$  : le rendement espéré de l'actif  $i$  ;
- $\sigma_{ij} = \text{Cov}(R_i, R_j)$  : la covariance entre les rendements des actifs  $i$  et  $j$  ;
- $\Sigma$  : la matrice de variance-covariance des rendements des actifs.

Le modèle consiste à résoudre un problème d'optimisation quadratique. Deux formulations sont possibles selon l'objectif de l'investisseur :

Minimisation du risque pour un rendement espéré donné :

$$\min_{\mathbf{w}} \quad \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}$$

$$\text{sous les contraintes} \quad \begin{cases} \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} = \mu_p \\ \mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1 \end{cases}$$

Maximisation du rendement pour un niveau de risque donné :

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{w}} \quad \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} \\ \text{sous les contraintes} \quad & \begin{cases} \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} \leq \sigma_p^2 \\ \mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

où :

$\mu_p$  : Le rendement espéré du portefeuille donné par la moyenne pondérée des rendements espérés des actifs :

$$\mu_p = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu}$$

avec :  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$  est le vecteur des pondérations et  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^T$  le vecteur des rendements espérés.

La **variance**  $\sigma_p^2$  mesure le risque du portefeuille, donné par :

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}$$

### 3.2.3 Les hypothèses du modèle

Le modèle de Markowitz repose sur des hypothèses strictes, notamment la normalité des rendements.

#### Hypothèses relatives aux actifs financiers

- **Hypothèse 1** : Tout investissement s'effectue dans un contexte d'incertitude. Le rendement futur d'un actif financier est modélisé comme une variable aléatoire suivant une *loi normale*, entièrement définie par :
  - $\mathbb{E}(R_i) = \mu_i$  : l'espérance mathématique du rendement de l'actif  $i$  ;
  - $\sigma(R_i) = \sigma_i$  : l'écart-type du rendement, représentant le risque associé.
- **Hypothèse 2** : Les rendements des actifs financiers ne sont pas indépendants : ils présentent des *corrélations* entre eux, ce qui implique des *covariances non nulles*.

#### Hypothèses relatives au comportement des investisseurs

- **Hypothèse 1** : Les investisseurs manifestent une *aversion au risque* plus ou moins marquée. Le risque est mesuré par l'écart-type des rendements.
- **Hypothèse 2** : Les investisseurs sont *rationnels* : leurs préférences, bien que subjectives, suivent une logique de *transitivité*, garantissant la cohérence de leurs choix.
- **Hypothèse 3** : Tous les investisseurs partagent le même *horizon d'investissement*, limité à une seule période.

### 3.3 Portefeuille optimal et frontière efficiente selon le modèle de Markowitz

Le modèle de Markowitz repose sur la minimisation du risque pour un niveau donné de rentabilité espérée [12]. Il suppose que les rendements des actifs sont normalement distribués et que les investisseurs sont rationnels, ayant tous le même horizon d'investissement, limité à une seule période. Dans ce cadre, la construction d'un portefeuille optimal consiste à déterminer les pondérations

$$w = (w_1, w_2, \dots, w_n)'$$

à allouer à chaque actif risqué afin de minimiser la variance du portefeuille, sous contrainte de rendement attendu et de budget total :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad f(w) = \sigma_p^2 = w' \Sigma w \\ \text{s.c.} \quad \mu' w = \mu_p^* \\ \quad \quad e' w = 1 \\ \quad \quad w \geq 0 \end{array} \right.$$

où :

- $\Sigma$  est la matrice de covariance des rendements,
- $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)'$  est le vecteur des espérances de rendement,
- $e$  est un vecteur de 1,
- $\mu_p^*$  est le rendement cible du portefeuille,
- $\sigma_p^2$  est la variance du portefeuille.

La résolution de ce problème quadratique est effectuée via la méthode des multiplicateurs de Lagrange, en introduisant les multiplicateurs  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , et en définissant la fonction :

$$L(w, \lambda_1, \lambda_2) = x' \Sigma x - \lambda_1 (\mu' x - \mu_p) - \lambda_2 (e' x - 1)$$

Les conditions du premier ordre donnent alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial w} &= 2 \Sigma w - \lambda_1 \mu - \lambda_2 e = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= \mu' w - \mu_p = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} &= e' w - 1 = 0 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$x = \frac{1}{2} \Sigma^{-1} (\lambda_1 \mu + \lambda_2 e)$$

En injectant cette expression dans les équations de contrainte, et en posant :

$$A = e' \Sigma^{-1} \mu, \quad B = \mu' \Sigma^{-1} \mu, \quad C = e' \Sigma^{-1} e, \quad D = BC - A^2,$$

on obtient les multiplicateurs :

$$\lambda_1 = \frac{2(-A + C\mu_p)}{D}, \quad \lambda_2 = \frac{2(B - A\mu_p)}{D}$$

Ce qui permet de déterminer explicitement les pondérations optimales du portefeuille :

$$x = \frac{1}{D}\Sigma^{-1} [(-A\mu + Be) + (C\mu - Ae)\mu_p] = F + E\mu_p$$

avec :

$$F = \frac{1}{D}\Sigma^{-1}(-A\mu + Be), \quad E = \frac{1}{D}\Sigma^{-1}(C\mu - Ae)$$

La **frontière efficiente**[17] est alors obtenue en exprimant la variance du portefeuille  $\sigma_p^2$  en fonction du rendement ciblé  $\mu_p$ , selon l'équation :

$$\sigma_p^2(\mu_p) = w(\mu_p)' \Sigma w(\mu_p)$$

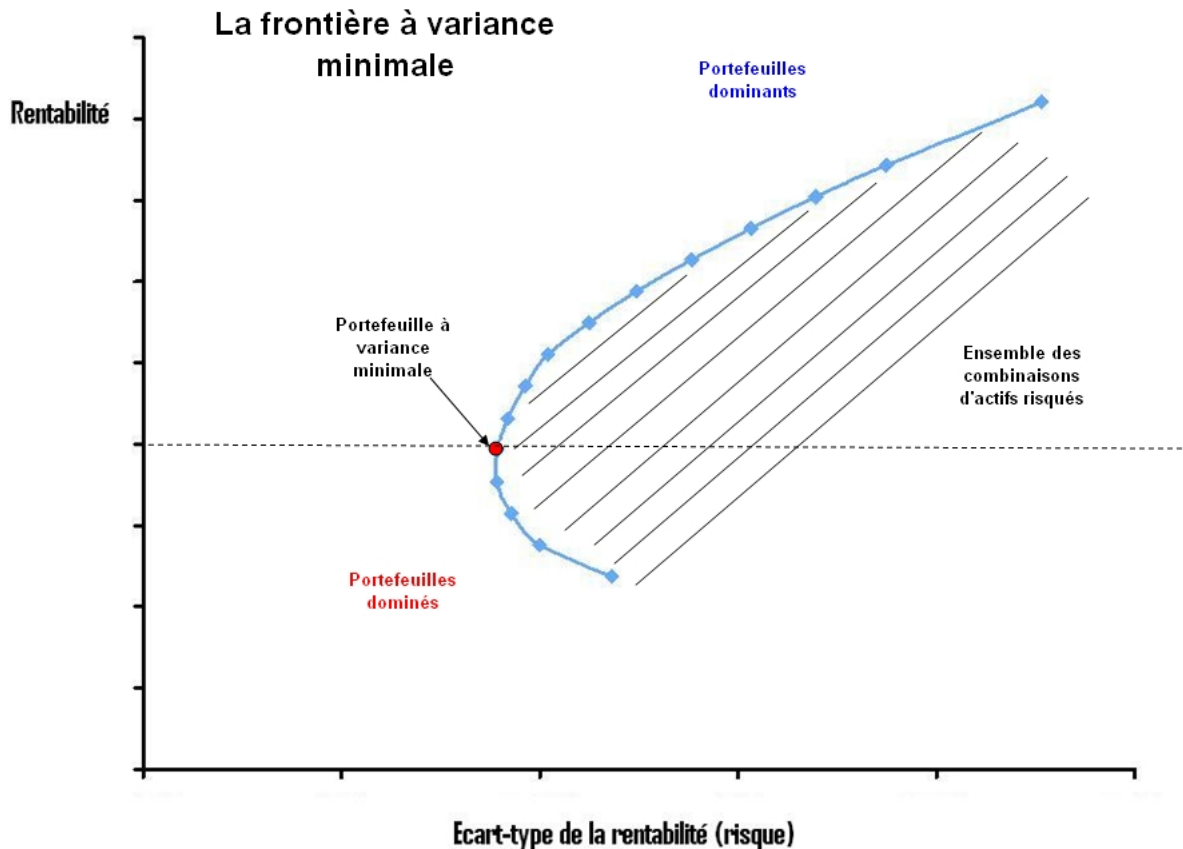


FIGURE 3.1 – frontière efficiente

Cette frontière représente l'ensemble des portefeuilles qui offrent le meilleur rendement possible pour chaque niveau de risque. Graphiquement, elle forme une courbe convexe dans l'espace

rendement-risque, appelée *frontière efficiente*, au-dessus de laquelle aucun portefeuille n'est réalisable, et en dessous de laquelle les portefeuilles sont sous-optimaux.

La majorité des transactions sur les marchés financiers concernent la gestion de portefeuilles de titres, lesquels regroupent l'ensemble des instruments financiers (actions, obligations, produits dérivés, etc.) détenus par un agent économique à un instant donné. La gestion d'un tel portefeuille vise généralement à optimiser le compromis entre rendement et risque, en maximisant le rendement espéré tout en maîtrisant le niveau de risque, conformément aux objectifs et à l'aversion au risque de l'investisseur.

Dans ce contexte, la notion de *portefeuille efficient* est centrale. Un portefeuille est dit efficient s'il offre le rendement espéré maximal pour un niveau de risque donné, ou, de manière équivalente, s'il minimise le risque pour un rendement espéré fixé. Cette notion, formalisée dans le cadre de la théorie moderne du portefeuille introduite par H. Markowitz, conduit naturellement à des problèmes d'optimisation quadratique sous contraintes. Ces méthodes permettent de déterminer la combinaison optimale d'actifs financiers constituant le portefeuille optimal, en respectant les critères de performance et de gestion du risque définis par l'investisseur.

### 3.3.1 Le rôle de la diversification dans un portefeuille optimal

L'approche de Markowitz donne une formalisation rigoureuse au concept de diversification, qui consiste à réduire le risque global en combinant plusieurs actifs financiers au sein d'un portefeuille. Dans le cadre du modèle espérance-variance, cette approche conduit à la proposition suivante : pour tout investisseur rationnel, le portefeuille d'utilité maximale — c'est-à-dire celui qui correspond le mieux à ses préférences — est un portefeuille optimalement diversifié.

Les enseignements majeurs de Markowitz sur la diversification peuvent être résumés comme suit :

1. L'ajout d'un actif à un portefeuille réduit le risque global, à condition que cet actif ne soit pas parfaitement et positivement corrélé avec le portefeuille initial.
2. Il existe une limite à cette réduction de risque : même avec un nombre important d'actifs, subsiste un risque résiduel appelé *risque non diversifiable* ou *risque systématique*.
3. La volatilité d'un portefeuille parfaitement diversifié est égale à la racine carrée de la covariance moyenne entre les actifs qui le composent.

Ces résultats soulignent que, bien que la diversification soit efficace, son effet marginal décroît à mesure que l'on augmente le nombre d'actifs. Il en découle un problème d'optimisation portant sur le nombre et le choix des actifs à inclure pour une diversification efficace.

### Ratio de Sharpe : mesure du rendement ajusté au risque

Le *ratio de Sharpe*, introduit par William F. Sharpe (1966), est un indicateur fondamental d'évaluation de la performance d'un actif ou d'un portefeuille, tenant compte du risque encouru. Il mesure le rendement excédentaire par rapport au taux sans risque, rapporté à la volatilité du portefeuille :

$$S = \frac{\mathbb{E}[R] - r_f}{\sigma} \quad (3.5)$$

où  $\mathbb{E}[R]$  est le rendement espéré de l'actif ou du portefeuille,  $r_f$  le taux sans risque, et  $\sigma$  l'écart-type des rendements. Un ratio de Sharpe plus élevé indique une meilleure efficacité du couple rendement-risque.[36]

Dans le cadre du modèle de Markowitz, le portefeuille optimal est celui qui maximise ce ratio, appelé **portefeuille tangent**, situé au point de tangence entre la droite du marché des capitaux (Capital Market Line, CML) et la frontière efficiente.[17]

Malgré ses hypothèses restrictives (normalité des rendements, absence de risques extrêmes), le ratio de Sharpe reste un outil central dans la sélection et la comparaison des portefeuilles, en simplifiant l'évaluation de la performance ajustée au risque.

### Présentation du paramètre d'aversion au risque $A$

Dans la formulation pratique du modèle de Markowitz, le compromis entre rendement et risque est intégré directement dans la fonction objectif à travers un paramètre scalaire  $A$ , appelé **paramètre d'aversion au risque**.

Ce paramètre modélise le degré de prudence de l'investisseur :

- Si  $A = 0$ , l'investisseur est totalement insensible au risque : il cherche à maximiser le rendement sans considération pour la volatilité.
- Si  $A > 0$ , l'investisseur devient progressivement plus avers au risque : il cherche un équilibre entre rendement espéré et risque global du portefeuille.

La fonction objectif utilisée devient alors une fonction d'utilité quadratique :

$$f(\mathbf{w}) = -\mu^\top \mathbf{w} + \frac{A}{2} \mathbf{w}^\top \Sigma \mathbf{w} \quad (3.6)$$

Minimiser cette fonction revient à maximiser une forme pénalisée du rendement attendu en fonction du niveau de risque encouru. Le paramètre  $A$  permet ainsi de simuler différents profils d'investisseurs, allant des plus risquophiles (petit  $A$ ) aux plus conservateurs (grand  $A$ ). [27]

Dans la présente étude,  $A$  est considéré comme une variable exogène, dont l'impact est étudié par une analyse comparative pour plusieurs valeurs comprises entre 0 et 10.

## 3.4 Les limites du modèle Markowitz

Depuis son introduction, le modèle de Markowitz a occupé une position prépondérante dans l'évolution de la finance moderne, en s'imposant comme une référence incontournable en matière de gestion de portefeuille. Toutefois, les développements théoriques et empiriques récents ont mis en évidence plusieurs limites structurelles de ce modèle, soulevées notamment par de nombreux praticiens et chercheurs en finance[45].

Parmi ces principales limites, il convient de citer :

1. **L'hypothèse de rationalité parfaite des investisseurs** : Le modèle postule que les agents économiques agissent de manière entièrement rationnelle. Or, l'observation des marchés financiers a révélé que des croyances irrationnelles peuvent acquérir une légitimité lorsqu'elles sont collectivement partagées et validées par des acteurs crédibles.
2. **L'absence d'analyse du risque systémique** : Le modèle de Markowitz se focalise exclusivement sur l'évaluation du risque spécifique aux titres individuels, sans prendre en

compte la composante systémique du risque de marché. Cette lacune a motivé l'émergence du Modèle d'Évaluation des Actifs Financiers (MEDAF), qui introduit la notion de risque non diversifiable.

3. **L'hypothèse de normalité des rendements financiers** : Le modèle repose sur l'hypothèse selon laquelle les rentabilités suivent une distribution normale, une condition souvent démentie par les faits empiriques. Pour pallier cette limitation, la théorie de la *dominance stochastique* a été développée, permettant des comparaisons entre portefeuilles sans supposer la forme de la distribution des rendements.
4. **La variance comme mesure imparfaite du risque** : Dans l'approche de Markowitz, la variance des rendements est utilisée comme unique indicateur du risque, ce qui constitue une simplification restrictive. En comparaison, la dominance stochastique permet une évaluation plus complète, en tenant compte de l'ensemble de la distribution de probabilité des rendements.
5. **L'émergence de nouvelles mesures du risque financier** : Conscients des insuffisances de la variance comme mesure du risque, les chercheurs ont développé en 1993 la méthodologie de la *Value-at-Risk (VaR)*. Cet outil permet d'estimer, avec un certain niveau de confiance, la perte maximale que pourrait subir un portefeuille sur une période donnée.

## Conclusion

L'optimisation de portefeuille constitue une démarche essentielle en finance moderne pour allouer efficacement des ressources entre différents actifs, en tenant compte du couple rendement-risque. À travers ce chapitre, nous avons appliqué le modèle de Markowitz à un cas concret portant sur des actions industrielles françaises, en exploitant des données réelles issues de Yahoo Finance.

Les résultats obtenus ont permis de déterminer une allocation optimale des actifs, maximisant le ratio de Sharpe sous contraintes réalistes. L'analyse a également mis en évidence l'utilité de la frontière efficiente, véritable outil graphique d'aide à la décision pour les investisseurs. Elle offre une vision claire des portefeuilles optimaux accessibles pour chaque niveau de risque accepté.

Enfin, cette étude illustre la puissance des outils quantitatifs dans la gestion de portefeuille, tout en soulignant la nécessité de combiner rigueur mathématique, données fiables et interprétation économique pour construire une stratégie d'investissement cohérente et performante.

## 4

# Optimisation de portefeuille : application du modèle de Markowitz

## Introduction

L'objectif de ce chapitre est de passer de l'approche théorique à la mise en œuvre concrète de l'optimisation de portefeuille à travers le modèle de Markowitz. Après avoir exposé les concepts fondamentaux relatifs à la gestion optimale d'un portefeuille, il est désormais nécessaire de tester ces approches sur des cas réels, afin d'en apprécier l'applicabilité et les limites.

Nous proposerons dans un premier temps une application classique du modèle Markowitz sur un portefeuille boursier composé d'actions françaises industrielles issues du CAC 40, permettant ainsi de valider les principes du modèle dans un cadre financier traditionnel. Par la suite, nous procéderons à une adaptation de ce modèle à un contexte bancaire, en appliquant l'optimisation à un portefeuille constitué de différentes catégories de crédits octroyés par l'agence BADR d'El-Kseur.

Enfin, la résolution numérique du problème d'optimisation sera détaillée, à travers l'utilisation d'outils informatiques performants tels que Python et ses bibliothèques d'optimisation. Ce chapitre constitue ainsi une étape essentielle, articulant théorie et pratique, afin de formuler des recommandations adaptées à la gestion de portefeuilles bancaires.

## Sommaire

---

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>44</b>
<b>4.1 Language Python</b> . . . . .	<b>45</b>
<b>4.2 Application du modèle Markowitz dans un cas boursier</b> . . . . .	<b>46</b>
<b>4.3 Adaptation du modèle Markowitz à un cas bancaire</b> . . . . .	<b>53</b>
<b>4.4 Résolution numérique</b> . . . . .	<b>56</b>
<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>62</b>

---

## 4.1 Language Python

Python est aujourd'hui l'un des langages de programmation les plus utilisés dans le monde, en particulier dans les domaines du calcul scientifique, de l'analyse de données, du développement web et de l'intelligence artificielle. Il s'agit d'un langage interprété, orienté objet et de haut niveau, conçu pour être à la fois lisible, puissant et polyvalent.

Ce langage a été créé en 1989 par Guido van Rossum aux Pays-Bas. Le nom « Python » provient d'un hommage à la série télévisée britannique humoristique *Monty Python's Flying Circus*, dont l'auteur était fan. La première version publique du langage a été publiée en 1991.

Python est apprécié pour sa syntaxe simple et intuitive, qui facilite l'apprentissage pour les débutants tout en offrant des fonctionnalités avancées pour les experts. Il dispose d'un vaste écosystème de bibliothèques spécialisées (telles que NumPy, Pandas, Matplotlib, Scikit-learn, etc.), rendant le langage particulièrement adapté aux applications en science des données et en optimisation numérique.

La version stable actuelle est **Python 3.12**, publiée en octobre 2023. Elle introduit des améliorations notables en matière de performance et d'expérience développeur. Depuis janvier 2020, la version 2 de Python est officiellement obsolète.

Dans le cadre de ce projet, plusieurs bibliothèques Python ont été mobilisées afin d'assurer la manipulation des données, la résolution numérique des programmes quadratiques et la visualisation des résultats. Le tableau (4.1) présente une classification synthétique de ces bibliothèques selon leur fonction principale et leur usage spécifique dans notre application.

Bibliothèque	Fonction principale	Utilisation dans le projet
NumPy (np)[30]	Calcul numérique et algèbre linéaire	Manipulation des vecteurs de rendements, des matrices de covariance, des poids du portefeuille, et calculs d'espérance et de variance
Pandas (pd)[39]	Manipulation de données tabulaires	Présentation des poids optimaux associés à chaque type de crédit sous forme de série nommée
SciPy.optimize[41]	Optimisation numérique	Résolution du problème quadratique via l'algorithme SLSQP (minimize) en tenant compte des contraintes et des bornes
Matplotlib.pyplot (plt)[22]	Visualisation des données	Création de graphiques pour illustrer les résultats : frontière rendement-risque, poids selon $A$ , convergence (itérations), valeur de la fonction objectif

TABLE 4.1 – Classification des bibliothèques Python utilisées

## 4.2 Application du modèle Markowitz dans un cas boursier

### 4.2.1 La présentation de l'indice Français CAC40

Le CAC 40 constitue le principal indice boursier de la place de Paris. Il est calculé à partir de 40 valeurs sélectionnées parmi les cent sociétés dont les échanges sont les plus actifs sur la bourse Euronext Paris.

Cet indice est mis à jour toutes les 30 secondes pendant les heures d'ouverture du marché, de 9h00 à 17h30.

La pondération de chaque société dans l'indice dépend de la quantité de titres disponibles sur le marché, et varie selon l'importance de la capitalisation boursière ainsi que du volume des échanges enregistrés sur la valeur.

Le CAC 40 joue un rôle d'indicateur de la santé économique et financière des grandes entreprises françaises. Il est suivi de près par les investisseurs, les analystes financiers et les décideurs politiques comme un baromètre de la confiance des marchés. L'indice est également utilisé comme base pour de nombreux produits financiers, tels que les contrats à terme ou les produits dérivés.

L'objectif de cette étude est de construire un portefeuille d'actions industrielles françaises appartenant à l'indice boursier CAC 40 en optimisant la structure des poids alloués à chaque titre de manière à minimiser le risque (volatilité) pour un niveau donné de rendement espéré. Cette approche repose sur le modèle moyenne-variance de Harry Markowitz (1952), qui constitue le fondement de la théorie moderne du portefeuille.

### 4.2.2 Les données utilisées

Les données financières ont été récupérées à partir de Yahoo Finance, une plateforme en ligne gratuite, largement utilisée à la fois dans les milieux académiques et professionnels pour l'accès aux données de marché en temps réel ou historiques.

L'analyse repose sur les prix de clôture quotidiens (ajustés) de six actions industrielles cotées à la Bourse de Paris comme illustré dans le tableau ci-dessus :

Entreprise	Symbole Yahoo Finance	Secteur d'activité
Airbus	AIR.PA	Aéronautique / Défense
Engie	ENGI.PA	Énergie / Services aux collectivités
Saint-Gobain	SGO.PA	Matériaux de construction
Schneider Electric	SU.PA	Équipements électriques / Industrie
Thales	HO.PA	Défense / Sécurité
TotalEnergies	TTE.PA	Énergie / Pétrole et Gaz

TABLE 4.2 – Entreprises sélectionnées du CAC 40

Dans le cadre de ce travail, nous considérons un portefeuille financier composé de 6 actions issues du secteur industriel de l'indice CAC 40 (voir Annexe 1). Les données financières utilisées sont extraites de Yahoo Finance, correspondant aux prix de clôture mensuels de ces titres sur une période de deux ans (du 01/01/2023 au 01/01/2025). La figure suivante illustre l'évolution des prix de clôture par action :

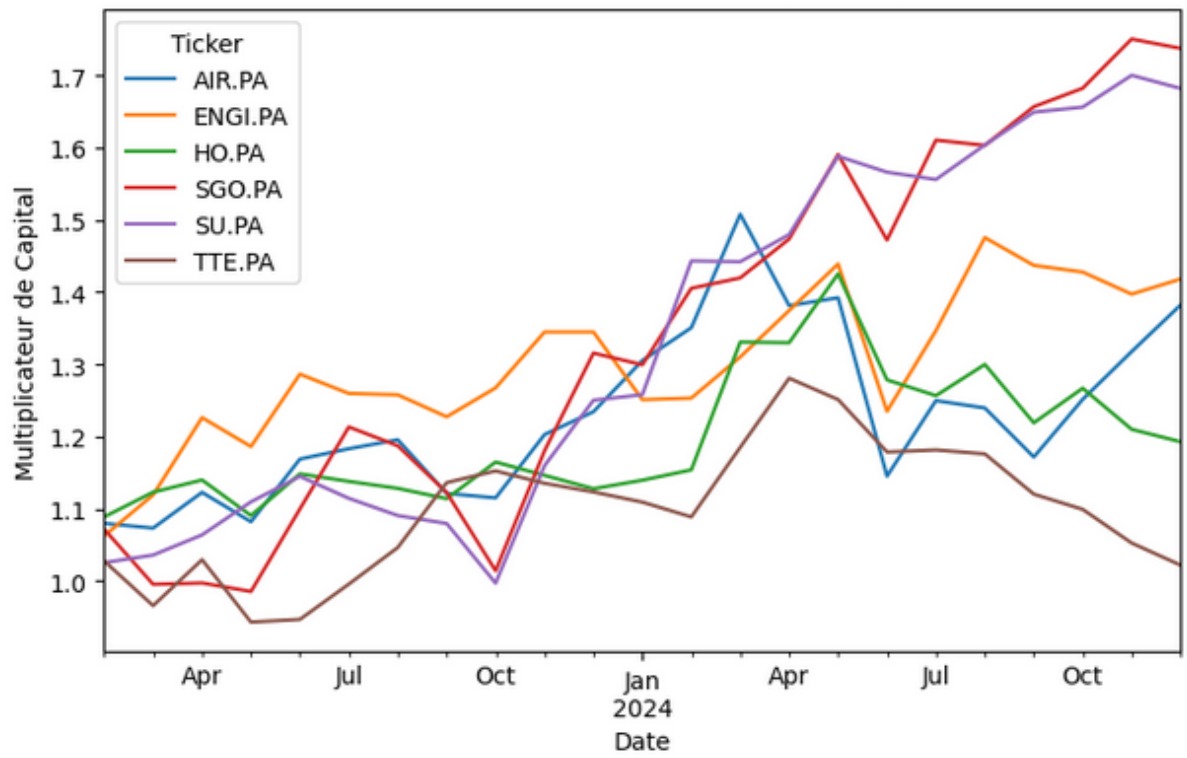


FIGURE 4.1 – L'évolution des prix de clôture des actions

### 4.2.3 Algorithme de résolution

---

**Algorithme 2 :** Optimisation de portefeuille selon l'aversion au risque  $A$ .

---

**Données :** Données historiques des prix, période  $[t_0, t_f]$ , liste des actifs

$T = \{t_1, \dots, t_n\}$  et valeurs d'aversion  $A = \{A_1, \dots, A_k\}$ ;

**Résultat :** Poids optimaux  $w^*$ , Rendement  $R$ , Risque associé  $\sigma$  et Utilité  $U$ ;

1 **Initialisation :**

2 ▶ Télécharger les prix mensuels des actifs et calculer les rendements historiques ;

3 ▶ Calculer le vecteur des rendements moyens annuels  $\mu$  et la matrice de variance-covariance  $\Sigma$  ;

4 ▶ Initialiser le vecteur des poids  $w_0 = [\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}]$  ;

5 ▶ Définir les contraintes du modèle :  $w_i \in [0, 1], \sum w_i = 1$  ;

6 **pour** chaque  $A_j \in A$  **faire**

7 | ▶ Minimiser la fonction d'utilité :

$$U(w) = \frac{A_j}{2} w^\top \Sigma w - w^\top \mu.$$

| ▶ Résoudre le problème par la méthode SLSQP ;

8 **si succès alors**

9 | ▶ Enregistrer le vecteur des poids  $w^*$ , le rendement  $R = w^{*\top} \mu$  et le risque

$\sigma = \sqrt{w^{*\top} \Sigma w^*}$  ;

10 | ▶ Calculer l'utilité  $U = \frac{A_j}{2} \sigma^2 - R$  ;

11 **sinon**

12 | ▶ Enregistrer des valeurs manquantes ;

13 **fin**

14 **fin**

15 ▶ Comparer les résultats avec le portefeuille équipondéré  $w^{eq} = [\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}]$  ;

---

### Calcul des rendements

À partir des séries historiques de prix, nous avons calculé les rendements arithmétique mensuels de chaque actif, définis par :

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1.$$

où  $P_t$  représente le prix de clôture au jour  $t$ .

### Rendements espérés

Le tableau suivant résume les rendements annuels espérés des 6 actifs industriels :

Action	Rendement moyen annuel par action
AIR.PA	0,1968
ENGL.PA	0,2031
HO.PA	0,1085
SGO.PA	0,3178
SU.PA	0,2895
TTE.PA	0,0251

TABLE 4.3 – Rendement moyen annuel par action

#### 4.2.4 Matrice de variance-covariance

Nous avons ensuite calculé la matrice de variance-covariance annuelle des rendements des titres, qui quantifie le risque et les corrélations entre eux. Cette matrice est donnée par :

$$\Sigma = \text{Cov}(R_i, R_j) \times 12$$

Voici la matrice obtenue :

Ticker	AIR.PA	ENGL.PA	HO.PA	SGO.PA	SU.PA	TTE.PA
AIR.PA	0.053914	0.025776	0.025946	0.027464	0.008450	0.006911
ENGL.PA	0.025776	0.040132	0.021864	0.016618	0.006656	0.011445
HO.PA	0.025946	0.021864	0.034561	0.003968	-0.001073	0.014095
SGO.PA	0.027464	0.016618	0.003968	0.056157	0.028375	0.001696
SU.PA	0.008450	0.006656	-0.001073	0.028375	0.033419	-0.007890
TTE.PA	0.006911	0.011445	0.014095	0.001696	-0.007890	0.028804

TABLE 4.4 – Matrice de covariance annualisée entre les rendements des actions

#### 4.2.5 Méthodologie d'optimisation

Dans la forme théorique classique, le modèle de Markowitz vise à minimiser le risque du portefeuille pour un niveau donné de rendement espéré. Le problème se formule ainsi :

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{w}} && \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} \\ & \text{sous contraintes} && \begin{cases} \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} = \mu_p \\ \mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1 \\ \mathbf{w}_i \geq 0, \quad \forall i \end{cases} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Cependant, cette formulation nécessite de fixer *a priori* un niveau de rendement cible  $\mu_p$ , ce qui peut être difficile dans un contexte réel où l'investisseur ne connaît pas nécessairement son objectif de rendement exact.

Pour cette raison, une alternative pratique consiste à maximiser une **fonction d'utilité quadratique** qui combine le rendement espéré et le risque, pondérés par un coefficient  $A$  représentant l'*aversion au risque*. Le problème devient alors :

$$\min_{\mathbf{w}} f(\mathbf{w}) = -\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w} + \frac{A}{2} \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} \quad \text{sous : } \sum_{i=1}^n w_i = 1, w_i \geq 0 \quad (4.2)$$

Cette formulation présente plusieurs avantages :

- Elle permet d'étudier la sensibilité du portefeuille en faisant varier  $A$ , c'est-à-dire en analysant différents profils d'investisseurs (de très risquophiles à très averses au risque).
- Elle est plus souple à implémenter numériquement car elle transforme un problème à contrainte en un problème de compromis rendement/risque.

Le modèle repose sur la fonction d'utilité quadratique de Markowitz, avec prise en compte du paramètre d'aversion au risque  $A$ . Le problème d'optimisation est formulé ainsi :

$$\min_w f(w) = -\boldsymbol{\mu}^T w + \frac{A}{2} w^T \boldsymbol{\Sigma} w \quad (4.3)$$

sous les contraintes :

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1, \quad w_i \geq 0 \quad \forall i \quad (4.4)$$

La résolution est effectuée par la méthode **SLSQP** (Sequential Least Squares Quadratic Programming), une méthode de type SQP adaptée aux problèmes quadratiques convexes sous contraintes, à l'aide de la librairie `scipy.optimize`.

## librairie `scipy.optimize`

Le module `scipy.optimize` de la bibliothèque SciPy joue un rôle central en optimisation numérique dans Python. Il contient des outils puissants pour résoudre des problèmes mathématiques d'optimisation, qu'ils soient linéaires, non linéaires, contraints ou non contraints.

### 4.2.6 Implémentation et analyse des résultats

#### *a.* Évolution du portefeuille selon $A$

Dans cette étude, nous avons fait varier le paramètre d'aversion au risque  $A$  de 0 à 10 avec un pas de 2. Pour chaque valeur, la fonction objectif quadratique de Markowitz est minimisée, sous contraintes de positivité des poids et de leur somme égale à 1. La résolution du problème est effectuée par la méthode SLSQP via la bibliothèque `scipy.optimize`. Le tableau ci-dessous résume les résultats obtenus :

A	Poids optimaux $x^*$	$\mu_p$	$\sigma_p$	Itérations
0.00	(0%, 0, 0%, <b>100%</b> , 0%, 0%)	31.78%	23.70%	8
2.00	(0%, 0%, 0%, <b>58.57%</b> , <b>41.43%</b> , 0%)	30.61%	19.69%	9
4.00	(0%, 0%, 0%, <b>36.97%</b> , <b>63.03%</b> , 0%)	29.99%	18.49%	9
6.00	0%, <b>14.78%</b> , 0%, <b>22.94%</b> , <b>62.28%</b> , 0%)	28.32%	16.51%	9
8.00	(0%, <b>22.72%</b> , 0%, <b>15.75%</b> , <b>61.53%</b> , 0%)	27.43%	15.71%	8
10.00	(0%, <b>22.12%</b> , <b>5.90%</b> , <b>12.09%</b> , <b>59.88%</b> , 0%)	26.31%	14.90%	11

TABLE 4.5 – Poids optimaux, rendements et risques du portefeuille pour différentes valeurs d'aversion au risque A (résultats de la méthode SLSQP)

**Remarque :** Le solveur SLSQP implémente une méthode de type SQP qui, à chaque itération, résout un sous-problème quadratique sous contraintes, vérifiant les conditions de KKT à convergence. Ainsi, la solution retournée est théoriquement conforme aux conditions d'optimalité du problème.

#### b. Visualisations graphiques

Afin de compléter l'interprétation quantitative, deux représentations visuelles sont proposées :

- La courbe rendement-risque ( $\mu_p, \sigma_p$ ) permet de visualiser l'évolution de la performance du portefeuille en fonction du degré d'aversion au risque. Elle met en évidence la frontière efficiente correspondant à notre échantillon d'actifs.

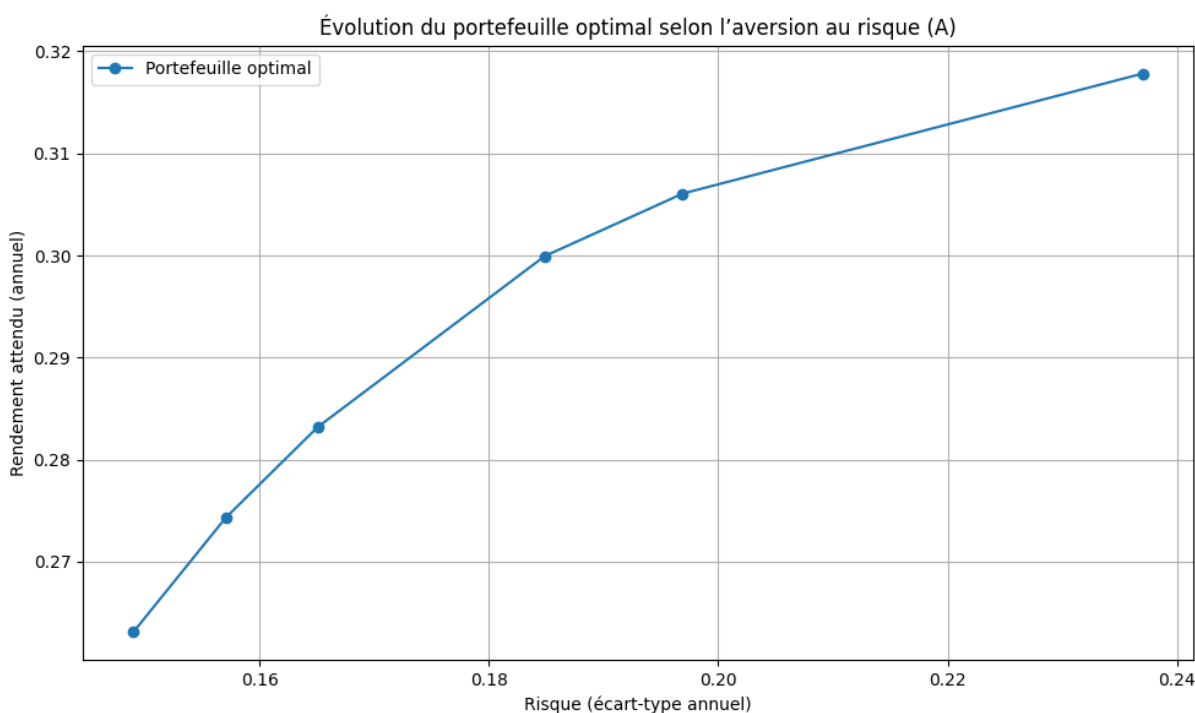


FIGURE 4.2 – Rendement vs. Risque selon l'aversion au risque A

- Le graphique suivant illustre l'évolution des poids alloués à chaque actif lorsque A augmente. Il permet de mettre en évidence la dynamique de diversification progressive du portefeuille.

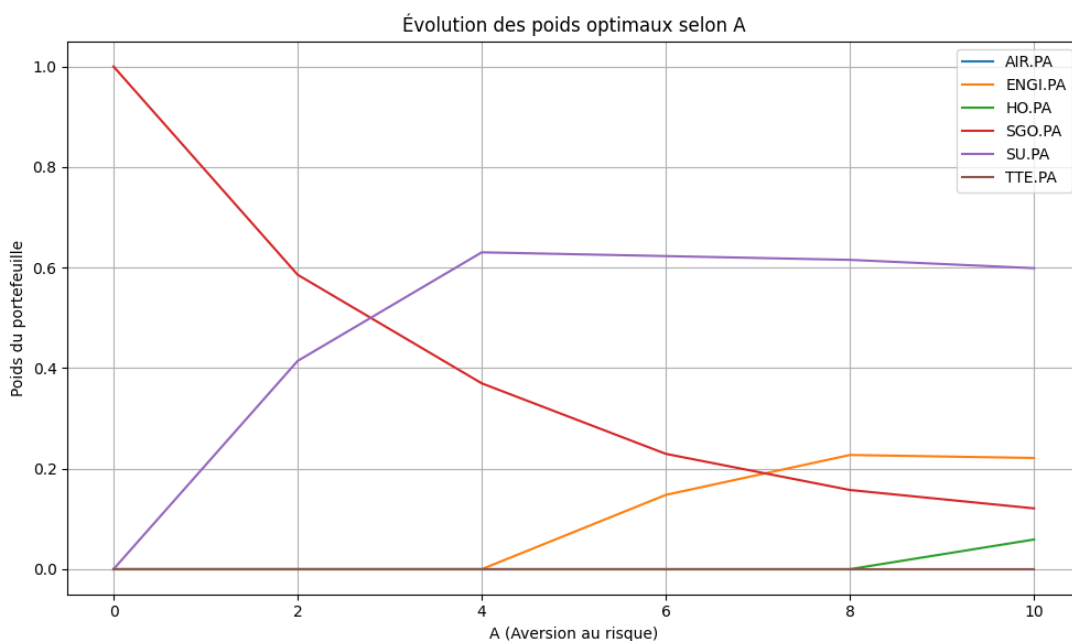


FIGURE 4.3 – Évolution des poids optimaux selon l'aversion au risque A

## Comparaison entre portefeuille optimisé et benchmark équipondéré

Dans le but d'évaluer la pertinence de l'optimisation de portefeuille via le modèle de Markowitz, nous avons comparé les résultats obtenus à ceux d'un portefeuille *équipondéré* servant de **benchmark neutre**. Ce dernier attribue un poids identique à chacun des actifs composant le portefeuille étudié.

### Benchmark (portefeuille équipondéré) :

- Poids : 16,67 % par actif
- Rendement attendu : 19,01 %
- Risque (écart-type annuel) : 13,20 %

Les portefeuilles optimisés sont obtenus pour différentes valeurs de l'aversion au risque  $A$ . Le tableau suivant présente, pour chaque valeur de  $A$ , le rendement attendu et le risque correspondant :

TABLE 4.6 – Comparaison des portefeuilles optimisés avec le benchmark équipondéré

A	Rendement (%)	Risque (%)	Supérieur au benchmark ?
0,00	31,78	23,70	Non plus risqué
2,00	30,61	19,69	Oui
4,00	29,99	18,49	Oui
6,00	28,32	16,51	Oui
8,00	27,43	15,71	Oui
10,00	26,31	14,90	Oui
<b>Benchmark</b>	19,01	13,20	—

### Analyse :

- Dès  $A = 2$ , tous les portefeuilles optimisés surpassent le portefeuille équipondéré.
- Pour  $A = 6$ , le rendement est de 28,32 % contre 19,01 % pour le benchmark, avec un risque légèrement plus élevé (16,51 % contre 13,20 %).
- À  $A = 10$ , le portefeuille présente un risque proche de celui du benchmark (14,90 %) mais un rendement de 26,31 %, soit une efficacité nettement accrue.

**Conclusion** : cette comparaison confirme que l'approche d'optimisation via le modèle de Markowitz permet d'obtenir des portefeuilles significativement plus efficaces que le benchmark équipondéré. En ajustant le paramètre d'aversion au risque, l'investisseur peut ainsi atteindre un rendement supérieur pour un risque comparable ou même inférieur.

## 4.3 Adaptation du modèle Markowitz à un cas bancaire

### 4.3.1 Description du portefeuille de crédits

L'optimisation de portefeuille, historiquement développée pour les actifs financiers cotés tels que les actions ou obligations, peut être étendue à la gestion d'un portefeuille de crédits bancaires.

Dans le présent travail, nous appliquons le modèle de Markowitz à un portefeuille constitué de

cinq catégories de crédits octroyés par l'agence El-Kseur de la banque BADR : le Crédit Bail (leasing), le Crédit Habitat Rural, le Crédit Équipement, le Crédit RFIG et le Crédit Dispositifs Aidés.

Chaque type de crédit est ici considéré comme un actif financier distinct au sein du portefeuille, caractérisé par sa durée d'échéance, son taux d'intérêt, son profil de remboursement (annuités, échéances spécifiques), ainsi que par un niveau de risque associé, notamment en lien avec l'incertitude sur les flux futurs.

Cette modélisation permet de traiter ces produits de manière analogue aux actifs classiques dans le cadre d'une approche d'optimisation quadratique, en vue de déterminer une allocation optimale tenant compte à la fois du rendement attendu et du risque global du portefeuille.

### 4.3.2 Fréquence et période Données utilisées

L'analyse des crédits est menée sur une base **annuelle**, en cohérence avec la fréquence des décaissements et des remboursements enregistrés au sein de la BADR Banque.

La période d'observation s'étend de **2019 à 2024**, soit cinq années consécutives. Ce choix repose sur la disponibilité et la fiabilité des données couvrant l'ensemble des types de crédits étudiés.

Bien que certaines catégories présentent des maturités supérieures à cinq ans (comme le crédit habitat rural ou les dispositifs aidés), les **remboursements sont modélisés comme échelonnés**, selon les échéances contractuelles spécifiques à chaque produit. Par exemple, les flux du crédit habitat rural s'étalent sur 10 ans, tandis que ceux du crédit RFIG sont concentrés sur une seule année.

Cette modélisation permet de calculer des rendements annuels réalistes sur la période 2019–2024, en tenant compte de la structure temporelle des flux. Le modèle de Markowitz est ainsi appliqué à partir d'un historique de cinq rendements annuels, permettant la construction de la matrice de variance-covariance et l'optimisation du portefeuille de crédits.

### 4.3.3 Modélisation mathématique du portefeuille crédit

Le modèle de Markowitz, initialement développé pour la gestion de portefeuilles financiers, repose sur le principe fondamental de la diversification des actifs afin de maximiser le rendement pour un niveau donné de risque, ou inversement de minimiser le risque pour un rendement espéré donné. Ce modèle repose principalement sur deux éléments statistiques :

- L'espérance de rendement de chaque actif ;
- La variance-covariance entre les rendements des actifs.

Dans le cadre de cette étude, nous avons adapté le modèle classique de Markowitz à un portefeuille composé non pas d'actifs financiers, mais de différentes catégories de crédits octroyés par la banque. Chaque type de crédit (*Crédit Bail*, *Habitat Rural*, *Équipement*, *RFIG* et *Dispositifs Aidés*) est considéré comme un actif du portefeuille.

Le rendement associé à chaque catégorie de crédit est défini comme le ratio entre les montants remboursés par les bénéficiaires et les montants octroyés. Ainsi, le portefeuille étudié peut être représenté comme une combinaison pondérée de ces différents types de crédits.

Cette adaptation du modèle vise à optimiser la répartition des engagements de la banque entre les différentes catégories de crédits en recherchant un compromis optimal entre le rendement global attendu et le risque mesuré par la volatilité des remboursements observés historiquement.

### 4.3.4 Formulation mathématique du problème

La version adaptée du problème de Markowitz se formule sous la forme d'un programme quadratique convexe (PQC), où l'objectif est de minimiser le risque global du portefeuille. Le risque est mesuré par la variance du rendement du portefeuille, calculée à partir de la matrice de variance-covariance des rendements des crédits.

Le problème d'optimisation s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \min_w \quad & -\mu^\top w + \frac{A}{2} w^\top \Sigma w \\ \text{sous contraintes} \quad & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\ & w_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

où :

- $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  représente les proportions allouées à chaque type de crédit ;
- $\mu$  est le vecteur des rendements moyens observés pour chaque type de crédit ;
- $\Sigma$  est la matrice de variance-covariance des rendements ;
- $A > 0$  est le paramètre d'aversion au risque ;
- $n$  est le nombre total de types de crédits considérés.

#### Explication du modèle

- La fonction objectif  $-\mu^\top w + \frac{A}{2} w^\top \Sigma w$  représente un compromis entre deux objectifs :
  - Maximiser le rendement espéré global du portefeuille ( $\mu^\top w$ ),
  - Minimiser le risque global mesuré par la variance ( $w^\top \Sigma w$ ).
 Le paramètre  $A > 0$  ajuste l'importance accordée au risque : plus  $A$  est élevé, plus l'optimisation privilégie un portefeuille prudent.
- La contrainte  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$  garantit que l'ensemble des ressources disponibles est entièrement distribué entre les différentes catégories de crédits (pas de sous-allocation ou de levier).
- Les contraintes  $w_i \geq 0$  imposent que chaque proportion soit positive ou nulle. Cela reflète le fait qu'on ne peut pas investir une proportion négative dans une catégorie de crédit (pas de vente à découvert), ce qui est cohérent avec la logique d'un portefeuille de crédits.

Ce programme quadratique est convexe, car la fonction objectif est strictement convexe lorsque la matrice  $\Sigma$  est définie positive. Les contraintes étant linéaires, la solution optimale existe et est unique. Elle peut être déterminée à l'aide d'algorithmes numériques d'optimisation convexes, tels que ceux implémentés en Python.

Cette modélisation fournit un outil mathématique rigoureux pour optimiser la gestion d'un portefeuille de crédits bancaires, en tenant compte des caractéristiques statistiques des différents produits offerts (rendement moyen, risque individuel et corrélation entre crédits). Elle permet en particulier de simuler différents profils d'investisseurs à travers la variation du paramètre  $A$ , et d'évaluer leur impact sur la structure optimale du portefeuille.

Ce programme quadratique convexe présente l'avantage d'avoir une unique solution optimale, grâce à la convexité de la fonction objectif et au caractère convexe des contraintes. Sa

résolution est réalisée à l'aide d'algorithmes d'optimisation numérique adaptés, tels que ceux implémentés en Python.

Cette modélisation fournit ainsi un cadre rigoureux pour appuyer les décisions stratégiques relatives à la gestion du portefeuille de crédits, en tenant compte des caractéristiques statistiques historiques des différents produits de crédit proposés par la banque.

## 4.4 Résolution numérique

### 4.4.1 Méthodologie d'optimisation utilisée

La résolution numérique du problème d'optimisation quadratique a été effectuée à l'aide de la méthode **SLSQP** (Sequential Least Squares Quadratic Programming), disponible dans la bibliothèque `scipy.optimize` de Python. Cette méthode est particulièrement adaptée à la résolution de programmes quadratiques convexes sous contraintes d'égalité et d'inégalité.

Pour les besoins de l'étude, nous avons utilisé l'approche par **fonction d'utilité quadratique**, intégrant explicitement le paramètre  $A$  représentant l'aversion au risque :

$$\min_w \left( \frac{A}{2} \cdot \text{Var}(R_p) - \mathbb{E}[R_p] \right) \quad (4.5)$$

Le portefeuille optimal a été déterminé pour différentes valeurs de  $A$ , afin d'observer l'impact du degré d'aversion au risque sur la composition du portefeuille optimal.

### 4.4.2 Données utilisées

Les calculs ont été réalisés à partir des rendements annuels moyens observés entre 2019 et 2024 pour les cinq catégories de crédits, ainsi que de leur matrice empirique de variance-covariance.

- **Rendements moyens annuels (%) :**

Type de crédit	Rendement annuel moyen
Crédit Bail	27,94 %
Habitat Rural	26,10 %
Équipement	35,19 %
RFIG	60,11 %
Dispositifs Aidés	17,81 %

- **Matrice de variance-covariance empirique (%) :**

VAR-COV	Crédit Bail	Habitat Rural	Équipement	RFIG	Dispositifs Aidés
<b>Crédit Bail</b>	0.1055	0.0513	0.1014	0.0804	0.0259
<b>Habitat Rural</b>	0.0513	0.1402	0.0520	0.0713	0.0135
<b>Équipement</b>	0.1014	0.0520	0.1139	0.1505	0.0277
<b>RFIG</b>	0.0804	0.0713	0.1505	0.3849	0.0388
<b>Dispositifs Aidés</b>	0.0259	0.0135	0.0277	0.0388	0.0113

### 4.4.3 Méthodologie de calcul des rendements et des risques

Le calcul des rendements annuels et du risque associé à chaque type de crédit a été réalisé à l'aide du logiciel **Microsoft Excel**, en s'appuyant sur les données historiques de remboursements collectées par l'agence BADR d'El-Kseur sur la période 2019–2024.

Cette approche a permis de tirer parti de la puissance des fonctions statistiques intégrées dans Excel pour assurer un traitement fiable et traçable des données.

#### 4.4.3.1 Calcul des rendements annuels

Pour chaque catégorie de crédit, les rendements annuels ont été calculés à partir des flux de remboursements observés à l'aide de la formule suivante :

$$R_{[0,T]} = \frac{P_T - P_0}{P_0} = \prod_{t=1}^T (1 + R_t) - 1 \quad (4.6)$$

où :

- $P_0$  représente le montant initial octroyé ;
- $P_T$  correspond au montant total remboursé à la fin de la période considérée ;
- $R_{[0,T]}$  désigne le rendement global observé sur la période  $[0, T]$ .

Cette formule permet d'apprécier l'évolution globale de la valeur du crédit du point de vue de la banque.

Les rendements annuels moyens ont ensuite été calculés à l'aide de la **moyenne géométrique**, exprimée par :

$$\bar{R} = \left( \prod_{t=1}^T (1 + R_t) \right)^{\frac{1}{T}} - 1 \quad (4.7)$$

où  $T$  correspond au nombre d'années de la période étudiée.

#### 4.4.3.2 Calcul des risques

Pour chaque catégorie de crédit, les risques ont été calculés à partir des rendements annuels calculés à l'aide de la formule suivante :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_t - \bar{R})^2} \quad (4.8)$$

La fonction `ECARTYPE.STANDARD()` d'Excel qui mesure ce risque.

#### 4.4.4 Algorithme de résolution

**Algorithme 3** : Optimisation de portefeuille selon l'aversion au risque (fonction d'utilité quadratique).

**Données :**

- ▷ Vecteur des rendements annuels moyens  $\mu$  ;
- ▷ Matrice de variance-covariance  $\Sigma$  ;
- ▷ Liste des types de crédits ;
- ▷ Valeurs d'aversion au risque  $A$  ;

**Résultat :**

- ▷ Poids optimaux des actifs pour chaque  $A$  ;
- ▷ Rendements et risques du portefeuille optimal ;
- ▷ Nombre d'itérations et la valeur de la fonction objectif ;

**1 Initialisation :**

- 2 ▷ Initialiser le vecteur des poids  $w_0 = [\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}]$  ;
- 3 ▷ Définir les contraintes du modèle :  $w_i \in [0, 1], \sum w_i = 1$  ;
- 4 ▷ Définir les bornes sur les poids :  $w_i \in [0, 1]$  ;

**5 pour**  $A \in \text{inspace}(0, 10, 5)$  **faire**

- 6 | ▷ En utilisant l'algorithme SLSQP, résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \min_w \quad & - \left( w^\top \mu - \frac{A}{2} w^\top \Sigma w \right) \\ \text{s.c.} \quad & \sum w_i = 1 \\ & 0 \leq w_i \leq 1, \quad \forall i. \end{aligned}$$

**si** *La solution optimale existe* **alors**

- 7 | ▷ Enregistrer le vecteur des poids  $w^*$  ;
- 8 | ▷ Enregistrer le rendement  $R = w^{*\top} \mu$  et le risque  $\sigma = \sqrt{w^{*\top} \Sigma w^*}$  ;
- 9 | ▷ Enregistrer la valeur de la fonction objectif et le nombre d'itérations ;

**10 sinon**

- 11 | ▷ Afficher le message d'erreur pour la valeur de  $A$  concernée ;

**12 fin**

**13 fin**

- 14 ▷ Tracer les graphiques suivants :

- Frontière efficiente "rendement-risque" (portefeuille optimal selon  $A$ ) ;
- Évolution des poids par type de crédit en fonction de  $A$  ;
- Nombre d'itérations nécessaires selon  $A$  ;
- Valeur finale de la fonction d'utilité négative selon  $A$  ;

#### 4.4.5 Implémentation et Analyse des Résultats

##### a. Évolution du portefeuille selon le paramètre d'aversion $A$

Dans cette étude, nous avons fait varier le paramètre d'aversion au risque  $A$  de 0 à 10, par incréments réguliers. Pour chaque valeur de  $A$ , la fonction objectif quadratique de Markowitz

est minimisée sous contraintes d'optimisation (positivité des poids et somme des poids égale à 1). La résolution est effectuée par la méthode SLSQP (*Sequential Least Squares Quadratic Programming*) via la bibliothèque `scipy.optimize`.

Le tableau suivant présente les poids optimaux obtenus, le rendement espéré  $\mu_p$ , le risque  $\sigma_p$ , ainsi que le nombre d'itérations nécessaires à la convergence.

A	Poids optimaux $w^*$	$\mu_p$	$\sigma_p$	Itérations
0.00	(0%, 0%, 0%, <b>100%</b> , 0%)	60,11%	62,04%	4
2.50	( <b>7,25%</b> , <b>11,75%</b> , <b>13,39%</b> , <b>38,68%</b> , <b>28,92%</b> )	38,21%	32,70%	8
5.00	(0%, <b>7,19%</b> , <b>0,73%</b> , <b>17,04%</b> , <b>75,05%</b> )	25,74%	17,91%	9
7.50	(0%, <b>5,01%</b> , 0%, <b>8,60%</b> , <b>86,39%</b> )	21,86%	13,84%	5
10.00	(0%, <b>3,80%</b> , 0%, <b>4,28%</b> , <b>91,92%</b> )	19,94%	12,10%	4

TABLE 4.7 – Poids optimaux, rendements espérés et risques associés pour différentes valeurs d'aversion au risque  $A$  (résultats obtenus via la méthode SLSQP)

**Analyse des résultats :** On observe que lorsque  $A = 0$ , le portefeuille optimal est intégralement investi dans le crédit le plus rentable (**RFIG**), offrant un rendement maximal de 60,11%, mais au prix d'un risque très élevé ( $\sigma_p = 62,04\%$ ).

À mesure que  $A$  augmente, traduisant une aversion croissante au risque, la composition du portefeuille se diversifie progressivement. La part consacrée au crédit **Dispositifs Aidés** devient majoritaire, car cette catégorie présente un bon compromis entre rendement et risque. Pour  $A = 10$ , le portefeuille est investi à plus de 91% dans cette catégorie, réduisant le risque à 12,10%, avec un rendement modéré de 19,94%.

Le nombre d'itérations nécessaires à la convergence reste faible (entre 4 et 9), ce qui confirme l'efficacité de l'algorithme SLSQP.

La courbe rendement-risque ( $\mu_p, \sigma_p$ ) permet de visualiser l'évolution de la performance du portefeuille en fonction du degré d'aversion au risque  $A$ .

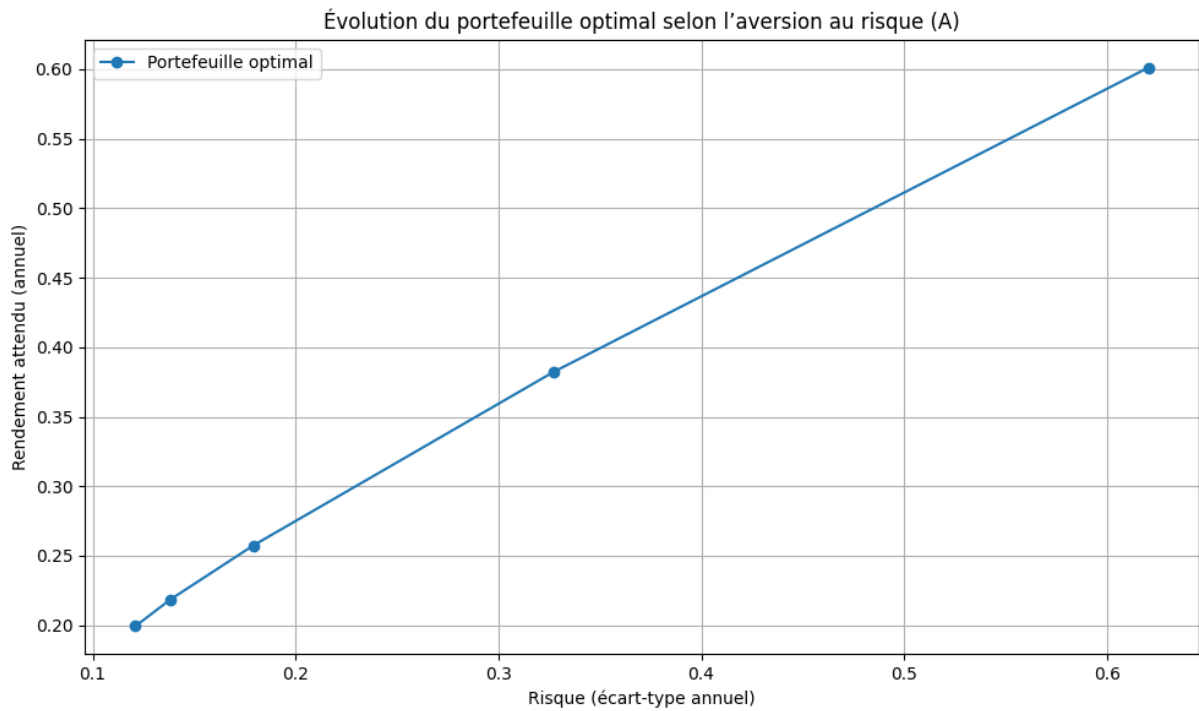


FIGURE 4.4 – Frontière rendement-risque pour différentes valeurs de  $A$

- Lorsque  $A$  est faible ( $A \approx 0$ ), l'optimisation privilégie un rendement élevé, au prix d'un niveau de risque important.
- Lorsque  $A$  augmente, le portefeuille devient progressivement plus conservateur : le rendement attendu diminue, mais le risque associé décroît également.

#### **b. Allocation optimale par type de crédit**

L'évolution des poids optimaux attribués à chaque type de crédit en fonction de l'aversion au risque est illustrée ci-dessous :

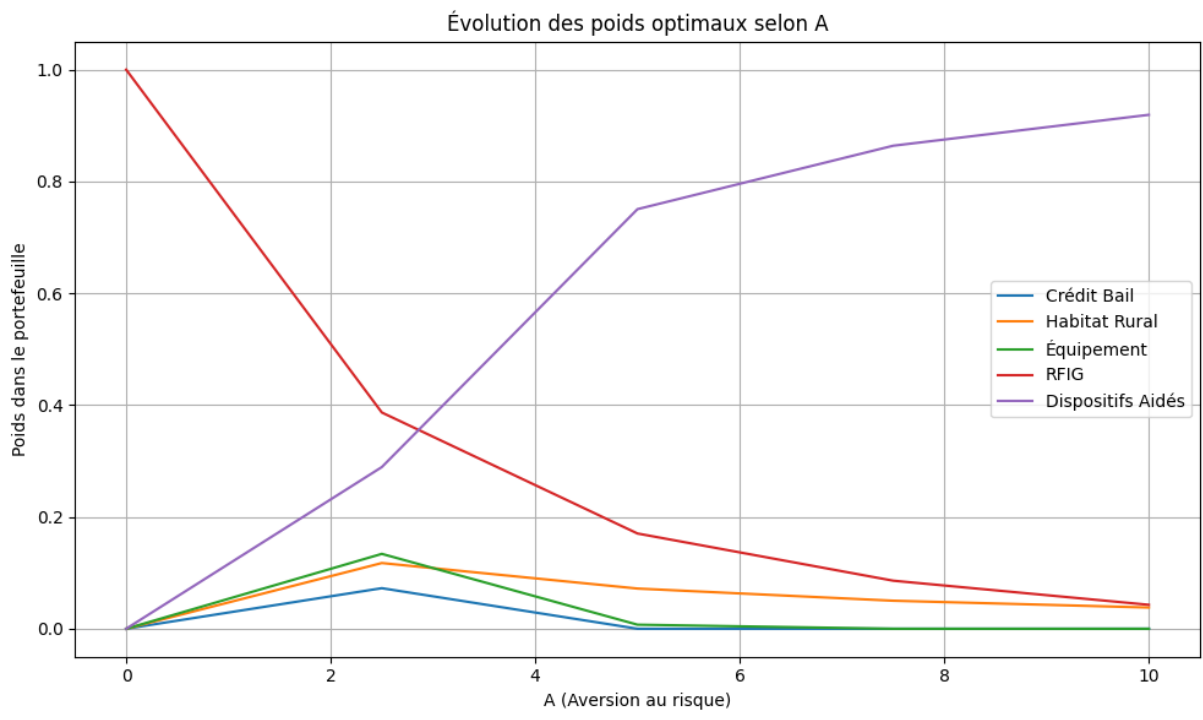


FIGURE 4.5 – Évolution des poids optimaux par type de crédit selon A

- Pour des valeurs faibles de A, les crédits les plus rémunérateurs (**RFIG, Équipement**) représentent la part dominante du portefeuille.
- Lorsque l’aversion au risque croît, le portefeuille se rééquilibre progressivement vers les crédits plus sûrs (**Dispositifs Aidés, Habitat Rural**).

#### 4.4.6 Analyse comparative entre le portefeuille réel et les portefeuilles optimisés

**Portefeuille réel de la BADR** Sur la base des données historiques observées sur la période 2020–2024, le portefeuille de crédits réel de la BADR se caractérise par une forte concentration sur les *Dispositifs Aidés* (environ 75 %).

TABLE 4.8 – Répartition réelle des crédits dans le portefeuille de la BADR (2019–2024)

Type de crédit	Poids dans le portefeuille (%)
Crédit Bail	6,05 %
Habitat Rural	4,68 %
Équipement	2,24 %
RFIG	12,16 %
Dispositifs Aidés	74,86 %

Ce portefeuille présente un bon équilibre entre rentabilité et risque :

- **Rendement attendu** : 24,34 %

- **Risque (écart-type) :** 17,59 %

Cette structure reflète une stratégie prudente privilégiant la stabilité et l'impact socio-économique, avec un rendement important pour un risque modéré.

**Résultats des portefeuilles optimisés** L'optimisation a été réalisée selon le modèle de Markowitz pour différents niveaux d'aversion au risque  $A \in \{0, 2.5, 5, 7.5, 10\}$ . Le tableau suivant présente, pour chaque cas, le rendement espéré, le risque associé et la répartition optimale entre les cinq types de crédits.

TABLE 4.9 – Portefeuilles optimisés selon différents niveaux d'aversion au risque

A	Rend. (%)	Risque (%)	Crédit Bail	Habitat Rural	Équipement	RFIG	Disp. Aidés
0.0	60.11	62.05	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000
2.5	36.20	28.62	0.0021	0.0523	0.0080	0.2117	0.7259
5.0	25.74	17.91	0.0000	0.0719	0.0073	0.1704	0.7505
7.5	21.25	13.88	0.0000	0.0815	0.0063	0.1312	0.7809
10.0	19.09	12.01	0.0000	0.0883	0.0054	0.1035	0.8028

#### Interprétation des résultats

- **Pour  $A = 0$  :** l'investisseur est neutre au risque. Le modèle affecte l'intégralité du portefeuille aux crédits RFIG, les plus rentables. Cela conduit toutefois à un niveau de risque extrêmement élevé (62 %), rendant ce portefeuille peu réaliste pour une banque.
- **Pour  $A = 2.5$  :** le portefeuille est encore orienté vers les crédits RFIG (21 %), mais intègre une part importante de *Dispositifs Aidés* (72 %). Le rendement augmente par rapport au portefeuille réel (36,20 %), mais le risque reste bien supérieur (28,62 %).
- **Pour  $A = 5$  :** ce portefeuille représente le meilleur compromis trouvé par l'optimisation. Il affiche un rendement supérieur au portefeuille réel (25,74 %) avec un risque légèrement plus élevé qui est considéré presque le même (17,91 %). La structure reste dominée par les *Dispositifs Aidés* (75 %) et les crédits RFIG (17 %).
- **Pour  $A = 7.5$  et  $A = 10$  :** l'optimisation devient plus conservatrice. Le portefeuille réduit progressivement son exposition aux crédits risqués. Si le risque diminue (jusqu'à 12 %), le rendement attendu diminue aussi fortement (19,09 % pour  $A = 10$ ). Dans ces cas, le portefeuille réel demeure plus performant.

L'analyse comparative met en évidence que le portefeuille réel de la BADR est déjà bien positionné, offrant un bon compromis entre rendement et risque. Toutefois, pour une aversion au risque modérée ( $A = 5$ ), l'optimisation par le modèle de Markowitz permet de dégager une solution présentant un rendement supérieur (25,74 % contre 24,34 %) pour un niveau de risque quasiment identique (17,91 % contre 17,59 %). Ce résultat met en évidence la capacité de l'approche optimisée à améliorer la performance du portefeuille crédit.

Cependant, l'optimisation reste un outil stratégique pour tester des scénarios alternatifs, simuler l'impact de différentes politiques de crédit et accompagner une gestion dynamique des ressources.

## Conclusion

L'étude menée dans ce chapitre a permis de démontrer la pertinence et la flexibilité du modèle de Markowitz, tant dans un contexte boursier classique que dans le cadre innovant d'une gestion de portefeuille de crédits bancaires. L'optimisation réalisée a mis en évidence le compromis entre rendement attendu et risque global, modulé par le degré d'aversion au risque de l'investisseur.

L'approche par diversification progressive des crédits a montré son efficacité pour réduire l'exposition globale au risque, tout en maintenant un niveau de rendement satisfaisant.

Malgré certaines limites liées à la qualité et à la disponibilité des données historiques, les résultats obtenus ouvrent des perspectives intéressantes pour une gestion plus rationnelle et quantitative des crédits bancaires. Ces travaux constituent ainsi une base solide pour approfondir l'intégration des techniques d'optimisation dans la prise de décision stratégique au sein des institutions financières.

# Conclusion générale et perspectives futures

Ce mémoire avait pour objectif principal d'étudier la possibilité et les modalités d'adaptation du modèle de Markowitz à la gestion d'un portefeuille de crédits bancaires, en prenant pour cadre d'analyse la Banque d'Agriculture et de Développement Rural (BADR). Après avoir exposé les fondements théoriques de l'optimisation convexe et présenté les principes du modèle moyenne-variance, nous avons appliqué ce cadre méthodologique à deux cas distincts : un portefeuille boursier classique et un portefeuille de crédits caractérisé par une forte hétérogénéité des durées, des niveaux de risque et des rendements.

Les résultats ont montré que, bien que les différences structurelles entre les actifs cotés et les produits de crédit bancaire soient importantes, le modèle de Markowitz peut être adapté de manière pertinente aux portefeuilles de crédits. À condition de redéfinir la notion de rendement et d'ajuster la mesure du risque, cette transposition permet de construire des portefeuilles optimaux répondant à différents profils d'aversion au risque.

Les développements théoriques et les expérimentations numériques réalisés ont permis de répondre à la question centrale ayant guidé ce travail : le modèle de Markowitz peut-il être adapté à la gestion des portefeuilles de crédits bancaires et comment concevoir cette adaptation ? Ce mémoire confirme la faisabilité et la pertinence d'une telle adaptation en tant qu'outil d'aide à la décision stratégique pour les institutions financières.

Les implications pratiques de ce travail sont multiples, notamment pour les services de gestion de portefeuille, de crédit ou de risque. L'approche proposée offre :

- une identification rigoureuse de la combinaison optimale des types de crédits en fonction des objectifs de rentabilité et de tolérance au risque ;
- un soutien aux décisions stratégiques en matière de financement et de diversification ;
- une intégration des outils d'optimisation mathématique dans les processus de décision ;
- une allocation plus rationnelle et plus efficiente du capital.

Sur le plan théorique, ce travail contribue à étendre le champ d'application du modèle moyenne-variance aux actifs non cotés, en particulier aux crédits bancaires. L'utilisation des outils d'optimisation convexe et la validation des conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) renforcent la robustesse mathématique de l'approche et illustrent la puissance des méthodes de programmation quadratique dans ce contexte.

Comme toute étude scientifique, ce travail présente des limites qu'il convient de souligner :

- Les données utilisées étaient purement historiques et ne prenaient pas en compte les

chocs exogènes pouvant affecter l'activité de l'entreprise. Par ailleurs, les scénarios macroéconomiques considérés étaient limités. Cette situation peut conduire à des erreurs significatives dans les résultats des simulations.

- Le facteur de risque de défaut a été approché de manière indirecte, sans intégration de modèles de scoring ou d'évaluation de crédit n'ont pas été intégrés au modèle
- certaines contraintes institutionnelles ont été simplifiées pour garantir la solvabilité du problème mathématique ;
- Ce modèle repose sur l'hypothèse de rationalité parfaite et d'information complète, des conditions rarement réunies dans la réalité, en particulier dans un environnement aussi dynamique.

Ainsi, cette étude met en lumière la pertinence et la robustesse de l'approche moyenne-variance appliquée à la gestion des portefeuilles de crédits. Elle démontre que les concepts issus de la théorie moderne du portefeuille peuvent être adaptés aux problématiques concrètes des établissements financiers, offrant ainsi un cadre analytique rigoureux et opérationnel pour améliorer la performance globale des portefeuilles dans un environnement en constante évolution.

## Perspectives futures

Les perspectives offertes par ce travail sont nombreuses. Elles incluent notamment :

- l'introduction d'éléments stochastiques dans la modélisation des flux de remboursement ;
- l'intégration de contraintes supplémentaires liées à la liquidité, aux normes prudentielles ou à la réglementation bancaire ;
- le recours à des techniques d'intelligence artificielle pour affiner l'évaluation du risque crédit et enrichir la prise de décision.

# Bibliographie

- [1] ABADIE, J. La génération des contraintes qualifiées dans les problèmes de programmation non linéaire. In *Méthodes numériques dans la programmation non linéaire*, J. Abadie, Ed. Dunod, Paris, 1967, pp. 11–27.
- [2] BAZARAA, M. S., SHERALI, H. D., AND SHETTY, C. M. *Nonlinear Programming : Theory and Algorithms*, 3rd ed. John Wiley & Sons, 2006.
- [3] BIBI, M. O. Techniques numériques d’optimisation. cours de master 2 en mathématiques financières, 2019. Cours de Master 2.
- [4] BLAZY, R. Modifications de comportement précédant.
- [5] BOGGS, P. T., AND TOLLE, J. W. Sequential quadratic programming. *Acta Numerica* (1995), 1–51. National Institute of Standards and Technology.
- [6] BOYD, S. P., AND VANDENBERGHE, L. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [7] BRAHMI, B. Optimisation d’un portefeuille financier. cours de master 1 en mathématiques financières, 2019. Document pédagogique, non publié.
- [8] BREALEY, R. A., MYERS, S. C., AND ALLEN, F. *Principles of corporate finance*. McGraw-Hill Education, 2011.
- [9] CHEURFA, F. *Analyse de sensibilité et quantification de l’incertitude épistémique dans les modèles financiers*. Thèse de doctorat, Université de Béjaïa, 2021.
- [10] CIARLET, P., AND ZIDANI, H. Ao101 2010-2011 optimisation quadratique.
- [11] CONSTANTINIDES, G. M., AND MALLIARIS, A. G. Portfolio theory. *Handbooks in operations research and management science* 9 (1995), 1–30.
- [12] CORHAY, A., AND MBANGALA, A. M. *Fondements de gestion financière : manuel et applications*. Editions du CEFAL, 2008.
- [13] COSSET, J.-C., AND LAMPRON, L. Rentabilité, risque et diversification internationale des banques à charte canadiennes. *L’Actualité économique* 58, 4 (1982), 477–492.
- [14] ELTON, E. J., GRUBER, M. J., BROWN, S. J., AND GOETZMANN, W. N. *Modern portfolio theory and investment analysis*. John Wiley & Sons, 2009.
- [15] ENGELS, M. Portfolio optimization : Beyond markowitz. *A master thesis in University of Leiden* (2004).
- [16] FABOZZI, F. J., GUPTA, F., AND MARKOWITZ, H. M. The legacy of modern portfolio theory. *The journal of investing* 11, 3 (2002), 7–22.
- [17] FARBER, A., LAURENT, M.-P., OOSTERLINCK, K., AND PIROTTE, H. Finance 2e édition.

- [18] GABASOV, R., KIRILLOVA, F. M., KOSTYUKOVA, O. I., AND RAKETSKY, V. M. *Constructive methods of optimization, volume 4 : Convex Problems*. University Press, Minsk, 1987.
- [19] GABASOV, R., KIRILLOVA, F. M., AND RAKETSKY, V. M. On methods for solving the general problem of convex quadratic programming. *Soviet Math. Dokl* 23 (1981), 653–657.
- [20] GILLET, R., AND HÜBNER, G. *La gestion de portefeuille : instruments, stratégie et performance*. De Boeck Supérieur, 2019.
- [21] GILLET, R., AND HÜBNER, G. *La gestion de portefeuille : Instruments, stratégie et performance*, 3 ed. De Boeck Supérieur, Bruxelles, 2019.
- [22] HUNTER, J. D., AND THE MATPLOTLIB DEVELOPMENT TEAM. *Matplotlib Documentation*. matplotlib.org, 2023. Stable version, PDF documentation.
- [23] KRAFT, D. A software package for sequential quadratic programming. *Forschungsbericht-Deutsche Forschungs- und Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt* (1988).
- [24] LAOPODIS, N. T. *Understanding investments : Theories and strategies*. Routledge, 2020.
- [25] MARKOWITZ, H. Modern portfolio theory. *Journal of Finance* 7, 11 (1952), 77–91.
- [26] MARKOWITZ, H. Portfolio selection. *The Journal of Finance* 7, 1 (1952), 77–91.
- [27] MARKOWITZ, H. The optimization of a quadratic function subject to linear constraints. *Naval Research Logistics Quarterly* 3, 1-2 (1956), 111–133.
- [28] MARKOWITZ, H. *Harry Markowitz : selected works*, vol. 1. World Scientific, 2009.
- [29] MINOUX, M. *Programmation mathématique : théorie et algorithmes*. Tec & Doc - Lavoisier, 2007.
- [30] OLIPHANT, T. E., ET AL. *NumPy User Guide*. NumPy Developers, 2020. Version 1.18, PDF documentation.
- [31] PONCET, P., AND PORTAIT, R. La théorie moderne du portefeuille : théorie et applications. *STDI Frame Maker 4986\_ book 795* (2009).
- [32] RUBINSTEIN, M. Markowitz’s” portfolio selection” : A fifty-year retrospective. *The Journal of finance* 57, 3 (2002), 1041–1045.
- [33] SCHITTKOWSKI, K. A software package for sequential quadratic programming. Tech. Rep. FB 88-28, DFVLR – Institut für Dynamik der Flugsysteme, Oberpfaffenhofen, Allemagne, 1988.
- [34] SCHMIDT, M. Deriving the gradient and hessian of linear and quadratic functions in matrix notation. *University of British Columbia, Vancouver, Tech. Rep* (2019).
- [35] SCHULZE-PILLOT, R. Lecture notes on quadratic forms and their arithmetic. *arXiv preprint arXiv :2008.12847* (2020).
- [36] SHARPE, W. F. Mutual fund performance. *The Journal of business* 39, 1 (1966), 119–138.
- [37] SIMON, C. P., BLUME, L., ET AL. *Mathematics for economists*, vol. 7. Norton New York, 1994.
- [38] SORBONNE UNIVERSITÉ. Cours master 1, analyse convexe. Année universitaire 2017–2018, 2017.
- [39] TEAM, T. P. D. *Pandas Documentation*. pandas.pydata.org, 2022. Version 1.4.4, PDF documentation.

- 
- [40] VASILE, B., AND LUMINIȚA, R. Financial balance and loans of the shareholders to the company. *THE ANNALS OF THE UNIVERSITY OF ORADEA* (2012), 880.
- [41] VIRTANEN, P., ET AL. *SciPy Reference Guide*. SciPy Developers, 2022. Version 1.8.0, includes SLSQP method in `scipy.optimize`.
- [42] WARWICK, D. M. *A study of a positive definite quadratic form over the integers*. PhD thesis, Lehigh University, 1980.
- [43] WILMOTT, P., HOWISON, S., AND DEWYNNE, J. *The mathematics of financial derivatives : a student introduction*. Cambridge university press, 1995.
- [44] WRIGHT, S. J., AND NOCEDAL, J. *Numerical Optimization*, 2nd ed. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer, New York, 2006.
- [45] ZHANG, R. *Apprentissage statistique en gestion de portefeuille*. PhD thesis, Télécom ParisTech, 2014.

## Résumé

Dans un contexte où les institutions financières sont confrontées à des exigences croissantes de performance et de gestion du risque, ce mémoire explore l'adaptation du modèle moyenne-variance de Markowitz à la gestion des portefeuilles de crédits bancaires. L'objectif principal est de proposer une méthodologie quantitative permettant d'optimiser la répartition des crédits au sein d'une banque, tout en équilibrant rendement et risque.

La démarche repose sur une double approche : d'abord, une étude théorique des fondements de l'optimisation convexe et du modèle de Markowitz ; ensuite, une mise en œuvre empirique à travers l'analyse d'un portefeuille d'actions françaises cotées (CAC40), puis son adaptation à un portefeuille de crédits de la banque BADR. Les données ont été traitées via le langage Python, en utilisant l'algorithme SLSQP pour résoudre les problèmes quadratiques.

Les résultats confirment la pertinence de cette transposition : le modèle permet une allocation efficiente des ressources et une réduction mesurable du risque, avec une flexibilité selon le profil d'aversion de l'investisseur. Sur le plan théorique, l'étude enrichit la littérature en explorant l'extension du modèle à des actifs non cotés. Toutefois, certaines limites sont à noter, notamment la sensibilité aux données historiques et aux hypothèses de normalité.

**Mots-clés :** Modèle de Markowitz, optimisation convexe, programmation quadratique, portefeuille de crédits, risque, BADR, .

## Abstract

In an increasingly complex financial environment, this thesis investigates the adaptation of the Markowitz mean-variance model to the management of bank credit portfolios. The primary objective is to develop a quantitative framework that optimizes credit allocation while balancing return and risk.

The methodology combines a theoretical foundation in convex optimization and Markowitz theory with empirical implementation. First, the model is applied to a portfolio of CAC40-listed French stocks. Then, it is adapted to a real credit portfolio from the BADR bank. Data processing and numerical resolution are performed using Python and the SLSQP algorithm.

Results demonstrate the model's effectiveness in achieving efficient credit distribution and measurable risk reduction, with flexibility across different investor risk profiles. The study also contributes to the theoretical literature by extending mean-variance optimization to non-traded assets. However, limitations include sensitivity to historical data and normality assumptions.

**Keywords:** Markowitz model, convex optimization, credit portfolio, risk, BADR, quadratic programming.