



Faculté des Sciences Exactes
Département de PHYSIQUE

Mémoire de Master

Spécialité: Mécanique des fluides et transferts thermiques

Thème

Les ondes stationnaires dans l'écoulement d'un fluide électroconducteur de fine épaisseur

Présenté par

Mr. Lalam Youcef

Soutenu le: 04/07/2017

Devant le Jury composé de:

MEZIANI OURRAD	Ouerdia	Professeur	Président
BOUCHARA	Lydia	MCB	Examineur
AMATOUSSE	Nawel	MCA	Rapporteur

Année universitaire 2016/2017

Remerciements

Avant tout, A l'issue de ce travail, je remercie en premier lieu le bon dieu de m'avoir donné la force, le courage la détermination et la foi

Durant toute ces années d'étude

Et de réaliser ce modeste travail

Je tiens à exprimer mes remerciements à mon encadreur Melle Amatousse Nawel pour le temps quelle m'consacré toutes les fois que cela était nécessaire, pour ses précieux conseils et sa gentillesse.

Je remercie aussi :

Mme Meziani Ourrad Ouerdia qui me fait l'honneur de présider le jury

Melle Bouchara Lydia qui a accepté d'examiner mon travail.

Et je remercie toute personne qui m'a aidé de près ou de loin à l'achèvement de ce mémoire.

Dédicace



La réalisation de ce travail de mémoire n'aura pas été possible sans la collaboration de nombreuses personnes.

Je remercie sincèrement et chaleureusement :

Mes professeurs et mes amis de la faculté des Sciences Exactes.

Mes parents pour le soutien que vous m'apportez à chacun de mes choix

A toi Papa pour ta patience envers moi, ton soutien et ton écoute.

A toi Mama pour m'avoir accompagné à chaque étape de mes études et de ma vie.

Pour mon grand-père et ma grand-mère.

A mes sœurs Amel et Soumia, et mon frère Younes.

A toute ma famille grande et petite.

A tous mes amis.

Je dédie ce travail à tous ceux qui me sont chers, à tous ceux qui m'aiment, à tous ceux que j'aime.

LALAM Youcef.

Table des matières

<i>Remerciements</i>	2
<i>Dédicace</i>	3
<i>Liste des symboles et abréviations</i>	6
Liste des figures.....	7
Introduction générale :.....	8
Chapitre 1 : Description du problème:.....	10
1.1 Introduction :.....	10
1.2 Equations du mouvement :.....	10
1.2.1 Equation de la conservation de la masse :.....	10
1.2.2 Equations de Navier - Stokes :.....	11
1.3 Conditions aux limites :.....	11
1.3.1 L'adhérence du fluide à la paroi :.....	11
1.3.2 Condition cinématique :.....	12
1.3.3 Conditions dynamiques :.....	12
1.4 Ecoulement de base :.....	13
1.5 Adimensionnalisation:.....	13
1.5.1 Equations adimensionnées :.....	14
Chapitre 2 : Approche théorique :.....	17
2.1. Introduction :.....	17
2.1 Méthode théorique :.....	18
2.1.1 Modèles asymptotiques.....	19
2.1.2 Modèles intégraux de couche limite :.....	19
2.1.3 Méthode des Résidus pondérés :.....	21
Chapitre 3. Recherche de solutions stationnaires.....	25
3.1 Introduction :.....	25
3.2 Changement de variables :.....	25
3.3 Transformation en un système dynamique :.....	25
3.4 Points fixes du système :.....	26
3.5 Etude de stabilité du point fixe principal :.....	28
3.6 Recherche d'ondes périodiques :.....	29
3.6.1 Bifurcations de Hopf :.....	30
3.7 Lieu des bifurcations de Hopf :.....	31
Conclusion :.....	36

Liste des symboles et abréviations

γ Coefficient de tension superficielle

μ Viscosité dynamique

ν Viscosité cinématique

ρ Masse volumique du fluide

μ_0 Perméabilité magnétique

σ Conductivité du fluide

θ Angle d'inclinaison du plan

$\frac{D}{Dt}$ Dérivée particulaire

h_n Epaisseur du film mince dans l'écoulement de base

R Nombre de Reynolds

W Nombre de Weber

H_a Nombre de Hartmann

α Nombre électrique α

λ Longueur d'onde

Liste des figures

Figure 1 Géométrie du problème.....	10
Figure 2 : Courbes neutres.....	18
Figure 3 : schéma précisant la position des points fixes.	27
Figure 4 : Lieu des bifurcations de Hopf pour différentes valeurs du nombre de Hartmann. Les autres paramètres on été fixés : $\alpha = 0, W = 100$	32
Figure 5 : Lieu des bifurcations de Hopf pour différentes valeurs du nombre de Hartmann. Les autres paramètres on été fixés : $\alpha = 1, W = 100$	33
Figure 5 : Lieu des bifurcations de Hopf pour différentes valeurs du nombre électrique α . Les autres paramètres fixés : $Ha = 1, W = 100$	33
Figure 6 : Lieu des bifurcations de Hopf pour différentes valeurs du nombre de Weber. Les autres paramètres on été fixés : $Ha = 1, \alpha = 0$	34

Introduction générale :

La stabilité de l'écoulement d'un film d'un fluide newtonien sur des parois solides a fait l'objet de nombreuses études aussi bien fondamentales qu'expérimentales. Mathématiquement, l'écoulement est décrit par les équations de Navier-Stokes incompressibles. Les effets inertiels sont à l'origine de l'instabilité qui se manifeste par l'apparition d'ondes de surface [3,6,11].

En dehors du domaine de la recherche fondamentale et des phénomènes naturels, on trouve des applications aux films liquides minces dans bon nombre de procédés industriels [14] :

- Les procédés de revêtement (enduction de surface).
- Le dépôt de couches minces (bande magnétique, films photographiques).
- Les procédés de coextrusion des polymères...

Signalons que selon les applications, les instabilités seront parfois recherchées car elles augmentent les surfaces d'échanges et favorisent ainsi les transferts thermiques et de masse et dans d'autres situations, retardées voire éliminées afin de garantir la qualité des produits en assurant l'uniformité des épaisseurs des couches des fluides [6,12,13].

La construction de modèles d'écoulements de fluides en films minces est donc très importante et fait déjà l'objet de nombreux travaux [6,7,9]. Les plus récents intègrent une méthode dite aux résidus pondérés pour approcher le champ de vitesses et éliminer la variable d'espace suivant l'épaisseur du film.

Ce travail est une contribution à l'étude des instabilités de l'interface d'un fluide électroconducteur de fine épaisseur en écoulement sur une paroi inclinée.

Après la mise en équations du problème, nous allons décrire l'approche théorique qui nous a menés à un modèle simple qui décrit parfaitement bien les instabilités de l'interface pour des nombres de Reynolds n'excédant pas la centaine. Une étude des solutions stationnaires sera effectuée dans le troisième chapitre. Nous examinerons dans ce contexte l'influence d'un champ électromagnétique uniforme sur le lieu des bifurcations de type Hopf. Nous concluons ce mémoire par une conclusion générale.

Chapitre 1 : Description du problème

Chapitre 1 : Description du problème:

1.1 Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons présenter le système d'équations qui nous a permis d'étudier les instabilités de l'interface d'un écoulement laminaire d'un fluide mince d'épaisseur h_n . La paroi sur laquelle le fluide s'écoule est inclinée d'un angle Θ par rapport à l'horizontale. L'écoulement est aussi soumis à l'action d'un champ électromagnétique.

On notera la pression de l'air par P_a . Le schéma de l'écoulement est représenté sur la figure suivante :

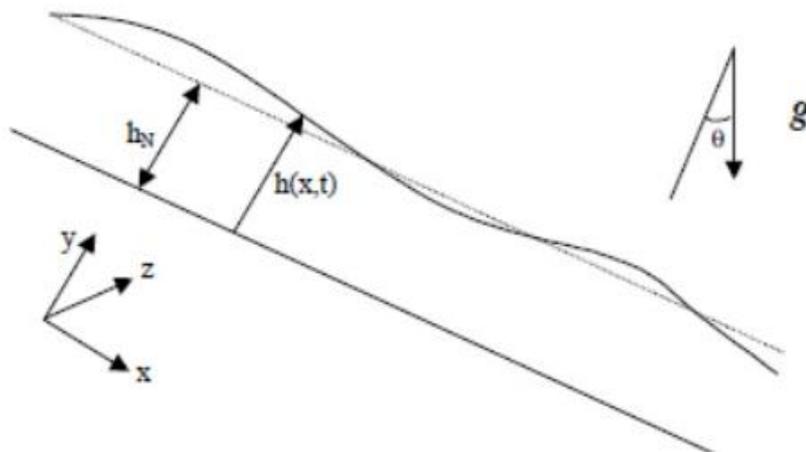


Figure 1 Géométrie du problème

1.2 Equations du mouvement :

En mécanique des fluides, l'équation de bilan de la quantité de mouvement découle du principe fondamental de la dynamique appliqué à un fluide. Le champ électromagnétique obéit aux équations de Maxwell.

1.2.1 Equation de la conservation de la masse :

L'équation de conservation de la masse se traduit mathématiquement par une divergence nulle du champ de vitesses. Elle s'écrit donc :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad 1.1.1$$

Cette équation est également appelée équation de continuité.

En la développant, on obtient :

$$u_x + v_y = 0 \quad 1.1.2$$

1.2.2 Equations de Navier - Stokes :

La forme générale de l'équation de Navier-Stokes s'écrit comme suit :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f} + \overrightarrow{div\vec{\sigma}} \quad 1.1.3$$

Où \vec{f} représente les forces de volume, $\vec{\sigma}$, le tenseur des contraintes, ρ , la masse volumique et \vec{v} le champ des vitesses de composantes (u, v) .

En développant les termes du membre de droite de l'équation (1.1.3), on obtient :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \mu\Delta\vec{v} + \rho\vec{g} + \mu_0\sigma \left(\vec{E} + \mu_0(\vec{v}\wedge\vec{H}) \right) \wedge\vec{H} \quad 1.1.4$$

Où :

μ_0 est la perméabilité magnétique, σ , la conductivité électrique du fluide, p la pression en son sein et g , l'accélération de la pesanteur.

On négligera toute perturbation du champ électromagnétique que l'on supposera de plus uniforme. Les champs magnétique et électrique sont respectivement dans la direction longitudinale et la direction transverse :

$$\vec{H} = H_0\vec{i}, \quad \vec{E} = E_0\vec{k}$$

On projette l'équation (1.1.4) sur les axes (OX) et (OY) :

$$\rho(u_t + u.u_x + v.u_y) = -p_x + \rho g \sin \theta + \mu(u_{xx} + u_{yy}) \quad 1.1.5$$

$$\rho(v_t + u.v_x + v.v_y) = -p_y - \rho g \cos \theta + \mu(v_{xx} + v_{yy}) + \mu_0 \cdot \sigma(E_0 \cdot H_0 - \mu_0(v \cdot H_0^2)) \quad 1.1.6$$

1.3 Conditions aux limites :

Le fluide est soumis aux conditions limites suivantes :

1.3.1 L'adhérence du fluide à la paroi :

Les conditions d'adhérence sont liées à la présence d'une couche limite à l'interface entre le fluide et une paroi solide. Elles s'écrivent comme suit :

$$\vec{v} = \vec{0} \quad 1.1.7$$

$$u = 0 \quad , \quad v = 0 \quad \text{en } y = 0 \quad 1.1.8$$

A l'interface d'équation $y = h(x, t)$, on a deux types de conditions :

1.3.2 Condition cinématique :

La relation qui traduit l'imperméabilité de l'interface s'écrit :

$$\frac{Df}{Dt} = 0 \quad 1.1.9$$

où $f = y - h(x, t)$

En développant l'équation (1.1.9), on trouve :

$$h_t + u \cdot h_x = v \quad 1.1.10$$

1.3.3 Conditions dynamiques :

La relation qui décrit la continuité des contraintes tangentielles s'écrit :

$$(\bar{\sigma} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{t} = (\overline{\sigma_{air}} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{t} \quad 1.1.11$$

Les contraintes normales sont discontinues à cause de la présence d'une tension superficielle :

$$(\bar{\sigma} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n} - (\overline{\sigma_{air}} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n} = -\gamma \text{div} \vec{n} \quad 1.1.12$$

γ est le coefficient de tension superficielle

\vec{n} , la normale à l'interface donnée par :

$$\vec{n} = \frac{\overrightarrow{\text{grad}f}}{\|\overrightarrow{\text{grad}f}\|} = \left(\frac{-h_x}{\sqrt{1+h_x^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}} \right)$$

La tangente à l'interface étant perpendiculaire à la normale, elle aura pour expression :

$$\vec{t} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}}, \frac{h_x}{\sqrt{1+h_x^2}} \right)$$

En développant les conditions sur les contraintes tangentielles et normales, on trouve :

$$-2\mu u_x h_x + \mu(u_y + v_x)(1 - h_x^2) + 2\mu v_y h_x = 0 \quad 1.1.13$$

$$p - p_a = \frac{2\mu}{1+h_x^2} [u_x h_x^2 - (u_y + v_x)h_x + v_y] - \gamma \frac{h_{xx}}{(1+h_x^2)^{3/2}} \quad 1.1.14$$

1.4 Ecoulement de base :

En l'absence de perturbations, la vitesse de l'écoulement se réduit à sa composante longitudinale, et l'interface qui sépare le fluide de l'air est plane ($h_{(x,t)} = h_n = \text{constante}$). Dans ce cas, les équations du mouvement et les conditions aux limites qui leur sont associées admettent une solution stationnaire et indépendante de la variable x .

Le système à résoudre est dans ce cas le suivant :

- Conservation de la masse :

$$u_x + v_y = 0 \quad 1.2.1$$

- L'équation de Navier - Stokes :

$$\mu u_{yy} + \rho g \sin \theta = 0 \quad 1.2.2$$

$$-p_y - \rho g \cos \theta = \mu_0 \sigma E_0 H_0 = 0 \quad 1.2.3$$

- Les conditions aux limites :

$$u = v = 0 \quad \text{en } y = 0 \quad 1.2.4$$

Et

$$u_y = 0 \quad \text{et } p = p_a \quad \text{en } y = h_n \quad 1.2.5$$

Après calcul, on trouve les expressions suivantes de la vitesse longitudinale U et de la pression P :

$$U(y) = \frac{\rho g \sin \theta}{\mu} \left(y h_n - \frac{y^2}{2} \right) \quad 1.2.6$$

$$p(y) = p_a + (h_n - y)(\rho g \cos \theta - \mu_0 \sigma E_0 H_0) \quad 1.2.7$$

La vitesse moyenne de l'écoulement est définie par :

$$U_n = \frac{1}{h_n} \int_0^{h_n} U(y) dy = \frac{g \sin \theta h_n^2}{3\nu} \quad 1.2.8$$

Où l'on a introduit la viscosité cinématique ν qui est reliée à la viscosité dynamique par la relation :

$$\mu = \rho \cdot \nu$$

1.5 Adimensionnalisation:

Afin de caractériser les équations du mouvement et les conditions aux limites associées, nous sommes amenés à donner leur forme adimensionnelle. Cela est possible à l'aide du choix de grandeurs de références issues en général des propriétés physiques du fluide et de l'écoulement lui-même. Ces grandeurs peuvent être [8] :

- L : une longueur d'onde caractéristique dans la direction de l'écoulement (échelle des x)
- h_n : l'épaisseur du fluide à l'état de base (échelle des y),
- U_n : la vitesse moyenne de l'écoulement (échelle des vitesses longitudinales)

De ces grandeurs, on déduit l'échelle temporelle L/u_n , l'échelle des vitesses suivant la normale au plan incliné, $\frac{h_n}{L}u_n$ et l'échelle des pressions $\frac{\rho v}{h_n}u_n$.

1.5.1 Equations adimensionnées :

En utilisant les échelles précédentes, les équations décrivant le mouvement prendront la forme suivante :

$$u_x + v_x = 0 \quad 1.3.1$$

$$R\varepsilon(u_t + u \cdot u_x + v \cdot v_y) = -\varepsilon p_x + (\varepsilon^2 u_{xx} + u_{yy}) + 3 \quad 1.3.2$$

$$R\varepsilon^2(v_t + uv_x + vv_y) = -p_y = \varepsilon^2 v_{xx} + \varepsilon v_{yy} - 3 \cot \theta + \alpha H_a^2 - \varepsilon H_a^2 v \quad 1.3.3$$

Pour les conditions aux limites :

Condition cinématique :

$$v = h_t + u \cdot h_x \quad 1.3.4$$

Condition tangentielle :

$$-4\varepsilon^2 u_x h_x + (u_y + \varepsilon^2 v_x) \cdot (1 - \varepsilon^2 h_x^2) = 0 \quad 1.3.5$$

Condition normale :

$$p = \frac{1}{(1+\varepsilon^2 h_x^2)} [2\varepsilon^2 u_x h_x - 2 \cdot h_x (u_y + \varepsilon^2 v_x) + 2\varepsilon \cdot v_y] \quad 1.3.6$$

En utilisant des grandeurs sans dimension, la vitesse longitudinale de l'écoulement de base aura la forme suivante :

$$U(y) = 3 \left(y - \frac{y^2}{2} \right) \quad 1.3.7$$

Des nombres sans dimension apparaissent dans les équations du mouvement et les conditions limites associées ;

- Le nombre de Reynolds est un nombre sans dimension utilisé en mécanique des fluides. Il a été mis en évidence en 1883 par Osborne Reynolds. Il caractérise un écoulement, en particulier la nature de son régime (laminaire,

transitoire, turbulent). Il représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses. Pour notre problème, il a pour expression : $R = \frac{\rho h_n u_n}{\mu}$

- Le nombre de Weber est un nombre sans dimension utilisé en mécanique des fluides pour caractériser l'écoulement de fluides à l'interface du système. Il correspond au rapport des forces d'inertie et de la tension superficielle. On le

définit ici de la manière suivante : $W = \frac{\gamma}{\rho h_n u_n^2}$ [15]

- Le nombre de Hartmann est un nombre sans dimension utilisé en magnétohydrodynamique pour traiter le mouvement de fluides conducteurs en présence d'un champ magnétique. Il représente le rapport entre la force de Laplace et les forces visqueuses. Dans notre cas, il a pour

forme : $H_a = h_n \mu_0 H_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}$ [15]

- Le nombre électrique est un nombre sans dimension qui caractérise le mouvement d'un fluide en présence d'un champ électrique. On le définit ici

comme suit : $\alpha = \frac{E_0}{\mu_0 E_0 H_0}$ [15]

- Le paramètre $\varepsilon = \frac{h_n}{L}$ nous renseigne sur le caractère ondes longues des modes instables.

Chapitre 2 : Approche théorique

Chapitre 2 : Approche théorique :

2.1. Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons présenter la méthode que nous avons utilisée pour simplifier le problème. Le modèle simple obtenu décrit parfaitement les instabilités de la surface libre jusqu'à des nombres de Reynolds de l'ordre de la centaine.

La stabilité de l'écoulement d'un film d'un fluide newtonien sur une paroi inclinée a été largement étudiée dans la littérature scientifique depuis que le problème a été posé de manière formelle par Benjamin (1957) et Yih (1963) ,[1,2]. Dans leurs travaux, ces derniers montrent que les instabilités ne se déclenchent que pour $Re \neq 0$ et déterminent une expression simple du seuil critique des instabilités de surface qui ne dépend que de l'angle d'inclinaison du plan θ :

$$Re_c = \frac{5}{6} \cot \theta$$

Ils montrent aussi que ces ondes se propagent à une vitesse double de la vitesse de base du liquide au niveau de la surface libre.

Les écoulements à une seule couche sont stables pour des perturbations de longueur d'onde infinie. Les instabilités qui gouvernent ces écoulements sont des modes dits de surface, à grande longueur d'onde [3], comme il est illustré sur la Fig. 2 et doivent leur existence à la déformation de l'interface air – liquide.

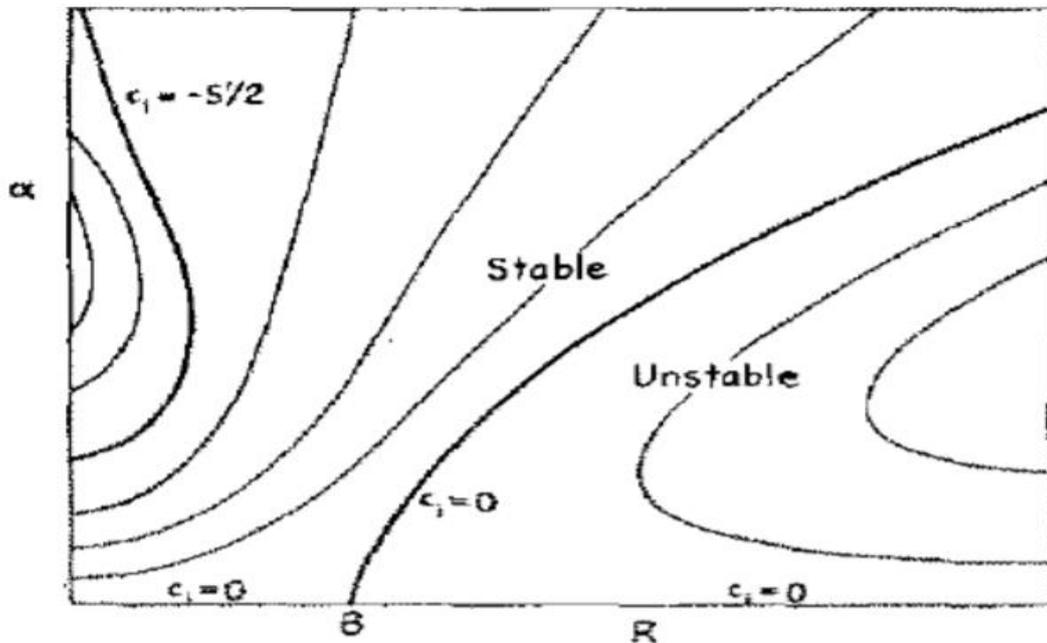


Figure 2 : Courbes neutres

2.1 Méthode théorique :

A des faibles nombres de Reynolds, l'instabilité des films tombants correspond à un mode de grande longueur d'onde. Cela implique l'existence d'une séparation d'échelle entre la coordonnée y d'une part et les coordonnées x et z d'autre part. Cette propriété peut s'exprimer en introduisant un paramètre formel ϵ , celui-là même apparaissant dans les équations du mouvement et les conditions aux limites présentées dans le chapitre 1. Dans le régime linéaire, ϵ s'écrit en fonction de la longueur d'onde de l'instabilité λ et de l'épaisseur du film h comme suit $\epsilon = h/\lambda$. Dans le cas général $\epsilon = \partial_{x,z,t}$. Les modèles que nous allons présenter résultent d'un développement des variables puis d'une hiérarchisation des termes vis-à-vis du paramètre ϵ .

La deuxième technique employée consiste à passer d'une représentation en termes de champs de vitesses à une description intégrée sur l'épaisseur. Cette méthode est classique lorsque le nombre de Reynolds et la profondeur sont faibles (problème de Hele-Shaw par exemple). Les degrés de liberté de l'écoulement deviennent l'épaisseur du film h et le débit $q = \int_0^h u \, dy$.

Enfin, nous utiliserons l'approximation de couche limite qui consiste à négliger les termes d'inertie du deuxième ordre en ϵ dans l'équation de Navier Stokes projetée selon y . Cela conduit à une expression pour la pression qui est ensuite injectée dans l'équation de la conservation de la quantité de mouvement selon x . L'élimination de la pression constitue l'atout principal de la théorie de la couche limite développée par Prandtl [6].

2.1.1 Modèles asymptotiques

Ces modèles supposent que le débit est fonction uniquement de l'épaisseur h et de ses dérivées en temps et en espace [5]. Ils peuvent être écrits sous la forme :

$$h_t + q_x = 0 \quad 2.3$$

$$q = Q(h) \quad 2.4$$

(2.3) est l'équation exacte de conservation de la masse intégrée sur l'épaisseur du film.

(2.4) exprime formellement l'expression du débit et dépend du niveau d'approximation vis-à-vis du paramètre ϵ . [6]

2.1.2 Modèles intégraux de couche limite :

Ce paragraphe reprend pour notre problème la démarche qui a donné lieu à des modèles qui se présentent sous la forme de deux équations couplées pour l'épaisseur du film h et le débit instantané local. Les premières équations de ce type ont été obtenues en intégrant les équations de continuité et de bilan de la quantité de mouvement suivant l'épaisseur du film. De plus, le développement asymptotique aux petits nombres d'ondes effectué par Benney au voisinage de la criticalité indique que les premières corrections au profil de vitesse sont introduites par les effets inertiels [5].

Les équations du mouvement sans dimension s'écrivent :

$$u_x + v_y = 0 \quad 2.3.1$$

$$R\epsilon \frac{Du}{Dt} = -\epsilon \frac{\partial p}{\partial x} + \epsilon^2 u_{xx} + u_{yy} + 3 \quad 2.3.2$$

$$R\epsilon^2 \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \epsilon v_{yy} - 3 \cot \theta + \alpha H_a^2 - \epsilon H_a^2 v \quad 2.3.3$$

On intègre la relation (2.3.3) de y à $h(x, t)$:

$$R\epsilon^2 \int_y^h \frac{Dv}{Dt} dy = -P(y) - P(h) + \epsilon v_y |_h - \epsilon v_y - 3 \cot \theta (h - y) + \alpha H_a^2 (h - y) - \epsilon H_a^2 \int_y^h v dy \quad 2.3.4$$

Avec :

$$P(h) = 2\epsilon^2 u_x h_x - 2\epsilon h_x (u_y + \epsilon^2 v_x) + 2\epsilon v_y - RW\epsilon^2 h_{xx} \quad 2.3.5$$

La relation (2.3.4) devient comme suit :

$$P(y) = R\varepsilon^2 \int_y^h \frac{Dv}{Dt} dy + 2\varepsilon^2 u_x|_h h_x - 2\varepsilon h_x (u_y|_h + \varepsilon^2 v_x|_h) + \varepsilon v_y|_h - RW\varepsilon^2 h_{xxx} + \varepsilon v_y + 3 \cot \theta (h - y) - \alpha H_a^2 (h - y) + \varepsilon H_a^2 \int_y^h v_y dy \quad 2.3.6$$

En injectant cette dernière expression dans (2.3.2), on trouve :

$$R\varepsilon \frac{Du}{Dt} = -R\varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial x} \int_y^h \frac{Dv}{Dt} dy - 2\varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial x} (u_x|_h h_x) + 2\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} [h_x u_y|_h + \varepsilon^2 v_x|_h] - \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} (v_y|_h) + RW\varepsilon^3 h_{xxx} - \varepsilon^2 v_{xy} - \varepsilon 3 \cot \theta h_x + \varepsilon H_a^2 h_x - \varepsilon^2 H_a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_y^h v_y dy \right) + \varepsilon^2 u_{xx} + u_{yy} + 3 \quad 2.3.7$$

Comme ε est petit, la condition tangentielle est donnée par l'équation suivante :

$$u_y|_h = \varepsilon^2 (4u_x h_x - v_x) \quad 2.3.8$$

$u_y|_h$ est donc d'ordre ε^2 ou plus.

En utilisant l'équation de continuité (2.3.1) puis en éliminant les termes d'ordre ε^3 et plus, l'équation (2.3.7) s'écrit comme suit:

$$R\varepsilon \frac{Du}{Dt} = -\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} (v_y|_h) + RW\varepsilon^3 h_{xxx} - \varepsilon 3 \cot \theta h_x + \varepsilon H_a^2 h_x - \varepsilon^2 H_a^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_y^h v_y dy + 2\varepsilon^2 u_{xx} + u_{yy} + 3 \quad 2.3.9$$

Cette équation est l'équation dite de couche limite. Elle est cohérente à l'ordre ε^2 . On s'est débarrassé de tous les termes d'ordre ε^3 et plus à l'exception du terme de tension superficielle.

La condition cinématique (1.3.4) peut être réécrite sous forme intégrale en introduisant le débit local défini par :

$$q(x, t) = \int_0^h u dy \quad 2.3.10$$

Pour ce faire, on procède comme suit :

On intègre l'équation de conservation de la masse (2.3.1) de 0 à h puis on utilise la condition d'adhérence à la paroi $u|_0 = 0$, pour trouver :

$$v(h) = - \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy \quad 2.3.11$$

On développe le terme intégral apparaissant dans (2.3.11) en utilisant la règle de Leibniz qui s'écrit comme suit pour une quantité scalaire $Q(x, y)$ [4]:

$$\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y) dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} Q(x, y) dy - Q(x, \beta(x)) \frac{\partial \beta}{\partial x} - Q(x, \alpha(x)) \frac{\partial \alpha}{\partial x} \quad 2.3.12$$

Après calcul, on trouve que :

$$v(h) = -q_x + u |_h h_x \quad 2.3.13$$

En reportant l'expression (2.3.13) de $v(h)$ dans la condition cinématique, on obtient :

$$h_t + q_x = 0 \quad 2.3.14$$

L'équation (2.3.14) est la forme intégrale de l'équation cinématique.

2.1.3 Méthode des Résidus pondérés :

Afin de résoudre les problèmes rencontrés jusqu'à présent et liés à la complexité des équations décrivant le mouvement, nous avons fait un effort de modélisation. A l'aide des polynômes apparaissant dans le développement asymptotique de Benney du problème considéré, nous avons repris une méthode associant des approximations en série de Taylor et des résidus pondérés [6]. Celle-ci a abouti à la formulation d'un système de deux équations d'évolution couplées pour deux inconnues, l'épaisseur du film h et le débit instantané local [7].

La méthode des résidus pondérés suppose la définition d'un ensemble de fonctions tests $f_i(y)$ sur lesquelles est projeté le champ de vitesse u :

$$u = \sum a_i(x, t) f_i(y)$$

Les fonctions tests $f_i(y)$ ont pour expression :

$$f_i(y) = \left(\frac{y}{h(x, t)} \right)^{i+1} - \frac{i+1}{i+2} \left(\frac{y}{h(x, t)} \right)^{i+2}$$

Dans le cas d'un écoulement soumis à une couche mince, on peut écrire le champ de vitesse $u(x, y, t)$ comme suit :

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 \quad 2.4.1$$

On recherche un modèle qui soit cohérent à l'ordre ε , c'est pour cette raison que l'on a arrêté le développement (2.4.1) à cet ordre de l'approximation.

On projette ensuite l'équation de couche limite sur des fonctions de pondération que l'on notera par $g(x, y, t)$:

$$\int_0^h \left(R\varepsilon \frac{Du}{Dt} = -\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} (v_y |_h) + RW\varepsilon^3 h_{xxx} - \varepsilon 3 \cot \theta h_x + \varepsilon H_a^2 h_x - \varepsilon^2 H_a^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_y^h v_y dy + \right. \\ \left. 2\varepsilon 2u_{xx} + u_{yy} + 3 \times g dy = 0 \right) \quad 2.4.2$$

A l'exception du terme de diffusion u_{yy} , tous les termes apparaissant dans (2.4.2) ne font intervenir que la partie u_0 du champ de vitesses. Un traitement particulier de l'intégrale $\int_0^h u_{yy} \times g dy$ nous permettra d'éliminer carrément la correction u_1 des calculs.

En effet, une double intégration par partie de ce terme donne :

$$\int_0^h u_{yy} \times g dy = u_y |_h g |_h - u_y |_0 g |_0 - u |_h \frac{dg}{dy} |_h + u |_0 \frac{dg}{dy} |_0 + \int_0^h u \frac{d^2 g}{dy^2} dy \quad 2.4.3$$

Car l'adhérence à la paroi impose $u |_0 = 0$.

On rappelle que le terme $u_y |_h$ est d'ordre ε^2 . Pour obtenir un système modèle cohérent à l'ordre un, les fonctions poids $g(x, t, y)$ doivent vérifier :

$$\begin{cases} g |_0 = 0 \\ \frac{dg}{dy} |_h = 0 \\ \frac{d^2 g}{dy^2} = f(x, t) \end{cases} \quad 2.4.4$$

Avec ce choix, le dernier terme de l'équation (2.4.3) sera proportionnel au débit q . Même en n'introduisant pas la correction d'ordre ε (u_1) dans les calculs, le modèle obtenu reste cohérent à l'ordre ε .

Remarquons qu'une fonction de pondération identique à la fonction test vérifie les trois conditions citées plus haut :

$$g = f = \frac{y}{h} - \frac{1}{2} \frac{y^2}{h^2}$$

Après les simplifications apportées par ce choix, on aura :

$$\int_0^h u_{yy} \times g dy = u_y |_h g |_h + \frac{d^2 g}{dy^2} q(x, t) \quad 2.4.5$$

Le modèle ainsi obtenu est un système d'équations différentielles couplées avec pour seules inconnues, le débit local $q(x, t)$ et l'épaisseur du film $h(x, t)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} h(x, t) \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} q(x, t) \right) = 0 \quad 2.4.6$$

$$\frac{1}{3}h(x,t)RW\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}h(x,t)\right)+\left(\frac{11}{140}h(x,t)^2Ha^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}q(x,t)\right)-\frac{12}{5}Ha^2\frac{q(x,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}h(x,t)\right)}{h(x,t)}+\right.$$

$$85q_x,t\partial^2\partial x^2hx,t^2hx,t^2-29140Ha^2q_x,t\partial\partial xhx,t^2-107840hx,tHa^2q_x,t\partial^2\partial x^2hx,t+11140hx,tHa^2\partial\partial xqx,t\partial\partial xhx,t+95\partial^2\partial x^2qx,t-95\partial\partial xqx,t\partial\partial xhx,thx,t\varepsilon^2+2340Rq_x,t\partial\partial thx,thx,t-25R\partial\partial tq_x,t+1835Rq_x,t\partial\partial xhx,thx,t^2-hx,t\cot\theta\partial\partial xhx,t-111280Rq_x,t\partial\partial xqx,thx,t+13hx,t\alpha Ha^2\partial\partial xhx,t\varepsilon-q_x,thx,t^2+hx,t=0 \quad 2.4.7$$

*Chapitre 3 : recherche de solutions
stationnaires*

Chapitre 3. Recherche de solutions stationnaires

3.1 Introduction :

Dans ce chapitre, l'objectif est de déterminer l'influence de grandeurs physiques telles que la capillarité et les champs électrique et magnétique sur le lieu des bifurcations de type Hopf.

Les bifurcations de Hopf se manifestent dans l'espace physique par des ondes périodiques.

3.2 Changement de variables :

Nous nous intéressons dans cette étude aux solutions des équations initiales qui ne se déforment pas dans un référentiel en mouvement à une vitesse constante c . Dans ce cas et tant qu'on travaille dans le référentiel en mouvement, le temps t n'est pas une variable du problème (voir [6] pour plus de détails).

On note $\xi = x - ct$ la variable spatiale dans ce référentiel.

En l'introduisant dans l'équation cinématique (2.3.14), on trouve :

$$q_\xi - c h_\xi = 0 \quad 3.2.1$$

En intégrant l'équation (3.2.1) par rapport à ξ , on obtient :

$$q - c h = cste \quad 3.2.2$$

Pour déterminer la constante d'intégration, on se ramène à l'écoulement de base. L'équation (3.2.2) devient alors :

$$q = c(h - 1) + 1 \quad (3.2.3)$$

3.3 Transformation en un système dynamique :

En introduisant la variable ξ et en utilisant la relation (3.2.3), le modèle (2.4.6) – (2.4.7) s'écrit sous forme d'une équation différentielle ordinaire du troisième ordre :

$$\frac{1}{3}h(\xi)RW\varepsilon^2\left(\frac{d^3}{d\xi^3}h(\xi)\right)+\left(-\frac{41}{840}h(\xi)^2Ha^2c\left(\frac{d^2}{d\xi^2}h(\xi)\right)-\frac{3}{5}c\left(\frac{d^2}{d\xi^2}h(\xi)\right)+\frac{12}{5}\frac{\left(\frac{d^2}{d\xi^2}h(\xi)\right)c}{h(\xi)}-\right.$$

$$125d^2d\xi^2h\xi h\xi-15d^2d\xi^2h\xi ch\xi-85d^2d\xi^2h\xi^2ch\xi^2+85d^2d\xi^2h\xi^2h\xi^2-970h\xi Ha^2cdd\xi h$$

$$\xi^2+29140Ha^2dd\xi h\xi^2c-29140Ha^2dd\xi h\xi^2+107840h\xi Ha^2d^2d\xi^2h\xi c-107840h\xi Ha^2d$$

$$2d\xi^2h\xi \varepsilon^2+-235Rc^2dd\xi h\xi-235Rc^2dd\xi h\xi h\xi+235RCdd\xi h\xi h\xi+1835Rdd\xi h\xi c^2h\xi^2-36$$

$$35Rdd\xi h\xi Ch\xi^2+1835Rdd\xi h\xi h\xi^2-h\xi \cot\theta dd\xi h\xi+13h\xi \alpha Ha^2dd\xi h\xi \varepsilon+ch\xi^2-ch\xi+h\xi-1$$

$$h\xi^2 \qquad \qquad \qquad 3.3.1$$

On introduit maintenant les transformations suivantes :

$$U_1 = h \quad , U_2 = h_{\xi} \quad , U_3 = h_{\xi\xi} \qquad \qquad \qquad 3.3.2$$

On voit facilement que :

$$\begin{cases} \frac{dU_1}{d\xi} = h_{\xi} \\ \frac{dU_2}{d\xi} = h_{\xi\xi} \\ \frac{dU_3}{d\xi} = h_{\xi\xi\xi} \end{cases}$$

Le système dynamique autonome obtenu est non linéaire et de dimension trois. Cela garantit l'existence de solutions chaotiques.

3.4 Points fixes du système :

Définition d'un point fixe : les états d'équilibre d'un système physique correspondent aux solutions stationnaires du système d'EDO [4]. Ils sont définis par :

$$\frac{dU_i}{dt} = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

Les solutions sont représentées dans l'espace des phases par des points fixes. Les points fixes sont déterminés en résolvant le système algébrique suivant :

$$U_i(U_1, \dots, U_n) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

Points fixes du système :

Pour trouver les points fixes de notre système, on doit avoir :

$$\begin{cases} \frac{dU_1}{d\xi} = h_\xi = 0 \\ \frac{dU_2}{d\xi} = h_{\xi\xi} = 0 \\ \frac{dU_3}{d\xi} = h_{\xi\xi\xi} = 0 \end{cases} \quad 3.4.1$$

Il suffit donc de poser $h_\xi = h_{\xi\xi} = h_{\xi\xi\xi} = 0$ dans (3.3.1) et de résoudre le système algébrique résultant, le seul terme ne contenant pas de dérivées par rapport à ξ :

$$\frac{c}{h(\xi)^2} - \frac{c}{h(\xi)} + h(\xi) - \frac{1}{h(\xi)^2} = 0 \quad 3.4.2$$

Après calcul, on trouve deux points fixes :

$$U_{pf_1} = 1 \quad \text{et} \quad U_{pf_2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3+4c}}{2}$$

Leur position est représentée sur la figure 3 en fonction de la célérité c . Les deux points fixes se croisent en $c = 3$, il y a alors échange de stabilité. Notons que U_{pf_2} n'existe que lorsque $c > 3/4$.

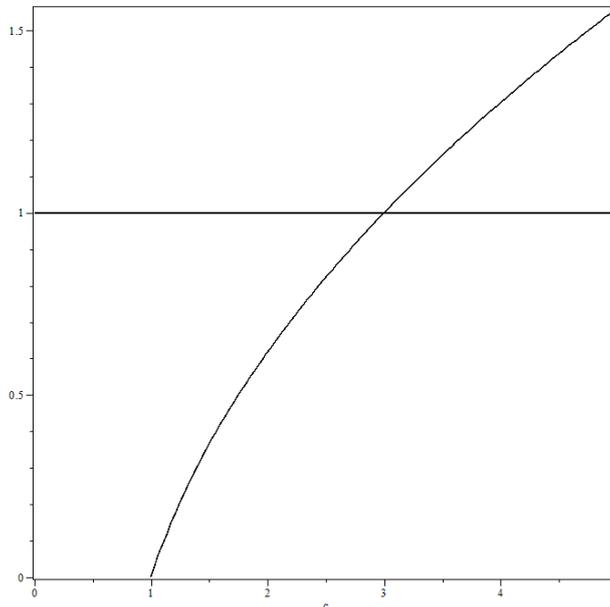


Figure 3 : schéma précisant la position des points fixes.

Comme nous avons trouvé deux points fixes, on peut supposer que des solutions hétéroclines sont possibles.

3.5 Etude de stabilité du point fixe principal :

Dans le but d'étudier la stabilité du point fixe principal $U_{pf} = 1$, on écrit le système dynamique sous la forme abrégée suivante :

$$\frac{dU_i}{d\xi} = f(U_i) \quad 3.5.1$$

On perturbe légèrement le terme U_i en écrivant :

$$U_i = U_{pf} + \tilde{U}_i \quad 3.5.2$$

On injecte cette relation dans l'équation (3.5.1) et on obtient :

$$\frac{d}{d\xi}(U_{pf} + \tilde{U}_i) = f(U_{pf} + \tilde{U}_i) \quad 3.5.3$$

Le point fixe étant indépendant de ξ on aura,

$$\frac{d}{d\xi}(\tilde{U}_i) = f(U_{pf} + \tilde{U}_i) \quad 3.5.4$$

Un développement de Taylor du 2^{ème} membre de (3.5.4) donne :

$$\frac{d\tilde{U}_i}{d\xi} = f(U_{pf}) + \left. \frac{\partial f}{\partial U_i} \right|_{U_{pf}} \tilde{U}_i \quad 3.5.5$$

Comme $f(U_{pf}) = 0$, ce développement se réduit à :

$$\frac{d\tilde{U}_i}{d\xi} = \left. \frac{\partial f}{\partial U_i} \right|_{U_{pf}} \tilde{U}_i \quad 3.5.6$$

Des solutions de (3.5.6) sous forme d'exponentielles ($e^{\lambda(x-ct)}$) sont possibles. Le système à résoudre est alors un problème aux valeurs propres qui n'a de solutions non triviales que si son déterminant est nul.

La stabilité du point fixe est liée au signe des valeurs propres λ .

- Si tous les λ sont réelles et de même signe, le point fixe est appelé nœud.
 - Si elles sont toutes positives, le nœud est instable.
 - Si elles sont négatives, le nœud est stable.
- Si au moins une des valeurs propres est réelle positive, le point fixe est appelé col. Un col est toujours instable.

- Si les valeurs propres λ sont complexes conjugués ($\lambda = \lambda_r \pm i\lambda_i$), le point fixe est un point spiral. L'instabilité du point fixe est maintenant liée au signe de la partie réelle λ_r :
 - Si le signe de λ_r est négatif, le point fixe est stable.
 - Si le signe de λ_r est positif, il est instable.

C'est dans ce dernier cas que peuvent exister des solutions en ondes périodiques qu'on va essayer de déterminer dans le prochain paragraphe.

3.6 Recherche d'ondes périodiques :

Remarquons qu'une étude de stabilité du point fixe $U_{pf} = 1$ est équivalente à une analyse de stabilité linéaire autour de l'écoulement de base, pour peu que l'on pose $\lambda = ik$, où k représente le nombre d'onde.

On commence par perturber les fonctions $q(x, t)$ et $h(x, t)$ autour de leur valeur à l'état de base :

$$h(x, t) = 1 + \epsilon H(x, t) \quad 3.6.1$$

$$q(x, t) = 1 + \epsilon Q(x, t) \quad 3.6.2$$

On remplace ensuite ces expressions dans les équations modèles (2.4.6) et (2.4.7) puis on linéarise (on néglige les termes non linéaires) :

$$\begin{aligned} 1512\epsilon^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} Q(x, t) \right) - 2016\epsilon^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} H(x, t) \right) + 66\epsilon^2 Ha^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} Q(x, t) \right) + 2520H(x, t) - \\ 840Q(x, t) + 336\epsilon R \left(\frac{\partial}{\partial t} Q(x, t) \right) + 432\epsilon R \left(\frac{\partial}{\partial x} H(x, t) \right) + 280\alpha Ha^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} H(x, t) \right) - \\ 333\epsilon R \left(\frac{\partial}{\partial x} Q(x, t) \right) - 107\epsilon^2 Ha^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} H(x, t) \right) - 840\epsilon \cot \theta \left(\frac{\partial}{\partial x} H(x, t) \right) = 0 \end{aligned} \quad 3.6.3$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} H(x, t) \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} Q(x, t) \right) = 0 \quad 3.6.4$$

On cherche enfin des solutions sous forme de modes normaux de la forme :

$$H(x, t) = A e^{ik(x-ct)}$$

$$Q(x, t) = B e^{ik(x-ct)}$$

Le système algébrique alors obtenu s'écrit :

$$(-2016\varepsilon^2\lambda^2 + 2520 + 483\varepsilon R\lambda c + 432\varepsilon R\lambda + 280RW\varepsilon^3\lambda^3 + 280\varepsilon\alpha Ha^2\lambda^2 - 840\varepsilon\cot\theta\lambda A + 1512\varepsilon^2\lambda^2 + 66\varepsilon^2Ha^2\lambda^2 - 840 + 336\varepsilon R\lambda c - 333\varepsilon R\lambda)_{B=0} \quad 3.6.5$$

$$-\lambda c A + \lambda = 0 \quad 3.6.6$$

Pour que des solutions non nulles soient possibles, le déterminant de la matrice ayant pour éléments les coefficients des amplitudes A et B du système (3.6.5) - (3.6.6), doit être nul. Le programme de calcul formel Maple nous a permis de trouver le polynôme caractéristique suivant :

$$280RW\varepsilon^3\lambda^3 + (-2016\varepsilon^2 + 1512c\varepsilon^2 + 66c\varepsilon^2Ha^2)\lambda^2 + (432\varepsilon R + 280\varepsilon\alpha RHa^2 - 816\varepsilon Rc - 840\cot\theta + 336\theta c^2\varepsilon R\lambda + 2520 - 840c) = 0, \quad 3.6.7$$

Qu'on peut formellement réécrire sous la forme :

$$D\lambda^3 + \frac{\beta_1}{R}\lambda^2 + \beta_2\lambda + \frac{\beta_3}{R} = 0 \quad 3.6.8$$

Les valeurs des coefficients β_i et D sont :

$$\beta_1 = -\frac{12}{5} + \frac{9}{5}c + \frac{11}{140}cHa^2 - \frac{167}{840}Ha^2$$

$$\beta_2 = \frac{18}{35} + \frac{\alpha Ha^2}{3} - \frac{34c}{35} - y + \frac{2c^2}{5}$$

$$\beta_3 = 3 - c$$

$$D = \frac{W}{3}$$

Où l'on a posé : $\varepsilon = 1$ et $y = \frac{\cot\theta}{R}$.

3.6.1 Bifurcations de Hopf :

La bifurcation de Hopf correspond à la traversée de l'axe imaginaire par un couple de valeurs propres complexes conjuguées $\lambda = \lambda_r \pm i\lambda_i$.

Quand $\lambda_r = 0$, on passe donc d'un point spiral instable à un point spiral stable et la valeur propre devient imaginaire pure : $\lambda = i\lambda_i$.

L'équation caractéristique (3.6.8) s'écrit alors :

$$-iD\lambda_i^3 - \frac{\beta_1}{R}\lambda_i^2 + i\beta_2\lambda_i + \frac{\beta_3}{R} = 0 \quad 3.6.9$$

En annulant la partie réelle, on trouve :

$$-\frac{\beta_1}{R}\lambda_i^2 + \frac{\beta_3}{R} = 0 \quad \text{i.e. } \lambda_i^2 = \frac{\beta_3}{\beta_1} > 0 \quad 3.6.10$$

Et pour la partie imaginaire, cela donne :

$$-D\lambda_i^3 + \beta_2\lambda_i = 0 \quad \text{i.e. } \lambda_i^2 = \frac{\beta_2}{D} > 0 \quad 3.6.11$$

On égale les deux équations (3.6.10) et (3.6.11) pour trouver le lieu des bifurcations de Hopf avec $\beta_2 > 0$:

$$\beta_2\beta_1 = \beta_3D \quad 3.6.12$$

Qu'on peut littéralement réécrire sous la forme :

$$\left(-\frac{12}{5} + \frac{9}{5}c + \frac{11}{140}cHa^2 - \frac{167}{840}Ha^2\right)\left(\frac{18}{35} + \frac{\alpha Ha^2}{3} - \frac{34c}{35} - y + \frac{2c^2}{5}\right) = \frac{W(3-c)}{3} \quad 3.6.13$$

Notons que les bifurcations de Hopf se reflètent dans l'espace physique par des ondes périodiques.

3.7 Lieu des bifurcations de Hopf :

Les figures (4 et 5) représentent le lieu des bifurcations de type Hopf dans le plan $(c, \cot\theta/R)$. La courbe en gras représente l'équation $\beta_3 = 0$. Elle nous donne la célérité des ondes au début de l'instabilité.

Les calculs ont été effectués pour un nombre de Weber de 100. Le rapport $\cot\theta/R$ s'étale jusqu'à sa valeur critique donnée par la limite de la stabilité. On rappelle que la valeur critique du nombre de Reynolds définissant le seuil de l'instabilité de l'écoulement à surface libre considéré ici est (voir [8] pour plus de détail):

$$R_c = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\cot\theta - \frac{5\alpha Ha^2}{9}\right) \quad 3.7.1$$

Nous avons fait varier les nombres électrique et magnétique pour examiner leur effet sur le lieu des bifurcations de Hopf.

Dans la figure -4-, on remarque qu'en augmentant le nombre de Hartmann (Ha) en fixant le paramètre électrique α à zéro, la courbe de Hopf s'éloigne de celle donnant la célérité critique ($c = 3$) élargissant ainsi la zone où des bifurcations hétéroclines sont possibles. De telles bifurcations donnent lieu à des ondes dites de ressaut hydraulique. On remarque également que les courbes se rejoignent toutes au point de coordonnées $(6/5, 3)$. Ce résultat était prévisible étant donné qu'en l'absence d'un champ électrique et/ou magnétique $(\cot\theta/R)_c = 6/5$. Lorsque α n'est pas nul, les graphes ne se croisent plus au

même point (voir Figure -5-) ce qui est conforme au résultat donné dans (3.7.1). Notons également que l'écart entre les courbes s'agrandit à mesure que Ha augmente.

L'augmentation du nombre électrique α avec un nombre de Hartmann Ha fixé montre des tendances similaires (voir Figure -6-) sauf que α n'a aucun effet sur le lieu des bifurcations de Hopf lorsque $Ha = 0$.

L'influence du nombre de Weber W sur le lieu des bifurcations de Hopf est représentée sur la figure -7-. On remarque qu'une augmentation de W réduit cette fois-ci la zone d'existence de bifurcations hétéroclines. Notons enfin qu'en l'absence de tension superficielle ($W = 0$), la courbe de Hopf coïncide parfaitement avec la limite $\beta_2 = 0$ représentée par des pointillés sur la figure -7-

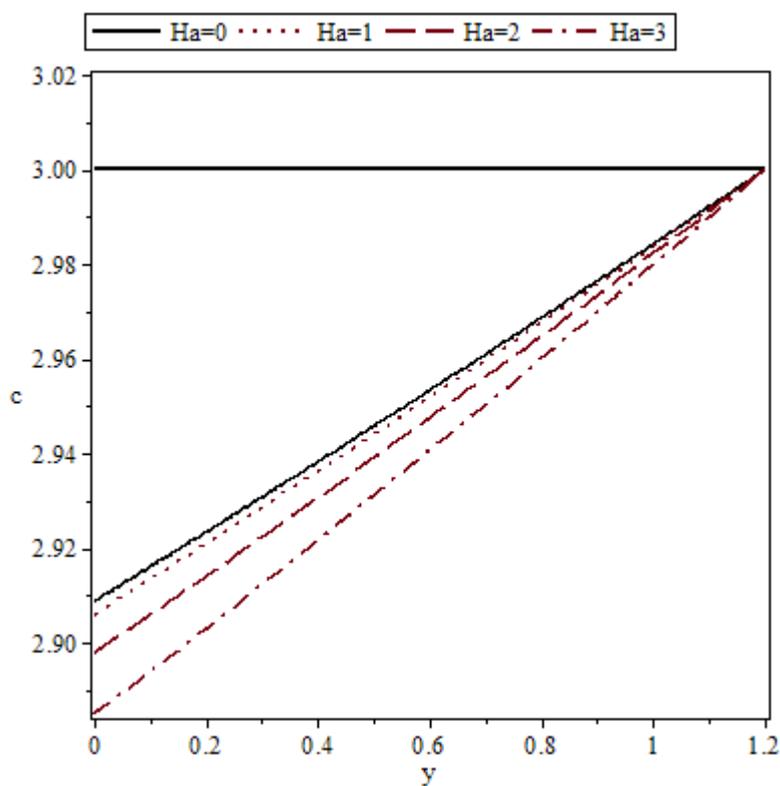


Figure 4 : Lieu des bifurcations de Hopf pour différentes valeurs du nombre de Hartmann. Les autres paramètres ont été fixés : $\alpha = 0, W = 100$.

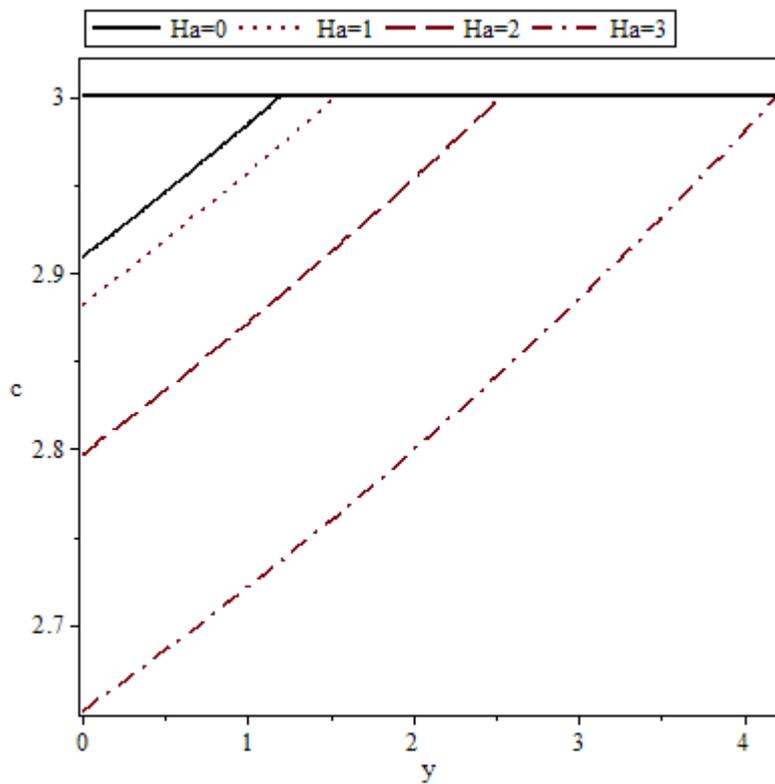


Figure 5 : Lieu des bifurcations de Hopf pour différentes valeurs du nombre de Hartmann.

Les autres paramètres ont été fixés : $\alpha = 1, W = 100$.

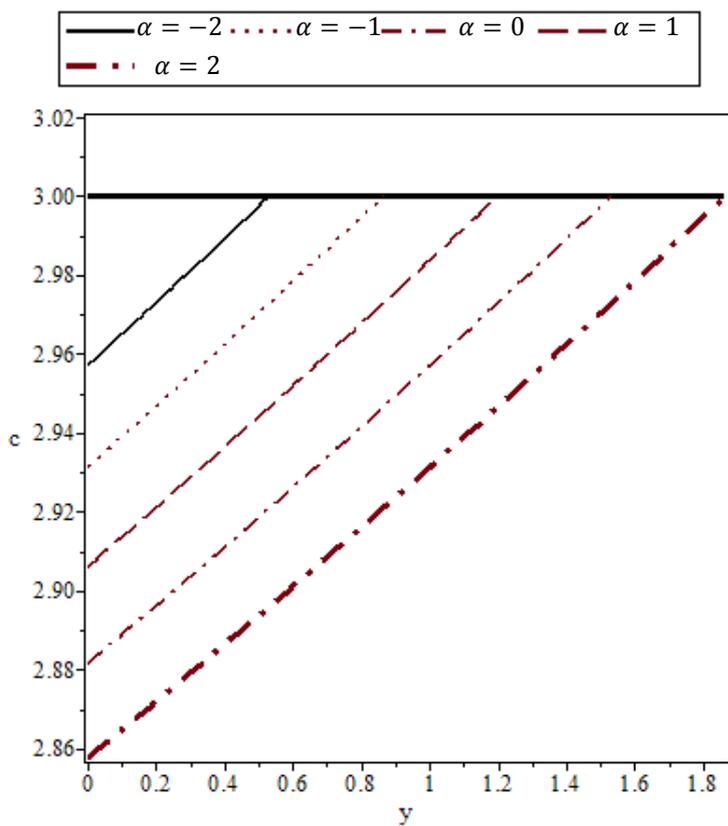


Figure 6 : Lieu des bifurcations de Hopf pour différentes valeurs du nombre électrique α . Les autres paramètres fixés : $Ha = 1, W = 100$.

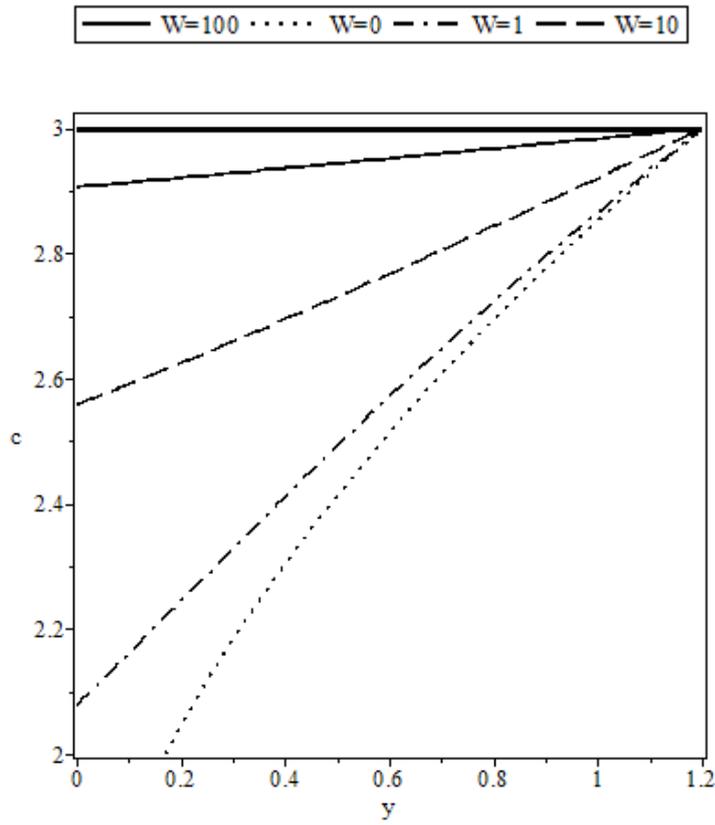


Figure 7 : Lieu des bifurcations de Hopf pour différentes valeurs du nombre de Weber. Les autres paramètres ont été fixés : $Ha = 1, \alpha = 0$.

Conclusion

Conclusion :

Dans ce travail de fin d'étude, nous avons posé le problème de l'instabilité de l'interface dans des écoulements de films tombants sur une paroi inclinée en présence d'un champ électromagnétique.

Pour répondre à ce problème, nous avons partagé ce travail en trois parties.

Dans le premier chapitre, nous avons exposé les équations régissant le mouvement du fluide électroconducteur, les équations de Navier Stokes incompressibles. Elles s'obtiennent à partir des équations de conservation de la quantité de mouvement et de conservation de la masse. Les conditions aux limites de notre problème ont également été explicitées. L'écriture de ces équations sous forme adimensionnelle a fait ressortir les paramètres contrôlant l'écoulement.

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté les modèles théoriques rencontrés dans la littérature et développés pour décrire les instabilités d'écoulements à surface libre. Nous y avons en particulier défini la méthode intégrale aux résidus pondérés, méthode que nous avons choisi d'appliquer à notre problème. Cette approche nous a permis de réduire les équations définissant le mouvement à un modèle simple, facilement exploitable dans les deux régimes linéaire et non linéaire.

Dans le troisième chapitre, nous nous sommes intéressés aux ondes qui ne se déforment pas dans un référentiel qui leur est lié. Après le passage aux variables stationnaires, nous avons transformé le modèle en un système dynamique autonome. L'étude de stabilité du point fixe principal de ce système dynamique nous a alors permis de trouver le lieu des bifurcations de Hopf puis d'examiner l'effet des champs électrique et magnétique ainsi que celui de la tension superficielle sur ce type de bifurcations. Nous y avons par ailleurs montré que l'influence du champ électrique sur le lieu de présence d'attracteurs périodiques était subordonnée à l'existence d'un champ magnétique.

Comme perspectives à ce travail de recherche, il serait intéressant de pousser l'analyse plus loin pour rechercher des solutions homoclines au problème étudié. Ces orbites correspondent à des ondes dites solitaires. Elles sont observées dans pratiquement toutes les expériences ayant trait à des écoulements à surface libre et ont par conséquent longtemps été étudiées et recherchées.

Références bibliographiques

- [1] T.B. Benjamin, Wave formation in laminar flow down an inclined plane. J. Fluid Mech. 2, 554-573, 1957.
- [2] C.-S. Yih, Instability due to viscosity stratification. J. Fluid Mech. 27, 337-352, 1967.
- [3] Séverine Millet, stabilité de l'écoulement multicouche de films non newtoniens sur un plan incliné, université de Lyon (ECL/INSA-Lyon-UCBL).
- [4] François Charru, instabilités hydrodynamiques. EDP Sciences /CNRS EDITION.
- [5] D .J. Benney, Long waves on liquid films. J. Math. & Phys., 45:150–155, 1966.
- [6] Ruyer-Quil, C. Dynamique d'un film mince s'écoulant le long d'un plan incliné, thèse Ph.D., Ecole Polytechnique, (1999).
- [7] Ruyer-Quil, C. and Manneville, P. 1998. Modeling film flows down inclined planes. Eur. Phys. J. B 6 : 277-292.
- [8] Belloul,A. , Influence d'un champ électromagnétique sur l'écoulement plan d'un fluide non newtonien, (2015).
- [9] Ndoumbe, S. Lusseyran, F. Izrar, B. Contribution à la modélisation d'un film annulaire tombant, C. R. Mécanique 331 pp 173–178, (2003).
- [10] Preziosi, L. Chen, K. Joseph, D.D. Lubricated pipelining: stability of core-annular flow, J. Fluid Mech. 201 (1989).
- [11] Chang H.-C. et Demekhin, E. A. Complex wave Dynamics on Thin Films. Elsevier Science, Amsterdam. ISBN 0 444 50970 4,(2002).
- [12] Leblanc,S. Hydrodynamique, problèmes corrigés. EDP Sciences. ISBN 978-2-7598-0525-9,(2010).
- [13] Shkadov, V.Ya., Wave flow regimes of a thin layer of viscous fluid subject to gravity.Izv.Ak. Nauk SSSR, Mekh. Zhi.Gaza 2 : 43-51,(1967).
- [14] TAHIYAT,L. , Modélisation des instabilités aux grandes ondes d'un écoulement le long d'un cylindre vertical, (2017)
- [15] [Wikipédia](#).

Résumé

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés aux instabilités d'écoulements de fluides électroconducteurs de fine épaisseur soumis à l'action d'un champ électromagnétique. Une modélisation par l'approche intégrale aux résidus pondérés a été considérée. Le modèle que nous avons obtenu contient tous les effets physiques importants.

Une étude des ondes stationnaires dans leur référentiel a été effectuée. Nous avons examiné dans ce cadre l'influence d'un champ électromagnétique uniforme sur le lieu des bifurcations de type Hopf. Nous avons alors montré que l'influence du champ électrique sur le lieu de présence d'attracteurs périodiques était subordonnée à l'existence d'un champ magnétique.

Mots clés : fluide électroconducteur, faible épaisseur, ondes stationnaires.