

**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR**  
**ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE ABDERRAHMANE MIRA BEJAIA**  
**FACULTÉ DE LA TECHNOLOGIE**  
**DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE**

MEMOIRE

PRÉSENTÉ POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME DE  
**MASTER**

FILIÈRE : GÉNIE MÉCANIQUE

SPÉCIALITÉ : ENERGÉTIQUE

PAR :

**BELMIHOUB ZOHIR**

**MEKHNACHE RIADH**

## **Thème**

---

**Effet de la dispersion thermique dans un milieu poreux non  
Darcéen en convection mixte et de masse simultanée**

---

Soutenu le 21/06/2017 devant le jury composé de:

Mr.	BENSLIMANE	Président
Mr.	ALI AGHA	Rapporteur
Mr.	SAHI	Examineur

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2016-2017

# Remerciements

*Nous tenons tout d'abord à remercier le Bon Dieu qui nous a donné la santé et le courage d'accomplir ce modeste travail.*

*Nos remerciements sont adressés également à nos chers parents, pour leur amour, leurs sacrifices et leur patience.*

*Nous tenons à remercier vivement Mr **ALI AGHA Hamza**, pour nous avoir honorés par son encadrement, pour sa disponibilité, ses orientations, ses précieux conseils et ses encouragements qui nous ont permis de mener à bien ce travail.*

*Nous tenons à exprimer notre gratitude aux membres de jury pour avoir accepté de juger ce travail.*

*Un énorme merci à nos familles et amis pour leurs éternels soutiens et la confiance qu'ils ont en nos capacités.*

*Enfin, à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce modeste travail trouvent ici l'expression de notre sincère gratitude et nos remerciements les plus sincères.*

# *Dédicace*

*Je dédie ce modeste travail*

*A ma très chère mère et mon très cher Père*

*A mon très cher oncle BELMIHOUB Mohamed pour son soutien et ses orientations, ses précieux conseils et ses encouragements qui m'ont permis de mener à bien ma vie et mon projet d'étude*

*Ainsi qu'à mes chers frères, mes chères sœurs, surtout mon petit frère  
Redouan*

*A mon binôme Riadh pour sa persévérance et son attachement et surtout pour sa patience.*

*A mes amis O. Yasmina et BENMANSOUR Khodir pour leurs encouragements et leur attachement et surtout pour leur patience et leur disponibilité et leur soutien dans les moments les plus difficiles de ma vie.*

*A ceux qui m'ont toujours encouragé pour que je réussisse dans mes études*

*A mes copains de chambre MIMOUCHE Nadir et FARHAT Idir et  
BENCHERIF Kherdinde qui ont été passionnés avec moi*

*A ceux qui ont veillé pour mon bien-être*

*A ceux que j'aime et je respecte infiniment*

*Le jour est venu pour leur dire merci...*

*A tous mes amis, qui ont toujours été présents pour moi.*

*A toute la promotion énergétique 2017.*

*BELMIHOUB Zohir*

# *Dédicace*

*Je dédie ce modeste travail*

*A ma très chère mère et mon très cher Père*

*A ma très chère fiancée Imen*

*À mon binôme Zohir pour son attachement et surtout pour Sa Patience.*

*A ceux qui m'ont toujours encouragé pour que je réussisse dans mes études*

*A ceux qui ont veillé pour mon bien-être*

*A ceux qui m'ont soutenu dans les moments les plus difficiles de ma vie*

*A ceux que j'aime et je respecte infiniment*

*Le jour est venu pour leur dire merci...*

*Ainsi qu'à mes chers frères, mes chères sœurs*

*A tous mes amis, qui ont toujours été présents pour moi.*

*A toute la promotion énergétique 2017.*

*MEKHNACHE Riadh*

## SOMMAIRE

Nomenclature.....	i
Liste des figures.....	iv
Liste des tableaux.....	v
Introduction générale.....	1

### Chapitre I :Généralités milieux poreux et nanofluides

Généralités	
I.1.1 Introduction.....	3
I.1.2 Définition du milieu poreux.....	3
I.1.3 Différents pores.....	5
I.1.4 Propriétés du milieu poreux.....	5
I.4-1 La porosité.....	6
I.4-2 Perméabilité.....	7
I.1.5 Modèle d'écoulement en milieux poreux.....	10
I.1.5.1 Loi de Darcy.....	10
I.1.5.2 Loi de Darcy- Forchheimer.....	11
I.1.5.3 Modèle de Brinkman.....	12
I.1.5.4 modèle générale.....	12
I.1.6. Transfert thermique dans un milieu poreux.....	13
I.1.7 Dispersion thermique dans un milieu poreux.....	14
I.1.7.1 Dispersion thermique.....	14
I.1.7.1.1 Approches de la dispersion thermique.....	14
I.2. Introduction.....	16
I.2.2 Définition.....	16
I.2.3 Types de nanoparticules.....	17
I.2.4 Propriétés thermo physiques des nanofluides.....	17
I.2.4.1 Conductivité thermique.....	17
I.2.4.2 Viscosité dynamique des nanofluides.....	18
I.2.4.3. Chaleur spécifique.....	19
I.2.4.4. Masse volumique.....	20
I.2.5. Modèle de Buongiorno.....	21
I.2.5.1. Diffusion Brownienne.....	21
I.2.5.2. Thermophorèse.....	22
I.2.6. Application des nanofluides dans l'industrie.....	22
I.2.6 CONCLUSION.....	23

### Chapitre II :Convection mixte et synthèse Bibliographie

II .1.Définition de la convection .....	24
II.2.Formulation générale.....	25
II.3.Convection mixte externe le long d'une paroi plane verticale à température uniforme .....	25
II.4.Couche limite dynamique, thermique et massique.....	26
II.5.Synthèse bibliographique.....	28
conclusion.....	35

### **Chapitre III :Position du problème**

III.1 Introduction.....	36
III. 1. Description du problème.....	36
III.2.Hypothèses simplificatrice .....	37
III.3.Equations de conservation dimensionnelles .....	37
III.4. Condition aux limites dimensionnelles.....	39
III.5.Détermination du nombre de Nusselt et Sherwood.....	40
Conclusion.....	41

### **ChapitreIV :Discussion des résultats**

Introduction.....	42
IV.1. Logiciel utilisé .....	42
IV.2.Méthode numérique.....	43
IV.3 Validation du programme.....	44
IV.4 Résultats et discussion.....	45
IV.4.1 Profil de vitesse adimensionnel.....	45
IV.4.2 Profil de température adimensionnelle .....	47
IV.4.3 Profil de concentration adimensionnelle .....	49
IV.4.4 Profil de fraction volumique adimensionnelle .....	51
IV.5 Variations du taux local de transfert de chaleur $Nu_x$ .....	52
IV.6 Variations du taux local de transfert de masse $Sh_x$ et $Sh'_x$ .....	55
Conclusion.....	57
Conclusion générale.....	58

# Nomenclature

mosymboles	définition	Unités (SI)
A	section du milieu poreux	$m^2$
C	Concentration	$mol.m^{-3}$
$C_P$	Chaleur massique à pression constante	$J kg^{-1}K^{-1}$
$C_f$	Coefficient de Forchheimer	-
d	Diamètre des pores	m
Da	Nombre de darcy	-
$\bar{D}$	Tenseur de dispersion thermique	-
D	coefficient de diffusion binaire	$m^2.s^{-1}$
$D_B$	coefficient de diffusion Brownienne	$m^2.s^{-1}$
$D_T$	coefficient de diffusion thermophorétique	$m^2.s^{-1}$
e	l'indice du vide	-
f	Fraction volumique adimensionnelle	-
Fo	paramètre de Forchheimer	-
g	Accélération de gravité	$m.s^{-2}$
h	distance entre les particules	m
Gr	Nombre de Grashof	-
K	Perméabilité	$m^2$
L	La longueur	m
Le	Nombre de Lewis	-
Lep	nombre de Lewis pour les nanoparticules	-
m	masse	kg
$M_T$	masse totale du matériau	kg
Nb	Paramètre d'un mouvement brownien	-
Nc	taux de flottabilité régulière	-
Nu	Nombre de Nusselt	-
Nr	taux de flottabilité	-
p	Pression	Pa
$Pe_x$	Nombre de pécelet	-
Pr	nombre de Prandtl	-
$q_w$	flux de chaleur de la paroi	$W.m^{-1}$
$q'_w$	flux massique à la surface	$W.m^{-1}$
$q''_w$	flux massique de nanoparticules surfacique	$W.m^{-1}$
R	coefficient de perméabilité	-

$Ra_x$	Nombre de Rayleigh	-
$Re$	Nombre de Reynolds	-
$Sh_x$	Nombre Sherwood	-
$Sh'_x$	Nombre de Sherwood local de nanofluide,	-
$S$	Vitesse adimensionnelle	-
$T$	Température	K
$T_w$	Température à paroi	K
$T_\infty$	Température du fluide à l'infini.	K
$U$	norme de la vitesse de pore	$m \cdot s^{-1}$
$U_D$	Vitesse Darce	$m \cdot s^{-1}$
$V_c$	volume de l'échantillon	$m^3$
$V$	volume	$m^3$
$V$	vitesse	$m \cdot s^{-1}$
$u_x u_y$	Composantes de la vitesse dimensionnelle selon x	$m \cdot s^{-1}$
$v_x v_y$	Composantes de la vitesse dimensionnelle selon y	$m \cdot s^{-1}$
$x, y$	Coordonnées cartésiennes	-

<b>Symboles grecs</b>	<b>définition</b>	<b>Unités (SI)</b>
$k$	Conductivité thermique	$W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
$k_m$	conductivité thermique effective du milieu poreux	$W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
$\varepsilon$	porosité	-
$\mu$	Viscosité dynamique	$kg \cdot m^{-1} s^{-1}$
$\nu$	Viscosité cinématique	$(m^2/s)$
$\rho$	Masse volumique	$kg \cdot m^{-3}$
$(\rho c)_{fb}$	capacité thermique de fluide de base	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$
$(\rho c)_{np}$	capacité thermique effective de nanoparticule	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$
$\sigma$	Densité	-
$\alpha_m$	Diffusivité thermique de milieu poreux,	$(m^2/s)$
$\beta$	Coefficient d'expansion	$K^{-1}$



$\eta$	Variable de similitude	-
$\varphi$	fraction volumique	-
$\gamma$	Concentration adimensionnelle	-
$\theta$	Température adimensionnelle,	-
$\lambda$	paramètre convectif	-
$\xi$	coefficient de dispersion thermique	-
$\sigma_b$	densité globale	-
$\Psi$	Fonction de courant	(m <sup>2</sup> /s)
$\sigma_f$	Densité globale du fluide	-
$\delta$	symbole de Kronecker	-
$\beta_T, \beta_C$	Coefficient d'expansion thermique	K <sup>-1</sup>
$\vec{\nabla}P$	Gradient de pression	-
$\Delta P$	Différence de pression	Pa
$\Delta T$	Différence de température	K

<b>Indices</b>	<b>Définition</b>
d	diamètre
f	Fluide
p	poreux
s	solide
eff	Effective
w	paroi
fil	filtration
fb	Fluide de base
np	nanoparticule
nf	nanofluide

## Liste de figures

Figure I.1 Représentation d'un milieu poreux naturel .....	4
Figure I.2 Microphotographies de milieux poreux .....	5
Figure I.3 Schéma illustrant les différents pores .....	5
Figure I.4 Les deux types de porosité .....	6
Figure I.5 Arrangements réguliers de sphères de même diamètre avec la porosité associée.....	7
Figure I.6 Exemple de géométrie de KOZENY-KARMAN.....	9
Figure II.1 Convection mixte sur une plaque verticale .....	26
Figure II.2 Visualisation d'un écoulement de convection libre ; plaque plus chaude que le fluide.....	27
Figure II.3 Profils de vitesse dans un écoulement de convection libre ; $d(x)$ épaisseur de couche limite; $U(d) = 0,01U_m$ .....	28
Figure II.4 Couche limite thermique en convection libre : profil de température et profil adimensionné .....	28
Figure II.5 Schéma d'une couche poreuse bidimensionnelle soumise à la chaleur uniforme et aux flux de masse dans la direction horizontale .....	30
Figure II.6 Modèle de débit et système de coordonnées physiques de Hady et al .....	32
Figure II.7. Modèle physique et système de coordonnées de Rana et al.....	32
Figure II.8 Schéma d'un flux de fluide dans un canal bidimensionnel partiellement rempli avec le matériel poreux.....	33
Figure II.9 Schéma de principe du problème à l'étude avec (a) le flux chaud et poreux sur le mur intérieur, (b) du flux chaud et poreux sur le mur externe .....	33
Figure II.10. Surface verticale dans un milieu poreux saturé d'un fluide contenant du soluté et avec des nanoparticules en suspension, Khan et Aziz.....	34
Figure III.1 Géométrie du problème.....	36
Figure IV.1. Variation de profils de vitesse avec $\eta$ , pour $(Nb, \lambda)$ .....	45
Figure. IV.2 : Variation de profils de vitesse avec $\eta$ , pour $(Fo, \lambda)$ .....	46

Figure. IV.3: effet de $Nt$ et $\xi$ sur la température adimensionnelle pour $(Nt, \xi)$ .....	47
Figure. IV.4 : effet de $Fo$ et $\lambda$ sur la température adimensionnelle pour $(\lambda, Fo)$ .....	48
Figure IV.5: Effet de $Le$ et $\lambda$ sur les profils de concentration.....	49
Figure IV.6: Effet de $Le$ et $Nc$ sur les profils de concentration.....	50
Figure IV.7 : Profils de fraction volumique avec $\eta$ , pour $(Fo, Le_p)$ .....	51
Figure IV.8: Profils de fraction volumique avec $\eta$ , pour $(Le_p, \lambda)$ .....	52
Figure IV.9 : Variations de $(Nu_x/Pe^{0.5})$ avec $Fo$ et $Nt$ .....	53
Figure IV.10 – Variations de $(Nu_x/Pe^{0.5})$ avec $\xi$ et $Nb$ .....	54
Figure IV.11 : Variations de $(Nu_x/Pe^{0.5})$ avec $\lambda$ et $Nc$ .....	54

## Liste de tableaux

Tableau I.1 Propriétés de quelques matériaux poreux .....	9
Tableau I. 2 Conductivité thermique de divers fluides de base et matériaux à 20°C .....	16
Tableau IV.1 comparaison des résultats pour le nombre réduit de Nusselt $Nu_x/Pe_x^{0.5}$ .....	44
Tableau IV.2 : valeurs de $Sh_x/Pe_x^{0.5}$ et $Sh_x'/Pe_x^{0.5}$ pour $Le, \xi$ et $Nt$ .....	55
Tableau IV.3: Valeurs de $Sh_x/Pe_x^{0.5}$ et $Sh_x'/Pe_x^{0.5}$ pour $Fo, \lambda$ et $Nt$ .....	56

# INTRODUCTION

## GÉNÉRALE

De nos jours, l'un des objectifs de la recherche scientifique dans les industries se rapporte à la résolution des questions relatives aux économies des opérations de transformations d'énergie pour atteindre l'optimum. Dans ce contexte, les études menées se fixent comme objectifs une connaissance détaillée et fiable du comportement des systèmes complexes induits par des matériaux ou fluides nouveaux et en présence des phénomènes de plus en plus variés et induisant des mécanismes nouveaux. Les transferts dans les milieux poreux saturés ont fait l'objet de nombreux travaux théoriques et expérimentaux. En raison de leur importance dans de nombreux domaines naturels tels que le déplacement des eaux dans les nappes aquifères et technologiques comme le séchage. Le transfert de chaleur dans les milieux poreux s'effectue essentiellement selon deux modes : 1) la conduction à travers l'ensemble du milieu poreux sous l'effet des gradients de température ; et 2) la convection des fluides qui permet le transfert de l'énergie thermique qu'ils contiennent.

La transmission de chaleur par la convection est désignée, selon le régime d'écoulement du fluide, par convection libre, convection forcée ou par convection mixte. Le transfert de chaleur par convection mixte dans un milieu poreux comprend plusieurs effets physiques importants, par exemple, l'effet d'un milieu poreux non Darcéen dû aux forces d'inertie à l'échelle des pores, sur la quantité de mouvement, l'énergie, et transport de masse a été étudié en profondeur pour plusieurs configurations géométriques et conditions aux limites, de telle sorte qu'il existe actuellement le modèle couplé de Brinkman - Forchheimer (modèle généralisé) qui est utilisé par les chercheurs, si le modèle classique (de Darcy) n'est pas valide. Ainsi cette matrice qu'est le milieu poreux n'est pas modélisable simplement et requiert une attention soutenue. Par conséquent, il existe des effets qui ont un intérêt significatif sur le transport thermique dans les milieux poreux, on peut citer à titre exemple, la variation de la porosité, la dispersion thermique et massique, la variation des propriétés physiques de fluide comme la viscosité et la conductivité thermique, l'effet de l'équilibre thermique entre le fluide et le solide, la radiation thermique . . . etc. Parfois, on est dans une situation où un couplage fort de ces effets est mis en place, alors l'étude des phénomènes de transport devient très compliquée.

Le besoin d'améliorer les transferts thermiques des fluides a donné naissance au développement des nanofluides. Ces derniers sont des solutions contenant des nanoparticules en suspension dans un fluide à base classique telle l'eau. Grâce à leurs propriétés améliorées de transfert thermique, les nanofluides peuvent être utilisés dans une multitude d'applications en ingénierie : l'industrie automotrice, le génie biomédical, le refroidissement des éléments électroniques...etc., et même en milieu poreux rendant la complexité extrême comme deuxième niveau.

Le présent travail est organisé en quatre chapitres : le premier chapitre se divise en deux parties : la première est dédiée aux caractéristiques des milieux poreux, ensuite à l'écoulement de fluide à travers ces milieux, suivi par domaines d'industrie.

Le deuxième chapitre consacré à l'étude théorique de la convection mixte dans un milieu fluide et poreux, et également une description détaillée en ce qui concerne la région dite couche limite dynamique, thermique et massique, suivie par une synthèse bibliographique.

Le troisième chapitre présente la problématique et modélisation mathématique : étude d'un écoulement avec une convection mixte dans un plan dans un milieu poreux non-Darcéen, et de masse simultanée.

Le quatrième chapitre traite les différents résultats numériques obtenus en se fondant sur les effets de mouvement brownien, thermophorèse pour les nanoparticules et la dispersion thermique, l'effet d'inertie une partie théorique concernant le transfert thermique dans les milieux poreux saturés d'un fluide, suivi par une partie concernant la dispersion thermique. La deuxième partie est consacrée exclusivement à l'étude des nanofluides, leurs définitions, leurs préparations, leurs propriétés thermophysiques en précisions et leurs applications dans divers

Pour le milieu poreux sur le comportement de vitesse, température et concentration, en plus l'influence de paramètres de contrôle sur le taux de transfert thermique et massique en termes de nombre du Nusselt et Sherwood respectivement.

Une conclusion générale rassemble les principaux résultats obtenus dans cette étude et des perspectives qui peuvent être envisagées pour le futur.

# I

## GENERALITES MILIEUX POREUX ET NANOFUIDES

### I.1. milieux poreux

#### I.1.1 Introduction

D'une très grande diversité d'abord naturelle ou artificielle, aussi bien structurale (forme des grains et des pores) que physico-chimique (nature des matériaux constitutifs), les milieux poreux peuvent se trouver dans de multiples domaines, tant dans le secteur industriel (génie civil, géothermie...) que dans le secteur médical (exemple des membranes biologiques). L'ensemble des phénomènes mis en jeu dans ces domaines dépend des propriétés de ces milieux poreux, parmi lesquelles nous retiendrons :

- ✓ les possibilités de stockage des fluides sous forme adsorbée sur les parois du solide, ou bien en remplissant les pores.
- ✓ Les propriétés de transfert : transfert de masse, transfert de quantité de mouvement et d'énergie.
- ✓ État des pores, ces derniers peuvent être interconnectés ou déconnectés.

Nous nous proposons, le long de ce chapitre, d'apporter les éléments de base définissant les milieux poreux.

#### I.1.2 Définition :

Le milieu poreux est l'ensemble des grains solides ou d'agrégats autour desquels existent des espaces vides appelés pores, qui peuvent être interconnectés ou non. Ces vides peuvent être occupés par de l'eau, de l'air ou d'autres fluides. Les pores reliés entre eux permettent l'écoulement d'un ou plusieurs fluides, le milieu est dit monophasique et lorsqu'il est occupé par plusieurs phases fluides, le milieu est dit multiphasique. Nous devons noter qu'un milieu occupé uniquement par la phase liquide est dit « saturé » et « insaturé » dans le cas contraire.

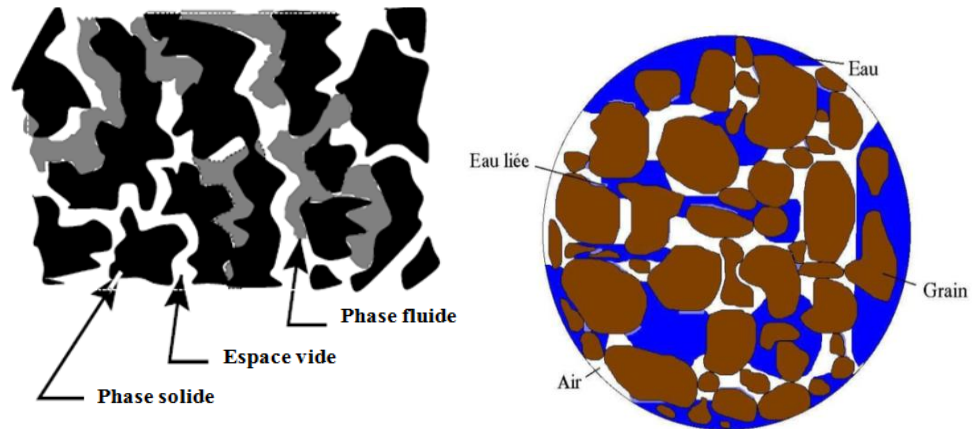


Figure I.1 : représentation d'un milieu poreux.

Un milieu poreux saturé par un fluide conducteur est caractérisé par un facteur de formation défini par :

$$H = \frac{k_{\text{eff}}}{k_f} \quad (\text{I.1})$$

$k_{\text{eff}}$  : Conductivité du milieu poreux.

$k_f$  : Conductivité du fluide.

La phase solide d'un milieu poreux (matrice) ou squelette peut se présenter sous deux formes:

**I.1.2.1 Milieu poreux non consolidé :** la phase solide est faite de grains ou de fibres non soudés entre eux (graviers, sables, limons, billes de verre ...). Les billes de verre sont très couramment utilisées pour réaliser les appareils destinés à étudier les lois qui régissent les écoulements et les phénomènes de transfert. Quant aux fibres, nous pouvons rencontrer soit les fibres minérales (amiante, laine de verre), ou les fibres organiques (coton...).

**I.1.2.2 Milieu poreux consolidé :** dans ce genre de milieu, la matière solide est compacte et ne peut se diviser en grains ou en fibres. À titre d'exemple, les roches calcaires qui présentent des séries de fissures reliées entrent elles ou encore les grés qui sont des roches constituées par des grains de sable soudés entrent eux par un ciment et des argiles.

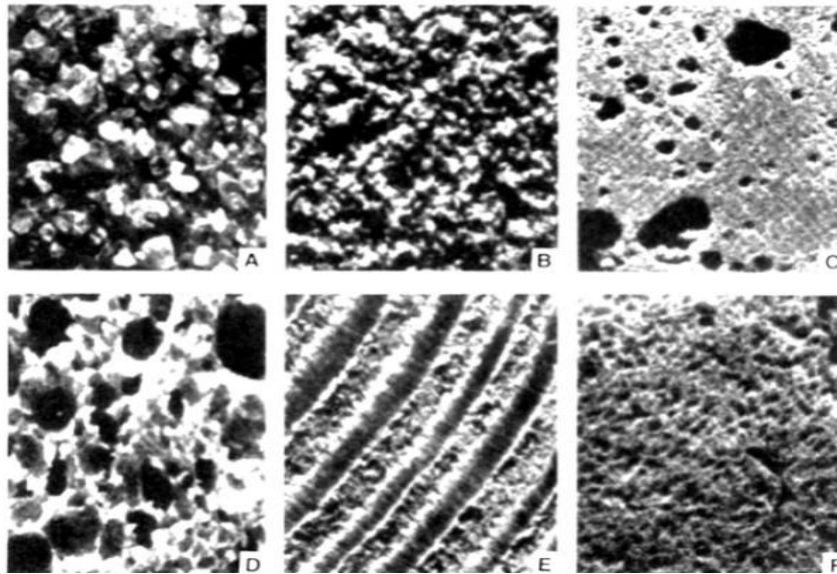


Figure I.2 : exemples de milieux poreux [1].

A) sable de plage, B) grés, C) calcaire, D) pain, E) bois, F) poumons humains

**I.1.3 Différents pores :** On distingue quatre formes de pores qu'on peut retrouver dans un milieu poreux, cité dans la (Figure I .3) suivante :

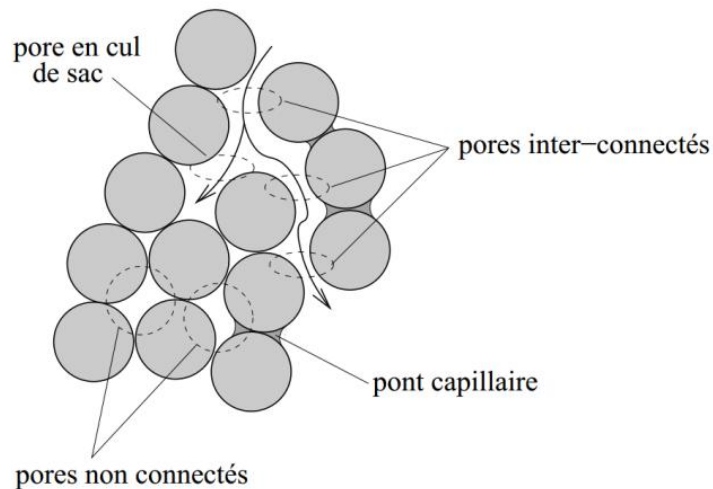


Figure I.3 : Schéma illustrant les différents volumes accessible ou non accessible lors du passage du fluide.

#### I.1.4 Propriétés descriptives du milieu poreux :

L'étude des écoulements et du transfert de chaleur en milieu poreux repose sur la détermination des propriétés du milieu : la perméabilité et la porosité. Ces grandeurs apparaissent dans les équations d'écoulement et du transport qui sont définies pour un milieu continu. Il faut donc les définir sur des volumes suffisamment grands, macroscopiques, pour



pouvoir considérer le milieu continu parce que les propriétés du milieu poreux dépendent d'échelle de description considérée.

### I.4.1 porosité :

La première caractéristique d'un milieu poreux est sa porosité : il s'agit du rapport entre le volume ne contenant pas de solide et le volume total du milieu  $V$ . en réduisant ce rapport aux masses volumiques, on obtient alors :

$$\varepsilon = \frac{V_t - V_s}{V_t} \quad (\text{I.2})$$

Puisqu'il s'agit d'un rapport de mêmes propriétés, la porosité n'a pas d'unités et elle est souvent exprimée en pourcentage.

La porosité peut être de deux formes. La porosité d'interstice (figure I.4a), et la porosité de fissure (figure I.4b).

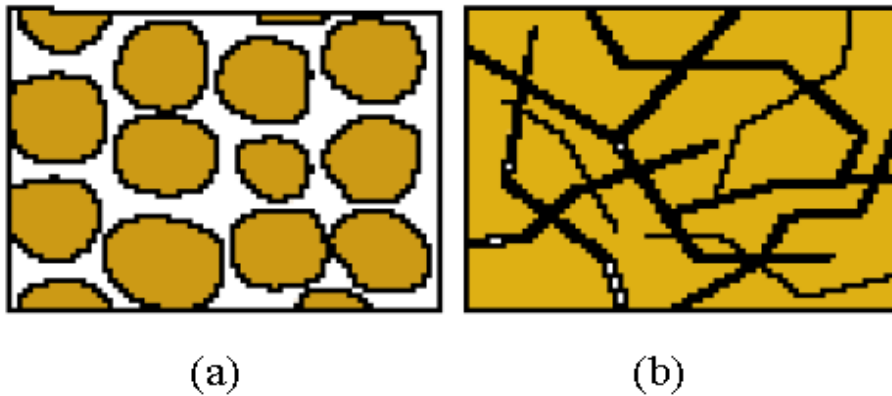


Figure I.4: Les deux types de porosité [2].

Il y'a d'autres paramètres caractérisant la proportion de pores dans un matériau c'est l'indice du vide  $e$  qui est défini comme le rapport du volume du vide  $V_v$  et le volume du solide  $V_s$ :

$$e = \frac{V_v}{V_s} \quad (\text{I.3})$$

Le lien entre la porosité et l'indice du vide est exprimé par :

$$\varepsilon = \frac{e}{e+1} \quad (\text{I.4})$$

**I.4.1.1 porosité totale** : qui tient compte des cavités occluses au sein du solide (pores fermés)

$$\varepsilon_t = \frac{\text{volume de l'échantillon}}{\text{volume des pores}} \quad (\text{I.5})$$

Cette notion est reliée à la masse volumique apparente de l'échantillon et à la masse volumique du matériau constitutif (grandeurs souvent manipulées dans de nombreuses applications) par

$$\varepsilon_t = 1 - \frac{\text{masse volumique apparente de l'échantillon}}{\text{masse volumique du matériau constitutif}} \quad (1.6)$$

**I.4.1.2 porosité accessible:** ou espace poreux connecté à travers lequel s'effectue l'écoulement des fluides:

$$\varepsilon = \frac{\text{volume des pores accessible}}{\text{volume de l'échantillon}} \quad (1.7)$$

Qui varie entre 0 (solide plein) et 1 (volume complètement vide).

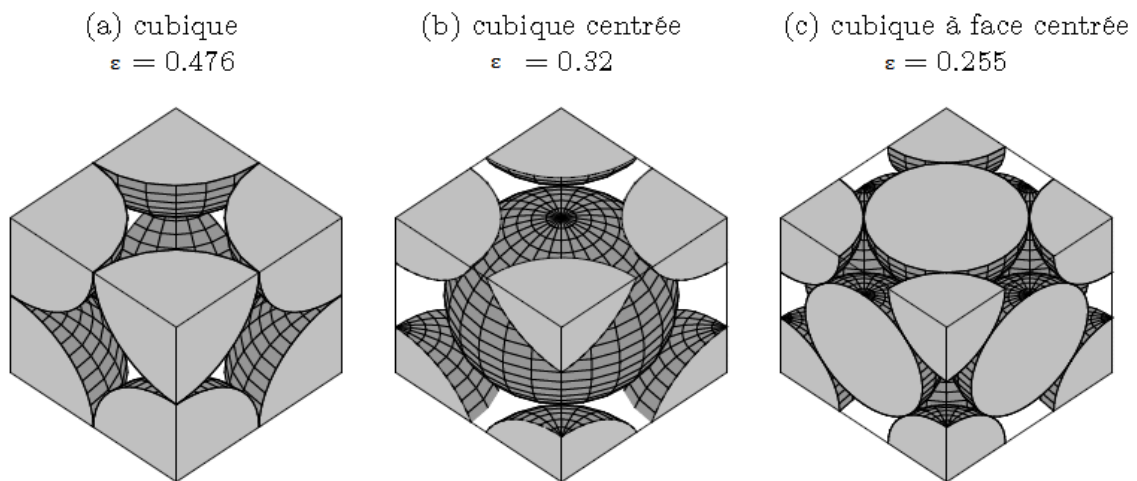


Figure I.5 : Arrangements réguliers de sphères de même diamètre avec la porosité associées.

### I.1.4.2. Perméabilité

La notion de conductivité de l'écoulement dans une matrice poreuse est appelée perméabilité. Autrement dit, c'est l'aptitude de circulation qu'offre un milieu poreux à un fluide lors de son écoulement à travers les pores de ce milieu sous l'effet d'un gradient de pression.

La perméabilité  $K$  d'un milieu poreux dépend de la porosité de la géométrie de la matrice solide. L'unité de la perméabilité  $K$  est le DARCY (1 DARCY= perméabilité d'un milieu poreux de  $1 \text{ cm}^2$  de section,  $1 \text{ cm}$  de longueur, soumis à une différence de pression de  $1 \text{ bar}$  traversé pas un fluide dont la vitesse de filtration est  $1 \text{ cm/s}$ )  $1 \text{ Darcy} = 9.87 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2$ . La perméabilité est déterminée par la mesure expérimentale.

C'est le moyen le plus efficace pour évaluer cette valeur. Plusieurs évaluations de  $K$  ont été proposées.

Par exemple dans le modèle de Darcy la perméabilité est donnée :

$$K = - \frac{\mu_f U_D}{dP/dx} \quad (I.8)$$

$\mu_f$  : viscosité dynamique du fluide

$U_D$  : vitesse Darcienne.

$\frac{dP}{dx}$  : Gradient de pression

On peut définir celle-ci grâce à la loi de Darcy (Darcy1856)

$$Q = RA \frac{\Delta P}{\rho_f g L} = KA \frac{\Delta P}{\mu_f L} \quad (I.9)$$

Avec A section du milieu poreux,  $\frac{\Delta P}{L}$  la perte de charge linéique le long du milieu poreux, Q le débit volumique du fluide circulant, K la perméabilité intrinsèque du milieu et R le coefficient de perméabilité (ou conductivité hydraulique) définit comme suite :

$$R = \frac{K \rho_f g}{\mu_f} \quad (I.10)$$

$\rho_f$  Est la masse volumique du fluide,  $\mu_f$  sa viscosité dynamique, et g l'accélération de la pesanteur.

La mesure de la perméabilité dans une direction donnée se fait par rapport à une surface perpendiculaire à l'écoulement du fluide. En général, les matériaux poreux possèdent une orientation préférentielle ou une asymétrie de la phase poreuse dans leur structure.

D'où une transmissibilité du fluide saturant différente d'une direction à une autre.

La perméabilité est donc une grandeur locale tout comme la porosité : elle dépend du volume de contrôle considéré. On peut noter toutefois que la loi de Darcy n'est pas vérifiée systématiquement, mais seulement pour les milieux poreux simples à faible nombre de Reynolds.

Cheng et Vortmeyer [3] rappellent la relation développée par Ergun pour pallier caractères difficilement mesurable de cette grandeur expérimentalement :

$$K = \frac{d^2 \varepsilon^3}{A(1-\varepsilon)^2} \quad (I.11)$$

Ergun [4] a montré que dans le cas d'un lit fixe dont la phase solide est composée des sphères idéales, on peut prendre  $A=150$  comme constante empirique.

D'autres équations qui calculent la perméabilité, citons par exemple celle tirée du modèle de Kozeny-Carman [5] où le milieu poreux est assimilé à un ensemble de tubes dont la section est à

priori considérée comme constante. Le diamètre de ces tubes est le diamètre des pores. Cette équation s'écrit :

$$K = \frac{\varepsilon^3 d^2}{180 (1-\varepsilon)^2} \tag{I.12}$$

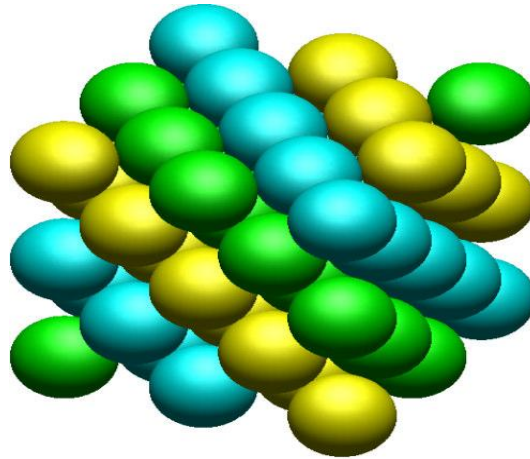


Figure I.6:Exemple de géométrie de

À titre indicatif, on trouve dans le tableau (1) Des mesures expérimentales faites par Kaviany [6]. Et d'autre pour la perméabilité faite par Sheidegger [7] pour différents milieux poreux.

Matériaux	Porosité $\varepsilon$	Perméabilité K (m <sup>2</sup> )
Charbon	0,45	/
béton standard	0,02 à 0,07	/
Cuivre (en poudre)	0,09 à 0,34	$3,3 \times 10^{-10}$ à $1,5 \times 10^{-9}$
Fibre de verre	0,88 à 0,93	/
Sable	0,37 à 0,50	$2 \times 10^{-11}$ à $1,8 \times 10^{-10}$
Mousses métalliques	0,85 à 0,95	$10^{-9}$ à $10^{-10}$
Cuir	0,56 à 0,59	$9.5 \times 10^{-14}$ – $1.2 \times 10^{-13}$
Poudre d'ardoise noire	0,57 à 0,66	$4.9 \times 10^{-14}$ – $1.2 \times 10^{-13}$
Calcaire (dolomite)	0,04 à 0,10	$2 \times 10^{-15}$ à $4,5 \times 10^{-14}$
Terre	0,43 à 0,54	$2.9 \times 10^{-13}$ – $1.4 \times 10^{-11}$
Poudre de silice	0,37 à 0,49	$1,3 \times 10^{-14}$ à $5,1 \times 10^{-14}$
Briques	0,12 à 0,34	$4.8 \times 10^{-15}$ – $2.2 \times 10^{-13}$

Tableau I.1 : Propriétés de quelques matériaux poreux

### I.1.5 Model d'écoulement utilisé en milieu poreux :

Les lois des écoulements en milieu poreux ne constituent que des approximations. On s'intéresse en général qu'au phénomène à l'échelle macroscopique. Plusieurs lois phénoménales sont utilisées, la plus importante est la loi de Darcy, dans le but d'élargir son domaine de validité, des corrections ont été proposées pour tenir compte des effets des parois, les autres lois sont en majorité des extensions de cette loi. (Extension de Brinkman), et des effets d'inertie (extension de Forchheimer).

#### I.1.5.1 Model de Darcy

Pour l'étude de la convection en milieu poreux, la grande majorité des études utilise la formulation classique de Darcy(1856). L'auteur donne une loi sur les écoulements isothermes dans un milieu poreux, qui exprime la proportionnalité entre les variations de pression  $\Delta P$  et le débit  $Q$  lié à la vitesse de filtration  $V_{fil}$ . Ceci se traduit pour un échantillon de longueur  $L$  et de section  $A$  par la relation suivante [8].

$$Q = \frac{K}{\mu_f} \frac{\Delta P}{L} A \quad (I.13)$$

Où  $\mu_f$ : viscosité dynamique du fluide.  $K$  : perméabilité, ce paramètre étant indépendant de la nature du fluide et ne dépend que de la géométrie du milieu (Coux, 1997). On peut généraliser cette loi par :

$$\vec{V} = -\frac{K}{\mu_f} \vec{\nabla} P \quad (I.14)$$

Dans le cas de la présence de la pesanteur, l'équation précédente devient :

$$\vec{V} = -\frac{K}{\mu} [\vec{\nabla} p - \rho \vec{g}] \quad (I.15)$$

$\vec{V}$  : Vecteur vitesse d'infiltration.  $K$  : perméabilité.  $\mu$  : viscosité dynamique du fluide.

$\vec{\nabla} p$  : Gradient de pression.  $\rho$  : Masse volumique.  $\vec{g}$  : Vecteur d'accélération gravitationnel.

Le modèle de Darcy, qui néglige les forces d'inertie et visqueuses est valide lorsque les conditions suivantes sont satisfaites [9].

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon < 0 \\ Da \leq 10^{-6} \\ Re_p < 1\varepsilon \end{array} \right. \quad (I.16)$$

Dans lesquelles :  $\varepsilon$  est la porosité du milieu poreux

$Da = \frac{K}{L^2}$  Est le nombre de Darcy.

$Re_p = \frac{d \cdot V_p}{\nu}$  Nombre de Reynolds.

$V_p$ : vitesse du pore.

$d$  : Diamètre du pore.

$\nu = \frac{\mu_f}{\rho}$  : viscosité cinématique du fluide.

Il existe trois types de régimes d'écoulement en fonction de  $Re_p$  [10] :

❖ Il existe trois types de régimes d'écoulement en fonction de  $Re_p$  :

- Pour  $Re_p < 1$ , le régime est laminaire, les forces de viscosité sont grandes devant les forces d'inertie, la loi de Darcy est valable.
- Pour  $1 < Re_p < 150$ , des couches limites se développent au niveau des parois solides. En dehors de cette couche limite, il n'y a plus proportionnalité entre le gradient de pression et la vitesse de filtration : la loi de Darcy n'est plus applicable. Ce régime d'écoulement stationnaire laminaire persiste jusqu' à  $Re_p=150$ .

Pour  $150 < Re_p < 300$ , un régime d'écoulement instationnaire prend place. Et pour  $Re_p > 300$  on est en présence d'un écoulement turbulent.

### Terme convectif :

Wooding [11] a proposé une extension de l'équation de Darcy en introduisant un terme convectif par analogie avec les équations de Navier-Stokes.

$$\frac{\rho}{\varepsilon^2} (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = -\vec{\nabla}P - \frac{\mu}{K} \vec{V} \quad (I.17)$$

Le terme de gauche de l'équation (I.17) est le terme de convection qui tient compte des effets inertiels quand les vitesses sont importantes.

### I.1.5.2 Loi de Darcy- Forchheimer

Lorsque la vitesse débitante augmente, les forces d'inertie ne sont plus négligeables. Dans ce cas, on montre expérimentalement que pour un gradient de pression fixé, le débit mesuré est plus petit qu'il ne le serait avec la loi de Darcy [10]. Forchheimer a proposé une modification empirique de la loi de Darcy en rajoutant une relation non linéaire du second ordre entre le gradient de pression et la vitesse de filtration. Cette formulation appelée de Darcy-Forchheimer:

$$\vec{\nabla}P = \rho_f \cdot \vec{g} - \frac{\mu_f}{K} \cdot \vec{V}_{fil} - F \frac{\rho_f c_f}{\sqrt{K}} |\vec{V}_{fil}| \cdot \vec{V}_{fil} \quad (I.18)$$

$C_f$  : Coefficient de Forchheimer,  $F$ : est un paramètre caractéristique de la géométrie du milieu poreux, généralement appelé paramètre de Forchheimer.

### I.1.5.3 Modèle de Brinkman

Dans le cas où la porosité est importante (de l'ordre de 0.8), il faut tenir compte des effets de diffusion visqueuse au niveau des parois (Delache, 2005). Pour cette situation Brinkman(1947) propose de modifier l'équation de Darcy de la façon suivante :

$$\vec{\nabla}P = \rho_f \cdot \vec{g} - \frac{\mu_f}{K} \cdot \vec{V}_{fil} + \mu_{eff} \cdot \nabla^2 \vec{V}_{fil} \quad (I.19)$$

Où

$\mu_{eff} = \mu[1 + 2.5(1 - \varepsilon)]$ , représente la viscosité effective du milieu poreux. En général  $\mu_{eff}$  est considéré équivalente à la viscosité dynamique  $\mu$  donc on peut donner la vitesse de filtration comme suit :

$$\vec{V}_{fil} = -\frac{K}{\mu} [\vec{\nabla}P - \rho_f \vec{g}] + K \nabla^2 \vec{V}_{fil} \quad (I.20)$$

Adoptant le modèle de Brinkman et introduisant l'approximation de Boussinesq, l'équation de la conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$V_{fil} = -\frac{K}{\mu} [\vec{\nabla}P - \rho_0 \vec{g} (\beta(T - T_0))] + K \nabla^2 \vec{V}_{fil} \quad (I.21)$$

$\beta = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)$  : Le coefficient d'expansion volumique thermique du fluide,  $T_0$ : la température de référence.

### I.1.5.4 Model général :

On généralise les trois modèles en introduisant un terme transitoire et le terme convectif  $(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}$ , ce qui conduire à l'équation suivante:

$$\underbrace{\frac{\rho_f}{\varepsilon} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_a + \underbrace{\frac{\rho_f}{\varepsilon} (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}}_b = \underbrace{-\vec{\nabla}P}_c + \underbrace{\rho_f \vec{g}}_d - \underbrace{\frac{\mu}{K} \vec{V}}_e + \underbrace{\frac{c_f \rho_f}{\sqrt{K}} |\vec{V}| \vec{V}}_f + \underbrace{\mu_{eff} \nabla^2 \vec{V}}_f \quad (I.22)$$

$\vec{V}$ : Une quantité moyennée à travers un volume élémentaire.

(a): Forces inertielles macroscopiques.

(b): Gradient de pression.

(c): Forces de volumes.

(d) : Terme de Darcy.

(e): Terme de Forchheimer (Forces inertielles microscopiques).

(f): Terme visqueux de Brinkman.

## I.1.6 Transfert thermique dans un milieu poreux :

### I.1.6.1 L'équation d'énergie

Pour établir l'équation d'énergie issue du premier théorème thermodynamique dans un milieu poreux, on fait recours à quelques simplifications et approximations afin de diminuer la complexité et la forme du milieu poreux, en plus des hypothèses citées on considère que les pores du milieu poreux sont interconnectés [12].

$$(\rho c)_{\text{eff}} \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho c_p)_f \vec{\nabla} \vec{\nabla} T = k_{\text{eff}} \vec{\nabla}^2 \quad (\text{I.23})$$

$$(\rho c)_{\text{eff}} = (1 - \varepsilon)(\rho c)_s + \varepsilon(\rho c_p)_f \quad (\text{I.24})$$

$$k_{\text{eff}} = (1 - \varepsilon)k_s + \varepsilon k_f \quad (\text{I.25})$$

$c_p$  : Chaleur massique à pression constante.

$k_{\text{eff}}$  : Conductivité thermique du milieu poreux.

### I.1.6.2 Transfert de matière dans un milieu poreux:

Le terme transfert de matière signifie le transport de substance qui implique comme une composante (constituant, espèce...) dans le mélange du fluide. En général, le transfert de matière est analogue à celui de la chaleur. On applique le principe de la conservation de la matière à chaque composant dans le mélange et puisque la diffusivité est un scalaire.

On a:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} (\vec{\nabla} \vec{\nabla} C) = D \Delta C \quad (\text{I.26})$$

D: est la diffusivité massique du milieu poreux [ $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ ]; C : la concentration du composant.

### I.1.6.3 La combinaison du transfert thermique et de matière

Dans la convection mixte bidiffusive, le couplage du transfert de chaleur et de matière est nécessaire parce que la densité du mélange de fluide dépend de la température et de la concentration. On a approximativement :

$$\rho_f(T, C) = \rho_f(T_r, C_r) [1 - \beta_T(T - T_r) - \beta_C(C - C_r)] \quad (\text{I.27})$$

Où

$\rho_f(T, C)$  : est la masse volumique à la température  $T_r$  et à la concentration  $C_r$ .



$\beta_T$  et  $\beta_C$  sont présentées respectivement comme suit :

$$\beta_T = \frac{-1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{P,C} \quad (I.28)$$

$$\beta_C = \frac{-1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial C} \right)_{P,T} \quad (I.29)$$

$\beta_T$ : Le coefficient d'expansion volumique thermique.

## I.1.7 Dispersion thermique dans un milieu poreux

### I.1.7.1 Dispersion thermique

Une complication supplémentaire survient dans la convection forcée ou dans la convection naturelle vigoureuse dans un milieu poreux. Il peut y avoir la dispersion thermique, une intervention du transfert thermique avec l'hydrodynamique du fluide interstitiel à l'échelle du pore. En plus de la diffusion moléculaire de chaleur, il y a une intervention due à la nature de milieu poreux. Quelques-unes sont dues aux obstructions; le fait que les canaux de l'écoulement sont des chemins tortueux et que les particules de fluide commencent à une distance donnée l'un à l'autre et procédant à la même vitesse, ne resteront pas à la même distance séparément. Plus loin peut survenir le fait que tous les pores dans un milieu poreux ne pas être accessible à un élément de fluide après qu'il soit entré un filet de fluide. Le mélange peut aussi être causé par recirculation dans les régions locales de pression réduite où surviennent des restrictions de l'écoulement. Dans un canal d'écoulement, le mélange se produit parce que les particules de fluide sont à des distances différentes suivant un déplacement mural relatif l'un à l'autre.

### I.1.7.2 Approches de la dispersion thermique

La dispersion est donc un phénomène complexe. Rubin (1974, [13]) a pris la dispersion en considération et en généralisant l'équation. (I.31) afin que le terme  $\nabla(\alpha_m \nabla T)$  Ou  $\alpha_m = \frac{k_m}{(\rho c)_m}$  est la diffusivité thermique du milieu, est remplacé par  $\nabla \cdot E \cdot \nabla T$  où E est un tenseur de second ordre (le tenseur de la dispersion). Dans un milieu isotopique le tenseur de la dispersion est symétrique et ses composantes peuvent être exprimées par

$$E_{ij} = F_1 \delta_{ij} + F_2 V_i V_j \quad (I.30)$$

$$\bar{D} = |D_{IJ}| \text{ Avec } D_{IJ} = \delta_{ij} \alpha_T |U| + (\alpha_L + \alpha_T) \frac{U_i U_j}{|U|} \quad (I.31)$$

Avec  $\delta_{ij}$  le symbole de Kronecker,  $\alpha_L$  et  $\alpha_T$  [L] les coefficients de dispersion intrinsèque, ou dispersivité longitudinale et transversale.  $|U|$  est la norme de la vitesse de pore avec  $U_{i,j}$  la

composante de la vitesse dans les directions  $i, j$  [ $L \cdot T^{-1}$ ] et  $\bar{\bar{D}}$  est le tenseur de dispersion thermique.

Pour un milieu isotrope, le tenseur de dispersion est diagonal dans les directions principales de l'écoulement :

$$\bar{\bar{D}} = \begin{bmatrix} D_L & 0 & 0 \\ 0 & D_T & 0 \\ 0 & 0 & D_T \end{bmatrix}$$

Où,  $V_i = \left(\frac{V_i}{\varepsilon}\right)$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante de vecteur de vitesse intrinsèque,  $F_1$  et  $F_2$  sont des fonctions de la taille de pore et le nombre de Péclet et le nombre de Reynolds de l'écoulement.

A tout point dans le champ de l'écoulement c'est possible d'exprimer  $E$  avec renvoi à un système de coordonnées dans lequel le premier axe coïncide avec la direction d'écoulement; quand cela est fait, on a :

$$E_{11} = \eta_1 U + \alpha_m \tag{I.32}$$

$$E_{22} = E_{33} = \eta_2 U + \alpha_m \tag{I.33}$$

$E_{ij} = 0$  Pour  $i \neq j$

Où  $E_{11}$  est le coefficient de dispersion longitudinale,  $E_{22}$  et  $E_{33}$  sont les coefficients de dispersion latérale, et  $U$  est la grandeur absolue du vecteur de la vitesse.

Si le nombre de Péclet de l'écoulement est petit, alors  $\eta_1$  et  $\eta_2$  sont petits et la diffusivité thermique moléculaire  $\alpha_m$  est dominant.

Si le nombre de Péclet de l'écoulement est grand, alors  $\eta_1$  et  $\eta_2$  sont grands et presque constants. Il est trouvé expérimentalement que  $\eta_2 = \eta_1/30$ , approximativement.

Dans un cas particulier, quand le transfert thermique par conduction est en fait parallèle, Catton et al (1988, [13]) concluent d'après leur analyse statistique que la conductivité thermique effective  $(k_{zz})_{\text{eff}}$ , pour le transport massique et thermique dans la direction  $z$  à travers un lit de perles sphériques uniformes, est donnée suivant la conductivité :

$$(k_{zz})_{\text{eff}} = (1 - \varepsilon)k_s + \varepsilon \left(\frac{2B}{\pi}\right) P_e \cdot k_f \tag{I.34}$$

Dans cette expression le terme  $B$  est une constante introduite par Ergun (empiriquement  $B=1.75$ ) et le nombre de Péclet est défini par  $P_e = v d_p / \alpha_f (1 - \varepsilon)$ , où  $d_p$  est le diamètre de particule sphérique et  $\alpha_f$  est la diffusivité thermique du fluide, défini par  $\alpha_f = \frac{k_f}{(\rho c)_f}$ .

## I.2. NANOFUIDES

### I.2.1 Introduction

Les transferts de chaleur au sein de fluides conduit à de nombreuses applications pratiques et industrielles, y compris dans le transport, l'approvisionnement en énergie, la climatisation et le refroidissement électroniques, etc.

L'essor actuel des nanosciences a pour origine la mise en évidence des propriétés spécifiques de la matière aux dimensions nanométriques. Ceci a suscité de nouveaux champs d'études dans de très nombreux laboratoires et a permis le développement des fluides aux propriétés originales.

### I.2.2 Définition

Les nanofluides sont des solutions colloïdales constituées de particules de taille nanométrique en suspension dans un liquide porteur. Ce type de solution suscite un grand intérêt depuis la découverte de leurs propriétés thermiques particulières. En effet, les fluides de base souvent utilisés dans les applications de refroidissement ou de chauffage ont des conductivités thermiques très faibles (Tableau I.2) qui limitent leur capacité de transfert de chaleur. L'idée est alors d'insérer au sein des liquides de base des nanoparticules de conductivité très élevée, afin d'augmenter la conductivité thermique effective du mélange et ainsi améliorer ces performances thermiques.

Les liquides de base généralement utilisés dans la préparation des nanofluides sont ceux d'usage commun dans les applications de transfert de chaleur tels que l'eau, l'éthylène glycol, l'huile de moteur, etc....; les nanoparticules peuvent être à base de métaux, d'oxydes, de carbures, de nitrures ou de carbone.

Élément	Conductivité thermique $\lambda$ (W/m.K)
<b>Eau</b>	0,599
<b>50% eau + 50% éthylène glycol</b>	0,41
<b>Ethylène glycol</b>	0,25
<b>huile de moteur</b>	0,14
<b>Nanotube de carbone</b>	3000-6000
<b>Diamant</b>	1000-2600
<b>Cuivre (métal pur)</b>	401
<b>Nickel (métal pur)</b>	237
<b>Alumine (Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>)</b>	40

Tableau I.2 Conductivité thermique de divers fluides de base et matériaux à 20°C

### I.2.3 Types de nanoparticules

La production de nouveaux nanomatériaux (nanoparticules) constitue un champ de recherche en pleine expansion, aussi seules les nanoparticules les plus couramment utilisées dans les applications liées aux transferts thermiques sont ici brièvement mentionnées.

D'une manière générale, les nanoparticules peuvent être classées selon leur forme en deux grandes catégories:

- Les nanoparticules sphériques pour lesquelles plusieurs types de matériaux peuvent être utilisés pour leur fabrication. Ces nanoparticules sphériques peuvent ainsi être à base de métaux (cuivre Cu, fer Fe, or au, argent Ag...) ou d'oxydes de cuivre (oxyde d'aluminium Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, oxyde de cuivre CuO, oxyde de titane TiO<sub>2</sub>...)
- Les nanotubes (les nanotubes de carbone NTC, les nanotubes de titane TiO<sub>2</sub>, Nanotube de silicium...) [14].

### I.2.4 Propriétés thermophysiques des nanofluides

#### I.2.4.1 Conductivité thermique

La conductivité thermique, notée  $k$  (W/m.K), est la capacité d'un matériau de conduire ou de transmettre de la chaleur. C'est une propriété très importante pour l'amélioration des performances thermiques d'un fluide caloporteur. La synthèse des nanofluides répond au besoin d'améliorer et d'amplifier la conductivité thermique des liquides. Aussi, de nombreux travaux ont été menés pour mesurer, mais aussi prédire et expliquer cette amélioration.

Il existe plusieurs modèles théoriques permettant d'estimer, sous certaines conditions, la conductivité thermique des suspensions. Nous présenterons dans cette partie les modèles les plus utilisés dans le cas des nanofluides.

#### a. Modèle de Maxwell

Maxwell fut le premier à dériver un modèle pour estimer la conductivité thermique d'une suspension contenant des particules

$$\frac{k_{nf}}{k_{fb}} = \frac{k_{np} + 2k_{fb} - 2\varphi(k_{fb} - k_{np})}{k_{np} + 2k_{fb} + 2\varphi(k_{fb} - k_{np})} \quad (I.35)$$

Où  $k_{nf}$ ,  $k_{fb}$  et  $k_{np}$  représentent respectivement la conductivité thermique (W/m.K) du

Nanofluide, du fluide de base et des nanoparticules.  $\varphi$  représente la fraction volumique des nanoparticules. Le modèle de Maxwell est satisfaisant pour les suspensions contenant des particules sphériques de concentrations volumiques relativement faibles, mais ne tient pas compte de l'effet de la taille ni de la forme des particules. Il est à noter aussi que l'effet des interactions inter-particules est négligé dans ce modèle[15].

### b.Modèle de Bruggeman

Le modèle de Bruggeman complète celui de Maxwell pour des concentrations volumiques relativement élevées.

$$\varphi \left( \frac{k_{np} - k_{nf}}{k_{np} + 2k_{nf}} \right) + (1 - \varphi) \left( \frac{k_{fb} - k_{nf}}{k_{fb} + 2k_{nf}} \right) = 0 \quad (I.36)$$

### d.Modèle de Hamilton & Crosser

Le modèle de Hamilton-Crosser est une extension du modèle de Maxwell, qui tient compte de la forme des particules. En effet, pour prendre en compte la non-sphéricité des particules, ce modèle intègre un facteur géométrique appelé sphéricité, et noter  $\Psi$ , faisant référence à la géométrie sphérique. Ce coefficient est défini comme étant le rapport de l'aire d'une sphère de même volume que la particule sur l'aire de cette même particule

$$\frac{k_{nf}}{k_{fb}} = \frac{k_{np} + (n-1)k_{fb} - \varphi(k_{fb} - k_{np})(n-1)}{k_{np} + (n-1)k_{fb} + \varphi(k_{fb} - k_{np})(n-1)} \quad (I.37)$$

$n$  Est un facteur de forme empirique donné par  $n = \frac{3}{\Psi}$

Ce modèle peut être utilisé lorsque la conductivité thermique des particules est au moins 100 fois plus élevée que celle du fluide de base [15]

#### I.2.4.2 Viscosité dynamique des nanofluides

La viscosité caractérise l'aptitude d'un fluide à s'écouler. Sa connaissance est fondamentale pour toutes les applications impliquant le transport de fluides. L'ajout des nanoparticules permet d'augmenter et d'améliorer la conductivité thermique du nanofluide, mais cela peut aussi conduire à une augmentation défavorable de la viscosité dynamique. Ainsi, ces deux propriétés sont étroitement corrélées, et doivent être maîtrisées en vue d'une exploitation de ce type de fluides dans des échangeurs.

Plusieurs modèles théoriques ont été développés pour prédire l'évolution de la viscosité dynamique des suspensions sous certaines conditions. Dans cette partie, nous nous intéresserons aux modèles les plus utilisés dans le cas des nanofluides [15].

### Modèle d'Einstein :

D'une manière générale, les formules existantes dérivent du travail fondamental d'Einstein (1906). Basé sur l'hypothèse que l'énergie a une dépendance linéaire avec la viscosité, Einstein a déterminé l'énergie dissipée autour d'une seule particule dans un fluide en associant son énergie au travail réalisé pour la faire avancer relativement au fluide. À partir de ce résultat, il a déterminé l'expression décrivant une dépendance linéaire de la viscosité des suspensions dans un fluide avec la concentration

$$\mu_{nf} = \mu_{fb} (1 + 2,5\varphi) \quad (I.38)$$

### Modèle de Brinkman :

La formule de Brinkman complète le modèle d'Einstein jusqu'à une concentration volumique inférieure à 4%

$$\mu_{nf} = \mu_{fb} \frac{1}{(1-\varphi)^{2,5}} \quad (I.39)$$

### Modèle de Graham :

Graham (1981) a proposé une formule généralisée qui tend vers le modèle d'Einstein pour des concentrations volumiques très faibles :

$$\mu_{nf} = \mu_{fb} (1 + 2,5\varphi + 4,5\varphi^2) \left[ \frac{1}{\left(\frac{h}{d_{nb}}\right) \left(2 + \frac{h}{d_{nb}}\right) \left(1 + \frac{h}{d_{nb}}\right)} \right] \quad (I.40)$$

Où  $d_{nb}$  et  $h$  sont respectivement le rayon de la particule (m) et la distance entre les particules (m).

#### I.2.4.3. Chaleur spécifique

La chaleur spécifique ou la capacité thermique massique, notée  $C_p$  (J/kg.K), est définie par la quantité d'énergie à apporter par échange thermique pour élever d'un degré Kelvin la température de l'unité de masse d'une substance.

Pour la détermination de la chaleur spécifique d'un nanofluide, on peut citer les deux modèles suivants

**Modèle du Pak et Cho [16] :** le modèle du Pak et Cho basé sur la loi de mélange d'une suspension homogène qui est défini par la formule suivante :

$$c_{p,nf} = \varphi(c_p)_{np} + (1 - \varphi)(c_p)_{fb} \quad (I.41)$$

**Modèle de Xuan et Roetzel [16] :** ils ont travaillé avec la formule ci-dessous :

$$(\rho c_p)_{nf} = (1 - \varphi)(\rho c_p)_{fb} + \varphi(\rho c_p)_{np} \quad (I.42)$$

$(c_p)_{nf}$ ,  $(\rho c_p)_{fb}$  et  $(c_p)_{np}$  désignent respectivement les chaleurs spécifiques du nanofluide, du fluide de base et des nanoparticules.

#### I.2.4.4. Masse volumique

La masse volumique des nanofluides est proportionnelle à la fraction volumique en particules et augmente avec l'ajout des nanoparticules.

Pour calculer la masse volumique d'un nanofluide que nous supposerons parfaitement homogène (bonne dispersion des nanoparticules dans le fluide) en fonction de la fraction volumique  $\varphi$  à une température T donnée, nous revenons à la définition de la masse volumique de ce mélange [16].

$$\rho_{nf} = \left(\frac{m}{V}\right)_{nf} = \frac{m_{fb} + m_{np}}{V_{fb} + V_{np}} = \frac{\rho_{fb} V_{fb} + \rho_{np} V_{np}}{V_{fb} + V_{np}} \quad (I.43)$$

La fraction volumique des nanoparticules, notée  $\varphi$  désigne le rapport du volume des Nanoparticules sur le volume total (fluide + solide).

$$\varphi = \frac{\text{Volume solide}}{\text{Volume total du nanofluide}} = \frac{V_{np}}{V_{np} + V_{fb}} \quad (I.44)$$

On en déduit alors la masse volumique du nanofluide :

$$\rho_{nf} = \varphi \rho_{np} + (1 - \varphi) \rho_{fb} \quad (I.45)$$

$\rho_{nf}$  : La masse volumique du nanofluide,

$\rho_{np}$  : La masse volumique des nanoparticules solides

$\rho_{fb}$  : La masse volumique du fluide de base.

### I.2.5. Modèle de Buongiorno:

Pour examiner le transfert de chaleur par l'ajout de très fines particules en suspension dans un fluide, deux approches principales ont été adoptées dans la littérature. La première est le modèle à deux phases qui prend en compte le rôle de la phase fluide et solide dans le processus de transfert de chaleur. La seconde est le modèle monophasé où les deux phases fluides et les particules sont dans un état d'équilibre thermique et s'écoulent avec la même vitesse locale.

Cette approche est simple et nécessite moins de temps de calcul. En outre, si l'intérêt principal est centré sur le processus de transfert de chaleur, la seule phase modifiée est plus pratique que le modèle à deux phases. Récemment, Buongiorno [17] a présenté sept mécanismes de glissement et a conclu que la Diffusion Brownienne (mouvement de nanoparticules à partir du site de concentration élevée vers un site à faible concentration) et la thermophorèse (mouvement de nanoparticules à partir du site à haute température vers le site à basse température) sont les mécanismes de glissement les plus importants dans les nanofluides par ordre d'analyse. Partant de ce constat, il a développé une équation aux modèles d'équilibre non homogène à deux composants pour la masse, dynamique, et le transport de chaleur dans les nanofluides.

#### I.2.5.1. Diffusion Brownienne

Le mouvement aléatoire des nanoparticules dans le fluide de base est appelé mouvement Brownien, et résulte de collisions continues entre les nanoparticules et les molécules du fluide de base. Les nanoparticules elles-mêmes peuvent être visualisées efficacement que les grosses molécules, avec une énergie cinétique moyenne égale à celui des molécules de fluide  $1/2k_B T$  et donc avec une vitesse considérablement plus faible. Ici  $k_B$  est la constante de Boltzmann et  $T$  est la température du nanofluide. Le mouvement Brownien est décrit par le coefficient de diffusion Brownienne,  $D_B$ , qui est donné par l'équation d'Einstein-Stokes [17]

$$D_B = \frac{k_B T}{3\pi\mu d_p} \quad (\text{I.46})$$

Pour un nanofluide à base d'eau et à la température ambiante avec des nanoparticules d'un diamètre de 1 à 100 nm, le coefficient de diffusion Brownienne est compris entre  $4 \times 10^{-10}$  à  $4 \times 10^{-12}$  m<sup>2</sup>/s. la diffusion Brownienne peut devenir importante en tant que mécanisme de glissement en l'absence de la turbulence. Le flux massique des nanoparticules dues à la diffusion Brownienne,  $j_{p,B}$  (Kg/m<sup>2</sup>s) peut être calculé comme:



$$j_{p,B} = -\rho_p D_B \nabla \varphi \quad (I.47)$$

### I.2.5.2. Thermophorèse

Les particules peuvent diffuser sous l'effet d'un gradient de température. Ce phénomène est appelé thermophorèse, et est équivalent à l'effet bien connu " effet Soret" pour des mélanges gazeux ou liquides. La vitesse thermophorétique,  $V_T$ , peut être trouvée comme suit:

$$V_T = -\beta \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\nabla T}{T} \quad (I.48)$$

Où une expression pour le facteur de proportionnalité, est donné par [18]:

$$\beta = 0.26 \frac{k}{2k+k_p} \quad (I.49)$$

Dans l'équation (I.49)  $k$  et  $k_p$  sont les conductivités thermiques de fluide pur et de particules, respectivement. L'équation (I.50) est basée sur les données de particules relativement grandes ( $1\mu\text{m}$ ) dans l'eau et le n-hexane, et est également recommandée par Lister [19] et, plus récemment, par Müller-Steinhagen [20]. Malheureusement, les données thermophorétique pour les nanoparticules ne sont pas disponibles, donc dans l'équation (I.50) sera utilisé pour les nanoparticules aussi. Le signe négatif dans l'équation (I.48) signifie que les particules se déplacent vers le bas du gradient de température, c'est à dire, du chaud au froid. Pour des nanoparticules d'Alumine dans l'eau à température ambiante,  $k \sim 1\text{W/m.K}$ ,  $k_p \sim 40\text{W/m.K}$ , et en supposant un gradient de température de  $105\text{K/m}$  (correspondant à  $100\text{ kW/m}^2$  flux de chaleur), on obtient  $V_T = 2 \times 10^{-6}\text{m/s}$ . La thermophorèse peut être devenir importante en tant que mécanisme de glissement en l'absence de turbulence. Le flux massique de nanoparticules dues à l'effet de thermophorèse,  $j_{p,T}$  peut être calculé comme:

$$j_{p,T} = \rho_p \varphi V_T = -\rho_p \alpha_T \frac{\nabla T}{T}; \text{ avec } \alpha_T = \beta \frac{\mu}{\rho} \varphi \quad (I.50)$$

Le coefficient  $\alpha_T$  est parfois appelé le coefficient " de diffusion thermique".

### I.2.6. Application des nanofluides dans l'industrie

Les nanofluides ont connu beaucoup d'applications dans l'industrie ce qui a incité plusieurs recherches expérimentales.

Les dispersions de nanoparticules trouvent déjà de nombreux domaines d'applications pour leurs propriétés magnétiques (paliers magnétiques à Ferro-fluides, agents de contraste en imagerie médicale), pour leurs propriétés électriques (dépôt conducteur électro-mouillage pour lentilles liquides), et de marquage de cellules ou de contrefaçon avec des nanoparticules fonctionnalisées...

En thermique, les nanofluides peuvent être utilisés partout où des flux de chaleur importants doivent être évacués par des boucles liquides fermées : refroidissement de composants électriques et électroniques, radars, automobile...

Les nanofluides pourraient apporter une solution intéressante dans le refroidissement des miroirs, cibles et filtres des lasers et rayons X de forte puissance, ainsi que des MEMS.

La très petite taille des nanoparticules et les propriétés lubrifiantes de certaines d'entre elles permettraient leur emploi comme fluide pour les transmissions, les boîtes de vitesses et les huiles de moteur thermique [21].

En dysphasique, en parvenant à améliorer leurs performances, on peut envisager des systèmes de climatisation et frigorifiques améliorés, ainsi que l'utilisation de caloducs plus performants pour les applications spatiales et en refroidissement électronique.

Il est également envisagé d'utiliser l'augmentation du flux critique pour les circuits d'injection de secours de centrales nucléaires à eau pressurisée [21].

## **CONCLUSION:**

Bien que l'étude des phénomènes de transferts (transferts de quantité de mouvement, transfert de chaleur et transfert de masse) en milieu poreux soit encore en pleine évolution, avec la considération de problèmes de plus en plus complexes ou nouveaux (transferts couplés, nanothermique,... etc.), le chercheur dispose d'un ensemble de connaissances (résultats et modèles) et d'outils expérimentaux et numériques permettant des prédictions satisfaisantes pour un grand nombre de problèmes. Il s'agit principalement des connaissances acquises sur les écoulements et transferts conductifs et convectifs. Aussi bien du point de vue théorique qu'expérimentale, l'exploitation de ces connaissances se heurte cependant encore souvent, non seulement aux difficultés de détermination des propriétés de transfert effectives et des coefficients optiques, mais également aux difficultés associées à la mesure locale d'un grand nombre de variables.

L'utilisation de nanofluide en tant que fluides thermiques est un nouveau domaine qui est encore en phase de recherche. Des améliorations d'échange thermique de l'ordre de plusieurs dizaines de pour cent semblent possibles, notamment pour certaines applications: moteurs thermiques et refroidissement électronique. Néanmoins, compte tenu de l'augmentation de viscosité due aux nanoparticules, le bilan énergétique reste encore mitigé. Compte tenu des diverses méthodes de synthèse et de caractérisation, les résultats expérimentaux ne sont pas reproductibles entre les différents groupes de recherche travaillant sur le sujet. L'influence d'un certain nombre de paramètres, tels que la taille et la forme, les phénomènes aux interfaces entre liquide et particules, sont encore mal caractérisés.

# II

## CONVECTION MIXTE ET SYNTHESE BIBLIOGRAPHIE

### II .1.Définition de la convection

La convection est un mode de transport d'énergie par l'action combinée de la conduction, de l'accumulation de l'énergie et du mouvement du milieu. Elle est considérée comme le mécanisme le plus important de transport d'énergie entre une surface solide et un liquide ou un gaz. Le transport d'énergie par convection d'une surface dont la température est supérieure à celle du fluide qui l'entoure s'effectue en plusieurs étapes. D'abord la chaleur s'écoule par conduction de la surface aux molécules du fluide adjacentes. L'énergie ainsi transmise sert à augmenter la température et l'énergie interne de ces molécules du fluide. Ensuite les molécules vont se mélanger avec d'autres molécules situées dans une région à basse température et transférer une partie de leur énergie. Dans ce cas l'écoulement transporte, simultanément, le fluide et l'énergie. L'énergie est, à présent, emmagasinée dans les molécules du fluide et elle est transportée sous l'effet de leur mouvement.

La transmission de chaleur par convection est désignée, selon le mode d'écoulement du fluide, par convection libre, convection forcée et convection mixte [22].

- **Convection naturelle :**

Le phénomène de convection naturelle thermique apparaît spontanément, sous le seul effet des différences de masse volumique résultantes des différences de températures sur les frontières et d'un champ de forces extérieures (le champ gravitationnel ...).

- **Convection forcée :**

Le phénomène de convection forcée apparaît quand le mouvement du fluide est imposé par une cause mécanique extérieure (pompe, ventilateur...).

- **Convection mixte :**

Dans l'étude de la convection forcée, on a ignoré les effets de la gravité. En convection naturelle, on ne s'est intéressé qu'à eux. Il existe pourtant un grand nombre de situations intermédiaires où les mécanismes de la convection forcée et de la convection libre coexistent avec des ordres de grandeur comparables : nous sommes là dans le véritable cas général de la convection, que l'on a

préférez baptiser plus élégamment "convection mixte". Parmi les exemples de cette mixité, on peut citer : les écoulements lents en canalisations (comme dans les radiateurs à eau) ou le long d'une paroi, les jets anisothermes (chauffage ou climatisation des locaux, panaches de fumée ...), les écoulements atmosphériques et les courants marins (qui sont importants pour les questions de climatologie et de pollution), et plus généralement beaucoup d'écoulements fortement anisothermes.

Mais un aspect nouveau fait ici son apparition : les deux mécanismes vont s'aider ou se contrarier selon le sens relatif du mouvement forcé par rapport au mouvement gravitaire, qui jouera donc un rôle essentiel. Si les effets de la pesanteur s'opposent au mouvement forcé, l'écoulement est freiné, le transfert thermique a tendance à diminuer et on parle de convection mixte "contrariée". Si l'écoulement forcé est de même sens que l'écoulement libre (cas de la plaque verticale chauffée, dans un fluide lui-même en mouvement ascendant) il se produit une amplification des transferts par rapport à la convection forcée seule et on parle alors de convection mixte "aidée". Enfin, l'écoulement forcé peut être perpendiculaire à la direction des forces de pesanteur (c'est à dire horizontal). En général on observe là aussi une amélioration des échanges thermiques.

## II.2. Formulation générale

Pour mémoire, rappelons d'abord les équations générales qui régissent les champs de vitesse et de température dans un écoulement anisotherme de fluide dilatable. Elles expriment respectivement le bilan de masse (équation de continuité), le bilan de quantité de mouvement, et le bilan d'énergie.

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad (\text{II.51})$$

$$\overline{\vec{V} \operatorname{grad} \vec{V}} = -\beta(T - T_\infty) \vec{g} - \frac{1}{\rho_\infty} \overline{\operatorname{grad} P^*} + \nu \Delta \vec{V} \quad (\text{II.52})$$

$$\overline{\vec{V} \operatorname{grad} T} = \alpha \Delta T \quad (\text{II.53})$$

## II.3. Convection mixte externe le long d'une paroi plane verticale à température uniforme :

On considère une paroi verticale, et un fluide immobile et isotherme au loin ; mais nous n'imposerons pas de restrictions particulières à la température de paroi  $T_p$ , qui pourra donc dépendre de  $x$ . le fluide ambiant est animé d'un mouvement ascendant, de vitesse  $U = \text{cst}$ . L'axe  $x$  est dirigé dans le sens de ce mouvement.

Nous sommes à nouveau en présence d'un écoulement de couche limite, pour lequel les approximations classiques restent valables ; en particulier, on admet que le gradient de pression est nul. Les équations (II.51, II.52, II.53) prennent alors la forme simplifiée :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \tag{II.54}$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = g\beta(T - T_\infty) + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \tag{II.55}$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{II.56}$$

Pour des conditions aux limites :

$$y = 0 \quad U = 0 \quad V=0 \quad T = T_p = \text{cte}$$

$$y = \infty \quad V= V_\infty \quad U = U_\infty \quad T = T_\infty$$

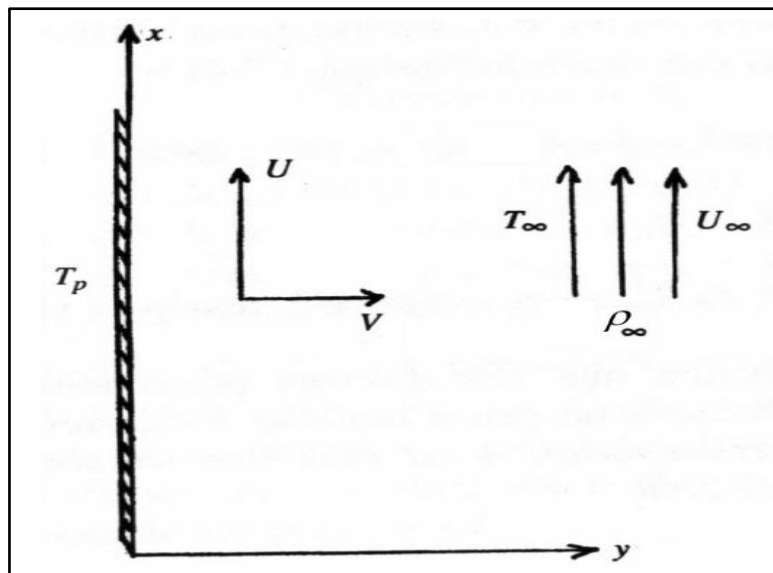


Figure II.1 : Convection mixte sur une plaque verticale

#### II.4.Couche limite dynamique, thermique et massique.

Nous choisissons pour cela une disposition simple : plaque plane verticale, maintenue à une température uniforme  $T_p$  ; fluide ambiant immobile ( $U_\infty= 0$ ) à température uniforme  $T_\infty$ . Plaçons-nous par exemple dans le cas où la plaque est plus chaude que le fluide ( $T_p > T_\infty$ ).

Commençons par visualiser l'écoulement en injectant un traceur (colorant, fumée, bulles...) au niveau du bord d'attaque. On observe alors un filet qui est d'abord rectiligne et parallèle à la paroi, puis qui ondule avant de se fragmenter en volutes (figure. II.2). Ceci traduit donc, l'existence de deux structures dynamiques correspondant à deux régimes différents d'écoulement : laminaire près du bord d'attaque, puis turbulent. Il est d'ailleurs très facile de réaliser une expérience qualitativement analogue en regardant le filet de fumée qui monte d'une cigarette en air calme.

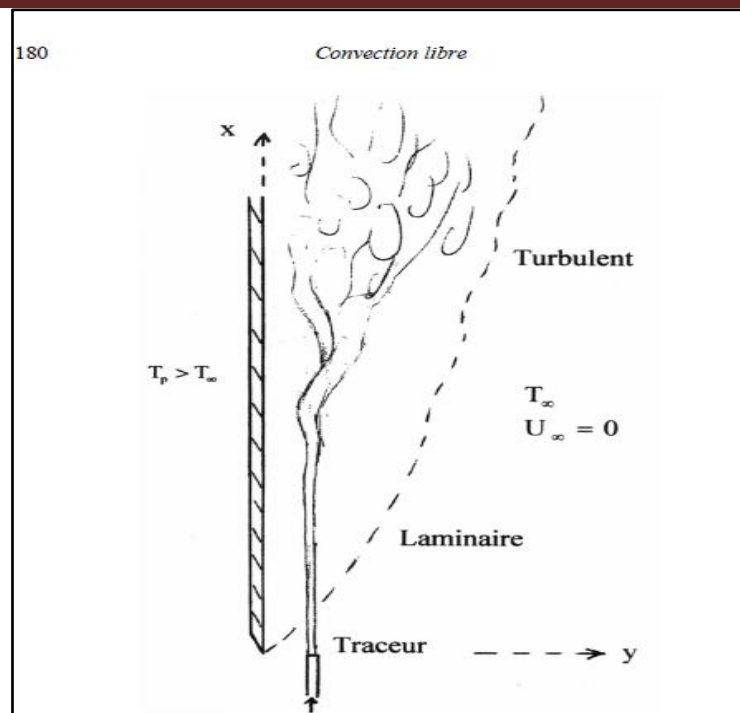


Figure. II.2 : Visualisation d'un écoulement de convection libre ; plaque plus chaude que le fluide

Abordons ensuite l'aspect quantitatif en procédant à des mesures de vitesses dans la zone d'écoulement, plus précisément à des mesures de la composante  $U$  selon la direction  $x$  ascendante. A la paroi, la condition d'adhérence se traduit toujours par  $U = 0$ .

Lorsqu'on s'éloigne de la plaque, il s'avère que  $U$  augmente très rapidement : on retrouve le phénomène de couche limite dynamique, lié à la viscosité des fluides, et déjà mis en évidence dans d'autres circonstances. Mais ensuite apparaît une différence majeure avec les écoulements externes classiques : ici  $U$  passe par un maximum  $U_m$  puis décroît et tend vers zéro du fait que, au loin, la vitesse  $U_\infty$  est nulle, ceci aussi bien dans la zone laminaire que dans la zone turbulente (où  $U$  représente alors une moyenne temporelle) (figure. II.3). En dehors de la convection naturelle, c'est seulement dans les jets pariétaux qu'on observe ce type de profil [23].

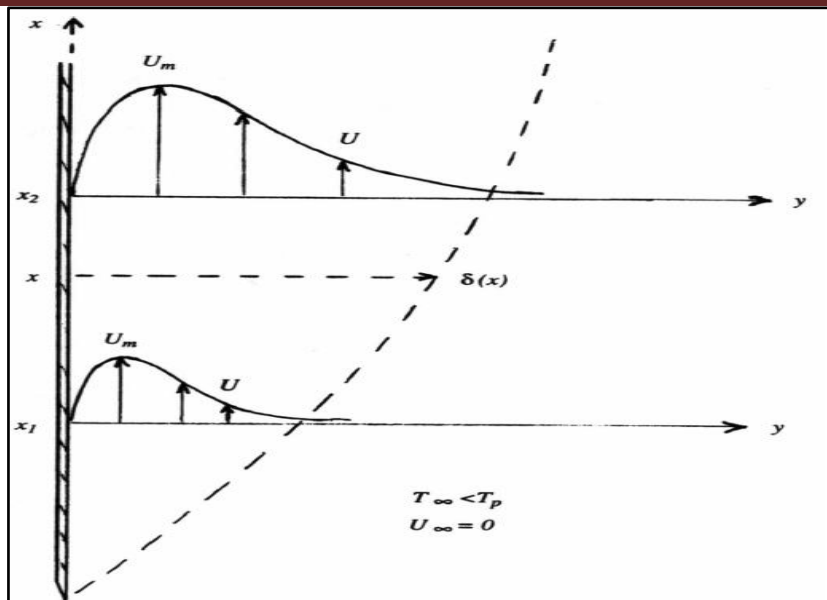


Figure. II.3 : Profils de vitesse dans un écoulement de convection libre ;  $\delta(x)$  épaisseur de couche limite;

$$U(\delta) = 0,01U_m [23]$$

Troisième et dernière observation : examinons les profils de température perpendiculairement à la plaque. Ici, pas de nouveauté apparente,  $T$  varie rapidement vers la paroi et tend ensuite asymptotiquement vers  $T_\infty$  (figure.II.4). On reconnaît donc la présence d'une couche limite thermique, il subsiste toujours un problème de précision en ce qui concerne la valeur de  $\delta_T$ .

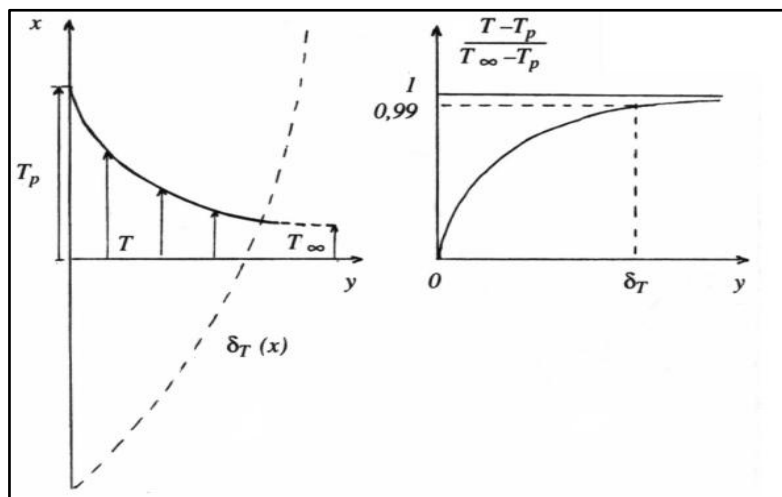


Figure. II.4 : Couche limite thermique en convection libre : profil de température et profil adimensionné.

### II.5.Synthèse bibliographique :

Dans cette partie, nous présentons une recherche bibliographique sur la convection en milieux poreux et saturés par des nanofluides. Comme on l'a déjà signalé, la convection mixte dans les milieux poreux est présente dans de très nombreux processus naturels ou industriels. Les

exemples sont multiples et nous pouvons citer quelques-uns : la récupération de pétrole, l'isolation thermique...etc

**Bousri et Bouhadef** [24] ont étudié numériquement le transfert de chaleur et de masse simultanées dans les écoulements de certains fluides dans des milieux poreux réactifs. Une analyse basée sur le modèle de Darcy-Brinkman et les équations de conservation, qui décrit l'évolution spatiale et temporelle des phénomènes couplés de réaction chimique, de diffusion et de transfert thermique a été entreprise. L'approche est faite à partir d'un modèle 2D, en convection forcée, avec une configuration géométrique cylindrique, le système d'équations gouvernantes obtenu est discrétisé et traité numériquement, grâce à la méthode des volumes finis. La résolution a ensuite effectué à partir de l'algorithme Sampler, les résultats obtenus ont permis de quantifier les différents échanges de chaleur et de masse, et d'établir la variation de la concentration et de la température dans le milieu poreux réactif, en fonction d'un certain nombre de paramètres tel que le nombre de Darcy, le nombre de Reynolds, et le nombre de Frank-Kametskii modifié.

**S. Djedjig et al.** [25] ont présenté une étude numérique concernant le transfert combiné de chaleur et de masse dans un milieu poreux. Ce milieu est homogène et isotrope. Le modèle mathématique qui gouverne le milieu est celui de Darcy corrigé par le terme de Brinkman. Le système d'équations couplées est résolu par la méthode des éléments finis. Il s'agit d'un jet d'air laminaire impactant un disque circulaire constituant la base d'une chambre cylindrique en partie poreuse, le fluide pénètre la chambre suivant un axe central et la quitte par sa périphérie. L'analyse est faite dans une large gamme de paramètres : le nombre de Reynolds, le nombre de Grashof, le nombre de Darcy, le nombre de Lewis et l'épaisseur de la couche poreuse. L'écoulement est supposé bidimensionnel et laminaire. Le fluide considéré est de l'air ( $Pr=0.72$ ). L'approximation de Boussinesq est adoptée. La paroi d'impact est soumise à des températures et concentrations constantes et uniformes. Les résultats montrent que la présence de la matrice poreuse crée une résistance à l'écoulement qui finit par l'affaiblir et limiter les forces convectives. Nous avons constaté que l'écoulement ne pénètre pas dans la couche poreuse pour les faibles nombres de Darcy. Pour des nombres de Darcy élevé, la pénétration de l'écoulement est.

Totale. Le nombre de Nusselt augmente avec l'augmentation du nombre de Darcy. Les résultats montrent aussi que le transfert de masse est d'autant plus important que le nombre de Lewis est élevé.



**S. Bougoul et al.** [26] Un modèle numérique d'écoulements de solution saline dans un milieu poreux saturé, représentant le substrat de culture parallélépipédique, a été développé pour rendre compte des résultats de visualisations par colorants et prédire l'évolution de la concentration de la solution en chaque point du substrat. Une superposition de puits et de sources a permis de traiter analytiquement le problème de Darcy correspondant à une injection ponctuelle et un point de drainage localisé et elle a donné une illustration des lignes de courant, du champ de vitesse ainsi que la forme du bulbe d'irrigation. Pour interpréter le phénomène de l'éluion de la solution ancienne par l'apport de solution nouvelle, l'équation de Navier-Stokes associée à une équation de dispersion a été résolue.

**O. V. Trevisan et al.** [27] On étudié analytiquement et numériquement la convection naturelle de chaleur et de masse à travers une couche poreuse verticale soumise à des flux uniformes de chaleur et de masse sur un côté. L'écoulement est conduit par l'effet combiné d'Archimède dû aux variations de température et de concentration à travers le milieu poreux. La première partie de l'étude contient une solution analytique linéarisée d'océan pour le régime de couche limite à  $Le = 1$ , et une solution de similitude pour des écoulements conduits par le transfert de chaleur ( $n = 0$ ) et avec  $Le < 1$ . La seconde partie de l'étude contient une suite d'expériences numériques qui valide les résultats analytiques et fournit des données dans le domaine non couvert par l'analyse. Les résultats numériques s'étendent dans le domaine de nombre de Rayleigh  $20 < Ra < 10^5$ , celui du rapport de gravité  $-11 < n < 9$ , celui du rapport de forme  $1 < H/L < 4$  et celui du nombre de Lewis  $0,03 < Le < 40$ .

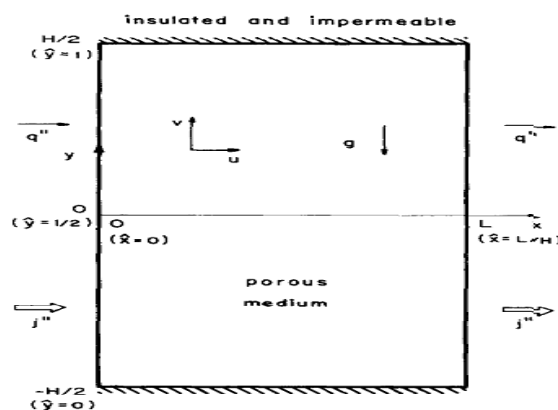


Figure II.5 : Schéma d'une couche poreuse bidimensionnelle soumise à la chaleur uniforme et aux flux de masse dans la direction horizontale.

**Saeid** [28] a étudié l'écoulement en convection mixte, laminaire le long d'une plaque verticale a une température en régime d'oscillation périodique. Le fluide est newtonien et incompressible avec des propriétés constantes sauf dans le terme de gravité où il adopte l'hypothèse de

Boussinesq et néglige la dissipation visqueuse. L'écoulement est laminaire et en régime transitoire. Les équations du bilan dynamique et thermique sont approchées par des couches limites bidimensionnelles. Les équations sont discrétisées et résolues à l'aide de la méthode numérique aux différences finies. Le calcul est effectué pour l'air ( $Pr=0.72$ ) et l'eau ( $Pr=7.0$ ). La comparaison du nombre de Nusselt et le coefficient de frottement avec des résultats antérieurs sont satisfaisants. Les variations périodiques du nombre de Nusselt et du coefficient de frottement sont effectuées pour différentes amplitudes et fréquences de la température de plaque.

**A. Amahmid et al.** [29] On étudie analytiquement et numériquement la convection naturelle thermosolutale dans une couche poreuse verticale soumise à des flux de chaleur et de masse uniformes. Et pour cela ils ont utilisé le modèle de Brinkman et ont considéré la situation particulière où les forces de volume thermiques et solutales sont opposées et de même intensité. Une solution analytique basée sur l'hypothèse d'un écoulement parallèle, est développée pour des rapports de forme  $A$  de la matrice poreuse suffisamment élevés. Les nombres de Rayleigh critiques au de la desquels les mouvements convectifs sont possibles sont déterminés analytiquement en fonction des nombres de Lewis Leet de Darcy  $Da$ . Les résultats présentés couvrent les gammes suivantes :  $0 < R_T < 10^3$ ,  $0 < Le < 10^3$  et  $0 < Da < 10$ . Les résultats du modèle de Darcy et ceux du milieu fluide ( $Pr \geq 0.5$ ) sont correctement prédits par le modèle de Brinkman respectivement pour les faibles et grands nombres de Darcy  $Da$ . L'étude numérique n'a permis d'obtenir que les solutions monocellulaires malgré la multiplicité des solutions démontrée analytiquement.

**Hady et al.** [30] A étudié numériquement l'influence de la chaleur Absorption de génération sur flux de couche limite convective libre À partir d'un cône vertical assemblé dans un milieu poreux saturé par Nanofluide comme indiqué sur la Figure II.6.

L'influence du paramètre d'absorption de la génération de chaleur sur le numéro de Nusselt a été étudiée.

Leurs résultats indiquent que lorsque le paramètre d'absorption de la génération de chaleur a augmenté, le nombre local de Nusselt a diminué

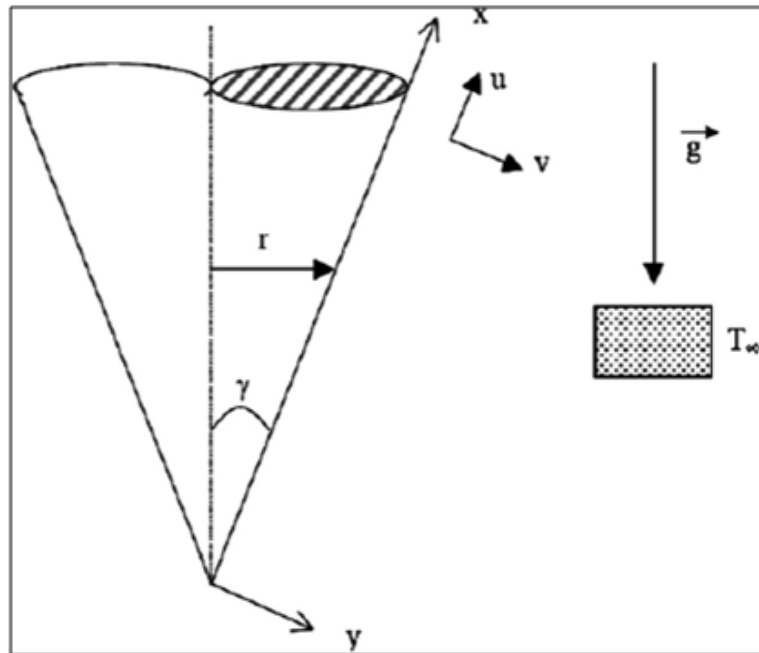


Figure. II.6 : Modèle de débit et système de coordonnées physiques de Hady et al.

**Rana et al.** [31] a étudié numériquement le flux de couche limite de convection mixte stable d'un nanofluide incompressible le long d'une plaque inclinée à l'anneau  $\alpha$  dans un milieu poreux tel que représenté sur la Figure II.7 les effets du nombre de mouvements browniens et de la thermophorèse sur le transfert de chaleur ont été étudiés.

Leurs résultats indiquent que le nombre de Nusselt a diminué avec l'augmentation des thermophorèse est le nombre ou le numéro de mouvement brownien.

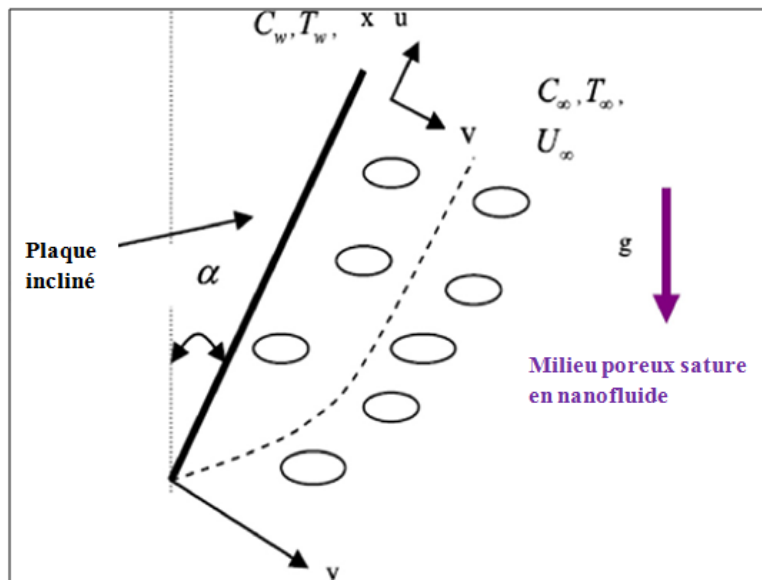


Figure. II.7 : Modèle physique et système de coordonnées de Rana et al. [31].

**R. A. Silva et al.** [32] ont présenté une étude numérique avec fluide loi de puissance (non-newtonien) dans un canal partiellement rempli, dans un milieu poreux homogène et isotrope.

Leur résultat montre que la chute de pression est une fonction de la porosité, du nombre de Darcy, de coefficient de saut de cisaillement  $\beta$ , et d'index de comportement d'écoulement.

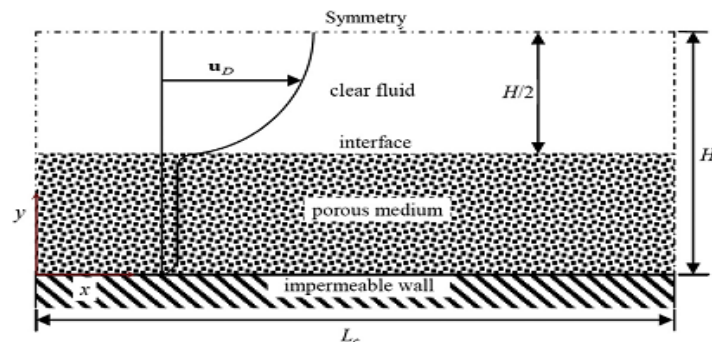


Figure II.8 Schéma d'un flux de fluide dans un canal bidimensionnel partiellement rempli avec le matériau poreux.

**M. Siavashi et al.** [33] a mené une investigation numérique sur l'amélioration du transfert de chaleur avec une application simultanée des nanoparticules et d'un milieu poreux à l'intérieur d'un canal. Leurs résultats que le rapport de forme, les nanoparticules, la concentration et le nombre de Reynold sont des effets considérables sur la performance (ou transfert de chaleur).

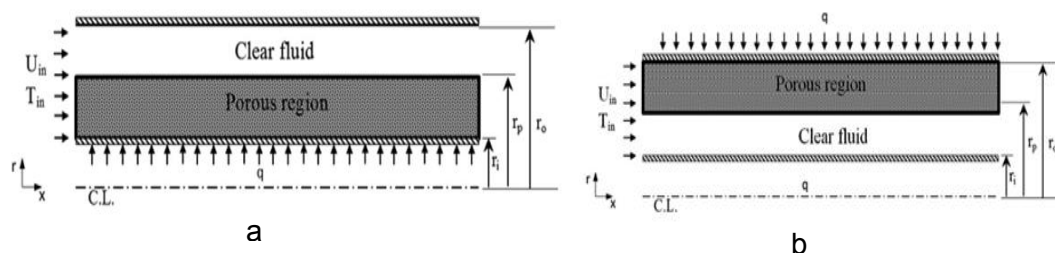


Figure II.9 : Schéma de principe du problème à l'étude avec (a) le flux chaud et poreux sur le mur intérieur (b) du flux chaud et poreux sur le mur externe.

**Gladés Bachir** [16] Il est étudié l'influence de la concentration en nanoparticules ( $Al_2O_3$ ,  $CuO$ ,  $Cu$ ,  $Ag$  and  $Au$ ) dispersées dans un fluide de base sur le transfert de chaleur par conduction et convection en configuration de Rayleigh-Bénard. Les relations donnant la chaleur spécifique et le coefficient d'expansion thermique des nanofluides, utilisées ce travail, déduites à partir des lois de la thermodynamique différent de celles approchées retenues dans la littérature. Il montre que pour une cellule expérimentale donnée et à une différence de température fixée l'ajout de nanoparticules dans un fluide porteur conduit à une diminution du nombre de Rayleigh dans le nanofluide obtenu comparé à celui dans le fluide porteur seul. L'apparition de la convection est donc retardée dans le nanofluide. Il s'ensuit que contrairement a ce qui a été obtenu

antérieurement par de nombreux auteurs, il est montré que la présence des nanoparticules solides dans un fluide porteur peut réduire le transfert de chaleur au lieu de l'augmenter.

**Khan et Aziz** [34] ont étudié numériquement la convection double-diffusive libre d'une plaque verticale à un milieu poreux saturé avec un fluide de base binaire contenant des nanoparticules. Ce travail a étendu le travail de **Nield et Kuznetsov** [35] où les flux de nanoparticules spécifiés et la surface verticale ont un soluté thermique comme fonction de loi de puissance de la distance le long de la surface, comme le montre la figure II.10.

Les influences de l'exposant de la loi de puissance sur les caractéristiques de transfert de chaleur et de masse ont été étudiées.

Les résultats ont montré que le nombre réduit de nanoparticules de Sherwood était significativement plus élevé pour la double diffusion dans les nanofluides réguliers que dans la forme-diffusion dans les nanofluides réguliers ; Et dans les deux cas, il augmente à mesure que la concentration de soluté sans dimension exponentielle augmente, Et le nombre réduit de nanoparticules de Sherwood dépendait en grande partie du processus de diffusion (mono ou double) et peu affecté par le fluide (régulier ou nano).

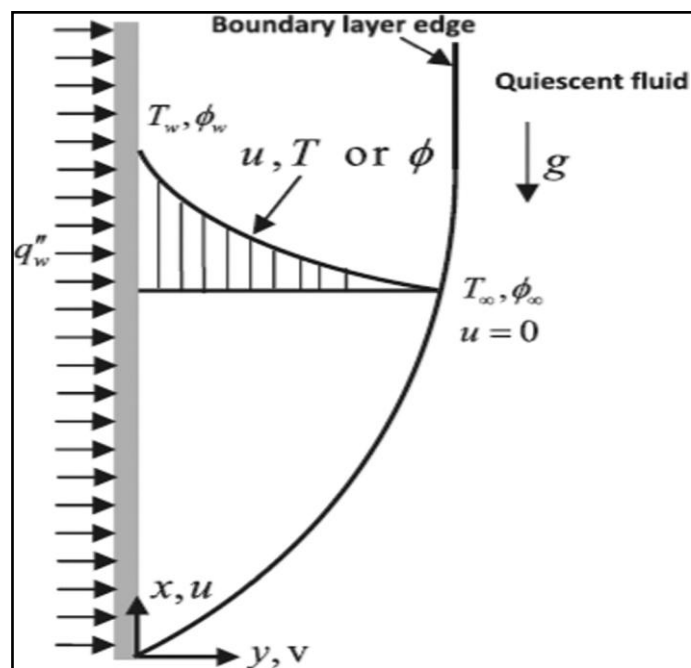


Figure II.10 : Surface verticale dans un milieu poreux saturé d'un fluide contenant du soluté et avec des nanoparticules en suspension, Khan et Aziz .

**CHattopadhyay et al.** [36] ont traité numériquement la convection mixte dans une cavité poreuse chauffée sinusoïdalement avec les parois latérales mobiles, en utilisant le modèle de Brinkman pour simuler l'écoulement dans un milieu poreux en variant les paramètres tel que, le nombre de Richardson  $Ri$ , nombre de Darcy, Grashof et l'amplitude de la température. Leur

résultat montre que les caractéristiques de l'écoulement fortement affectées par la présence du milieu poreux.

On trouve aussi **M. Mharzi et al ; [37]** ont montré que les échanges thermiques et solutale sont principalement sensibles aux nombres de Rayleigh et Darcy, de sorte que l'augmentation du nombre de Ra accroît la convection dans la partie fluide de la cavité, tandis que la convection dans la couche poreuse est améliorée par l'augmentation du nombre de Da. Dans une cavité carrée contenant simultanément un fluide binaire (air + polluant) et une couche poreuse saturée et verticale.

**C.Y. Cheng [38]** a étudié les effets de Soret et Dufour sur la convection naturelle thermique et massique près d'un cône tronqué verticalement avec des températures et concentrations variables dans un milieu poreux ses résultats montrent que l'augmentation du paramètre Dufour tend à diminuer le nombre de Nusselt et diminuer le nombre de Sherwood.

## Conclusion

Les flux convectifs qui proviennent en partie ou exclusivement de forces de flottabilité sont examinés, et les paramètres sans dimension nécessaires pour caractériser ces flux ont été introduits. Cette présentation n'a pas d'autre prétention que de fournir les bases pour une analyse des situations de convection mixte rencontrées dans les applications courantes. L'analyse complète d'un problème réel, le dimensionnement d'une installation ou l'optimisation d'un procédé où ces mécanismes convectifs interviennent parfois de façon déterminante nécessitent évidemment des connaissances spécifiques plus étendues. On a souhaité insister sur les aspects fondamentaux de cette question afin d'aider à la formulation d'un problème.

# III PROBLEMATIQUE ET MODELISATION MATHEMATIQUE

## Introduction

Nous présentons dans ce chapitre, les équations modélisant le problème traité dans ce mémoire (figure III.1). Nous établirons les équations gouvernantes de couches limites hydrodynamique, thermique et massique.

Nous exprimons les équations de conservation et les conditions aux limites sous forme adimensionnelle et nous introduisons les principales grandeurs dynamiques et thermiques.

### III. 1 Description du problème

La géométrie du problème considéré est schématisée dans la figure (III.1), il s'agit d'un écoulement en convection mixte devant une plaque verticale semi-infinie immergée dans un milieu poreux non Darcéen rempli d'un nanofluid visqueux incompressible. Nous considérons une plaque verticale à  $y = 0$ . A cette limite, la température  $T$ , la concentration  $C$ , et la fraction volumique des nanoparticules  $\varphi$  prennent des valeurs constantes et  $T_w$ ,  $C_w$ ,  $\varphi_w$ , respectivement

Les valeurs de l'ambiance correspondante de la température et la fraction volumique et la concentration quand  $y$  tends vers l'infini sont notées par  $T_\infty$  et  $\varphi_\infty$  et  $C_w$ .

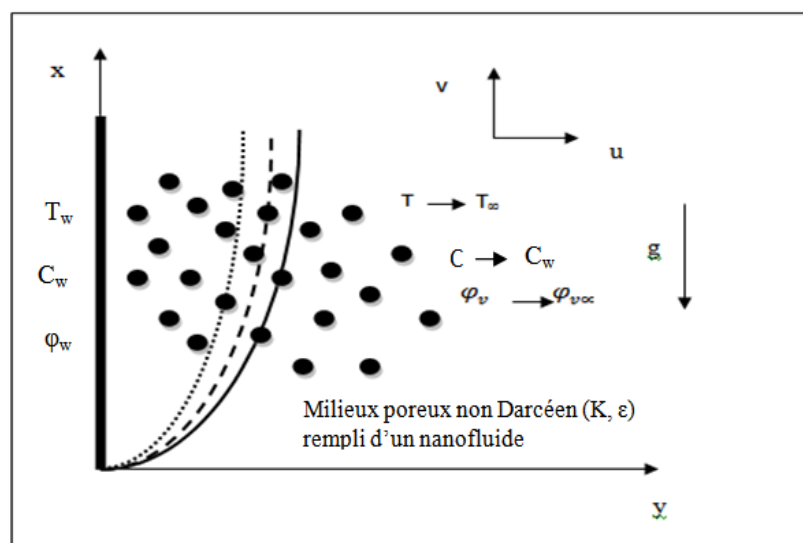


Figure III.1 : Géométrie du problème et système de coordonnées.

### III.2. Hypothèses simplificatrices

- L'écoulement est laminaire, permanent, bidimensionnel (x, y) et axisymétrique
- Le fluide étudié est un fluide newtonien et incompressible.
- Les transferts par rayonnement sont négligeables.
- Le milieu poreux est isotrope et homogène.
- La dissipation visqueuse est négligée dans l'équation de l'énergie.
- Les propriétés thermo physique du fluide ( $\mu, \beta_T, \lambda, C_p$ ) sont supposé constantes.
- L'approximation d'Oberbeck-Boussinesq et la couche limite pour le nanofluide sont supposées validées. L'équilibre thermique local dans le milieu poreux homogène est également supposé. il y'a uniquement l'effet du mouvement Brownien et la thermophorèse qui interviennent dans cette configuration.

Sous ces hypothèses, les équations gouvernantes de couches limites hydrodynamique, thermique et massique peuvent être écrites sous la forme dimensionnelle.

### III.3 Équations de conservation dimensionnelles

Compte tenu des hypothèses citées précédemment, les équations régissant le phénomène s'écrivent :

#### a- Équation de continuité

$$\nabla \vec{V} = 0 \tag{III.1}$$

#### b-Équation de quantité de mouvement

L'équation vectorielle de conservation de la quantité de mouvement à travers un milieu poreux s'écrit :

$$\frac{\rho_{fb}}{\varepsilon} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\vec{\nabla}P - \frac{\mu_f}{K} \vec{V} - \frac{C_f \rho_{fb\infty}}{\sqrt{K}} \vec{V}|\vec{V}| + [(1 - \varphi_\infty) \vec{g} \{ \beta_T (T - T_\infty) - \beta_C (C - C_\infty) \} - (\rho_{np} - \rho_{fb\infty}) g \varphi - \varphi_\infty] \tag{III.2}$$

$\rho_f$  La masse volumique du fluide à la température de référence,  $\mu_f$  La viscosité dynamique du milieu poreux.  $C_f$  Coefficient de Forchhiemer, et  $\varepsilon$  La porosité du milieu poreux,  $K$  La perméabilité du milieu poreux, et  $g$  l'accélération gravitationnelle,  $P$  est la pression,

#### c-Équation d'énergie

$$(\rho c)_{fb} \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T = \vec{\nabla} \cdot (\alpha_{eff} T + \varepsilon (\rho c)_{np} [D_B \nabla \varphi \cdot \nabla T + \left( \frac{D_T}{T_\infty} \right) \nabla T \cdot \nabla T]) \tag{III.3}$$



$$\left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha_{\text{eff}} \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\varepsilon(\rho c)_{\text{np}}}{(\rho c)_{\text{fb}}} \left[ D_B \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + \left(\frac{D_T}{T_\infty}\right) \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 \right] \quad (\text{III.4})$$

Avec :

$$\alpha_{\text{eff}} = (\alpha_m + \xi du)$$

Ici,  $u$  et  $v$ , les composantes de vitesse de Darcy,  $T$  la température, et  $\varphi$  la fraction volumique des nanoparticules,  $(\rho c)_{\text{fb}}$  est la capacité thermique de fluide de base, et  $(\rho c)_{\text{np}}$  la capacité thermique effective de nanoparticule, et  $\alpha_m$  est la diffusivité thermique du milieu poreux, et  $D_B$  Le coefficient de diffusion Brownienne,  $D_T$  est le coefficient de diffusion thermophorétique.

**d-Équation de transfert de masse :**

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\vec{V} \nabla C) = D \Delta C \quad (\text{III.5})$$

**e-Équation de fraction volumique :**

$$\frac{1}{\varepsilon} \nabla \nabla \varphi = D_B \nabla^2 \varphi + \left(\frac{D_T}{T_\infty}\right) \nabla^2 T \quad (\text{III.6})$$

Le système d'équations différentielles est de forme suivante d'après la projection selon  $x$  et  $y$  en utilisant les hypothèses de la couche limite :

**Équation de continuité**

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.7})$$

**Équation de quantité de mouvement**

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\mu}{K} u - \frac{C_F \rho_{\text{fb}} \infty}{\sqrt{K}} u^2 + [(1 - \varphi_\infty) \vec{g} \{ \beta_T (T - T_\infty) - \beta_C (C - C_\infty) \} (\rho_{\text{np}} - \rho_{\text{fb}} \infty) \vec{g} (\varphi - \varphi_\infty)] \quad (\text{III.8})$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.9})$$

**Équation d'énergie**

$$\left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha_{\text{eff}} \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\varepsilon(\rho c)_{\text{np}}}{(\rho c)_{\text{fb}}} \left[ D_B \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + \left(\frac{D_T}{T_\infty}\right) \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 \right] \quad (\text{III.10})$$

**Équation de transfert de masse**

$$\frac{1}{\varepsilon} \left( u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} \right) = D_{sm} \left( \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) \quad (\text{III.11})$$

### Équation de fraction volumique

$$\frac{1}{\varepsilon} \left( u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = D_B \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{D_T}{T_\infty} \right) \left( \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{III.12})$$

### III.4 Condition aux limites dimensionnelles

Les conditions aux limites sont :

$$y = 0 : v = 0, T = T_w, C = C_w, \varphi = \varphi_w$$

$$y \rightarrow \infty : u = u_\infty, T \rightarrow T_\infty, C \rightarrow C_\infty, \varphi \rightarrow \varphi_\infty$$

On introduit le nombre de Péclet local  $Pe_x$  qui est défini par :

$$Pe_x = \frac{U_\infty x}{\alpha_f}$$

Et la variable de similitude est introduite :

$$\eta = \frac{y}{x} Pe_x^{\frac{1}{2}} \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Nous présentons les variables adimensionnelles

$$s(\eta) = \frac{\psi}{\alpha_m Pe_x^{\frac{1}{2}}} \quad \theta(\eta) = \frac{(T - T_\infty)}{(T_w - T_\infty)} \quad f(\eta) = \frac{(\varphi - \varphi_\infty)}{(\varphi_w - \varphi_\infty)} \quad \gamma(\eta) = \frac{C - C_\infty}{C_w - C_\infty}$$

Les équations (III.7 - III.12) avec les variables de similarité ci-dessus peuvent être encore réduites à un ensemble d'équations différentielles ordinaires :

$$S'' + 2Fo s' s'' = \lambda[\theta' + Nc \gamma' - Nr f'] \quad (\text{III.13})$$

$$\theta'' + \frac{1}{2} S \theta' + \xi Pe_d (\theta' S')' + Nt \theta'^2 + Nb f' \theta' = 0 \quad (\text{III.14})$$

$$\gamma'' + \frac{1}{2} Le S \gamma' = 0 \quad (\text{III.15})$$

$$f'' + \frac{1}{2} Le_p S f' + \frac{Nt}{Nb} \theta'' = 0 \quad (\text{III.16})$$

Les conditions aux limites deviennent :

$$\left. \begin{aligned} \eta = 0, S(0) = 0; \theta(0) = 1; \gamma(0) = 1; f(0) = 1 \\ \eta \Rightarrow \infty; S'(\infty) = 1; \theta(\infty) = 0; \gamma(\infty) = 0; f(\infty) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.17})$$

Nb : Paramètre d'un mouvement Brownien :  $Nb = \frac{\varepsilon (\rho c)_p D_B (\varphi_w - \varphi_\infty)}{(\rho c)_f \alpha_m}$

Nt : paramètre de thermophorèse :  $Nt = \frac{\varepsilon (\rho c)_p D_T (T_w - T_\infty)}{(\rho c)_f \alpha_m T_\infty}$

Nr : représente un taux de flottabilité de nanoparticule :  $Nr = \frac{(\rho_{np} - \rho_{fb\infty})(\varphi_w - \varphi_\infty)}{\rho_{f\infty} \beta_T (T_w - T_\infty)(1 - \varphi_\infty)}$

Nc : représente un taux de flottabilité régulière (fluide de base) :  $Nc = \frac{\beta_C (C_w - C_\infty)}{\beta_T (T_w - T_\infty)}$

Fo : nombre de Forchheimer local :  $Fo = \frac{\sqrt{K} C_F \alpha_m}{\nu_x} Pe_x$

Le : nombre de Lewis :  $Le = \frac{\alpha_m}{D \varepsilon}$

Le<sub>p</sub> : nombre de Lewis pour les nanoparticules :  $Le_p = \frac{\alpha_m}{\varepsilon D_B}$

Pe<sub>d</sub> : Pécelet qui dépend du diamètre du pore :  $Pe_d = \frac{U_\infty d}{\alpha_m}$  et  $\xi$  : coefficient de dispersion thermique.

Et  $\lambda = \frac{Ra_x}{Pe_x}$   $Ra_x = \frac{(1 - \varphi_\infty) \rho_{f\infty} g \beta_T \Delta T K_x}{\alpha_m \mu}$ ,  $Ra_x$  représente le nombre de Rayleigh local

### III.5 Détermination du nombre de Nusselt et Sherwood

On a le nombre de Nusselt est un nombre adimensionnel utiliser pour caractériser le transfert thermique entre un fluide et une paroi «transfert convectif», définie par :

$$Nu_x = \frac{q_w x}{k_m (T_w - T_\infty)} \quad (III.18)$$

Où  $q_w$  est le flux de chaleur de la paroi et  $k_m$  est la conductivité thermique du milieu poreux.

$$q_w = - k_m \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (III.19)$$

Le nombre de Sherwood local régulier  $Sh_x$  et nombre de Sherwood de nanoparticule  $Sh'_x$  utilisé pour caractériser le transfert de masse défini par :

$$Sh_x = \frac{q'_w x}{D_{sm} (C_w - C_\infty)} \quad (III.20)$$

$$\text{Sh}'_x = \frac{q''_w x}{D_B(\varphi_w - \varphi_\infty)} \quad (\text{III.21})$$

$q'_w$  est le flux massique à la surface et  $q''_w$  est le flux massique de nanoparticules surfacique sont donnés par:

$$q'_w = -D_{sm} \left. \frac{\partial C}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (\text{III.22})$$

$$q''_w = -D_B \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (\text{III.23})$$

En utilisant les variables sans dimension, on obtient les nombres réduits correspondants

$$\frac{\text{Nu}_x}{\text{Pe}_x^2} = -[1 + \xi \text{Pe}_d S'(0)] \theta'(0) \quad (\text{III.24})$$

$$\frac{\text{Sh}_x}{\text{Pe}_x^2} = -\gamma'(0) \quad (\text{III.25})$$

$$\frac{\text{Sh}'_x}{\text{Pe}_x^2} = -f'(0) \quad (\text{III.26})$$

### Conclusion :

Une fois les équations régissant le problème posé, avec les conditions aux limites associées, et mises sous leurs formes adimensionnelles, et étant donné leurs présentations sous forme d'équation ou dérivées partielles ne peuvent pas prétendre à une résolution analytique directe, nous avons donc opté pour une résolution numérique. Celle-ci permettra de transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques plus simples à résoudre. En utilisant le Matlab, on va exploiter dans le prochain chapitre la méthode de différence finie en utilisant le `bvp4c` package dans le Matlab.

# IV

## DISCUSSION DES RESULTATS

### Introduction :

Ce chapitre est consacré à la présentation des résultats obtenus après avoir programmé les équations différentielles ordinaires qui régissent le problème étudié, sur le logiciel de calcul MATLAB.

Rappelant que le problème étudié est un écoulement en convection mixte au voisinage d'une plaque verticale semi-infinie immergé dans un milieu poreux non Darcéen remplie d'un nanofluide visqueux incompressible.

Afin de résoudre le système constitué des équations de continuité ; de mouvement, d'énergie associée des conditions initiales et aux limites correspondantes, on utilise la méthode de différence finie avec le solveur `bvp4c` créé en Matlab. Afin d'obtenir un aperçu clair sur le phénomène physique du problème, une étude paramétrique est effectuée et les résultats numériques obtenus sont affichés à l'aide d'illustrations graphiques.

### IV.1. Logiciel utilisé :

Il s'agit du code de calcul scientifique MATLAB (qui est une abréviation de *Matrix Laboratory*).

MATLAB est un environnement puissant, complet et facile à utiliser et est destiné aux calculs scientifiques. Il apporte aux ingénieurs, chercheurs et à tout scientifique un système interactif intégrant le calcul numérique et la visualisation. C'est un environnement performant, ouvert et programmable qui permet de remarquables gains de productivité et de créativité.

MATLAB permet le travail interactif, soit en mode commande, soit en mode programmation, tout en ayant toujours la possibilité de faire des visualisations graphiques. Considéré comme un des meilleurs langages de programmation (C ou Fortran), MATLAB possède les particularités suivantes par rapport à ces langages :

- la programmation facile,
- la gamme étendue des nombres et leurs précisions,

- la bibliothèque mathématique très compréhensive,
- l'outil graphique qui inclut les fonctions d'interface graphique et les utilitaires,
- la possibilité de liaison avec les autres langages classiques de programmations.

## IV.2.Méthode numérique

L'ensemble d'équations différentielles ordinaires couplées (III.13-III.16) est fortement non linéaire et ne peut être résolu analytiquement, avec les conditions aux limites (III.17), ils forment un problème aux limites à deux points qui peut être résolu pour certaines valeurs des paramètres le régissant. Une méthode des différences finies a été utilisée pour résoudre le système précédent, cette méthode implémente la formule de Lobatto à trois étapes de collocation (III.A) et le polynôme de collocation fournit une solution continue qui est du quatrième ordre en précision, de manière uniforme dans l'intervalle d'intégration. La sélection du maillage et l'erreur de contrôle sont basées sur le résidu de la solution en continu. La technique de collocation utilise un maillage de points pour diviser l'intervalle en sous-intervalles d'intégration. Le `bvp4c` package détermine une solution numérique en résolvant un système d'équations algébriques résultant avec les conditions aux limites, et les conditions de collocation imposées sur tous les sous-intervalles. Le solveur (package) estime alors l'erreur de la solution numérique sur chaque sous-intervalle. Si la solution ne satisfait pas aux critères de tolérance, le solveur adapte le maillage et répète le processus. L'utilisateur doit fournir les points du maillage initial ainsi qu'une approximation initiale de la solution aux points de maillage (voir : Annexe A.).

### VI.2.1 Description du programme

1. Vérifiez les arguments d'entrée et estimez la solution initiale ;
2. Évaluer l'interpolation Hermite cubique et son premier ;
3. Calculer norme L2 du résidu en utilisant 5 points Lobatto quadrature ;
4. Redistribuer points de maillage et de se rapprocher de la solution ;
5. Évaluer le système d'équations de collocation ;
6. Former la matrice Jacobienne globale des équations de collocation ;
7. Donner les valeurs numériques.

Les régions de l'écoulement sont contrôlées par des paramètres physiques, thermiques et solutal, à savoir,  $N_c$ ,  $N_r$ ,  $N_b$ ,  $N_t$ ,  $Le$ ,  $Le_p$ , et  $\xi, \lambda = \frac{Ra}{Pe}$  et  $Fo$ . Des calculs préliminaires sont menés pour vérifier les résultats numériques.

**IV.3.Validation du programme**

Afin de vérifier l'exactitude de la méthode utilisée, les résultats actuels correspondants sont comparés à ceux obtenus par Murthy [39] à partir de  $-\theta'(0)$ , (tableau VI.1), Pour le cas identique (sans présence des nanoparticules).Il ressort de ce tableau que les résultats actuels sont en bon accord avec ceux rapportés par le travail cité.

Tableau IV.1 Comparaison des résultats pour  $-\theta'(0)$  Pour  $Nt=Nr=Nc=0, Nb=0.0, Fo=0, Le=0.1, Lep=Ped=0, \xi=0$ .

Résultat		Murthy [39]			Présent travail			
$-\theta'(0)$								
Le=1					Le=1			
$\lambda$	$s'(0)$	$\xi=0$	$\xi=1$	$\xi=5$	$s'(0)$	$\xi=0$	$\xi=1$	$\xi=5$
0	1	0.5642	0.3989	0.2303	1	0.5642	0.3989	0.2312
1	1.5616	0.6603	0.3892	0.1984	1.5616	0.6603	0.3892	0.1988
5	3.0	0.8706	0.3771	0.1695	3.0	0.8706	0.3771	0.6196
10	4.217	1.0203	0.3714	0.1609	4.2117	1.0203	0.3714	0.1609
20	6.0	1.2097	0.3657	0.1552	6.0	1.2097	0.3657	0.1552
Le=10					Le=10			
$\lambda$	$s'(0)$	$\xi=0$	$\xi=1$	$\xi=5$	$s'(0)$	$\xi=0$	$\xi=1$	$\xi=5$
0	1	0.5642	0.3989	0.2303	1	0.5642	0.3989	0.2312
1	1.5616	0.6377	0.3706	0.1901	1.5616	0.6377	0.3706	0.1906
5	3.0	0.8083	0.3411	0.1576	3.0	0.8083	0.3411	0.1577
10	4.217	0.9358	0.3323	0.1494	4.127	0.9358	0.3323	0.1495
20	6.0	1.1012	0.3269	0.1449	6.0	1.1012	0.3269	0.1433
50	9.6119	1.3837	0.3234	0.1423	9.6119	1.3837	0.3234	0.1423

#### IV.4 Résultats et discussion

Une étude paramétrique a été réalisée selon la méthode décrite précédemment, un ensemble représentatif des résultats graphiques a été obtenu pour la vitesse adimensionnelle  $s'(\eta)$ , la température  $\theta(\eta)$  et la concentration  $\gamma(\eta)$  ainsi que la fraction volumique  $\varphi(\eta)$ . Cela pour diverses conditions paramétriques. L'effet de paramètre de Forchheimer  $Fo$ , le mouvement Brownien  $Nb$ , la thermophorèse  $Nt$  et  $Nc$  représente un taux de flottabilité régulière,  $Le_p$  nombre de Lewis pour les nanoparticules le nombre de Lewis  $Le$ , le paramètre convectif  $\lambda$  ainsi le coefficient de la dispersion thermique  $\xi$ .

##### IV.4.1 Profil de vitesse adimensionnelle

La variation de la distribution de la vitesse adimensionnelle suivant la variable de similarité  $\eta$  est représentée respectivement sur les figures (VI.1) à (IV.2) pour quelques ensembles de valeurs de  $Nb$ ,  $Fo$  et  $\lambda$ .

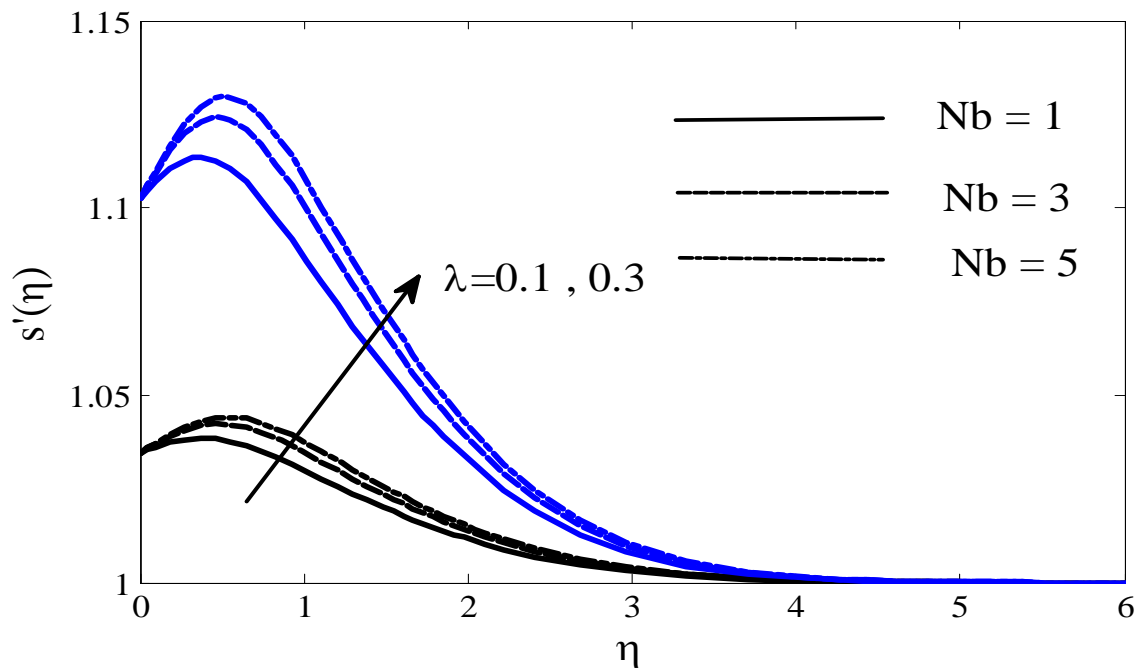


Figure IV.1. Variation de profils de vitesse avec  $\eta$ , pour  $Nb$  et  $\lambda$   
( $Fo=0.5$ ,  $Nc = 0.2$ ,  $Nr = 0.5$ ,  $Nt = 0.5$ ,  $Le = 10.0$ ,  $Le_p = 10.0$ ,  $Ped=1$ ,  $\xi = 0.1$ ).



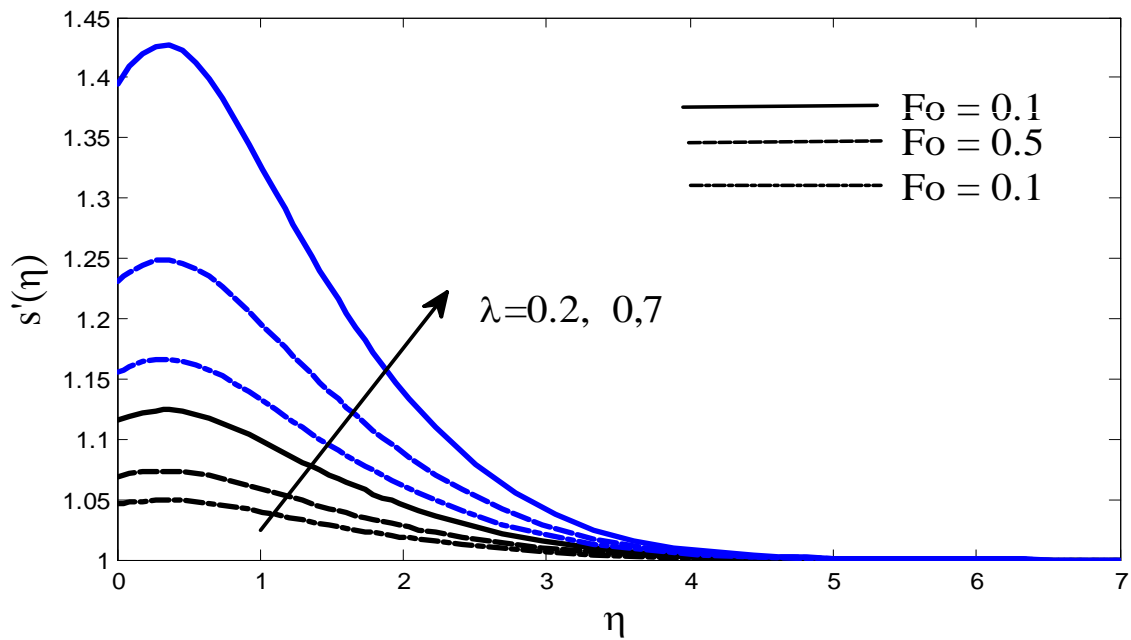


Figure. IV.2 : Variation de profils de vitesse avec  $\eta$ , pour  $Fo$  et  $\lambda$   
 ( $Nb=0.5$ ,  $Nc = 0.2$ ,  $Nr = 0.5$ ,  $Nt = 0.5$ ,  $Le = 10.0$ ,  $Le_p = 10.0$ ,  $Ped=1$ ,  $\xi = 0.5$ ).

A partir de ces figures, on constate que la courbure de la vitesse adimensionnelle augmente jusqu'à un maximum et diminue ensuite asymptotiquement vers 1 au bord de la couche limite.

La figure (IV.1) présente les résultats relatifs à l'effet de mouvement Brownien sur le profil de vitesse adimensionnelle. Comme prévu, l'augmentation du mouvement brownien est accompagnée d'une augmentation de la vitesse, mais au milieu de la couche limite.

Tandis que l'épaisseur de la couche limite de quantité de mouvement s'agrandit, lorsque le paramètre convectif  $\lambda$  augmente.

L'augmentation du paramètre Forchheimer  $Fo$  conduit à diminuer la vitesse à proximité de la plaque en raison de l'effet d'inertie qui implique la réduction de l'épaisseur de la couche limite hydrodynamique figure (IV.2).

Et on peut conclure que l'ajout des nanoparticules dans les fluides de bases joue un rôle important pour améliorer la vitesse.

#### IV.4.2 Profil de température adimensionnelle :

La variation de la distribution de la température adimensionnelle suivant la variable de similarité  $\eta$  est représentée respectivement sur les figures(IV.3) à (IV.4) pour quelques ensembles de valeurs de  $Fo$ ,  $\lambda$ ,  $\xi$  et  $Nt$ .

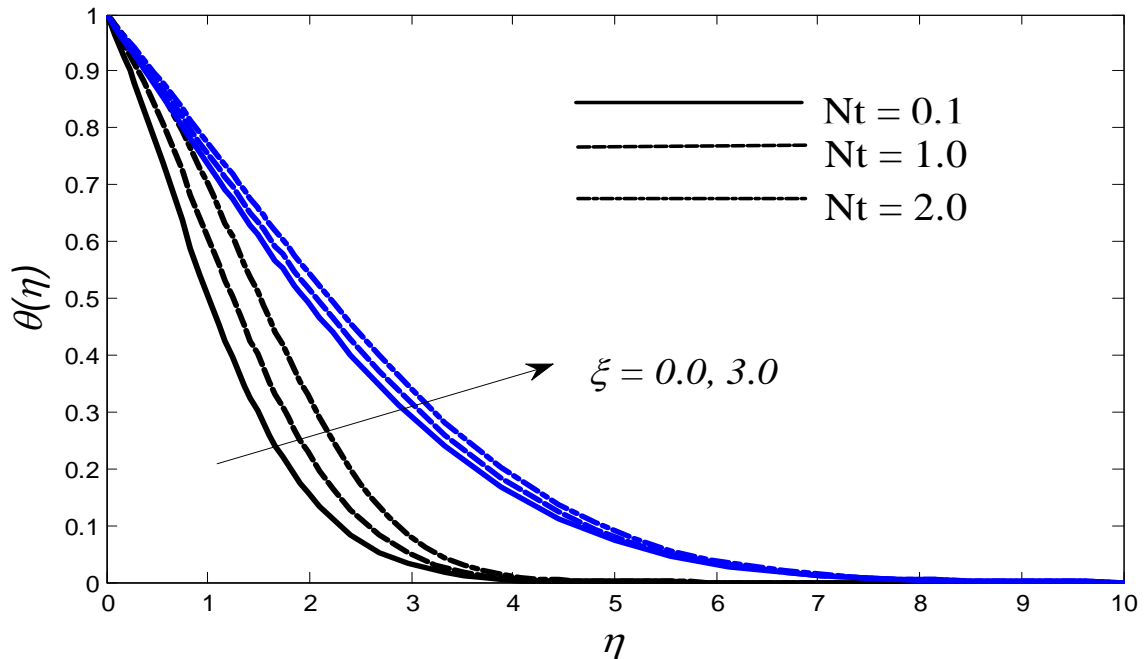


Figure. IV.3:effet de  $Nt$  et  $\xi$  sur la température adimensionnelle pour  $(Nt, \xi)$   
 $(Fo=0.5, \lambda=1, Nr=0.5, Nc=0.2, Nb=0.5, Le=10, Lep=10, Ped=1)$

La figure (IV.3) montre l'effet de thermophorèse  $Nt$  et coefficient de la dispersion  $\xi$  sur les profils de température dans les couches limites, on remarque que le profil de température amplifiée, et l'épaisseur de la couche limite thermique accroît, en présence de nanoparticules en termes de thermophorèse.

Là encore, on voit que l'effet de dispersion thermique contribue à l'amélioration de la distribution de la température.

On peut conclure que, la présence de nanoparticule peut jouer à rôle important pour améliorer le transfert thermique.

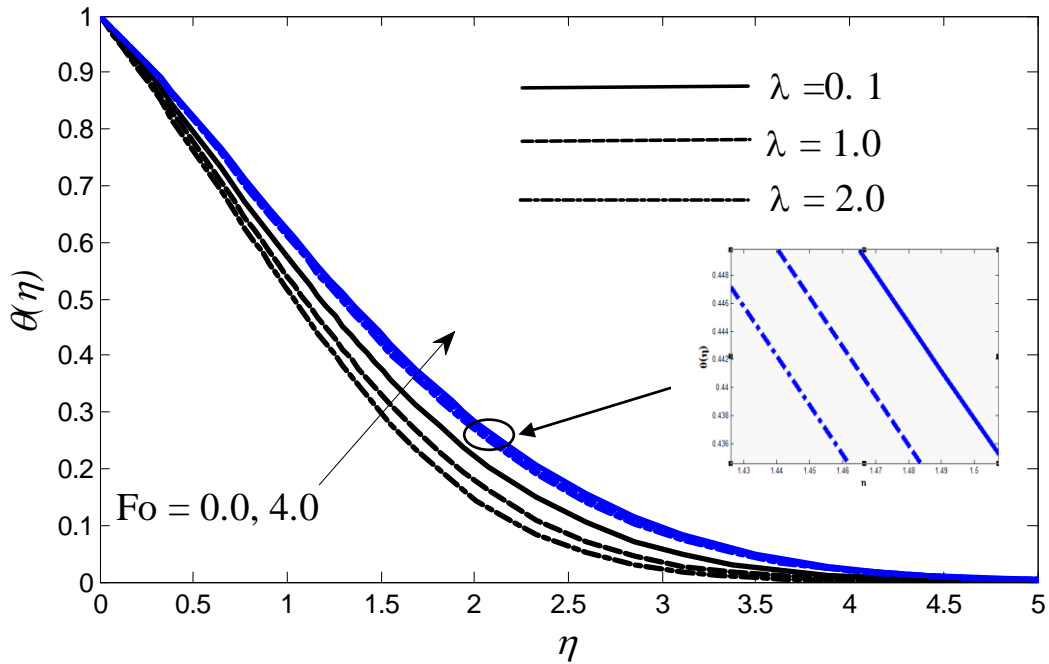


Figure. IV.4 : effet de Fo et  $\lambda$  sur la température adimensionnelle pour ( $\lambda, Fo$ )  
 ( $\zeta=0.5, Nr=0.5, Nc=0.2, Nb=0.5, Nt=0.5, Le=10, Lep=10, Ped=1$ )

La figure (IV.4) montre l'effet de terme convectif  $\lambda$  et le paramètre du Forchheimer Fo sur les profils de température adimensionnelle dans la couche limite, On remarque que, les profils de température augmentent avec l'augmentation de Fo loin de la paroi. Par conséquent, l'épaisseur de la couche limite augmente. En outre, il est clair que la couche limite thermique diminue avec l'augmentation de paramètre convectif  $\lambda$ .

### IV.4.3 Profil de concentration adimensionnelle :

Les figures suivantes (IV.5-IV.6) montrent les profils de concentration adimensionnelle dans la couche limite pour les différentes valeurs combinées du paramètre Lewis  $Le$  et  $\lambda$ , le rapport de flottabilité régulière  $Nc$  et le nombre Lewis régulier  $Le$ .

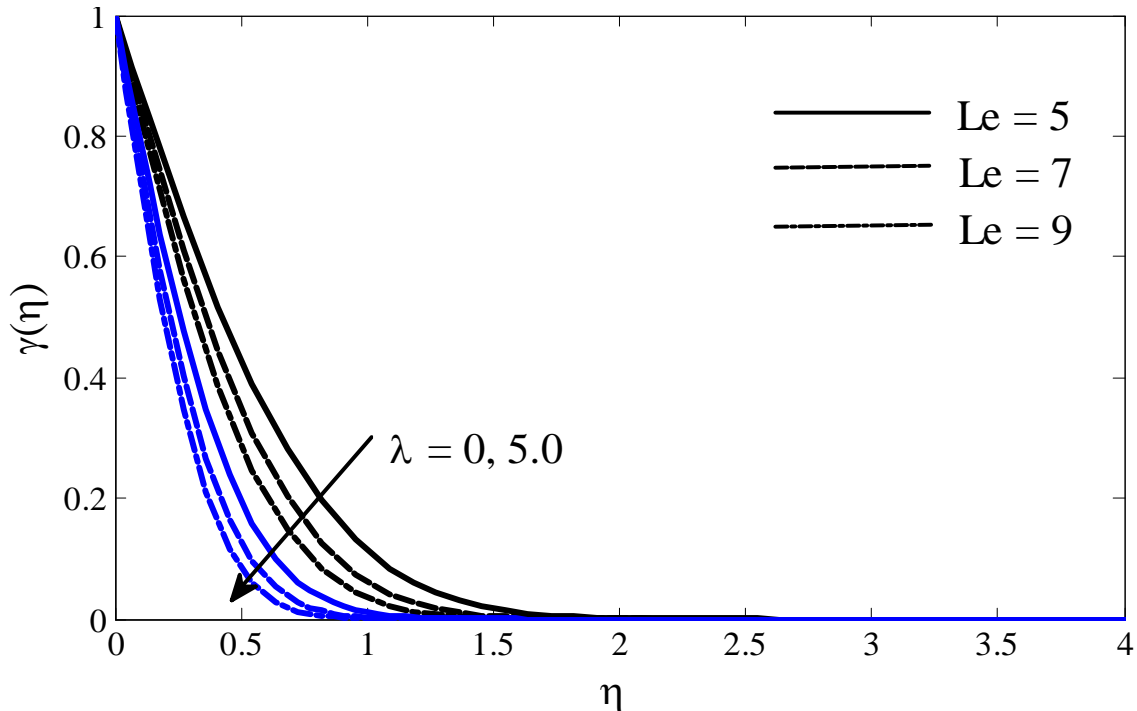


Figure IV.5 : Effet de  $Le$  et  $\lambda$  sur les profils de concentration  
( $Nr = 0.5$ ,  $Nb = 0.5$ ,  $Nc = 0.5$ ,  $Nt = 0.5$ ,  $Fo = 0.5$ ,  $Ped = 1$ ,  $\xi = 1$ ,  $Le_p = 10.0$ ).

La figure (IV.5) représente l'influence du nombre de Lewis régulier ( $Le$ ) en présence de la convection mixte  $\lambda$ . On peut voir que les distributions de concentration est grandement sensible à l'augmentation du nombre de Lewis qui conduit à réduire l'épaisseur de la couche limite massique et pour cette situation particulière le gradient net de concentration est observé à proximité de la paroi lorsque le nombre ( $Le$ ) augmente. Il est clairement démontré que la concentration du fluide diminue avec l'augmentation du paramètre convectif  $\lambda$ . On peut voir que les valeurs de ( $Le$ ) sont équivalentes à une diffusion thermique dominante sur la diffusion de masse et la couche limite massique est naturellement réduite.

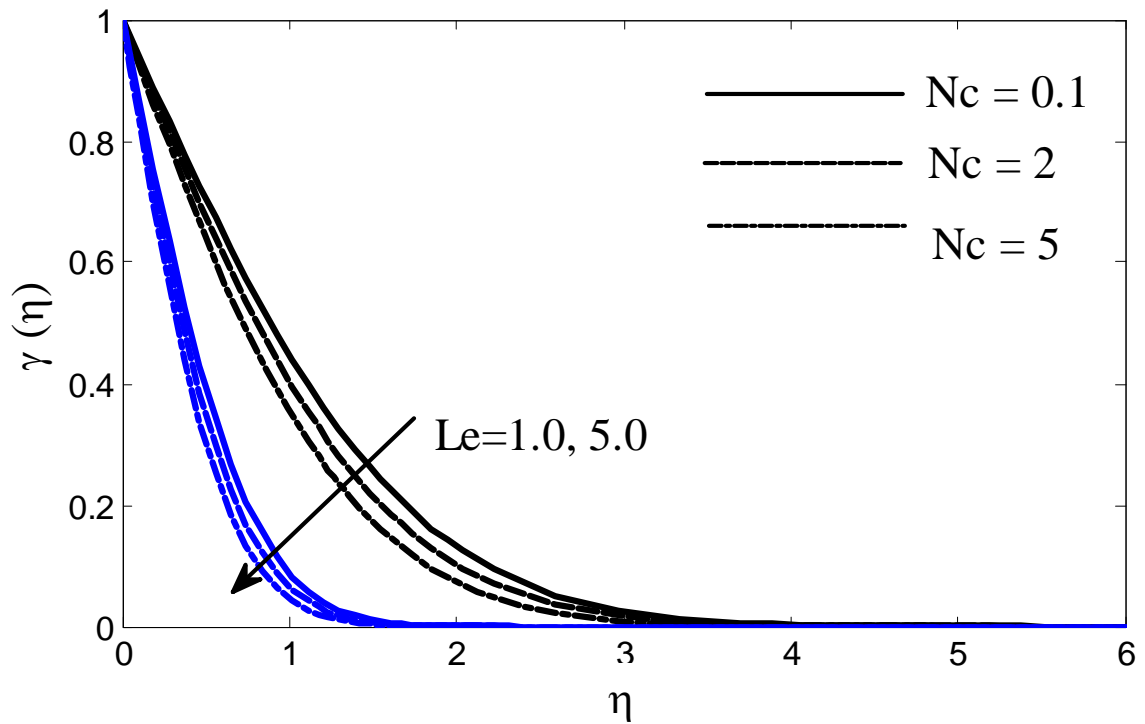


Figure IV.6 : Effet de  $Le$  et  $Nc$  sur les profils de concentration  
 ( $\lambda = 0.5$ ,  $Nr = 0.5$ ,  $Nb = 0.5$ ,  $Nt = 0.5$ ,  $Fo = 0.5$ ,  $Pe_d = 1$ ,  $\xi = 0.5$ ,  $Lep = 10.0$ ).

De la figure (IV.6), il est à noter que l'augmentation de  $Nc$ , les profils de masse sans dimension diminuent près de la paroi alors qu'il a un grand effet loin d'elle. Dans ce cas, il est montré que la diminution de la concentration est liée à l'augmentation du paramètre  $Le$ .

D'après les valeurs du rapport de flottabilité régulière  $Nc$ , ce dernier il a pour effet de diminuer le champ de concentration. En revanche, le nombre de Lewis rétrécit un peu et épaissit la couche limite massique à proximité de la paroi.

#### IV.4.4 Profil de fraction volumique adimensionnelle :

Les figures (IV.7)-(IV.8) illustrent les profils de fraction de volume adimensionnelle de nanoparticule est typiques pour diverses valeurs du nombre de Lewis de nanoparticule  $Le_p$  combinés avec différentes valeurs de paramètre convectif  $\lambda$  et du paramètre Forchheimer  $Fo$ .

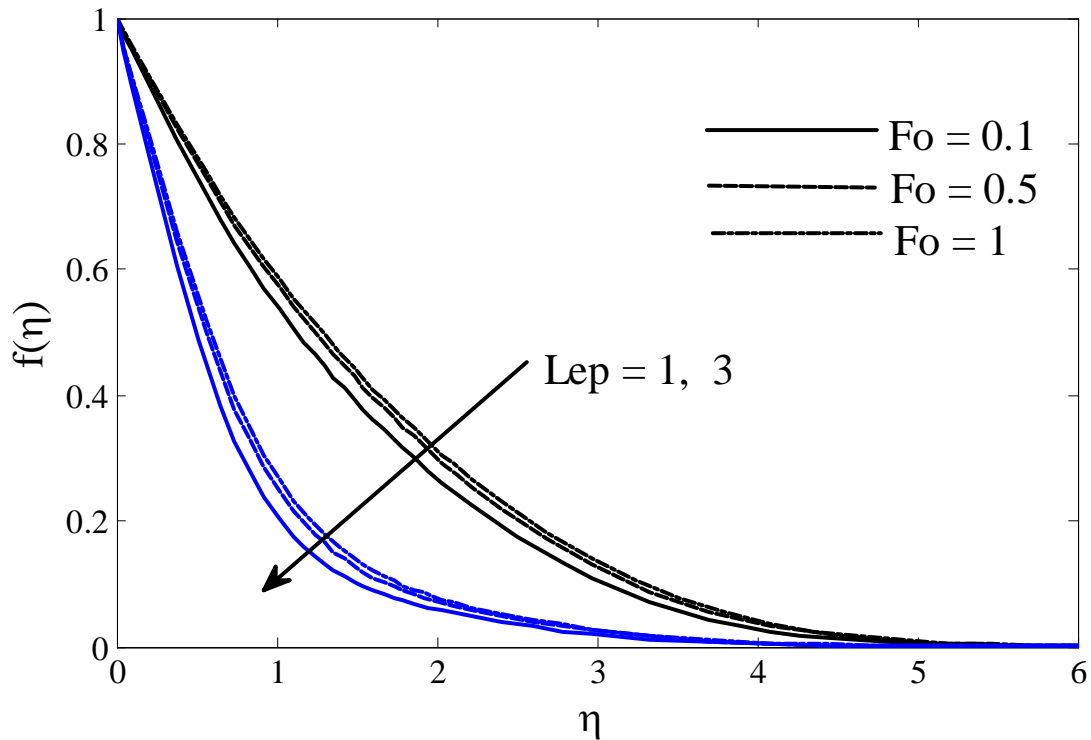


Figure IV.7 : Profils de fraction volumique avec  $\eta$ , pour  $Fo$  et  $Le_p$ ,  
 $(\lambda=1, \xi=0.5, Nr=0.5, Nc=0.2, Nb=0.5, Nt=0.5, Le=10, Ped=1)$

La figure (IV.7) représente la fraction volumique des nanoparticules  $f(\eta)$  pour différentes valeurs du paramètre Forchheimer  $Fo$  et différentes valeurs du nombre de Lewis de nanofluide  $Le_p$ , on constate qu'il y a une tendance à diminuer considérablement la fraction volumique des nanoparticules si le nombre de Lewis de nanoparticules est amplifié.

Par contre l'augmentation du paramètre de Forchheimer  $Fo$  s'accompagne de l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules dans le fluide, et la couche limite devient plus grande.

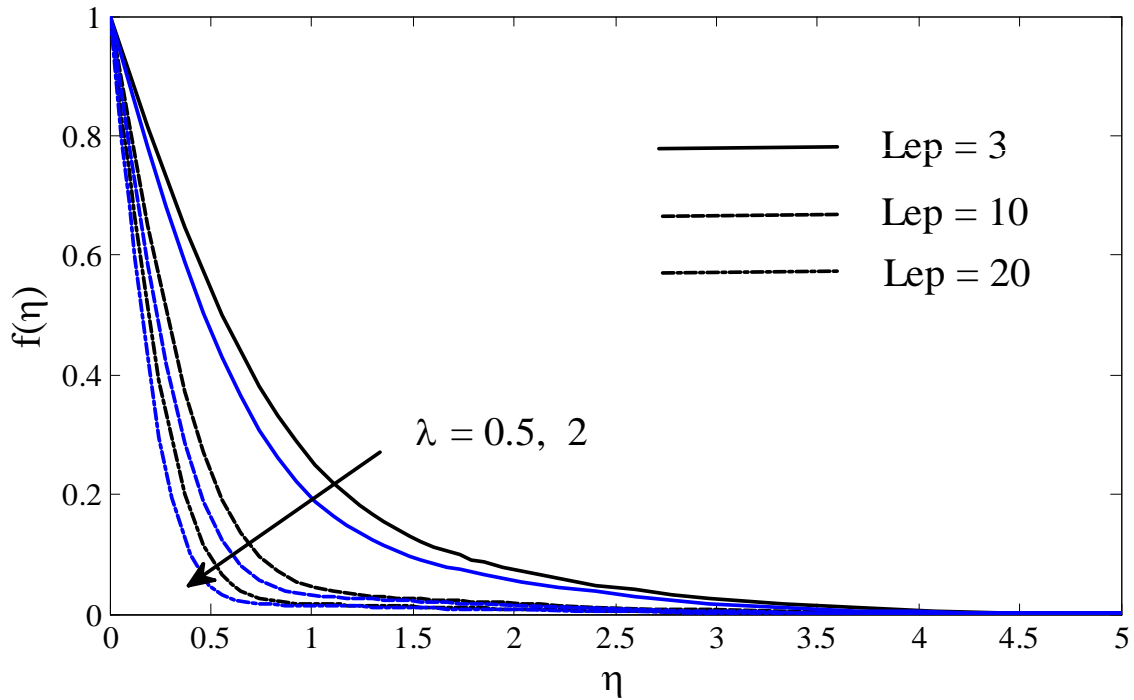


Figure IV.8: Profils de fraction volumique avec  $\eta$ , pour  $Le_p$  et  $\lambda$ ,  
( $Fo=0.5, \xi=0.5, Nr=0.5, Nc=0.2, Nb=0.5, Nt=0.5, Le=10, Ped=1$ )

La figure (IV.8) représente la fraction volumique des nanoparticules  $f(\eta)$  pour différentes valeurs du Lewis de nanoparticules  $Le_p$  et différentes valeurs de paramètre convectif  $\lambda$ , à partir de ces données, on constate que l'augmentation régulière du paramètre convectif  $\lambda$ , du nombre de Lewis  $Le_p$ , il ya tendance à diminuer la distribution de la fraction volumique adimensionnelle des nanoparticules, ainsi que l'épaisseur de la couche limite réduit de manière significative.

#### IV.5 Variations du taux de transfert de chaleur local $Nu_x$ :

Les variations du nombre de Nusselt local sont concernées aux différentes valeurs du paramètre Forchheimer  $Fo$ , du paramètre de mouvement Brownien  $Nb$ , paramètre de flottabilité régulière  $Nc$ , et le paramètre de dispersion thermique et enfin du paramètre thermophorèse  $Nt$ . Les principaux résultats sont illustrés dans les figures (IV.9) (IV.10) et (IV.11).

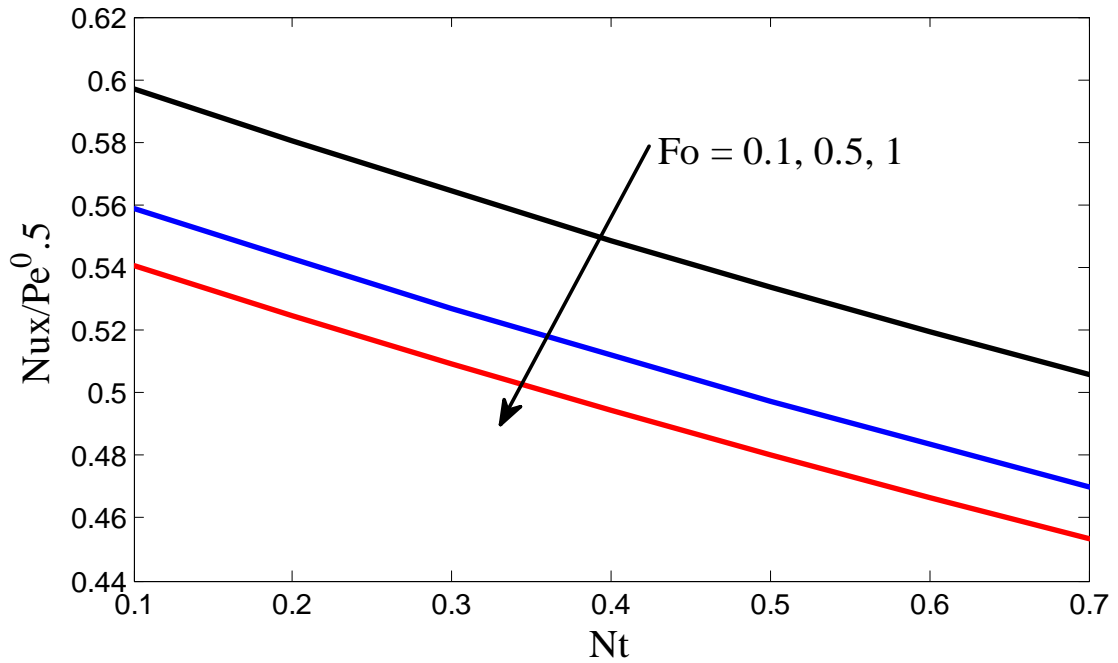


Figure IV.9 : Variations de  $(N_{ux}/Pe^{0.5})$  avec  $Fo$  et  $Nt$ .

$(\lambda=0.5, Nr=0.5, Nc=0.2, Nb=0.5, Le=10, Lep=10, Ped=1)$

La figure (IV. 9) représente les variations de nombre de Nusselt pour différentes valeurs du paramètre de Forchheimer  $Fo$  et la thermophorèse  $Nt$ , qui sont illustrés. On peut voir que l'augmentation du paramètre de Forchheimer  $Fo$  réduit le taux de transfert de chaleur en termes du nombre de Nusselt local  $Nu_x$  près de la plaque. D'autre part, la thermophorèse  $Nt$  réduit le nombre de Nusselt, ce qui est due à l'augmentation de la convection à proximité de la plaque et ceci quand la thermophorèse est positive.



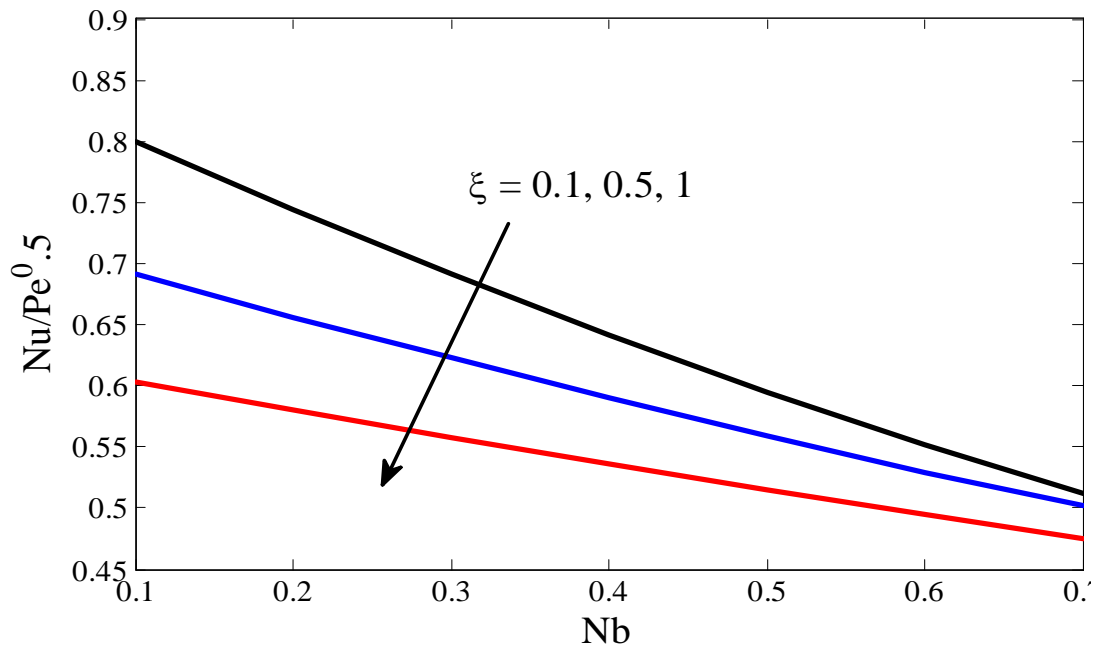


Figure IV.10 : Variations de  $(Nu_x/Pe^{0.5})$  avec  $\xi$  et  $Nb$ .

( $Fo=0.5$ ;  $\lambda=0.5$ ,  $Nr=0.5$ ,  $Nc=0.2$ ,  $Nt=0.1$ ;  $Le=10$ ,  $Lep=10$ ,  $Ped=1$ )

La figure (IV.10) représente la variation de nombre du Nusselt  $Nu_x$  pour différente valeur de paramètre de mouvement Brownien  $Nb$ . On remarque que le taux de transfert thermique diminue en fonction de la croissance du paramètre  $\xi$  jusqu'au minimum, par contre on observe que l'augmentation du paramètre de mouvement Brownien conduit à baissé le transfert thermique vers le fluide, et à son tour vers le milieu poreux.

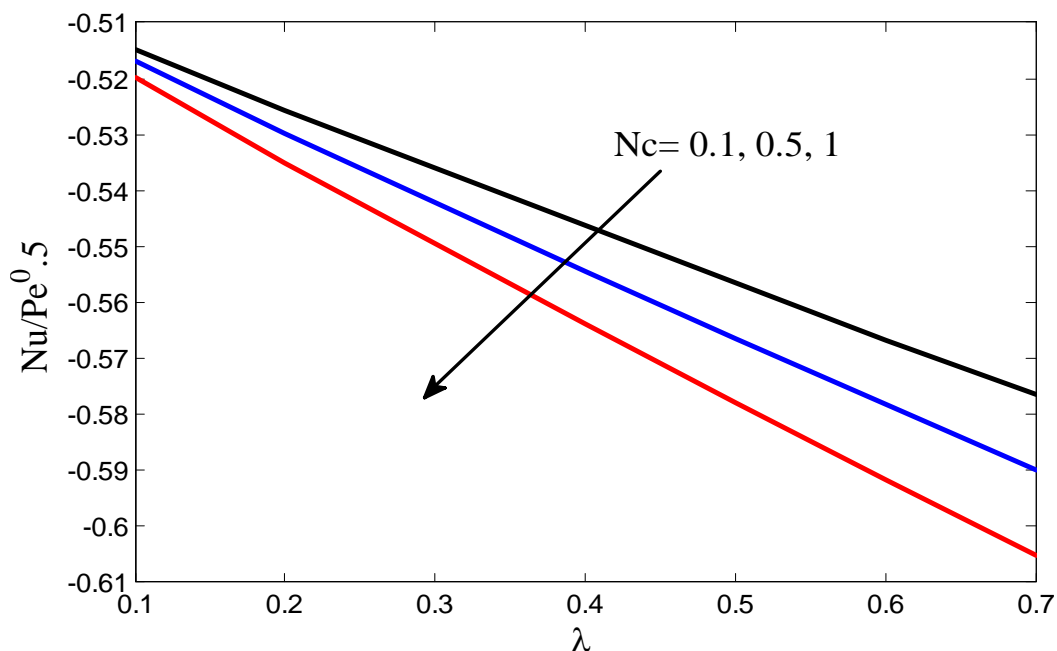


Figure IV.11 : Variations de  $(Nu_x/Pe^{0.5})$  avec  $\lambda$  et  $Nc$ .

( $Fo=0.5$ ;  $\xi=0.5$ ;  $Nr=0.5$ ;  $Nb=0.5$ ;  $Nt=0.1$ ;  $Le=10$ ;  $Lep=10$ ;  $Ped=1$ )

La figure (IV.11) représente la variation de nombre de Nusselt  $Nu_x$  pour différente valeur de paramètre convection mixte  $\lambda$ . On remarque que le taux de transfert thermique diminue en fonction de la croissance du paramètre  $Nc$  jusqu'au minimum, par contre on observe que l'augmentation du paramètre convectif conduit à baisser le transfert thermique vers le fluide, et à son tour vers le milieu poreux.

**IV.6 Variations du taux local de transfert de masse  $Sh_x$  et  $Sh'_x$  :**

La variation de nombre régulière de Sherwood local  $Sh_x$  et le nombre Sherwood local de nanoparticules  $Sh'_x$  pour différentes valeurs de  $Le$ ,  $\xi$ ,  $Nt$ , et  $Fo$ ,  $Nb$ ,  $\lambda$  sont présentés dans les tableaux (IV.2) et (IV.3).

Tableau IV.2 : valeurs de  $Sh_x/Pe_x^{0.5}$  et  $Sh'_x/Pe_x^{0.5}$  pour  $Le$ ,  $\xi$  et  $Nt$ . ( $Fo=0.5; \lambda = 0.5, Nr = 0.5, Nc = 0.2, Nb=0.5, Lep=10, Ped=1$ )

$Sh_x/Pe_x^{0.5}$				
<b>Le</b>	$\xi$	Nt=0.1	Nt=0.5	Nt=1
<b>10</b>	0.5	1.9325	1.9336	1.9353
<b>20</b>		2.7282	2.7295	2.7314
<b>30</b>		3.3378	3.3392	3.3412
$Sh'_x/Pe_x^{0.5}$				
<b>Le</b>	$\xi$	Nt=0.1	Nt=0.5	Nt=1
<b>10</b>	0.5	1.9299	1.9369	1.9716
<b>20</b>		1.9263	1.9337	1.9690
<b>30</b>		1.9241	1.9318	1.9673

Le tableau (IV.I) est adressé à cet objectif, le nombre de Sherwood local augmente, de plus en plus  $Nt$  augmente avec l'augmentation de  $(Le)$  est une tâche favorable pour améliorer le taux de transfert de masse par l'augmentation du nombre de Sherwood. Ceci est consistant avec les effets observés et liés ci-dessus pour les valeurs. Comme montré dans le (Tableau. IV.2).

On remarque que, le nombre de Sherwood de nanoparticules diminue, lorsque le nombre de Lewis  $(Le)$  augmente et le cas contraire pour l'augmentation du paramètre de thermophorèse  $Nt$  (Tableau. IV.2).

Tableau IV.3 : Valeurs de  $Sh_x/Pe_x^{0.5}$  et  $Sh'_x/Pe_x^{0.5}$  pour  $Fo, \lambda$  et  $Nb$ . ( $\xi=0.5, Nr = 0.5, Nc=0.2, Nt=0.5, Le_p=10, Le=10, Pe_d=1$ )

$Sh_x/Pe_x^{0.5}$				
$Fo$	$\lambda$	$Nb = 0.1$	$Nb = 0.5$	$Nb = 1$
<b>0.1</b>	0.5	2.0213	2.0319	2.0362
<b>0.5</b>		1.9269	1.9336	1.9364
<b>1</b>		1.8807	1.8855	1.8874
$Sh'_x/Pe_x^{0.5}$				
$Fo$	$\lambda$	$Nb = 0.1$	$Nb = 0.5$	$Nb = 1$
<b>0.1</b>	0.5	1.7741	2.0325	2.0614
<b>0.5</b>		1.6879	1.9369	1.9629
<b>1</b>		1.6459	1.8901	1.9145

On constate que, le nombre de Sherwood local et le nombre de Sherwood de nanoparticules diminue quand le paramètre de Forchheimer  $Fo$  augmente.

Par contre le nombre de Sherwood local et le nombre de Sherwood de nanoparticules augmente vis-à-vis à l'augmentation du paramètre de mouvement Brownien  $Nb$  (Tableau. IV.3).

Il existe une amélioration de tous les deux nombres de Sherwood local et le nombre de Sherwood de nanoparticules quand le paramètre du Forchheimer  $Fo$  et la thermophorèse  $Nt$  ainsi que le paramètre de mouvement Brownien augmentent.

### IV.7 Conclusion

Nous avons examiné l'influence des nanoparticules (pour le nanofluide) et l'effet d'inertie microscopique (pour le milieu poreux) sur l'écoulement de la couche limite on convection mixte dans un milieu poreux sur une plaque plane verticale, en utilisant un modèle dont lequel le mouvement Brownien, thermophorèse, taux de flottabilité ainsi que le taux de flottabilité régulière sont pris en compte, et en présence de la dispersion thermique. Dans cette étude, nous avons employé le modèle Forchheimer pour décrire le comportement géométrique du milieu poreux dans l'équation de mouvement. Et nous avons supposé les conditions aux limites simples. Cela permet une solution de similitude simple, qui dépend de huit paramètres adimensionnels, posséder un nombre Lewis  $Le$ , paramètre Forchheimer  $Fo$ , paramètre de flottabilité  $Nc$ , paramètre du mouvement Brownien  $Nb$ , et paramètre de thermophorèse  $Nt$ , paramètre de dispersion thermique  $\xi$ , paramètre de convection mixte  $\lambda$ , nombre de Lewis pour les nanoparticules  $Le_p$ . Nous avons exploré la manière dont le flux thermique de la paroi, représentée par un Nombre de Nusselt  $Nu$ , et le nombre de Sherwood  $Sh_x$ , dépend de ces huit paramètres.

L'influence du paramètre de la thermophorèse, le mouvement brownien, et le taux de flottabilité, sur les profils de la vitesse, température, concentration, ainsi que la fraction volumique des nanoparticules, et de montré que :

- L'augmentation du paramètre de la thermophorèse  $Nt$  et le paramètre de transfert convectif augmente le profil de température et l'épaisseur de la couche limite.
- L'augmentation du paramètre de mouvement brownien  $Nb$  et le paramètre Forchheimer  $Fo$ , augmentent la vitesse, et l'épaisseur de la couche limite de manière significative.
- L'augmentation du paramètre de taux de flottabilité  $Nc$  et le nombre de Lewis  $Le$ , diminues la vitesse et la couche limite hydrodynamique décroît.
- Le paramètre de flottabilité régulier  $Nc$  et le nombre de Lewis  $Le$  diminuent la concentration à proximité de la paroi.
- La croissance du nombre Forchheimer  $Fo$  et nombre de Lewis pour les nanoparticules  $Le_p$  réduit la fraction volumique de nanofluide.

# CONCLUSION GENERALE

Dans le présent travail, nous avons conduit une étude de transfert thermique et massique en convection mixte sur une plaque immergée dans un milieu poreux non Darcéen remplie d'un nanofluide.

En premier lieu, les notions de base sur les particularités de modélisation des milieux poreux et ainsi que sur les nanofluides ont été rapportées de manière très succincte ainsi que la convection mixte.

En second lieu, en se fondant sur le modèle non Darcéen avec l'extension de Forchheimer pour décrire le comportement structurel du milieu poreux et les approximations de Boussinesq pour le fluide de base et le nanofluide, il a été pris en considération le modèle qui comporte le mouvement Brownien et la thermophorèse pour le nanofluide.

Afin de résoudre numériquement les équations régissant le mouvement, on a choisi une méthode basée sur la technique des différences finies pour la solution du système BVP (Boundary value problem) déduit. Cette approche nous a permis de cerner les effets de différents paramètres sur la structure des couches limites et de les distinguer en rapport aux effets combinés sollicités.

Les transferts thermique et massique sont exprimés en termes des paramètres de contrôle du problème. Ces paramètres sont : pour le milieu poreux, le paramètre de Forchheimer  $Fo$ , Le nombre de Lewis, le coefficient de la dispersion thermique  $\xi$ , le nombre de Péclet dépendant du diamètre du pore  $Pe_d$ .

Correspondant à un nanofluide ces paramètres sont : taux de flottabilité de nanofluide  $Nr$ , paramètre de mouvement Brownien  $Nb$ , paramètre de thermophorèse  $Nt$ , nombre de Lewis pour le nanofluide  $Le_p$  et paramètre de la convection mixte  $\lambda$ .

A la lumière de cette étude, on peut expliciter les conclusions suivantes :

**1.** la vitesse adimensionnelle :

- L'augmentation du paramètre Forchheimer  $Fo$  conduit à diminuer la vitesse à proximité de la plaque en raison de l'effet d'inertie qui implique la réduction de l'épaisseur de la couche limite hydrodynamique.

- L'augmentation du mouvement brownien  $N_b$  est accompagnée d'une augmentation de la vitesse, mais au milieu de la couche limite.

### 2. Température adimensionnelle :

- On voit que l'effet de dispersion thermique influe évidemment sur les distributions de température
- On peut conclure que, la présence de nanoparticule peut jouer à rôle important pour améliorer le transfert thermique.
- Les profils de température augmentent avec l'augmentation de  $Fo$  à proximité de la paroi. Par conséquent, l'épaisseur de la couche limite augmente.

### 3. Concentration adimensionnelle :

- Il est clairement démontré que la concentration du fluide diminue avec l'augmentation du paramètre convectif  $\lambda$ .
- Le rapport de flottabilité régulière  $N_c$ , a pour effet de diminuer le champ de concentration. En revanche, le nombre de Lewis rétrécit un peu et épaissit la couche limite de concentration proche de la paroi.

### 4. Fraction volumique :

- L'augmentation du paramètre Forchheimer  $Fo$  s'accompagne de l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules dans le fluide, et la couche limite devient plus grande.
- l'augmentation régulière du paramètre convectif  $\lambda$ , du nombre de Lewis  $Le_p$ , diminuer la distribution de la fraction volumique des nanoparticules, ainsi que l'épaisseur de la couche limite réduit de manière significative.

Dans ce travail les aspects physiques induits par ces effets sont discutés.

Dans cette étude on a pris en compte les équations avec un milieu poreux non Darcéen et qui insèrent la quantité due à l'effet d'inertie ou terme de Forchheimer. L'emploi de modèles plus sophistiqués pour les milieux poreux prenant en compte les effets visqueux (terme de Brinkman) ou les deux effets ensemble (terme de Forchheimer et le terme de Brinkman) devrait être envisagé dans des études futures.

Il serait également intéressant d'étudier les autres effets qui sont rencontrés dans les milieux poreux lors de l'écoulement de fluide en présence de la convection thermique et massique comme, l'effet de dissipation visqueuse, l'effet de Soret...etc., avec plusieurs configurations géométriques, notamment en dimension radiale.

## References bibliographiques

- [1]-**R. E. Collins**, « Flow of Fluids through Porous Materials », Reinhold, New York., 1961.
- [2]-**Salazar G.**, "Modélisation du séchage d'un milieu poreux saturé déformable : prise en compte de la pression du liquide", Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure D'arts et Métiers (2006).
- [3]-**C.Y. Cheng**, « Soret and Dufour effects on heat and mass transfer by natural convection from a vertical truncated cone in a fluid-saturated porous medium with variable wall temperature and concentration ». International Communications in Heat and Mass Transfer 37 (2010) 1031–1035.
- [4]-**S. Ergun**, « Fluid flow through packed columns ». Chem. Eng. Program. Vol. 48, pp. 88-94 (1988).
- [5]-**J. Kozeny-Carman, M. Coulsonand**, « Chemical engineering » Vol 2, Fifth Edition, Butterworth-Heinemann, 2002.
- [6]-**M. Kaviany**, « Principles of heat transfer in porous media ». Springer, (1995).
- [7]-**E. Scheidegger**, « The Physics of flow through porous media ». 3<sup>rd</sup> Edition, University of Toronto Press, (1974).
- [8]-**Coux M.**, "Contribution a l'étude de la diffusion thermo gravitationnelle en milieu Poreux", Thèse de Doctorat (1997)
- [9]-**Kalla L.**, "Convection naturelle au sein d'une couche horizontale poreuse soumis à des flux de chaleur uniforme", Thèse de Maîtrise Es sciences Appliquées (1999).
- [10]-**Delache A.** "Etude analytique et numérique des instabilités spitions temporelles des écoulements de convection mixte en milieux poreux : comparaison avec l'expérience", Thèse de doctorat, Mention Mécanique (2005)
- [11]- **R. A. Wooding**, « Steady state free thermal convection of liquid in a saturated permeable medium ». J. Fluid Mech., Vol. 2, pp. 273-285 (1957).
- [12]-**D.A. Nield, A. Bejan**, Convection in porous media, 2nd ed, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [13]-**Hamza ALI AGHA**, Transferts convectifs naturels et complexes en milieu poreux non darceen, thèse doctoratL'Université Yahia Farès de Médéa, Spécialité : Génie des Procédés, 2009.
- [14]-**João-Paulo RIBEIRO. Jean-Antoine GRÜSS**, Nanofluides pour les applications thermiques, TECHNIQUES DE L'INGÉNIEUR, nm5115,2014.
- [15]-**Salazar G.**, "Modélisation du séchage d'un milieu poreux saturé déformable : prise en compte de la pression du liquide", Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure D'arts et Métiers (2006)

[16]- **Gladés Bachir**. Contribution à l'étude de la convection naturelle dans les nanofluides en configuration de Rayleigh-Bénard, thèse doctorat, Ecole doctorale Mécanique, Energétique et procédés(MEGeP), Unité de recherche : UFR MIG-UPS / IMFT, Université Toulouse, (2010).

[17]- **Buongiorno, J.** "Convective Transport in Nanofluids", ASME Journal of heat transfer, 128 pp. 240–250 (2006).

[18]- **McNab, G. S., and Meisen, A.**, "Thermophoresis in Liquids", Journal of Colloidal Interface Science, 44 pp. 339–346 (1973).

[19] - **Lister, D. H.**, "Corrosion Products in Power Generating Systems", Atomic Energy of Canada Limited, 6877, pp.1-65 (1980).

[20]- **Müller-Steinhagen, H.**, 1999, "Cooling-Water Fouling in Heat Exchangers" Advanced Heat Transfer, **33**, pp. 415–496.

[21]- **Ribeiro, J.P., Grüss, J.A.**, "Nanofluides pour les applications thermiques", Techniques de l'Ingénieur; nm5115 (2009).

[22] - **Bouhezza Aicha**, etude d'une couche limite laminaire en convection mixte : effet de l'inclinaison de la paroi, mémoire de Magister, l'Université 20 Août 55, Skikda Faculté des Sciences et Sciences de l'Ingéniorat, Département des Sciences Fondamentales, Spécialité : Physique, Option : Energétique, 2007.

[23] - **Jacques Prevert**, Principes des transferts convectifs, POLYTECHNICA-1997 ,15 rue Lacépède, F-75005 Paris, Nouvelle édition 1998.

[24]- **A. Bousri, K. Bouhadeb**, Etude Numérique de Transfert de Chaleur et de Masse dans un Cylindre Rempli d'un Milieu Poreux Réactifs, Eurotherm Seminar N81, Reactive Heat Transfer in Porous Media, Albi, France, Juin 4-6, 2007.

[25]-**S. Djedjig F. Souidi, T. Benmalek**, «Etude numérique thermosolutale d'un jet d'air impactant une matrice poreuse cylindrique ». 21<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique, Bordeaux, Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene (USTHB).

[26]- **S. Bougoul, A. Soudani et A. Jaffrin**, « Etude d'un Ecoulement dans un Milieu Poreux Saturé Utilisé en Substrat de Culture ». Rev. Energ. Ren. Vol.7 (2004) 31- 44, Département de physique, Faculté des Sciences, Université de Batna, Rue Chahid Mohamed El Hadi Boukhlof, Batna.

[27]-**V. Osvair, Trevisanet A. Bejan**, «Mass and heat transfer by natural convection in a vertical slot filled with porous medium ». In. Journal. Heat Masse Transfer. Vol. 29, No. 3,pp. 403415, 1986. Printed in Great Britain

[28]- **NAWAF H. SAEID**, "Mixed convection flow along a vertical plate subjected to time periodic surface temperature oscillations", Int. J. Thermal Sciences 44 (2005) 531-539.

[29]- **A. Amahmid, M. Hasnaoui, P. Vasseur**, « Etude analytique et numérique de la convection naturelle dans une couche poreuse de Brinkman doublement diffusive ». International Journal of Heat and Mass Transfer 42 (1999) 2991-3005



[30] - **Hady F, Ibrahim F, Abdel-Gaied S, Eid M.** Effect of heat generation /absorption on natural convective boundary-layer flow from a vertical cone embedded in a porous medium filled with a non-Newtonian nanofluid. *Int Commun Heat Mass Transf* 2011;38:1414–20.

[31]- **Rana P, B hargava R, Bég O.** Numerical solution for mixed convection boundary layer flow of a nanofluid a long aninclined plate embedded in a porous medium. *Comput Math Appl* 2012; 64:2816–32.

[32]-**R.A. Silva, M. Assato, M. J. S. de Lemos,** «Mathematical modeling and numerical results of power-law fluid flow over a finite porous medium ». *International Journal of Thermal Sciences* 100 (2016) 126-137.

[33]-**M. Siavashi, H. Reza, T. Bahrami, H. Saffari,** «Numerical investigation of flow characteristics, heat transfer and entropy generation of nano fluid flow inside an annular pipe partially or completely filled with porous media using two-phase mixture model ». *Energy* 93 (2015) 2451-2466, Elsevier.

[16]- **Gladés Bachir.** Contribution à l'étude de la convection naturelle dans les nanofluides en configuration de Rayleigh-Bénard, thèse doctorat, Ecole doctorale Mécanique, Energétique et procédés(MEGeP), Unité de recherche : UFR MIG-UPS / IMFT, Université Toulouse, (2010).

[34] **Khan W, Aziz A.** Double-diffusive natural convective boundary layer flow in a porous medium saturated with a nanofluid over a vertical plate: prescribed surface heat, solute and nanoparticle fluxes. *Int J ThermSci* 2011;50: 2154–60.

[35] **Nield D, Kuznetsov A.**The Cheng Minkowycz problem for the double diffusive natural convective boundary layer flow in a porous medium saturated with a nanofluid. *Int J Heat Mass Transf* 2011;54:374–8.

[36] **A. Chattopadhyay, S. K Pandit, S. SenSarma,** «Mixed convection in a double lid-driven sinusoidally heated porous cavity». *International Journal of Heat and Mass Transfer* 93 (2016) 361–378. Integrated Science Education and Research Center (ISERC), Visva-Bharati, Santiniketan, West Bengal 731 235, India.

[37] **M. Mharzi, M. Dagenet, S. Daoudi,** «Thermosolutale natural convection in a vertically layered fluid-porous medium heated from the side ». *Energy Conversion & Management* 41 (2000) 1065-1090

[38] **C.Y. Cheng,** « Soret and Dufour effects on heat and mass transfer by natural convection from a vertical truncated cone in a fluid-saturated porous medium with variable wall temperature and concentration ». *International Communications in Heat and Mass Transfer* 37 (2010) 1031–1035.

[39]-**P. V. S. N. Murthy,** Effect of Double Dispersion on Mixed Convection Heat and Mass Transfer in Non-Darcy Porous Medium. Department of Mathematics, I.I.T.–Madras, Madras 600 036, India 2015.

## **Annexe A**

# **La résolution du problème des valeurs aux limites pour les équations différentielles ordinaires dans Matlab avec bvp4c**

## A.1. Introduction

Les équations différentielles ordinaires décrivent des phénomènes qui changent en permanence. Ils se posent en modèles à travers les mathématiques, les sciences et l'ingénierie. En soi, un système d'équations différentielles a de nombreuses solutions. Communément une solution d'intérêt est déterminée en spécifiant les valeurs de tous ses composants en un seul point  $x = a$ . c'est un problème de valeur initiale (IVP). Cependant, dans de nombreuses applications d'une solution est déterminée d'une manière plus complexe. Un problème de valeur limite (BVP) spécifie les valeurs ou des équations pour composants de la solution à plus d'un  $x$ . contrairement de IVP, un problème de valeur limite ne peut être avoir une solution, ou peut avoir un nombre fini, ou peut avoir une infinité. De ce fait, les programmes de résolution de BVP, les utilisateurs doivent fournir une estimation de la solution souhaitée. Souvent, il existe des paramètres qui doivent être déterminés de telle sorte que le BVP a une solution. Encore une fois il pourrait y avoir plus d'une possibilité, afin que les programmes nécessitent une estimation pour les paramètres souhaités. Singularités dans les coefficients et les problèmes posés sur des intervalles infinis ne sont pas inhabituelles.

Cet annexe montre comment formuler, résoudre et tracer la solution d'un BVP avec le programme bvp4c Matlab. Il vise à rendre la résolution d'un problème type d'un BVP aussi facile que possible. BVPs est beaucoup plus difficile à résoudre que IVP et tout solveur peut échouer, même avec de bonnes estimations pour la solution et des paramètres inconnus. bvp4c est un solveur efficace, mais la méthode sous-jacente et l'environnement de calcul ne sont pas appropriés pour de grandes précisions ni pour des problèmes avec très brusques changements de leurs solutions.

## A.2. Problème de valeur aux limites

Si la fonction  $f$  est lisse sur  $[a, b]$ , la valeur initiale problème  $y' = f(x, y)$ ,  $y(a)$  donné, a une solution unique. Problèmes de valeur aux limites à deux points sont illustrés par l'équation

$$y'' + y = 0 \tag{A.1}$$

avec des conditions aux limites  $y(a) = A$ ,  $y(b) = B$ . Un moyen important d'analyser ces problèmes est de considérer une famille de solutions de IVP. Soit  $y(x, s)$  la solution de l'équation (1) avec les valeurs initiales  $y(a) = A$ ,  $y'(a) = s$ . chaque  $y(x, s)$  s'étend à  $x = b$  et nous demandons, pour quelles valeurs de  $S$ ,  $y(b, s) = B$ ?

s'il existe une solution de cette équation algébrique,  $y(x, s)$  correspondant constitue une solution de l'équation différentielle qui satisfait les deux conditions aux limites. En utilisant la linéarité, nous pouvons trier les possibilités facilement. Soit  $u(x)$  la solution définie par  $y(a) = A$ ,  $y'(a) = 0$  et  $v(x)$  la solution définie par  $y(a) = 0$ ,  $y'(a) = 1$ . La linéarité implique que  $y(x, s) = u(x) + sv(x)$ , et la condition à la limite  $B = y(b, s) = u(b) + sv(b)$  s'élève à une équation algébrique linéaire pour la pente initiale inconnue  $s$ . Les faits familiers de l'existence et l'unicité de solutions d'équations algébriques linéaires nous disent alors qu'il ya soit une solution exactement à la BVP, ou il ya des valeurs limites  $B$  pour lesquels il n'existe aucune solution et d'autres pour lesquels il existe une infinité de solutions.

### A.3. Méthodes numériques

L'approche théorique de la BVP du paragraphe 2 est basée sur la solution de IVP pour Odes et la solution des équations algébriques non linéaires. Parce qu'il ya des programmes efficaces pour les deux tâches, il est naturel de les combiner dans un programme pour la solution du BVP. L'approche est appelée une méthode de tir (shooting method). Parce qu'il apparaît avant si droit d'utiliser des outils numériques de qualité pour la solution du BVP par des techniques de tirs, il est peut-être surprenant que bvp4c n'est pas un code de technique de tirs. La difficulté de base avec cette méthode est qu'une parfaitement agréable BVP peut nécessiter l'intégration des IVP qui sont instables. C'est, la solution d'un BVP peut être insensible aux changements de valeurs limites, mais les solutions de l'IVP de méthode de tir sont sensibles aux changements dans les valeurs initiales. L'exemple simple

$$y'' - 100y = 0 \tag{A.2}$$

avec  $y(0) = 1$ ,  $y(1) = B$  fait le point. le tire implique la solution  $y(x, s) = \cos 10x + 0.1s \sinh 10x$  de l'IVP avec valeurs initiales  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = s$ . De toute évidence, ce qui peut être aussi grand  $0.1 \sinh 10 \approx 1101$ . Un petit calcul montre que la pente qui conduit à la satisfaction de la condition à la limite à  $x = 1$  est  $s = 10(B - \cosh 10) / \sinh 10$  puis que, pour la solution de la BVP,  $|\partial y / \partial B| = |\sinh 10x / \sinh 10| \leq 1$ . Évidemment, les solutions de l'IVP sont beaucoup plus sensibles aux variations de la pente initiale de la solution  $s$ , alors que la solution du BVP est à des changements dans la valeur limite  $B$ . si la IVP n'est pas trop instable, le tir peut être très efficace. IVP instable peut causer un code de tirs à l'échec parce que l'intégration "explose" avant d'atteindre la fin de l'intervalle. Plus souvent, cependant, l'IVP atteint solveur la fin,

mais est incapable de calculer un résultat précis là-bas et de ce fait, le solveur de l'équation non linéaire est incapable de trouver des valeurs initiales précises. Une variété de techniques sont utilisées pour améliorer la prise de vue, mais quand l'IVP est très instable, prise de vue n'est tout simplement pas une approche naturelle pour résoudre BVP.

bvp4c met en œuvre une méthode de collocation pour la solution du BVP de la forme

$$y' = f(x, y, p), \quad a \leq x \leq b \quad (\text{A.3})$$

avec de non-linéarité générale, deux points conditions aux limites

$$g(y(a), y(b), p) = 0 \quad (\text{A.4})$$

Ici  $p$  est un vecteur de paramètres inconnus. Pour plus de simplicité, il est supprimé dans les expressions qui suivent. La solution d'approximation  $s(x)$  est une fonction continue qu'est un polynôme cubique sur chaque sous-intervalle  $[x_n, x_{n+1}]$  d'une maille  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Il satisfait les conditions aux limites.

$$g(s(a), s(b)) = 0 \quad (\text{A.5})$$

et qu'il satisfait aux équations différentielles (de colliquatives) aux deux extrémités et le point médian de chaque sous-intervalle

$$s'(x_n) = f(x_n, s(x_n)) \quad (\text{A.6})$$

$$s'((x_n + x_{n+1})/2) = f((x_n + x_{n+1})/2, s((x_n + x_{n+1})/2)) \quad (\text{A.7})$$

$$s'(x_{n+1}) = f(x_{n+1}, s(x_{n+1})) \quad (\text{A.8})$$

Ces conditions conduisent à un système d'équations algébriques non linéaires pour les coefficients définissant  $s(x)$ . A la différence de la technique de tir, la solution  $y(x)$  est évaluée sur tout l'intervalle  $[a, b]$  et les conditions aux limites sont prises en compte à tout les moments. Les équations algébriques non linéaires sont résolues de manière itérative par linéarisation, si cette approche s'appuie sur les solveurs d'équations linéaires de Matlab plutôt que ses codes IVP. la méthode de base de bvp4c, que l'on appelle la méthode de Simpson, est bien connue et se trouve dans un certain nombre de codes. Il peut être démontré que les hypothèses modestes,  $s(x)$  est une approximation de quatrième ordre à une solution isolée  $y(x)$ , c'est-à-dire  $\|y(x) - s(x)\| \leq Ch^4$ . Ici,  $h$  est la valeur maximale de la taille de pas

$h_n = x_{n+1} - x_n$  set  $C$  est une constante. Parce que ce n'est pas vrai de certaines méthodes de collocation populaires, nous insistons sur le fait important que cette borne est vraie pour tout  $x$  dans  $[a, b]$ . Après  $s(x)$  est calculé sur un maillage avec bvp4c, il peut être évalué à peu de frais à tout  $x$ , ou un ensemble de  $x$ , dans  $[a, b]$  avec la fonction bvpval. Parce que BVPs peuvent avoir plus d'une solution, les codes de BVP obliger les utilisateurs à fournir une estimation pour la solution souhaitée. L'estimation comprend une estimation d'un maillage initial révèle que le comportement de la solution souhaitée. Les codes ensuite adaptés le maillage de manière à obtenir une solution numérique exacte avec un nombre réduit de points de maillage. Venir avec suffisamment bonne supposition est souvent la partie la plus difficile de résoudre un BVP. bvp4c adopte une approche inhabituelle pour le contrôle d'erreur qui lui permet de traiter avec suppositions pauvres. La continuité de  $s(x)$  sur  $[a, b]$  et collocation aux extrémités de chaque sous-intervalle implique que  $s(x)$  a également une dérivée continue sur  $[a, b]$ . Pour une telle approximation, le résidu  $r(x)$  dans l'équation différentielle est définie par:

$$r(x) = s'(x) - f(x, s(x)) \quad (\text{A.9})$$

Autrement dit, cela dit que  $s(x)$  est la solution exacte de ODEs perturbés.

$$s'(x) = f(x, s(x) + r(x)) \quad (\text{A.10})$$

De même, le résidu dans les conditions aux limites sont  $g(s(a), s(b))$ .

bvp4c contrôle les tailles de ces résidus. si les résidus sont uniformément petite,  $s(x)$  est une bonne solution dans le sens que ce est la solution exacte d'un problème proche de celui fourni au solveur. En outre, pour un problème relativement bien conditionné, les petits résidus impliquent que  $s(x)$  est proche de  $y(x)$ , même quand  $h$  n'est pas assez petit pour que la quatrième ordre de convergence est évident. Les codes de techniques de tir peuvent également être décrites comme contrôlant la taille de ces résidus: à chaque étape, un code d'IVP contrôle l'erreur locale, ce qui équivaut à contrôler la taille du résidu d'un prolongement continu approprié de formule utilisé, et le solveur d'équations non linéaires est utilisé pour trouver des valeurs initiales pour lesquelles le résiduel dans les conditions aux limites est faible. Suppression résiduelle a des vertus importantes: résidus sont bien définis, peu importe à quel point la solution approchée, et les résidus peuvent être évaluée importe où simplement en évaluation  $f(x, s(x))$  ou  $g(s(a), s(b))$ . bvp4c est basée sur des algorithmes qui sont plausibles, même lorsque le maillage initial est très faible, mais fournir des résultats corrects que  $h$  tends

vers 0. Ils exploitent des propriétés très intéressantes de la méthode de Simpson. BVPs se posent dans les formes les plus diverses. À peu près tout BVP peuvent être formulées pour solution avec `bvp4c`. la première étape consiste à écrire l'ODE comme un système de premières équations différentielles d'ordre.

C'est une tâche familière, car elle doit également être fait pour IVP solveur de Matlab. L'idée de base est d'introduire de nouvelles variables, une pour chaque variable dans le problème d'origine et l'autre pour chacun de ses dérivés à un de moins que le dérivé le plus élevé apparaisse. Le procédé est illustré dans. C'est tout ce qui est nécessaire pour résoudre un IVP, mais BVP peut être beaucoup plus compliqué: Comme nous l'avons déjà vu, contrairement IVP, problèmes aux limites n'ont pas nécessairement une solution, et quand ils le font, la solution n'est pas nécessairement unique.

En effet, BVP implique généralement des valeurs de paramètres pour lesquels le problème a une solution. En outre, les singularités de toutes sortes ne sont pas du tout inhabituelles.

#### A.4. Syntaxe de `bvp4c` sur Matlab

`bvp4c` résoudre des problèmes aux limites pour les équations différentielles ordinaires la syntaxe de cette méthode est:

`sol = bvp4c(@odefun,@bcfun,solinit,options)`

avec les arguments suivants:

<b>odefun</b>	Une fonction qui évalue la BVP sous la forme d'un système équivalent de la première équation différentielle commander. Il peut avoir la forme <code>function dydx = odefun(x,y),</code> où <code>x</code> est un scalaire, et <code>dydx</code> et <code>y</code> sont des vecteurs de colonne.
<b>bcfun</b>	Une fonction qui calcule le résiduel dans les conditions aux limites. <code>bcfun</code> peut avoir la forme <code>function res = bcfun(ya,yb)</code> où <code>ya</code> et <code>yb</code> sont des vecteurs colonne correspondants à la solution numérique au <code>x = a</code> et <code>x = b</code> , respectivement. <ul style="list-style-type: none"><li>• Les premiers éléments <code>ya (1)</code> et <code>yb (1)</code> sont les valeurs de <code>y</code> à <code>x = a</code> et <code>x = b</code>.</li><li>• Les éléments secondes <code>ya (2)</code> et <code>yb (2)</code> sont les valeurs de <code>dy/dx</code> en <code>x = a</code> et <code>x = b</code>.</li></ul>

**Annexe A:** La résolution du problème des valeurs aux limites pour les équations différentielles ordinaires dans Matlab avec `bvp4c`

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• res de paramètre de sortie est un vecteur colonne avec les valeurs de résidus.</li> </ul>
<b>solinit</b>	<p>Une structure contenant la proposition initiale d'une solution.</p> <p><b>solinit</b> peuvent être créés en utilisant la fonction <b>bvpinit</b>.</p> <p style="text-align: center;"><b>solinit = bvpinit(x,yinit);</b></p> <p>où x est un vecteur estimation des points de maillage initial que le procédé en solution dans <code>bvp4c</code> devrait d'abord utiliser.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Pour un BVP avec un domaine [a, b], le premier élément de x est a, et le dernier élément est b.</li> <li>• Maillage initial peut être choisi en utilisant <b>x=linspace(a,b,N);</b> or <b>x=[a:increment:b];</b></li> <li>• Le vecteur <b>yinit</b> est l'estimation initiale de la solution, il peut être constant ou fonction de x.</li> </ul>
<b>sol</b>	<p><b>sol</b> est une structure contenant la solution. Il est renvoyé par <code>bvp4c</code>. Il a les champs suivants:</p> <p><b>sol.x</b> Maillage sélectionné par <code>bvp4c</code>. Le nombre final de points de maillage est déterminée par le solveur BVP4c pendant le processus de solution.</p> <p><b>sol.y</b> Champ de solution dans les points de maillage de <b>sol.x</b></p> <p>La structure de <b>sol</b> peut avoir n'importe quel nom. Il est commode d'utiliser des sous-fonctions de placer toutes les fonctions requises par <code>bvp4c</code> dans un seul fichier M-file</p>
<b>Options</b>	<p>Le solveur cherche à contrôler l'erreur dans la solution par les résidus dans les conditions aux limites, à la fois pour chaque sous-intervalle et les limites du système. Des dispositions sont prises pour la spécification de l'erreur absolue dans les solutions et l'erreur relative autorisée à se propager entre itérations.</p> <p style="text-align: center;"><b>options = bvpset('RelTol',10<sup>-6</sup>, 'Abstol',10<sup>-6</sup>, 'Nmax',5000,'Stats','off','Vectorized','on');</b></p>



## Résumé

Dans ce travail, on a étudié l'effet de la dispersion thermique en convection mixte dans un milieu poreux non Darcéen et de masse simultanée, avec des conditions aux limites simples. La géométrie considérée est une plaque verticale immergée dans un milieu poreux non-Darcéen avec l'extension de Forchheimer, saturé de nanofluide. Le phénomène de la convection thermo-solutale est régi par les équations de la conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie et de la concentration des nanoparticules. Le système d'équations différentielles ordinaire de la couche limite est obtenu par des transformations de similarité appropriées. L'écoulement convectif est régi par différents paramètres de contrôle, à savoir le nombre de Lewis  $Le$ , le nombre de Lewis des nanoparticules  $Le_p$ , le paramètre de Forchheimer  $Fo$ , le coefficient de la dispersion thermique  $\xi$ , le paramètre de mouvement Brownien  $Nb$ , le paramètre de la thermophorèse  $Nt$ , le taux de flottabilité de nanofluide  $Nr$ , et le taux de flottabilité de nanofluide régulier  $Nc$  et le terme convectif  $\lambda$ . Les résultats obtenus ont permis de mettre en évidence d'une part l'influence de l'effet de différents paramètres de contrôle sur le taux de transfert de chaleur et de masse et de l'autre part l'influence de l'effet de ces paramètres en question sur l'écoulement convectif notamment sur les profils de vitesse, la distribution de température et de la concentration ainsi que la fraction volumique.

En plus, la présence des nanoparticules joue un rôle important dans l'amélioration de flux de transfert de chaleur et de masse.

**Mots clés :** Convection mixte, Milieu poreux, Nanofluide, Dispersion thermique,

## Abstract

In this work, we studied the effect of thermal dispersion in mixed convection in a non-Darcéan porous medium of simultaneous mass with simple boundary conditions. The geometry considered is a vertical plate immersed in a non-Darcean porous medium with the extension of Forchheimer, saturated with nanofluide. The phenomenon of thermosolutal convection is governed by the equations of conservation of mass, momentum, energy and concentration of nanoparticles. The system of ordinary differential equations of the boundary layer is obtained by appropriate similarity transformations. The convective flow is governed by different control parameters. Namely the Lewis number  $Le$ , the Lewis number of the  $Le_p$  nanoparticles, the Forchheimer  $Fo$  parameters, the thermal dispersion coefficients  $\xi$ , the Brownian motion parameter  $Nb$ , the  $Nt$  thermophoresis parameter and the nanofluid buoyancy rate  $Nr$ , and the regular nanofluid buoyancy rate  $Nc$ , the convective term  $\lambda$ . The results obtained have made it possible to highlight, on the one hand, the influence of the effect of different control parameters on the heat and mass transfer rate, and on the other hand the influence of the effect of these parameters on the convective flow, in particular on the velocity profiles, the temperature and concentration distribution and the volume fraction. In addition, the presence of nanoparticles plays an important role in the improvement of heat and mass transfer flows.

**Key Words:** Mixed convection, Pore medium, Nanofluide, Thermal dispersion,