

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDERRAHMANE MIRA BEJAIA
FACULTÉ DE LA TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE

MEMOIRE
PRÉSENTÉ POUR L'OBTENTION DU DIPLOME DE
MASTER

FILIÈRE : GÉNIE MÉCANIQUE
SPÉCIALITÉ : ENERGÉTIQUE

PAR :
AYAD FERIEL
MOHAMADI TARIK

Thème

**Etude de l'influence des effets de flottabilité thermique et
massique sur l'écoulement impactant sur une paroi chauffée**

Soutenu le 22 Juin 2017 devant le jury composé de:

Mr. Amar DJEMA	Président
Mr. Faïçal NAIT BOUDA	Rapporteur
Mr. Moussa ALLOUCHE	Examineur

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2016-2017

REMERCIEMENTS

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui nous voudrions témoigner toute notre reconnaissance.

Tout d'abord nous adressons toute notre gratitude à notre encadreur, M. NAIT BOUDA Faïçal, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter notre réflexion.

Nous désirons aussi remercier M. MENDIL Fatsah, M. MOULOUD Smail et M. AGHBARI Annis qui par leurs compréhensions et leurs aides nous ont permis d'accomplir notre travail de recherche.

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs propositions.

A nos familles et amis pour nous avoir encouragé et fourni un grand soutien moral. Sans eux, nous n'en serions pas là.

Enfin, nous tenons également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Liste des figures

Liste des tableaux

Nomenclature

Introduction générale.....	1
----------------------------	---

Chapitre I : Généralités et synthèse bibliographique

I.1 Convection thermique.....	2
I.1.1 Convection naturelle	2
I.1.2 Convection forcée	2
I.1.3 Convection mixte	2
I.2 Convection mixte double diffusive.....	3
I.2.1 Convection mixte thermique	3
I.2.2 Convection mixte massique	3
I.3 Force de flottabilité.....	3
I.3.1 Force de flottabilité thermique	4
I.3.2 Force de flottabilité massique	4
I.4. Couche limite.....	4
I.4.1 couche limite dynamique	5
I.4.1.1 Couche limite laminaire.....	5
I.4.1.2 Couche limite turbulente	6
I.4.2 Couche limite thermique	6
I.4.3 Couche limite massique	8
I.5. Jet impactant	10
I.5.1 Jet unique en impact.....	11
I.5.1.1 Structure du jet libre	11
a.Zone de corps potentiel	11
b.Zone de transition.....	11
c.Zone développée	12
I.5.2.1 Structure du jet en impact.....	12
a.Zone de jet libre.....	12
b.Zone de stagnation	13

c.Zone de jet pariétal	13
I.6. Synthèse bibliographique.....	13

Chapitre II: Positionnement du problème

II.1 Equations générales de conservation	18
II.1.1 Equation de continuité	18
II.1.2 Equation de quantité de mouvement.....	18
II.1.3 Equation de l'énergie	19
II.1.4 Equation de transfert de masse	20
II.2 Présentation du modèle.....	20
II.2.1 Hypothèses simplificatrices	22
II.2.2 Formulation du problème.....	22
II.2.2.1 Equations de conservation.....	22
II.2.2.2 Conditions aux limites.....	23
II.3 Formulation adimensionnelle	23
II.3.1 Equations adimensionnelles et solution auto-similaire.....	24
II.3.2 Conditions aux limites	25
II.4 Conclusion	25

Chapitre III: Méthode numérique

III.1 Equations différentielles ordinaires.....	26
III.2 Problème de valeur aux limites	26
III.3. Méthode numérique	27
III.4 Conclusion	29

Chapitre IV: Résultats et discussions

IV.1 Description des objectifs de l'étude	30
IV.2 Validation numérique.....	31
IV.3 Résultats et discussions	32
IV.3.1 Cas du transfert thermique pur ($N=0$)	33
IV.3.1.1 Champ dynamique	33
IV.3.1.2 Champ thermique.....	37
IV.3.1.3 Influence du nombre de Prandtl sur les deux régions.....	39
IV.3.3 cas du transfert double diffusif	40

IV.3.3.1 Partie supérieure	40
a. Champ dynamique.....	41
b. Champ thermique	42
c. Champ massique	43
IV.3.3.2 Partie inférieure	45
a. Champ dynamique.....	45
b. Champ thermique	46
c. Champ massique	47
IV.3.3.3 Influence du rapport de flottabilité sur les paramètres adimensionnels locaux ...	48
Conclusion générale	50
Références bibliographiques	52
Annexe	54

Listes des figures

Figure I.1 : Développement d'une couche limite dynamique le long d'une plaque plane.	5
Figure I.2 : Délimitation des zones de couche limite dynamique.[5]	6
Figure I.3 : Développement d'une couche limite thermique le long d'une plaque plane isotherme.	7
Figure I.4 : Développement d'une couche limite massique le long d'une plaque plane.	8
Figure I.5 : Développement de couches limites le long d'une plaque plane verticale.....	10
Figure I.6 : Composantes du jet libre.....	11
Figure I.7 : Structure du jet impactant sur une paroi plane.[10]	12
Figure II.1 : Schématisation du modèle physique.	21
Figure IV.1 : Schématisation des deux régions de la paroi.....	30
Figure IV.2 : Influence du paramètre de flottabilité thermique λ_t sur le profil de vitesse.....	34
Figure IV.3 : Schématisation de la différence entre les deux régions de la paroi.....	35
Figure IV.4 : Double solution pour la partie inférieure de la plaque, cas sans transfert de masse.	35
Figure IV.6 : Profils du coefficient de frottement à la paroi en fonction du nombre de prandtl Pr.	40
Figure IV.7: Profils du nombre de Nusselt à la paroi en fonction du nombre de prandtl Pr.	40
Figure IV.10 : Influence du rapport de flottabilité N sur le profil de température pour la partie supérieure de la paroi.	43
Figure IV.11 : Influence du rapport de flottabilité N sur le profil de concentration pour la partie supérieure de la paroi.	44
Figure IV.12 : Influence du rapport de flottabilité N sur le profil de vitesse pour la partie inférieure de la paroi.	45
Figure IV.13 : Double solution pour $N > N_c$ dans la partie inférieure.....	46
Figure IV.14 : Influence du rapport de flottabilité N sur le profil de température pour la partie inférieure de la paroi.	47
Figure IV.15 : Influence du rapport de flottabilité N sur le profil de concentration pour la partie inférieure de la paroi.	48

Figure A.1 : Ecoulement de point de stagnation.	56
-------------------------------------------------------------	----

Liste des tableaux

Tableau IV.1 : Valeurs de $f''(0)$ pour différentes valeurs du nombre de Pr avec $\lambda t=1$ et $Sc=0$	32
Tableau IV.2 : Valeurs de $-\theta'(0)$ pour différentes valeurs du nombre de Pr avec $\lambda t=1$, et $Sc=0$	32
Tableau IV.3 : coefficient de frottement à la paroi pour différentes valeurs de λ_t	37
Tableau IV.4 : Nusselt à la paroi pour différentes valeurs de λ_t	39
Tableau IV.5 : Variation du coefficient de frottement et du nombre de Nusselt pour différentes valeurs Pr avec $\lambda_t =1$, $Sc=0.2$	40
Tableau IV.6 : Valeurs de $f''(0)$, $-\theta'(0)$, $-\phi'(0)$ en fonction du rapport de flottabilité N	48

Nomenclature

C	Concentration massique	(kg.m ⁻³)
C _f	Coefficient de frottement	
C _p	Capacité calorifique à pression constante	(J.kg ⁻¹ .K ⁻¹)
D	Diffusivité massique	(m ² .s ⁻¹)
<i>f</i>	Fonction de similitude	
g	Accélération de la gravité	(m.s ⁻²)
Gr	Nombre de Grashof	
K	Conductivité thermique	(W.m ⁻¹ .K ⁻¹)
L	Longueur caractéristique	(m)
ṁ	Densité de flux massique	(kg. m ² .s ⁻¹)
N	rapport de flottabilité	
Nu	Nombre de Nusselt	
P (Pa)	Pression	
Pr	Nombre de Prandtl	
q (W. m ⁻²)	Densité de flux thermique	
Re	Nombre de Reynolds	
Ri	Nombre de Richardson	
Sc	Nombre de Schmidt	
Sh	Nombre de Sherwood	
T	Température	(K)

Symboles Grecs

α	Diffusivité thermique	(m ² .s ⁻¹)
β	Coefficient de dilatation	(K ⁻¹)

θ	Température adimensionnelle	
λ	Paramètre de flottabilité	
μ	Viscosité dynamique	$(\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1})$
ν	Viscosité cinématique	$(\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1})$
ρ	Masse volumique	$(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$
τ	Contrainte de cisaillement	$(\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2})$
ϕ	Concentration adimensionnelle	
Φ	Fonction de dissipation	$(\text{N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2})$
ψ	Fonction de courant	

Indices

w	relatif à la paroi
∞	relatif à l'écoulement externe
C	relatif à une grandeur massique
t	relatif à une grandeur thermique
x	relatif à une grandeur locale

Introduction générale

Introduction générale

Le transfert de chaleur et de masse a suscité un grand intérêt dans le monde de la recherche scientifique et dans le développement technologique, cet intérêt est une conséquence de l'omniprésence de ces deux phénomènes dans de nombreuses applications industrielles, telle que le refroidissement des composants électroniques, le séchage des denrées alimentaires, le traitement thermique des matériaux (trempe par jet impactant) ainsi que le traitement de surface en métallurgie.

Pour mieux appréhender le fonctionnement de ces deux phénomènes, les chercheurs se sont penchés sur l'étude d'écoulements à travers des géométries connues, et ont développé des modèles de simulation numérique.

Ainsi, ce modeste travail suit la même ligne de pensée et le même objectif, c'est-à-dire comprendre et modéliser un phénomène existant à l'aide d'un modèle numérique. Dans cette perspective nous nous intéressons à la convection mixte double diffusive le long d'une plaque plane verticale, plus particulièrement à l'influence des forces de flottabilité thermique et massique sur l'écoulement et les échanges thermique et massique.

Dans le contexte de cette étude on a subdivisé ce manuscrit en quatre parties.

Le premier chapitre est consacré aux généralités et aux notions de base que nous avons définies de manière brève, ainsi qu'une synthèse bibliographique des travaux effectués en rapport avec le problème posé.

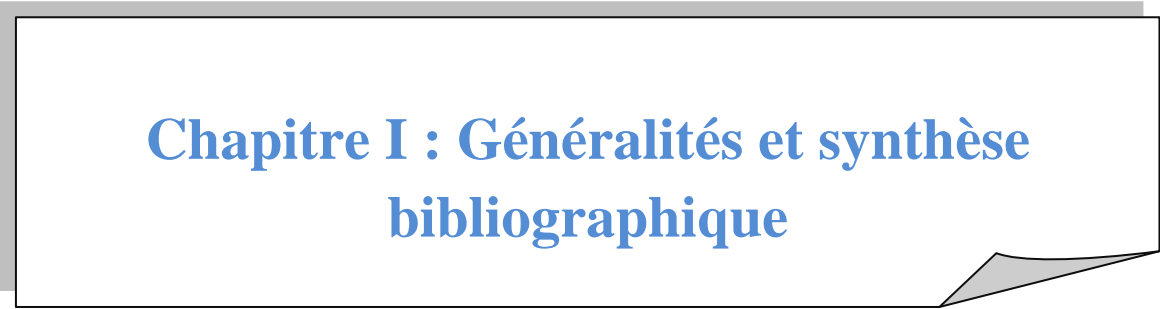
Le deuxième chapitre, quant à lui est dédié à la présentation de notre modèle, et la formulation mathématique des équations gouvernantes.

Nous exposons dans le troisième chapitre la méthode de résolution numérique adoptée pour résoudre ce problème.

En ce qui concerne le dernier chapitre, il est consacré à l'interprétation et la discussion des résultats obtenus.

On termine par une conclusion générale où on met en exergue les principaux résultats de cette étude ainsi que les éventuelles perspectives qui nous sembleraient intéressantes à développer

Pour ne pas alourdir la présentation du texte, nous donnons en annexe quelques compléments relatifs aux relations fondamentales ayant servi à l'étude .



Chapitre I : Généralités et synthèse bibliographique

Ce chapitre est dédié à la définition et au rappel des notions de base, nécessaires à la compréhension de notre problème, ainsi qu'une brève synthèse bibliographique sur les études menées par nos prédécesseurs dans le domaine.

I.1 Convection thermique

La convection thermique est un mode de transfert de chaleur, il s'agit du mécanisme de transfert d'énergie le plus prépondérant entre un solide et un fluide par l'action combinée de la conduction, de l'accumulation de l'énergie et du mouvement du milieu. Le transport d'énergie par convection d'une surface dont la température est supérieure à celle du fluide qui l'entoure s'effectue en plusieurs étapes. D'abord la chaleur s'écoule par conduction de la surface aux particules du fluide adjacentes. L'énergie ainsi transmise sert à augmenter la température et l'énergie interne de ces particules. Ensuite les particules vont se mélanger avec d'autres particules situées dans une région à basse température et transférer une partie de leur énergie.

La transmission de chaleur par convection se subdivise en trois types distincts :

I.1.1 Convection naturelle

Le phénomène de convection naturelle thermique apparaît spontanément, sous le seul effet des différences de masse volumique résultantes des différences de températures sur les frontières et d'un champ de forces extérieures (le champ gravitationnel, ...). [1-2]

I.1.2 Convection forcée

Le phénomène de convection forcée apparaît quand le mouvement du fluide est imposé par une cause mécanique extérieure (pompe, ventilateur, ...) au système. [1-2]

I.1.3 Convection mixte

La convection mixte correspond au couplage des deux phénomènes précédents (convection naturelle et forcée) quand les vitesses d'écoulement, fictives, dues aux deux types de convections considérées séparément, sont du même ordre de grandeur. [1-2]

Le paramètre permettant de distinguer ces différents modes de convection selon sa valeur est un nombre adimensionnel nommé nombre de Richardson. Il représente le rapport entre l'énergie potentielle des forces de poussée et l'énergie cinétique du fluide, en d'autres termes, il illustre l'importance de la convection naturelle relativement à la convection forcée. Il est défini

par : $Ri = \frac{Gr}{Re^2}$

- $Ri \gg 1$, l'énergie potentielle des forces de poussée domine l'énergie cinétique du fluide, c'est un régime de convection naturelle.
- $Ri \ll 1$, l'énergie cinétique du fluide domine l'énergie potentielle des forces de flottabilité, c'est un régime de convection forcée.
- $Ri \approx 1$, l'énergie potentielle des forces poussée et l'énergie cinétique du fluide sont de même ordre, c'est un régime de convection mixte. [3]

I.2 Convection mixte double diffusive

Le terme, double diffusive, est utilisé pour qualifier un phénomène de convection induit par deux gradients de densité possédant différents taux de diffusion (les transferts de chaleur et de masse se produisent simultanément). Comme spécifié précédemment, la convection mixte est induite par des causes de mouvement interne et externe qui œuvrent conjointement, ainsi deux modes de convection mixte se présentent selon l'origine du mouvement interne au fluide :

I.2.1 Convection mixte thermique

La présence au sein du fluide d'un gradient de température engendre un gradient de densité créant ainsi une force de poussée verticale qui provoque le mouvement des particules.

I.2.2 Convection mixte massique

Dans ce cas le mouvement des particules est engendré par un gradient de concentration présent dans le fluide dû à l'existence d'espèces différentes dans ce dernier.

I.3 Force de flottabilité

Elle représente une force verticale agissant sur un fluide, elle est de sens opposé à l'accélération gravitationnelle. Elle peut être la conséquence d'un gradient de température ou bien un gradient de concentration au sein du fluide.

I.3.1 Force de flottabilité thermique

Considérons un système fermé, constitué d'un fluide unique en présence d'une source de chaleur conduisant à une élévation de température d'une partie de ce fluide. La différence de température induit une différence de masse volumique qui met le fluide en mouvement, ρ_0 représente alors la masse volumique du fluide froid et ρ la masse volumique du fluide chaud ($\rho < \rho_0$). Dans ces conditions, la poussée d'Archimède agissant au sein du fluide est le plus souvent appelée flottabilité. Le mouvement du fluide tend à homogénéiser le champ de température par la convection qu'il induit, la flottabilité constitue alors le lien entre le champ de température et le champ de vitesse et traduit le couplage entre la dynamique et la thermique. Elle est définie par : $F_t = (1 - \beta_t \Delta T)g$ **(I.1)**

Où, β_t , représente le coefficient de dilatation thermique du fluide, il est défini par :

$$\beta_t = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{P,C} \quad \textbf{(I.1.a)}$$

I.3.2 Force de flottabilité massique

De la même manière on peut définir la poussée massique. Considérons un mélange constitué de deux espèces chimiques A et B ; C_A représente la concentration de l'espèce A et C_B la concentration de l'espèce B. La différence de concentration entre les deux constituants met en mouvement les particules du fluide. Les particules les moins denses exhibent un mouvement ascendant, en retour, le mouvement du fluide tend à homogénéiser le champ de concentration par diffusion massique. Cette poussée massique possède pour expression :

$$F_c = (1 - \beta_c \Delta C) g \quad \textbf{(I.2)}$$

β_c , représente le coefficient de dilatation massique du fluide, il est définie par :

$$\beta_c = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial C} \right)_{P,T} \quad \textbf{(I.2.a)}$$

I.4. Couche limite

Il s'agit de cette mince couche de fluide qui se forme sur la surface d'un corps solide lorsque ce dernier entre en contact avec un fluide visqueux en déplacement (écoulement) ; elle peut être de nature dynamique, thermique ou massique:

I.4.1 couche limite dynamique

Lorsqu'un fluide se déplace sur un obstacle, les champs de vitesse et de pression sont perturbés par ce dernier. La couche limite est la zone de fluide contiguë à la paroi (ou bien, on peut dire qu'il s'agit d'une zone d'interface entre le corps et le fluide), dans laquelle se produit l'accommodation entre la vitesse nulle en paroi et la pleine vitesse locale du fluide libre.

De nombreuses propriétés de l'écoulement (frottement, transfert thermique et présence éventuelle de décollements) dépendent de cette couche limite.

On distingue deux types de couche limite dynamique:

I.4.1.1 Couche limite laminaire

La couche limite laminaire est caractérisée par le fait que tous les vecteurs vitesses sont parallèles à un même plan, l'écoulement se présente alors sous la forme de lames de fluide glissant les unes sur les autres. Ces lames restent rectilignes sur une certaine longueur, puis s'estompent. On observe une telle couche limite vers le bord d'attaque d'un profil. On appelle conventionnellement l'épaisseur δ de la couche limite la distance à la paroi à partir de laquelle la vitesse U est telle que : $U = 0.99 U_\infty$.

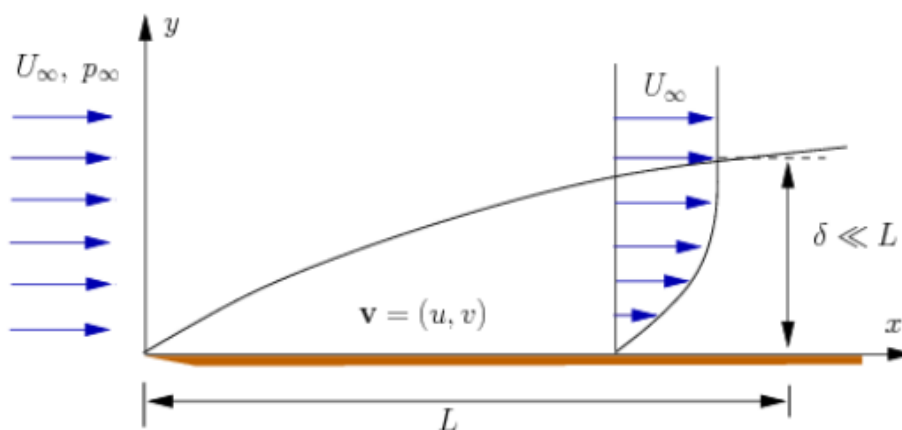


Figure I.1 : développement d'une couche limite dynamique le long d'une plaque plane.

En fait assez rapidement les lames disparaissent et la couche limite n'est plus dite laminaire mais turbulente.

I.4.1.2 Couche limite turbulente

L'écoulement présente un caractère désordonné, due en partie aux aspérités qui existent toujours sur la paroi. La couche limite devient turbulente et les vecteurs vitesses ne sont plus parallèles entre eux.

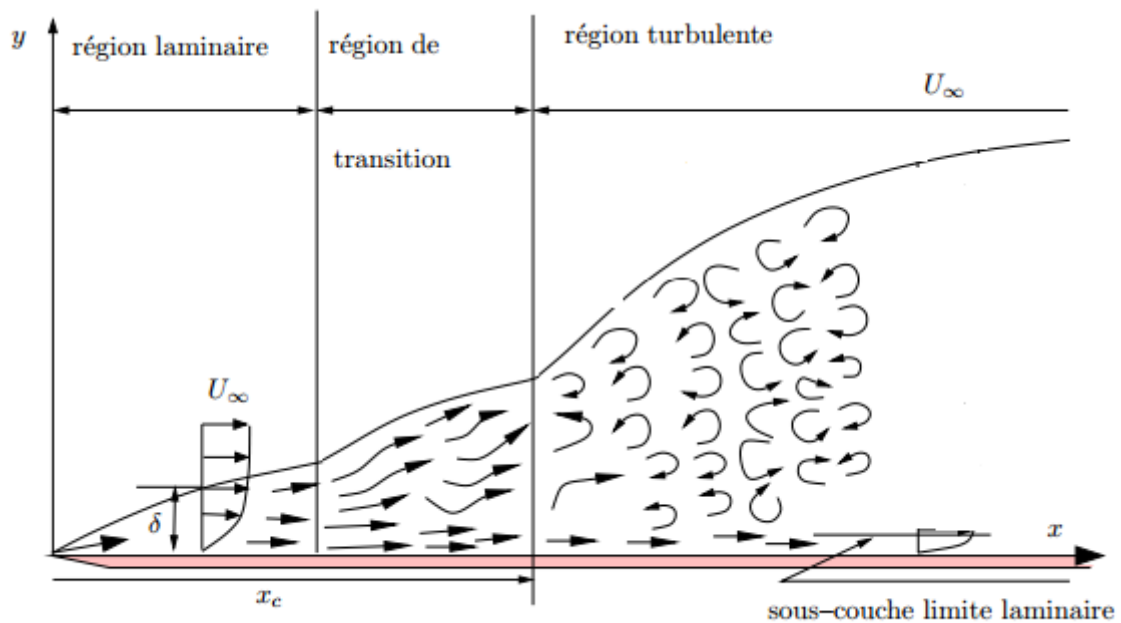


Figure I.2 : Délimitation des zones de couche limite dynamique. [4]

On remarque qu'il existe une délimitation entre les deux zones précédemment définies que l'on nomme zone de transition.

I.4.2 Couche limite thermique

La couche limite thermique ne se développe au sein d'un écoulement de fluide visqueux en contact avec un corps solide, que si ces derniers sont à des températures différentes.

Supposons par exemple que l'écoulement incident sur une plaque plane soit à une température uniforme T_∞ , et que la surface de cette dernière soit maintenue à une température T_w également uniforme mais différente de T_∞ . En explorant le champ de température T perpendiculairement à la plaque, selon l'ordonnée y , on observera une variation progressive de T_w à T_∞ , d'abord rapide puis de plus en plus lente à mesure qu'on pénètre dans l'écoulement.

L'épaisseur δ_t de la couche limite thermique est conventionnellement définie comme étant la distance à la paroi pour laquelle le rapport $\frac{T_w - T(\delta_t)}{T_w - T_\infty} = 0.99$.

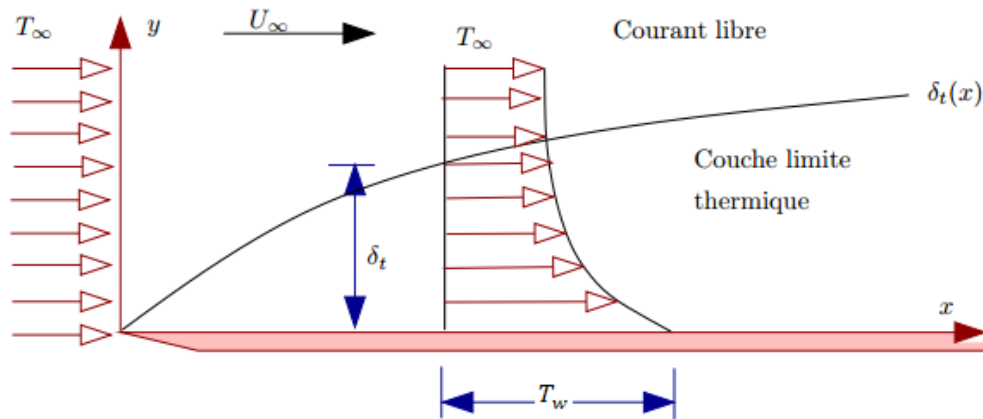


Figure I.3 : Développement d'une couche limite thermique le long d'une plaque plane isotherme.

Dans le cas où ces deux phénomènes se présentent de manière simultanée, il existe un nombre adimensionnel, le nombre de Prandtl Pr caractérisant le fluide et défini par: $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$, traduisant le rapport entre la diffusion visqueuse et la diffusion thermique, qui permet de lier les épaisseurs des deux couches limites :

- $Pr \ll 1$ Dans ce cas la chaleur se diffuse plus rapidement que la quantité de mouvement donc l'épaisseur de la couche limite thermique sera plus grande que celle de la couche limite dynamique $\delta_t \gg \delta$
- $Pr \gg 1$ Dans ce cas l'écoulement se caractérise par une diffusion de la quantité de mouvement beaucoup plus importante que la diffusion de la chaleur $\delta_t \ll \delta$
- $Pr \approx 1$ Les deux épaisseurs sont du même ordre de grandeur. [5]

I.4.3 Couche limite massique

À l'image de la couche limite thermique, la couche limite massique se développe au sein d'un écoulement de fluide en contact avec un corps lorsque les concentrations molaires de l'espèce considérée à la surface de ce corps et dans le courant libre sont différentes.

Considérons un mélange binaire des espèces A et B qui s'écoule au-dessus d'une surface, la concentration molaire de l'espèce A à la surface est $C_{A,w}$, et est égale à $C_{A,\infty}$ au sein de l'écoulement libre ; si les deux concentrations sont différentes il y'aura un transfert de l'espèce A par diffusion. La concentration de A est maximale au voisinage de la paroi et diminue lorsqu'on s'en éloigne, d'abord très rapidement puis de plus en plus lentement, à l'image de ce qui se passe pour la température lorsque l'écoulement est anisotherme.

Autrement dit, il se développe dans l'écoulement une couche limite de concentration, analogue à la couche limite thermique, dont l'épaisseur δ_c est définie de la même façon, par

$$\frac{C_{A,w} - C_A(\delta_c)}{C_{A,w} - C_{A,\infty}} = 0.99, \text{ ou bien par } \frac{\rho_{A,w} - \rho_A}{\rho_{A,w} - \rho_{A,\infty}} = 0.99. [4]$$

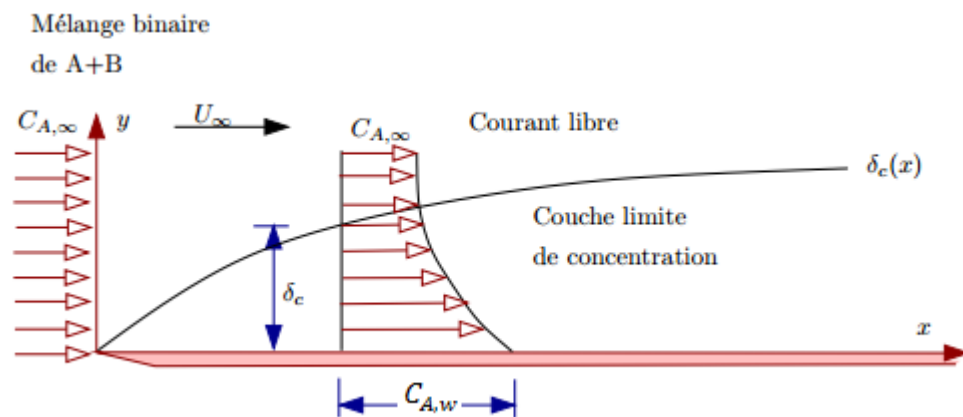


Figure I.4 : Développement d'une couche limite massique le long d'une plaque plane.

Le nombre de Schmidt, $Sc = \frac{\nu}{D}$, symbolisant le rapport entre la diffusivité de quantité de mouvement et la diffusivité massique, permet de comparer les deux épaisseurs δ et δ_c :

- $Sc \ll 1$ Dans ce cas, la diffusivité massique est plus importante que la diffusivité de quantité de mouvement donc l'épaisseur de la couche limite massique sera plus grande que celle de la couche limite dynamique $\delta \ll \delta_c$
- $Sc \gg 1$ Dans ce cas, l'écoulement se caractérise par une diffusivité massique négligeable par rapport à la diffusivité de la quantité de mouvement $\delta_c \ll \delta$
- $Sc \approx 1$ Les deux épaisseurs sont du même ordre de grandeur.

Il est évident que tout comme la couche limite dynamique, les couches limites thermique et de concentration se présentent sous les trois régimes, précédemment mis en évidence dans la Figure I.2.

Remarque

Dans les titres précédents nous avons mis en évidence le phénomène de couche limite sur une plaque plane horizontale, dans cette configuration les effets de la pesanteur sont négligeables, par contre dans le cas d'un écoulement sur une surface verticale l'effet de la pesanteur ne peut plus être négligé puisque il influence considérablement l'écoulement, cette influence est représentée par les termes $g(1 - \beta_t(T - T_\infty))$, $g(1 - \beta_c(C - C_\infty))$ qui sont respectivement les forces de flottabilité thermique et massique.

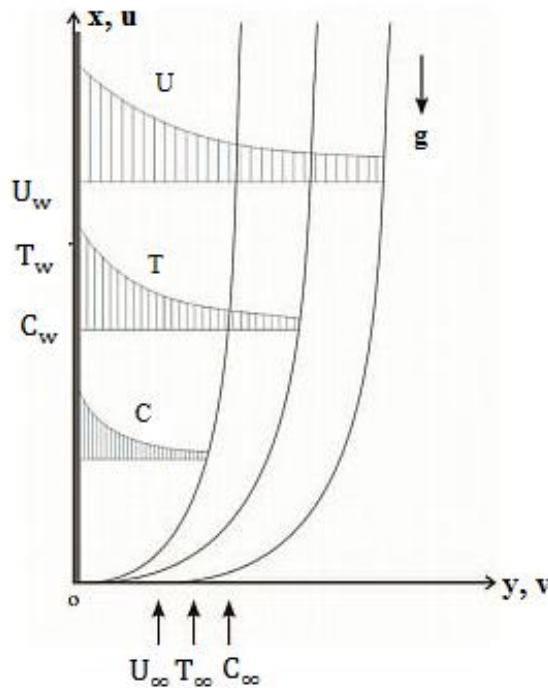


Figure I.5 : Développement de couches limites le long d'une plaque plane verticale.

I.5. Jet impactant

La technique de refroidissement par jet est une technique privilégiée dans les applications industrielles du fait de son efficacité liée aux importants échanges de chaleur locaux au niveau de la zone d'impact, ainsi de nombreuses études expérimentales et numériques ont été menées dans le but de comprendre ce phénomène. Nous allons présenter ici un bref aperçu des notions nécessaires à la compréhension de notre cas d'étude.

I.5.1 Jet unique en impact

Dans un premier temps nous allons présenter le cas du jet libre, qui est une partie intégrante du jet en impact, et cela pour mieux comprendre la structure propre à ce dernier.

I.5.1.1 Structure du jet libre

La décomposition classique du jet libre comporte trois régions :

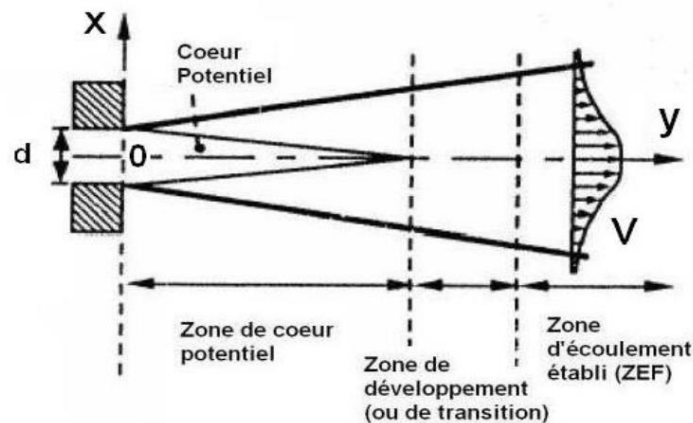


Figure I.6 : Composantes du jet libre.

a. Zone de corps potentiel

Elle se caractérise par une vitesse en sortie de buse conservée sur l'axe central du jet à l'intérieur de ce qui s'appelle alors le corps potentiel.

L'air environnant est entraîné par le jet et réduit ainsi progressivement la vitesse dans le jet jusqu'à atteindre la ligne centrale. L'entraînement de l'air environnant crée une région de mélange et de fort cisaillement. La longueur du corps potentiel est généralement évaluée entre 4 et 7 fois le diamètre hydraulique de l'injecteur [6-7-8], mais ce résultat dépend fortement des profils de vitesse et des taux de turbulence en sortie d'injecteur. La géométrie de l'injecteur influence nécessairement ces deux paramètres.

b. Zone de transition

Cette zone commence lorsque les couches de mélange se rejoignent au centre du jet. On observe alors une baisse de la vitesse axiale due aux fortes contraintes de cisaillement dans cette zone.

c. Zone développée

Comme le suggère le nom l'écoulement est complètement établi, autrement dit les profils de vitesses sont désormais auto semblables et peuvent être déduits des profils amonts par similitude. Le début de cette zone commence à partir de 8 fois jusqu'à 20 fois le diamètre hydraulique de l'injecteur. [9]

I.5.2.1 Structure du jet en impact

Une fois explicitée la structure du jet libre, il apparaît que les caractéristiques d'un jet en impact peuvent se révéler très différentes selon la distance d'impact et donc selon la zone dans laquelle se situe l'impact. Trois régions distinctes sont considérées dans la structure d'un jet en impact.

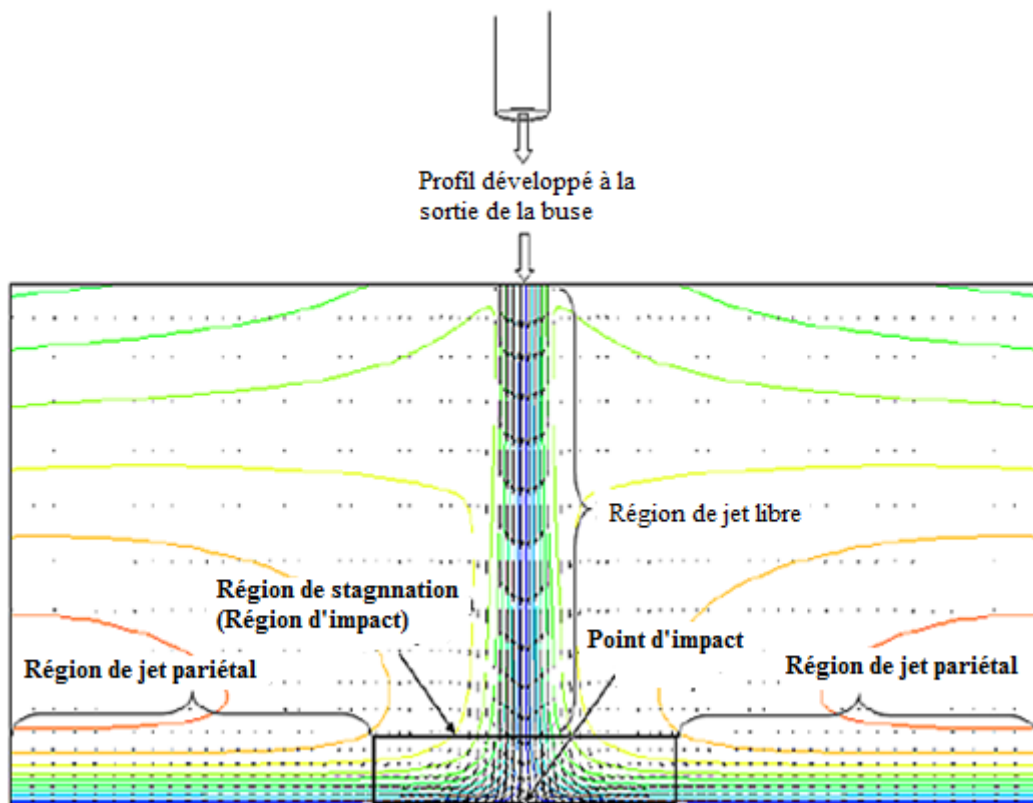


Figure I.7 : Structure du jet impactant sur une paroi plane.[10]

a. Zone de jet libre

Il s'agit de la zone qui possède les caractéristiques énoncées précédemment. Cette région n'est pas affectée par la paroi d'impact et se comporte donc comme le jet libre. Cependant sa longueur va varier selon la distance d'impact.

b. Zone de stagnation

C'est la zone d'impact entre le fluide et la paroi, " le coefficient de transfert de chaleur admet un maximum en ce point" [11].

Et le profil de vitesse décroît axialement au profit de la vitesse radial contrairement à la pression qui décroît radialement le long de la paroi.

c. Zone de jet pariétal

Cet écoulement possède les caractéristiques d'un écoulement plan. La couche limite se développe le long de la surface d'impact et la vitesse radiale diminue.

I.6. Synthèse bibliographique

Le transfert de chaleur et de masse le long d'une surface a suscité une attention considérable ces dernières années en raison de son importance dans le domaine scientifique tel que la biologie, l'océanographie, l'astrophysique, la géologie et les processus chimiques...etc. Parmi les études entreprises, nous présentons quelques-unes que nous avons jugées proches de notre cas.

Mahajan et al [12], ont présenté une étude numérique sur l'action combinée du transfert de chaleur et de masse en mode de convection naturelle dans le cas d'un écoulement sur une surface verticale avec la partie adverse des effets de flottabilité. La méthode numérique utilisée pour résoudre les équations de transfert de chaleur et de masse est les différences finies. Une comparaison avec les solutions de similitude montre que l'analyse de la couche limite ne convient que lorsque les deux forces de flottabilité (thermique et massique) sont de même signe. Pour des forces de poussée opposées l'analyse de couche limite ne traduit pas de résultats précis en ce qui concerne le taux de transfert. Une comparaison détaillée avec les données expérimentales avec flottabilités adverse montre un bon accord entre les données et les solutions numériques. Les taux de transfert de chaleur et de masse varient en fonction du rapport de flottabilité, du nombre de Prandtl, ainsi que du nombre de Schmidt. Le nombre de Nusselt global et le nombre de Sherwood sont présentés pour une large gamme de nombre de Grashof thermique, le nombre de la flottabilité et les nombre de Prandtl et Schmidt.

Quant à eux, Mayouf et al [13], ont analysé numériquement l'effet de la force de flottabilité opposée sur la convection naturelle thermique et massique le long d'un cylindre verticale. La méthode numérique utilisée pour résoudre les équations de transfert de chaleur et de masse est les différences finies avec l'algorithme de Gauss Seidel.

Les résultats obtenus montrent que l'épaisseur de la couche limite thermique et massique dépend essentiellement de la valeur N ($N = Gr_c / Gr_t$) et de la valeur de Pr et Sc .

Aman et al [14], se sont intéressés à la convection mixte lors d'un écoulement de couche limite laminaire d'un fluide visqueux et incompressible au voisinage du point de stagnation sur une surface verticale avec effet de glissement. Les équations gouvernantes sont d'abord transformées en un système d'équations différentielles ordinaires, qui sont ensuite résolues numériquement en utilisant une méthode de tir, les auteurs posent comme hypothèse, une variation linéaire de la température de la plaque ainsi que la vitesse extérieure de l'écoulement selon la distance du point de stagnation. Les résultats montrent que pour des forces de flottabilité opposées à l'écoulement il existe une solution double alors que dans le cas inverse la solution est unique. De plus, la vitesse de glissement augmente le taux de transfert de chaleur à la surface, alors que le glissement thermique le diminue.

Afin d'étudier les effets combinés des forces de poussée thermique et massique sur les caractéristiques du transfert de masse et de chaleur Chen et al [15], ont analysés le cas d'un écoulement de couche limite laminaire se développant sur une plaque plane horizontale. Les auteurs se sont limités aux processus présentant des niveaux faibles de concentration. Les Résultats numériques pour le coefficient de frottement, le nombre de Nusselt et le nombre de Sherwood sont présentés pour les gaz ayant un nombre Prandtl de 0,7, Avec des nombres de Schmidt allant de 0,6 à 2,0. Ils ont constaté que, les taux des transferts de chaleur et de masse ainsi que la contrainte de cisaillement à la paroi augmentent avec l'augmentation de la force de flottabilité thermique, dans le cas où cette dernière est du même sens que l'écoulement. Ces quantités sont plus importantes lorsque les forces de flottabilité massique renforcent les forces de flottabilité thermique, mais diminuent lorsque les deux forces de poussée s'opposent. Ils ont constaté qu'un transfert de chaleur plus élevé est associé à un nombre de Schmidt faible, alors qu'un transfert de masse élevé est associé à un nombre Schmidt important.

Dans cet article Chen et al [16], effectuent une étude des caractéristiques du transfert de chaleur et de masse en convection mixte le long de plaques planes verticales ou inclinées, sous l'influence des effets combinés de flottabilité thermique et massique. Ils ont supposé que les effets Soret et Dufour ainsi que les vitesses interfaciales sont négligeables. La plaque est maintenue soit à température et concentration uniforme ou encore à flux thermique et massique uniforme. Les résultats numériques sont présentés pour le nombre de Nusselt local et le nombre de Sherwood local pour la diffusion de masse dans l'air ainsi que l'eau.

Ils ont déduit que les flux surfaciques locaux augmentent lorsque les forces dues à la diffusion massique (poussée due à la différence de concentration) assistent celle de flottabilité thermique, et diminue si ces deux dernière sont opposées. De plus, les effets combinés des deux forces sur le taux de transfert de masse et de chaleur ont tendance à diminuer avec l'augmentation de l'angle d'inclinaison par rapport à la verticale. Finalement, ils mettent en place une comparaison entre les deux cas étudiés (température/concentration uniforme et flux massique/de chaleur uniforme).

Une étude effectuée par Kendoush [17], lui a permis de mettre en place de nouvelles équations pour la convection forcée double diffusive au sein d'un écoulement impactant sur une surface solide. Il prend en considération l'écoulement laminaire d'un jet impactant provenant de buses rondes et à volet. Les solutions sont restreintes à la zone de stagnation. Avec cette nouvelle théorie développée, il réussit à prédire le taux de transfert de chaleur et de masse. Les résultats analytiques obtenus sont en concordance avec les résultats expérimentaux et numériques disponibles.

Mendil et al [18], se proposent d'examiner les effets de transfert de masse sur l'instabilité thermique d'un écoulement stationnaire de couche limite bidimensionnel au point de stagnation. En outre, ils se sont limités aux forces de flottabilité thermique et de concentration qui sont de signe opposé et de grandeur égale. L'écoulement de base a été obtenu en résolvant les équations de continuité, de quantité de mouvement, d'énergie et de concentration en utilisant une analyse de similarité, qui sont résolues numériquement en utilisant la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre avec la technique de tir. La stabilité de l'écoulement de base est alors étudiée en se servant de la décomposition en modes normaux. Le problème aux valeurs propres résultant est résolu numériquement par la méthode pseudo-spectrale de Laguerre. Il se trouve par le calcul des courbes de stabilité neutre que les effets de concentration stabilisent l'écoulement de base, tandis que le nombre de Lewis stabilise ou déstabilise. L'augmentation du nombre de Lewis augmente la stabilité de l'écoulement de base pour $Le < 1$, elle diminue pour $Le > 1$. Pour $Le = 1$, l'écoulement de base est toujours stable.

Candelier et al. [19], ont effectué une étude expérimentale par LDV (Laser Doppler Velocimetry) d'un jet laminaire axisymétrique impactant sur une plaque horizontale chauffée maintenue à une température fixe. Ils ont étudié les effets de la distance buse - paroi, la différence de température fluide - plaque et le nombre de Reynolds sur le lieu du décollement de la couche limite.

Ils ont trouvé d'après l'analyse des résultats concernant l'influence du nombre de Reynolds et la différence de température sur le lieu du décollement de la couche limite suit une loi empirique valable pour $H/D=1$.

Mai Ton Hoang et al. [20], ont étudié en régime transitoire, la couche limite laminaire sur une plaque verticale en convection mixte. Le système d'équations est résolu à l'aide de la méthode numérique aux différences finies, avec un schéma implicite. Ils ont montré que la nature de la plaque influe sur les épaisseurs des couches limites dynamique et thermique ainsi que sur la vitesse de l'écoulement. Ils ont observé qu'une faible perturbation de vitesse engendre une instabilité de l'écoulement.

Ramachandran et al. [21], ont étudié un écoulement bidimensionnel laminaire en présence de convection mixte sur une paroi verticale au voisinage du point de stagnation, ils ont analysé les deux cas où cette dernière est soumise à une température et à un flux de chaleur arbitraires. Les équations de Navier-stokes et l'équation d'énergie gouvernant les champs dynamique et thermique ont été adimensionnalisées, en imposant un changement de variable approprié ainsi et le système d'équations différentielles ordinaires obtenu a été résolu dans les deux configurations où les forces de flottabilité assistent l'écoulement ou au contraire lui sont opposées.

Les résultats numériques sont obtenus pour certaines valeurs du paramètre de flottabilité pour lesquelles des solutions locales existent. Ils ont conclu que le taux du transfert de chaleur ainsi que le coefficient de frottement augmente avec l'accroissement de la valeur du paramètre de flottabilité dans la région où l'écoulement est assisté (par les forces de flottabilité), et qu'une zone de recirculation se développe dans la région où l'écoulement est ralenti, ils ont aussi constaté l'existence de solutions doubles dans cette zone pour un intervalle de valeurs du paramètre de flottabilité.

Dans le but d'examiner les effets des forces de flottabilité sur l'écoulement en convection forcée d'un fluide micropolaire, Hassanien et al [22] se sont basés sur la théorie des fluides micropolaires formulée par Eringen, et ainsi ont présenté des solutions numériques pour l'équation de mouvement, l'équation de mouvement angulaire et celle d'énergie, ils ont aussi compilé les valeurs manquantes de la vitesse et la vitesse angulaire pour un large éventail des valeurs des paramètres du matériau. Ils ont présenté leurs résultats en fonctions des paramètres adimensionnelles régissant leur problème, et cela pour les deux cas où les forces de poussée sont du même sens que l'écoulement ou bien de sens opposé.

Ils ont finalement déduit que le coefficient de frottement ainsi que le taux de transfert de chaleur croît et décroît en fonction du paramètre de flottabilité respectivement pour la zone supérieure et la zone inférieure de la paroi.

De leur côté, Lok et al [23], se sont intéressés à l'étude de la convection mixte lors d'un écoulement laminaire de fluide micropolaire sur une paroi de dimension supposée infinie, en régime instationnaire. Ils ont supposé que l'instabilité est causée par le mouvement impulsif du courant libre (variations soudaines de la vitesse) ou bien par une augmentation ou diminution brusque de la température de la paroi comparativement à celle présente dans l'écoulement libre.

Le problème est réduit à un système d'équations différentielles aux dérivées partielles adimensionnelles, qui sont résolues numériquement à l'aide de la méthode Keller-box. Il a été constaté qu'il y a une transition en douceur à partir du petit temps Solution à la solution à grande échelle. En outre, il a été démontré que, pour les deux zones, inférieure et supérieure de la paroi et pour un nombre de Prandtl donné le coefficient de frottement et le taux de transfert de chaleur diminue avec l'augmentation du paramètre matériel K .

D'autre part il a été démontré que pour une valeur fixe du paramètre matériel, l'accroissement du nombre de Prandtl engendre une diminution du coefficient de frottement dans la zone supérieure et une augmentation de ce dernier dans la zone inférieure.

Chapitre II : Positionnement du problème

Dans ce chapitre, nous présentons le modèle physique et les hypothèses simplificatrices. Nous formulons les équations régissant le phénomène de convection mixte double diffusive le long d'une plaque plane verticale. Nous exprimons les équations de conservation et les conditions aux limites sous forme adimensionnelle. Finalement nous introduisons les principales grandeurs dynamiques, thermiques et massiques.

II.1 Equations générales de conservation

La formulation mathématique des phénomènes de convection mixte double diffusive repose sur les équations liant les différents paramètres, à savoir : la vitesse, la pression, la température et la concentration. Ces équations sont obtenues à partir de :

- La loi de conservation de masse (équation de continuité)
- La loi de conservation de quantité de mouvement (équation de Navier-Stokes)
- La loi de conservation d'énergie (équation d'énergie)
- La loi de conservation d'espèce chimique (équations de transfert de masse).

II.1.1 Equation de continuité

Cette équation est déduite du premier principe de conservation de masse. Elle s'écrit comme suit : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0$ (II.1)

II.1.2 Equation de quantité de mouvement

Cette équation est déduite de la deuxième loi de la dynamique, qui stipule que la variation de la quantité de mouvement d'une particule fluide est égale à la somme des forces extérieures qui agissent sur cette particule.

$$\frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V} \otimes \vec{V}) = -\vec{\nabla} p + \vec{f} + \text{div} \overline{\overline{\sigma_v}} \quad (\text{II.2})$$

Pour un fluide newtonien visqueux, le tenseur de contraintes est donné par :

$$\overline{\overline{\sigma_v}} = \begin{bmatrix} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\beta - \frac{2}{3}\mu\right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) & \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\beta - \frac{2}{3}\mu\right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \end{bmatrix} \quad (\text{II.2.a})$$

β , représente le coefficient de dilatation volumique du fluide. Pour un fluide à densité constante, le tenseur de contrainte se réduit à :

$$\overline{\overline{\sigma_v}} = \begin{bmatrix} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{II.2.b})$$

II.1.3 Equation de l'énergie

L'équation de l'énergie est obtenue en appliquant le premier principe de la thermodynamique pour un fluide Newtonien incompressible, elle s'écrit comme suit :

$$\rho \left[\frac{\partial e}{\partial t} + (\vec{V} \vec{\nabla}) e \right] = \vec{\nabla} \cdot (K \vec{\nabla} T) + q - p \vec{\nabla} \cdot \vec{V} + \Phi \quad (\text{II.3})$$

Où q représente les sources de chaleur internes et Φ est le terme de dissipation.

$$\Phi = 2\mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \quad (\text{II.3.a})$$

Introduisons l'enthalpie massique du fluide : $h = e + \frac{p}{\rho}$

$$\rho \frac{de}{dt} = \rho \frac{dh}{dt} - \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) \quad (\text{II.4})$$

L'enthalpie étant une fonction de la température T et de la pression P , nous avons :

$$\frac{dh}{dT} = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_P \frac{\partial T}{\partial t} + \left(\frac{\partial h}{\partial P} \right)_T \frac{\partial P}{\partial t} \quad (\text{II.4.a})$$

En introduisant les relations thermodynamiques suivantes :

$$\left(\frac{dh}{dT} \right)_P = C_P, \left(\frac{\partial h}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{\rho} (1 - T\beta_t), \beta_t = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P \quad (\text{II.4.b})$$

Et en les remplaçant dans l'équation (II.3), nous obtenons :

$$\rho \frac{de}{dt} = \rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} - T\beta_t \frac{dP}{dt} \quad (\text{II.5})$$

Ainsi, l'équation d'énergie s'écrit sous la forme:

$$\rho C_P \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T \right) = \vec{\nabla} \cdot (K \vec{\nabla} T) + T\beta_t \frac{dP}{dt} + q + \Phi \quad (\text{II.6})$$

II.1.4 Equation de transfert de masse

Le bilan local de l'espèce A obéit à l'équation générale :

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + \text{div}(C_A \vec{V}) = -\text{div} \vec{q}_{SA} \quad (\text{II.7})$$

Où \vec{q}_{SA} est la densité de flux massique de A diffusée selon la loi de Fick :

$$\vec{q}_{SA} = -D_A \vec{\nabla} C_A \quad (\text{II.8})$$

$$\text{Alors : } \frac{\partial C_A}{\partial t} + \text{div}(C_A \vec{V}) = \text{div}(D_A \vec{\nabla} C_A) \quad (\text{II.9})$$

II.2 Présentation du modèle

Pour cette étude, nous considérons un écoulement impactant de vitesse définie U_∞ sur une plaque verticale soumise à une température uniforme T_w différente de celle du fluide, de plus la concentration de l'espèce adjacente à la paroi est notée C_w . Nous supposons que la vitesse, la température ainsi que la concentration à une distance x du point de stagnation varient linéairement, tel que : $U_\infty(x) = ax$, $T_w(x) = T_\infty + bx$ et $C_w(x) = C_\infty + cx$, où a , b et c sont des constantes, T_∞ et C_∞ sont respectivement la température et la concentration du fluide au sein du courant libre.

Sachant que deux forces de poussée verticales l'une due au gradient de température et l'autre au gradient de concentration se développent le long de la plaque, deux cas distincts sont maintenant à considérer :

- le cas où les forces de flottabilité sont dans le sens de l'écoulement, cette conjoncture se présente dans la partie supérieure au point de stagnation, on se trouve alors en convection mixte favorable.
- dans la partie située au-dessous du point de stagnation les forces de poussée sont opposées à l'écoulement, on se trouve alors en convection mixte défavorable.

Cela se traduit mathématiquement par l'apparition des termes $g\beta_t(T - T_\infty)$ représentant la flottabilité thermique et $g\beta_c(C - C_\infty)$ représentant la flottabilité massique dans l'équation de quantité mouvement.

Pour lier les forces thermique et massique nous introduisons le rapport des nombres de Grashof caractéristiques de chacun des deux phénomènes de diffusion thermique et massique

$$N = \frac{\beta_c(C_w - C_\infty)}{\beta_t(T_w - T_\infty)} \text{ tel que :}$$

- $N > 0$ les forces de flottabilité massique et thermique sont de même sens ($C_w > C_\infty$)
- $N = 0$ la force de flottabilité massique est nul ($C_w = C_\infty$)
- $N < 0$ les forces de flottabilité sont de sens opposé ($C_w < C_\infty$).

Pour des raisons d'intérêt pratique on va s'intéresser au cas où les forces de flottabilité sont opposées ($N < 0$) ce dernier étant le cas le plus courant.

Le problème physique est schématisé sur la figure (II.1). L'origine du repère Oxy est située sur la plaque et coïncide avec le point de stagnation. L'axe Ox est orienté vers le haut. L'axe Oy est perpendiculaire à la plaque et orienté vers l'extérieur de l'écoulement libre du fluide.

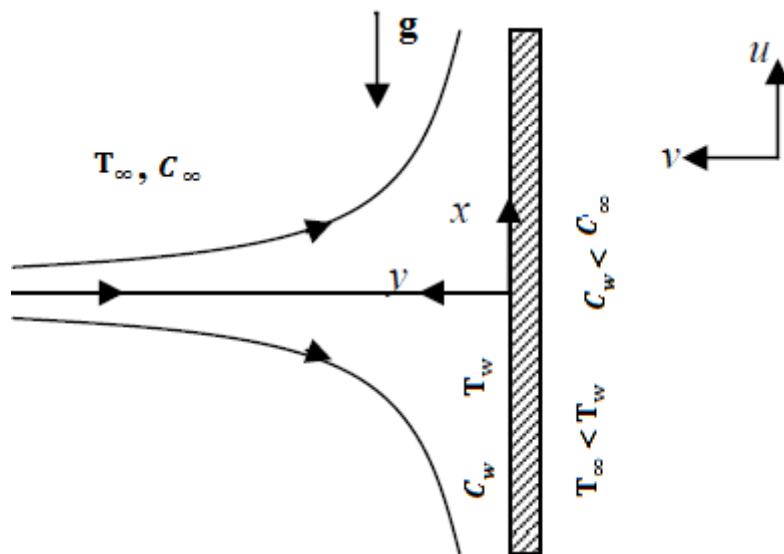


Figure II.1 : Schématisation du modèle physique.

II.2.1 Hypothèses simplificatrices

La modélisation du phénomène étudié est basée sur les hypothèses simplificatrices suivantes:

- L'écoulement du fluide, les transferts de chaleur et de masse sont permanents et le régime est laminaire.
- Le fluide est newtonien et incompressible.
- Les propriétés thermophysiques du fluide (μ , C_p , k , D_A) sont constantes.
- La dissipation visqueuse est négligeable.
- Le système ne présente pas de source de chaleur.
- La plaque est imperméable.
- Les effets Soret et Dufour (interactions entre le transfert de chaleur et de masse) sont négligeables.
- L'approximation de Boussinesq est valide, celle-ci consiste à considérer que les variations de masse volumique sont négligeables au niveau de tous les termes des équations de quantités de mouvement ($\rho = \rho_\infty$), sauf au niveau du terme de gravité. La variation de la masse volumique ρ en fonction de la température et de la concentration est donnée par :

$$\rho(C, T) = \rho_\infty [1 - (\beta_t(T - T_\infty) + \beta_c(C - C_\infty))]$$

II.2.2 Formulation du problème

II.2.2.1 Equations de conservation

Compte tenu des hypothèses simplificatrices, nous obtenons :

- **Equation de continuité :** $\text{div} \vec{V} = 0$ (II.10)

- **Equation de quantité de mouvement :** $\rho (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V}$ (II.11)

- **Equation de l'énergie :** $(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) T = \alpha \Delta T$ (II.12)

Avec : $\alpha = \frac{K}{\rho C_p}$ (II.12.a)

- **Equation de transfert de masse :** $(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) C_A = D_A \Delta C_A$ (II.13)

En coordonnées cartésiennes les équations gouvernantes s'écrivent sous la forme suivante :

- **Equation de continuité :** $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ (II.14)

- Equation de quantité de mouvement :

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= u_{\infty} \frac{du_{\infty}}{dx} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \pm g\beta_t(T - T_{\infty}) \pm g\beta_c(C - C_{\infty}) \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} &= 0 \rightarrow P(x) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.15})$$

- Equation d'énergie : $u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ (II.16)

- Equation du transfert de masse : $u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$ (II.17)

II.2.2.2 Conditions aux limites :

$$\left. \begin{aligned} \text{Pour } y = 0, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad T = T_w, \quad C = C_w \\ \text{Pour } y \rightarrow \infty, \quad u \rightarrow u_{\infty}(x) = ax, \quad T \rightarrow T_{\infty}, \quad C \rightarrow C_{\infty} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.18})$$

II.3 Formulation adimensionnelle

L'emploi de la variable adimensionnelle permet d'exprimer la réalité des phénomènes physiques indépendamment des systèmes de mesures, et ainsi permettre d'avoir des informations généralisées sur une variété de problèmes ayant les mêmes grandeurs de coefficient de similitudes d'un côté, et d'un autre côté, réduire le nombre de paramètres d'un problème.

II.3.1 Equations adimensionnelles et solution auto-similaire

Pour résoudre le système d'équations (II-14)-(II-17) on cherche une solution de type auto-similaire (*self similar*) étant donné qu'il s'agit d'un écoulement de couche limite. Ainsi, on introduit les expressions suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \eta = \left(\frac{u_\infty}{\nu x}\right)^{1/2} y = \left(\frac{a}{\nu}\right)^{1/2} y, \quad \psi = (\nu x u_\infty)^{1/2} f(\eta) = (\nu a)^{1/2} x f(\eta), \\ \theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \quad \phi(\eta) = \left(\frac{C - C_\infty}{C_w - C_\infty}\right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.19})$$

Où, ψ est la fonction de courant définie comme suit : $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$

Après introduction de (II.19) dans les équations, on obtient les équations différentielles suivantes :

$$f''' + ff'' + 1 - f'^2 + \lambda_t \theta + \lambda_c \phi = 0 \quad (\text{II.20})$$

$$\frac{1}{Pr} \theta'' + f\theta' - f'\theta = 0 \quad (\text{II.21})$$

$$\frac{1}{Sc} \phi'' + f\phi' - f'\phi = 0 \quad (\text{II.22})$$

Où le signe (') représente une différentielle par rapport à η .

Les deux paramètres de flottabilité, respectivement thermique et massique, sont donnés par :

$$\lambda_t = g\beta_t (T_w - T_\infty) L^3 / \nu^2 \quad \text{et} \quad \lambda_c = g\beta_c (C_\infty - C_w) L^3 / \nu^2 \quad (\text{II.23})$$

Il s'agit au fait des nombres de Grashof thermique et massique.

Dans un souci de faire apparaître le rapport de flottabilité N , nous réécrivons les équations comme suit :

$$f''' + ff'' + 1 - f'^2 + \lambda_t (\theta + N\phi) = 0 \quad (\text{II.24})$$

$$\frac{1}{Pr} \theta'' + f\theta' - f'\theta = 0 \quad (\text{II.25})$$

$$\frac{1}{Sc} \phi'' + f\phi' - f'\phi = 0 \quad (\text{II.26})$$

II.3.2 Conditions aux limites :

Les conditions aux limites peuvent se réécrire ainsi :

$$\left. \begin{array}{l} \text{pour } \eta = 0, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad \theta(0) = 1, \quad \phi(0) = 0 \\ \text{pour } \eta \rightarrow \infty, \quad f'(\eta) \rightarrow 1, \quad \theta(\eta) \rightarrow 0, \quad \phi(\infty) = 1 \end{array} \right\} \quad (\text{II.24})$$

Pour les besoins ultérieures de cette étude nous définissons les grandeurs physiques suivantes, qui sont le coefficient de frottement C_f , le Nusselt local Nu_x ainsi que le Sherwood local Sh_x .

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho u_e^2(x)}, \quad Nu_x = \frac{x q_w}{k(T_w - T_\infty)}, \quad Sh_x = \frac{x \dot{m}_w}{D(C_w - C_\infty)} \quad (\text{II.25})$$

Où, τ_w représente la contrainte de cisaillement à la paroi, q_w le flux de chaleur transmis par la paroi au fluide et \dot{m}_w le flux de mass échangé, définis comme suit

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}, \quad q_w = -k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}, \quad \dot{m}_w = -D \left. \frac{\partial C}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (\text{II.26})$$

Pour adimensionnaliser les quantités physiques précédentes nous introduisons le changement de variable (II.19) définit auparavant, de ce fait on obtient :

$$C_f = f''(0)/Re_x^{1/2}, \quad Nu_x = -\theta'(0)Re_x^{-1/2}, \quad Sh_x = \phi'(0)Re_x^{-1/2} \quad (\text{II.27})$$

II.4 Conclusion

Nous sommes maintenant face à un couplage total entre champ de vitesse, champ de température et champ de concentration, aucun des trois ne pouvant être déterminé indépendamment des deux autres.

Dans le chapitre suivant nous exposerons la méthode de résolution des équations différentielles obtenues par voie numérique.

Chapitre III : Méthode numérique

Dans ce chapitre, nous décrivons la méthode numérique utilisée pour résoudre les équations de base formulées dans le Chapitre II.

Nous allons être amenés à étudier un problème d'équations différentielles ordinaires (EDO) aux limites, dont le comportement est très différent de celui d'un problème aux valeurs initiales. Dans l'application, nous utiliserons la routine Matlab `bvp4c` qui permet de résoudre le problème aux limites par une méthode de différences finies qui implémente la formule de Lobatto à trois étapes de collocation (III.A).

III.1 Equations différentielles ordinaires

Les équations différentielles ordinaires décrivent des phénomènes qui changent continuellement. Ils se posent en modèles à travers les mathématiques, les sciences et l'ingénierie. En soi, un système d'équations différentielles possède de nombreuses solutions. Communément une solution d'intérêt est déterminée en spécifiant les valeurs de toutes ses composantes en un seul point ($x = a$), c'est ce que l'on appelle un problème aux valeurs initiales (IVP). Cependant, dans de nombreuses applications, la solution est déterminée de manière plus complexe.

Un problème de valeur aux limites (BVP) définit des valeurs ou encore des équations pour les composantes de la solution à plus d'un point. Contrairement aux IVP, un problème de valeur aux limites peut, ne pas avoir de solution, avoir un nombre fini, ou bien en avoir une infinité. De ce fait, les programmes de résolution des BVP, exige de ses utilisateurs de fournir une estimation de la solution souhaitée. Souvent, il existe des paramètres qui doivent être déterminés de telle sorte que le BVP a une solution.

Ce qui suit montre comment formuler, résoudre et tracer la solution d'un BVP avec le programme `bvp4c` Matlab. Il vise à rendre la résolution d'un problème type d'un BVP aussi facile que possible.

III.2 Problème de valeur aux limites

Si la fonction \mathbf{f} est continue sur l'intervalle $[a, b]$, le problème de valeur initiale $y' = \mathbf{f}(x, y)$, avec $y(a)$ donné, possède une solution unique. Les problèmes de valeur aux limites à deux bouts sont illustrés par l'équation :

$$y'' + y = 0 \tag{III.1}$$

Avec les conditions aux limites suivantes : $y(a) = A$, $y(b) = B$.

Une manière d'analyser ces problèmes est de considérer une famille de solutions de IVP. Soit $y(x, s)$, la solution de l'équation (III.1) avec les valeurs initiales $y(a) = A$ et $y'(a) = s$. chaque $y(x, s)$ s'étend jusqu'à $x = b$, maintenant la question est de déterminer les valeurs de s pour lesquelles $y(b, s) = B$.

S'il existe une solution S pour cette équation algébrique, la valeur $y(x, s)$ correspondante constitue une solution de l'équation différentielle qui satisfait les deux conditions aux limites. En utilisant la linéarité, nous pouvons trier les possibilités aisément.

Soit $U(x)$ la solution définie par $y(a) = A$, $y'(a) = 0$ et $V(x)$ la solution définie par $y(a) = 0$, $y'(a) = 1$. La linéarité implique que $y(x, s) = U(x) + sV(x)$, et la condition à la limite $B = y(b, s) = u(b) + sv(b)$ n'est autre qu'une équation algébrique linéaire qui définit la pente initiale inconnue S .

III.3. Méthode numérique

En générale pour résoudre ce genre de problème la méthode la plus connue à laquelle ont recours les ingénieurs n'est autre que la méthode de Runge-Kutta avec une technique de tir, ce qui peut surprendre que la routine `bvp4c` n'est pas un code de technique de tir (shooting method).

En effet `bvp4c` met en œuvre une méthode de collocation pour la résolution des problèmes de valeurs aux limites de la forme

$$y' = f(x, y, p), \quad a \leq x \leq b \quad (\text{III.2})$$

Avec les conditions aux limites :

$$g(y(a), y(b), p) = 0 \quad (\text{III.3})$$

Ici p est un vecteur de paramètres inconnus. Par souci de simplicité, il n'est pas pris en compte dans les expressions qui suivent. La solution approximative $S(x)$ est une fonction polynomiale d'ordre trois continue sur chaque sous-intervalle $[x_n, x_{n+1}]$ du maillage $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ qui satisfait les conditions aux limites suivantes

$$g(s(a), s(b)) = 0 \quad (\text{III.4})$$

Et qui satisfait les équations différentielles (polynômes de collocation) aux deux extrémités et le point médian de chaque sous-intervalle :

$$s'(x_n) = f(x_n, s(x_n)) \quad (\text{III.6})$$

$$s'((x_n + x_{n+1})/2) = f((x_n + x_{n+1})/2, s((x_n + x_{n+1})/2)) \quad (\text{III.7})$$

$$s'(x_{n+1}) = f(x_{n+1}, s(x_{n+1})) \quad (\text{III.8})$$

Ces conditions conduisent à un système d'équations algébriques non linéaires pour les coefficients définissant $S(x)$. A la différence de la technique de tir, la solution $y(x)$ est évaluée sur tout l'intervalle $[a, b]$ avec prise en compte des conditions aux limites à tout moments.

La méthode de base de `bvp4c` est une méthode aux différences finies qui implémente la formule de Lobatto à trois étapes de collocation (III.A). Il peut être démontré [24], que $S(x)$ est une approximation de quatrième ordre pour une solution isolée $y(x)$, c'est à dire, $\|y(x) - s(x)\| \leq Ch^4$.

Ici, h est la valeur maximale du pas $h_n = x_{n+1} - x_n$ et C est une constante. Nous insistons sur le fait important que cette borne est vraie pour tout x dans l'intervalle $[a, b]$, ce qui n'est pas le cas pour certaines méthodes de collocation populaires. Après $S(x)$ est calculé sur un maillage avec `bvp4c`.

En raison du fait que les problèmes de valeurs aux limites peuvent avoir plus d'une solution, les codes de résolution obligent ses utilisateurs à fournir une estimation pour la solution souhaitée. L'estimation comprend une estimation d'un maillage initial, les codes ensuite adaptent le maillage de manière à obtenir une solution numérique précise avec un nombre réduit de nœuds. La partie la plus ardue pour résoudre un BVP est l'estimation en elle-même puisque réussir à trouver une approximation adéquate du premier est extrêmement difficile Venir avec suffisamment bonne supposition est souvent la partie la plus difficile.

Le code `bvp4c` adopte une approche inhabituelle pour le contrôle d'erreur qui lui permet de remédier aux mauvaises suppositions. Le fait que $S(x)$ est régulière sur $[a, b]$ ainsi que les collocations aux extrémités de chaque sous-intervalle implique que la dérivée $S(x)$ est également continue sur l'intervalle $[a, b]$ ce qui induit à un résiduel noté $r(x)$ dans l'équation différentielle défini par:

$$r(x) = s'(x) - f(x, s(x)) \quad (\text{III.9})$$

Autrement dit, $S(x)$ est la solution exacte des équations différentielles ordinaires perturbées.

$$s'(x) = f(x, s(x) + r(x)) \quad (\text{III.10})$$

De même, le résidu dans les conditions aux limites est $g(s(a), s(b))$.

La routine `bvp4c` contrôle les tailles de ces résidus, si ces derniers sont uniformément petits, $S(x)$ s'avère être une bonne solution dans le sens que c'est la solution exacte d'un problème relativement proche de celui fourni au solveur. La routine est basée sur des algorithmes plausibles, même lorsque le maillage initial est non satisfaisant, elle continue à fournir des résultats corrects quand h tends vers 0. [24]

III.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons rappelé succinctement quelques notions sur les équations différentielles ordinaires et nous avons présenté brièvement la méthode qui est utilisée par le solveur `bvp4c`.

Dans le chapitre suivant nous allons entamer l'exposition des résultats ainsi que l'analyse et l'interprétation de ces derniers.

Chapitre IV : Résultats et discussions

IV.1 Description des objectifs de l'étude

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats de l'étude numérique menée sur la convection mixte double diffusive, stationnaire et bidimensionnelle d'un écoulement de fluide binaire visqueux sur une plaque plane verticale. Pour ce travail nous avons utilisé les équations de Navier-Stokes, de la chaleur et du transfert de masse dans un domaine avoisinant la surface de la plaque avec l'idée de mettre en évidence le développement de couches limites.

Suivant la direction de l'écoulement forcé vertical, ascendant ou descendant, nous discernons deux régions distinctes séparées par la ligne de stagnation que nous mettons en évidence dans la figure IV.1, présentée ci-dessous. Cette simulation vise à faire une étude comparative entre ces deux zones et ainsi mieux distinguer les différences de comportement entre les deux parties.

Dans un premier temps, l'étude est axée uniquement sur l'influence de la flottabilité thermique sur l'écoulement ainsi que les transferts de chaleur et de masse, et cela pour souligner la différence entre la partie supérieure et inférieure de la plaque.

Puis, dans un second temps nous introduisons les forces de poussée massique dans la simulation pour démontrer l'influence du rapport de flottabilité N (rapport des forces de poussée d'origine solutale et thermique) sur les échanges convectifs et diffusifs ainsi que sur les champs de vitesses de températures et de concentration au voisinage de la paroi ; nous nous concentrerons sur le cas où les forces de flottabilités sont opposées ($N < 0$) comme nous l'avons précisé dans le chapitre précédent.

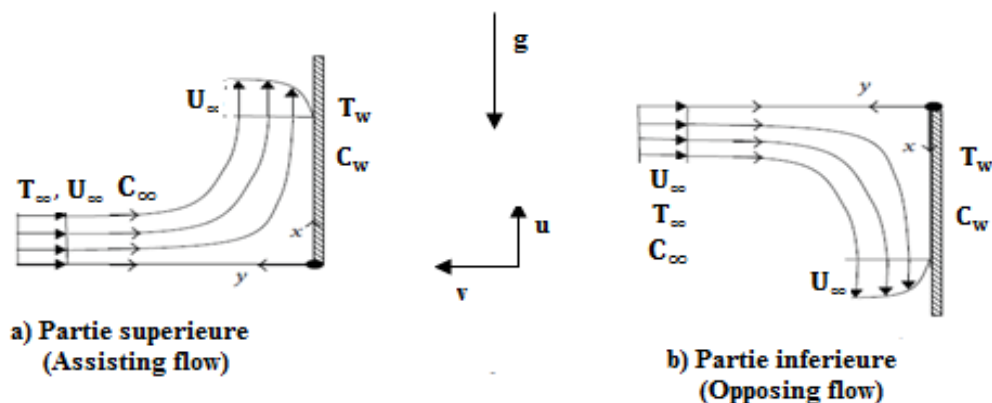


Figure IV.1 : Schématisation des deux régions de la paroi.

Les résultats numériques sont présentés pour un Prandtl $Pr=0.7$ (air), et un Schmidt $Sc=0.2$ qui caractérise la diffusion de l'hydrogène dans l'air. Les champs de vitesses de températures et de concentrations seront présentés en détail sous forme de courbes, pour ce qui est des grandeurs physiques qui sont le nombre de Nusselt, le nombre de Sherwood et le coefficient de frottement, ils seront présentés sous forme de tableau.

IV.2 Validation numérique

Pour valider nos résultats numériques et vérifier la véracité et la précision de la méthode de calcul utilisée, nous les avons confrontés, à ceux de F.Aman et A.Ishak[13], Ramachandran et al.[20] ainsi qu'à ceux de Lok et al.[21], et de Hassanien et al[22]. Nous avons collecté les résultats propres de chacun de ces auteurs et nous avons effectué une comparaison des différentes valeurs du coefficient de frottement $f''(0)$ et du nombre de Nusselt local $-\theta'(0)$ pour plusieurs valeurs du nombre Prandtl et un paramètre de flottabilité thermique de l'ordre de l'unité ($\lambda_t=1$), pour faire cette comparaison nous avons adapté notre système d'équations et cela en négligeant le transfert de masse cela se traduit par un rapport de flottabilité et un nombre de Schmidt Nuls ($N=0$, $Sc=0$) .

Pr	A.Ishak et al [13]	Ramachandran et al [20]	Lok et al [22]	Hassanaïen et al [23]	Nos résultats
0.7	1.7063	1.7063	1.7064	1.70632	1.7063
1	1.6754	-	-	-	1.6754
7	1.5179	1.5179	1.5180	-	1.5179
10	1.4928	-	-	1.49284	1.4928
20	1.4485	1.4485	1.4486	-	1.448
40	1.4101	1.4101	1.4102	-	1.4101
50	1.3989	-	-	1.40686	1.3989
60	1.3903	1.3903	1.3903	-	1.3903
80	1.3774	1.3774	1.3773	-	1.3774
100	1.368	1.3680	1.3680	1.38471	1.3680

Tableau IV.1 : Valeurs de $f''(0)$ pour différentes valeurs du nombre de Prandtl quand $\lambda_t=1$ et $Sc=0$.

Pr	A.Ishak et al [13]	Ramachandran et al [20]	Lok et al [22]	Hassanaïen et al [23]	Nos résultats
0.7	0.7641	0.7641	0.7641	0.76406	0.7641
1	0.8708	-	-	-	0.8708
7	1.7224	1.7224	1.7226	-	1.7224
10	1.9446	-	-	1.94461	1.9446
20	2.4576	2.4576	2.4577	-	2.4576
40	3.1011	3.1011	3.1023	-	3.1011
50	3.3415	-	-	3.34882	3.3415
60	3.5514	3.5514	3.5560	-	3.5514
80	3.9095	3.9095	3.9195	-	3.9095
100	4.2116	4.4116	4.2289	4.2116	4.2117

Tableau IV.2 : Valeurs de $-\theta'(0)$ pour différentes valeurs du nombre de Prandtl quand $\lambda_t=1$, et $Sc=0$.

On remarque une certaine homogénéité ainsi qu'une concordance avec les résultats obtenus par les auteurs cités précédemment, ce qui nous permet de prouver la justesse de notre code de calcul et ainsi étendre notre étude à d'autres cas plus complexes.

IV.3 Résultats et discussions

Une étude paramétrique a été réalisée selon la méthode décrite précédemment, et un ensemble représentatif des résultats graphiques a été obtenu pour la vitesse $f'(\eta)$, la température $\Theta(\eta)$ et la concentration $\Phi(\eta)$ adimensionnelles et cela pour diverses valeurs du paramètre de flottabilité N . L'effet des différents paramètres de contrôles sera exposé en détails pour chaque graphique pour un Prandtl de 0.7 qui correspond à l'air et un nombre Schmidt de 0.2 qui caractérise la diffusivité de l'hydrogène dans l'air à température ambiante.

IV.3.1 Cas du transfert thermique pur ($N=0$)

Dans la partie bibliographique nous avons souligné l'importance des forces de flottabilité dans le cas vertical contrairement à celui horizontal où leurs effets sont moins importants ; en effet pour la configuration horizontale l'écoulement reste symétrique par rapport à la ligne de stagnation ce qui n'est plus le cas pour la configuration verticale. Aussi sa contribution est significative dans l'écoulement principal pour le cas vertical alors que dans le cas horizontal l'écoulement principal n'est affecté que d'une façon secondaire.

Dans ce qui suit nous allons mettre en évidence l'influence de ces forces de poussée en considérant, dans un premier temps, uniquement la poussée thermique, et ainsi discerner clairement les effets de celle-ci sur le champ de vitesse, le champ de température, le transfert thermique caractérisé par le nombre de Nusselt ainsi que le coefficient de frottement local, pour la partie inférieure et supérieure de la plaque.

IV.3.1.1 Champ dynamique

La figure IV.2 présente l'évolution du profil de vitesse adimensionnelle pour un écoulement laminaire avec transfert thermique unique, pour un nombre de Prandtl égale à 0.7 représentant l'air.

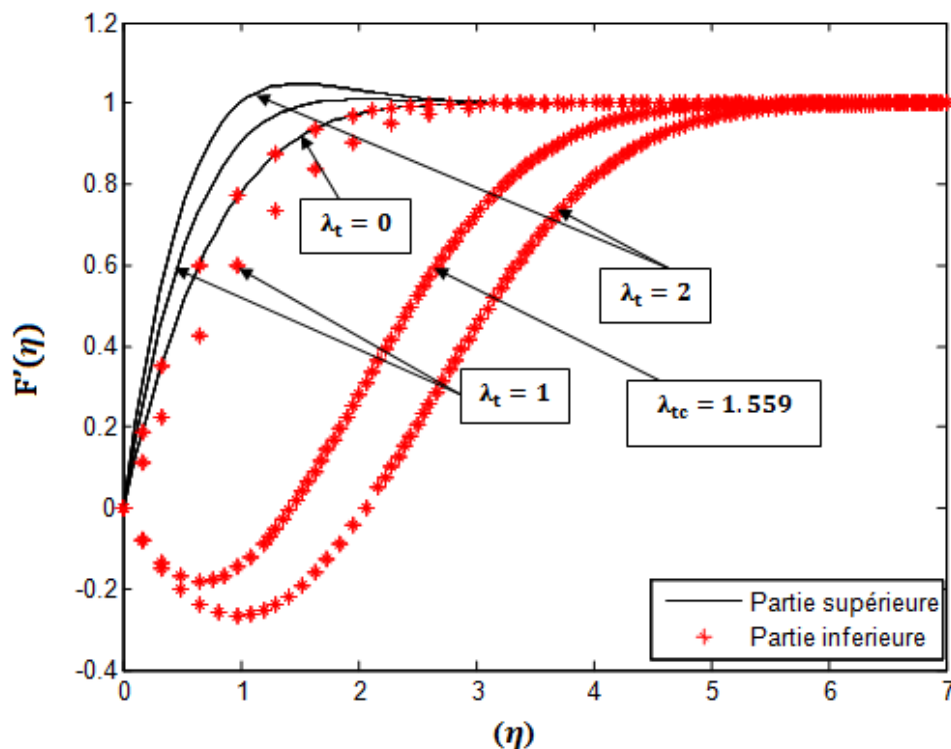


Figure IV.2 : Influence du paramètre de flottabilité thermique λ_t sur le profil de vitesse.

La figure ci-dessus montre que l'augmentation du paramètre de flottabilité thermique λ_t conduit :

- Dans la partie supérieure, à une diminution de l'épaisseur de la couche limite dynamique due à une accélération de l'écoulement au voisinage de la paroi causée par un gradient de pression favorable qui accélère l'écoulement ce qui s'explique par le fait que la force de flottabilité thermique est de même sens que l'écoulement (Assisting flow) et donc des gradients de vitesse pariétaux importants signifiant une couche limite dynamique plus mince.
- Dans la partie inférieure, contrairement à la zone précédente nous remarquons une augmentation de l'épaisseur de la couche limite dynamique qui s'explique par une décélération de l'écoulement causée par un gradient de pression induit défavorable vu que la force de flottabilité thermique s'oppose à l'écoulement (Opposing flow). Pour un gradient thermique relativement important ($\lambda_t = 2$) on constate, au voisinage immédiat de la paroi, l'inversion du signe de la composante de vitesse u synonyme d'une zone de recirculation et une augmentation conséquente de l'épaisseur de la couche limite. cette tendance s'amorce à partir d'une valeur critique du paramètre de flottabilité $\lambda_{tc} = 1.559$.

Nous schématisons cette différence entre les deux régions de la paroi dans la figure suivante :

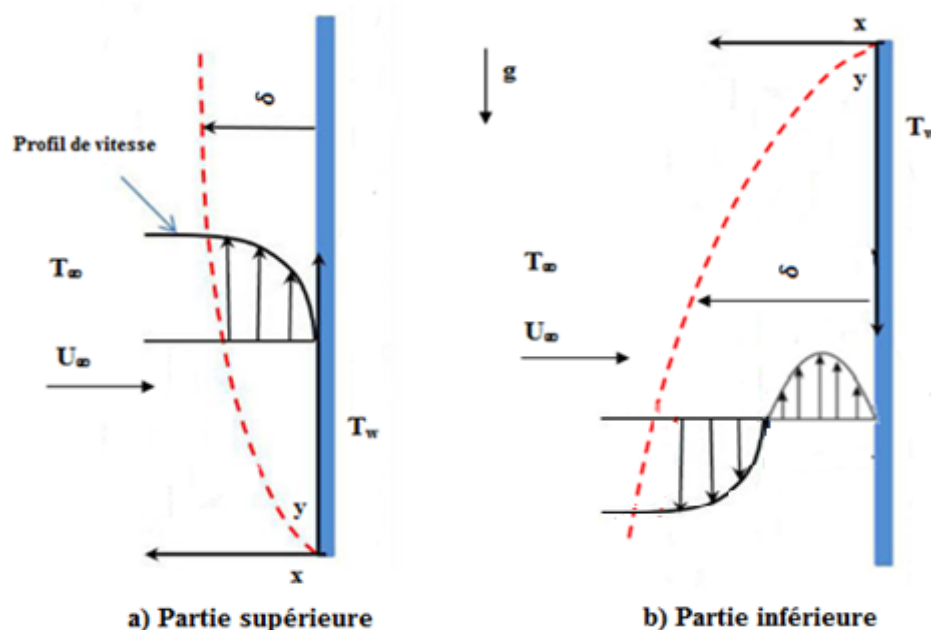


Figure IV.3 : Schématisation de la différence entre les deux régions de la paroi.

Comme nous l'avons souligné ci-dessus à partir d'une certaine valeur critique du paramètre de poussée thermique la composante de vitesse adimensionnelle prends un signe négatif, signe de la présence potentielle d'une zone de recirculation, cette prédisposition nous a incité à penser qu'il y'a une probabilité de présence de solutions duales, vue qu'elles sont intimement liées au phénomène de décollement cité précédemment. Ainsi nous avons poussé notre investigation, en nous concentrons uniquement sur l'impact du paramètre de flottabilité, nous obtenons finalement la figure ci-dessous qui met en évidence la présence d'une solution double pour la partie inférieure de la plaque pour une valeur du paramètre de poussée supérieure à $\lambda_t=1.559$.

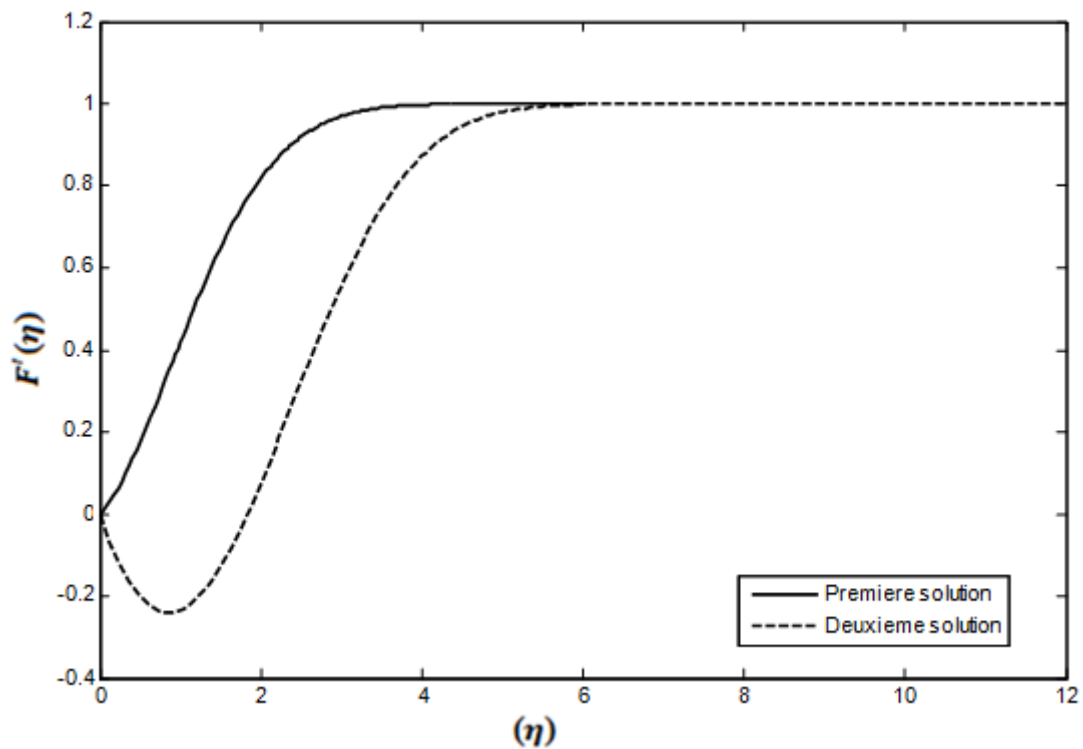


Figure IV.4 : Double solution pour la partie inferieure de la plaque, cas sans transfert de masse.

a. Influence sur le coefficient de frottement

Pour ce qui est du coefficient de frottement, le tableau ci-dessous présente les valeurs de ce dernier pour différentes valeurs du paramètre de poussée λ_t :

λ_t	$f''(0)$	
	Partie supérieure	Partie inférieure
0	1.233	1.233
1	1.706	0.6917
2	2.141	-0.5785

Tableau IV.3 : Valeurs du coefficient de frottement à la paroi pour différentes valeurs du paramètre de poussée thermique λ_t .

Les valeurs du coefficient de frottement sont prédominantes dans la zone supérieure de la plaque comparativement à celle inférieure pour une même valeur du paramètre de flottabilité, cela est dû au fait que les forces de poussée sont du même sens que l'écoulement inversement à la zone inférieure, sauf pour le cas où λ_t est nulle caractérisant le cas de la convection forcée.

Il est intéressant de noter que l'augmentation du terme de flottabilité induit un accroissement du coefficient de frottement dans la zone supérieure contrairement à celle inférieure, c'est une conséquence directe de la présence du gradient de pression qui prend de l'ampleur pour de grande valeur de λ_t , et ainsi affirme son influence favorable ou défavorable selon la zone d'écoulement.

En ce qui concerne la valeur négative du coefficient de frottement elle est due à la présence d'une zone de recirculation comme cela a été mentionné précédemment.

IV.3.1.2 Champ thermique

Le profil de température est représenté pour les deux régions de la paroi (superieure et inferieure) avec des valeurs du paramètre de poussée variant de 0 à 2.

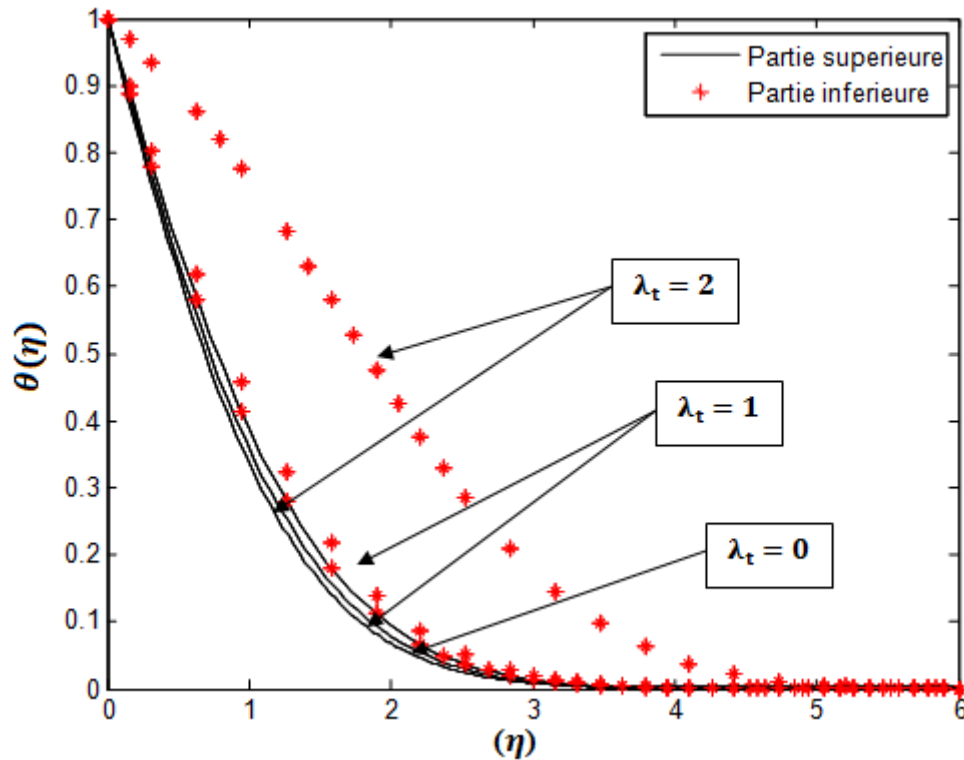


Figure IV.5 : Influence du paramètre de flottabilité thermique λ_t sur le profil de température.

Quant au profil de température représenté sur la figure ci-dessus, on constate que pour les deux régions l'influence du λ_t sur les champs thermique est assez minime, pour des valeurs du paramètre de poussée thermique inférieure à une valeur critique ($\lambda_t < \lambda_{tc}$) signifiant l'apparition d'une zone de recirculation. Avec l'apparition d'un écoulement secondaire le gradient thermique diminue considérablement causant un épaissement de la couche limite thermique.

a. Influence sur le transfert de chaleur

Pour ce qui est du transfert de chaleur, le tableau ci-dessous présente les valeurs du nombre de Nusselt local pour différentes valeurs du paramètre de poussée λ_t .

λ_t	$-\theta'(0)$	
	Partie supérieure	Partie inférieure
0	0.709	0.709
1	0.7641	0.6332
2	0.8084	0.1986

Tableau IV.4 : Valeurs du nombre de Nusselt à la paroi pour différentes valeurs du paramètre de poussée thermique λ_t .

Ils sont accrus dans la partie supérieure de la plaque, ce qui corrobore nos propos précédents. Cet accroissement est dû au gradient de pression favorable qui accélère l'écoulement près de la paroi et contribue ainsi un transfert de chaleur plus important entre le fluide et la plaque, ainsi plus le paramètre de flottabilité s'accroît plus le transfert de chaleur s'accroît, L'effet inverse est observé dans la zone inférieure.

L'apparition d'une zone de recirculation dans la région inférieure de la plaque cause une importante dévaluation du nombre de Nusselt Nu dans la zone inférieure de l'ordre de 69% entre $\lambda_t=1$ et $\lambda_t=2$

IV.3.1.3 Influence du nombre de Prandtl sur les deux régions

Pour un Nombre de Schmidt fixé à 0.2 et un paramètre de flottabilité égale à l'unité nous regroupons dans le tableau suivant la variation du coefficient de frottement à la paroi ainsi que le nombre de Nusselt local en fonction du nombre de Prandtl.

Pr	$f''(0)$		$-\theta'(0)$	
	Partie supérieure	Partie inférieure	Partie supérieure	Partie inférieure
0.7	1.7063	0.6917	0.7641	0.7314
7	1.5179	0.7314	1.7224	1.5402
10	1.4928	0.9235	1.9446	1.7630
20	1.4480	1.0031	2.4576	2.2685

Tableau IV.5 : Variation du coefficient de frottement et le nombre de Nusselt pour différentes valeurs du nombre de Prandtl, pour $\lambda_t = 1$, $Sc = 0.2$.

Nous constatons que le nombre de Prandtl favorise le transfert de chaleur dans les deux parties de la plaque et réduit le coefficient de frottement dans la région supérieure uniquement, cela peut s'expliquer par le fait que les fluides avec un nombre Prandtl important possèdent une diffusivité thermique faible et ainsi le transfert de chaleur est plus important, alors que ces mêmes fluides se caractérisent par une diffusivité visqueuse plus importante et donc un coefficient de frottement réduit.

Afin de mieux visualiser et avoir une idée concrète de cette tendance nous présentons ci-dessous l'évolution de ces deux paramètres en fonction du nombre de Prandtl.

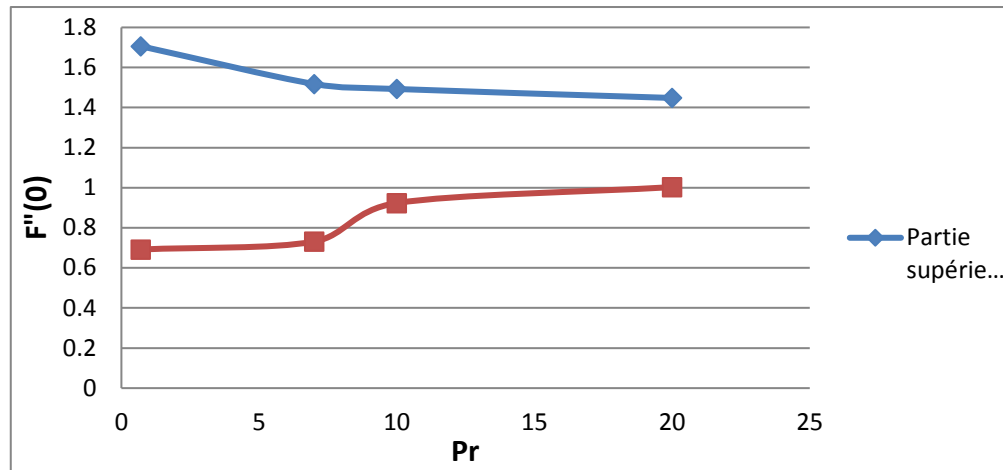


Figure IV.6 : Profils du coefficient de frottement à la paroi en fonction du nombre de prandtl Pr .

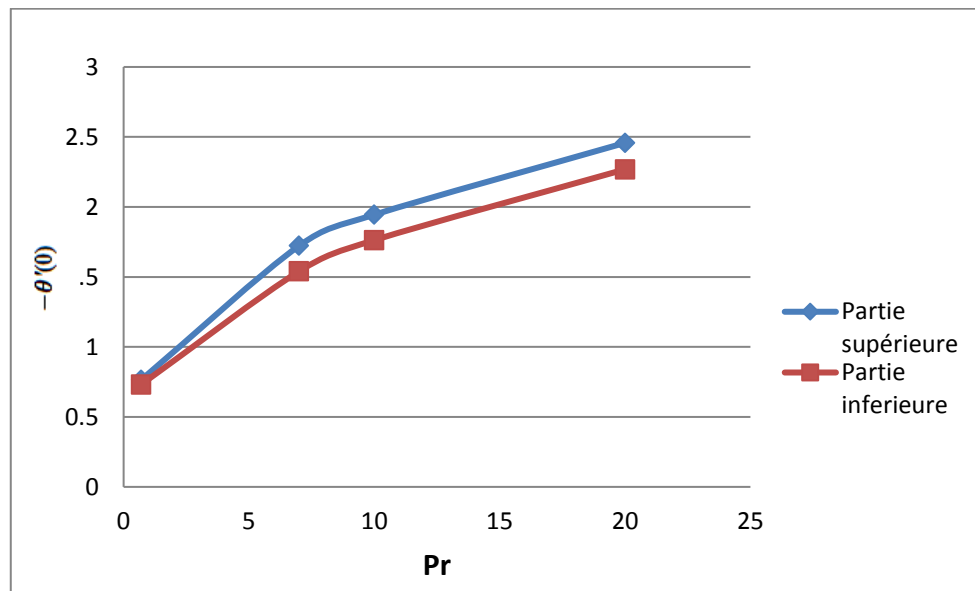


Figure IV.7: Profils du nombre de Nusselt à la paroi en fonction du nombre de prandtl Pr .

IV.3.3 cas du transfert double diffusif

Pour étudier l'influence du rapport de flottabilité N sur l'écoulement ainsi que les échanges de chaleur et de masse, nous allons nous intéresser aux valeurs négatives de ce paramètre, qui présentent un certain intérêt pratique. Ce rapport sera compris entre -1 et -3, autrement dit les deux forces de flottabilités sont de sens opposés.

L'étude sera menée séparément pour la partie supérieure et inférieure de la plaque, et pour un même nombre de Prandtl de 0.7 (air) et un nombre de Schmidt de 0.2 et pour un paramètre de poussée thermique de $\lambda_t=1$.

IV.3.3.1 Partie supérieure

a. Champ dynamique

Pour des valeurs négatives du paramètre N , la figure IV.8 met en évidence une augmentation de l'épaisseur de la couche limite dynamique plus N prend de grandes valeurs négatives d'où une diminution du gradient de vitesse.

Cette tendance s'explique par le fait que la flottabilité massique est de signe opposée à celle thermique amoindrissant subséquemment l'effet positif de cette dernière que l'on a noté précédemment (cas sans poussé massique) en engendrant un gradient de vitesse opposé à l'écoulement ralentissant ce dernier ; plus le rapport de flottabilité diminue, plus la flottabilité massique prend l'ascendant sur la flottabilité thermique décélérant encore plus l'écoulement au voisinage de la paroi jusqu'à atteindre une valeur critique $N_c = -2.490$, où la composante de vitesse de l'écoulement principale est de signe négatif près de la paroi, synonyme d'une zone de recirculation.

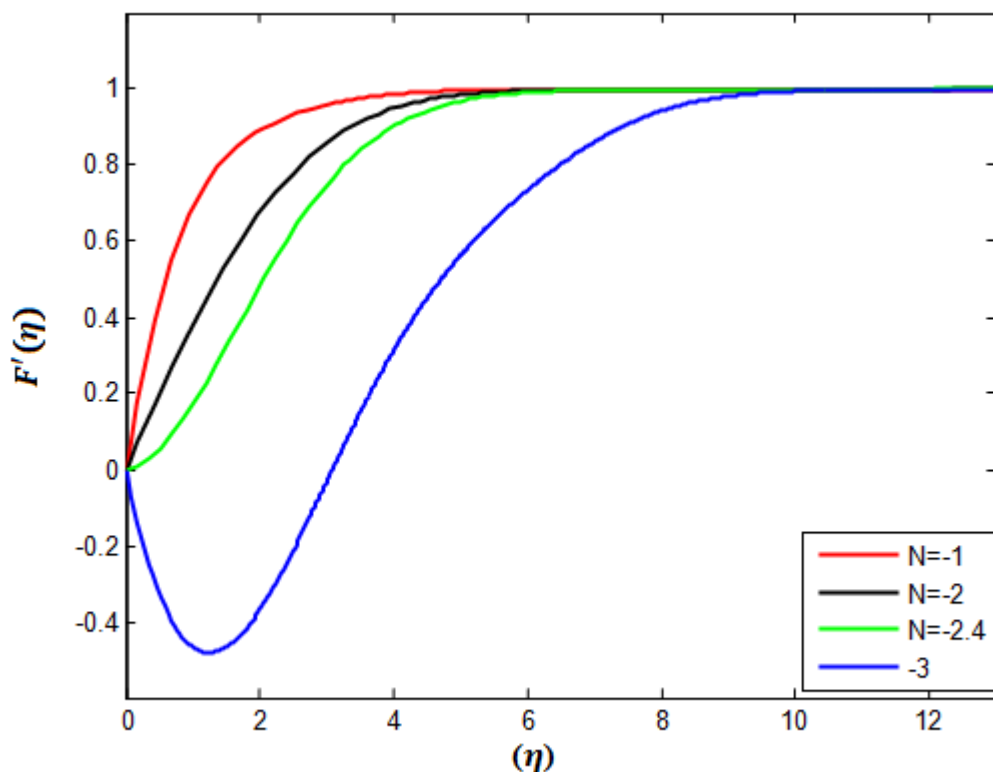


Figure IV.8 : Influence du rapport de flottabilité N sur le profil de vitesse pour la partie supérieure de la paroi.

Pour cette configuration nous n'avons pas réussi à trouver la double solution avec les valeurs des nombres de Prandtl et Schmidt spécifiés précédemment et cela même pour des valeurs du rapport de flottabilité $N < N_c$, mais cela n'est pas une preuve tangible de son inexistence.

En revanche cette dernière est bel et bien présente pour d'autres valeurs des nombres de Prandtl et de Schmidt ; la figure ci-dessous illustre cette solution dual pour $Pr=0.2$ et $Sc=0.7$, $N < N_c$. Il est à noter que ceci sort du cadre de notre travail hors nous avons choisi de l'inclure car il présente un certain intérêt pour effectuer plus tard de plus amples analyses.

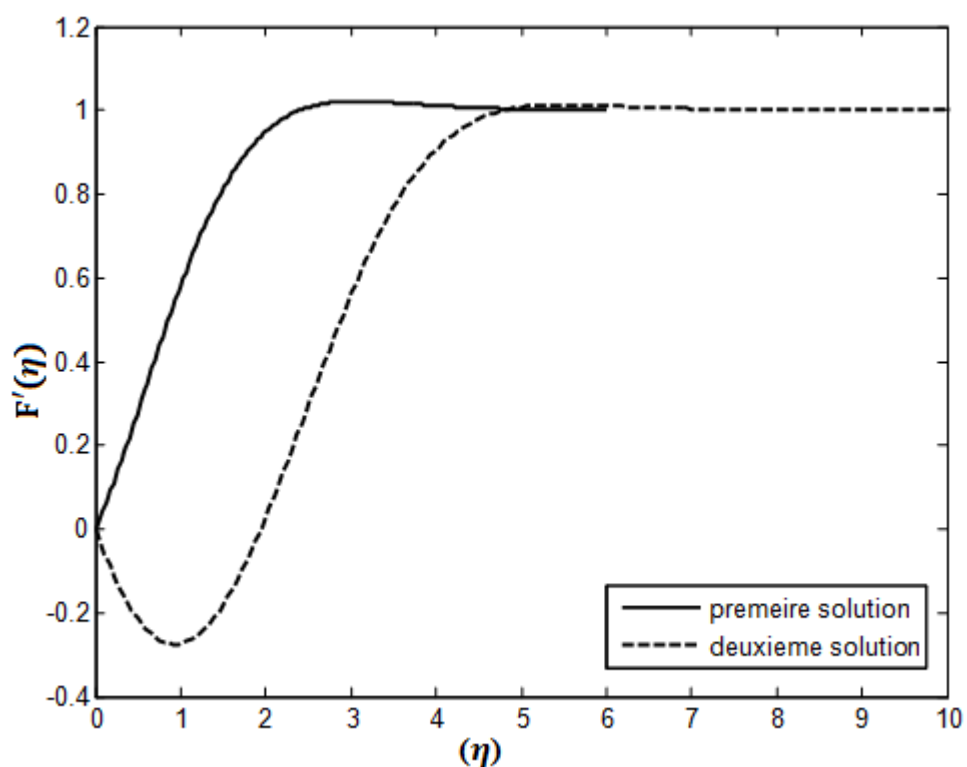


Figure IV.9 : Double solution pour $Pr=0.2$ et $Sc=0.7$ dans la partie supérieure.

b. Champ thermique

la même remarque peut s'appliquer à la couche limite thermique, on note une différence infime de l'épaisseur de cette dernière pour un rapport $N < N_c = -2.59$ puis une différence d'épaisseur conséquente pour des valeurs négatives du rapport de flottabilité inférieures à N_c , en raison de la décélération engendrée par le gradient massique adverse.

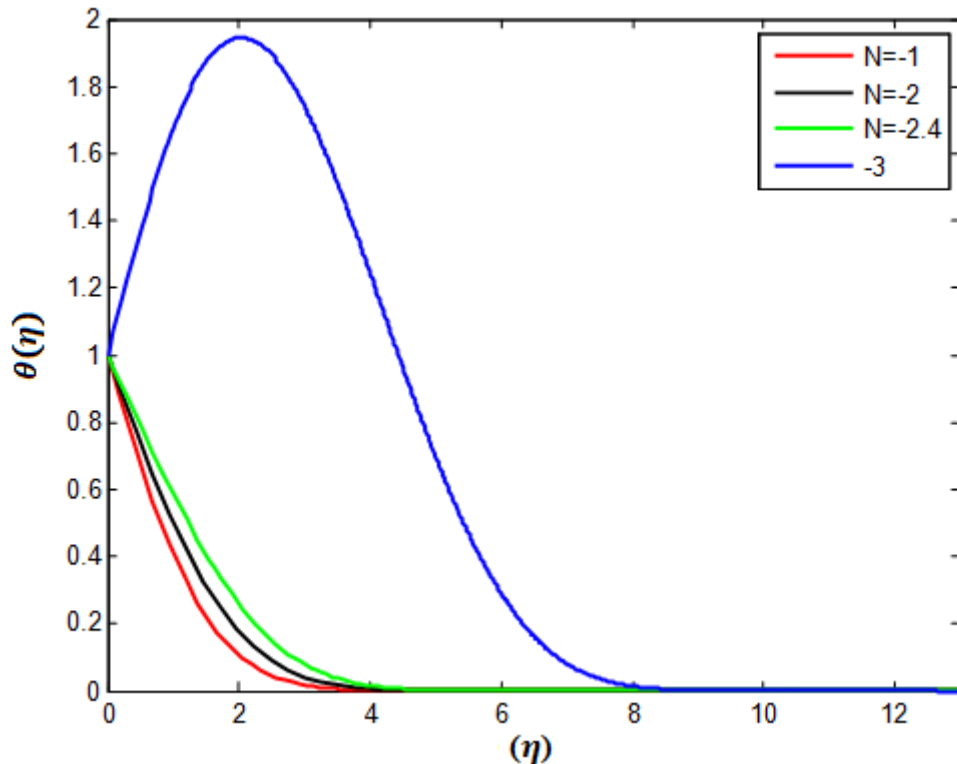


Figure IV.10 : Influence du rapport de flottabilité N sur le profil de température pour la partie supérieure de la paroi.

c. Champ massique

La figure IV.11 représente l'évolution du profil de concentration en fonction du rapport de flottabilité, elle démontre une tendance d'épaississement de cette dernière pour des valeurs négatives croissantes du rapport de flottabilité ($N < 0$), autrement dit une concentration plus élevée au sein de l'écoulement extérieure ($C_\infty \gg C_w$). La diminution progressive de N décélère l'écoulement extérieure, de sorte que la diffusion de l'espèce chimique présente au sein de du fluide se fait de plus en plus lentement, l'effet d'entraînement étant réduit la concentration s'en trouve réduite au voisinage immédiat de la paroi, ce qui conduit à une diminution du gradient de concentration d'où cette augmentation d'épaisseur, qui est peu notable au début mais qui prend de l'ampleur à partir d'une certaine valeur critique du rapport de flottabilité égale à $N_c = -2.589$

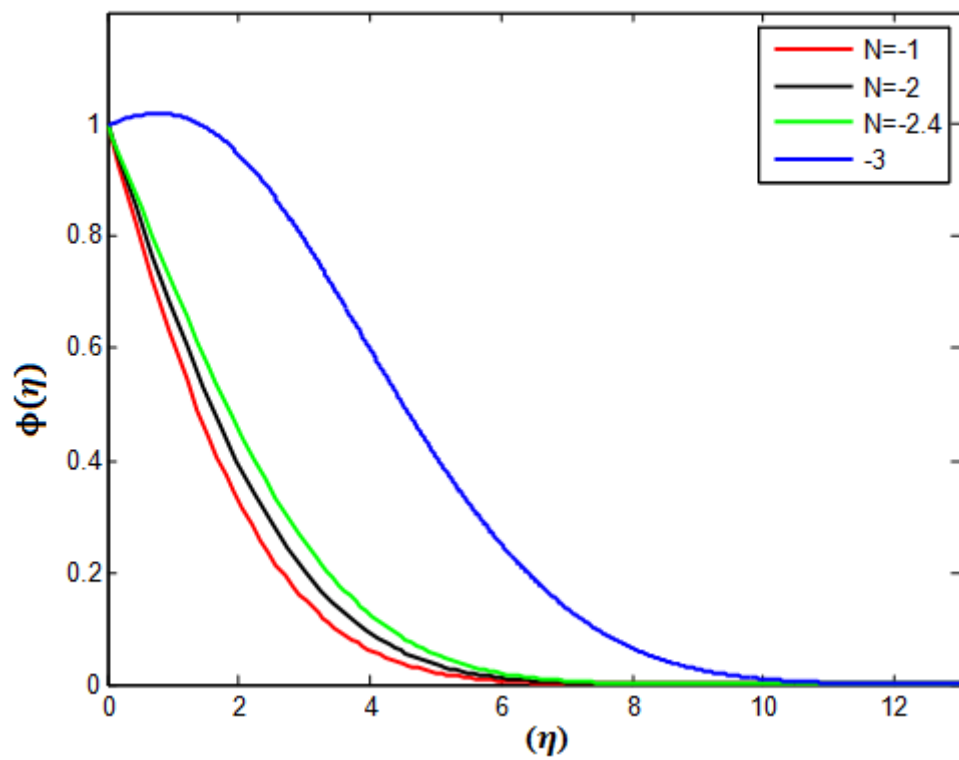


Figure IV.11 : Influence du rapport de flottabilité N sur le profil de concentration pour la partie supérieure de la paroi.

IV.3.3.2 Partie inférieure

a. Champ dynamique

Pour ce qui est de la partie inférieure les tendances sont inversées, la couche limite s'affine à l'opposé de la partie supérieure. L'opposition des deux forces de flottabilité, ainsi que l'ascendance de la poussée massique sur la flottabilité thermique crée un gradient de vitesse qui assiste l'écoulement et l'accélère d'où l'augmentation du gradient de vitesse près de la paroi. Un pic de vitesse apparait pour des valeurs de $N < -1$ où l'effet solutal l'emporte sur l'effet thermique, dû au gradient de pression induit massique qui prend l'ascendant sur le thermique conduisant à une accélération de l'écoulement au voisinage de la paroi.

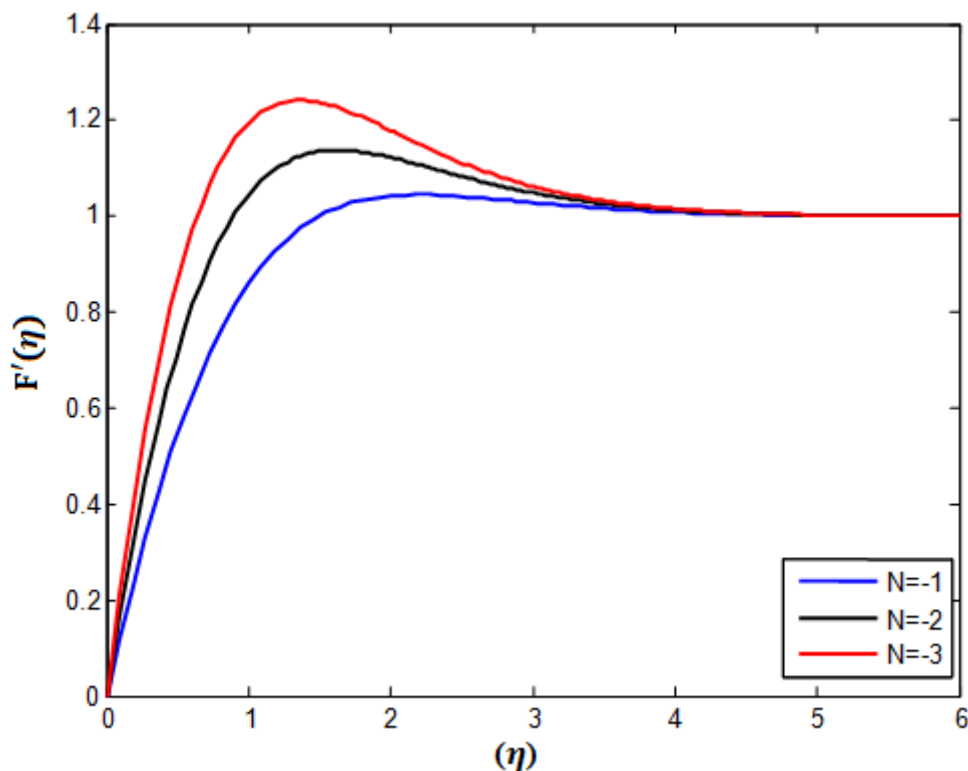


Figure IV.12 : Influence du rapport de flottabilité N sur le profil de vitesse pour la partie inférieure de la paroi.

Pour ce qui est de la double solution dans cette région, elle n'est présente que pour des valeurs positives du rapport de flottabilité, plus précisément supérieures à une valeur critique de $N_c=0.569$, car dans cette configuration l'effet solutal est de même sens que l'effet thermique tout deux étant opposés à l'écoulement créant ainsi un gradient de pression défavorable, à l'origine de l'instabilité qui provoque l'apparition de la double solution.

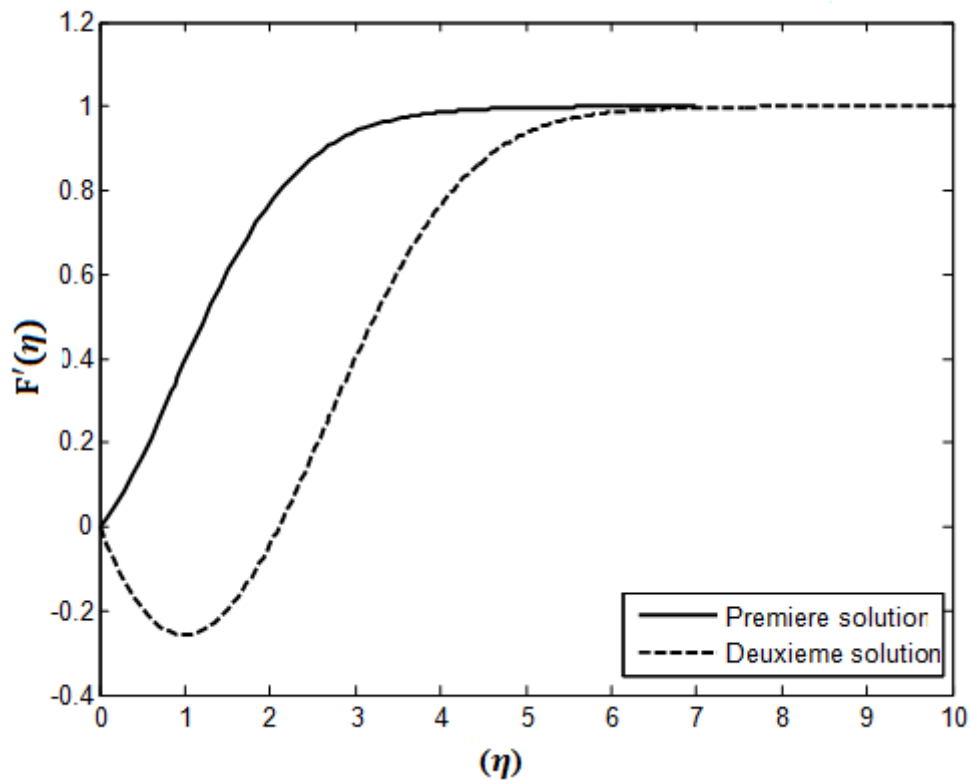


Figure IV.13 : Double solution pour $N > N_c$ dans la partie inferieure.

b. Champ thermique

En ce qui concerne la couche limite thermique, on note une diminution infime de l'épaisseur de cette dernière pour des valeurs negatives du rapport N de plus en plus conséquentes, cela est dû à la présence d'un gradient de pression favorable d'origine massique qui assiste l'écoulement causant une accélération de l'écoulement, mais dans ce cas cette accélération est de faible magnitude.

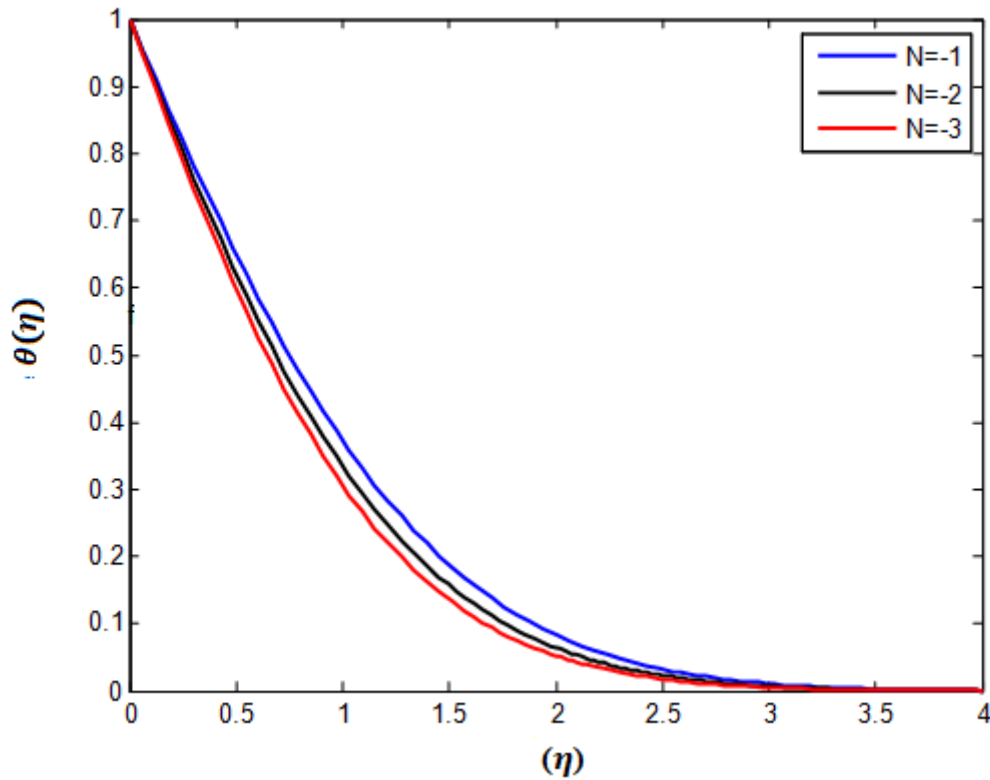


Figure IV.14 : Influence du rapport de flottabilité N sur le profil de température pour la partie inférieure de la paroi.

c. Champ massique

Contrairement à la partie supérieure de la plaque la diminution progressive de N accélère l'écoulement extérieur, ainsi la diffusion de l'espèce chimique présente au sein du fluide se fait de plus en plus rapidement au fur et à mesure que N diminue, et ainsi la concentration s'en trouve accrue au voisinage immédiat de la paroi, ce qui explique cet amincissement progressif de la couche limite massique.

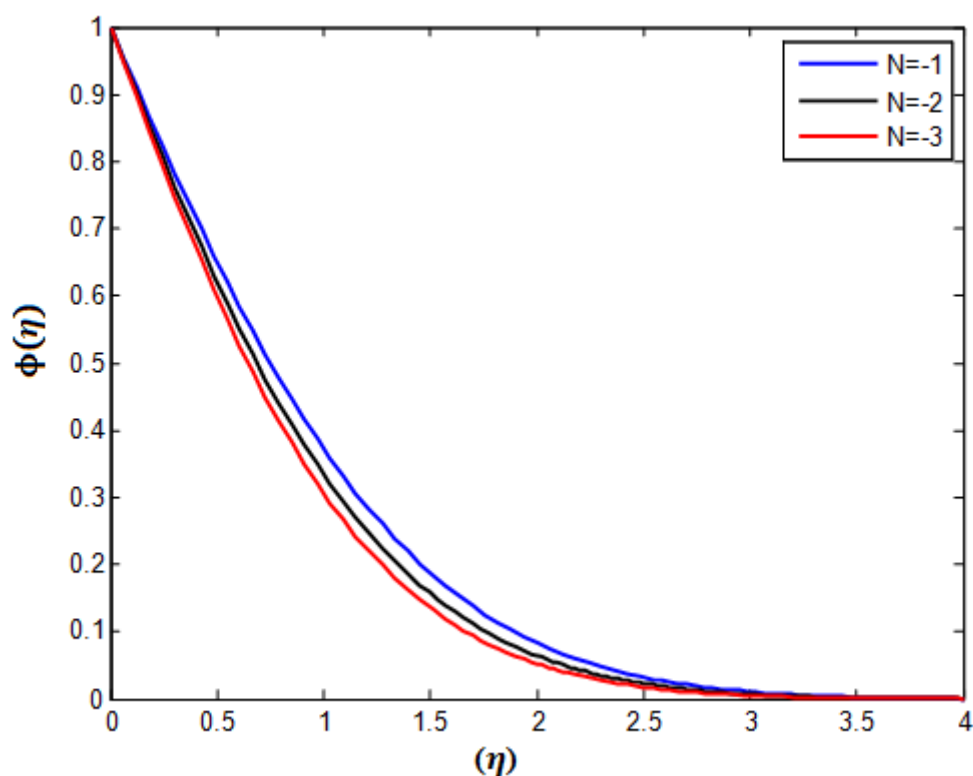


Figure IV.15 : Influence du rapport de flottabilité N sur le profil de concentration pour la partie inférieure de la paroi.

IV.3.3.3 Influence du rapport de flottabilité sur les paramètres adimensionnels locaux

	$F''(0)$		$-\theta'(0)$		$-\phi'(0)$	
	Partie supérieure	Partie inférieure	Partie supérieure	Partie inférieure	Partie supérieure	Partie inférieure
-1	1.1140	1.342	0.6792	0.7356	0.4156	0.4487
-2	0.3997	1.915	0.5386	0.8063	0.3455	0.4847
-3	-0.8807	2.432	-0.7654	0.8618	-0.0397	0.5134

Tableau IV.6 : Valeurs de $f''(0)$, $-\theta'(0)$, $-\phi'(0)$ en fonction du rapport de flottabilité N .

Pour ce qui est du coefficient de frottement, pour les mêmes valeurs du rapport N ce dernier est plus notable dans la région inférieure de la plaque. De plus on note un accroissement des valeurs dans la partie inférieure inversement à celle supérieure où celles-ci ont tendance à diminuer jusqu'à prendre une valeur nulle pour $N=-2.417$

De même pour le transfert de chaleur caractérisé par le nombre de Nusselt, ainsi que le nombre de Sherwood qui caractérise le transfert de masse ce qui conduit à conclure que le transfert de chaleur et de masse sont plus conséquents dans la région inférieure de la plaque autrement dit le rapport N contribue de manière marginale aux transferts que ce soit de manière positive (partie inférieure) ou négative (partie supérieure).

Conclusion générale

Conclusion générale

L'étude menée dans le présent manuscrit porte un regard particulier sur la convection mixte double diffusive le long d'une plaque verticale, et plus précisément sur les phénomènes de transfert qui ont lieu au voisinage du point de stagnation, ainsi ce qui nous a semblé judicieux fut de mener une étude de couche limite. L'intérêt du travail réside d'une part dans un aspect de recherche fondamentale, lié à la compréhension du phénomène de convection thermosolutale et d'autre part, dans l'aspect pratique du phénomène tel que les processus de revêtement.

La modélisation mathématique de ce problème physique est basée sur les équations de conservation de la quantité de mouvement, de l'énergie et des espèces chimiques. Moyennant l'analyse de similarité, les équations gouvernantes sont réduites en un système d'équations aux dérivées ordinaires qui se présentent sous forme d'un problème de valeurs aux limites. Ces équations sont résolues numériquement à l'aide d'une routine intégrée dans le logiciel de programmation matlab, bvp4c, qui est une méthode aux différences finies qui implémente la formule de Lobatto à trois étapes de collocation (III.A), ainsi le polynôme de collocation fournit une solution continue dans l'intervalle d'intégration qui est du quatrième ordre en précision.

Pour mener à bien ce travail, il a fallu tracer une ligne de conduite à suivre et fixer des objectifs au préalable, pour ne pas dévier de l'horizon fixé au début. Le cap le plus simple à suivre fut de répondre aux questionnements qui sont à l'origine de nos investigations et qui sont la genèse même de cet ouvrage.

Ces objectifs furent, dans un premier temps, de distinguer la différence entre les deux régions où se développe la couche limite car, contrairement au cas horizontal, la gravité influence différemment sur l'écoulement de couche limite au travers des forces de flottabilité.

Dans un second temps, notre attention fut focalisée sur l'influence du paramètre de flottabilité thermique sur l'écoulement et comprendre l'influence de ce dernier sur les couches limites dynamique et thermique et, et cela en négligeant les échanges massiques.

En dernier lieu et non des moindre la prise en compte du gradient massique et l'étude de l'influence de ce dernier au travers du rapport de flottabilité.

Ainsi, nous sommes arrivés aux conclusions suivantes :

Conclusion générale

- Les couches limites dynamique et thermique dans la partie supérieure de la plaque sont bien plus mince que celle inférieure et cela est dû au fait que le paramètre de flottabilité thermique λt accélère l'écoulement dans cette zone contrairement à la zone inférieure, où il le décélère et causant ainsi une augmentation d'épaisseur.
- Le coefficient de frottement et le transfert de chaleur sont accrus dans la partie supérieure pour la même raison, car l'augmentation du λt accrois la vitesse d'écoulement, la constatation inverse est observée pour la partie inférieure de la plaque.

Pour ce qui est du cas double diffusif les résultats ont été plus complexes à décortiquer, ils se résument à :

- les épaisseurs de couches limites dynamique, thermique et massique sont plus minces dans la zone inférieure de la plaque, et plus N prend de grandes valeurs négatives plus elles s'affinent contrairement à la zone supérieure, où un gradient de pression défavorable décélère l'écoulement.
- Le coefficient de frottement et le transfert de chaleur et de masse sont affectés de la même manière par les diminutions du rapport de flottabilité, ces derniers sont accrus dans la partie inférieure et réduits dans la partie supérieure.
- Il est à noter aussi que la décélération causée par l'opposition des deux forces de flottabilité, ralentie la diffusion de l'espèce chimique présente dans l'écoulement extérieure $C_\infty > C_w$ et réduit ainsi la concentration de cette dernière dans l'écoulement pariétal, dans la zone supérieure de la plaque

Le point d'orgue de ce travail fut la mise en évidence de l'existence d'une double solution dans la zone inférieure de la plaque, pour certaines valeurs critiques du paramètre de flottabilité dans le cas où le transfert de masse est négligé, mais aussi dans le cas double diffusif où la solution dual existe dans les deux régions de la plaque.

En guise de perspective, nous pensons qu'une étude de stabilité de ce type d'écoulement sera d'un grand intérêt pour confirmer les valeurs critiques d'apparition de zone de recirculation et aussi en raison de l'existence de solutions duales.

Références bibliographiques

- [1] A. Bejan, A. Kraus, "Heat Transfer Handbook", TJ250. B35, (2003).
- [2] T. Ismail, "Modelling in Transport Phenomena", Elsevier Science B.V, (2002).
- [3] D. Vanpouille, "développement de modèles de turbulence adaptés à la simulation des écoulements de convection naturelle à haut nombre de Rayleigh.", Thèse de doctorat, ISAE, Toulouse, (2013).
- [4] F. Incropera, D. Dewitt, T. Bergman, A. Lavine. "Fundamentals of Heat and Mass Transfer". New York: Wiley, 6 edition; (2007).
- [5] Cours génie des procédés Master 2, Ph. Marty 2012-13 Université Joseph Fourier, Grenoble
- [6] J. Gautner, J. Livingood, et P. Hrycak, Survey of literature on flow characteristics of a single turbulent jet impinging on a flat plate, NASA, Rap. Tech. D-5652, (1970).
- [7] J. Livingood, P. Hrycak, Impingement heat transfer from turbulent air jets to flat plate - a literature survey, NASA, Rap. Tech. X-2778, (1973).
- [8] E. Sparrow, R. Goldstein, M. Rouf, Effect of nozzle-surface separation distance on impingement heat transfer for a jet in a crossflow. Journal of Heat Transfer (1975), 97, 528–533.
- [9] D. Thibault, Etude du refroidissement par impact de jet à travers une paroi mince et avec un écoulement cisaillant amont: application aux aubes de turbines, thèse de doctorat, ENSMA-Poitiers, (2009).
- [10] A. Derdouri, Etude par la programmation d'un jet rond turbulent impactant une plaque plane circulaire, mémoire de magistère, Université Constantine 1, (2014).
- [11] M.L Toulouse, Analyse et caractérisation de la convection naturelle et convection mixte dans des enceintes confinées, thèse doctorat, ENSAS, Toulouse, (2004).
- [12] R.L. Mahajan, D. Angirasa, Combined heat and mass transfer by natural convection with opposing buoyancies, Journal of Heat Transfer, (1993), 115(3), 606-612.
- [13] A. Maouf, SI. B. Zeghami, Numerical study of laminar natural convection in the boundary layer around a vertical cylinder with opposing buoyancies, Int. Comm. Heat and Mass Transfer, 2008.
- [14] F. Aman, A. Ishak, I. Pop, Mixed convection boundary layer flow near stagnation point on vertical surface with slip, J. App. Mathematics and Mechanics, (2011), 32(12), 1599-1606.
- [15] T.S. Chen, F.A. Strobel, combined heat and mass transfer in mixed convection over a horizontal flat plate, J. Heat Transfer, (1980), 102(3), 538-543.
- [16] T. S. Chen, C. F. Yuh, Combined heat and mass transfer in mixed convection vertical and inclined plates, Int. J. Heat Mass Transfer, (1979), 23, 527-537.

Références bibliographiques

- [17] A.A Kendoush, Theory of stagnation region heat and mass transfer to fluid jets impinging normally on solid surfaces, J. Chemical Engineering and Processing, (1998), 37(3), 223–228.
- [18] F. Mendil, F. Nait Bouda, D. Sadaoui, Instability of opposing double diffusive convection in 2D boundary layer stagnation point flow, Int. J Thermal Sciences, (2015) ,98,192-201.
- [19] F. Candelier, P. Bournot, P. Caminat, Z.Ghrab, Etude expérimentale d'un jet laminaire impactant une plaque plane chauffée, 13^{èmes} journées internationales de thermique, pp. 28-30, Albi, France, (2007).
- [20] Mai Ton Hoang, R.Zebriri, T.Lorenzo, Convection mixte en régime transitoire de couche limite laminaire sur une plaque verticale, C.R. Acad. Sci. Paris, t.329.Série II b, p. 627-631, (2001).
- [21] N.Ramachandran, T.S. Chen, B.F.Armaly, Mixed convection in stagnation flows adjacent to vertical surfaces,
- [22] I.A.Hassanien, combined forced and free convection in stagnation flows of micropolar fluids over vertical non-isothermal surfaces, Int. j. Engng Sci. (1990) ,28 (8), 783-792.
- [23] Y.Y. Lok, N. Amin, I. Pop, Unsteady mixed convection flow of a micropolar fluid near the stagnation point on a vertical surface, International Journal of Thermal Sciences,(2006) ,45, 1149–1157.
- [24] J. Kierzenka, Studies in the numerical solution of ordinary differential equations, these de doctorat, Southern Methodist University, Dallas, TX, (1998).

Annexe

A.1 Ecoulement de stagnation

L'écoulement de stagnation est un écoulement bidimensionnel de fluide incompressible impactant, perpendiculaire à une surface, connu aussi sous le nom d'écoulement de Hiemenz ce dernier est caractérisé par un point d'arrêt, contact fluide/solide au point d'impact (point de stagnation), Hiemenz, a procédé à une simplification des équations de Navier-Stokes gouvernant l'écoulement en une seule équation différentielle ordinaire de 3^{ème} ordre, donnée par :

$$f''' + ff'' + 1 - f'^2 = 0 \quad (\text{A.1})$$

Avec, les conditions aux limites :

$$f'(0) = f(0) = 0, \eta \rightarrow \infty f'(\eta) = 1$$

Cette équation est résolue numériquement, elle admet une solution auto-similaire qui est aussi une solution exacte des équations de Navier Stokes.

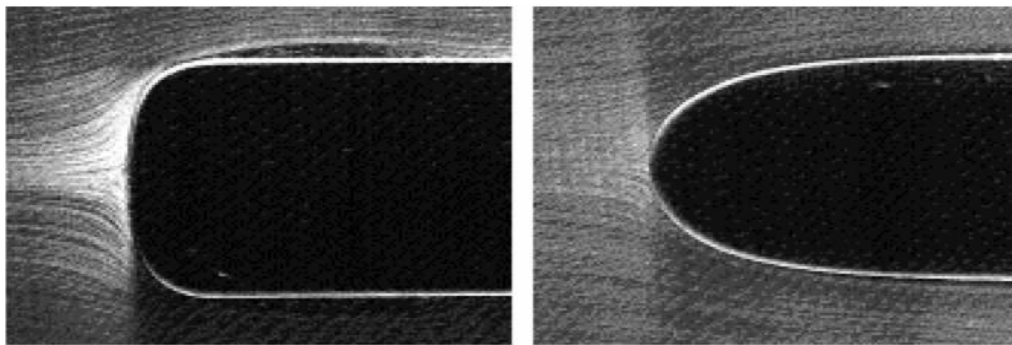


Figure A.1 : Ecoulement de point de stagnation.

A.2 Groupements sans dimension

Dans le cadre de notre étude nous allons être amenés à utiliser plusieurs nombres adimensionnels, que nous nous proposons de définir ci-dessous.

➤ Nombre de Reynolds

Le plus connu des nombres sans dimension est bien entendu le nombre de Reynolds, lié à l'écoulement. Il représente le rapport des forces d'inertie aux forces visqueuses. Il permet d'identifier les différents régimes d'écoulement. Pour $Re < 1$, l'écoulement est un écoulement de Stokes. Pour des nombres de Reynolds plus élevés, l'écoulement va passer successivement par trois régimes d'écoulement : le régime laminaire, le régime de transition et le régime turbulent. Il

est défini par : $Re = \frac{\rho UL}{\mu} = \frac{UL}{\nu}$

➤ Nombre de Grashof

Le nombre de Grashof Gr est lié à l'écoulement. Il peut être thermique ou massique.

- Pour le Grashof thermique. Il correspond au rapport des forces hydrostatiques sur les forces visqueuses. Pour des valeurs élevées du nombre de Grashof, le transfert thermique est essentiellement dû à la convection au sein du fluide tandis que pour des valeurs faibles le transfert thermique est essentiellement dû à la conduction dans le fluide. Il est

défini par :
$$Gr_t = \frac{g\beta_t\Delta T L^3 \rho^2}{\mu^2} = \frac{g\beta_t\Delta T L^3}{\nu^2}$$

- Un nombre de Grashof massique peut être construit sur le même modèle que celui décrit ci-dessus pour le transfert thermique. Il est défini comme suit :

$$Gr_c = \frac{g\beta_c\Delta C L^3 \rho^2}{\mu^2} = \frac{g\beta_c\Delta C L^3}{\nu^2}$$

➤ Nombre de Nusselt

Très souvent utilisé pour décrire le transfert thermique, le nombre de Nusselt Nu , traduit la qualité de l'échange thermique et est défini par : $Nu = \frac{h_t L}{k}$

➤ Nombre de Sherwood

Il est l'équivalent du nombre de Nusselt pour le transfert de masse.

Il est défini par : $Sh = \frac{h_c L}{D}$

A.3 Syntaxe de bvp4c sur Matlab

Bvp4c est une routine sous MATLAB qui permet de résoudre des problèmes aux limites pour les équations différentielles ordinaires. La syntaxe de cette méthode est:

`sol = bvp4c(@odefun,@bcfun,solinit,options)`, avec les arguments suivants:

odefun	<p>Une fonction qui évalue la BVP sous la forme d'un système équivalent constitué d'équations différentielles de premier ordre. Il peut avoir la forme :</p> <p style="text-align: center;">function dydx = odefun(x,y),</p> <p>où x est un scalaire, et dydx et y sont des vecteurs colonnes.</p>
bcfun	<p>Une fonction qui calcule le résidu dans les conditions aux limites. bcfun peut avoir la forme :</p> <p style="text-align: center;">function res = bcfun(ya,yb)</p> <p>où ya et yb sont des vecteurs colonnes correspondants à la solution numérique aux points $x = a$ et $x = b$, respectivement.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Les premiers éléments ya (1) et yb (1) sont les valeurs de y à $x = a$ et $x = b$. • Les éléments seconds ya (2) et yb (2) sont les valeurs de dy/dx en $x = a$ et $x = b$. • L'argument de sortie res est un vecteur colonne constitué par les valeurs des résidus.
solinit	<p>Une structure contenant la proposition initiale d'une solution. solinit peuvent être créés en utilisant la fonction bvpinit.</p> <p style="text-align: center;">solinit = bvpinit(x,yinit);</p> <p>où x est un vecteur représentant l'estimation des points du maillage initial que le procédé dans bvp4c devrait d'abord utiliser.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Pour un BVP avec un domaine $[a, b]$, le premier élément de x est a, et le dernier élément est b. • Le maillage initial peut être choisi en utilisant <code>x=linspace(a,b,N);</code> or <code>x=[a:increment:b];</code> • Le vecteur yinit est l'estimation initiale de la solution, il peut être constant ou en fonction de x.
Sol	<p>Sol est une structure contenant la solution. Il est renvoyé par la routine bvp4c. Il possède les champs suivants:</p> <p><code>sol.x</code> Maillage sélectionné par bvp4c. Le nombre final de points de maillage</p>

	<p>est déterminé par le solveur BVP4c pendant le processus de solution.</p> <p>sol.y Champ de solution dans les points de maillage de sol.x</p> <p>La structure de sol peut avoir n'importe quel nom. Il est plus commode d'utiliser des sous-fonctions afin de placer toutes les fonctions requises par bvp4c dans un seul fichier M-file.</p>
Options	<p>Le solveur cherche à contrôler l'erreur dans la solution à travers la valeur des résidus dans les conditions aux limites, à la fois pour chaque sous-intervalle et les limites du système. Des dispositions sont prises pour la spécification de l'erreur absolue dans les solutions et l'erreur relative autorisée à se propager entre itérations.</p> <pre>options = bvpset('RelTol',10^(-6), 'Abstol',10^(-6), 'Nmax',5000,'Stats','off','Vectorized','on');</pre> <p>Où, l'erreur relative, RelTol=10⁻⁶. l'erreur absolue, Abstol=10⁻⁶. Le nombre maximal de point de maillage autorisé, Nmax=5000 .</p>