Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane Mira de Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse et Probabilités

Par

GUIROUR Dihya
HADJAR Souad

THÈME

Solutions élémentaires de quelques équations aux dérivées partielles

Soutenu publiquement, le 20/06/2017 devant le jury composé de :

Mme	**H. BECHIR**	M. C. A	Université A. Mira de Béjaia	Présidente
Mme	**S. TAS**	Prof	Université A. Mira de Béjaia	Promotrice
Mr	**B. KERAI**	M. A. A	Université A. Mira de Béjaia	Examinateur

Remerciements

Nous tenons à remercier DIEU de nous avoir donné la force, le courage et la patience pour venir à bout de ce modeste travail.

Nous avons l'honneur et le plaisir d'exprimer notre profonde gratitude et nos sincères remerciements à Madame S. TAS pour son encadrement, sa disponibilité et ses précieux conseils.

Nous remercions également Madame H. BECHIR pour l'honneur qu'elle nous fait en acceptant de présider le jury de soutenance et de juger ce travail.

Nous remercions vivement Monsieur B. KERAI qui a accepté d'examiner cet humble travail. Nous tenons à le remercier aussi pour toute son aide durant notre cursus.

Nous n'omettons pas d'adresser nos vifs remerciements à tous les membres de la faculté des Sciences Exactes en général et aux membres du département de Mathématiques en particulier, notamment à tous les enseignants pour les efforts qu'ils ont déployé durant notre formation.

Dédicaces

Tous les mots ne sauraient exprimer mon ressenti, seulement, je dédie ce modeste travail :

A ma mère qui m'a entourée de sa sollicitude et de son soutien moral.

A mon père qui m'a encouragée par ses conseils.

A ma soeur Nassima, sa famille et à mes frères et leurs femmes (Salem, Mima, Nabil, Yasmine, Karim) pour leur soutien moral sans faille et leurs précieux conseils.

A mes cousines et cousins.

A toute ma grande famille.

A mes amies.

A tous mes camarades de promotion avec lesquels j'ai partagé ces années.

A tous ceux qui me sont chers et que j'ai omis de citer.

GUIROUR Dihya

Dédicaces

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à mes parents auxquels je dédie ce modeste travail, pour leurs encouragements et leur soutien inconditionnel, ainsi qu'à mes très chères soeurs (Latifa et Meliha), mon frère (Amirouche) et mon mari (Lyes) ainsi que sa famille.
Bien sûr, je ne saurai oublier de remercier vivement mes cousines et mes cousins ainsi que mes oncles maternels, paternels et toute ma grande famille.

Je remercie enfin, mes amies et tous mes camarades de promotion avec lesquels j'ai partagé ces années.

HADJAR Souad

Table des matières

Liste de quelques notations

$D(\Omega)$	Espace des fonctions C^∞ et à support compact dans Ω.
$D'(\Omega)$	Espace des distributions sur Ω.
$\mathcal{E}'(\Omega)$	Espace des distributions sur Ω à support compact.
$\|.\|$	Norme.
∂^α	Dérivée partielle d'ordre α.
exp	Fonction exponentielle.
$\langle .,. \rangle$	Crochet de dualité.

Introduction

Les équations aux dérivées partielles constituent le champ d'application le plus important de la théorie des distributions. Historiquement, elles en ont été la motivation première.

La notion de solution élémentaire est d'une extrême importance. D'ailleurs, ces solutions ont été depuis longtemps l'objet de nombreuses études.

Parmi les mathématiciens attachés à l'étude de ces solutions, nous citons Bernard Malgrange qui pour lui cette notion est un problème extrêmement surprenant. En effet, on ne s'intéressait guère qu'aux équations elliptiques, paraboliques ou hyperboliques, mais pas aux équations tout à fait générales, de ce fait, l'idée de trouver une solution élémentaire lui a paru un peu farfelue. Puisqu'une telle solution E d'un opérateur différentiel à coefficients constants $P(D)$, est une distribution $E \in D'(\mathbb{R}^N)$ vérifiant $P(D)E = \delta_0$ dans $D'(\mathbb{R}^N)$.

En revanche, après nombreux travaux, Bernard Malgrange et en même temps Léon Ehrenpreis ont réussi à montrer en 1955-1956 que tout opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbb{R}^N$ admet une solution élémentaire.

Sans nul doute, ce théorème est l'un des résultats majeurs de la théorie générale des équations aux dérivées partielles linéaires. De plus, il montre que la théorie des distributions fournit le bon cadre pour étudier les équations aux dérivées partielles linéaires.

Par ailleurs, la question qui se pose est: est-ce-que la connaissance d'une solution élémentaire d'un opérateur différentiel à coefficients constants $P(D)$ sur $\mathbb{R}^N$, permet de calculer explicitement une solution de l'équation $P(D)u = f$ dans $D'(\mathbb{R}^N)$ pour toute distribution f à support compact.

Pour répondre à cette question en plus de pouvoir obtenir des solutions élémentaires, nous allons dans un premier temps, rappeler quelques résultats sur les distributions, puis introduire la notion de la convolution ainsi que celle de la transformation de Fourier qui sont les outils fondamentaux intervenant dans l'analyse des équations aux dérivées partielles à coefficients constants.

Nous nous intéressons ensuite au calcul des solutions élémentaires des principaux opérateurs de la physique mathématique, tels que le Laplacien, le D'Alembertien, l'opérateur de la chaleur et celui de Schrödinger. Enfin, nous présentons leur intérêt et leur utilisation dans la résolution de quelques équations aux dérivées partielles à coefficients constants.

CHAPITRE 1 Préliminaires

Dans toute la suite, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

$D(\Omega)$ est l'espace vectoriel des fonctions C^∞, à support compact dans Ω, muni de sa topologie limite inductive stricte d'espaces de Fréchet $D_{K_j}(\Omega)$, et son dual $D'(\Omega)$ est l'espace des distributions sur Ω.

Proposition 1.0.1 *([4]) Une forme linéaire u sur $D(\Omega)$ est une distribution sur Ω si et seulement si elle vérifie l'une des deux propriétés équivalentes suivantes:*
(1) Si $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers 0 dans $D(\Omega)$ alors $u(\varphi_m)$ converge vers 0 dans $\mathbb{C}$.
(2) Pour tout compact K de Ω, il existe une constante $c_K > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall\varphi \in D_K(\Omega), |u(\varphi)| \leq c_K. \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi(x)| .$$

k est appelé ordre de la distribution u sur le compact K. Et notons que $u(\varphi) = \langle u, \varphi\rangle$.

Définition 1.0.1 *Soit $\boldsymbol{a} \in \Omega$. On appelle distribution ou masse de Dirac au point $\boldsymbol{a}$ la forme linéaire sur $D(\Omega)$ définie par $\langle \delta_{\boldsymbol{a}}, \varphi\rangle = \varphi(\boldsymbol{a}), \forall\varphi \in D(\Omega)$.*

Définition 1.0.2 *Pour $u \in D'(\Omega)$, le support de u, que l'on note $Supp(u)$ est le sous-ensemble fermé de Ω défini par l'une des assertions équivalentes suivantes:*

(1) $C_\Omega Supp(u)$ est le plus grand ouvert de Ω sur lequel u est identiquement nulle.

(2) $x_0 \notin Supp(u) \Leftrightarrow \exists \upsilon(x_0)$, un voisinage ouvert de x_0 tel que $\langle u, \varphi \rangle = 0, \forall \varphi \in D(\upsilon(x_0))$.

(3) $x_0 \in Supp(u) \Leftrightarrow \forall \upsilon(x_0), \exists \varphi \in D(\upsilon(x_0)), \langle u, \varphi \rangle \neq 0$.

Définition 1.0.3 *Soit $u \in D'(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^N$, on définit $\partial^\alpha u$ par $\langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle$. Cette définition a un sens car si $\varphi \in D(\Omega)$, $\partial^\alpha \varphi \in D(\Omega), \forall \varphi \in D(\Omega)$.*

Définition 1.0.4 *Soit $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de $D'(\Omega)$ et $u \in D'(\Omega)$. On dit que $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers u dans $D'(\Omega)$ (et on écrira $(u_j) \to u$) si $\lim\limits_{j\to+\infty} \langle u_j, \varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle, \forall \varphi \in D(\Omega)$.*

Proposition 1.0.2 *([3]) Soit une suite $(U_n)_{n\geq 1}$ de distributions sur Ω et une suite $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ de fonctions de $D(\Omega)$.*

Supposons que $U_n \to u$ dans $D'(\Omega)$ lorsque $n \to \infty$

et $\varphi_n \to \varphi$ dans $D(\Omega)$lorsque $n \to \infty$

Alors

$$\langle U_n, \varphi_n \rangle \to \langle u, \varphi \rangle \text{ lorsque } n \to \infty.$$

Définition 1.0.5 *On note $\mathcal{E}'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω à support compact.*

Théorème 1.0.1 *([2]) a) Toute distribution $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ est d'ordre fini.*
b) Plus précisément, en notant p l'ordre de u, pour tout voisinage compact K de $Supp(u)$, il existe une constante C telle que

$$\forall \varphi \in D(\Omega), |\langle u, \varphi \rangle| \leq C. \sup_{\substack{x\in K \\ |\alpha|\leq p}} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Théorème 1.0.2 *([2]) (Dérivation sous le crochet)*
Soit $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^p)$ et soit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^{p+q})$. Alors la fonction $y \mapsto \langle u(x), \varphi(x,y) \rangle$ est de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^q$ et on a

$$\partial_y^\alpha \langle u(x), \varphi(x,y) \rangle = \left\langle u(x), \partial_y^\alpha \varphi(x,y) \right\rangle$$

Théorème 1.0.3 *([2]) (Intégration sous le crochet)*
Soient $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^p)$ et $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^{p+q})$. Soit Q un pavé compact de $\mathbb{R}^q$. On a alors

$$\left\langle u(x), \int_Q \varphi(x,y)dy \right\rangle = \int_Q \langle u(x), \varphi(x,y)\rangle \, dy.$$

Corollaire 1.0.1 *([4]) Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^p$, et φ un élément de $D(O \times \Omega)$. Soit $u \in D'(\Omega)$. Alors*

$$\left\langle u, \int\limits_\Omega \varphi(t,.)dt \right\rangle = \int\limits_\Omega \langle u, \varphi(t,.)\rangle \, dt.$$

Théorème 1.0.4 *([5]) (La formule des sauts)*
Soit f une fonction de classe C^1 par morceaux dans $[a,b]$, et qui admet en tout point où elle n'est pas continue, une limite à droite et une limite à gauche, il existe aussi une subdivision de $[a,b]$ en intervalles $[a,a_1[,]a_i, a_{i+1}[,]a_{i+1}, b]$ telle que f soit de classe C^1 sur $]a_i, a_{i+1}[$, alors la dérivée au sens des distributions de f notée $(u_f)'$ est donnée, à partir de $u_{f'}$ (la distribution définie par f' sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$) et des sauts de f, par

$$(u_f)' = u_{f'} + \sum_{i=0}^{n+1} (f(a_i^+) - f(a_i^-))\delta_{a_i}$$

Avec $f(a_i^+)$ et $f(a_i^-)$ sont les limites à droite et à gauche respectivement de f, et par convention $a_0 = a, a_{n+1} = b, f(a_0^-) = 0, f(a_{n+1}^+) = 0$.

Proposition 1.0.3 *([3]) (Formule de Leibnitz dans D')*
Soit $a \in C^\infty(\Omega)$ et $u \in D'(\Omega)$.
Alors, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^N$, on a

$$\partial^\alpha(au) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^{\alpha-\beta} a)\partial^\beta u \ \text{dans}\ D'(\Omega).$$

Théorème 1.0.5 *([4]) Soit $u \in D'(\Omega)$ et $x_0 \in \Omega$. Supposons que $Supp(u) = \{x_0\}$. Il existe alors un entier k et des nombres complexes a_α, pour $|\alpha| \le k$, tels que*

$$\langle u, \varphi\rangle = \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha \partial^\alpha \varphi(x_0), \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Définition 1.0.6 *(Distribution homogène de degré β)*
On dit qu'une distribution $u \in D'(\Omega)$ est homogène de degré β si, pour tout $\lambda > 0$,

$$u \circ M_\lambda = \lambda^\beta u \text{ dans } D'(\Omega)$$

où $M_\lambda : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, *est l'homothétie de $\mathbb{R}^N$ de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$.*
$\qquad x \mapsto \lambda x$

Proposition 1.0.4 *([3]) Soit Ω un cône ouvert de $\mathbb{R}^N$ et u une distribution homogène de degré β sur Ω. Alors pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^N$, la distribution $\partial_x^\alpha u$ est homogène de degré $\beta - |\alpha|$.*

CHAPITRE 2

Convolution

Le produit de convolution de deux fonctions f et g sur $\mathbb{R}^N$ est défini par

$$h(x) = (f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy,$$

chaque fois que f et g sont sommables et que l'intégrale qui définit h est convergente.

2.1 Convolution d'une distribution et d'une fonction de $D(\mathbb{R}^N)$

Lorsque u est une fonction sommable et $\varphi \in D(\mathbb{R}^N)$, on a

$$(u \star \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x-y)u(y)dy = \langle u(y), \varphi(x-y)\rangle .$$

Définition 2.1.1 *Pour $u \in D'(\mathbb{R}^N)$ et $\varphi \in D(\mathbb{R}^N)$, on définit*

$$u \star \varphi(x) = \langle u, \tau_x(\check{\varphi})\rangle = \langle u, \varphi(x - .)\rangle$$

où $\check{\varphi}$ est la fonction définie par $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$

et

$$\begin{aligned} \tau_x f : \mathbb{R}^N &\to \mathbb{C} \\ y &\mapsto \tau_x(f) = f(y-x). \end{aligned}$$

Proposition 2.1.1 *Pour $u \in D'(\mathbb{R}^N)$ et $\varphi \in D(\mathbb{R}^N)$, on a*

$$Supp(u \star \varphi) \subset Supp(u) + Supp(\varphi).$$

Démonstration. Si $x \in \mathbb{R}^N \backslash (Supp(u) + Supp(\varphi))$ alors

$Supp(\varphi(x - .)) = \{x\} - Supp(\varphi)$.

Donc $Supp(\varphi(x - .)) \cap Supp(u) = \emptyset$.

D'après la définition 1.0.2, $u \star \varphi(x) = \langle u, \varphi(x - .)\rangle = 0$.

Donc $u \star \varphi = 0$ sur $\mathbb{R}^N \backslash (Supp(u) + Supp(\varphi))$.

Ce qui montre que $\mathbb{R}^N \backslash (Supp(u) + Supp(\varphi)) \subset \mathbb{R}^N \backslash (Supp(u \star \varphi)$.

Par passage au complémentaire, on déduit que

$$Supp(u \star \varphi) \subset Supp(u) + Supp(\varphi).$$

■

Proposition 2.1.2 *Pour $u \in D'(\mathbb{R}^N)$ et $\varphi \in D(\mathbb{R}^N)$, le produit de convolution de u par la fonction φ, est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^N$, et on a*

$$\partial_x^\alpha (u \star \varphi) = (\partial_x^\alpha u) \star \varphi = u \star \partial_x^\alpha \varphi.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}(\partial_x^\alpha u) \star \varphi(x) &= \langle \partial^\alpha u, \varphi(x - .)\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha (\varphi(x - .))\rangle \\ &= \langle u, (\partial^\alpha \varphi)(x - .)\rangle \\ &= u \star \partial^\alpha \varphi(x)\end{aligned}$$

Car $(-1)^{|\alpha|} \partial_y^\alpha (\varphi(x - y)) = \partial^\alpha \varphi(x - y)$.

D'autre part, soit $x_0 \in \mathbb{R}^N$ et $\chi \in D(\ \mathbb{R}^N)$, une fonction plateau telle que $\chi = 1$ sur $B(x_0, 1)$.

La fonction de classe C^∞, $(x, y) \mapsto \chi(x)\varphi(x - y)$ est à support dans $Supp(\chi) + (Supp(\chi) + Supp(\varphi))$.

D'après le théorème de dérivation sous le crochet de dualité, la fonction

$x \mapsto \langle u, \chi(x)\varphi(x-.)\rangle$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^N$,

et $\partial^\alpha \langle u, \chi(x)\varphi(x-.)\rangle = \langle u, \partial_x^\alpha(\chi(x)\varphi(x-.))\rangle$ sur $B(x_0,1)$.

Cette fonction coïncide avec $u\star\varphi$. Ce qui montre que $u\star\varphi$ est de classe C^∞ sur $B(x_0,1)$ et que pour tout $x\in B(x_0,1)$, on a

$$\begin{aligned}
u\star\partial^\alpha\varphi(x) &= \langle u, (\partial^\alpha(\varphi))(x-.)\rangle \\
&= \langle u, \partial_x^\alpha(\varphi(x-.))\rangle \\
&= \partial^\alpha \langle u, \varphi(x-.)\rangle \\
&= \partial^\alpha(u\star\varphi).
\end{aligned}$$

On conclut que ceci est vrai, $\forall x_0\in\mathbb{R}^N$. ■

Théorème 2.1.1 *Soit $u\in D'(\mathbb{R}^N)$. Soit $(\xi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une suite régularisante, c'est à dire*

$$\xi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-N}\xi(\frac{x}{\varepsilon})$$

avec $\xi\in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, à support dans $B(0,1)$, $\xi>0$ et $\int\limits_{\mathbb{R}^N}\xi(x)dx = 1$.

Posons $u_\varepsilon = u\star\xi_\varepsilon$. Alors $u_\varepsilon\in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $u_\varepsilon\to u$ dans $D'(\mathbb{R}^N)$ lorsque $\varepsilon\to 0^+$.

Démonstration. D'après la proposition 2.1.2, $u_\varepsilon\in C^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Ainsi, pour toute fonction $\varphi\in D(\mathbb{R}^N)$ on a

$$\begin{aligned}
\langle u_\varepsilon, \varphi\rangle &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon(x)\varphi(x)dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \langle u, \xi_\varepsilon(x-.)\rangle\,\varphi(x)dx \\
&= \left\langle u, \int\limits_{\mathbb{R}^N}\xi_\varepsilon(x-.)\varphi(x)dx\right\rangle, \text{ grâce au théorème 1.0.3.}
\end{aligned}$$

Or $\int\limits_{\mathbb{R}^N}\xi_\varepsilon(x-y)\varphi(x)dx = \check{\xi}_\varepsilon\star\varphi(y), \forall y\in\mathbb{R}^N$, de sorte que pour tout $\varepsilon\in]0,1[$,

$Supp(\xi_\varepsilon\star\varphi)\subset K$, où $K=\{x\in\mathbb{R}^N : dist(x, Supp(\varphi))\leq 1\}$ est compact dans $\mathbb{R}^N$.

D'autre part, d'après la proposition 2.1.2, $\partial^\alpha(\check{\xi}_\varepsilon\star\varphi) = \check{\xi}_\varepsilon\star\partial^\alpha\varphi$.

Ainsi, pour tout $\alpha\in\mathbb{N}^N$, $\partial^\alpha(\check{\xi}_\varepsilon\star\varphi)\to\partial^\alpha\varphi$ uniformément sur K, lorsque $\varepsilon\to 0^+$.

Donc, pour toute suite $\varepsilon_n \to 0$ quand $n \to \infty$ et telle que $\varepsilon_n \in]0,1[, \forall n \in \mathbb{N}$, on a $\check{\xi}_{\varepsilon_n} \star \varphi \to \varphi$ dans $D'(\mathbb{R}^N)$.

Par conséquent

$\langle u_{\varepsilon_n}, \varphi \rangle = \left\langle u, \check{\xi}_{\varepsilon_n} \star \varphi \right\rangle \to \langle u, \varphi \rangle$ lorsque $n \to \infty$.

Comme ceci vaut pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R}^N)$ et toute suite $\varepsilon_n \to 0$ quand $n \to \infty$ telle que $\varepsilon_n \in]0,1[, \forall n \in \mathbb{N}$, on conclut que $u_\varepsilon \to u$ pour $\varepsilon \to 0^+$ dans $D'(\mathbb{R}^N)$. ∎

2.2 Convolution d'une distribution à support compact et d'une fonction de $D(\mathbb{R}^N)$

Définition 2.2.1 *Soient $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ et $\varphi \in D(\mathbb{R}^N)$.*
Leur produit de convolution est défini par

$$(u \star \varphi)(x) = \langle u(y), \varphi(x-y) \rangle .$$

Théorème 2.2.1 *Soient $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ et $\varphi \in D(\mathbb{R}^N)$.*
La fonction $u \star \varphi$ appartient à $D(\mathbb{R}^N)$, et on a

$$\partial^\alpha (u \star \varphi) = u \star (\partial^\alpha \varphi) = (\partial^\alpha u) \star \varphi,$$
$$Supp(u \star \varphi) \subset Supp(u) + Supp(\varphi).$$

Démonstration. D'après le théorème de la dérivation sous le crochet, on a

$$\langle u(y), \varphi(x-y) \rangle \text{ est de classe } C^\infty, \text{ donc } (u \star \varphi) \text{ est de classe } C^\infty.$$

De plus

$$\begin{aligned} \partial^\alpha (u \star \varphi)(x) &= \partial^\alpha \langle u(y), \varphi(x-y) \rangle \\ &= \langle u(y), \partial_x^\alpha \varphi(x-y) \rangle \\ &= u \star \partial^\alpha \varphi. \end{aligned}$$

D'autre part, on remarque que $\partial_x^\alpha \varphi(x-y) = (-1)^{|\alpha|} \partial_y^\alpha \varphi(x-y)$.

En utilisant la dérivation au sens des distributions, on obtient

$$\begin{aligned}((\partial^\alpha u) \star \varphi)(x) &= \langle \partial_x^\alpha u(y), \varphi(x-y)\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle u(y), \partial_x^\alpha \varphi(x-y)\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \left\langle u(y), (-1)^{|\alpha|} \partial_y^\alpha \varphi(x-y)\right\rangle \\ &= \left\langle u(y), \partial_y^\alpha \varphi(x-y)\right\rangle \\ &= u \star (\partial^\alpha \varphi) = \partial^\alpha (u \star \varphi).\end{aligned}$$

Donc $(\partial^\alpha u) \star \varphi = \partial^\alpha (u \star \varphi)$.

Enfin, le support de $u \star \varphi$ est compact. Plus précisément, il est contenu dans $Supp(u) + Supp(\varphi)$. En effet, si $x \notin Supp(u) + Supp(\varphi)$, les supports de u et de $y \mapsto \varphi(x-y)$ sont disjoints. ■

Théorème 2.2.2 *Soient $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, φ et $\psi \in D(\mathbb{R}^N)$, on a alors*

$$(u \star \varphi) \star \psi = u \star (\varphi \star \psi)$$

et

$$\langle u \star \varphi, \psi\rangle = \langle u, \check{\varphi} \star \psi\rangle .$$

Démonstration. Pour $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, φ et $\psi \in D(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\begin{aligned}(u \star \varphi) \star \psi &= \langle u(y), (\varphi \star \psi)(x-y-z)\rangle \\ &= \left\langle u(y), \int \varphi(x-y-z)\psi(z)dz\right\rangle\end{aligned}$$

En utilisant le théorème d'intégration sous le crochet, on obtient

$$\begin{aligned}(u \star \varphi) \star \psi &= \left\langle u(y), \int \varphi(x-y-z)\psi(z)dz\right\rangle \\ &= \int \langle u(y), \varphi(x-y-z)\rangle \psi(z)dz \\ &= \int (u \star \varphi)(x-y-z)\psi(z)dz \\ &= (u \star \varphi) \star \psi.\end{aligned}$$

Notons d'abord que $\check{\varphi}(x-y) = \varphi(y-x)$.

On a aussi

$$\begin{aligned}
\langle u, \check{\varphi} \star \psi \rangle &= \left\langle u(y), \int \varphi(x-y)\psi(y)dy \right\rangle \\
&= \int \langle u(y), \varphi(x-y) \rangle \, \psi(y)dy \\
&= \int (u \star \varphi)\psi(y)dy \\
&= \langle u \star \varphi, \psi \rangle \, .
\end{aligned}$$

■

Convolution et translations

Le produit de convolution commute avec les translations. On a en effet, pour $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ et pour $\varphi \in D(\mathbb{R}^N)$

$$\langle u(y), \varphi(x-(a+y)) \rangle = \langle \tau_a u(y), \varphi(x-y) \rangle \tag{2.2.1}$$

ou encore

$$\tau_a(u \star \varphi) = (\tau_a u) \star \varphi = u \star (\tau_a \varphi). \tag{2.2.2}$$

Remarquons que $(u \star \varphi)(0) = \langle u(y), \varphi(-y) \rangle$, et donc en remplaçant φ par $\tilde{\varphi}$

$$\langle u, \varphi \rangle = (u \star \check{\varphi})(0). \tag{2.2.3}$$

Théorème 2.2.3 *Soit $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, soit $U : D(\mathbb{R}^N) \to D(\mathbb{R}^N)$ l'opérateur défini par $U\varphi = u \star \varphi$. On a*
$\forall K$ compact, $\forall p \in \mathbb{N}, \exists L$ compact, $\exists q \in \mathbb{N}, \exists C > 0$,

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^N), \sup_{\substack{x \in K \\ |\alpha| \leq p}} |\partial^\alpha (U\varphi)(x)| \leq C \sup_{\substack{x \in L \\ |\beta| \leq q}} \left|\partial^\beta \varphi(x)\right| \tag{2.2.4}$$

Démonstration. On a $\partial^\alpha(u\star\varphi)(x) = \langle u(y), (\partial^\alpha\varphi)(x-y)\rangle$

Si r est l'ordre de u et si H est un voisinage compact du support de u alors d'après le théorème 1.0.1, il existe une constante C telle que

$$\forall\varphi \in D(\mathbb{R}^N)\,|\langle u(y), (\partial^\alpha\varphi)(x-y)\rangle| \leq C\sup_{\substack{y\in H\\|\alpha|\leq r}} |\partial^\alpha\varphi(x-y)|$$

Donc

$$\sup_{x\in K} |\partial^\alpha(u\star\varphi)(x)| \leq C \sup_{\substack{z\in K-H\\|\beta|\leq|\alpha|+r}} \left|\partial^\beta\varphi(z)\right|$$

La propriété (2.2.4) découle directement avec $L = K - H$ et $q = p + r$. ■

Théorème 2.2.4 *Soit $U : D(\mathbb{R}^N) \to D(\mathbb{R}^N)$, qui commute avec les translations (cà.d $U\tau_a\varphi = \tau_a U\varphi$) et qui possède la propriété de continuité (2.2.4).*
Il existe alors une unique distribution u à support compact telle que

$$\forall\varphi \in D(\mathbb{R}^N), U\varphi = u\star\varphi.$$

Démonstration. Supposons que $U\varphi(0) = (u\star\varphi)(0) = \langle u, \check{\varphi}\rangle = \langle \check{u}, \varphi\rangle$.

Il en résulte que la distribution $\check{u}$ est donc elle même u.

Considérons maintenant la forme linéaire v sur $D(\mathbb{R}^N)$ définie par $\langle v, \varphi\rangle = U\varphi(0)$.

En utilisant la propriété (2.2.4), pour $p = 0, K = \{0\}$, on obtient l'existence de q, L, C tels que

$$\forall\varphi \in D(\mathbb{R}^N), |\langle v, \varphi\rangle| = |U\varphi(0)| \leq C\sup_{\substack{x\in L\\|\alpha|\leq q}} |\partial^\alpha\varphi(x)|\,.$$

Cela implique que v est une distribution et que $Supp(v) \subset L$.

Pour $a \in \mathbb{R}^N$, la valeur de $U\varphi$ au point a est égale à la valeur de $\tau_{-a}U\varphi = U\tau_{-a}\varphi$ à l'origine. On a donc

$$U\varphi(a) = \langle v, \tau_{-a}\varphi\rangle = \langle \check{v}, \tau_a\check{\varphi}\rangle = \langle \check{v}(y), \varphi(a-y)\rangle$$

Ainsi $U\varphi = \check{v}\star\varphi$. ■

2.3 Convolution des distributions

Dans cette partie, nous allons définir le produit de convolution de deux distributions, pas deux distributions quelconques, mais deux distributions dont l'une est à support compact.

L'extention du produit de convolution au cas de deux distributions est absolument fondamentale dans l'étude des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants.

Pour toute distribution $u \in D'(\mathbb{R}^N)$ et $\varphi \in D(\mathbb{R}^N)$, on note

$$\langle \check{u}, \varphi \rangle = \langle u, \check{\varphi} \rangle \text{ , où } \check{\varphi}(x) = \varphi(-x).$$

Définition 2.3.1 *Soient u et v deux distributions sur $\mathbb{R}^N$. On appelle produit tensoriel (ou produit direct) de u et v la distribution notée $u \otimes v$ définie sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, par*

$$\langle u(x) \otimes v(y), \varphi(x,y) \rangle = \langle u(x), \langle v(y), \varphi(x,y) \rangle \rangle, \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N).$$

Définition 2.3.2 *Soit $u \in D'(\mathbb{R}^N)$, $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$.*
On définit le produit de convolution de u et v comme étant la distribution notée
$u \star v \in D'(\mathbb{R}^N)$ définie par

$$\langle u \star v, \varphi \rangle = \langle u, \check{v} \star \varphi \rangle, \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^N).$$

Proposition 2.3.1 *Pour tout $u \in D'(\mathbb{R}^N)$ et $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, on a*

$$Supp(u \star v) \subset Supp(u) + Supp(v).$$

Démonstration. On a $Supp(u) + Supp(v)$ est fermé dans $\mathbb{R}^N$ puisque $Supp(v)$ est compact dans $\mathbb{R}^N$.

Soient $O = \mathbb{R}^N \backslash (Supp(u) + Supp(v))$ et $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ à support dans l'ouvert O.

D'après la proposition 2.1.1 et 2.1.2, la fonction $\check{v} \star \varphi$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^N$ à support dans $Supp(\check{v}) + Supp(\varphi) = \{-x + y / x \in Supp(v) \text{ et } y \in Supp(u)\}$.

Or $Supp(u) \cap (Supp(\check{v}) + Supp(\varphi)) = \emptyset$.

Il existerait $x \in Supp(v)$ et $y \in Supp(\varphi)$ tels que $y \in Supp(u) + \{x\} \subset Supp(u) + Supp(v)$

Ce qui contredit le fait que φ est à support dans O.

Comme $\check{v} \star \varphi$ est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^N$à support compact ne rencontrant pas $Supp(u)$, on déduit de la définition 1.0.2 (2), que $\langle u \star v, \varphi\rangle = \langle u, \check{v} \star \varphi\rangle = 0$.

Par conséquent $u \star v|_O = 0$.

D'où $Supp(u \star v) \subset Supp(u) + Supp(v)$. ■

Proposition 2.3.2 *Soit $u \in D'(\mathbb{R}^N)$ et $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$. Alors*

(a) Pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R}^N)$ $\langle v, \check{u} \star \varphi\rangle = \langle u, \check{v} \star \varphi\rangle$.

(b) Si on définit la distribution $v\star u$ par la formule $\langle v \star u, \varphi\rangle = \langle v, \check{u} \star \varphi\rangle, \forall\varphi \in D(\mathbb{R}^N)$, alors $v \star u = u \star v$.

Démonstration. Soit $\xi \in D(\mathbb{R}^N)$ telle que $Supp(\xi) \subset B(0,1), \xi \geq 0, \int\limits_{\mathbb{R}^N} \xi(x)dx = 1$.

On pose $\xi_n(x) = n^N\xi(nx), x \in \mathbb{R}^N$ et $V_n = v \star \xi_n$, $n \geq 1$.

D'après le théorème 1.0.3, on a

$$\begin{aligned}
\langle V_n, \check{u} \star \varphi\rangle &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} V_n(x) \langle \check{u}, \varphi(x - .)\rangle\, dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^N} V_n(x) \langle u, \varphi(x + .)\rangle\, dx \\
&= \left\langle u, \int\limits_{\mathbb{R}^N} V_n(x)\varphi(x + .)dx \right\rangle \\
&= \left\langle u, \int V_n(-x)\varphi(-x + .)dx \right\rangle \\
&= \left\langle u, \check{V}_n \star \varphi \right\rangle \quad .
\end{aligned}$$

D'après le théorème 2.1.1, $V_n \to v$ dans $D'(\mathbb{R}^N)$ pour $n \to \infty$

et $Supp(V_n) \subset Supp(v) + \overline{B(0,1)}, \forall n \geq 1$.

Soit d'une part $\chi \in D(\mathbb{R}^N)$, égale à 1 sur un voisinage ouvert du compact $Supp(V) + \overline{B(0,1)}$. Alors $\langle V_n, \check{u} \star \varphi\rangle = \langle V_n, \chi(\check{u} \star \varphi)\rangle \to \langle v, \chi(\check{u} \star \varphi)\rangle = \langle v, \check{u} \star \varphi\rangle$ lorsque $n \to \infty$.

D'autre part

$Supp(\check{V}_n \star \varphi) \subset K, \forall n \geq 1$ avec $K = Supp(\varphi) + Supp(\check{v}) + \overline{B(0,1)}$ qui est compact dans $\mathbb{R}^N$ car il est fermé et borné.

De plus, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$, on a

$$\partial^\alpha(\check{V}_n \star \varphi) = \check{V}_n \star (\partial^\alpha \varphi) \to \check{v} \star (\partial^\alpha \varphi) = \partial^\alpha(\check{v} \star \varphi) \text{ uniformément sur } K.$$

D'où

$\check{V}_n \star \varphi \to \check{v} \star \varphi$ dans $D'(\mathbb{R}^N)$, lorsque $n \to +\infty$.

Ainsi, $\left\langle u, \check{V}_n \star \varphi \right\rangle \to \langle u, \check{v} \star \varphi \rangle$ quand $n \to \infty$.

D'où le résultat (a).

(b) est une conséquence de (a). ■

Théorème 2.3.1 *Soient $u \in D'(\mathbb{R}^N)$ et $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$. Alors, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^N$, on a*

$$\partial^\alpha(u \star v) = (\partial^\alpha u) \star v = u \star \partial^\alpha v.$$

Démonstration. Soit $\varphi \in D(\mathbb{R}^N)$, alors

$$\begin{aligned}
\langle \partial^\alpha(u \star v), \varphi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle u \star v, \partial^\alpha \varphi \rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|} \langle u, \check{v} \star \partial^\alpha \varphi \rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha(\check{v} \star \varphi) \rangle \text{ d'après la proposition 2.1.2} \\
&= \langle \partial^\alpha u, \check{v} \star \varphi \rangle \\
&= \langle (\partial^\alpha u) \star v, \varphi \rangle .
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
\langle \partial^\alpha(u \star v), \varphi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle u, \check{v} \star \partial^\alpha \varphi \rangle \\
&= \left\langle u, (-1)^{|\alpha|} (\partial^\alpha \check{v}) \star \varphi \right\rangle \text{ d'après la proposition 2.1.2} \\
&= \langle u, (\partial^\alpha v)^\vee \star \varphi \rangle \\
&= \langle u \star \partial^\alpha v, \varphi \rangle .
\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Théorème 2.3.2 *Pour toute distribution u sur $\mathbb{R}^N$, on a*

$$\delta_0 \star u = u$$

$$\delta_a \star u = \tau_a u$$

$$(\partial^\alpha \delta_0) \star u = \partial^\alpha u.$$

Démonstration. Pour $\varphi \in D(\mathbb{R}^N), \delta_a \star \varphi = \tau_a \varphi$.

En effet, on a

$(\delta_a \star \varphi)(x) = \langle \delta_a(y), \varphi(x-y) \rangle$.

D'après (2.2.1), on a

$$\begin{aligned} \langle u \star \delta_a, \varphi \rangle &= \langle u, \delta_{-a} \star \varphi \rangle \\ &= \langle u, \tau_{-a} \varphi \rangle \\ &= \langle \tau_a u, \varphi \rangle . \end{aligned}$$

Cela montre que, $\delta_a \star u = \tau_a u$, et en particulier, pour $a = 0$, on obtient, $\delta_0 \star u = u$.

On a de même $(\partial^\alpha \delta_0) \star \varphi = \partial^\alpha \varphi$.

En effet, on a

$$\begin{aligned} ((\partial^\alpha \delta_0) \star \varphi)(x) &= \langle \partial^\alpha \delta_0(y), \varphi(x-y) \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \left\langle \delta_0(y), \partial_y^\alpha \varphi(x-y) \right\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \left\langle \delta_0(y), (-1)^{|\alpha|} \partial_x^\alpha \varphi(x-y) \right\rangle \\ &= \langle \delta_0(y), \partial_x^\alpha \varphi(x-y) \rangle \\ &= \partial^\alpha (\delta_0 \star \varphi) \\ &= \partial^\alpha \varphi(x). \end{aligned}$$

On déduit de (2.2.1) que

$$\begin{aligned} \langle u \star (\partial^\alpha \delta_0), \varphi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle u, (\partial^\alpha \delta_0) \star \varphi \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle \\ &= \langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle . \end{aligned}$$

Ce qui montre que $u \star (\partial^\alpha \delta_0) = \partial^\alpha u$. ■

Théorème 2.3.3 *Soit des suites $(U_n)_{n \geq 1}$ de $D'(\mathbb{R}^N)$ et $(V_n)_{n \geq 1}$ de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ telles que $U_n \to u$ et $V_n \to v$ dans $D'(\mathbb{R}^N)$ lorsque $n \to \infty$.*

Soit un compact $K \subset \mathbb{R}^N$ fixé, tel que $Supp(V_n) \subset K, \forall n \geq 1$.

Alors

$$U_n \star V_n \to u \star v \ \textit{dans}\ D'(\mathbb{R}^N)\ \textit{lorsque}\ n \to \infty.$$

Démonstration. Soit $\varphi \in D(\mathbb{R}^N)$.

On écrit $\langle U_n \star V_n, \varphi\rangle = \left\langle U_n, \check{V}_n \star \varphi\right\rangle$.

On a, pour tout $n \geq 1$

$Supp(\check{V}_n \star \varphi) \subset Supp(\check{V}_n) + Supp(\varphi) \subset Supp(\varphi) - K$, d'après la proposition 2.3.1.

On rappelle que

$A - B = \{x - y/x \in A$ et $y \in B\}$ et $A - B$ est fermé (lorsque A et B sont compacts) et borné sur $\mathbb{R}^N$.

Comme

$\partial^\alpha(\check{V}_n \star \varphi) = (\partial^\alpha \check{V}_n\ ) \star \varphi \to (\partial^\alpha \check{v}) \star \varphi = \partial^\alpha(\check{v} \star \varphi)$ uniformément sur $\mathbb{R}^N$ quand $n \to \infty$.

Autrement dit $\check{V}_n \star \varphi \to \check{v} \star \varphi$ dans $D(\mathbb{R}^N)$.

Alors, d'après la proposition 1.0.3

$\langle U_n \star V_n, \varphi\rangle = \left\langle U_n, \check{V}_n \star \varphi\right\rangle \to \langle u, \check{v} \star \varphi\rangle = \langle u \star v, \varphi\rangle$ quand $n \to \infty$.

On déduit que

$U_n \star V_n \to u \star v$ dans $D'(\mathbb{R}^N)$ quand $n \to \infty$. ■

Proposition 2.3.3 *Pour* $u \in D'(\mathbb{R}^N)$ *et* $v, w \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, *on a*

$$u \star (v \star w) = (u \star v) \star w.$$

Démonstration. En utilisant la commutativité, on peut toujours se ramener au cas où v et u sont à support compact.

En prend $R > 0$ assez grand, on suppose que $Supp(v), Supp(u) \subset B(0, R)$.

Soit $\xi \in D(\mathbb{R}^N)$ telle que $Supp(\xi) \subset B(0, 1)$, $\xi \geq 0$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \xi(x)dx = 1$.

Pour tout $n \geq 1$, on définit ξ_n par la formule $\xi(x) = n^N \xi(nx)$.

Vérifions que $R \star (V_n \star U_n) = (R \star V_n) \star U_n$, $n \geq 1$.

En effet,

$$\begin{aligned}
R \star (V_n \star U_n)(x) &= \langle R, V_n \star U_n(x - .)\rangle \\
&= \langle R, V_n(x - . - z)U_n(z)dz\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \langle R, V_n(x - . - z)\rangle\, U_n(z)dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} R \star S_n(x - z)U_n(z)dz \\
&= (R \star V_n) \star U_n(x) \text{ (D'après le théoréme 1.0.3).}
\end{aligned}$$

Par construction, pour tout $n \geq 1$, on a

$Supp(V_n)$ et $Supp(U_n) \subset B(0, R+1)$ et $V_n \to v$, $U_n \to u$ dans $D'(\mathbb{R}^N)$ lorsque $n \to \infty$.

D'autre part, on démontre de même que $V_n \star U_n \to v \star u$ et

$Supp(V_n \star U_n) \subset Supp(V_n) + Supp(U_n) \subset B(0, 2R + 2)$.

On déduit que

$R \star (V_n \star U_n) \to R \star (v \star u)$ dans $D'(\mathbb{R}^N)$ pour $n \to \infty$.

Ce qui entraine que

$$R \star (v \star u) = (R \star v) \star u.$$

■

Remarque 2.3.1 *Dans la proposition ci-dessus, l'hypothèse que l'une des distributions au plus n'est pas à support compact est importante.*

Voici un exemple qui montre cette importance.

Exemple 2.3.1 *On prend* $u = 1, v = \delta_0', w = H$

Où H *est la fonction de Heaviside,* $H(x) = \begin{cases} 1 \ si\ x > 0 \\ 0 \ si\ x < 0. \end{cases}$

$u, w \in D'(\mathbb{R}^N), v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N),$ *mais*

$(1 \star \delta_0') \star H = 0$ *car* $1 \star \delta_0' = 1' \star \delta_0 = 0 \star \delta_0 = 0.$

et $1 \star (\delta_0' \star H) = 1$ *car* $\delta_0' \star H = \delta_0 \star \delta_0 = \delta_0$ *et* $1 \star \delta_0 = 1.$

CHAPITRE 3

Transformée de Fourier

3.1 Transformée de Fourier dans $\mathbf{S}(\mathbb{R}^N)$

Définition 3.1.1 *Soit* $u \in S(\mathbb{R}^N) = \left\{ v \in C^\infty(\mathbb{R}^N), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^N, \lim\limits_{|x| \to +\infty} \left| x^\alpha D^\beta v(x) \right| = 0 \right\}$ *l'espace de Schwartz, on définit la transformée de Fourier de u par*

$$\hat{u}(\xi) = \mathcal{F}u(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} u(x) e^{-ix.\xi} dx, \forall \xi \in \mathbb{R}^N. \tag{3.1.1}$$

Exemple 3.1.1 *Soit* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $\Re(z) > 0$ *et soit* $u(x) = e^{-z|x|^2}$*. On a*

$$\hat{u}(\xi) = (\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{z}})^N e^{\frac{-|\xi|^2}{4z}}.$$

Théorème 3.1.1 *La transformée de Fourier* $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^N) \to S(\mathbb{R}^N)$ *est une application linéaire bijective d'inverse noté* $\bar{\mathcal{F}}$ *et bicontinue, pour* $v \in S(\mathbb{R}^N)$

$$\bar{\mathcal{F}}v(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} v(\xi) e^{ix.\xi} d\xi.$$

Démonstration. Montrons que $\mathcal{F}$ et $\bar{\mathcal{F}}$ envoient $S(\mathbb{R}^N)$ dans lui même.
Comme $\bar{\mathcal{F}}v(x) = \frac{1}{(2\pi)^N}\mathcal{F}v(-x)$, donc il suffit de le montrer pour $\mathcal{F}$.
On a, si $u \in S(\mathbb{R}^N)$, $\mathcal{F}u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$.

En effet, la fonction $\xi \mapsto e^{-ix.\xi}u(x)$ est $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ et

$$\begin{aligned}\left|\partial_\xi^\beta(e^{-ix.\xi}u(x))\right| &= \left|(-ix)^\beta e^{-ix.\xi}u(x)\right| \\ &= \left|x^\beta u(x)\right| \in L^1(\mathbb{R}^N).\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{F}u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $\partial_\xi^\beta \mathcal{F}u(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{-ix.\xi}(-ix)^\beta u(x)dx$

En intégrant par parties, on obtient pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^N$,

$$\begin{aligned}\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \mathcal{F}u(\xi) &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} [(-D_x)^\alpha e^{-ix.\xi}]((-ix)^\beta u(x))dx \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{-ix.\xi} D_x^\alpha((-ix)^\beta u(x))dx.\end{aligned}$$

Ainsi,
$\left|\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \mathcal{F}u(\xi)\right| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left|D_x^\alpha(x^\beta u(x))\right| dx < +\infty, \forall \xi \in \mathbb{R}^N$

Ce qui montre que $\mathcal{F}u \in S(\mathbb{R}^N)$, et que l'application $u \mapsto \mathcal{F}u$ est continue de $S(\mathbb{R}^N)$ dans lui même. ■

Théorème 3.1.2 *Pour $u, v \in S(\mathbb{R}^N)$, on a*
(i) $u \star v \in S(\mathbb{R}^N)$ et $\mathcal{F}(u \star v) = \hat{u}.\hat{v}$.
(ii) $\widehat{u.v} = (2\pi)^{-N}\hat{u} \star \hat{v}$.
(iii) $\widehat{D_j u} = \xi_j \hat{u}$, où $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$.

Démonstration. (i) On a $\forall u \in L^1(\mathbb{R}^N), \forall v \in L^\infty(\mathbb{R}^N), u \star v = \int\limits_{\mathbb{R}^N} u(y)v(x-y)dy$ et l'intégrale converge absolument.

Ensuite, pour y fixé, la fonction $x \mapsto u(y)v(x-y)$ est $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ et

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^\beta}{\partial x}(u(y)v(x-y))\right| &= \left|u(y)(\partial^\beta v)(x-y)\right| \\ &\leq M_\beta \left|u(y)\right| \in L^1(\mathbb{R}^N).\end{aligned}$$

Donc $u \star v \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $\partial^\beta(u \star v) = u \star \partial^\beta v$.

Comme $x^\alpha = (x-y+y)^\alpha = \sum_{\gamma\leq\alpha} \binom{\alpha}{\gamma}(x-y)^\gamma y^{\alpha-\gamma}$, on peut écrire

$x^\alpha \partial^\beta (u\star v)(x) = x^\alpha (u\star \partial^\beta v)(x) = \sum_{\gamma\leq\alpha} \binom{\alpha}{\gamma}(x^{\alpha-\gamma}u)\star(x^\gamma\partial^\beta v) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Donc $u\star v \in S(\mathbb{R}^N)$.

D'autre part, la fonction $(x,y)\mapsto u(y)v(x-y)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^{2N})$.

On a

$$\begin{aligned}(\widehat{u\star v})(\xi) &= \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{-ix.\xi} u-y)v(x-y)dydx \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x+y-y).\xi} u(y)v(x-y)dydx \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{-iy.\xi}u(y)(\int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x-y).\xi}v(x-y)dx)dy.\end{aligned}$$

D'où $(\widehat{u\star v})(\xi) = \hat{u}(\xi).\hat{v}(\xi)$.

(ii) Appliquons (i) à $\varphi = \hat{u}, \psi = \hat{v}$.

On a $\hat{\varphi} = (2\pi)^N \check{u}, \hat{\psi} = (2\pi)^N \check{v}$.

$\mathcal{F}(\varphi\psi) = \mathcal{F}(\hat{u}.\hat{v}) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(u\star v)) = (2\pi)^N u\check{\star}v$.

Ensuite,

$$\begin{aligned}(u\check{\star}v)(\xi) = (u\star v)(-\xi) &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} u(\eta)v(-\xi-\eta)d\eta \\ &= (2\pi)^{-2N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \hat{\varphi}(-\eta)\hat{\psi}(\xi+\eta)d\eta \\ &= (2\pi)^{-2N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \hat{\varphi}(\eta)\hat{\psi}(\xi-\eta)d\eta \\ &= (2\pi)^{-2N}(\hat{\varphi}\star\hat{\psi})(\xi).\end{aligned}$$

(iii) Par intégration par parties, on peut écrire

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{-ix.\xi}\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}u(x)dx &= \frac{1}{i}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{\partial}{\partial x_j}(e^{-ix.\xi})u(x)dx \\ &= \xi_j\hat{u}(\xi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\widehat{x_j u})(\xi) &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{-ix.\xi} x_j u(x)dx \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} -\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \xi_j}(e^{-ix.\xi})u(x)dx \\ &= -\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \xi_j}\int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{-ix.\xi}u(x)dx = -D_j.\hat{u}(\xi).\end{aligned}$$

■

3.2 Transformée de Fourier dans $S'(\mathbb{R}^N)$

Définition 3.2.1 *L'espace des distributions tempérées $S'(\mathbb{R}^N)$ est le dual topologique de $S(\mathbb{R}^N)$, c'est à dire l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur $S(\mathbb{R}^N)$.*

Définition 3.2.2 *On définit la transformée de Fourier de toute distribution tempérée $u \in S'(\mathbb{R}^N)$ par*

$$\langle \mathcal{F}u, \varphi \rangle = \langle u, \mathcal{F}\varphi \rangle, \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^N).$$

De même la transformée de Fourier inverse de $u \in S'(\mathbb{R}^N)$ est donnée par

$$\left\langle \overline{\mathcal{F}}u, \varphi \right\rangle = \left\langle u, \overline{\mathcal{F}}\varphi \right\rangle, \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^N).$$

On déduit des propriétées de la transformée de Fourier sur $S(\mathbb{R}^N)$ les propriétées suivantes:

Théorème 3.2.1 *([4]) Pour $u \in S'(\mathbb{R}^N)$ et $\varphi \in S(\mathbb{R}^N)$, on a*

(i) $\mathcal{F}\mathcal{F}u = (2\pi)^N \check{u}$ où $\langle \check{u}, \varphi \rangle = \langle u, \check{\varphi} \rangle$.

(ii) $\mathcal{F}(D_j u) = \xi_j \mathcal{F}u$.

(iii) $\mathcal{F}(x_j u) = -D_j \mathcal{F}u$.

Définition 3.2.3 *On dit qu'une suite u_j d'éléments de $S'(\mathbb{R}^N)$ converge vers u dans $S'(\mathbb{R}^N)$, si on a $\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^N)$, $\lim\limits_{j \to +\infty} \langle u_j, \varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle$.*

Théorème 3.2.2 *Si $u_j \to u$ dans $S'(\mathbb{R}^N)$, alors $\hat{u}_j \to \hat{u}$ dans $S'(\mathbb{R}^N)$.*

Démonstration. Pour tout $\varphi \in S(\mathbb{R}^N)$, on a $\langle \hat{u}_j, \varphi \rangle = \langle u_j, \hat{\varphi} \rangle$.

$\langle u_j, \hat{\varphi} \rangle \to \langle u, \hat{\varphi} \rangle = \langle \hat{u}, \varphi \rangle$.

Donc $\langle \hat{u}_j, \varphi \rangle \to \langle \hat{u}, \varphi \rangle$.

Alors $\hat{u}_j \to \hat{u}$ dans $S'(\mathbb{R}^N)$. ■

3.3 Transformée de Fourier des distributions à support compact

Théorème 3.3.1 *Si $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ alors $\hat{u}$ est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^N$ donnée par*

$$\hat{u}(\xi) = \left\langle u_x, e^{-ix.\xi} \right\rangle. \tag{3.3.1}$$

De plus, $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left|\partial_\xi^\alpha \hat{u}(\xi)\right| \leq c_\alpha (1 + |\xi|)^k, \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ et tout } \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Démonstration. Désignons par $v(\xi)$ la fonction du membre de droite de (3.3.1), c'est à dire $v(\xi) = \left\langle u_x, e^{-ix.\xi} \right\rangle$

D'après le théorème (1.0.2), $v \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $\partial_\xi^\alpha v(\xi) = \left\langle u, (-ix)^\alpha e^{-ix.\xi} \right\rangle$.

D'après le théorème (1.0.1), $\exists k \in \mathbb{N}, c > 0$ et K compact de $\mathbb{R}^N$ tels que

$$\left|\partial_\xi^\alpha v(\xi)\right| \leq c \sum_{|\beta| \leq k} \sup \left|\partial_x^\beta (x^\alpha e^{-ix.\xi})\right| \leq c'(1 + |\xi|)^k$$

Il reste à prouver que $v = \hat{u}$.

Pour $\varphi \in D(\mathbb{R}^N)$, d'après le théorème (1.0.3), on a

$$\begin{aligned}
\langle v, \varphi \rangle &= \left\langle \left\langle u(x), e^{-ix.\xi} \right\rangle, \varphi \right\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left\langle u(x), e^{-ix.\xi} \varphi(\xi) \right\rangle d\xi \\
&= \left\langle u(x), \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix.\xi} \varphi(\xi) d\xi \right\rangle \\
&= \langle u, \hat{\varphi} \rangle \\
&= \langle \hat{u}, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Donc $\hat{u} = v$. ■

Exemple 3.3.1 *D'après le théorème ci-dessus, on trouve que* $\hat{\delta}_0 = 1$ *dans* $S'(\mathbb{R}^N)$ *et plus généralement que, pour tout* $a \in \mathbb{R}^N$, $(\mathcal{F}\delta_a)(\xi) = e^{-i\xi.a}$, $\xi \in \mathbb{R}^N$.

Exemple 3.3.2 *Transformée de Fourier de la mesure de surface de la sphère.*
Notons $d\sigma_R$ *la mesure de surface de la sphère de rayon* R *dans* $\mathbb{R}^3$.
On a $\widehat{d\sigma_R}(\xi) = \int\limits_{|x|=R} e^{-ix.\xi} d\sigma_R$
En passant aux coordonnées sphériques, on a
$x_1 = R \sin\theta \cos\varphi$
$x_2 = R \sin\theta \sin\varphi$
$x_3 = R\cos\theta$, *où* $0 < \varphi < 2\pi, 0 < \theta < \pi$ *et* $d\sigma_R = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$
On a alors

$$\begin{aligned}\widehat{d\sigma_R}(\xi) &= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} e^{-iR|\xi|\cos\theta} R^2 \sin\theta d\theta d\varphi \\ &= 2\pi R^2 \int\limits_0^{\pi} e^{-iR|\xi|\cos\theta} \sin\theta d\theta\end{aligned}$$

Posons $t = \cos\theta$, *on obtient*

$$\begin{aligned}\widehat{d\sigma_R}(\xi) &= 2\pi R^2 \int\limits_{-1}^{1} e^{-iR|\xi|t} dt \\ &= 2\pi R^2 [\frac{e^{-iR|\xi|t}}{-iR\,|\xi|}]_{-1}^{1} \\ &= 4\pi R^2 \frac{\sin(R\,|\xi|)}{R\,|\xi|}.\end{aligned}$$

D'où $\frac{\widehat{d\sigma_R}(\xi)}{4\pi R} = \frac{\sin(R|\xi|)}{|\xi|}$.

3.4 Transformée de Fourier et convolution

Théorème 3.4.1 *Soit deux distributions* $u \in S'(\mathbb{R}^N)$ *et* $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, *alors*

$$\mathcal{F}(u \star v) = \mathcal{F}u.\mathcal{F}v \text{ dans } S'(\mathbb{R}^N).$$

Dans le cas particulier où $u = u_f$ *avec* $f \in S(\mathbb{R}^N)$, *on a*

$$\mathcal{F}(v \star f)(\xi) = \mathcal{F}v(\xi).\mathcal{F}f(\xi), \ \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Démonstration. On commence par le cas particulier où $f \in D(\mathbb{R}^N)$.

$v \star f \in S(\mathbb{R}^N)$ alors

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(v \star f)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi.x} \langle v, f(x-.)\rangle \, dx \\ &= \left\langle v, \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi.x} f(x-.)dx \right\rangle, \text{ d'après le théorème 1.0.3.}\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi.x} f(x-y)dx = \mathcal{F}f(\xi)e^{-i\xi.y}$, donc

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(v \star f)(\xi) &= \left\langle v, \mathcal{F}f(\xi)e^{-i\xi.y}\right\rangle \\ &= \mathcal{F}f(\xi)\left\langle v, e^{-i\xi.y}\right\rangle \\ &= \mathcal{F}f(\xi)\mathcal{F}v(\xi), \xi \in \mathbb{R}^N.\end{aligned}$$

Montrons maintenant que $\mathcal{F}(u \star v) = \mathcal{F}u.\mathcal{F}v$ dans $S'(\mathbb{R}^N)$.

D'une part, $u \star v \in S'(\mathbb{R}^N)$, puisque $u \in S'(\mathbb{R}^N)$ et $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$.

Donc $\mathcal{F}(u \star v) \in S'(\mathbb{R}^N)$.

D'autre part, $\mathcal{F}u.\mathcal{F}v \in S'(\mathbb{R}^N)$ puisque $\mathcal{F}u \in S'(\mathbb{R}^N)$ et $\mathcal{F}v$ est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^N$ à croissance polynômiale ainsi que toutes ses dérivées.

Pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}(u \star v), \varphi \rangle &= \langle u \star v, \mathcal{F}\varphi \rangle \\ &= \left\langle u \star v, (2\pi)^N (\mathcal{F}^{-1}\varphi)^\vee \right\rangle \\ &= \left\langle u, (2\pi)^N \check{v} \star (\mathcal{F}^{-1}\varphi)^\vee \right\rangle \\ &= (2\pi)^N \left\langle u, v \star (\mathcal{F}^{-1}\varphi)^\vee \right\rangle \\ &= \left\langle u, \mathcal{F}\mathcal{F}(v \star \mathcal{F}^{-1}\varphi) \right\rangle \\ &= \left\langle \mathcal{F}u, \mathcal{F}(v \star \mathcal{F}^{-1}\varphi) \right\rangle\end{aligned}$$

$v \star \mathcal{F}^{-1}\varphi \in S(\mathbb{R}^N)$.

En posant $\psi = \mathcal{F}^{-1}\varphi \in S(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(v \star \mathcal{F}^{-1}\varphi) &= \mathcal{F}(v \star \psi) \\ &= \mathcal{F}v\mathcal{F}\psi = \varphi\mathcal{F}v\end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}(u \star v), \varphi \rangle &= \left\langle \mathcal{F}u, \mathcal{F}(v \star \mathcal{F}^{-1}\varphi) \right\rangle \\ &= \langle \mathcal{F}u, \varphi\mathcal{F}v \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}u.\mathcal{F}v, \varphi \rangle\end{aligned}$$

Comme ceci vaut pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R}^N)$, on déduit que $\mathcal{F}(u \star v) = \mathcal{F}u.\mathcal{F}v$, par densité de $D(\mathbb{R}^N)$ dans $S(\mathbb{R}^N)$. ■

3.5 Transformée de Fourier partielle

On note (t, x) la variable de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^N$, où $t \in \mathbb{R}^p$ et $x \in \mathbb{R}^N$.

Définition 3.5.1 *Pour $\varphi \in S(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^N)$, on définit la transformation de Fourier partielle en x par la formule:*

$$\widetilde{\mathcal{F}}\varphi(t, \xi) = \widetilde{\varphi}(t, \xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix.\xi}\varphi(t, x)dx.$$

Alors $\widetilde{\mathcal{F}}$ est bijective de $S(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^N)$ dans lui-même, d'inverse

$$\widetilde{\mathcal{F}}^{-1}\psi(t,x) = (2\pi)^{-N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{ix.\xi}\psi(t,\xi)d\xi, \psi \in S(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^N).$$

Définition 3.5.2 *Soit $u \in S'(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^N)$, on définit la transformée de Fourier partielle en x de la distribution u par la formule*

$$\left\langle \widetilde{\mathcal{F}_x} u, \varphi \right\rangle = \left\langle u, \widetilde{\mathcal{F}_x}\varphi \right\rangle, \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^N).$$

Théorème 3.5.1 *([3]) La transformation de Fourier partielle en x est un isomorphisme de $S'(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^N)$ sur lui-même, dont l'inverse est donné par la formule*

$$\left\langle \widetilde{\mathcal{F}_x}^{-1} u, \psi \right\rangle = \left\langle u, \widetilde{\mathcal{F}_x}^{-1}\psi \right\rangle, \forall \psi \in S(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^N).$$

La transformée de Fourier partielle vérifie les propriétées suivantes:

Proposition 3.5.1 *([3]) Pour tout $u \in S'(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^N)$, tous multi-indices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^N$ et $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{F}}(D_x^\alpha u) &= \xi^\alpha \widetilde{\mathcal{F}} u, \ \text{où } D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} ... D_{x_2}^{\alpha_2}, D_{x_j} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}, \\
\widetilde{\mathcal{F}}(x^\alpha u) &= (-D_\xi)^\alpha \widetilde{\mathcal{F}} u, \\
\widetilde{\mathcal{F}}(D_t^\beta u) &= D_t^\beta \widetilde{\mathcal{F}} u. \\
\partial_t^n \partial_\xi^\alpha \tilde{\mathcal{F}} u &= (-i)^{|\alpha|} \tilde{\mathcal{F}}(x^\alpha \partial_t^n u) \\
\tilde{\mathcal{F}}(\partial_t^n \partial_x^\alpha u) &= i^{|\alpha|} \tilde{\mathcal{F}}(\xi^\alpha \partial_t^n u).
\end{aligned} \tag{3.5.1}$$

Exemple 3.5.1 *Calculons $\widetilde{\mathcal{F}}\delta_0$.*

On a

$$\begin{aligned}
\left\langle \widetilde{\mathcal{F}}\delta_0, \varphi \right\rangle = \left\langle \delta_0, \widetilde{\mathcal{F}}\varphi \right\rangle &= \widetilde{\mathcal{F}}\varphi(0,0) \\
&= \int \varphi(0,\xi) d\xi = \langle \delta_{t=0} \otimes 1, \varphi \rangle .
\end{aligned}$$

CHAPITRE 4

Solutions élémentaires de quelques équations aux dérivées partielles

Dans cette partie, nous présentons la notion de solution élémentaire pour les équations aux dérivées partielles à coefficients constants.

4.1 Généralités

Définition 4.1.1 *On appelle opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbb{R}^N$, l'application linéaire notée $P(D)$ définie par*

$$\begin{aligned} P(D) : D'(\mathbb{R}^N) &\to D'(\mathbb{R}^N) \\ u &\mapsto P(D)u = \sum_{|\alpha|\leq k} b_\alpha D^\alpha u \text{ où } b_\alpha \text{ est réel ou complexe.} \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

et $D^\alpha = (D^{\alpha_1}, ..., D^{\alpha_N})$.

Définition 4.1.2 *On appelle "symbole complet de l'opérateur $P(D)$", le polynôme de N variables $\xi_1, ..., \xi_N$, à coefficients de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^N$*

$$\sigma(P)(\xi) = \sum_{|\alpha|\leq k} b_\alpha \xi^\alpha.$$

On appelle "le symbole principal de l'opérateur $P(D)$", la composante homogène de degré k de $\sigma(P)$

$$\sigma_d(P)(\xi) = \sum_{|\alpha|=k} b_\alpha \xi^\alpha \text{ où } k \text{ est le degré de } \sigma(P).$$

Définition 4.1.3 *On appelle équation aux dérivées partielles linéaire à coefficients constants, toute équation de la forme $P(D)u = f$ où $P(D)$ est un opérateur différentiel sur $D'(\mathbb{R}^N)$, $f \in D'(\mathbb{R}^N)$ est donnée et $u \in D'(\mathbb{R}^N)$ est l'inconnue.*

Exemple 4.1.1 *Quelques exemples fondamentaux d'opérateurs différentiels:*
(a) Le Laplacien défini sur $\mathbb{R}^N$ par $\triangle = \sum_{k=1}^{N} \partial_k^2$.
(b) Le D'Alembertien défini sur $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N$ par $\square_{t,x} = \partial_t^2 - \triangle_x$.
(c) L'opérateur de la chaleur défini sur $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N$ par $P = \partial_t - \triangle_x$.
(d) L'opérateur de Schrödinger défini sur $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N$ par $P = i\partial_t + \frac{1}{2}\triangle_x$.

.

4.2 Solutions élémentaires

Définition 4.2.1 *On dit qu'une distribution $E \in D'(\mathbb{R}^N)$ est une solution élémentaire de (4.1.1) si $P(D)E = \delta_0$.*

Théorème 4.2.1 *([6])Tout opérateur différentiel $P(D)$ à coefficients constants admet une solution élémentaire E.*

Proposition 4.2.1 *Soit $P(D)$ un opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbb{R}^N$. Alors, pour tout $u \in S'(\mathbb{R}^N)$, on a*

$$\widehat{P(D)u} = \sigma(P)(\xi)\hat{u} \text{ dans } S'(\mathbb{R}^N).$$

Ainsi, si $P(D)$ admet une solution élémentaire tempérée $E \in S'(\mathbb{R}^N)$ alors $\sigma(P)(\xi)\hat{E} = 1$ dans $S'(\mathbb{R}^N)$ où $\hat{E}$ désigne la transformée de Fourier de E.

Démonstration. Pour tout $u \in S'(\mathbb{R}^N)$, on a

$\mathcal{F}(D_k u) = \xi_k \hat{u}$ dans $S'(\mathbb{R}^N), \forall k = 1, ..., N$

Pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^N$, on montre par récurrence sur $|\alpha|$ que

$|\mathcal{F}(D^\alpha u)| = \xi^\alpha \hat{u}$ dans $S'(\mathbb{R}^N)$.

On a, $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq n} b_\alpha D^\alpha$.Alors

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(P(D)u) &= \sum_{|\alpha| \leq n} b_\alpha \xi^\alpha \hat{u} \\ &= \sigma(P)(\xi)\hat{u} \text{ dans } S'(\mathbb{R}^N).\end{aligned}$$

La seconde formule en découle immédiatemment puisque $\hat{\delta}_0 = 1$. ■

Remarque 4.2.1 *Pour détérminer une solution élémentaire d'un opérateur différentiel à coefficients constants $P(D)$ quelconque sur $\mathbb{R}^N$, la proposition 4.2.2 suggère la stratégie suivante:*

(a) Résoudre l'équation d'inconnue $\hat{E}$, $\sigma(P)(\xi)\hat{E} = 1$ au sens des distributions sur $\mathbb{R}^N$.

(b) Une fois $\hat{E}$ connue, calculer E par transformation de Fourier inverse.

Cette stratégie n'est pas très facile à mettre en oeuvre en général. Ou bien, utiliser les symétries de l'opérateur (invariance par rotation, homogénéité).

4.2.1 Exemples de solutions élémentaires

Solution élémenaire du Laplacien

On cherche une distribution $E \in D'(\mathbb{R}^N)$ telle que $-\triangle E = \delta_0$ dans $D'(\mathbb{R}^N), \forall N \geq 1$.

On note H la fonction d'Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Pour le cas $N = 1$, il s'agit de trouver $E \in D'(\mathbb{R})$ telle que

$$-E'' = \delta_0 \text{ dans } D'(\mathbb{R}).$$

Donc, E' doit être de la forme

$$E' = -H + c_0, c_0 \in \mathbb{R}.$$

D'où, E est une fonction continue de la forme

$$E(x) = -xH(x) + c_0 x + c_1, c_0, c_1 \in \mathbb{R}.$$

Le cas particulier où $c_0 = \frac{1}{2}$ et $c_1 = 0$ donne

$$\begin{aligned} E(x) &= -xH(x) + \frac{1}{2}x \\ &= -\frac{1}{2}|x|, \ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On considère le cas $N \geq 2$:

Si $f \in C^2(\mathbb{R}_+^*)$, alors on a

$$\triangle(f(|x|)) = f''(|x|) + \frac{N-1}{|x|}f'(|x|), \ x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}.$$

En notant $r = |x|$, on obtient l'expression suivante:

$$\triangle(f(|x|)) = \frac{1}{r^{N-1}}\frac{d}{dr}(r^{N-1}\frac{df}{dr}).$$

On cherche la distribution E en dehors de l'origine, on trouve que

$$r^{N-1}\frac{dE}{dr} \text{ est une constante.}$$

Ce qui entraine, pour $N \geq 3$, que E est de la forme

$$E(x) = \frac{c_0}{|x|^{N-2}} + c_1, \ x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}, c_0, c_1 \in \mathbb{R}.$$

Lorsque $N = 2$, E est de la forme $E(x) = c_0 \ln|x| + c_1$.

Montrons que, pour $N \geq 3$, $-\triangle E = \delta_0$.

La fonction $x \mapsto x^{2-N}$ est continue sur $\mathbb{R}^N \backslash \{0\}$ et localement intégrable sur $\mathbb{R}^N$.

Elle définit donc une distribution sur $\mathbb{R}^N$, qui est homogène de degré $2 - N$ sur $\mathbb{R}^N$, car la fonction $x \longmapsto |x|^{2-N}$ est homogène de degré $2 - N$ sur $\mathbb{R}^N \backslash \{0\}$.

Par conséquent $\triangle |x|^{2-N}$ est une distribution de degré $-N$, et le calcul ci-dessus montre que cette distribution est à support dans $\{0\}$.

D'après le théorème 1.0.5 la distribution $\triangle |x|^{2-N}$ est une combinaison linéaire de masse de Dirac δ_0 et de ses dérivées.

Or les dérivées de la masse de Dirac à l'origine sont des distributions homogènes, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $\partial^\alpha \delta_0$ est homogène de degré $-N - |\alpha|$.

Les distributions homogènes de degrés différents sont linéairement indépendantes. On déduit alors de ce qui précède que

$$-\triangle(|x|^{2-N}) = c_N \delta_0 \text{ dans } D'(\mathbb{R}^N), \; c_N \text{ étant une constante à déterminer.}$$

Pour le cas $N = 2$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(\lambda |x|) \partial_{x_k} \phi(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^2} \ln |x| \, \partial_{x_k} \phi(x) dx + \int_{\mathbb{R}^2} \ln \lambda \partial_{x_k} \phi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \ln |x| \, \partial_{x_k} \phi(x) dx, \; k = 1, 2, \forall \phi \in D(\mathbb{R}^2).\end{aligned}$$

Les distributions $\partial_{x_k} \ln |x|$ sont donc homogènes de degré -1 pour $k = 1, 2$, de sorte que $-\triangle \ln |x|$ est une distribution homogène de degré -2 dans $\mathbb{R}^2$, d'autre part $-\triangle \ln |x| = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$.

On en déduit que $-\triangle \ln |x| = c_2 \delta_0$ dans $D'(\mathbb{R}^N)$, où c_2 est une constante à détérminer.

Théorème 4.2.2 *Posons*

$$E_1(x) = \frac{1}{2} |x|, \; x \in \mathbb{R},$$

$$E_2(x) = -\frac{1}{2\pi} \ln |x|, \; x \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\},$$

$$E_N(x) = \frac{1}{c_N} \frac{1}{|x|^{N-2}}, \; x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}, N \geq 3,$$

Avec

$$c_N = (N-2) \left| S^{N-1} \right| = \frac{2\pi^{N/2}(N-2)}{\Gamma(N/2)}, N \geq 3, \; \textit{où } \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, z \in \mathbb{C}.$$

Alors, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, la distribution E_N est une solution élémentaire du Laplacien dans $\mathbb{R}^N$:

$$-\triangle E_N = \delta_0 \textit{ dans } D'(\mathbb{R}^N).$$

Démonstration. Le cas $N = 1$ est trivial (déja fait dans la partie précédente) passons au cas $N \geqslant 3$

D'abord

$$\nabla E_N(x) = -\frac{N-2}{C_N}\frac{x}{|x|^N}, x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}.$$

Et comme on sait que les composantes de ∇E_N sont des distributions homogènes de degré $1 - N$, la différence entre chaque membre de cette égalité est une distribution homogène de degré $1 - N$ à support dans $\{0\}$, elle est donc nulle d'aprés le théorème 1.0.5.

D'autre part, pour toute fonction test $\phi \in D(\mathbb{R}^N)$ radiale, de la forme

$$\phi(x) = \Phi(|x|), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^N,$$

On a

$$\nabla\phi(x) = \Phi'(|x|)\frac{x}{|x|}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\langle -\triangle E_N, \phi \rangle = \langle \nabla E_N, \nabla\phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla E_N(x).\nabla\phi(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla E_N(x).\Phi'(|x|)\frac{x}{|x|}dx \\
&= -\frac{N-2}{c_N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{x}{|x|^N}\frac{x}{|x|}\Phi'(|x|)dx \\
&= -\frac{N-2}{c_N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\Phi'(|x|)}{|x|^{N-1}}dx.
\end{aligned}$$

Par passage en coordonnées sphériques, on obtient

$$\begin{aligned}
\langle -\triangle E_N, \phi \rangle &= -\frac{N-2}{c_N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\Phi'(|x|)}{|x|^{N-1}}dx \\
&= -\frac{N-2}{c_N}\left|S^{N-1}\right|\int_0^\infty \Phi'(r)dr \\
&= \frac{N-2}{c_N}\left|S^{N-1}\right|\phi(0).
\end{aligned}$$

On déduit le résultat pour le cas $N \geq 3$.

Lorsque $N = 2$, on a

$\nabla E_2 = -\frac{1}{2\pi}\frac{x}{|x|^2}$ dans $D'(\mathbb{R}^2)$

Pour toute fonction $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, radiale de la forme

$$\phi(x) = \Phi(|x|), \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

On a

$$\begin{aligned}
\langle -\triangle E_2, \phi\rangle &= \langle \nabla E_2, \nabla\varphi\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \nabla E_2(x).\Phi'(x)\frac{x}{|x|}dx \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{x}{|x|^2}\frac{x}{|x|}\Phi'(|x|)dx \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\Phi'(|x|)}{|x|}dx \\
&= -\frac{1}{2\pi}\left|S^1\right|\int_0^\infty \Phi'(r)dr \\
&= \phi(0).
\end{aligned}$$

D'où le résultat pour $N = 2$. ■

Solution élémentaire de l'opérateur de la Chaleur $P = \partial_t - \triangle_x$.

On cherche, pour tout $N \geq 1$ une distribution $G_N \in S'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^N_x)$ telle que

$$(\partial_t - \triangle_x)G_N = \delta_{(t,x)=(0,0)} \text{ dans } S'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^N_x).$$

On a, $PG_N = \delta_0 \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{F}}(PG_N) = \tilde{\mathcal{F}}(\delta_0)$

En appliquant la transformée de Fourier partielle en la variable x à la distribution tempérée G_N, on obtient

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{F}}(PG_N) &= \tilde{\mathcal{F}}(\partial_t G_N - \triangle_x G_N) \\
&= \partial_t \tilde{G}_N + |\xi|^2 \tilde{G}_N \\
&= (\partial_t + |\xi|^2)\tilde{G}_N
\end{aligned}$$

$$= \tilde{\mathcal{F}}(\delta_0)$$
$$= \delta_{t=0} \otimes 1.$$

Donc

$$(\partial_t + |\xi|^2)\tilde{G}_N = \delta_{t=0} \otimes 1 \tag{4.2.1}$$

.

En dehors de $t = 0, \tilde{G}_N$ est solution de

$$(\partial_t + |\xi|^2)\tilde{G}_N = 0 \tag{4.2.2}$$

L'équation 4.2.2 admet des solutions de la forme

$$a(\xi)e^{-t|\xi|^2}.$$

On cherche à trouver une fonction a telle que $\tilde{G}_N(t,\xi) = H(t)a(\xi)e^{-t|\xi|^2}$ soit solution de (4.2.1).

En utilisant la formule des sauts pour calculer $\partial_t\tilde{G}_N$, on obtient

$$\partial_t\tilde{G}_N = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ -|\xi|^2 a(\xi)e^{-t|\xi|^2} + \delta_{t=0} \otimes a(\xi) \text{ si } t > 0 \end{cases}$$
$$= |\xi|^2 H(t)a(\xi)e^{-t|\xi|^2} + \delta_{t=0} \otimes a(\xi).$$

On voit qu'il suffit de prendre $a(\xi) \equiv 1$, c'est à dire $\tilde{G}_N(t,\xi) = H(t)e^{-t|\xi|^2}$.

Cette formule $\tilde{G}_N(t,\xi) = H(t)e^{-t|\xi|^2} \in S'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N)$.

Comme $\tilde{\mathcal{F}}\tilde{\mathcal{F}}u = (2\pi)^N\check{u}$ alors on obtient

$$(2\pi)^N\check{G}_N = H(t)\tilde{\mathcal{F}}e^{-t|\xi|^2}.$$

D'après l'exemple 3.1.1, on a

$$(2\pi)^N\check{G}_N = H(t)(\frac{\pi}{t})^{\frac{N}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Alors

$$\check{G}_N = H(t)(\frac{\pi}{t})^{\frac{N}{2}}\frac{1}{(2\pi)^N}e^{\frac{-|x|^2}{4t}}$$
$$= \frac{H(t)}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$
$$= G_N(t,\xi).$$

Théorème 4.2.3 *Pour tout $N \geq 1$, posons*

$$G_N(t,x) = \frac{H(t)}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \forall (t,x) \in \mathbb{R}^{N+1}.$$

Alors G_N est l'unique distribution tempérée sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ vérifiant

$$(\partial_t - \triangle_x) G_N = \delta_{(t,x)=(0,0)} \text{ dans } S'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N)$$
$$\text{et } Supp(G_N) \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N.$$

Sa transformée de Fourier partielle est la fonction

$$\tilde{G}_N(t,\xi) = H(t) e^{-t|\xi|^2}, \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Démonstration. Tout d'abord, la formule définissant G_N montre qu'il s'agit d'une fonction continue sur $\mathbb{R}_t^* \times \mathbb{R}_x^N$, à support dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$, et telle que

$$\int_{\mathbb{R}^N} G_N(t,x) dx = 1 \text{ si } t > 0.$$

La fonction G_N étant à valeurs positives ou nulles, on a

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^N} |G_N(t,x)| \, dx < \infty.$$

En particulier, ceci entraîne que la fonction G_N définit une distribution tempérée sur $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N$.

La transformée de Fourier partielle en x de G_N est définie par

$$\tilde{G}_N(t,\xi) = H(t) e^{-t|\xi|^2}.$$

D'après la formule de Leibnitz appliquée à la distribution $H(t) \otimes 1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, et à la fonction $(t,\xi) \mapsto e^{-t|\xi|^2}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, on a

$$\begin{aligned}
(\partial_t + |\xi|^2)\tilde{G}_N &= e^{-t|\xi|^2} \partial_t (H(t) \otimes 1) \\
&= e^{-t|\xi|^2} (\delta_{t=0} \otimes 1) \\
&= \delta_{t=0} \otimes 1 \text{ dans } D'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N).
\end{aligned}$$

Or $G_N \in S'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$, donc $\tilde{G}_N \in S'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$.

D'où, $\delta_{t=0} \otimes 1$ et $(\partial_t + |\xi|^2)\tilde{G}_N$ sont deux distributions tempérées sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

Comme $D(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ est dense dans $S(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$, alors

$$(\partial_t + |\xi|^2)\tilde{G}_N = \delta_{t=0} \otimes 1 \text{ dans } S'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N).$$

En appliquant la transformée de Fourier inverse partielle et au sens des distributions, on trouve

$$(\partial_t - \triangle_x)G_N = \delta_{t=0} \otimes \delta_{x=0} \text{ dans } S'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N).$$

D'où

$$(\partial_t - \triangle_x)G_N = \delta_{(t,x)=(0,0)} \text{ dans } S'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N).$$

$$\text{et } Supp(G_N) \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N.$$

Montrons maintenat l'unicité de G_N.

Supposons qu'il existe une autre distribution tempérée G'_N vérifiant les mêmes propriétés que G_N, et notons

$F_N = G_N - G'_N$, d'après le lemme ci-dessous $(\partial_t - \triangle_x)F_N = 0$ alors $F_N = 0$

D'où $G_N = G'_N$. ■

Remarque 4.2.2 *La condition de support sur G_N assure l'unicité de la solution élémentaire.*

Lemme 4.2.1 *Soit $F \in S'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^N_x)$ telle que*

$$(\partial_t - \triangle_x)F = 0 \text{ dans } S'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N), Supp(F) \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \tag{4.2.3}$$

alors $F = 0$.

Démonstration. On applique la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ en les variables (t, x) et au sens des distributions à chaque membre de l'égalité 4.2.3, notons τ la variable duale de t et ξ celle de x, on aura

$$(i\tau + |\xi|^2)\mathcal{F}(F) = 0 \text{ dans } S'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N) \tag{4.2.4}$$

En multipliant chaque membre de l'égalité 4.2.4 par la quantité $-i\tau + |\xi|^2$, on obtient la relation

$$(i\tau + |\xi|^2)(-i\tau + |\xi|^2)\mathcal{F}(F) = 0 \text{ dans } S'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$$
$$(\tau^2 + |\xi|^4)\mathcal{F}(F) = 0 \text{ dans } S'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N).$$

Il en résulte que $\mathcal{F}(F)|_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\setminus\{(0,0)\}} = 0$

C'est à dire que $\mathcal{F}(F)$ est une distribution à support dans $\{(0,0)\}$.

Le théorème 1.0.5, entraine que $\mathcal{F}(F)$ est une combinaison linéaire finie de la masse de Dirac à l'origine et de ses dérivées.

Autrement dit, il existe une famille de complexes $(a_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{N+1}}$ nuls saufs pour un nombre fini de multi-indices α telle que

$$\mathcal{F}(F) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{N+1}} a_\alpha (i2\pi)^{|\alpha|}\partial^\alpha_{t,x}\delta_{(0,0)}. \tag{4.2.5}$$

En appliquant la transformée de Fourier inverse $\bar{\mathcal{F}}$ à chaque membre de l'égalité 4.2.5, on trouve que

$$F = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{N+1}} a_\alpha t^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} ... x_N^{\alpha_N}.$$

C'est à dire que F est une fonction polynôme.

Comme $Supp(F) \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$, c'est à dire $F \equiv 0$ pour $t < 0$, on a $F \equiv 0$. ■

Solution élémentaire de l'opérateur des ondes $\Box = \partial_t^2 - \triangle_x$

On cherche une distribution tempérée $E_N \in S'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^N_x)$ à support dans l'ensemble $\{(t,x), t \geq 0\}$ vérifiant

$$\Box E_N = (\partial_t^2 - \triangle_x)E_N = \delta_0 \text{ dans } S'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N). \tag{4.2.6}$$

Résoudre l'équation 4.2.6 est équivalent à résoudre l'équation $\tilde{\mathcal{F}}\Box E_N = \tilde{\mathcal{F}}\delta_0$.

D'aprés les formules (3.5.1)

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{F}}\Box E_N &= \tilde{\mathcal{F}}[\partial_t^2 E_N - \triangle_x E_N] \\ &= \tilde{\mathcal{F}}[\partial_t^2 E_N] - \tilde{\mathcal{F}}[\triangle_x E_N] \\ &= \partial_t^2 \tilde{E}_N + |\xi|^2 \tilde{E}_N \\ &= (\partial_t^2 + |\xi|^2)\tilde{E}_N.\end{aligned}$$

D'après l'exemple (3.5.1) $\tilde{\mathcal{F}}\delta_0 = \delta_{t=0} \otimes 1$.

Donc

$$(\partial_t^2 + |\xi|^2)\tilde{E}_N = \delta_{t=0} \otimes 1. \tag{4.2.7}$$

En dehors de $t = 0$, on doit avoir $(\partial_t^2 + |\xi|^2)\tilde{E}_N = 0$.

On cherche $\tilde{E}_N$ sous la forme d'une fonction du type

$$\begin{aligned}\tilde{E}_N(t,\xi) &= \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ a(\xi)\cos(|\xi|\, t) + b(\xi)\sin(|\xi|\, t) \text{ si } t > 0 \end{cases} \\ &= H(t)(a(\xi)\cos(|\xi|\, t) + b(\xi)\sin(|\xi|\, t))\end{aligned}$$

où les fonctions a et b sont à détérminer de sorte que $\tilde{E}_N \in S'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N)$ et soit solution de l'équation 4.2.7.

En appliquant deux fois la formule des sauts pour $\partial_t^2 \tilde{E}_N$, on obtient

$$\begin{aligned}\partial_t \tilde{E}_N &= \begin{cases} \delta_{t=0} \otimes a(\xi) \text{ si } t < 0 \\ -|\xi|\, a(\xi)\sin(|\xi|\, t) + |\xi|\, b(\xi)\cos(|\xi|\, t) + \delta_{t=0} \otimes a(\xi) \text{ si } t > 0 \end{cases} \\ &= H(t)\,(-|\xi|\, a(\xi)\sin(|\xi|\, t) + |\xi|\, b(\xi)\cos(|\xi|\, t)) + \delta_{t=0} \otimes a(\xi).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\partial_t^2 \tilde{E}_N = H(t)[-|\xi|^2 [a(\xi)\cos(|\xi|\, t) + b(\xi)\sin(|\xi|\, t)]] + \delta'_{t=0} \otimes a(\xi) + \delta_{t=0} \otimes |\xi|\, b(\xi).$$

D'où

$$\begin{aligned}(\partial_t^2 + |\xi|^2)\tilde{E}_N = H(t)[-|\xi|^2 [a(\xi)\cos(|\xi|\, t) + b(\xi)\sin(|\xi|\, t)]] + \delta'_{t=0} \otimes a(\xi) + \delta_{t=0} \otimes |\xi|\, b(\xi) + \\ H(t)\,|\xi|^2 [a(\xi)\cos(|\xi|\, t) + b(\xi)\sin(|\xi|\, t)]\end{aligned}$$

$$(\partial_t^2 + |\xi|^2)\tilde{E}_N = \delta'_{t=0} \otimes a(\xi) + \delta_{t=0} \otimes |\xi|\, b(\xi).$$

Pour que $\tilde{E}_N$ soit solution de 4.2.7, il suffit de prendre $a \equiv 0$ et $b(\xi) = \frac{1}{|\xi|}$.

C'est à dire, nous obtenons une fonction

$$\tilde{E}_N(t,\xi) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} \text{ si } t > 0 \end{cases}$$

qui est une distribution tempérée de $(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N)$, telle que $\left|\tilde{E}_N(t,\xi)\right| \leq \max(t,0)$.

Par conséquent, on obtient une solution élémentaire E_N de $\square$, définie par

$$\langle E_N, \tilde{\varphi} \rangle = \left\langle \tilde{E}_N, \varphi \right\rangle = \int_0^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\sin(t\,|\xi|)}{|\xi|} \varphi(t,\xi) d\xi \right) dt, \forall \varphi \in S(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N). \tag{4.2.8}$$

Théorème 4.2.4 *Soit $N = 1, 2, 3,$ il existe une unique distribution tempérée $E_N \in S'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N)$ telle que $Supp(E_N) \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$ et $\square E_N = \delta_0$.*

Démonstration. On va démontrer le cas $N = 3$.

On a $\langle E_3, \tilde{\varphi} \rangle = \int_0^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} \varphi(t,\xi) d\xi \right) dt$

Comme $\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} = \widehat{\frac{d\sigma_t}{4\pi t}}$ donc $\langle E_3, \tilde{\varphi} \rangle = \int_0^{\infty} \left\langle \widehat{\frac{d\sigma_t}{4\pi t}}, \varphi(t,x) \right\rangle dt$ et $\left\langle \widehat{\frac{d\sigma_t}{4\pi t}}, \varphi(t,x) \right\rangle = \left\langle \frac{d\sigma_t}{4\pi t}, \tilde{\varphi}(t,x) \right\rangle$

On a alors

$$\langle E_3, \tilde{\varphi} \rangle = \int_0^{\infty} \frac{1}{4\pi t} \left\langle \frac{d\sigma_t}{4\pi t}, \tilde{\varphi}(t,x) \right\rangle dt, \forall \varphi \in S(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$$

En posant $\tilde{\varphi} = \psi$, on a

$$\langle E_3, \psi \rangle = \int_0^{\infty} \frac{1}{4\pi t} \int_{|x|=t} \psi(t,x) d\sigma_t dt$$
$$= \int_0^{\infty} \frac{t}{4\pi} \int_{|\omega|=1} \psi(t,t\omega) d\omega dt. \quad \blacksquare$$

Remarque 4.2.3 *Pour $N = 1$, la solution élémentaire du D'Alembertien est*

$$E_1(t,x) = \frac{1}{2} H(t) \chi_{]-t,t[}(x).$$

Pour $N = 2$, elle s'écrit

$$E_2(t,x) = \frac{1}{2\pi} H(t) \frac{\chi_{\beta(0,t)(x)}}{\sqrt{t^2 - |x|^2}}.$$

Pour $N = 3$, on a

$$E_3(t,x) = \frac{1}{4\pi t} H(t)\sigma_t.$$

Solution élémentaire de l'opérateur de Schrödinger $P = i\partial_t + \frac{1}{2}\triangle_x$

Pour tout $N \geq 1$, on cherche une distribution $E_N \in S'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ telle que

$$i\partial_t E_N + \frac{1}{2}\triangle_x E_N = i\delta_{(t,x)=(0,0)} \text{ dans } S'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N).$$

avec $Supp(E_N) \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$.

On effectue un changement de variables $s = it$, ce qui transforme l'opérateur de Schrödinger $i\partial_t + \frac{1}{2}\triangle_x$ en l'opérateur de la Chaleur $\partial_s - \frac{1}{2}\triangle_x$, ceci suggère de prendre

$$E_N(t,x) = \frac{H(t)}{\sqrt{2\pi i t}^N} e^{-\frac{|x|^2}{2it}}.$$

Lemme 4.2.2 *([3]) Soit $z \in \mathbb{C}$ telle que $\Re(z) > 0$. Posons*

$$G_N(z,x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi z)}^N} e^{\frac{|x|^2}{2z}}, x \in \mathbb{R}^N, t > 0.$$

Alors, la transformée de Fourier de G_N est la fonction définie par la formule

$$\tilde{G}_N(z,\xi) = e^{\frac{1}{2}z|\xi|^2}, \xi \in \mathbb{R}^N$$

Théorème 4.2.5 *Pour tout $N \geq 1$ et $\varepsilon > 0$, posons*

$$E_N^\varepsilon(t,x) = \frac{H(t)}{\sqrt{2\pi(\varepsilon + i)t}^N} e^{-\frac{|x|^2}{2(\varepsilon+i)t}}$$

pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^{N+1}$

Alors, (E_N^ε) converge vers E_N dans $S'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ lorsque $\varepsilon \to 0^+$,

où E_N est l'unique distribution tempérée sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ vérifiant

$$(i\partial_t + \frac{1}{2}\triangle_x)E_N = i\delta_{(t,x)=(0,0)} \text{ dans } S'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$$

$$Supp(E_N) \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N.$$

Sa transformée de Fourier partielle est la fonction

$$\tilde{E}_N(t,\xi) = H(t)e^{-\frac{1}{2}it|\xi|^2}, \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Démonstration. On applique à chaque membre de l'équation de Schrodinger la transformation de Fourier partielle et on note f

la variable x de la distribution $f \in S'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$.

D'après la proposition 3.5.1, on a

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{F}}(i\partial_t E_N + \frac{1}{2}\triangle_x E_N) &= i\partial_t \tilde{E}_N + \frac{1}{2}\left|\xi\right|^2 \tilde{E}_N \\ &= i\delta_{t=0} \otimes 1 \text{ dans } S'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N).\end{aligned}$$

En multipliant par la fonction $(t,\xi) \mapsto e^{\frac{1}{2}it|\xi|^2}$ qui est C^∞ à croissance polynômiale ainsi que toutes ses dérivées, on obtient

$$\begin{aligned}(i\partial_t \tilde{E}_N + \frac{1}{2}\left|\xi\right|^2 \tilde{E}_N)e^{\frac{1}{2}it|\xi|^2} &= i\partial_t(e^{\frac{1}{2}it|\xi|^2}\tilde{E}_N) \\ &= e^{\frac{1}{2}it|\xi|^2}(i\delta_{t=0} \otimes 1) \\ &= (i\delta_{t=0} \otimes 1) \text{ dans } S'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N).\end{aligned}$$

En joignant la condition du support de $\tilde{E}_N$, on obtient

$$e^{\frac{1}{2}it|\xi|^2}\tilde{E}_N = H(t) \otimes 1 \text{ dans } S'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N).$$

En multipliant maintenant chaque membre de cette égalité par la fonction

$(t,\xi) \mapsto e^{-\frac{1}{2}it|\xi|^2}$ qui est de classe C^∞, on conclut que l'unique solution du problème ci-dessus est la fonction donnée par

$$\tilde{E}_N(t,\xi) = H(t)e^{-\frac{1}{2}it|\xi|^2}, (t,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N.$$

Cette fonction est mesurable et bornée.

La distribution $\tilde{E}_N$ est donc tempérée sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

En appliquant la transformée de Fourier inverse partielle en la variable x dans $(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^N_x)$ à $\tilde{E}_N$, on obtient une solution E_N.

Il reste à montrer que $E_N^\varepsilon \to E_N$ pour $\varepsilon \to 0^+$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $|E_N^\varepsilon(t,x)| = \frac{H(t)}{\sqrt{2\pi(\varepsilon^2+1)^{\frac{1}{2}}t}} e^{-\frac{\varepsilon|x|^2}{2(\varepsilon^2+1)t}}$.

On déduit que $\int\limits_{\mathbb{R}^N} |E_N^\varepsilon(t,x)dx| = \frac{(\varepsilon^2+1)^{\frac{N}{2}}}{\varepsilon^{\frac{N}{2}}} H(t)$.

Donc, $E_N^\varepsilon \in S'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N)$.

D'après le lemme 4.2.2 , $\tilde{E}_N^\varepsilon(t,\xi) = H(t)e^{-\frac{1}{2}(\varepsilon+i)t|\xi|^2}$.

Par suite, par convergence dominée, on a

$$(\tilde{E}_N^\varepsilon) \text{ converge vers } \tilde{E}_N \text{ dans } S'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N) \text{ lorsque } \varepsilon \to 0^+. \tag{4.2.9}$$

Or la transformation de Fourier inverse partielle en x est continue de $S'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_\xi^N)$ dans $S'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N)$, on déduit de la convergence 4.2.9 que $E_N^\varepsilon \to E_N$ dans $S'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N)$ quand $\varepsilon \to 0^+$. ■

4.3 Utilisation de la solution élémentaire pour la résolution de certaines équations aux dérivées partielles

La connaissance d'une solution élémentaire d'un opérateur différentiel à coefficients constants $P(D)$ sur $\mathbb{R}^N$, peut nous permettre de calculer explicitement une solution de l'équation aux dérivées partielles $P(D)u = f$ dans $D'(\mathbb{R}^N)$ pour toute distribution f à support compact dans $\mathbb{R}^N$.

Théorème 4.3.1 *Soit $P(D)$ un opérateur différentiel à coefficient constants sur $\mathbb{R}^N$ et $E \in D'(\mathbb{R}^N)$ une solution élémentaire de $P(D)$.*

Soit une distribution à support compact $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, l'équation aux dérivées partielles $P(D)u = f$ dans $D'(\mathbb{R}^N)$ d'inconnue $u \in D'(\mathbb{R}^N)$, admet au moins une solution donnée par la formule

$$u = E \star f.$$

Démonstration. On a

$$P(D)(E \star f) = \sum_{|\alpha| \leq k} b_\alpha D^\alpha (E \star f)$$

$$= \sum_{|\alpha|\leq k} b_\alpha (D^\alpha E) \star f$$
$$= (\sum_{|\alpha|\leq k} b_\alpha D^\alpha E) \star f.$$

Comme E est une solution élémentaire alors on a

$$P(D)(E \star f) = \delta_0 \star f$$
$$= f.$$

D'où $u = E \star f$ est solution de $P(D)u = f$. ■

Remarque 4.3.1 *Si f n'est pas à support compact, le produit de convoltion $f \star E$ n'a pas de sens, E et f ayant des supports non compacts.*

Proposition 4.3.1 *Soit E une solution élémentaire de $P(D)$. Alors, pour tout $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, il existe au plus une solution de $P(D)u = f$ appartenant à $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ et, s'il en existe une, c'est $E \star f$.*

Démonstration. Si on suppose que u est à support compact alors

$$\begin{aligned} u &= \delta_0 \star u \\ &= (P(D)E) \star u \\ &= P(D)(E \star u) \\ &= E \star (P(D)u) \\ &= E \star f. \end{aligned}$$

■

4.3.1 Equation de Poisson

On note $r = (x, y, z)$ le point courant de $\mathbb{R}^3$, et on pose $q = |r|$.

On s'intéresse à l'équation de Poisson

$$\triangle u = f. \tag{4.3.1}$$

où f est une distribution donnée à support compact dans $\mathbb{R}^3$.

Pour cette équation, comme pour les autres équations aux dérivées partielles, on ne cherche pas en général à obtenir toutes les solutions, mais on cherche à obtenir une solution (si possible unique) satisfaisant à des conditions additionnelles (conditions aux limites, ou à l'infini,...).

Nous demandons ici, guidés par l'interprétation physique (éléctrostatique par exemple) que u tend vers 0 à l'infini.

Une solution élémentaire du Laplacien pour $N = 3$ est $E_3(x) = \frac{1}{c_3}\frac{1}{|x|}$ qui vérifie $-\triangle E_3 = \delta_0$, dans $D'(\mathbb{R}^3)$.

Théorème 4.3.2 *Soit $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^3)$. La distribution $u = E_3 \star f$ est une solution de 4.3.1. En dehors du support de f, c'est une fonction de classe C^∞ qui tend vers 0 à l'infini.*

Démonstration. D'après le théorème 4.3.1, $u = E_3 \star f$ est bien une solution de l'équation 4.3.1.

Soit θ_ε une fonction de classe C^∞, égale à 1 hors de la boule B_ε de rayon ε centrée à l'origine, et égale à 0 au voisinage de l'origine.

La fonction $E_\varepsilon = \theta_\varepsilon E_3$ est donc de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^3$, et on a $Supp(E_3 - E_\varepsilon) \subset B_\varepsilon$.

On a $u = E_\varepsilon \star f + (E - E_\varepsilon) \star f$.

Le terme $E_\varepsilon \star f$ est une fonction C^∞ et $(E - E_\varepsilon) \star f$ est une distribution dont le support est contenu dans $Supp(f) + B_\varepsilon$.

Si $r = (x, y, z)$ est un point du complémentaire du support de f, et en choisissant ε égal à la moitié de la distance de r à $Supp(f)$, on en déduit que u est de classe C^∞ au voisinage de r.

Soit m l'ordre de f.

Choisissant K un voisinage compact de $Supp(f)$ et $\varepsilon > 0$.

On a $(E_\varepsilon \star f)(r) = \langle f(r'), E_\varepsilon(r - r')\rangle$ et on peut majorer $(E_\varepsilon \star f)(r)$ d'après le théorème 1.0.1, par la borne supérieure sur K des dérivées d'ordre $\leq m$ de la fonction $r' \mapsto E_3(r - r')$.

On a donc

$$|(E_\varepsilon \star f)(r)| \leq c \sup_{r' \in K, |\alpha| \leq m} |\partial^\alpha_{r'} E_\varepsilon(r - r')| \,. \tag{4.3.2}$$

Des que la distance $d(r, K)$ est supérieure à ε, on a

$|u(r)| < c \sup_{r' \in K, |\alpha| \leq m} |\partial_{r'}^{\alpha} E(r - r')|$.

Il en résulte que le membre de droite de 4.3.2 est majoré par $c'/d(r, K)$ et tend donc vers 0 lorsque r tend vers l'infini. ■

Corollaire 4.3.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et u une distribution sur Ω vérifiant $\triangle u = 0$. Alors u est une fonction de classe C^∞.*

Démonstration. Il suffit de prouver que u est de classe C^∞ au voisinage de chaque point $r_0 \in \Omega$.

Montrons que pour toute fonction $\varphi \in D(\Omega)$, égale à 1 au voisinage de r_0, on a $\varphi u \in C^\infty$ au voisinage de r_0.

On a $\varphi u = E \star (\triangle \delta) \star (\varphi u) = E \star (\triangle(\varphi u))$, deux des trois supports étant compacts.

D'autre part $\triangle(\varphi u) = u \triangle \varphi + 2 \nabla \varphi$ et les dérivées de φ étant nulles près de r_0, le point $r_0 \notin Supp(\triangle(\varphi u))$.

Le théorème précédent assure alors que φu est de classe C^∞ près de r_0. ■

Corollaire 4.3.2 *([2]) Si u est une fonction harmonique dans $\mathbb{R}^3$ qui tend vers 0 à l'infini, on a $u = 0$.*

Théorème 4.3.3 *Pour toute distribution f à support compact dans $\mathbb{R}^3$, il existe une infinité de solution $u \in D'(\mathbb{R}^3)$ de l'équation $\triangle u = f$.*

Toutes ces solutions sont de classe C^∞ en dehors du support de f.

Parmi celles-ci, il en existe une et une seule qui tend vers 0 à l'infini, et elle est donnée par

$$u = (-\frac{1}{4\pi q}) \star f.$$

Démonstration. $u \star f$ est une solution C^∞ en dehors de $Supp(f)$ et tendant vers 0 à l'infini.

u est une autre solution de $\triangle u = f$. Ce qui signifie que $u \star f$ est une distribution harmonique, et d'après le corollaire 4.3.1, $u \star f$ est une fonction harmonique C^∞. Si elle tend vers 0 à l'infini, d'après le corollaire 4.3.2, elle est identiquement nulle.

D'où, $u = E \star f$. ■

Conclusion

Dans ce travail, nous avons présenté la notion de solutions élémentaires des équations aux dérivées partielles ayant attrait à la convolution des distributions.

De plus, nous avons traité quelques exemples d'équations intervenant en physique mathématique, pour lesquelles, nous avons établi des formules explicites donnant les solutions élémentaires et permettant d'étudier l'existence, l'unicité et certaines propriétés qualitatives des autres solutions.

En outre, les notions de base du calcul des distributions ont été introduites, en premier lieu, telles que le produit de convolution et la transformation de Fourier des distributions, notions qui ont grandement facilité l'obtention des solutions élémentaires.

Il est intéressant d'envisager d'étudier les solutions élémentaires de certaines équations aux dérivées partielles du type mixte, de la forme $k(z)\partial_x^2+\partial_z^2=0$, où $k(z)$ est une fonction continue définie sur un intervalle I de la droite réelle comprenant le point $z=0$.

Bibliographie

[1] SCHWARTZ, L. Théorie des distributions. Hermann, Paris, 1966.

[2] BONNY, J-M. Cours d'analyse: théorie des distributions et analyse de Fourier. Les éditions de polytechnique, Palaiseau, 2001.

[3] GOLCE, F. Distributions, analyse de Fourier, équations aux dérivées partielles. 2012.

[4] ZUILLY, C. Distributions et équations aux dérivées partielles. 2e édition, Paris, Hermann, 1986.

[5] BOUMAZA, H. Théorie des distributions. U.P.N-Sup Galilée, 2015.

[6] MALGRANGE, B. Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, tome 6, 1956, 27-355.