Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique
Université de Bejaia
A. Mira
Faculté des Sciences exactes

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Spécialité : Analyse et Probabilités

Par

BEDDAR Anissa et SAHNOUNE Imane

THÈME

Quelques théorèmes du point fixe et certains de leurs algorithmes

Soutenu devant le jury composé de :

M.	F. BOUHMILA	M. C. A	Université A-Mira de Béjaia.	Président.
Mme.	H. BECHIR	M. C. A	Université A-Mira de Béjaia.	Promotrice.
Mme.	S. TAS	Professeur	Université A-Mira de Béjaia.	Examinatrice.

Année 2016–2017

Remerciements

Nous tenons à remercier solennellement notre promotrice, Madame **H. BECHIR**, pour son soutien, ses conseils et son aide précieuse, merci infiniment.

Nos vifs remerciements vont aussi à **M. F. BOUHMILA** pour l'honneur qu'il a bien voulu nous faire en acceptant de présider le jury et à **Mme. S. TAS** pour avoir accepté d'examiner ce mémoire.

Comme nous rendons un vibrant hommage à nos parents et à nos sœurs et frères pour nous avoir inculqué le goût d'apprendre, et nous avoir encouragé sans cesse pour aller plus loin.

Nos sincères remerciements à tous les membres de la faculté des sciences exactes et aux membres du département de mathématiques en particulier.

Nos sincères remerciements vont à tous les étudiants Master analyse et probabilités.

Nous tenons également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

Dédicaces

SAHNOUNE Imane

Je dédie ce modeste travail à :

Ma très chère mère, mon très cher père pour leur amour inestimable, leur soutien, leurs sacrifices et toutes les valeurs qu'ils ont su m'inculquer.

Ma sœur Siham

Mes petits frères Rayane et Sofiane.

Mes grands parents, mes oncles et tantes.

Mes cousins et cousines.

A la mémoire de Mami "ma chère grand mère Fatima"et à la mémoire de mon cher grand pére qui nous a quitté récemment .

Mon binôme et sa famille

Et tous mes ami(e)s

A tous ceux qui me sont chers et que j'ai omis de citer.

Dédicaces

BEDDAR Anissa

Je dédie ce modeste travail à :

Mes très chers parents, pour qui aucun mot ne saurait exprimer ma gratitude.

Mon frère Younes, mes sœurs Lynda, Hassiba et Nawel, avec qui j'ai partagé les plus beaux moments de mon enfance.

Mes chers neveux : Amel, Walid, Lyna et la petite Nihel.

Ma famille entière, sans oublier ma deuxième famille, Boudjellal : beaux parents, beaux frères et belles sœurs, surtout mon fiancé Yassine.

Mes cousins et cousines.

Mon binôme et sa famille.

Mes très chères amies.

Tous ceux qui me sont chers et que j'ai omis de citer.

Table des matières

Introduction

Ce mémoire est une sorte d'état de l'art des théorèmes du point fixe, on y a étudié les théorèmes du point fixe les plus célèbres :Banach, Brouwer, Schauder et Krasnoselskii ainsi que les différents algorithmes liés à ces théorèmes.

Le théorème de l'application contractante établi par Banach en 1922 dit qu'une contraction d'un espace métrique complet dans lui-même admet un point fixe unique, de plus il fournit un algorithme d'approximation du point fixe comme limite d'une suite itérée.

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique, sous sa forme la plus simple, ce théorème exige uniquement la continuité de l'application d'un intervalle fermé borné dans lui-même.

Le théorème du point fixe de Schauder établi en 1930, est une généralisation du théoréme du point fixe de Brouwer, il affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

En 1955, et pour la première fois, Krasnoselskii a élaboré son théorème du point fixe qui affirme que dans un convexe compact toute application qui se met sous la forme d'une somme de deux applications dont l'une est continue et compacte et l'autre contractante admet un point fixe.

Tous les algorithmes liés à ces théorèmes sont aussi abordés.

Ce travail est réparti en trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré d'une part, à quelques définitions de base et il rassemble toutes les notions et résultats que nous utiliserons par la suite.

Le deuxième chapitre constitue l'objectif de ce travail, il traite les principaux théorèmes du point fixe.

Le troisième chapitre concerne les différents algorithmes liés aux théorèmes du point fixe.

Nous achevons ce travail par applications de l'algorithme de Mann et Krasnoselskii sur un exemple et une conclusion.

CHAPITRE 1 préliminaires

Ce chapitre rappelle quelques notions de bases et les principaux résultats mathématiques qui seront utilisés tout le long de ce travail.

1.1 Généralités

1.1.1 Convexité

Définition 1.1.1 ***(Ensemble convexe)*** *Un sous-ensemble C de $\mathbb{R}^n$ est dit **convexe** si*

$$\forall x, y \in C,\ \forall \lambda \in [0,1],\ \lambda x + (1-\lambda) y \in C.$$

D'un point de vue géométrique, un convexe est donc un ensemble qui, lorsqu'il contient deux points contient nécessairement le segment les reliant.

Proposition 1.1.1 *On a les propriétés èlèmentaires suivantes :*

- *Si C_1, C_2 sont deux convexes de $\mathbb{R}^n$ et λ_1, λ_2 deux réels, alors $C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2$ est un convexe de $\mathbb{R}^n$.*
- *Si $(C_j)_{j\in J}$ est une famille quelconque de convexes de $\mathbb{R}^n$, alors $\underset{j\in J}{\cap} C_j$ est un convexe de $\mathbb{R}^n$.*
- *Si C est un convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une application affine, alors $f(C)$ est un convexe de $\mathbb{R}^n$.*

Définition 1.1.2 ***(Espace uniformément convexe)*** *On dit qu'un espace de Banach X est **uniformément convexe** si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } [\ \forall x, y \in X,\ \|x\| \leqslant 1,\ \|y\| \leqslant 1,\ \|x - y\| > \varepsilon] \Rightarrow \left[\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1 - \delta\right].$$

1.1.2 Connexité

Définition 1.1.3 ***(Espace connexe)*** *On dit qu'un espace topologique X est **connexe** s'il n'est pas réunion de deux ensembles ouverts non vides disjoints. Autrement dit, si U et V sont deux ouverts de X tels que $X = U \cup V$ et $U \cap V = \emptyset$ alors $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$.*

Exemple 1.1.1 *Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont des intervalles.*

Proposition 1.1.2 *On a les propriétés élèmentaires suivantes :*

- Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de parties connexes de X. S'il existe un indice $i_0 \in I$ tel que pour tout $i \in I$, $C_{i_0} \cap C_i \neq \emptyset$ alors $\underset{i\in I}{\cup} C_i$ est connexe.
- Soit $(C_n)_{n\geq 0}$ une famille dénombrable de parties connexes de X. Si pour tout $n \geq 0,\ C_n \cap C_{n+1} \neq \emptyset$ alors $\underset{n\geq 0}{\cup} C_n$ est connexe.

Proposition 1.1.3 *Soit X un espace topologique. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *L'espace X est connexe.*
- *L'espace X n'est pas réunion de deux ensembles fermés non vides disjoints.*
- *Il n'existe pas dans X d'autres parties qui soient à la fois ouvertes et fermées que X et $\emptyset$.*

Théorème 1.1.1 *Soient X et Y deux espaces topologiques et soit $T : X \rightarrow X$ une application continue. Si X est connexe alors $T(X)$ est connexe.*

1.1.3 Equation intégrale linéaire

Définition 1.1.4 *On appelle **équation intégrale linéaire** toute équation qui contient une fonction inconnue sous le signe d'intégration et qui est linéaire par rapport à cette fonction inconnue.*

· *L'équation du type*

$$\int_a^b K(t,s)\,u(s)\,ds + \varphi(t) = 0 \ \textit{(resp.}\ \int_a^t K(t,s)\,u(s)\,ds + \varphi(t) = 0$$

*est dite de **Fredholm de première espèce (resp. de Volterra de première espèce)** où u est la fonction inconnue, K et φ des fonctions continues et s, t parcourent un segment donné $[a,b]$. Si la fonction φ est nulle, on dit qu'une telle équation est homogène et dans le cas contraire l'équation est dite non homogène.*

·*L'équation du type*

$$u(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)\,u(s)\,ds + \varphi(t) \ \textit{(resp.}\ u(t) = \lambda \int_a^t K(t,s)\,u(s)\,ds + \varphi(t)$$

*est dite de **Fredholm de deuxième espèce (resp. de Volterra de deuxième espèce).***

1.1.4 Compacité

Définition 1.1.5 ***(Application compacte)*** *Soient X et Y deux espaces de Banach. Une application linéaire continue $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ est dite **compacte** si l'image $T\left(\bar{B}_X\right)$ par l'application T de la boule unité fermée $\bar{B}_X$ de l'espace X est **relativement compacte** dans Y.*

Définition 1.1.6 ***(Application demi compacte)*** *Soit H un espace de Hilbert et K un sous ensemble de H. Une application $T : K \rightarrow H$ est dite **demi compacte** si elle a la propriété que pour tout $\{u_n\}$ suite bornée dans H telle que $\{Tu_n - u_n\}$ est fortement convergente, il existe une sous suite $\{u_{nk}\}$ de $\{u_n\}$ qui est fortement convergente.*

Définition 1.1.7 ***(Applications homotopes)*** *Soient X et Y deux espaces topologiques, f et g deux applications continues de X dans Y. On dit que f et g sont **homotopes** s'il existe une application $T : X \times [0,1] \rightarrow Y$ continue telle que $T(x,0) = f(x)$ et $T(x,1) = g(x)$ pour tout x de X.*

Définition 1.1.8 ***(Rétraction)*** *Soient A un ensemble et B une partie de A. On dit que f est **une rétraction** de A sur B s'il s'agit d'une application de A dans B qui est égale à l'identité sur B.*

Définition 1.1.9 ***(Lacet)*** *Si X est un espace topologique, on appelle* ***lacet*** *sur X toute application continue $\gamma : [0,1] \rightarrow X$ telle que*

$$\gamma(0) = \gamma(1).$$

Dans le cas où $X = \mathbb{C}$, on peut définir l'indice $Ind(\gamma, z_0)$ d'un lacet γ par rapport à $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0,1])$:il correspond au nombre (entier relatif) de tours effectués par le lacet autour de ce point.

On peut l'obtenir en calculant :

$$Ind(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}.$$

1.1.5 Contraction

Définition 1.1.10 ***(Application lipschitzienne)*** *Soient (X, d) un espace métrique et $T : X \rightarrow X$ une application. On dit que T est* ***lipschitzienne*** *ou $k-$**lipschitzienne** s'il existe $k > 0$ telle que*

$$\forall x, y \in X : d(Tx, Ty) \leqslant k.d(x, y) \tag{1.1.1}$$

- *Le plus petit réel k qui vérifie l'inégalité (1.1.1) est appelé* ***constante de Lipschitz.***
- *Si $k \in [0, 1[$, l'application T est dite* ***contractante****.*
- *Si $k = 1$, l'application T est dite* ***non expansive****.*

Définition 1.1.11 ***(Application contractive)*** *Soit (X, d) un espace métrique. L'application $T : X \rightarrow X$ est dite* ***contractive*** *si*

$$d(Tx, Ty) < d(x, y), \ \forall x, y \in X; \qquad x \neq y.$$

Définition 1.1.12 ***(Application** $a-$**contractive)*** *Soit (X, d) un espace métrique. L'application $T : X \rightarrow X$ est dite $a-$**contractive** s'il existe une constante $a \in]0, 1]$ telle que T est $a-$lipschitzienne.*

Définition 1.1.13 ***(Application fortement contractive)*** *Soit $(X, \|.\|)$ un espace vectoriel normé réel ou complexe, K un sous ensemble convexe fermé de X. L'application $T : K \rightarrow K$ est dite* ***fortement contractive*** *s'il existe une constante $0 < k < 1$ telle que pour tout x et y dans K*

$$\|Tx - Ty\| \leq k \|x - y\|.$$

Définition 1.1.14 ***(Application pseudo contractante généralisée)*** *Soit H un espace réel de Hilbert muni de sa norme $\|.\|$ et de son produit scalaire $\langle . \rangle$, et K un sous ensemble non vide de H. L'application $T : K \rightarrow K$ est dite* ***pseudo contractante généralisée*** *si, pour tout $x, y \in K$, il existe une constante $k > 0$ telle que*

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq k^2 \|x - y\|^2 + \|Tx - Ty - k(x - y)\|^2 \tag{1.1.2}$$

La condition (1.1.2) *est équivalente à*

$$\langle Tx - Ty, x - y \rangle \leq k \|x - y\|^2$$

Ou encore

$$\langle (I - T)x - (I - T)y, x - y \rangle \geq (1 - k) \|x - y\|^2, \tag{1.1.3}$$

Où I est l'application identité.

Remarques 1.1.1 .

1. *Si T est pseudo contractante généralisée avec $k < 1$, alors $(I - T)$ est fortement monotone.*

2. *Pour $k = 1$ dans l'inégalité* (1.1.2)*, T est dite* ***pseudo contractante.***

Définition 1.1.15 ***(Application quasi contractive)*** *Soit X un espace normé. L'application $T : X \rightarrow X$ est dite* ***quasi contractive*** *s'il existe un nombre k, $0 \leq k < 1$ tel que pour tout $x, y \in X$*

$$\|Tx - Ty\| \leq k.M(x, y),$$

Où

$$M(x, y) = \max \{\|x - y\|, \|x - Tx\|, \|y - Ty\|, \|x - Ty\|, \|y - Tx\|\}.$$

Définition 1.1.16 *Soit X un espace réel de Banach. L'application T de domaine $D(T)$ et de rang $R(T)$ de X est dite*

1. ***Fortement pseudo contractante*** *s'il existe $k > 0$ telle que pour tout $x, y \in D(T)$ il existe $j(x, y) \in J(x, y)$ tel que*

$$\langle (I - T)x - (I - T)y,\ j(x - y) \rangle \geq k \|x - y\|^2.$$

2. ***Pseudo contractive*** *si pour tout $x, y \in D(T)$, il existe $j(x,y) \in J(x,y)$ tel que*

$$\langle (I-T)x - (I-T)y,\ j(x-y)\rangle \geq 0$$

où J est l'application de la dualité dans un espace normé.

Définition 1.1.17 *L'application T de domaine $D(T)$ et de rang $R(T)$ dans X est dite*

1. ***Fortement accrétive*** *s'il existe un nombre positif k tel que pour tout $x, y \in D(T)$, il existe $j(x,y) \in J(x,y)$ tel que*

$$\langle Tx - Ty,\ j(x-y)\rangle \geq k\|x-y\|^2;$$

2. ***Accrétive*** *si pour tout $x, y \in D(T)$, on a*

$$\langle Tx - Ty,\ j(x-y)\rangle \geq 0.$$

1.1.6 Suite bornée, théorème d'Ascoli-Arzéla

Définition 1.1.18 ***(Suite de fonctions simplement bornée)*** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions d'un espace métrique X vers $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^d$).*

*On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **simplement bornée** si pour tout x de X, l'ensemble $\{f_n(x),\ \ n = 1, 2, ...\}$ est borné dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^d$), ou bien s'il existe une fonction $\Psi : X \to \mathbb{R}$ telle que*

$$\forall n \in N,\ \forall x \in X,\ |f_n(x)| \leq \Psi(x)\ (ou\ \ \|f_n\| \leq \Psi(x)).$$

Définition 1.1.19 ***(Suite de fonctions équicontinue)*** *Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace métrique X vers $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^d$) est dite **équicontinue** si elle vérifie la condition*

$$\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall y \in X,\ d(x;y) \leq \eta \Rightarrow \|f_n(x) - f_n(y)\| < \varepsilon.$$

Ou

$$\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall y \in X,\ d(x,y) \leq \eta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon.$$

Proposition 1.1.4 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continue sur l'espace métrique compact K et à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^d$).*

On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f sur K. Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue.

Théorème 1.1.2 *Soit K un espace métrique compact et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions, simultanément équicontinue et simplement bornée. Alors*

1. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est uniformément bornée;*
2. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *contient une sous suite (f_{n_k}) qui converge uniformément.*

Théorème 1.1.3 ***(Arzelà-Ascoli)*** *Soit (X, d) un espace métrique compact, (Y, δ) un espace métrique complet. Une partie A de $C(X, Y)$ est relativement compacte si et seulement si :*

1. *A est équicontinue;*
2. *Pour tout $x \in X$, l'ensemble $A(x) = \{f(x); \quad f \in A\}$ est relativement compact.*

1.1.7 Espace de Lebesgue L^p

Théorème 1.1.4 ***(La convergence dominée de lebesgue)***

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions appatenant à $L^1(\Omega)$ avec $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

On suppose que :

1.$f_n(x) \to f(x)$ *p.p sur* Ω;

2.*Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ |f_n(x)| \leq g(x) \ \ p.p \ sur \ \Omega.$$

Alors

$$f \in L^1(\Omega) \ \ et \ \ \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0$$

1.1.8 Types d'opérateurs

Définition 1.1.20 ***(Opérateur de Zamfirescu)*** *Soit (X, d) un espace métrique. L'opérateur $T : X \to X$ est appelé* ***opérateur de Zamfirescu*** *s'il existe des nombres réels a, b, c satisfaisant $0 < a < 1$, $0 < b$, $c < \frac{1}{2}$ tels que pour tout couple $(x, y) \in X$, l'une des conditions suivantes est vérifiée*

(z_1) $d(Tx, Ty) \leq ad(x, y)$;

(z_2) $d(Tx, Ty) \leq b[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$;

(z_3) $d(Tx, Ty) \leq c[d(x, Ty) + d(y, Tx)]$.

Définition 1.1.21 ***(Opérateur de Kannan)*** *Soit X un espace Banach, K un sous-ensemble convexe fermé de X. L'opérateur $T : K \to K$ est appelé* ***opérateur de Kannan*** *s'il existe $b \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que*

$$d(Tx, Ty) \leq b\left[d(x, Tx) + d(y, Ty)\right] \text{ pour tout } x, y \in X.$$

Définition 1.1.22 ***(Opérateur de Chatterjea)*** *Soit X un espace Banach, K un sous ensemble convexe fermé de X. L'opérateur $T : K \to K$ est appelé* ***opérateur de Chatterjea*** *s'il existe $c \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que*

$$d(Tx, Ty) \leq c\left[d(x, Ty) + d(y, Tx)\right] \text{ pour tout } x, y \in X.$$

Définition 1.1.23 *Soit X un ensemble non vide et $T : X \to X$ une application. On dit que $x \in X$ est* ***un point fixe*** *de T si*

$$T(x) = x.$$

On note ***l'ensemble des points fixes de*** *T par F_T ou $FixT$ qui est défini par*

$$FixT = F_T = \{x \in X \ / T(x) = x\}.$$

CHAPITRE 2

Les différents théorèmes du point fixe

Le but de ce chapitre est l'étude de quelques théoèmes du points fixe, on commencera par le plus simple et le plus connu d'entre eux :**le théorème du point fixe de Banach** pour les applications contractantes, on verra ensuite des théorèmes plus puissants et un peu plus profonds, on pourra ainsi étudier successivement **le théorème du point fixe de Brouwer** valable en dimension finie puis **le théorème du point fixe de Schauder** qui en est la généralisation en dimension infinie et enfin nous abordons **le théorème du point fixe de Krasnoselskii,** un théorème d'existence du point fixe concernant les applications qui s'écrivent sous la forme de somme de deux fonction, dont l'une est continue et compacte et l'autre est contractante.

2.1 Théorème du point fixe de Banach

Le théorème du point fixe de Banach, connu aussi sous le nom du **principe de contraction de Banach** ou encore **théorème du point fixe de Picard**, est apparu pour la première fois en 1922 dans le cadre de la résolution d'une équation intégrale.

Théorème 2.1.1 ***(Principe de contraction de Banach,*** 1922***)***

Soit (X, d) un espace métrique complet. Soit $T : X \rightarrow X$ une application contractante de constante de contraction k. Alors

$$\exists! x \in X \text{ tel que } Tx = x.$$

Preuve. Soit $x_0 \in X$, on définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = Tx_n.$$

Montrons que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ d\left(x_n, x_{n+1}\right) \leq k^n d\left(x_0, x_1\right).$$

On raisonne par récurrence

- Pour $n = 0$, on a :

$$d\left(x_0, x_1\right) \leq k^0 d\left(x_0, x_1\right) \text{ c'est vérifié.}$$

- Supposons que la condition est vraie pour n et montrons qu'elle est vraie pour $(n+1)$, c'est-à-dire on montre :

$$d\left(x_{n+1}, x_{n+2}\right) \leq k^{n+1} d\left(x_0, x_1\right);$$

  On a :

$$d\left(x_{n+1}, x_{n+2}\right) \leq k\left[k^n d\left(x_0, x_1\right)\right] \leq k^{n+1} d\left(x_0, x_1\right).$$

  D'où

$$\forall n \in \mathbb{N},\ d\left(x_n, x_{n+1}\right) \leq k^n d\left(x_0, x_1\right).$$

- Montrons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

  Soient $p, q \in \mathbb{N}$ $(p \leq q)$:

$$\begin{aligned}
d\left(x_p, x_q\right) &\leq d\left(x_p, x_{p+1}\right) + d\left(x_{p+1}, x_q\right) \\
&\leq d\left(x_p, x_{p+1}\right) + d\left(x_{p+1}, x_{p+2}\right) + \ldots + d\left(x_{q-1}, x_q\right) \\
&\leq k^p d\left(x_0, x_1\right) + k^{p+1} d\left(x_0, x_1\right) + \ldots + k^{q-1} d\left(x_0, x_1\right) \\
&\leq d\left(x_0, x_1\right).\left(k^p + k^{p+1} + \ldots + k^{q-1}\right) \\
&= d\left(x_0, x_1\right).k^p\left(\frac{1-k^{q-p}}{1-k}\right) \\
&\leq \frac{d\left(x_0, x_1\right)}{1-k}.k^p
\end{aligned}$$

  Donc

$$d\left(x_p, x_q\right) \leq \frac{d\left(x_0, x_1\right)}{1-k}.k^p < \varepsilon,$$

  alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans (X, d), et puisque il est complet, on en déduit qu'elle est convergente dans X. i.e

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

- L'existence du point fixe :

  On montre que $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ est un point fixe de T.

  On a :

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= Tx_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \\
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} Tx_n \\
&\Rightarrow x = T \lim_{n\to\infty} x_n, \quad \text{car } T \text{ est continue} \\
&\Rightarrow x = Tx \\
&\Rightarrow x \text{ est un point fixe de } T.
\end{aligned}
$$

- L'unicité du point fixe :

Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe x_1 et x_2 tel que $x_1 \neq x_2$.
Si x_1 est point fixe $\Rightarrow x_1 = Tx_1$.
Si x_2 est point fixe $\Rightarrow x_2 = Tx_2$.
De plus,

$$
\begin{aligned}
d(Tx_1, Tx_2) &\leq k\ d(x_1, x_2) \\
d(x_1, x_2) &\leq k\ d(x_1, x_2) \\
1 &\leq k \text{ contradiction car } k < 1.
\end{aligned}
$$

D'ou l'unicité. ■

2.2 Théorème du point fixe de Picard

Théorème 2.2.1 *Soit (X, d) un espace métrique complet et $T : X \rightarrow X$ une application contractante. Alors T possède un unique point fixe x, et pour tout $x_0 \in X$, la suite $T^n(x_0)$ converge vers x; La vitesse de convergence vérifie alors*

$$d(x_0, T^n(x_0)) \leq \frac{k^n}{1-k}.d(x_1, x_0).$$

où $T^n = \underbrace{T \circ T \circ T \circ \ldots \circ T}_{n\ fois}$.

Preuve. *Analogue à celle du théorème précèdent.* ■

Exemple 2.2.1 *Soient $X = \mathbb{R}$ et f une application telle que*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \tfrac{1}{2}x + 1 \end{aligned}$$

Alors f est contractante et elle admet un unique point fixe $x = 2$.

Remarque 2.2.1 *Les exemples suivants montrent que chacune des hypothèses du théorème 2.2.1 est réellement utile.*

Exemple 2.2.2 *1. . **Si X n'est pas stable par f :***

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} \ surX = [0,1]$$

.On a X est fermé dans $\mathbb{R}$ donc il est complet car $\mathbb{R}$ est complet.

De plus, $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1$, ce qui implique que $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f'(x)| < 1$, donc f est contractante sur $[0,1]$. Mais f n'admet pas de point fixe car $f([0,1]) = [1,2] \nsubseteq [0,1]$, i.e. X n'est pas stable par f.

*2. **Si X n'est pas complet :***

$$f(x) = \frac{\sin x}{2} \ sur \ X = \left]0, \frac{\pi}{4}\right].$$

On a $f\left(\left]0, \frac{\pi}{4}\right]\right) = \left]0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right] \subset \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ et $\sup\limits_{x\in X} |f'(x)| = \frac{1}{2} < 1$, alors f est contractante. Mais f n'admet pas de point fixe car X n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$. Donc X n'est pas complet.

2.3 Théorème du point fixe de Brouwer

Théorème 2.3.1 *Soit B la boule unité fermée de $\mathbb{R}^2$. Alors toute application continue de B dans elle–même admet un point fixe.*

Preuve. Soit $F \in C^0(B, B)$. Supposons que F n'admet aucun point fixe. Pour $x \in B$ on peut alors noter $G(x)$ le point d'intersection entre la demi droite d'origine $F(x)$ passant par x et la sphère S^1.

Fixons $x \in B$. Le point $G(x) \in S^1$ est alors caractérisé par le système d'équation suivant, d'inconnue $\lambda > 0$

$$\begin{cases} G(x) - F(x) = \lambda(x - F(x)) \\ \|G(x)\|^2 = 1 \end{cases}$$

Ce système est équivalent à l'équation suivante :

$$\|\lambda(x - F(x)) + F(x)\|^2 - 1 = 0 \tag{2.3.1}$$

Ce qui peut se réécrire, en développant, de la façon suivante :

$$P_x(\lambda) = 0 \text{ avec } P_x = \|x - F(x)\|^2 X^2 + 2\langle x - F(x), F(x)\rangle X + \|F(x)\|^2 - 1 \tag{2.3.2}$$

Remarquons que :

- $P_x(0) = \|F(x)\|^2 - 1 \leqslant 0$ car $F(x) \in B$;
- $P_x(1) = \|x\|^2 - 1 \leqslant 0$ car $x \in B$;
- $P_x(\lambda) \to \infty$ quand $n \to \underset{-}{+}\infty$.

De fait le polynôme du second degré P_x admet deux racines, l'une négative ou nulle et la seconde supérieure ou égale à un. Ces deux racines sont distinctes donc le discriminant de P_x est nécessairement strictement positif, i.e.

$$\Delta(x) = 4\langle x - F(x), F(x)\rangle^2 + 4\|x - F(x)\|^2 (1 - \|F(x)\|^2) > 0$$

Si on suppose trouvée une solution λ de (2.3.2), il s'agit alors nécessairement de la racine strictement positif de P_x, i.e. de

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= \frac{-2\langle x - F(x), F(x)\rangle + \sqrt{\Delta(x)}}{2\|x - F(x)\|^2} \\ &= \frac{-\langle x - F(x), F(x)\rangle + \sqrt{\langle x - F(x), F(x)\rangle^2 + \|x - F(x)\|^2 \left(1 - \|F(x)\|^2\right)}}{\|x - F(x)\|^2} \end{aligned}$$

Réciproquement, on vérifie que $\lambda(x)$ est bien une solution strictement positive de (2.3.2) et donc $G(x) = \lambda(x)$. De plus, si $x \in S^1$, $P_x(1) = 0$ et donc $\lambda(x) = 1$ et comme $x \longmapsto \lambda(x)$ est continue G l'est :on a construit une rétraction de B sur S^1.

- Par homotopie :

Fixons à présent $s \in [0,1]$ et paramétrons le cercle de centre 0 et de rayon s par l'application suivante :

$$\begin{array}{rcl} x_s : [0,1] & \to & B \\ t & \mapsto & (s\cos(2\pi t), s\sin(2\pi t)) \end{array}$$

on peut alors définir un lacet γ_s de B via $\gamma_s : t \rightarrow G \circ x_s(t)$. En particulier, γ_0 est le lacet trivial en $G(0)$ et γ_1 parcoure S^1 une fois dans le sens direct, i.e. $\forall t \in [0,1]$, $\gamma_1(t) = e^{2\pi it}$. Alors :

$$Ind_{\gamma_0}(0) = \frac{1}{2\pi it}\int_{\gamma_0}\frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi it}\int_0^1 \frac{\gamma_0'(t)}{\gamma_0(t)}dt = 0$$

et

$$Ind_{\gamma_1}(0) = \frac{1}{2\pi it}\int_{\gamma_1}\frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi it}\int_0^1 \frac{2\pi it e^{2\pi it}}{e^{2\pi it}}dt = 1$$

On considère à présent l'application suivante :

$$\begin{array}{rcc} \gamma_s : [0,1] \times : [0,1] & \rightarrow & B \\ (s,t) & \mapsto & \gamma_s(t) = G \circ x_s(t) \end{array}$$

Comme $G(0) \neq 0$ (car $0 \in S^1$), cette application est en fait à valeurs dans $B \backslash \{0\}$, et transforme continuement γ_0 en γ_1 (car $s \mapsto x_s$ est continue) :ces deux lacets donc sont homotopes dans $\mathbb{C} \backslash \{0\}$ et donc $Ind_{\gamma_0}(0) = Ind_{\gamma_0}(1)$, ce qui est absurde.

On en déduit qu'il ne peut exister de rétraction de B sur S^1, et donc que F admet un point fixe. ■

2.4 Théorème du point fixe de Schauder

Le théorème du point fixe de Schauder prolonge le théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach. Il est établi en 1930.

Théorème 2.4.1 *Soit K un sous ensemble non vide, compact et convexe d'un espace de Banach X, et supposons que $T : K \rightarrow K$ soit une application continue. Alors T admet un point fixe.*

Preuve. Soit $T : K \rightarrow K$ une application continue, comme K est compact, alors T est uniformément continue; Donc si on fixe $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x, y \in K$ on ait

$$\|Tx - Ty\| \leq \varepsilon \text{ dès que } \|x - y\| \leq \delta.$$

De plus, il existe un ensemble fini de points $\{x_1, x_2, .., x_p\} \subset K$ tels que les boules ouvertes de rayon δ centrées aux x_j recouvrent K, i.e. $K \subset \underset{1 \leq j \leq p}{\cup} B(x_j, \delta)$.

Soit $L = \langle T(x_j) \rangle_{1 \leq j \leq p}$, sous espace engendré par les $T(x_j)$, alors L est de dimension finie, et $K^* = K \cap L$ est convexe compact de dimension finie.

Pour $1 \leq j \leq p$, on définit la fonction continue $\Psi_j : X \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\Psi_j = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \|x - x_j\| > \delta \\ 1 - \frac{\|x - x_j\|}{\delta} & \text{sinon} \end{cases}$$

et on voit que Ψ_j est strictement positive sur $B(x_j, \delta)$ et nulle en dehors. On a donc, pour tout $x \in K$

$$\sum_{j=1}^{p} \Psi_j(x) > 0,$$

Pour $1 \leq j \leq p$. Soit $\varphi_j : K \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi_j(x) = \frac{\Psi_j(x)}{\sum\limits_{k=1}^{p} \varphi_k(x)}$$

pour lesquelles on a

$$\sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) = 1, \text{ pour tout } x \in K.$$

On pose alors pour $x \in K$

$$g(x) = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) . T(x_j),$$

On a :

(i) g est continue (somme de fonctions continues).

(ii) $g(x) \in L$ (combinaison linéaire des $T(x_j)$).

(iii) $g(x)$ est combinaison linéaire des $T(x_j) \in K$.

$\varphi_j(x) > 0$.

$\sum\limits_{j=1}^{p} \varphi_j(x) = 1.$

Comme K est convexe, donc il contient toute combinaison convexe de ses points.

Ainsi, $g(x) \in K$.

En définitif, $g(x) \in K^*$ et la restriction $g_{|K^*} : K^* \rightarrow K^*$ admet un point fixe y grâce au théorème de Brouwer. De plus

$$\begin{aligned} T(y) - y &= T(y) - g(y) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) . T(y) - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) . T(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) . (T(y) - T(x_j)) . \end{aligned}$$

or, si $\varphi_j(y) \neq 0$ alors $\|y - x_j\| < \delta$, et donc $\|T(y) - T(x_j)\| < \varepsilon$. Donc, on a pour tout j

$$\begin{aligned}
\|T(y) - y\| &\leq \sum_{j=1}^{p} \left\|\varphi_j(y) . (T(y) - T(x_j))\right\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) . \varepsilon = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc, pour tout entier m, on peut trouver un point $y_m \in K$ tel que

$$\|T(y_m) - y_m\| \leq 2^{-m},$$

et puisque K est compact, on peut extraire de la suite $(y_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ une sous suite (y_{m_k}) qui converge vers un point $y^* \in K$. T étant continue, alors la suite $(T(y_{m_k}))$ converge vers $T(y^*)$, et on conclut que

$$T(y^*) = y^*$$

i.e. y^* est un point fixe de T sur K. ■

2.5 Théorème du point fixe de Krasnoselskii

Nous donnons un théorème d'existence du point fixe concernant les applications de la forme $T = F + G$, où F est continue et compacte et G une contraction.

Théorème 2.5.1 *(Krasnoselskii,* 1958*)*

Soit X un espace de Banach et K un sous ensemble non vide, fermé, borné et convexe de X. Soient F et G deux applications de K dans X telles que

1. $\forall x, y \in K,\ F(x) + G(y) \in K$;

2. *F est continue et compacte;*

3. *G est contractante de constante $k < 1$;*

Alors, il existe $x^* \in K$ tel que $(F + G)(x^*) = x^*$.

La preuve fait appel au lemme suivant

Lemme 2.5.1 *Soient $(X, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et K un sous ensemble non vide de X. Soit $G : K \rightarrow X$ une contraction. Alors $(I - G) : K \rightarrow (I - G)(K)$ est un homéomorphisme, où I désigne l'identité.*

Preuve. L'application $(I-G)$ est continue. En effet, $\forall x, y \in X$, on a

$$\begin{aligned}
\|(I-G)(x)-(I-G)(y)\| &\leq \|x-y\|+\|G(x)-G(y)\| \\
&\leq \|x-y\|+k\|x-y\| \\
&\leq (1+k)\|x-y\|
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\|(I-G)(x)-(I-G)(y)\| &= \|(x-y)-(G(x)-G(y))\| \\
&\geq \|x-y\|-\|G(x)-G(y)\| \\
&\geq \|x-y\|-k\|x-y\| \\
&\geq (1-k)\|x-y\|, \ (0<k<1).
\end{aligned}$$

Ceci montre que $(I-G)^{-1}$ existe et est continue. ■

Preuve. (Démonstration du théorème de Krasnoselskii)

Soit $y \in K$ fixé, d'aprés le théorème du point fixe de Banach, l'application $\phi : K \rightarrow K$ définie par :

$$\phi(x)=G(x)+F(y).$$

admet au moins un point fixe dans K.

L'application

$$\begin{aligned}
h : K &\rightarrow K \\
x &\mapsto h(x)=(I-G)^{-1} \circ F(x)
\end{aligned}$$

est continue, compacte et envoie K dans lui même. En effet,

h est une composition d'une application continue et compacte avec une application continue ($(I-G)^{-1}$ est continue d'aprés le lemme 2.5.1), donc compacte.

Par le théorème du point fixe de Schauder, h admet un point fixe dans K :

$$x=h(x) \Leftrightarrow x-G(x)=F(x) \Leftrightarrow x=(F+G)(x).$$

■

2.6 Applications

2.6.1 Application sur le principe de contraction de Banach à l'équation intégrale de Fredholm :

Soit $S : [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue pour laquelle il existe $q \in \mathbb{R}$ vérifiant $0 < q < 1$, tel que $|S(x,t)| \leq q$, $\forall x, t \in [0,1]$, et soit $\phi : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

On aimerait trouver une fonction $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue satisfaisant l'équation intégrale de Fredholm suivante :

$$f(x) = \phi(x) + \int_0^1 S(x,t)\, f(t)dt.$$

Celà se ramène facilement à la recherche d'un point fixe en définissant l'application F par :

$$\begin{array}{rcl} F : C([0,1],\mathbb{R}) & \rightarrow & C([0,1],\mathbb{R}) \\ g & \mapsto & F(g) \text{ tel que } (F(g))(x) = \phi(x) + \int_0^1 S(x,t)\, g(t)dt. \end{array}$$

On vérifie facilement que :

1. F est bien définie. En effet, ϕ est continue et l'intégrale du produit de deux fonctions continues est continue.

2. F est contractante de constante de contraction q, si on munit $C([0,1],\mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme $\|.\|_\infty$. En effet, soit $f, g \in C([0,1],\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} |(Ff)(x) - (Fg)(x)| &= \left| \int_0^1 S(x,t)\,(f(t) - g(t))dt \right| \\ &\leq \int_0^1 S(x,t)\,|f(t) - g(t)|\,dt \\ &\leq q \int_0^1 |f(t) - g(t)|\,dt \\ &\leq q\,\|f - g\|_\infty \end{aligned}$$

donc

$$\sup_{x\in[0,1]} |(Ff)(x) - (Fg)(x)| \leq q\,\|f - g\|_\infty\,,$$

c'est à dire

$$\|Ff - Fg\|_\infty \leq q \|f - g\|_\infty .$$

D'où F est contractante.

Puisque $C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$est complet, on peut appliquer le principe de contraction de Banach, ce qui implique que l'équation intégrale ci-dessus possède une unique solution.

2.6.2 Application en utilisant les théorèmes du type Schauder au problème de Dirichlet homogène d'ordre deux :

Théorème 2.6.1 *Soit* $f : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue et bornée :*

$$\exists M > 0,\ |f(x,y,z)| \leq M, \quad \forall (x,y,z) \in [a,b] \times \mathbb{R}^2.$$

Alors le problème

$$\begin{cases} y''(x) = f\left(x, y, y'\right);\ a < x < b \\ \qquad y(a) = y(b) = 0, \end{cases} \tag{2.6.1}$$

admet au moins une solution $y \in C^2([a,b])$. *De plus, on a les estimations suivantes sur la solution* y *et sa dérivée :*

$$\forall x \in [a,b],\ |y(x)| \leq \frac{M(b-a)^2}{8}. \tag{2.6.2}$$

$$\forall x \in [a,b],\ \left|y'(x)\right| \leq \frac{M(b-a)}{2}. \tag{2.6.3}$$

Preuve. (Par le théorème du point fixe de Schauder)

Soit $X = C^1([a,b])$ muni de la norme $\|u\|_X = \max\left(\sup\limits_{x\in[a,b]} |u(x)|,\ \frac{b-a}{4} \sup\limits_{x\in[a,b]} \left|u'(x)\right|\right)$. C'est une norme équivalente à la norme du *sup*; X est donc un espace de Banach pour cette norme aussi.

- Le problème (2.6.1) est équivalent à l'équation intégrale

$$y(x) = \int_a^b G(x,s).f\left(s, y(s), y'(s)\right) ds,$$

où la fonction de Green $G(x,s)$ est donnée par :

$$G(x,s) = \begin{cases} -\frac{(x-a)(b-s)}{b-a},\ a \leq x \leq s \leq b; \\ -\frac{(s-a)(b-x)}{b-a},\ a \leq\ s \leq x \leq b; \end{cases}$$

On définit à présent l'opérateur T par :

$$\begin{array}{rcl} T : X & \to & X \\ y & \mapsto & Ty(x) = \int_a^b G(x,s) . f\left(s, y(s), y^{'}(s)\right) ds \end{array}$$

1. T est bien défini car la fonction G est définie de manière unique et f est continue et bornée.

   On considère, dans X, la boule fermée de rayon $\frac{M(b-a)^2}{8}$:

   $$B = \left\{ u \in X, \ \|u\|_X \leq \frac{M(b-a)^2}{8} \right. .$$

   Montrons que T envoie B dans B :

   Soit $y \in B$ et $Y = Ty$. Comme f est bornée par M, on a les estimations suivantes :

   $$|Y(x)| \leq \frac{M(b-a)^2}{8} \text{ et } |Y'(x)| \leq \frac{M(b-a)}{2},$$

   donc

   $$\|Y\|_X = \max\left(\sup_{x\in[a,b]} |Y(x)|, \ \frac{b-a}{4} \sup_{x\in[a,b]} \left|Y^{'}(x)\right| \right) = \frac{M(b-a)^2}{8}.$$

   D'où $Y \in B$ et donc T envoie B dans B (en fait T envoie tout l'espace X dans B).

2. T est continue sur X. En effet,

   soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X convergente vers une limite $y \in X$ et $Y_n = Ty_n$,

   $$Ty_n(x) = \int_a^b G(x,s) . f\left(s, y_n(s), y_n^{'}(s)\right) ds, \ \forall x \in [a,b].$$

   D'une part, la continuité de f entraîne que

   $$f\left(s, y_n(s), y_n^{'}(s)\right) \to f\left(s, y(s), y^{'}(s)\right), \ \forall s \in [a,b] \quad \text{quand } n \to +\infty$$

   D'autre part, on a pour tout $x \in [a,b]$:

   $$\begin{aligned} |Ty_n(x)| &\leq \int_a^b |G(x,s)| . \left| f\left(s, y_n(s), y_n^{'}(s)\right) \right| ds \\ &\leq \max_{x\in[a,b]} \left| f\left(x, y_n(x), y_n^{'}(x)\right) \right| \int_a^b |G(x,s)| ds \\ &\leq \frac{M(b-a)^2}{8} \in L^1([a,b]). \end{aligned}$$

Ainsi, on a vérifié les deux conditions du théorème de la convergence dominée de Lebesgue

$$\|Ty_n - Ty\| \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

Alors $(Y_n)_n$ converge vers $Y = Ty$, ceci montre la continuité de T dans X.

3. T est borné sur X. En effet, soit $y \in C^1([a,b])$, alors

$$|Ty_n(x)| \leq \frac{M(b-a)^2}{8} < \infty, \ \forall x \in [a,b].$$

et

$$\left|(Ty_n)'(x)\right| \leq \frac{M(b-a)}{2} < \infty, \ \forall x \in [a,b].$$

4. T est compact. En effet, soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de X. T étant borné, donc $(Ty_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi dans X. Alors, la suite $(Ty_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $C^1([a,b])$ et même dans $C^2([a,b])$, car $(Fy_n)''(x) = f\left(x, y_n, y_n'\right)$ et f est continue.

   D'après le théorème d'Ascoli-Arzéla, la suite $(Fy_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite convergente dans $C^1([a,b])$, d'ou la compacité de l'application T.

   Par conséquent, le théorème du point fixe de Schauder entraîne que T admet un point fixe y qui est solution du problème (2.6.1).

Montrons les estimations (2.6.2) et (2.6.3). On pose

$$M = \max_{x\in[a,b]} f(x, y(x), y(x)),$$

alors

$$|y(x)| \leq M \int_a^b |G(x,s)|\, ds.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\int_a^b |G(x,s)|\, ds &= \int_a^b \frac{(s-a)(x-b)}{b-a} ds + \int_x^b \frac{(x-a)(s-b)}{b-a} ds \\
&= \frac{1}{2}\frac{(x-b)}{b-a}(x-a)^2 - \frac{1}{2}\frac{(x-a)}{b-a}(x-b)^2 \\
&= \frac{(x-a)(x-b)}{2},
\end{aligned}$$

et comme

$$\max_{a\leq x\leq b}\left|\frac{(x-a)(x-b)}{2}\right| = \frac{(b-a)^2}{8}.$$

Alors
$$\int_a^b |G(x,s)|\, ds \leq \frac{(b-a)^2}{8}$$
On a également l'estimation suivante :
$$\begin{aligned}\int_a^b \left|\frac{\partial G}{\partial x}(x,s)\right| ds &= \int_a^x \frac{(s-a)}{b-a} ds + \int_x^b \frac{(b-s)}{b-a} ds \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{b-a}\left[(x-a)^2 + (b-x)^2\right].\end{aligned}$$
Comme le maximum de la fonction $\theta(x) = (x-a)^2 + (b-x)^2$ est atteint a l'une des extrémités a ou b alors
$$\max_{a\leq x\leq b}\left[(x-a)^2 - (b-x)^2\right] = (b-a)^2.$$
Par conséquent
$$\int_a^b \left|\frac{\partial G}{\partial x}(x,s)\right| ds \leq \frac{b-a}{2}.$$
Enfin,
$$\left|y^{'}(x)\right| \leq M\int_a^b \left|\frac{\partial G}{\partial x}(x,s)\right| ds \leq M\frac{b-a}{2}.$$
■

CHAPITRE 3

Les différents algorithmes liés aux théorèmes du point fixe

La théorie des points fixes prend une large part de littérature, car elle fournit des outils utiles pour résoudre de nombreux problèmes ayant des applications dans différents domaines comme l'ingénierie, l'économie, la chimie et la théorie des jeux.

Définition 3.0.1 ***(Taux de convergence)*** *Soit $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ deux suites de nombres réels qui convergent vers a et b respectivement, et supposons qu'il existe $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n - a|}{|b_n - b|}$.*

1. Si $l = 0$, alors on dit que $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge plus vite vers a que $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ vers b.

2. Si $0 < l < \infty$, alors on dit que $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ et $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ ont le même taux de convergence.

3. Si $l = \infty$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge plus fortement que $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Supposons que pour deux itérations de points fixes, $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ et $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ convergent vers le même point fixe p, les estimations d'erreur suivantes sont disponibles

$$\|u_n - p\| \leq a_n, \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{3.0.1}$$

et

$$\|v_n - p\| \leq b_n, \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{3.0.2}$$

Où $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ et $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ sont des suites de nombres positifs (toutes les deux convergent vers 0).

Définition 3.0.2 *Soit* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *deux procédures d'itérations de points fixes qui convergent vers le même point fixe* p, *de sorte que* (3.0.1) *et* (3.0.2) *sont satisfaites.*

Si $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *converge plus vite que* $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, *alors on dit que* $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ *converge plus rapidement que*$\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ *ou simplement, que* $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ *est meilleure que* $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$.

3.1 Itération de Picard

L'un des processus itératifs les plus connus est **le processus itératif de Picard.**

Définition 3.1.1 *Soit* (X, d) *un espace métrique,* $K \subset X$ *un sous ensemble ferrmé de* X *et* $T : K \rightarrow K$ *une application possédant au moins un point fixe* $p \in F_T$. *Pour tout* $x_0 \in X$ *donné, la suite d'itérations* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *donnée par*

$$x_n = T(x_{n-1}) = T^n(x_0), \qquad n = 1, 2, ... \tag{3.1.1}$$

est appelée ***la suite des approximations successives avec valeur initiale*** x_0, *on l'appelle aussi* ***l'itération de Picard.***

Nous sommes intéréssés par l'obtention des conditions (supplémentaires) sur T, K et X aussi général que possible, et qui devrait garantir la convergence (forte) des itérations $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ au point fixe de T en K.

3.2 Itération de Kransnoselskii

Nous la définissons dans un espace normé réel $(X, \|.\|)$.

Définition 3.2.1 *Soit* $T : X \rightarrow X$ *une application,* $x_0 \in X$ *et* $\lambda \in [0, 1]$. *La suite* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *donnée par*

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)\ x_n + \lambda T\ x_n, \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{3.2.1}$$

est appelée ***l'itération de Krasnoselskii.*** *Elle est notée par* $\mathcal{K}_n(x_0, \lambda, T)$.

À partir de l'égalité (3.2.1) lorsque $\lambda = 1$, l'itération de Krasnoselskii se réduit à l'itération de Picard. Dans ce travail, l'itération de Picard est étudiée en relation avec un type de contractivité stricte tandis que celle de Krasnoselskii, elle est associée à des conditions de type lipschitzien et pseudo contractif. Les théorèmes énoncés dans cette partie sont faits pour montrer l'existence de points fixes pour les processus itératifs de Picard et de Krasnoselskii.

Nous avons déja énoncé le principe de l'application contractante. Ceci est reformulé ici sous une forme étendue. Ce résultat fondamental dans la théorie métrique du point fixe est généralement appelé théorème de Banach ou théorème de Picard-Cacccioppoli ou encore théorème de l'application contractante (principe).

Théorème 3.2.1 ***(Principe de l'application contractante)*** *Soit* (X, d) *un espace métrique complet et soit* $T : X \rightarrow X$ *une a-contraction, qui est un opérateur satisfaisant*

$$d(Tx, Ty) \leq ad(x, y), \text{ pour tout } x, y \in X \tag{3.2.2}$$

avec $a \in [0, 1[$ *fixé. Alors*

1. T *admet un unique point fixe, tel que* $F_T = \{x^*\}$;

2. *L'itération de Picard associée à* T; *i.e. la suite* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *définie par*

$$x_n = T(x_{n-1}) = T^n(x_0) \qquad n = 1, 2, ... \tag{3.2.3}$$

converge vers x^*, *pour toute estimation initiale* $x_0 \in X$;

3. *Les estimations d'erreur a priori et a posteriori sont respectivement données par*

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{a^n}{1-a}.d(x_0, x_1), \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{3.2.4}$$

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{a}{1-a}.d(x_{n-1}, x_n), \qquad n = 1, 2, ... \tag{3.2.5}$$

4. *Le taux de convergence est donné par*

$$d(x_n, x^*) \leq ad(x_{n-1}, x_n), \qquad n = 1, 2, ... \tag{3.2.6}$$

Preuve. Il y a au plus un point fixe, c'est-à-dire, $F_T \leq 1$. En effet, en supposant que $x^*, y^* \in F_T, \ x^* \neq y^*$, nous obtenons la contradiction

$$d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) \leq ad(x^*, y^*) < d(x^*, y^*), \text{ dès que } 0 \leq a < 1.$$

Pour prouver l'existence d'un point fixe. Nous montrerons que, pour tout $x_0 \in X$ donné, l'itération de Picard est une suite de Cauchy. Notez que par l'inégalité (3.1.1) nous avons

$$d\left(x_2, x_1\right) = d\left(Tx_1, Tx_0\right) \leq ad\left(x_1, x_0\right),$$

et par induction

$$d\left(x_{n+1}, x_n\right) \leq a^n d\left(x_1, x_0\right), \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{3.2.7}$$

Ainsi, pour tout $n, p \in \mathbb{N},\ p > 0$, nous avons

$$d\left(x_{n+p}, x_n\right) \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} d\left(x_{k+1}, x_k\right) \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} a^k.d\left(x_1, x_0\right) \leq \frac{a^n}{1-a}.d\left(x_1, x_0\right). \tag{3.2.8}$$

Lorque $0 \leq a < 1$, Il en résulte que $a_n \to 0$ (quand $n \to \infty$), qui avec l'inégalité (3.2.8) montre que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ est une suite de Cauchy. Mais (X, d) est un espace métrique complet. Pour celà, la suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge vers un certain $x^* \in X$.

D'autre part, toute application lipschitzienne est continue. On a donc

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x^*,$$

on trouve

$$x^* = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = \lim_{n \to \infty} T\left(x_n\right) = T\left(\lim_{n \to \infty} x_n\right) = Tx^*,$$

qui donne $x^* = Tx^*$, i.e. x^* est un point fixe de T.

Celà montre que pour tout $x_0 \in X$, l'itération de Picard converge en X et sa limite est un point fixe de T.

Puisque T a au plus un point fixe, on déduit que, pour chaque choix de $x_0 \in X$, l'itération de Picard converge vers la même valeur x^*, c'est-à-dire vers le point fixe unique de T. Donc, nous avons prouvé (1) et (2).

Pour montrer (3) on utilise l'inégalité (3.2.8)

$$d\left(x_{n+p}, x_n\right) \leq \frac{a^n}{1-a}.d\left(x_0, x_1\right), \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{N}^*,$$

et la continuité de la métrique et donc, en laissant $p \to \infty$, on trouve

$$d\left(x_n, x^*\right) = d\left(x^*, x_n\right) = \lim_{n \to \infty} d\left(x_{n+p}, x_n\right) \leq \frac{a^n}{1-a}.d\left(x_0, x_1\right), \qquad n \geq 0$$

Et donc l'inégalité (3.2.8) est démontrée.

Pour obtenir l'estimation a posteriori (4), faisons remarquer que par (1) nous avons

$$d\left(x_{n+1}, x_n\right) \leq a\ d\left(x_n, x_{n-1}\right)$$

et par induction

$$d\left(x_{n+k}, x_{n+k-1}\right) \leq a^{k} d\left(x_{n}, x_{n-1}\right) \qquad k \in \mathbb{N}^{*}$$

alors

$$d\left(x_{n+p}, x_{n}\right) \leq \left(a + a^{2} + \ldots + a^{p}\right) d\left(x_{n}, x_{n-1}\right) \leq \frac{a}{1-a} d\left(x_{n}, x_{n-1}\right)$$

En laissant $p \to \infty$ dans la dernière inégalité, nous obtenons exactement (4). ■

Remarque 3.2.1 *Il est facile de voir que l'itération $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ de Krasnoselskii est exactement l'itération de Picard correspondant à l'opérateur associé*

$$T_{\lambda} = (1-\lambda) I + \lambda T, \quad I \text{ est l'opérateur identité,}$$

de plus, nous avons

$$Fix\,(T) = Fix\,(T_{\lambda})\,, \text{ pour tout } \lambda \in \left]0,1\right].$$

On sait que si T est supposé être une application non expansive, alors l'itération de Picard $\{T^n x_0\}_{x\geq 0}$ ne doit plus converger (vers un point fixe de T). En fait, en général, il ne faut pas avoir de point fixe. Pour notre travail, l'itération de Krasnoselskii sera principalement associée à l'approximation des points fixes pour les opérateurs non expansifs. Ce type de résultat est obtenu en imposant certaines conditions supplémentaires sur l'opérateur T, simultanément ou non, sur l'espace ambiant lui-même, et pour considérer une combinaison convexe de deux termes successifs de l'itération de Picard, qui a défini l'itération de Krasnoselskii.

Le résultat suivant qui est **le théorème du point fixe de Browder-Gohde-Kirk**, est connu d'être un résultat d'existence de base de point fixe pour les opérateurs non expansifs.

Théorème 3.2.2 ***(Théorème du point fixe de Browder-Gohde-Kirk)*** *Soit K un sous ensemble convexe, borné et fermé d'un espace de Hilbert H et soit $T : K \to K$ un opérateur non expansif. Alors, T admet au moins un point fixe.*

Preuve. Pour l'élèment de point fixe v_0 de K et un nombre s avec $0 < s < 1$, on note

$$U_s\,(x) = (1-s)\, v_0 + sT\,(x)\,, \qquad x \in K.$$

Puisque K est convexe et fermé, on déduit que $U_s : K \rightarrow K$ est une $s-$contraction et admet un point fixe unique u_s (d'après le principe de l'application contractante). D'autre part, puisque K est fermé, convexe et borné dans un espace de Hilbert H, il est faiblement compact. Par conséquent, nous pouvons trouver une suite $\{s_j\}$ dans $]0,1[$ telle que $s_j \rightarrow 1$ $(j \rightarrow \infty)$ et $u_j \rightarrow u_{sj}$ converge faiblement vers un élèment p de H.

Puisque K est fermé, p se trouve en K. Nous prouverons que p est un point fixe de T.

Si u est un point arbitraire dans H, nous avons

$$\|u_j - u\|^2 = \|(u_j - p) + (p - u)\|^2 = \|u_j - p\|^2 + \|p - u\|^2 + 2\langle u_j - p, p - u\rangle,$$

ou

$$2\langle u_j - p, p - u\rangle \rightarrow 0 \qquad (\text{quand } \ j \rightarrow \infty),$$

Puisque $(u_j - p)$ converge faiblement vers zéro dans H. De plus, puisque $s_j \rightarrow 1$ et $U_{sj}u_j = u_j$, nous avons

$$\begin{aligned} Tu_j - u_j &= [s_j Tu_j + (1 - s_j)v_0] - u_j + (1 - s_j)[Tu_j - v_0] \\ &= (U_{sj}u_j - u_j) + (1 - s_j)(Tu_j - v_0) \\ &= 0 + (1 - s_j)(Tu_j - v_0) \rightarrow 0 \qquad (\text{quand } j \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

Définissons $u = Tp$ ci-dessus, nous obtenons

$$\lim_{j\rightarrow\infty}\left(\|u_j - Tp\|^2 - \|u_j - p\|^2\right) = \|p - Tp\|^2.$$

D'autre part, puisque T est non-expansif, on obtient

$$\|Tu_j - Tp\| \leq \|u_j - p\|$$

et donc

$$\|u_j - Tp\| \leq \|u_j - Tu_j\| + \|Tu_j - Tp\| \leq \|u_j - Tu_j\| + \|u_j - Tp\|$$

Ainsi

$$\limsup\left(\|u_j - Tp\| - \|u_j - p\|\right) \leq \lim_{j\rightarrow\infty}\|u_j - Tu_j\| = 0$$

Et, en raison de la bornitude de K, nous avons également

$$\limsup\left(\|u_j - Tp\|^2 - \|u_j - p\|^2\right) = \limsup\left(\|u_j - Tp\| - \|u_j - p\|\right)\left(\|u_j - Tp\| + \|u_j - p\|\right) \leq 0$$

ce qui donne

$$\|p - Tp\|^2 = 0$$

C'est-à-dire p est un point fixe de T. ■

Théorème 3.2.3 ***(Opérateur non expansif et demi compact)*** *Soit K un sous ensemble convexe, fermé et borné d'un espace de Hilbert H et $T : K \rightarrow K$ un opérateur non expansif et demi compact. Alors, l'ensemble $FixT$ est un ensemble convexe non vide, et pour tout x_0 donné de K et un nombre fixe λ avec $0 < \lambda < 1$, l'itération de Krasnoselskii $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge (fortement) vers un point fixe de T.*

Preuve. Puisque T est non expansif, par le théorème 3.2.2, T a un point fixe dans K, c'est-à-dire $F_T \neq \varnothing$. En outre, F_T est convexe, c'est-à-dire lorsque $x, y \in F_T$ et $\lambda \in [0, 1]$, nous avons

$$u_\lambda = (1 - \lambda) x + \lambda y \in F_T$$

En effet, nous avons

$$\|Tu_\lambda - x\| = \|Tu_\lambda - Tx\| \leq \|u_\lambda - x\| \quad \text{et} \quad \|Tu_\lambda - y\| \leq \|u_\lambda - y\|,$$

Ce qui implique que

$$\|x - y\| \leq \|x - Tu_\lambda\| + \|Tu_\lambda - y\| \leq \|x - y\|$$

Celà montre que pour certains $a, \ b$ avec $0 \leq a, \ b \leq 1$, nous avons

$$x - Tu_\lambda = a (x - u_\lambda) \ \text{ et } y - Tu_\lambda = b (y - u_\lambda)$$

D'où il en résulte que $Tu_\lambda = u_\lambda \in F_{T.}$

Pour tout $x_0 \in K$, la suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ donnée par (3.2.1) se trouve dans K et est bornée. Soit p un point fixe de T, et donc de U_λ donné par

$$U_\lambda = (1 - \lambda) I + \lambda T \qquad (I = \text{l'application identité}). \tag{3.2.9}$$

On montre d'abord que la suite $\{Tu_n - u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge fortement vers zéro. En effet

$$x_{n+1} - p = (1 - \lambda) x_n + \lambda T x_n - p = (1 - \lambda) (x_n - p) + \lambda T x_n - p.$$

ensuite

$$\|x_n - p\|^2 = (1 - \lambda)^2 \|x_n - p\|^2 + \lambda^2 \|Tx_n - p\|^2 + 2\lambda (1 - \lambda) \langle Tx_n - p, x_n - p\rangle$$

et

$$a^2 \|x_n - Tx_n\|^2 = a^2 \|x_n - p\|^2 + a^2 \|Tx_n - p\|^2 - 2a^2 \langle Tx_n - p, x_n - p\rangle$$

Par conséquent, en ajoutant les côtés correspondants des deux inégalités précédentes et en utilisant le fait que T est non expansif et $Tp = p$, on obtient

$$\|x_n - p\|^2 + a^2 \|x_n - Tx_n\|^2 \le \left[2a^2 + \lambda^2 + (1-\lambda)^2\right] \|x_n - p\|^2 + 2\left[\lambda(1-\lambda) - a^2\right] \langle Tx_n - p, x_n - p\rangle$$

Si on choisit a tel que $a^2 \le \lambda(1-\lambda)$ alors d'après l'inégalité précédente, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\|^2 + a^2 \|x_n - Tx_n\|^2 &\le \left(2a^2 + \lambda^2 + (1-\lambda)^2 + 2\lambda(1-\lambda) - a^2\right) \|x_n - p\|^2 \\ &= \|x_n - p\|^2 \end{aligned}$$

On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\langle Tx_n - p, x_n - p\rangle \le \|Tx_n - p\| \|x_n - p\| \le \|x_n - p\|^2$$

Laissant $a^2 = \lambda(1-\lambda) > 0$ et en additionnant l'inégalité obtenue

$$a^2 \|x_n - Tx_n\|^2 \le \|x_n - p\|^2 - \|x_{n+1} - p\|^2$$

Pour $n = 0$ à $n = N$ on obtient

$$\begin{aligned} \lambda(1-\lambda) \sum_{n=0}^{N} \|x_n - Tx_n\|^2 &\le \sum_{n=0}^{N} \left[\|x_n - p\|^2 - \|x_{n+1} - p\|^2\right] \\ &= \|x_0 - p\|^2 - \|x_{N+1} - p\|^2 \le \|x_0 - p\|^2 \end{aligned}$$

qui montre que $\sum_{n=0}^{N} \|x_n - Tx_n\|^2 < \infty$ et donc $\|x_n - Tx_n\| \to 0$, quand $n \to \infty$.

Comme T est demi compact, il en résulte qu'il existe une sous-suite fortement convergente $\{x_{ni}\}$ telle que $x_{ni} \to p \in F_T$; Puisque T est non expansif, $Tx_{ni} \to Tp$ et $Tp \to p$.

La convergence de toute suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ vers p découle de l'inégalité $\|x_{n+1} - p\| \le \|x_n - p\|$, qui est déduite du fait que T est non expansif et est valable pour chaque n. ■

3.3 Itération de Mann

Pour obtenir des points fixes pour certaines cartes pour lesquelles l'itération de Picard échoue, un nombre de procédures d'itération de point fixe ont été développé, comme **la méthode d'itération de Mann** développée en 1953.

Définition 3.3.1 *Pour $x_0 \in K$ et $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ une suite dans $[0,1]$, la suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ définie par*

$$x_{n+1} = (1-a_n)x_n + a_n Tx_n, \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

est appelée ***itération de Mann****. Elle est notée par* $\mathcal{M}_n(x_0, a_n, T)$.

Si on considère

$$T_n = (1 - a_n)\, I + a_n\, T,$$

alors nous avons $Fix\,(T) = Fix\,(T_n)$, *pour tout* $a_n \in \left]0, 1\right]$.

Remarque 3.3.1 *Si la suite* $a_n = \lambda$ *(const), alors la procédure itérative de Mann se réduit évidemment à l'itération de Krasnoselskii.*

Il existe beaucoup de littérature sur la convergence de l'itération de Mann pour différentes classes d'opérateurs considérées dans différents espaces.

Théorème 3.3.1 ***(Opérateurs pseudo contractifs généralisés)*** *Soit* K *un sous ensemble convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert* H *et soit* $T : K \;\to\; K$ *un opérateur pseudo contractif généralisé lipschitzien avec les constantes correspondantes* $L > 0$ *et* $r > 0$ *satisfaisant*

$$0 < r < 1 \text{ et } r \leq L. \tag{3.3.1}$$

Alors

(i) T *a un unique point fixe* p *dans* K;

(ii) *L'itération de Krasnoselskij* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = \mathcal{K}_n\,(x_0, \lambda, T)$ *converge fortement vers un point fixe* p, *pour tout* $x_0 \in K$ *et* $\forall \lambda \in \left]0, a\right[\cap \left]0, 1\right[$, *où*

$$a = \frac{2(1-r)}{1 - 2r + L^2}. \tag{3.3.2}$$

Théorème 3.3.2 *Soit* H *un espace Hilbert et* K *un sous ensemble convexe fermé non vide de* H, *soit* $T : K \;\to\; K$ *un opérateur pseudo contractif généralisé lipschitzien avec les constantes correspondantes* $L > 1$ *et* $r > 0$. *Soit* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *une suite croissante dans* $[0, 1]$ *telle que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty \tag{3.3.3}$$

Alors

(i) T *a un unique point fixe* p *dans* K;

(ii) L'itération de Mann $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = \mathcal{M}_n(y_0, a_n, T)$ *converge fortement vers un point fixe* p, *pour tout* $y_0 \in K$ *et* $\forall t \in \left]0, a\right[$ *satisfaisant*

$$0 \leq (1-t)^2 - 2t(1-t)r + t^2L^2 < 1$$

Où

$$a = \frac{2(1-r)}{1-2r+L^2}.$$

Remarque 3.3.2 *Le théorème 3.3.1 a été obtenu sous les hypothèses $r < 1$ et $L \geq 1$. Ainsi dans ce qui suit nous supposerons que la constante de lipschitz r et la constante de la pseudo contractivité généralisée L remplissent les conditions*

$$0 < r < 1 \text{ et } r < L.$$

Proposition 3.3.1 ***(Opérateur fortement pseudo contractif)*** *Soit X un espace de Banach, K un sous ensemble de X, et $T : K \rightarrow K$ un opérateur fortement pseudo contractif, alors il existe un nombre $t > 1$ tel que l'inégalité*

$$\|x-y\| \leq \|(1+r)(x-y) - rt(Tx-Ty)\| \tag{3.3.4}$$

existe pour tout $x, y \in K$ et $r > 0$.

On a déja déclaré précédemment, qu'une application est fortement pseudo contractive si $(I-T)$ est une application fortement accrétive,i.e. il existe $j(x-y) \in J(x-y)$ et un nombre positif k tel que

$$\langle (I-T)x - (I-T)y, j(x-y) \rangle \geq k\|x-y\|^2 \tag{3.3.5}$$

$$\|x-y\| \leq \|x-y+r[(I-T-kI)x - (I-T-kI)y]\| \tag{3.3.6}$$

équivalent au fait que la prochaine inégalité existe pour tout $x, y \in K$ et pour tout $r > 0$ $\left(\text{ou } k = \frac{t-1}{t}\right)$.

En fonction de la forme (3.3.6) de la forte propriété de pseudo contractivité, on peut prouver que le processus d'itération de Mann converge fortement vers le point fixe unique d'un opérateur lipschitzien et fortement pseudo contratif.

Théorème 3.3.3 *Soit X un espace de Banach et K un sous ensemble non vide, fermé, convexe et borné de X. Si $T : K \rightarrow K$ est un opérateur fortement pseudo contractif lipschitzien tel que l'ensemble de points fixes de T, F_T est non vide, alors l'itération de Mann $\{x_n\} \subset K$ générée par $x_1 \in K$ et la suite $\{a_n\} \subset]0,1]$, avec $\{a_n\}$ satisfaisant*

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$

(ii) $a_n \to 0$ *(quand* $n \to \infty)$,

converge fortement vers un unique point fixe de T.

Preuve. Soit p un point fixe de T. Puisqu'il s'agit d'une application pseudo contractive, $(I - T)$ est fortement accretive, c'est-à-dire que l'inégalité (3.3.6) est valable pour tout $x, y \in K$ et $r > 0$. Soit $L > 0$ la constante de lipschitz. Alors, de la définition de $\{x_n\}$

$$x_{n+1} = (1 - a_n) x_n + a_n T\, x_n, \qquad n = 1, 2, ... \tag{3.3.7}$$

et donc nous avons

$$\begin{aligned}
x_n &= x_{n+1} + a_n\, x_n - a_n T\, x_n \\
&= (1 + a_n) x_{n+1} + a_n (1 - T - kI)\ x_{n+1} - (2 - k) a_n\ x_{n+1} + a_n\ x_n + a_n\ (Tx_{n+1} - Tx_n) \\
&= (1 - a_n) x_{n+1} + a_n (1 - T - kI)\ x_{n+1} - (2 - k) a_n [(1 - a_n) x_n + a_n T\, x_n] + a_n\ x_n + \\
&\quad + a_n (Tx_{n+1} - Tx_n) \\
&= (1 + a_n) x_{n+1} + a_n (1 - T - kI)\ x_{n+1} - (1 - k) a_n\ x_n + (2 - k) a_n^2 (x_n - T\, x_n) + \\
&\quad + a_n (Tx_{n+1} - Tx_n).
\end{aligned}$$

Comme $Tp = p$, nous avons

$$\begin{aligned}
x_n - p &= (1 + a_n)(x_{n+1} - p) + a_n (1 - T - kI)\ (x_{n+1} - p) - (1 - k) a_n\ (x_n - p) + \\
&\quad + (2 - k) a_n^2 (x_n - T\, x_n) + a_n\ (Tx_{n+1} - Tx_n)
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (3.3.6), on obtient

$$\|x_n - p\| \geq (1 + a_n) \|x_{n+1} - p\| - (1 - k) a_n\ \|x_n - p\| - (2 - k) a_n^2 \|x_n - T\, x_n\| - a_n\ \|Tx_{n+1} - Tx_n\|$$

Puisque T est lipschitzien, il s'ensuit que

$$\|Tx_{n+1} - Tx_n\| \leq L \|x_{n+1} - x_n\| \leq L (L + 1) a_n\ \|x_n - p\|,$$

et alors

$$\|x_n - p\| \geq (1 + a_n) \|x_{n+1} - p\| - (1 - k) a_n\ \|x_{n+1} - p\| - (2 - k) a_n^2 \|x_n - T\, x_n\| - L (L + 1) a_n^2\ \|x_n - p\|$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &\leq [1 + (1 - k) a_n] (1 + a_n)^{-1} \|x_n - p\| + (2 - k) a_n^2 (1 + a_n)^{-1} \|x_n - Tx_n\| + \\
&\quad L (L + 1) a_n^2\ (1 + a_n)^{-1} \|x_n - p\| \\
&\leq [1 + (1 - k) a_n] \left(1 - a_n + a_n^2\right) + L (L + 1) a_n^2 \|x_n - p\|
\end{aligned}$$

et nous obtenons

$$\|x_{n+1} - p\| \leq (1 - ka_n) \|x_n - p\| + Ma_n^2,$$

Pour une constante $M > 0$, compte tenu du fait que K est borné.

En utilisant la partie (ii) du lemme précédent, il s'ensuit que la suite $\{\|x_n - p\|\}$ converge vers 0, c'est-à-dire que $\{x_n\}$ converge fortement vers le point fixe (unique) p de T. ■

Une classe importante d'applications quasi contractives, qui est indépendante de la classe des applications strictement pseudo contractives, est la classe des *applications de Zamfirescu.*

Nous avons prouvé que, pour toute les applications de Zamfirescu T considérées sur un espace métrique complet, l'itération de Picard converge vers le point fixe unique de T.

Nous montrons maintenant que dans un espace ambiant plus particulier, l'itération de Mann converge également.

Théorème 3.3.4 ***(Opérateurs de type quasi contractifs)*** *Soit X un espace de Banach uniformément convexe, K un sous ensemble convexe fermé de X et $T : K \rightarrow K$ une application de Zamfirescu. Ensuite, l'itération de Mann $\{x_n\}$,*

$$x_{n+1} = (1 - a_n) x_n + a_n \, T \, x_n, \qquad n = 1, 2, ... \tag{3.3.8}$$

avec $\{a_n\}$ satisfaisant aux conditions

(i) $a_n = 1$;

(ii) $0 \leq a_n < 1$, *pour tout* $n > 1$ *et*

(iii) $\sum a_n (1 - a_n) = \infty$,

converge vers le point fixe de T.

Preuve. T a un point fixe unique dans K. On le note p.

Pour tout $x_1 \in K$, nous avons

$$\|x_{n+1} - p\| \leq (1 - a_n) \|x_n - p\| + a_n \|Tx_n - p\|.$$

Comme toute application de Zamfirescu est quasi contractive, nous en déduisons que

$$\|Tx_n - p\| \leq \|x_n - p\|,$$

Ce qui montre que la suite $\{\|x_n - p\|\}$ décroit. Nous avons aussi

$$\|x_n - Tx_n\| = \|(x_n - p) - (Tx_n - p)\| \leq 2\,\|(x_n - p)\|$$

Maintenant, supposons qu'il existe un nombre $a > 0$ tel que $\|x_n - p\| \geq a$ pour tout n.

Supposons que $\{\|x_n - Tx_n\|\}_{n\geq 1}$ ne converge pas vers zéro. Ensuite, il existe deux possibilités: soit il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $\|x_n - Tx_n\| \geq \varepsilon$ ou $\liminf \|x_n - Tx_n\| = 0$.

1. Dans le premier cas, en utilisant le lemme de Groetsch avec $b = 2\delta\left(\frac{\varepsilon}{\|x_0 - p\|}\right)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\| &\leq ((1 - a_n(1 - a_n)\,b))\,\|x_n - p\| \\ &\leq \|x_{n-1} - p\| - a_{n-1}(1 - a_{n-1})\,b\,\|x_n - p\| - ba_n(1 - a_n)\,\|x_n - p\| \\ &\leq \|x_{n-1} - p\| - b\,[a_{n-1}(1 - a_{n-1}) + a_n(1 - a_n)]\,\|x_n - p\| \end{aligned}$$

Par induction on obtient

$$a \leq \|x_{n+1} - p\| \leq \|x_0 - p\| - b\sum_{k=1}^{n} a_k(1 - a_k)\,\|x_n - p\|$$

À cet effet

$$a\left[1 + b\sum_{k=1}^{n} a_k(1 - a_k)\right] \leq \|x_n - p\|\,, \quad \text{ce qui contredit (iii)}$$

Dans le second cas, il existe une sous suite $\{x_{n_k}\}$ telle que

$$\lim_{k\to\infty} \|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| = 0 \tag{3.3.9}$$

Si $x_{n_k},\ x_{n_l}$ satisfont (z_1), c'est-à-dire

$$\|Tx_{n_k} - Tx_{n_l}\| \leq \alpha\,\|x_{n_k} - x_{n_l}\|\,,$$

ainsi

$$\|Tx_{n_k} - Tx_{n_l}\| \leq \alpha\,[\|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| + \|Tx_{n_k} - Tx_{n_l}\| + \|Tx_{n_l} - x_{n_l}\|]$$

et donc

$$\|Tx_{n_k} - Tx_{n_l}\| \leq \alpha\,(1 - \alpha)^{-1}\,[\|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| + \|Tx_{n_l} - x_{n_l}\|]$$

et si $x_{n_k},\ x_{n_l}$ satisfont (z_2), alors

$$\|Tx_{n_k} - Tx_{n_l}\| \leq \beta\,[\|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| + \|x_{n_l} - Tx_{n_l}\|]\,.$$

et si $x_{n_k},\ x_{n_l}$ satisfont (z_3), alors

$$\|Tx_{n_k} - Tx_{n_l}\| \leq \gamma\left[\|x_{n_k} - Tx_{n_l}\| + \|x_{n_l} - Tx_{n_k}\|\right]$$

Ce qui donne

$$\|Tx_{n_k} - Tx_{n_l}\| \leq \gamma\,(1-2\gamma)^{-1}\left[\|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| + \|x_{n_l} - Tx_{n_l}\|\right],$$

Par conséquent, dans tous les cas, $\{Tx_{n_k}\}$ est une suite de Cauchy et donc convergente.

Soit u sa limite. De (3.3.9), il en résulte

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to\infty} Tx_{n_k} = u$$

De plus,

$$\|u - Tu\| \leq \|u - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| + \|Tx_{n_k} - Tu\|.$$

Nous montrerons que $u = Tu$, c'est-à-dire, u est un point fixe de T. En effet, si x_{n_k}, u satisfont (z_1), alors

$$\|Tx_{n_k} - Tu\| \leq \alpha\,\|x_{n_k} - u\|.$$

Si x_{n_k}, u satisfont (z_2), alors

$$\|Tx_{n_k} - Tu\| \leq \beta\left[\|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| + \|u - Tu\|\right]$$

qui conduit à

$$\|u - Tu\| \leq \left[\|u - x_{n_k}\| + (1+\beta)\,\|x_{n_k} - Tx_{n_k}\|\right] \big/ (1-\beta)$$

et, finalement, si x_{n_k}, u satisfont (z_3), alors

$$\begin{aligned}\|Tx_{n_k} - Tu\| &\leq \gamma\left[\|x_{n_k} - Tu\| + \|u - Tx_{n_k}\|\right]\\ &\leq \gamma\left[\|x_{n_k} - Tu\| + \|Tx_{n_k} - Tu\| + \|u - Tx_{n_k}\|\right]\end{aligned}$$

ou

$$\|Tx_{n_k} - Tu\| \leq \gamma\,(1-\gamma)^{-1}\left[\|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| + \|u - Tx_{n_k}\|\right].$$

Par conséquent $u = Tu$.

Puisque p est l'unique point fixe de T, il en résulte que $p = u$, et donc les deux conditions $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = u = p$ et $\{\|x_n - p\|\}$ décroient par rapport à n et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = p$. ■

Remarques 3.3.3 .

1. *En considérant que toute application de Kannan est une application de Zamfirescu, du théorème 3.3.4, nous obtenons la convergence de l'itération de Mann, dans la classe des applications de Kannan;*

2. *Comme les deux itérations Picard et celle de Krasnoselskii convergent dans la classe des applications de Zamfirescu, il est naturel d'essayer de comparer ces méthodes pour savoir laquelle converge plus rapidement vers le point fixe (unique) de T. Cependant, ces résultats n'ont pas été réalisés dans ce travail.*

Théorème 3.3.5 *Soit H un espace de Hilbert réel et K un sous ensemble convexe fermé non vide de H. Soit T un opérateur pseudo contratif généralisé lipschitzien avec des constantes correspondantes $L \geq 1$ et $0 < r < 1$*

Alors :

1. *T admet un unique point fixe p dans K;*

2. *Pour tout $x_0 \in K$ et $\lambda \in]0, a[$ ou a est donné par (3.3.2), l'itération de Krasnoselskii $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = \mathcal{K}_n(x_0, \lambda, T)$ converge fortement vers p;*

3. *Pour tout $y_0 \in K$ et $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ dans $[0,1]$ satisfaisant (3.3.3), l'itération de Mann $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = \mathcal{M}_n(y_0, a_n, T)$ converge fortement vers p;*

4. *Pour toute itération de Mann convergeant vers p, avec $0 \leq a_n \leq b < 1$, il existe une itération de Krasnoselskii qui converge plus vite vers p.*

Preuve. .

$1) - 2)$ Pour tout $\lambda \in [0,1]$, on considère l'opérateur T_λ sur K donné par

$$T_\lambda x = (1-\lambda)\, x + \lambda T x, \qquad x \in K \tag{3.3.10}$$

Comme K est convexe, nous avons $T_\lambda(K) \subset K$, pour tout $\lambda \in [0,1]$.

Des conditions pseudo contractives et lipschitziennes généralisées sur T et

$$\begin{aligned} \|T_\lambda x - T_\lambda y\|^2 &= \|(1-\lambda)(x-y) + \lambda (Tx, Ty)\|^2 \\ &= (1-\lambda)^2 \|(x-y)\|^2 + 2\lambda(1-\lambda) . \langle Tx - Ty, x - y\rangle + \lambda^2 . \|Tx - Ty\|^2 \end{aligned}$$

on trouve que

$$\|T_\lambda x - T_\lambda y\|^2 \leq \left[(1-\lambda)^2 + 2\lambda(1-\lambda) r + \lambda^2 L^2\right] \|(x-y)\|^2,$$

alors

$$\|T_\lambda x - T_\lambda y\| \leq \theta . \|x-y\|, \quad \text{pour tout } x, y \text{ dans } K, \tag{3.3.11}$$

où

$$0 < \theta = \left[(1-\lambda)^2 + 2\lambda(1-\lambda) r + \lambda^2 L^2\right]^{\frac{1}{2}} < 1, \ \lambda < a.$$

Puisque K est un sous ensemble fermé d'un espace de Hilbert, Kest un espace métrique complet. Ensuite, par le principe de contraction de Banach, T_λ a un point fixe unique q en K et l'itération de Picard associée à T_λ

$$x_{n+1} = T_\lambda x_n, \qquad n \geq 0, \tag{3.3.12}$$

converge fortement en q, pour tout $x_0 \in K$.

En utilisant maintenant le fait que $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ donnée par (3.2.1) est exactement l'itération de Krasnoselskii associée à T, d'une part, et le fait que $F(T) = F(T_\lambda)$, pour tout $\lambda \in]0,1[$, c'est $p = q$ le point fixe unique de T, d'autre part, nous obtenons 1) et 2).

3) Soit $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ l'itération de Mann avec $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty \subset [0,1]$ satisfaisant (3.3.3).

On considère t, $0 < t < 1$, et notons $a_n = \frac{1}{t}\alpha_n, \ n = 0, 1, 2, ...$

Ensuite, l'itération de Mann sera donnée par

$$y_{n+1} = (1 - t a_n) y_n + t a_n T y_n, \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

nous avons

$$\begin{aligned} \|y_{n+1} - p\| &= \|(1-a_n) y_n + a_n [(1-t) y_n + t T y_n] - p\| \\ &\leq (1-a_n)\|y_n - p\| + a_n \|(1-t)(y_n - p) + t(Ty_n - Tp)\| \end{aligned} \tag{3.3.13}$$

En utilisant les propriétés de T on trouve que

$$\|t(Ty_n - Tp) + (1-t)(y_n - p)\|^2 = (1-t)^2 \|y_n - p\|^2 + 2t(1-t) . \langle Ty_n - p, y_n - p\rangle + t^2 \|Ty - p\|^2 \tag{3.3.14}$$

Par (3.3.13) et (3.3.14) on aura

$$\begin{aligned} \|y_{n+1} - p\| &\leq \left[1 - a_n + a_n \left[(1-t)^2 + 2t(1-t) r + t^2 L^2\right]^{\frac{1}{2}}\right] . \|y_n - p\| \\ &= (1 - (1-\theta) a_n) . \|y_n - p\| \end{aligned}$$

$$\leq \prod_{k=1}^{n} (1 - (1 - \theta) a_k) . \|y_k - p\| \tag{3.3.15}$$

où

$$0 \leq \theta = \left[(1-t)^2 + 2t(1-t)r + t^2 L^2\right]^{\frac{1}{2}} < 1,$$

pour tout t tel que $0 < t < \frac{2(1-r)}{(1-2r+L^2)}$.

Puisque par (3.3.3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ diverge, il 'ensuit que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, aussi, et en vue de $\theta < 1$, nous obtenons cela

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} (1 - (1-\theta) a_k) = 0,$$

qui par (3.3.15) montre que y_n converge fortement en p.

4) Prenons $x = x_n,\ y = y_n$ dans (3.3.11) pour obtenir

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \theta \|x_n - x_{n-1}\|$$

qui produit inductivement

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \theta^n \|x_1 - x_0\|$$

Et donc par l'inégalité triangulaire, nous obtenons

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \theta^n \left(1 + \theta + ... + \theta^{p-1}\right) \|x_1 - x_0\| , \tag{3.3.16}$$

valable pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$

en passant à la limite $p \to \infty$ dans (3.3.16) et en utilisant la partie 2), nous obtenons

$$\|x_n - x^*\| = \frac{\theta^n}{1-\theta} \|x_1 - x_0\| \tag{3.3.17}$$

Par conséquent, en vue de (3.3.15) et (3.3.17), afin de comparer les itérations de Krasnoselskii et de Mann, nous devons comparer

$$\theta^n \text{ et } \prod_{k=1}^{n} (1 - (1-\theta) a_k)$$

Soit $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ une certaine itération de Mann convergeant vers p, avec $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ satisfaisant $0 \leq \alpha_n \leq b < 1$. Ensuite, $a_k \leq \frac{b}{t}$ (notons $\frac{b}{t} = b$) et pour tout m, $0 < m < 1$, on trouve $\theta \in \left]0, 1\right[$ tel que

$$b < \frac{1 - \left(\frac{\theta}{m}\right)}{1-\theta}.$$

En effet, à cette fin, il suffit de prendre $\theta < \frac{m(1-b)}{1-bm}$.

En utilisant le fait que $a_k \leq b$, il en résulte

$$\frac{\theta}{1-(1-\theta)\,a_k} \leq m < 1,$$

qui montre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left[1-(1-\theta)\,a_k\right]} \leq \lim_{n\to\infty} m^n = 0,$$

L'itération de Krasnoselskii $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = \mathcal{K}_n\left(x_0, \theta, T\right)$ converge plus rapidement que l'itération de Mann considérée, $\{y_n\}_{n=0}^{\infty} = \mathcal{M}_n\left(y_0, a_n, T\right)$.

Pour terminer,nous devons encore montrer que les intervalles $]0, a[$ avec a donné par (3.3.2) et $\left]0, \frac{m(1-b)}{1-m}\right[$ ont une intersection non vide. Mais c'est immédiat, puisque $\frac{m(1-b)}{1-m} > 0$ et $0 < a = \frac{2(1-r)}{1-2r+L^2} \leq 1$, sous les hypothèses du théorème de l'opérateur pseudo contractif généralisé lipschitzien. ■

3.4 Itération d'Ishikawa

Ishikawa a développé une autre méthode d'itération en **1974.**

Définition 3.4.1 *Pour $x_0 \in K$, la suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ définie par*

$$x_{n+1} = (1-a_n)\,x_n + a_n T\left[(1-b_n)\,x_n + b_n.Tx_n\right] \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{3.4.1}$$

*où $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ et $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ sont des suites réels satisfaisants $0 \leq a_n,\ b_n \leq 1$, est appelée **itération d'Ishikawa.** Elle est notée par $I(x_0, a_n, b_n, T)$.*

L'équation (3.4.1) peut être réécrite sous forme d'un systéme

$$\begin{cases} y_n = (1-b_n)\,x_n + b_n.Tx_n & n = 0, 1, 2, .. \\ x_{n+1} = (1-a_n)\,x_n + a_n.Ty_n & n = 0, 1, 2, ... \end{cases} \tag{3.4.2}$$

Remarques 3.4.1 .

1. *La partie* 4) *dans le théorème 3.3.5 montre que, pour approximer les points fixes d'un opérateur lipschitzien et pseudo contratif T, il est toujours plus commode d'utiliser une certaine itération de Krasnoselskii dans la famille* (2.4) *avec $\lambda \in\,]0, a[$ et a est donné par* (3.3.2).

2. *De plus, parmi les itérations de Krasnoselskii* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, *il en existe une qui est la plus rapide dans cette famille au sens de la définition 3.0.2.*

Théorème 3.4.1 *Soit* K *un sous ensemble compact d'un hilbert* H, $T : K \rightarrow K$ *une application lipschitzienne et pseudo contractive et* $x_1 \in K$. *Alors l'itération d'Ishikawa* $\{x_n\}$, $x_n = \mathcal{I}(x_1, a_n, b_n, T)$, *i.e. la suite définie par*

$$x_{n+1} = (1 - a_n) x_n + a_n T [(1 - b_n) x_n + b_n.Tx_n] \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

Où $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *sont des suites de nombres positifs satisfaisant*

(i) $0 \leq a_n \leq b_n \leq 1, \; n \geq 1$;

(ii) $\lim\limits_{n\rightarrow\infty} b_n = 0$;

(iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \infty$.

converge fortement vers un point fixe p *de* T.

Preuve. Puisque T est pseudo contractive, pour tout $x, y \in K$ nous avons

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 + \|(I - T)x - (I - T)y\|^2 \tag{3.4.3}$$

Où I est l'application identité .

En supposant que$T$ est lipschizienne, alors il existe un nombre positif L tel que

$$\|Tx - Ty\| \leq L \|x - y\|, \qquad \forall x, y \in K. \tag{3.4.4}$$

Puisque K est un ensemble compact convexe et que T est continue (étant lipschitizienne) grâce au théoréme du point fixe de Schauder, on obtient que l'ensemble des points fixes de T, $F(T)$ est non vide.

Pour tout x, y, z dans un espace de Hilbert H et pour tout réel λ, nous avons

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)y - z\|^2 = \lambda \|x - z\|^2 + (1 - \lambda) \|y - z\|^2 - \lambda(1 - \lambda) \|x - y\|^2 \tag{3.4.5}$$

En utilisant (3.4.5) nous obtenons les trois égalités suivantes

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\|^2 &= \|(1 - a_n) x_n + a_n T [(1 - b_n) x_n + b_n.Tx_n] \quad - p\|^2 \\ &= a_n \|T [(1 - b_n) x_n + b_n.Tx_n]\| \quad + (1 - a_n) \|x_n - p\|^2 - \\ &\quad - a_n (1 - a_n) \|T [(1 - b_n) x_n + b_n.Tx_n] - x_n\|^2 \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

$$\|(1-b_n)\,x_n + b_n.Tx_n - p\|^2 = b_n\,\|Tx_n - p\|^2 + (1-b_n)\,\|x_n - p\|^2 - (1-a_n) - b_n(1-b_n)\,\|Tx_n - x_n\|^2 \tag{3.4.7}$$

Et respectivement

$$\begin{aligned}
\|(1-b_n)\,x_n + b_nTx_n - T\,[(1-b_n)\,x_n + b_nTx_n]\|^2 &= b_n\,\|Tx_n - T\,[(1-b_n)\,x_n + b_nTx_n]\|^2 \\
&\quad +(1-b_n) \\
&= \|x_n - T[b_nTx_n + (1-b_n)x_n]\|^2 - \\
&\quad -b_n(1-b_n)\,\|Tx_n - x_n\|^2
\end{aligned} \tag{3.4.8}$$

En appliquant (3.4.3), nous déduisons les deux inégalités suivantes

$$\begin{aligned}
\|(1-b_n)\,x_n + b_n.Tx_n - p\|^2 &= \|(1-b_n)\,x_n + b_n.Tx_n - Tp\|^2 \\
&\leq \|(1-b_n)\,x_n + b_n.Tx_n - p\|^2 + \\
&\quad + \|b_nTx_n + (1-b_n)x_n - T\,[(1-b_n)\,x_n + b_nTx_n]\|^2 .
\end{aligned}$$

et

$$\|Tx_n - p\|^2 = \|Tx_n - Tp\|^2 \leq \|x_n - p\|^2 + \|x_n - Tx_n\|^2$$

Après les calculs, on obtient

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\|^2 &\leq \|x_n - p\|^2 - a_nb_n(1-2b_n)\,\|Tx_n - x_n\|^2 + a_nb_n\,\|Tx - T[b_nTx_n + (1-b_n)x_n]\|^2 - \\
&\quad -a_n(b_n - a_n)\,\|x_n - T[b_nTx_n + (1-b_n)x_n]\|^2 \text{ Et donc,}
\end{aligned}$$

en vue de (i), il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\|x_n - p\|^2 &\leq \|x_n - p\|^2 - a_nb_n(1-2b_n)\,\|Tx_n - x_n\|^2 + \\
&\quad +a_nb_n\,\|Tx_n - T[b_nTx_n + (1-b_n)Tx_n]\|^2
\end{aligned} \tag{3.4.9}$$

Puisque T est lipschizienne, nous avons

$$\|Tx_n - T[b_nTx_n + (1-b_n)x_n]\| < Lb_n\,\|Tx_n - x_n\| \tag{3.4.10}$$

Et donc, de (3.4.9) et (3.4.10) nous en déduisons

$$\|x_{n+1} - p\|^2 \leq \|x_n - p\|^2 - a_nb_n(1-2b_n - L^2b_n^2)\,\|Tx_n - x_n\|^2 \tag{3.4.11}$$

En additionnant (3.4.11) pour $n \in \{m, m+1, ..., n\}$ nous obtenons

$$\|x_{n+1} - p\|^2 \leq \|x_n - p\|^2 - \sum_{k=m}^{n} a_k b_k (1 - 2b_k - L^2 b_k^2) \|Tx_k - x_k\|^2$$

Qui peut être écrit comme

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k (1 - 2b_k - L^2 b_k^2) \|Tx_k - x_k\|^2 \leq \|x_n - p\|^2 - \|x_{n+1} - p\|^2$$

En exploitant l'hypothèse (ii) on déduit qu'il existe un entier positif N tel que

$$2b_k + L^2 b_k^2 \leq \frac{1}{2} \text{ pour tout entier } k \geq N.$$

Alors, pour $\frac{1}{2}m > N$ nous obtenons

$$\frac{1}{2} \sum_{k=m}^{n} a_k b_k \|Tx_k - x_k\|^2 \leq \|Tx_m - p\|^2 - \|Tx_{n+1} - p\|^2 \tag{3.4.12}$$

Puisque K est borné, la quantité du côté droit dans (3.4.12) est borné. Celà signifie que la série du côté gauche converge, par (ii), il en résulte

$$\liminf_{n} \|Tx_n - x\| = 0,$$

Ce qui implique (K est compact) qu'il existe une sous-suite $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ qui converge vers certains points q de $F(T)$.

q est un point fixe de$T$, et de (3.4.11), nous obtenons pour $n \geq N$

$$\|x_{n+1} - q\| \leq \|x_n - q\|$$

C'est-à-dire que la suite $\{\|x_n - q\|\}$ décroit

Étant donné qu'il y a une sous suite $\{\|x_{n_k} - q\|\}$ convergeant à zéro, il en résulte que $\{x_n\}$ converge vers q. ■

Théorème 3.4.2 *Soit X un espace de Banach, K un sous ensemble convexe fermé, et $T : K \rightarrow K$ un opérateur de Zamfirescu.*

Soit $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ l' itération d'Ishikawa définie par

$$x_{n+1} = (1 - a_n)\, x_n + a_n T \left[(1 - b_n)\, x_n + b_n . T x_n\right]$$

et $x_0 \in K$, où $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ et $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ sont des suites positives à valeurs dans $[0, 1]$ avec $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ satisfaisant (ii), l'itération d'Ishikawa $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge fortement vers un point fixe de T.

Preuve. On sait que T a un point fixe unique p dans K .

On considère $x, y \in K$. Puisque T est un opérateur de Zamfirescu, au moins l'une des conditions $(z_1), (z_2)$ et (z_3) est satisfaite, si (z_2) est vérifie alors

$$\begin{aligned}\|Tx - Ty\| &\leq b[\|x - Tx\| + \|y - Ty\|] \\ &\leq b\left\{\|x - Tx\| + [\|y - x\| + \|x - Tx\| + \|Tx - Ty\|]\right\}\end{aligned}$$

De plus

$$(1 - b)\|Tx - Ty\| \leq b[\|x - y\| + 2b\|x - Tx\|]$$

Qui produit (en utilisant le fait que $0 \leq b < 1$)

$$\|Tx - Ty\| \leq \frac{b}{1-b}\|x - y\| + \frac{2b}{1-b}\|x - Tx\| \tag{3.4.13}$$

De même si (z_3) est vérifié, nous obtenons

$$\|Tx - Ty\| \leq \frac{c}{1-c}\|x - y\| + \frac{2c}{1-c}\|x - Tx\| \tag{3.4.14}$$

$$\delta = \max\left\{a, \frac{b}{1-b}, \frac{c}{1-c}\right\}. \tag{3.4.15}$$

ensuite nous avons $0 \leq \delta \leq 1$ et, en vue de (z), en résulte que l'inégalité

$$\|Tx - Ty\| \leq \delta\|x - y\| + 2\delta\|x - Tx\| \tag{3.4.16}$$

pour tout $x, y \in K$

Soit $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ l'itération d'Ishikawa et $x_0 \in K$, alors

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - p\| &= \|(1 - a_n)x_n + a_nTy_n - (1 - a_n + a_n)p\| \qquad (3.4.17)\\ &= \|(1 - a_n)(x_n - p) + a_n(Ty_n - p)\| \\ &\leq (1 - a_n)\|(x - p)\| + a_n\|Ty_n - p\|\end{aligned}$$

Avec $x = p$ et $y = y_n$ d'aprés (3.4.16) nous obtenons

$$\|Ty_n - p\| \leq \delta\|y_n - p\| \tag{3.4.18}$$

Où δ est donné dans(3.4.18). Nous avons encore

$$\begin{aligned}\|y_n - p\| &= \|(1 - b_n)x_n + b_nTx_n - (1 - b_n + b_n)p\| \qquad (3.4.19)\\ &= \|(1 - b_n)(x_n - p) + b_n(Tx_n - p)\| \\ &\leq (1 - b_n)\|(x_n - p)\| + b_n\|Tx_n - p\|.\end{aligned}$$

à nouveau par (3.4.16), cette fois avec $x = p$; $y = x_n$, on trouve que

$$\|Tx_n - p\| \leq \delta \|x_n - p\| \tag{3.4.20}$$

et donc, par(3.4.17) -(3.4.20) on obtient

$$\|x_n - p\| \leq [1 - (1-\delta)a_n(1-\delta b_n)] \|x_n - p\|,$$

l'inegalité

$$1 - (1-\delta)a_n(1-\delta b_n) \leq 1 - (1-\delta)^2 a_n,$$

implique

$$\|x_{n+1} - p\| \leq [1 - (1-\delta)^2 a_n] \|x_n - p\|, \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{3.4.21}$$

Par(3.4.21) nous obtenons inductivement

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \prod_{k=0}^{n} [1 - (1-\delta)^2 a_k] \|x_k - p\| \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{3.4.22}$$

En utilisant le fait que $0 \leq \delta < 1$, $a_k, b_n \in [0,1]$ et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$, par (ii) on déduit que

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} [1 - (1-\delta)^2 a_k] = 0$$

d'aprés (3.4.22)

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - p\| = 0,$$

i.e. $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge vers P. ■

Corollaire 3.4.1 *Soit X un espace de Banach, K un sous-ensemble convexe fermé de X et $T : K \to K$ un opérateur de Kannan.*

Soit $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ l'itération d'Ishikawa et $x_0 \in K$, avec $\{a_n\}, \{b_n\} \subset [0,1]$ satisfaisant (ii). Alors $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge fortement vers le point fixe de T.

Corollaire 3.4.2 *Soit X un espace Banach, K un sous ensemble convexe fermé de X, et $T : K \to K$ est un opérateur de Chatterjea , c'est-à-dire un opérateur satisfaisant*

$$d(Tx, Ty) \leq c\,[d(x, Ty) + d(y, Tx)] \text{ pour tout } x, y \in X$$

Soit $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ l'itération d'Ishikawa et $x_0 \in K$, avec $\{a_n\}, \{b_n\} \subset [0,1]$ satisfaisant (ii). Alors $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge fortement vers le point fixe de T.

Lemme 3.4.1 *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite non négative qui satisfait l'inégalité suivante*

$$a_{n+1} \leq (1-\lambda_n)a_n + \sigma_n$$

Où $\lambda_n \in [0,1]$, $\forall n \geq n_0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n = \infty$, *et* $\sigma_n = o(\lambda_n)$. *Alors*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Théorème 3.4.3 *Soit* X *un espace normé , D un sous ensemble non vide, convexe et fermé de* X *et* $T : D \rightarrow D$ *un opérateur satisfait au moins l'une des conditions* $(z_1), (z_2)$ *et* (z_3). *Si* $u_0 = x_0 \in D$, *alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *l'itération de Mann converge vers* x^**;*

(ii) *l'itération d'Ishikawa converge vers* x^*.

Preuve. *Nous allons prouver l'implication* $(i) \Rightarrow (ii)$. *Supposons que* $\lim_{n\to\infty} u_n = x^*$. *En utilisant*

$$\mathit{lim}_{n\to\infty} \|x_n - u_n\| = 0 \tag{3.4.23}$$

et

$$0 \leq \|x - x_n\| \leq \|u_n - x^*\| + \|x_n - u_n\|$$

on a

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$$

La preuve est complète si nous prouvons la relation (3.4.23).

En utilisant l'itération de Mann, d'Ishikawa et (3.4.16) *avec* $x = u_n$, $y = y_n$, *nous avons*

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1} - x_{n+1}\| &\leq \|(1-a_n)(u_n - x_n) + a_n(Tu_n - Ty_n)\| \qquad (3.4.24)\\
&\leq (1-a_n)u_n - x_n + a_n \|Tu_n - Ty_n\| \\
&\leq (1-a_n)\|u_n - x_n\| + a_n\delta \|U_n - y_n\| + 2a_n\delta \|u_n - Tu_n\|
\end{aligned}$$

En utilisant (3.4.16) *avec* $x = u_n$, $y = y_n$, *nous obtenons*

$$\begin{aligned}
\|u_n - y_n\| &\leq \|(1-b_n)(u_n - x_n) + b_n(u_n - Tx_n)\| \qquad (3.4.25)\\
&\leq (1-b_n)\|u_n - x_n\| + b_n \|u_n - Tx_n\| \\
&\leq (1-b_n)\|u_n - x_n\| + b_n \|u_n - Tu_n\| + b_n \|Tu_n - Tx_n\| \\
&\leq (1-b_n)\|u_n - x_n\| + b_n \|u_n - Tu_n\| + b_n\delta \|u_n - x_n\| + 2\delta b_n \|u_n - Tu_n\| \\
&= (1-b_n(1-\delta))\|u_n - x_n\| + b_n \|u_n - Tu_n\| (1+2\delta).
\end{aligned}$$

Les relations (3.4.25) *et* (3.4.24) *conduisent à*

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1} - x_{n+1}\| &\leq (1-a_n)\|u_n - x_n\| + a_n\delta(1-b_n(1-\delta))\|u_n - x_n\| + \\
&\quad + a_n b_n \delta \|u_n - Tu_n\|(1+2\delta) + a_n\delta\|u_n - y_n\| \\
&= (1 - a_n(1-\delta(1-b_n(1-\delta))))\|u_n - x_n\| + a_n\delta\|u_n - Tu_n\|(b_n(1+2\delta)+2\delta).
\end{aligned} \tag{3.4.26}$$

Notons

$$\begin{aligned}
a_n &= \|u_n - x_n\| \\
\lambda_n &= a_n(1-\delta(1-b_n(1-\delta))) \subset (0,1), \\
\sigma_n &= a_n\delta\|u_n - Tu_n\|(b_n(1+2\delta)+2\delta)
\end{aligned}$$

Puisque $\lim_{n\to\infty}\|u_n - x^*\| = 0$, *$T$ satisfait la condition Z et $x^* \in F(T)$, de* (3.4.16) *nous obtenons*

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|u_n - Tu_n\| \leq \|u_n - x^*\| + \|x^* - Tu_n\| \\
&\leq (\delta+1)\|u_n - x^*\| \to 0 \text{ quand } n \to \infty
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\lim_{n\to\infty}\|u_n - Tu_n\| = 0$*; C'est-à-dire* $\sigma_n = o(\lambda_n)$. *Le lemme précédent conduit à*

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n - x_n\| = 0.$$

Nous allons prouver que si l'itération d'Ishikawa converge, alors il en est de même pour l'itération de Mann. En utilisant (3.4.16) *avec* $x = y_n,\ y = u_n$,

on obtient

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - u_{n+1}\| &\leq \|(1-a_n)(x_n - u_n) + a_n(Ty_n - Tu_n)\| \\
&\leq (1-a_n)\|x_n - u_n\| + a_n\|Ty_n - Tu_n\| \\
&\leq (1-a_n)\|x_n - u_n\| + a_n\delta\|y_n - u_n\| + 2a_n\delta\|y_n - Ty_n\|
\end{aligned} \tag{3.4.27}$$

La relation suivante existe

$$\begin{aligned}
\|y_n - u_n\| &\leq \|(1-b_n)(x_n - u_n) + b_n(Tx_n - u_n)\| \\
&\leq (1-b_n)\|x_n - u_n\| + b_n\|Tx_n - u_n\| \\
&\leq (1-b_n)\|x_n - u_n\| + b_n\|Tx_n - x_n\| + b_n\|x_n - u_n\| \\
&\leq \|x_n - u_n\| + b_n\|Tx_n - x_n\|.
\end{aligned} \tag{3.4.28}$$

En remplaçant (3.4.27) *en* (3.4.28), *on obtient*

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-u_{n+1}\| &\leq (1-a_n)\|x_n-u_n\|+a_n\delta(\|x_n-u_n\|+b_n\|Tx_n-x_n\|)+ \\ &+ 2a_n\delta\|y_n-Ty_n\| \\ &\leq (1-(1-\delta)a_n)\|x_n-u_n\|+a_nb_n\delta\|Tx_n-x_n\|+2a_n\delta\|y_n-Ty_n\|\end{aligned} \tag{3.4.29}$$

Notons

$$\begin{aligned} a_n &= \|x_n-u_n\| \\ \lambda_n &= a_n(1-\delta)\subset(0,1) \\ \sigma_n &= a_nb_n\delta\|Tx_n-x_n\|+2a_n\delta\|y_n-Ty_n\|., \end{aligned}$$

Puisque $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x^*\|=0$, T *satisfait la condition* Z *et* $x^*\in F(T)$, *nous obtenons*

$$0\leq\|x_n-Tx_n\|\leq\|x_n-x^*\|+\|x^*-Tx_n\|\leq(\delta+1)\|x_n-x^*\|\to 0 \text{ quand } n\to\infty$$

et

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|y_n-Ty_n\| \\ &\leq \|y_n-x^*\|+\|x^*-Ty_n\| \\ &\leq (\delta+1)\|y_n-x^*\| \\ &\leq (\delta+1)[(1-b_n)\|x_n-x^*\|+b_n\|Tx_n-x^*\| \\ &\leq (\delta+1)[(1-b_n)\|x_n-x\|+b_n\delta\|x_n-x^*\| \\ &\leq (\delta+1)(1-b_n(1-\delta))\|x_n-x^*\|\to 0 \text{ quand } n\to\infty \end{aligned}$$

Par conséquent, $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-Tx_n\|=0$ *et* $\lim\limits_{n\to\infty}\|y_n-Ty_n\|=0$, *c'est-à-dire* $\sigma_n=o(\lambda_n)$. *Le lemme précédent et* (3.4.29) *mènent à* $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-u_n\|=0$. *Ainsi, on obtient*

$$\|x^*-u_n\|\leq\|x_n-u_n\|+\|x_n-x^*\|\to 0$$

■

Remarques 3.4.2 .

- *Il est évident que, pour* $\lambda=1$ *l'itération de Krasnoselskii se réduit à l'itération de Picard, tandis que pour* $a_n=\lambda(const)$, *l'itération de Mann se réduit à la méthode de Krasnoselskii.*

- *Encore une fois, l'équation* (3.4.2) *peut être considérée comme une sorte d'itération double avec deux suites de paramétres différents.*

- *Le processus d'Ishikawa peut être considéré comme un double processus itératif de Mann.*

- *Malgré cette apparente similitude et le fait, pour $b = 0$ l'itération d'Ishikawa se réduit à l'itération de Mann, il n'y a pas de dépendence générale entre les résultats de la convergence pour l'itération de Mann et l'itération d'Ishikawa .*

3.5 Programmes d'applications sous logiciel Matlab

Programme1 :

```
function [X] = Krasoselskii(n, λ, x0)
format short
for i = 1 : n − 1
X(1) = (1 − λ) ∗ x0 + λ ∗ (1 − x0)ˆ6 ;
X(i + 1) = (1 − λ) ∗ X(i) + λ ∗ (1 − X(i))ˆ6 ;
end
plot(X,'∗','markerSize',12)
title('Itération de Krasnoselskii')
end
```

Programme 2 :

```
function [X] =mann(n, x0)
format short
for i = 1 : 1 + n
a = 1/i;
X(1) = (1 − a) ∗ x0 + a ∗ (1 − x0)ˆ6;
X(i + 1) = (1 − a) ∗ X(i) + a ∗ (1 − X(i))ˆ6;
end
plot(X,'∗','markerSize',12)
title('Itération de Mann')
end
```

3.6 Exemples d'application

Soit $X = [0, 1]$ et $T : X \rightarrow X$ donné par

$$Tx = (1 - x)^6,$$

alors T admet deux points fixes p_1 et p_2, où

$$p_1 = 0,2219 \text{ et } p_2 = 2.1347.$$

L'itération de Krasnoselskii :

Pour $x_0 = 2$ et $\lambda = 0,5$, on obtient

$x_1 = 1,5$; $x_2 = 0,757$; $x_3 = 0,379$; $x_4 = 0,2181$; $x_5 = 0,2322$ et $x_6 = 0,2214$.

L'itération de Mann :

Pour $x_0 = 2$ et $a_n = \frac{1}{n+1}$, on obtient

$x_1 = 1,0$, $x_2 = 0,5$, $x_3 = 0,338$, $x_4 = 0,2748$, $x_5 = 0,2489$ et $x_6 = 0,2378 ... x_{50} = 0,2219$.

Commentaires

- L'itération de Krasnoselskii converge plus rapidement que l'itération de Mann. Le fait est plus clairement illustré si nous choisissons $x_0 = p_2$.

- La procédure itérative de Krasneselskii se rapproche du point fixe p_1 et donne $x_6 = 0,2214$.alors que les procédures itératives de Mann donne $x_6 = 0,2378$, la convergence de la procédure d'itération de Mann est en effet trés lente dans ce cas aprés 50 itérations on obtient $x_{50} = 0,2219$.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons abordé la théorie du point fixe en insistant sur certains théorèmes :Banach, Brouwer, Schauder et Krasnoselskii. Nous nous sommes penchés sur l'aspect pratique en donnant les algorithmes qui sont associés à certains d'entre eux. L'aspect numérique a été abordé à travers un exemple concret d'une fonction sur laquelle nous avons appliqué des méthodes itératives différentes, ce qui nous a permis de comparer les vitesses de convergence de chacunes et de constater que dans ce cas précisément, la méthode de krasnoselskii est plus performante que celle de Mann.

Pour conclure, nous dirons que ce mémoire n'a pas la prétention de révolutionner la théorie du point fixe, mais peut être considéré comme un état de l'art de cette théorie ô combien utile.

Bibliographie

[1] **AGARWAL**,R.**MEEHAN,**P.and **O'REGAN**,*D. Fixed point theory and applications.*Cambridge University Press,Cambridge,2001.

[2] **AVERMESCU**,C. *Some remarks on a fixed point theorem of Krasnoselskii*, EJQTDE, 5(2003), 1-15.

[3] **BURTUN,**T.A. *A fixed-point theorem of Krasnoselskii*, App. Math. Lett. 11(1)(1995), 85-88.

[4] **GIRAND**,A.Théorème de Brouwer en dimension2, 2012.

[5] **MAWULI**,A.*Comparing Krasnoselskij and Man iterative methods for Lipschitian generalized Pseudo-contractive oppertors in Hilbert spaces. Mémoire du master. Kwame Nkrumah Unuversity of Science and Technology, october, 2009.*

[6] **MINAZZO**.C-**RIDER**.K. *Théorèmes du point fixe et applications aux equations différentielles*, Mémoire de Master1 de mathématiques, université de Nice-Sophia Antipolis,2006.

[7] **SOLTUZ**,M.S.*Mann-Ishikawa iterations and Mann-Ishikawa iterations with errors are equivalent models.* Mathematical communications 8(2003), 139-149.

[8] **SOLTUZ**,M.S.*The equivalence of Picard, Mann and Ischikawa iterations dealing with quasi-conctactive operators.* Mathematical communications 10(2005), 81-88.