**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**
**Université Abderrahmane Mira - Bejaia**
**Faculté des Sciences Exacte**

Département de Mathématiques

**Mémoire**

**présenté pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques**

**Option : Analyse et probabilités**

**Par**

M[elle] **HAYOUNE Ouahiba**

M[me] **NASRI Amina**

Thème

# Théorie du point fixe pour les opérateurs monotones et applications

Devant le jury composé de :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| M[me] | S. ALLILI-ZAHAR | M.C.B | Université de Bejaia | Présidente |
| M[me] | B. BARACHE | M.A.A | Université de Bejaia | Examinatrice |
| M[me] | K. KHELOUFI-MEBARKI | M.C.A | Université de Bejaia | Promotrice |

**Juin** 2017

# *Remerciements*

*On tient à remercier **ALLAH** qui nous a donné la force, le courage pour réaliser ce modeste travail et qui a mis sur nos chemins les bonnes personnes et nous a confié aux bonnes mains.*

*On tient en premier lieu à exprimer nos plus vifs remerciements à Madame **K. KHELOUFI**, notre promotrice, pour son aide, sa patience, ses conseils, ses encouragements et sa disponibilité. On adresse nos profondes gratitudes et nos remerciements les plus vifs à Madame **S. ALLILI** pour nous avoir fait l'honneur de présider le jury de cette soutenance.*

*On tient à remercier également Madame **B. BARACHE** qui a accepté d'examiner ce travail.*

*On tient à exprimer nos plus sincères remerciements à tous les membres de la faculté des sciences exactes en général et aux membres du département de mathématiques en particulier, ainsi que tous les enseignants pour les peines et les efforts qu'ils ont fourni durant notre formation.*

# Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

*Mes très chers parents en témoignage de ma reconnaissance envers le soutien, les sacrifies et tous les efforts qu'ils ont fourni pour mon éducation ainsi que ma formation.*

*Mes chers frères, mes chères sœurs.*

*Mes cousins et cousines.*

Tous mes enseignants.

*Mon binôme et sa famille.*

*Mes collègues.*

*OUAHIBA*

# Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

*Ma chère mère qui était toujours attentive, affectueuse et compréhensive, qui m'a soutenue durant les laborieuses années de mes études, à qui je témoigne toute ma gratitude.*

*Mon mari qui m'a toujours soutenue.*

*Mes chers frères, mes chères sœurs.*

*Mes nièces et mes neveux.*

*Ma belle-mère et mon beau-père.*

*Mes belles-sœurs.*

*Tous mes enseignants.*

*Mon binôme et sa famille.*

*Mes collègues.*

*AMINA*

# Table des matières

# Introduction

L'objectif de ce mémoire est de présenter quelques théorèmes du point fixe, dans des espaces de Banach partiellement ordonnés, en introduisant la théorie des cônes. Nous discutons l'existence et l'unicité du point fixe, ainsi que la convergence des suites itératives vers le point fixe, pour certaines classes d'opérateurs non linéaires, notamment les opérateurs croissants et les opérateurs décroissants. Comme applications de certains théorèmes présentés dans ce mémoire, nous donnons de nombreux exemples qui montre l'existence des solutions pour des équations intégrales, pour des problèmes de Cauchy ainsi que pour des problèmes aux limites du second ordre.

En fait, la théorie des cônes, qui sont des sous-ensembles fermés convexes de l'espace considéré, joue un rôle très important dans notre présentation. Ces cônes définissent des relations d'ordre au moyen desquelles certains éléments peuvent être mieux comparés, que l'utilisation des estimations brutes en termes d'une norme. Donc l'utilisation des cônes offre de meilleurs résultats lors de la résolution de plusieurs problèmes mathématiques issus du monde réel. Ainsi, les problèmes non linéaires ont été largement étudiés par le biais des cônes abstraits, puisque la notion de monotonicité a été étendue à des espaces de Banach quelconque en utilisant la relation induite par un cône.

Une des motivations de la théorie du point fixe présentée dans ce travail, est le fait que les lois de la nature prescrivent des limites définitives pour des solutions de problèmes du monde réel impliquant l'existence de solutions dans des segments coniques.

Dans le premier chapitre, nous introduisons d'abord le concept d'un cône dans les espaces de Banach ainsi que quelques relations d'ordre induites par ce cône. Ensuite, nous discutons certaines propriétés élémentaires de ce concept. Nous établissons certains éléments nécessaires et suffisants pour que les conditions d'un cône normal soient satisfaites. Nous définissons les notions de la régularité et de la régularité complète, ainsi que les notions de la minihedralité et de la forte minihedralité des cônes donnés, et nous

discutons des liens entre ces notions.
Enfin, nous donnons également quelques exemples des cônes qui possèdent certaines ou toutes ces propriétés.

Dans le deuxième et le troisième chapitres, nous discutons l'existence et l'unicité des points fixes, l'existence des points fixes maximal et minimal et la convergence des suites itératives vers des points fixes pour les opérateurs croissants et les opérateurs décroissants. Comme application de certains théorèmes du point fixe présentés dans ces deux chapitres, nous donnons de nombreux exemples pour montrer l'existence de solutions pour des équations intégrales non linéaires et pour des équations différentielles ordinaires non linéaires. Ces exemples seront très utiles pour les lecteurs afin de comprendre comment appliquer des différents théorèmes du point fixe pour montrer l'existence de solutions de plusieurs types d'équations différentielles et intégrales.

CHAPITRE 1

# Théorie des cônes et relations d'ordre partiel

## 1.1 Les cônes

**Définition 1.1.1** *Soient $E$ un espace de Banach réel et $P$ un sous ensemble non vide fermé convexe de $E$. $P$ est dit cône s'il satisfait les deux conditions suivantes :*

**(i)** $x \in P, \alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha x \in P$ *;*

**(ii)** $x \in P$, $-x \in P \Rightarrow x = \theta$, *avec $\theta$ est le zéro de $E$.*

**Remarque 1.1.1** *Dans la définition précédente, la convexité de $P$ et la condition $(i)$ peuvent être remplacées par la condition suivante :*

$$(x, y \in P \text{ et } a, b \in \mathbb{R}_+) \Rightarrow ax + by \in P. \tag{1}$$

* *Si $P$ est convexe et $\alpha P \subset P$, $\forall \alpha \geq 0$, alors pour tout $x, y \in P$, on a*

$$x + y = 2\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right).$$

*Pour $\lambda = \frac{1}{2}$, la convexité de $P$ entraîne que*

$$x + y = 2\left(\lambda x + (1 - \lambda) y\right) \in P.$$

*Ainsi, pour tout $x, y \in P$ et $a, b \in \mathbb{R}_+$, $ax \in P$ et $by \in P$. D'où $ax + by \in P$.*

* *Si la condition $(1)$ est satisfaite, alors pour tout $a \in [0, 1]$ et $b = 1 - a$ on va avoir la convexité de $P$, d'autre part, pour tout $a \in \mathbb{R}_+$ et $b = 0$ on va avoir la condition $(i)$.*

- Un cône est dit solide s'il contient des éléments intérieurs, c'est-à-dire $\mathring{P} \neq \emptyset$.
- Un cône $P$ est dit générateur si $E = P - P$, c'est-à-dire tout élément $x \in E$ peut se représenter sous la forme $x = u - v$, où $u, v \in P$.
- Tout cône $P \subset E$ définit une relation d'ordre partiel dans $E$ donnée par :

$$x \leq y \text{ si et seulement si } y - x \in P. \tag{1.1.1}$$

- On peut aussi définir les relations d'ordre partiel suivantes :

  * $x < y \Leftrightarrow x \leq y$ et $x \neq y$.
  * $x \ll y \Leftrightarrow y - x \in \mathring{P}$ si $\mathring{P} \neq \emptyset$.

- Intervalle ordonné (segment conique) : on définit un intervalle ordonné $[x, y]$ d'un cône par :

$$[x, y] = \{z \in P : x \leq z \leq y\}.$$

**Proposition 1.1.1** *Soit $P$ un cône sur un espace de Banach $E$.*
*Pour tout $x$, $y$, $z$ et $t$ dans $P$ et $a$, $b \in \mathbb{R}$, on a*

1. $x \leq x$,
2. $(x \leq y \text{ et } y \leq z) \Longrightarrow x \leq z$,
3. $(x \leq y \text{ et } y \leq x) \Longrightarrow x = y$,
4. $(x \leq y \text{ et } 0 \leq a \leq b) \Longrightarrow ax \leq by$,
5. $(x \leq y \text{ et } t \leq z) \Longrightarrow x + t \leq y + z$,
6. $(x \ll y \text{ et } y \ll z) \Longrightarrow x \ll z$,
7. $(x \ll y \text{ et } y < z) \Longrightarrow x \ll z$,
8. $(x \leq y \text{ et } y \ll z) \Longrightarrow x \ll z$,
9. $(x \ll y \text{ et } a > 0) \Longrightarrow ax \ll ay$,
10. *Soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites de $E$ telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \leq y_n \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} x_n \leq \lim_{n \to +\infty} y_n.$$

**Démonstration.**

1. $x \leq x \Longleftrightarrow x - x = \theta \in P$.

2. On a $x \leq y \Longleftrightarrow y - x \in P$ et $y \leq z \Longleftrightarrow z - y \in P$,
   alors $y - x + z - y \in P$ c'est à dire $z - x \in P$. Donc $x \leq z$.

3. On a $x \leq y \Longleftrightarrow y - x \in P$ et $y \leq x \Longleftrightarrow x - y \in P$,
   alors $x - y = \theta$. Donc $x = y$.

4. On a $x \leq y$ et $0 \leq a \leq b$,
   alors $ax \leq ay$ et $ay \leq by$ car $a(y - x) \in P$ et $(b - a)\,y \in P$. Donc $ax \leq by$.

5. On a $x \leq y \Longleftrightarrow y - x \in P$ et $t \leq z \Longleftrightarrow z - t \in P$,
   alors $y - x + z - t \in P$, c'est à dire $(y + z) - (x + t) \in P$. Donc $x + t \leq y + z$.

6. On a $x \ll y \Longleftrightarrow y - x \in \mathring{P}$ et $y \ll z \Longleftrightarrow z - y \in \mathring{P}$,
   alors $y - x + z - y \in \mathring{P}$ c'est à dire $z - x \in \mathring{P}$. Donc $x \ll z$.

7. On a $x \ll y \Longleftrightarrow y - x \in \mathring{P}$ et $y < z \Longleftrightarrow z - y \in P$ avec $z - y \neq \theta$ alors $y - x + (z - y) - (z - y) \in P$ ce qui entraîne $y - x + (z - y) \in \mathring{P}$ c'est à dire $z - x \in \mathring{P}$.

8. On a $x \leq y$ et $y \ll z$.
   Si $x = y$ on remplace $y$ par $x$ dans $y \ll z$, on trouve $x \ll z$.
   Si $x \neq y$ on obtient $x < y$ et $y \ll z$ donc d'après (7) on trouve $x \ll z$.

9. On a $x \ll y \Longleftrightarrow y - x \in \mathring{P}$ alors il existe $\omega \in P - \{\theta\}$ tel que $y - x - \omega \in P$.
   Ensuite les propriétés de $P$ et $a > 0$ entrainent que : $a(y - x) - a\omega \in P$.
   Donc $a(y - x) \in \mathring{P}$, c'est à dire $ax \ll ay$.

10. Soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites de $E$.
    On a $x_n \leq y_n \Longleftrightarrow y_n - x_n \in P$,
    comme $P$ est fermé on obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n - \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \in P$,
    c'est à dire $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

■

## 1.2 Les cônes normaux

**Définition 1.2.1** *Un cône $P \subset E$ est dit normal s'il existe une constante positive $\delta$ tel que $\|x+y\| \geq \delta$, $\forall x,\, y \in P$.*
*Géométriquement, la normalité signifie que l'angle entre deux vecteurs unitaires positifs ne doit pas dépasser $\pi$.*
*Autrement dit, un cône normal ne peut être trop large.*

**Définition 1.2.2** *Soient $X$ un espace normal, $P \subset X$ un cône et "$\leq$" est une relation d'ordre partiel de $P$. Alors*

1. *La norme $\|.\|$ est dite monotone si $\theta \leq x \leq y$ tel que $\|x\| \leq \|y\|$ ;*
2. *La norme $\|.\|$ est dite semi-monotone si $\theta \leq x \leq y$ tel que $\|x\| \leq \alpha \|y\|$ pour un certain $\alpha > 0$.*

Le théorème suivant nous donne d'autres définitions d'un cône normal.

**Théorème 1.2.1** ([1], page 2) *Soit $P$ un cône dans $E$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

*(i) $P$ est normal.*

*(ii) Il existe une constante $\gamma > 0$ telle que*
$\|x+y\| \geq \gamma \max\{\|x\|, \|y\|\}$ *pour tout $x, y \in P$.*

*(iii) Il existe une constante $N > 0$ telle que*
$\theta \leq x \leq y \Rightarrow \|x\| \leq N\|y\|$, *c'est-à-dire, la norme $\|\ \|$ est semi-monotone.*

*(iv) Il existe une norme équivalente $\|\ \|_1$ sur $E$ telle que*
$\theta \leq x \leq y \Rightarrow \|x\|_1 \leq \|y\|_1$, *c'est-à-dire, norme $\|\ \|_1$ est une norme monotone.*

*(v) Si $x_n \leq z_n \leq y_n$, $n \geq 1$ et $\|x_n - x\| \to 0$ quand $n \to +\infty$, $\|y_n - x\| \to 0$ alors*
$\|z_n - x\| \to 0$ *quand $n \to +\infty$.*

*(vi) L'ensemble $(B+P) \cap (B-P)$est borné, où $B = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$.*

*(vii) Tout intervalle ordonné $[x, y] = \{z \in E \mid x \leq z \leq y\}$ est borné.*

**Démonstration.** $(i) \Rightarrow (ii)$. En effet, supposons que $\|x\| = 1$ et $0 < \|y\| \leq 1$. D'une part, on a

$$1 = \|x\| \leq \|x+y\| + \|y\| \Rightarrow \|x+y\| \geq 1 - \|y\|,$$

et d'autre part, on a

$$\begin{aligned} \|x+y\| &= \left\| x + \frac{y}{\|y\|} - \frac{1-\|y\|}{\|y\|} y \right\| \\ &= \left\| x + \frac{y}{\|y\|} + \frac{-(1-\|y\|)}{\|y\|} y \right\| \\ &\geq \left\| x + \frac{y}{\|y\|} \right\| - \left\| \frac{y}{\|y\|} - y \right\| \\ &\geq \left\| x + \frac{y}{\|y\|} \right\| - 1 + \|y\|. \end{aligned}$$

Donc

$$2\|x+y\| \geq \left\| x + \frac{y}{\|y\|} \right\| - 1 + \|y\| + 1 - \|y\|,$$

d'où

$$\|x+y\| \geq \frac{1}{2} \left\| x + \frac{y}{\|y\|} \right\| \geq \frac{1}{2}\delta.$$

Par conséquent,

$$\|x+y\| \geq \gamma \max\{\|x\|, \|y\|\},$$

où $\gamma = \frac{\delta}{2}$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. En effet, supposons que $(iii)$ n'est pas vraie. Alors $\exists x_n,\, y_n \in P$ tel que $\theta \leq x_n \leq y_n$ et $\|x_n\| > n\|y_n\|$ $n \in \mathbb{N}^*$. Posons

$$u_n = \frac{x_n}{\|x_n\|} + \frac{y_n}{n\|y_n\|},\ v_n = -\frac{x_n}{\|x_n\|} + \frac{y_n}{n\|y_n\|}\ n \in \mathbb{N}^*,$$

il est clair que $u_n$ et $v_n \in P$ et

$$\|u_n\| \geq 1 - \frac{1}{n},\ \|v_n\| \geq 1 - \frac{1}{n},$$

donc, en vertu de $(ii)$,

$$\frac{2}{n} = \|u_n + v_n\| \geq \gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}^*,$$

ce qui est impossible.

$(iii) \Rightarrow (iv)$. En effet, posons

$$\|x\|_1 = \inf_{u \leq x} \|u\| + \inf_{v \geq x} \|v\|. \tag{1.2.1}$$

Nous prouvons que $\| \ \|_1$ est une norme sur $E$. Il est clair que $\|\theta\|_1 = 0$.

Supposons que $\|x\|_1 = 0$ et montrons que $x = \theta$.

On a

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists u, v \in E \text{ telque } u \leq x \leq v \text{ et } \|u\| \leq \varepsilon, \ \ \|v\| \leq \varepsilon;$$

donc de $(iii)$,

$$\|x\| \leq \|x - u\| + \|u\| \leq N \|v - u\| + \|u\| < (2N + 1)\,\varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, nous obtenons $x = \theta$.

L'égalité $\|\lambda x\|_1 = |\lambda| \|x\|_1$ est évidente pour tout $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Supposons maintenant $x, y \in E$ et montrons que $\|x + y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$.

On a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists u_1, u_2, v_1, v_2 \in E \text{ telque } u_1 \leq x \leq v_1, u_2 \leq y \leq v_2$$

et

$$\|u_1\| + \|v_1\| < \|x\|_1 + \varepsilon, \|u_2\| + \|v_2\| < \|y\|_1 + \varepsilon.$$

De $u_1 + u_2 \leq x + y \leq v_1 + v_2$, nous avons

$$\|u_1 + u_2\| + \|v_1 + v_2\| \geq \|x + y\|_1 \,,$$

et donc

$$\|x + y\|_1 \leq \|u_1\| + \|v_1\| + \|u_2\| + \|v_2\| \leq \|x\|_1 + \|y\|_1 + 2\varepsilon,$$

comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, ceci implique que $\|x + y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$.

Donc $\| \ \|_1$ est une norme sur $E$.

Montrons que $\| \ \|_1$ est monotone.

Soient $x, y \in P$ tels que $\theta \leq x \leq y$ alors $\inf\limits_{u \leq x} \|u\| = \inf\limits_{u \leq y} \|u\| = 0$ et donc

$$\|x\|_1 = \inf_{v \geq x} \|v\| \leq \inf_{v \geq y} \|v\| = \|y\|_1 \,.$$

Enfin, nous démontrons que $\| \ \|$ et $\| \ \|_1$ sont équivalentes.

Évidemment $\|x\|_1 \leq 2 \|x\|$.

D'autre part, pour tout $u \leq x \leq v$, nous avons

$$\|x\| \leq \|x - u\| + \|u\| \leq N \|v - u\| + \|u\| \leq (N + 1) \left(\|u\| + \|v\|\right).$$

Par conséquent, $\|x\| \leq (N+1)\|x\|_1$.

$(iv) \Rightarrow (v)$. En effet, de $\theta \leq z_n - x_n \leq y_n - x_n$, nous trouvons $\|z_n - x_n\|_1 \leq \|y_n - x_n\|_1$. Comme $m\|x\| \leq \|x\|_1 \leq M\|x\|$ pour tout $x \in E$, où $M > m > 0$ sont deux constantes, on obtient

$$\|z_n - x_n\| \leq \frac{1}{m}\|z_n - x_n\|_1 \leq \frac{1}{m}\|y_n - x_n\|_1 \leq \frac{M}{m}\|y_n - x_n\| \to 0, \text{ quand } n \to +\infty.$$

Ce qui implique que

$$\|z_n - x\| \leq \|z_n - x_n\| + \|x_n - x\| \to 0, \text{ quand } n \to +\infty.$$

$(v) \Rightarrow (vi)$. En effet, on raisonne par l'absurde, supposons que $(B+P)\cap(B-P)$ n'est pas borné, c'est à dire

$$\exists\,(z_n) \subset (B+P)\cap(B-P) \text{ telle que } \|z_n\| \to +\infty.$$

D'autre part, $z_n \in (B+P)\cap(B-P)$ entraîne l'existence de deux suites $(x_n)$ et $(y_n)$ de $B$ telles que

$$x_n \leq z_n \leq y_n, \forall n.$$

Posons

$$u_n = \frac{x_n}{\|z_n\|},\ v_n = \frac{y_n}{\|z_n\|} \text{ et } w_n = \frac{z_n}{\|z_n\|},$$

on aura $u_n \leq w_n \leq v_n$ et $u_n \to \theta$, $v_n \to \theta$, mais $w_n \neq \theta$ (car $\|w_n\| = 1$), ce qui contredit $(v)$.

$(vi) \Rightarrow (vii)$. En effet, supposons que $(B+P)\cap(B-P) \subset B(\theta,\rho)$, où $\rho > 0$, posons $r = \max\{\|x\|, \|y\|\}$, et montrons que $\frac{z}{r} \in (B+P)\cap(B-P)$ pour tout $z \in [x,y]$, par suite $\frac{z}{r} \in B(\theta,\rho)$, donc $[x,y] \subset B(\theta, r\rho)$.

$(vii) \Rightarrow (i)$. En effet, on raisonne par l'absurde,
supposons que $(i)$ n'est pas vraie, alors il existe $(x_n) \subset P$ et $(y_n) \subset P$ tel que

$$\|x_n\| = \|y_n\| = 1 \text{ et } \|x_n + y_n\| < \frac{1}{4^n} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Posons

$$u_n = \frac{x_n}{\sqrt{\|x_n + y_n\|}},\ v_n = \frac{x_n + y_n}{\sqrt{\|x_n + y_n\|}} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Nous avons $\theta \leq u_n \leq v_n$, de plus,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|v_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} < +\infty.$$

La série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ est donc convergente à un certain élément $v \in E$.
Évidemment, $\theta \leq u_n \leq v_n < v$ et

$$\|u_n\| = \frac{1}{\sqrt{\|x_n + y_n\|}} > 2^n \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Par conséquent, l'intervalle ordonné $[\theta, v]$ est non borné, ce qui contredit $(vi)$. ■

**Remarque 1.2.1** *Plusieurs auteurs utilisent l'assertion $(iii)$ comme définition de la normalité d'un cône $P$, et appellent le plus petit nombre $N$ "la constante de normalité de $P$".*

**Exemple 1.2.1** *Soient $E = \mathbb{R}^n$ et $P_1 = \left\{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = \overline{1, n}\right\}$.*

- *$P_1$ est un cône solide car $P_1$ contient des éléments intérieurs tel que $\mathring{P}_1 = \left\{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, i = \overline{1, n}\right\}$.*
- *$P_1$ est un cône générateur car $\forall X = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\exists U = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$, $V = (v_1, v_2, \cdots, v_n) \in P_1$ tels que $X = U - V$.*
- *$P_1$ est normal et sa constante de normalité $N = 1$ car toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont monotones. Alors*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \ \theta \leq x \leq y \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|.$$

**Exemple 1.2.2** *Soient $G$ un ensemble borné fermé dans $\mathbb{R}^n$ et $E = \mathcal{C}(G)$ l'espace des fonctions continues définies sur $G$ à valeurs réelles muni de la norme $\|x\| = \sup\limits_{x \in G} |x(t)|$. Soit*

$$P_2 = \{x \in \mathcal{C}(G) : x(t) \geq 0, \text{ pour tout } t \in G\}.$$

- *$P_2$ est un cône solide dans $\mathcal{C}(G)$ car $P_2$ contient des éléments intérieurs tel que $\mathring{P}_2 = \{x \in \mathcal{C}(G) : x(t) > 0, \text{ pour tout } t \in G\}$.*
- *On a $x \leq y \Longleftrightarrow x(t) \leq y(t)$ pour tout $t \in G$, donc la norme est monotone. Alors $P_2$ est normal et sa constante de normalité est $N = 1$.*

**Exemple 1.2.3** *Soient $E = L^p(\Omega)$, où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $0 < mes\ \Omega < \infty$ et $1 \leq p < \infty$ muni de la norme $\|x\| = \left(\int\limits_{\Omega} |x(t)|^P dt\right)^{\frac{1}{P}}$ et $P_3 = \{x \in L^p(\Omega) : x(t) \geq 0, \ p.p \text{ dans } \Omega\}$.*

- *$P_3$ est un cône générateur dans $L^p(\Omega)$.*

- *De* $x \leq y \iff x(t) \leq y(t)$ *p.p.* $t \in \Omega$, *il s'ensuit que la norme est monotone et donc* $P_3$ *est un cône normal et sa constante de normalité est* $N = 1$.

- $P_3$ *n'est pas un cône solide car* $\mathring{P}_3 = \emptyset$.

**Exemple 1.2.4** *Soit* $E = C^1([0, 2\pi])$ *l'espace des fonctions continument dérivables sur* $[0, 2\pi]$ *muni de la norme*

$$\|x\| = \max_{0 \leq t \leq 2\pi} |x(t)| + \max_{0 \leq t \leq 2\pi} \left| x^{'}(t) \right|,$$

*et soit*

$$P_4 = \left\{ x \in C^1[0, 2\pi] \mid x(t) \geq 0,\ 0 \leq t \leq 2\pi \right\}.$$

- $P_4$ *est un cône solide dans* $C^1[0, 2\pi]$.

- $P_4$ *est générateur, puisque chaque* $x \in C^1[0, 2\pi]$ *peut s'écrire sous la forme*

$$x(t) = y(t) - z(t),\ \forall t \in [0, 2\pi],$$

  *où* $y(t) \equiv M > 0$ *et* $z(t) = M - x(t)$, *avec* $M > \max\limits_{0 \leq t \leq 2\pi} x(t)$, *il est clair que* $y, z \in P_4$.

- $P_4$ *n'est pas normale. En effet, si* $P_4$ *est normale, alors, par le théorème 1.2.1,* $(iii)$, *il existe un* $N > 0$ *tel que, si* $\theta \leq x \leq y$ *alors* $\|x\| \leq N\|y\|$.
  *Soient* $x_n(t) = 1 - \cos nt$ *et* $y_n(t) \equiv 2$ *pour* $n \in \mathbb{N}^*$. *On a* $\theta \leq x_n \leq y_n$, $\|x_n\| = 2 + n$, *et* $\|y_n\| = 2$.
  *Par conséquent,* $2 + n \leq 2N$, $n \in \mathbb{N}^*$, *ce qui est impossible (car* $\mathbb{N}$ *n'est pas borné).*
  *Donc* $P_4$ *n'est pas un cône normal.*

## 1.3 Les cônes réguliers et les cônes complètement réguliers

**Définition 1.3.1** *Soit* $(X, \leq)$ *un ensemble partiellement ordonné et* $M \subset X$.

- *Pour tout* $x, y \in M$, *si* $x \leq y$ *ou* $y \leq x$, *alors nous disons que* $M$ *est un ensemble totalement ordonné.*

- *Si* $x^* \in X$ *est tel que* $y \leq x^*$ *pour tout* $y \in M$, *alors* $x^*$ *est dit majorant de* $M$.

- *Si $x^* \in X$ est tel que $x_* \leq y$ pour tout $y \in M$, alors $x^*$ est dit minorant de $M$.*
- *Si $x_0 \in X$ tel que $x_0 \leq y$ pour un certain $y \in X$ et $y = x_0$, alors $x_0$ est l'élément maximal de $X$.*
- *Si $x_0 \in X$ tel que $y \leq x_0$ pour un certain $y \in X$ et $x_0 = y$, alors $x_0$ est l'élément minimal de $X$.*
- *On dit qu'un ensemble $D \subset E$ est majoré s'il existe un élément $v \in E$ tel que $x \leq v$ pour tout $x \in D$.*
- *On dit qu'un ensemble $D \subset E$ est minoré s'il existe un élément $\omega \in E$ tel que $x \geq \omega$ pour tout $x \in D$.*

**Définition 1.3.2 (Cône régulier)** *On dit qu'un cône $P \subset E$ est régulier si toute suite croissante et majorée dans $E$ a une limite, c'est-à-dire si $(x_n) \subset E$ et $y \in E$ vérifiant*

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots \leq y, \tag{1.3.1}$$

*alors il existe $x^* \in E$ tel que $\|x_n - x^*\| \to 0$, quand $n \to +\infty$.*
*Il est clair que le cône $P$ est régulier si et seulement si toute suite décroissante et minorée dans $E$ a une limite.*

**Définition 1.3.3 (Cône complètement régulier)** *On dit qu'un cône $P \subset E$ est complètement régulier si toute suite croissante et bornée en norme dans $E$ a une limite, c'est-à-dire si $(x_n) \subset E$ vérifiant*

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots, \quad avec \quad M := \sup_n \|x_n\| < +\infty, \tag{1.3.2}$$

*alors il existe $x^* \in E$ tel que $\|x_n - x^*\| \to 0$ quand $n \to +\infty$.*
*Il est clair que le cône $P$ est complètement régulier si et seulement si toute suite décroissante et bornée en norme dans $E$ a une limite.*

**Théorème 1.3.1** ([2], *page 32*) *Soit $P$ un cône d'un espace de Banach $E$.*
*$P$ est complètement régulier $\Longrightarrow$ $P$ est régulier $\Longrightarrow$ $P$ est normal.*

**Démonstration.** Nous prouvons d'abord que si $P$ n'est pas normal, alors $P$ n'est régulier et n'est pas complètement régulier.

Supposons que $P$ n'est pas normal, d'après le théorème 1.2.1, $(iii)$, il existe $(x_n) \subset P$ et $(y_n) \subset P$ telles que

$$\theta \leq x_n \leq y_n \text{ et } \|x_n\| > 2^n \|y_n\| \ \ n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.3.3}$$

Posons $z_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$ et $v_n = \frac{y_n}{2^n\|y_n\|}$ $n \in \mathbb{N}^*$ puis, par (1.3.3),

$$\theta < z_n \leq \frac{x_n}{2^n \|y_n\|} \leq \frac{y_n}{2^n \|y_n\|} = v_n \ n \in \mathbb{N}^*, \tag{1.3.4}$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < +\infty. \tag{1.3.5}$$

Donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ converge vers certain élément $v \in E$, i.e.,

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v. \tag{1.3.6}$$

Maintenant nous définissons

$$w_n = \begin{cases} v_1 + v_2 + \cdots + v_{2m}, & \text{quand } n = 2m,\ m \in \mathbb{N}^* \\ v_1 + v_2 + \cdots + v_{2m} + z_{2m+1}, & \text{quand } n = 2m+1,\ m \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Il est facile de montrer à partir de (1.3.4), (1.3.5) et (1.3.6) que

$$\theta < w_2 \leq w_3 \leq w_4 \leq \cdots \leq v \tag{1.3.7}$$

et

$$\sup_n \|w_n\| \leq 2 < +\infty. \tag{1.3.8}$$

Mais la suite $(w_n)$ n'est pas convergente, puisque $\|w_{2m+1} - w_{2m}\| = \|z_{2m+1}\| = 1$.

Donc $P$ n'est pas régulier et n'est pas complètement régulier.

Enfin, montrons que la régularité complète de $P$ implique la régularité de $P$.

Supposons que $P$ soit complètement régulier et (1.3.1) soit satisfaite. Alors, par la conclusion mentionnée ci-dessus, $P$ est normal.

Il résulte donc du théorème 1.2.1 et du fait que $\theta \leq y - x_n \leq y - x_1$, $n \in \mathbb{N}^*$ que

$$\|y - x_n\| \leq N \|y - x_1\| \ \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Donc $\sup_n \|x_n\| < \infty$, et ceci entraîne que la suite $(x_n)_n$ est convergente. ■

**Exemple 1.3.1** *Soient* $E = L^p(\Omega)$*, où* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*,* $0 < mes\ \Omega < \infty$ *et* $1 \leq p < \infty$*, et*

$$P_1 = \{x \in L^p(\Omega) : x(t) \geq 0,\ p.p\ dans\ \Omega\}$$

*Nous prouvons que le cône* $P_1$ *est complètement régulier, donc, par le théorème 1.3.1, il est régulier. Supposons* (1.3.2) *est satisfaite, i.e.*

$$x_1(t) \leq x_2(t) \leq \cdots \leq x_n(t) \leq \cdots,\ et\ \int_\Omega |x_n(t)|^P\, dt \leq M^P \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

*Par conséquent, par le lemme de Fatou,* $\int_\Omega |x^*(t)|^P\, dt \leq M^P$*, i.e.,* $x^* \in L^P(\Omega)$*, où* $x^*(t) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)$*. Il découle facilement de*

$$0 \leq x^*(t) - x_n(t) \leq x^*(t) - x_1(t) \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

*et du théorème de la convergence dominée de Lebesgue que*

$$\|x^* - x_n\|_{L^P}^P = \int_\Omega |x^*(t) - x_n(t)|^P\, dt \to 0,\ quand\ n \to \infty.$$

*La régularité complète de* $P_1$ *est donc prouvée.*

**Exemple 1.3.2**

- *Soient* $E = c_0 = \left\{x = (x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots) \mid \lim\limits_{k\to+\infty} x_k = 0\right\}$ *muni de la norme* $\|x\| = \sup\limits_k |x_k|$ *et*

  $$P_2 = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots) \in c_0 \mid x_k \geq 0, k \in \mathbb{N}^*\}.$$

  *Si* $x^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_k^{(n)}, \cdots\right) \in c_0$*,* $y = (y_1, y_2, \cdots, y_k, \cdots) \in c_0$ *tels que*

  $$x^{(1)} \leq x^{(2)} \leq \cdots \leq x^{(n)} \leq \cdots \leq y,$$

  *il est facile de voir que* $\left\|x^{(n)} - x^*\right\| \longrightarrow 0$ *quand* $n \to \infty$*, où*

  $$x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_k^*, \cdots)\ \ et\ x_k^* = \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)}.$$

  *Donc* $P_2$ *est régulier. D'autre part, posons* $z^{(n)} = \left(z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \cdots, z_k^{(n)}, \cdots\right)$*, où*

  $$z_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & k \leq n; \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

  *Nous voyons que*

  $$z^{(n)} \in c_0,\ z^{(1)} \leq z^{(2)} \leq \cdots \leq z^{(n)} \leq \cdots\ \ et\ \left\|z^{(n)}\right\| = 1 \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

  *mais* $\left(z^{(n)}\right)$ *ne converge pas dans* $c_0$ *et donc* $P_2$ *n'est pas complètement régulier.*

- *De même, on peut prouver que le cône* $P_3 = \{x \in C_0([a, +\infty[) \mid x(t) \geq 0\}$ *de l'espace de Banach* $C_0([a, +\infty[) = \left\{x \in C([a, +\infty[) \mid \lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0\right\}$ *muni de la norme*

$$\|x\| = \sup_{a \leq t \leq +\infty} |x(t)|$$

*est régulier, mais n'est pas complètement régulier.*

**Théorème 1.3.2** ([*1*], *page 10*) *Si* $E$ *est réflexif et* $P$ *est un cône dans* $E$*, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

**(i)** $P$ *est normal ;*

**(ii)** $P$ *est régulier ;*

**(iii)** $P$ *est complètement régulier.*

## 1.4 Les cônes minihedrals et les cônes fortement minihedralsal.

**Définition 1.4.1** *Un élément $z \in E$ est appelé la borne supérieure (c'est-à-dire supremum) de l'ensemble $D \subset E$, s'il satisfait les deux conditions suivantes :*

*(i) $x \leq z$ pour toute $x \in D$ ;*

*(ii) $x \leq y$, $x \in D$ implique $z \leq y$, pour tout $y \in E$.*

*Nous désignons la borne supérieure de $D$ par $\sup D$, c'est-à-dire, $z = \sup D$.*
*La borne inférieure de $D$, $\inf D$ est définie de façon analogue.*

**Lemme 1.4.1** ([2], *page 39*) *Supposons que $P$ est un cône régulier dans un espace de Banach $E$. Alors*

1. *Tout ensemble majoré et totalement ordonné dans $E$ a un supremum.*
2. *Tout ensemble minoré et totalement ordonné dans $E$ a un infimum.*

**Lemme 1.4.2 (Lemme de Zorn)** ([2], *page 24*) *Soit $X$ un ensemble partiellement ordonné. Alors*

1. *Si tout sous-ensemble totalement ordonné de $X$ a un majorant, alors $X$ a un élément maximal.*
2. *Si tout sous-ensemble totalement ordonné de $X$ a un minorant, alors $X$ a un élément minimal.*

**Définition 1.4.2 (Cône minihedral)** *Le cône $P$ est dit minihedral si $\sup\{x, y\}$ existe pour tout couple $(x, y)$.*
*Il est évident, que $P$ est minihedral si et seulement si $\inf\{x, y\}$ existe pour tout couple $(x, y)$.*
*Il est facile de montrer que si $P$ est minihedral, alors $\sup D$ existe pour tout ensemble fini $D = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset E$, qui est un ensemble majoré. Par ailleurs, l'égalité suivante est valable :*

$$\sup\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} = \sup\{x_1, \sup\{x_2, \cdots, x_n\}\}.$$

**Définition 1.4.3 (Cône fortement minihedral)** *Le cône $P$ est dit fortement minihedral si* $\sup D$ *existe pour tout ensemble majoré de $D \subset E$.*
*Il est évident que $P$ est fortement minihedral si et seulement si* $\inf D$ *existe pour tout ensemble minoré de $D \subset E$.*

Par définition, il est clair que la forte minihedralité d'un cône $P$ implique la minihedralité de $P$.

**Exemple 1.4.1** *Soit $G$ un ensemble borné fermé dans $\mathbb{R}^n$. Pour $E = \mathcal{C}(G)$ le cône*

$$P_1 = \{x \in \mathcal{C}(G) : x(t) \geq 0, t \in G\}$$

*est minihedral, puisque pour tout $x$, $y \in \mathcal{C}(G)$, on a*

$$\sup\{x, y\} = z, \text{ où } z(t) = \max\{x(t), y(t)\} \in \mathbb{R}, \forall t \in G.$$

**Exemple 1.4.2**

- *Pour $E = C^1([0, 2\pi])$, le cône*

$$P_2 = \left\{x \in C^1[0, 2\pi] \mid x(t) \geq 0,\ 0 \leq t \leq 2\pi\right\}$$

*n'est pas minihedral, puisque* $\sup\{x, y\}$ *n'existe pas pour*

$$x(t) = t,\ 0 \leq t \leq 2\pi \text{ et } y(t) = 2\pi - t,\ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

*Car si on suppose que* $\sup\{x, y\} = z$, *alors* $z(t) = \begin{cases} 2\pi - t & \text{si } 0 \leq t \leq \pi \\ t & \text{si } \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$
*mais $z \notin C^1([0, 2\pi])$.*
*Il est évident que $x \leq z$, $y \leq z$, où $z(t) = 2\pi$, $0 \leq t \leq 2\pi$.*

- *Pour $E = c_0$, le cône $P_3 = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots) \in c_0 \mid x_k \geq 0, k \in \mathbb{N}^*\}$ est fortement minihedral.*
*En effet, pour tout sous ensemble majoré $D$ de $c_0$,*

$$\sup D = z \in c_0, \text{ où } z = (z_1, z_2, \cdots, z_k, \cdots)$$

*avec*

$$z_k = \sup\{x_k \mid x = (x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots) \in D\},\ k \in \mathbb{N}^*.$$

**Théorème 1.4.1** ([*1*], *page 15*) *Si $E$ est séparable et le cône $P \subset E$ est régulier et minihedral, alors $P$ est fortement minihedral.*

**Démonstration.** Supposons $D \subset E$ et il existe un $z \in E$ tel que $x \leq z$, $\forall x \in D$. Puisque $E$ est séparable, il existe un ensemble dénombrable $M = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\} \subset D$, qui est dense dans $D$.

Posons $y_n = \sup\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ $n \in \mathbb{N}^*$, qui existent en vertu de la minihedralité de $P$. Évidemment,

$$y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n \leq \cdots \leq z.$$

Il découle de la régularité de $P$ que $y_n \to x^* \in E$ c'est-à-dire, $\|y_n - x^*\| \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Maintenant, on prouve que $x^* = \sup D$. D'abord, on remarque que

$$x_n \leq x^* \quad n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.4.1}$$

Pour tout $x \in D$, il existe une suite dans $M$, qui converge vers $x$. D'après (1.4.1), on obtient $x \leq x^*$, donc $x^*$ est un majorant de $D$. D'autre part, si $v \in E$ est un majorant de $D$, alors

$$y_n \leq v \quad n \in \mathbb{N}^*$$

et donc $x^* \leq v$. ■

**Corollaire 1.4.1** *Si $E$ est séparable et réflexif et le cône $P \subset E$ est normal et minihedral, alors $P$ est fortement minihedral.*

**Démonstration.** Le résultat de ce corollaire découle directement des théorèmes 1.3.2 et 1.4.1. ■

**Exemple 1.4.3** *Pour $E = L^p(\Omega)$ où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, le cône $P_4 = \{x \in L^p(\Omega) : x(t) \geq 0 \ p.p \ dans \ \Omega\}$ est minihedral, car $\sup\{x, y\} = z$ existe pour tout $x$, $y \in L^p(\Omega)$ $(p \geq 1)$, où*

$$z(t) = \max\{x(t),\ y(t)\} \quad p.p. \ t \in \Omega.$$

*Observons que $L^p(\Omega)$ est séparable et $P_4$ est régulier, (résultat démontré dans l'exemple 1.3.1), il résulte du théorème 1.4.1 que $P_4$ est fortement minihedral.*

**Exemple 1.4.4**
- *Pour $E = C^1[0, 2\pi]$, le cône $P_2 = \{x \in C^1[0, 2\pi] \mid x(t) \geq 0,\ 0 \leq t \leq 2\pi\}$ n'est ni minihedral ni normal.*

- *Nous donnons un exemple d'un cône qui est minihedral, mais n'est pas normal. Supposons que* $E = \ell^2 = \left\{ x = (x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots) \mid \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty \right\}$, *muni de la norme*

$$\|x\| = \left( \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \ x = (x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots) \in \ell^2.$$

*Soit*

$$P_5 = \left\{ x = (x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots) \in \ell^2 \mid x_1 \geq 0, \ x_i \leq x_1, \ i = 2, 3, \cdots \right\}.$$

*Évidemment,* $P_5$ *est un cône dans* $\ell^2$.

*Pour toute pair d'éléments* $x = (x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots) \in \ell^2$ *et*
$y = (y_1, y_2, \cdots, y_i, \cdots) \in \ell^2$, *il est facile de vérifier que* $\sup\{x, y\} = z$,
*où* $z = (z_1, z_2, \cdots, z_i, \cdots)$,

$$z_1 = \max\{x_1, y_1\},$$

$$z_i = \min\{z_1 - x_1 + x_i, \ z_1 - y_1 + y_i\}, \ i = 2, 3, \cdots.$$

*Dans le cas* $z_1 = x_1$, *on a* $z_i = x_i$ *ou* $y_i \leq z_i \leq x_i$, *et dans le cas où* $z_1 = y_1$, *on a* $z_i = y_i$ *ou* $x_i \leq z_i \leq y_i$ *; Il faut donc avoir* $z \in \ell^2$, *et la minihedralité de* $P_5$ *a été prouvée.*

*Maintenant, supposons que* $u = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{i}, \cdots\right)$, $\theta = (0, 0, \cdots, 0, \cdots)$,
*et* $x^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_i^{(n)}, \cdots\right)$, *où*

$$x_i^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{2}, \ i \leq n \ ; \\ 0, \ i > n. \end{cases}$$

*Il est facile de voir que* $\theta \leq x^{(n)} \leq u \quad n \in \mathbb{N}^*$, $\left\|x^{(n)}\right\| = \frac{\sqrt{n}}{2} \to +\infty$, *et donc* $[\theta, u]$ *est non borné.*

*Par conséquent, par le théorème 1.2.1, (vii),* $P_5$ *n'est pas normal.*

- *Nous pouvons aussi donner un simple exemple d'un cône qui est fortement minihedral et normal, mais n'est pas régulier.*
*Soit* $E = \ell_\infty = \left\{ x = (x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots) \mid \lim\limits_k x_k < \infty \right\}$ *l'espace des suites bornées muni de la norme* $\|x\| = \sup\limits_i |x_i|$ *et soit*

$$P_6 = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots) \in \ell_\infty \mid x_i \geq 0, \ i \in \mathbb{N}^*\}.$$

*Comme la norme est monotone, $P_6$ est un cône normal de $\ell_\infty$.*

*Soit $D$ un ensemble majoré de $\ell_\infty$. Il est clair* $\sup D = z \in \ell_\infty$*, où* $z = (z_1, z_2, \cdots, z_i, \cdots)$,

$$z_i = \sup \{x_i \mid x = (x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots) \in D\}.$$

*Donc $P_6$ est fortement minihedral.*

*Enfin, nous définissons la suite $\left(x^{(n)}\right)$ par : $x^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_i^{(n)}, \cdots\right)$, où*

$$x_i^{(n)} = \begin{cases} 1, \ i \leq n \ ; \\ 0, \ i > n. \end{cases}$$

*Constatons que cette suite vérifie*

$$x^{(1)} \leq x^{(2)} \leq \cdots \leq x^{(n)} \leq \cdots \leq y, \text{ avec } y = (1, \cdots, 1, \cdots),$$

*mais elle ne converge pas dans $\ell_\infty$ et donc $P_6$ n'est pas régulier.*

# CHAPITRE 2 Théorèmes du point fixe pour les opérateurs croissants et applications

## 2.1 Théorèmes du point fixe pour les opérateurs croissants

Soit $P$ un cône dans l'espace de Banach réel $E$ et " $\leq$ " l'ordre partiel dans $E$ induit par $P$.

**Définition 2.1.1** *Soit $D$ un sous ensemble de $E$. On dit qu'un opérateur $A\ : D \to E$ est croissant si*

$$\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \leq x_2 \Longrightarrow Ax_1 \leq Ax_2.$$

*$A$ est dit strictement croissant si $\forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \Longrightarrow Ax_1 < Ax_2$.*
*$A$ est dit fortement croissant si $\forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \Longrightarrow Ax_1 \ll Ax_2$ (dans le cas où $\mathring{P} \neq \emptyset$).*

**Définition 2.1.2 (Opérateur complètement continu)** *On dit qu'un opérateur $A : D \subset E \to E$ est complètement continu s'il est continu et compact. La compacité signifie que l'ensemble $A(S)$ est relativement compact pour tout ensemble borné $S \subset D$.*

**Définition 2.1.3 (Opérateurs convexe et concave)** *Soit $D$ un ensemble convexe dans $E$ et $A : D \to E$ un opérateur.*

(1) *Si pour tout* $x, y \in D, x \leq y$ *et* $t \in [0,1]$

$$A\left(tx + (1-t)\,y\right) \geq tAx + (1-t)\,Ay,$$

*alors* $A$ *est dit opérateur concave sur* $D$.

(2) *Si pour tout* $x, y \in D, x \leq y$ *et* $t \in [0,1]$

$$A\left(tx + (1-t)\,y\right) \leq tAx + (1-t)\,Ay,$$

*alors* $A$ *est dit opérateur convexe sur* $D$.

Clairement, $A$ est un opérateur convexe de $D$ si et seulement si $-A$ est un opérateur concave de $D$.

**Définition 2.1.4** *On appelle point fixe maximal (point fixe minimal) d'un opérateur* $A$ *le plus grand (le plus petit) des points fixes de* $A$.

**Théorème 2.1.1** ([*1*], *page 41*) *Soient* $u_0, v_0 \in E$, $u_0 < v_0$ *et* $A : [u_0, v_0] \to E$ *un opérateur croissant tels que*

$$u_0 \leq Au_0, \;\; Av_0 \leq v_0. \tag{2.1.1}$$

*Supposons que l'une des deux conditions suivantes soit satisfaite :*

$(H_1)$ $P$ *est normal et* $A$ *est complètement continu ;*

$(H_2)$ $P$ *est régulier et* $A$ *est continu.*

*Alors,* $A$ *a un point fixe maximal* $x^*$ *et un point fixe minimal* $x_*$ *dans* $[u_0, v_0]$. *De plus*

$$x_* = \lim_{n\to\infty} u_n, \; x^* = \lim_{n\to\infty} v_n, \tag{2.1.2}$$

*où* $v_n = Av_{n-1}$ *et* $u_n = Au_{n-1}$ $n \in \mathbb{N}^*$, *et*

$$u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_n \leq \cdots \leq x_* \leq x^* \leq \cdots \leq v_n \leq \cdots \leq v_1 \leq v_0. \tag{2.1.3}$$

**Démonstration.** Comme $A$ est un opérateur croissant, il résulte de (2.1.1) que

$$u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_n \leq \cdots \leq v_n \leq \cdots \leq v_1 \leq v_0 \cdots \tag{2.1.4}$$

En effet, nous prouvons que la suite $(u_n)$ converge vers un certain $x_* \in E$ et $Ax_* = x_*$. Lorsque la condition $(H_1)$ est satisfaite, l'ensemble $S = \{u_0, u_1, u_2, \cdots\}$ est borné et $S = A(S) \cup \{u_0\}$. Soit $A$ un opérateur complètement continu, c'est-à-dire $A(S)$ est un ensemble relativement compact alors $S$ est relativement compact. Il existe donc une sous-suite $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ telle que $u_{n_k} \to x_* \in E$ quand $k \to +\infty$. Clairement, $u_n \leq x_* \leq v_n$ $n \in \mathbb{N}^*$. Lorsque $m > n_k$, on a $\theta \leq x_* - u_m \leq x_* - u_{n_k}$, et donc, en vertu de la normalité de $P$ et du théorème 1.2.1, $\|x_* - u_m\| \leq N \|x_* - u_{n_k}\|$, où $N$ désigne la constante de la normalité du cône $P$. Ainsi, $u_m \to x_*$ $m \to \infty$. En prenant $n \to \infty$ dans les deux côtés de l'égalité $u_n = Au_{n-1}$, la continuité de $A$ entraîne que $Ax_* = x_*$.
Lorsque la condition $(H_2)$ est satisfaite, la suite $(u_n)$ converge vers un certain $x_* \in E$ en vue de (2.1.4) et de la régularité de $P$. Comme $A$ est continu, $u_n = Au_{n-1}$ converge vers $Ax_*$ et donc $Ax_* = x_*$.
De même, on peut prouver que la suite $(v_n)$ converge vers un certain $x^* \in E$ tel que $Ax^* = x^*$avec

$$u_n \leq x_* \leq x^* \leq v_n \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.1.5}$$

Ensuite par (2.1.4) et (2.1.5), on obtient (2.1.3).
Enfin, nous montrons que $x^*$ et $x_*$ sont les points fixes maximal et minimal de $A$ dans $[u_0, v_0]$, respectivement. Soit $\bar{x} \in [u_0, v_0]$ tel que $A\bar{x} = \bar{x}$. Comme $A$ est croissant, il résulte de $u_0 \leq \bar{x} \leq v_0$ que $Au_0 \leq A\bar{x} \leq Av_0$, c'est-à-dire $u_1 \leq \bar{x} \leq v_1$. En utilisant le même argument, on obtient $u_2 \leq \bar{x} \leq v_2$, et en général, $u_n \leq \bar{x} \leq v_n$ $n \in \mathbb{N}^*$. Par passage à la limite quand $n \to \infty$, on aura $x_* \leq \bar{x} \leq x^*$, et notre théorème est démontré. ■

**Corollaire 2.1.1** *Supposons que les conditions du théorème 2.1.1 sont satisfaites. De plus supposons que $A$ n'a qu'un point fixe $\bar{x}$ dans $[u_0, v_0]$. Alors, pour tout $x_0 \in [u_0, v_0]$, la suite $(x_n)$ définie par :*

$$x_n = Ax_{n-1} \quad n \in \mathbb{N}^* \tag{2.1.6}$$

*converge vers $\bar{x}$, c'est à dire $\|x_n - \bar{x}\| \to 0$ $n \to +\infty$.*

**Démonstration.** Étant donné que $u_0 \leq x_0 \leq v_0$ et $A$ est croissant, on aura donc

$$u_n \leq x_n \leq v_n \quad n \in \mathbb{N}^*. \tag{2.1.7}$$

Par hypothèses, il s'ensuit que $x_* = x^* = \bar{x}$ et ensuite $u_n \to \overline{x}$ et $v_n \to \overline{x}$. Par conséquent, d'après (2.1.7), et le théorème 1.2.1, nous obtenons $x_n \to \bar{x}$ pour $n \to +\infty$. ■

**Théorème 2.1.2** *([1], page 42) Soient $u_0, v_0 \in E$, $u_0 < v_0$ et $A : [u_0, v_0] \to E$ un opérateur croissant tel que $u_0 \leq Au_0$ et $Av_0 \leq v_0$. Supposons que $P$ soit fortement minihedral. Alors, $A$ admet un point fixe maximal $x^*$ et un point fixe minimal $x_*$ dans $[u_0, v_0]$ vérifiant*

$$u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_n \leq \cdots \leq x_* \leq x^* \leq \cdots \leq v_n \leq \cdots \leq v_1 \leq v_0 \tag{2.1.8}$$

*où $u_n = Au_{n-1}$ et $v_n = Av_{n-1}$ $n \in \mathbb{N}^*$.*

**Démonstration.** Soit $D = \{x \in E : u_0 \leq x \leq v_0, Ax \geq x\}$.
Evidemment, $u_0 \in D$ et $v_0$ est un majorant de $D$. Ensuite, par la fortement minihedralité de $P$, $x^* = \sup D$ existe. Maintenant, nous prouvons que $x^*$ est le point fixe maximal de $A$ dans $[u_0, v_0]$. En effet, $u_0 \leq x \leq x^* \leq v_0$ pour tout $x \in D$ et donc

$$u_0 \leq Au_0 \leq Ax \leq Ax^* \leq Av_0 \leq v_0.$$

On a $Ax \geq x$, alors $x \leq Ax^*$ pour tout $x \in D$. Il résulte de la définition de la borne supérieure que $x^* \leq Ax^*$.
D'autre part, à partir de $x^* \leq Ax^*$, nous savons que $Ax^* \leq A(Ax^*)$ ce qui implique que $Ax^* \in D$, et donc $Ax^* \leq x^*$. D'où $Ax^* = x^*$. Si $\bar{x}$ est un point fixe de $A$ dans $[u_0, v_0]$, alors $\bar{x} \in D$, et donc $\bar{x} \leq x^*$. Cela prouve la maximalité de $x^*$.
De même, on peut prouver que $x_* = \inf D_1$ est le point fixe minimal de $A$ dans $[u_0, v_0]$, où $D_1 = \{x \in E \ : \ u_0 \leq x \leq v_0, \ Ax \leq x\}$.
Finalement, puisque $u_0 \leq x_* \leq x^* \leq v_0$ et $A$ est croissant, (2.1.8) est satisfaite. ■

**Remarque 2.1.1** *Remarquons que dans le théorème 2.1.2 nous n'exigeons pas que l'opérateur $A$ soit continu. D'autre part, nous ne pouvons pas assurer que les limites* (2.1.2) *existent.*

**Théorème 2.1.3** *([1], page 43) Soient $u_0, v_0 \in E$, $u_0 < v_0$ et $A : [u_0, v_0] \to E$ un opérateur croissant tels que $u_0 \leq Au_0$ et $Av_0 \leq v_0$. Supposons que $A([u_0, v_0])$ soit un ensemble relativement compact de $E$. Alors $A$ a au moins un point fixe dans $[u_0, v_0]$.*

**Démonstration.** Soit $F = \{x \in A([u_0, v_0]) : Ax \geq x\}$. Nous avons $A(Au_0) \geq Au_0$ qui implique $Au_0 \in F$, et donc $F$ n'est pas vide. Comme $E$ est partiellement ordonné par $P$, $F$ est un ensemble de partiellement ordonné. Maintenant, supposons que $G$ est un sous-ensemble totalement ordonné de $F$. Comme $A([u_0, v_0])$ est relativement compact, et $G \subset F \subset A([u_0, v_0])$ alors, $G$ est relativement compact et donc séparable, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble dénombrable $V = \{y_1, y_2, \cdots\} \subset G$, qui est dense dans $G$. Puisque $G$ est totalement ordonné, $z_n = \sup\{y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots\}$ $n \in \mathbb{N}^*$ existe et $z_n \in G$ (en fait, $z_n$ égale à l'un de $y_i$, $i \in \mathbb{N}^*$). Il découle de la compacité relative de $G$ qu'il existe une sous-suite $(z_{n_i}) \subset (z_n)$ telle que $z_{n_i} \to v^* \in E$. Puisque

$$z_1 \leq z_2 \leq \cdots \leq z_n \leq \cdots,$$

nous avons

$$y_n \leq z_n \leq v^* \quad n \in \mathbb{N}^* \tag{2.1.9}$$

et $v^* \in \overline{G} \subset \overline{F} \subset \overline{A([u_0, v_0])} \subset [u_0, v_0]$. De (2.1.9) nous obtenons $z \leq v^*$ pour tout $z \in G$, et donc $z \leq Az \leq A\, v^*$ pour tout $z \in G$. Ainsi $A\, v^*$ est un majorant de $G$. D'autre part, de $z_n \leq A\, v^*$ $n \in \mathbb{N}^*$ nous obtenons $v^* \leq A\, v^*$ et donc $A\, v^* \leq A(Az^*)$, ce qui montre que $Az^* \in F$. Ainsi, $Az^*$ est un majorant de $G$ dans $F$. Il résulte donc du lemme de Zorn que $F$ contient un élément maximal $x^*$. Puisque $Ax^* \geq x^*$ et ainsi $A(Ax^*) \geq Ax^*$, on a $Ax^* \in F$. Par la maximalité de $x^*$, on doit avoir $Ax^* = x^*$. ■

**Corollaire 2.1.2** *Soient $u_0, v_0 \in E$, $u_0 < v_0$, et $A : [u_0, v_0] \to E$ un opérateur croissant tels que $u_0 \leq Au_0$ et $v_0 \leq Av_0$. Supposons que le cône $P$ soit normal et $A$ soit compact. Alors $A$ a au moins un point fixe dans $[u_0, v_0]$.*

**Démonstration.** Puisque $P$ est normal, le segment $[u_0, v_0]$ est borné. Alors, la compacité de l'ensemble $A([u_0, v_0])$ découle de la compacité de l'opérateur $A$. ■

**Théorème 2.1.4** ([1], *page 44*) *Soient $u_0, v_0 \in E$, $u_0 < v_0$, et $A : [u_0, v_0] \to E$ un opérateur croissant tel que $u_0 \leq Au_0$ et $Av_0 \leq v_0$. Supposons que $P$ soit minihedral et $A([u_0, v_0])$ est un ensemble relativement compact de $E$. Alors, $A$ a un point fixe maximal $x^*$ et un point fixe minimal $x_*$ dans $[u_0, v_0]$.*

**Démonstration.** Soit $F = \{x \in A([u_0, v_0]) : Ax \geq x\}$. Par le lemme de Zorn, nous avons déjà démontré dans le théorème 2.1.3 que $F$ contient un élément maximal $x^*$ tel que $Ax^* = x^*$.

Maintenant, nous prouvons que $x^*$ est le point fixe maximal de $A$ dans $[u_0, v_0]$. En effet, supposons que $\overline{x}$ soit un point fixe quelconque de $A$ dans $[u_0, v_0]$, alors par minihedralité de $P$, $v = \sup\{\overline{x}, x^*\}$ existe. De $v \geq \overline{x}$ et $v \geq x^*$, on obtient $Av \geq A\overline{x} = \overline{x}$ et $Av \geq Ax^* = x^*$. Donc $v \leq Av$, et donc $Av \leq A(Av)$. Il suit donc $Av \in F$. Par la maximalité de $x^*$ nous avons $Av = x^*$, et donc $x^* \geq \overline{x}$. Par conséquent, $x^*$ est le point fixe maximal de $A$ dans $[u_0, v_0]$.

De même, on peut prouver que $F_1 = \{x \in A([u_0, v_0]) : Ax \leq x\}$ contient un élément minimal $x_*$, qui satisfait $Ax_* = x_*$ et est le point fixe minimal de $A$ dans $[u_0, v_0]$. ■

**Corollaire 2.1.3** *Soient $u_0, v_0 \in E$, $u_0 < v_0$, et $A : [u_0, v_0] \to E$ un opérateur croissant tel que $u_0 \leq Au_0$ et $Av_0 \leq v_0$. Supposons que $P$ soit normal et minihedral et $A$ est compact. Alors, $A$ a un point fixe maximal $x^*$ et un point fixe minimal $x_*$ dans $[u_0, v_0]$.*

**Théorème 2.1.5** ([2], *page 81*) *Soient $u_0, v_0 \in E$ avec $u_0 < v_0$ et $A : [u_0, v_0] \to E$ un opérateur croissant tel que $u_0 \leq Au_0$ et $Av_0 \leq v_0$. Si $P$ est régulier, alors $A$ a au moins un point fixe dans $[u_0, v_0]$.*

**Démonstration.** Posons $D = [u_0, v_0]$, on a par hypothèses $A(D) \subset D$.

Soit $F = \{x \in D : Ax \geq x\}$. On a $u_0 \in F$ et donc $F \neq \emptyset$.

Soit $H$ un sous-ensemble totalement ordonné de $F$. Puisque $P$ est régulier, par le lemme 1.4.1, $z^* = \sup H$ existe et clairement $z^* \in D$. Puisque $x \leq z^*$ pour tout $x \in H$,

on a $x \leq Ax \leq Az^*$ pour tout $x \in H$. Donc $z^* \leq Az^*$ et $z^* \in F$ et donc $H$ a un majorant $z^*$ dans $F$. Par le lemme de Zorn, $F$ a un élément maximal $v^*$. De $A(A(v^*)) \geq Av^*$, il s'ensuit que $Av^* \in F$. Par la maximalité de $v^*$, on obtient $Av^* = v^*$. ■

**Remarque 2.1.2** *Nous remarquons que les théorèmes 2.1.3, 2.1.4 et les corollaires 2.1.2, 2.1.3 n'exigent pas que l'opérateur $A$ soit continu et ils n'assurent pas aussi que les limites* (2.1.2) *existent. Donc, ils sont essentiellement différents du théorème 2.1.1.*

**Lemme 2.1.1** ([2], *page 87*) *Supposons que $P$ est normal, $v > \theta$ et $A : [\theta, v] \to E$ est un opérateur croissant concave. S'il existe $0 < \varepsilon < 1$ tel que $A\theta \geq \varepsilon v$ et $Av \leq v$, alors $A$ a un point fixe minimal $u^*$ avec $u^* > \theta$. De plus, si $u_0 = \theta$ et $u_n = Au_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, alors*

$$\begin{cases} \|u_n - u^*\| \to 0 \ \ (n \to +\infty), \\ \|u_n - u^*\| \leq N \|A\theta\| \varepsilon^{-2} (1 - \varepsilon)^n \ \ (n \in \mathbb{N}^*), \end{cases} \tag{2.1.10}$$

*où $N$ est la constante normale de $P$.*

**Théorème 2.1.6** ([2], *page 89*) *Soit $P$ un cône normal, $u_0, v_0 \in E$ avec $u_0 < v_0$ et supposons que $A : [u_0, v_0] \to E$ est un opérateur croissant. Soit $h_0 = v_0 - u_0$. Supposons que l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

(*i*) *A est concave,* $Au_0 \geq u_0 + \varepsilon h_0$ *et* $Av_0 \leq v_0$*, où* $\varepsilon$ *est un nombre positif avec* $0 < \varepsilon < 1$,

(*ii*) *A est convexe,* $Au_0 \geq u_0$ *et* $Av_0 \leq v_0 - \varepsilon h_0$*, où* $\varepsilon$ *est un nombre positif avec* $0 < \varepsilon < 1$.

*Alors* $A$ *a un point fixe unique* $x^*$ *dans* $[u_0, v_0]$.
*De plus, si* $x_n = Ax_{n-1}$ $n \in \mathbb{N}^*$*, pour tout* $x_0 \in [u_0, v_0]$*, nous avons*

$$\|x_n - x^*\| \to 0 \quad n \to +\infty$$

$$\|x_n - x^*\| \leq M(1-\varepsilon)^n \quad n \in \mathbb{N}^*, \tag{2.1.11}$$

*où* $M$ *est une constante positive qui ne dépend pas de* $x_0$.

**Démonstration.** Premièrement, nous supposons que la condition (i) est satisfaite. Soit $Bx = A(x + u_0) - u_0$. On a $B : [\theta, h_0] \to E$ est un opérateur croissant concave, $B\theta \geq \varepsilon h_0$ et $Bh_0 \leq h_0$. Alors, par le lemme 2.1.1, $B$ a un point fixe $u^*$ dans $[\theta, h_0]$ et

$$\|u_n - u^*\| \leq M_0 (1-\varepsilon)^n \quad n \in \mathbb{N}^*, \tag{2.1.12}$$

où $u_0 = \theta$, $u_n = Bu_{n-1}$ $n \in \mathbb{N}^*$ et $M_0 > 0$ est une constante. Si nous avons $h_n = Bh_{n-1}$ $n \in \mathbb{N}^*$, on aura

$$h_0 \geq h_1 \geq \cdots \geq h_n \geq \cdots \geq u^*.$$

Soit $t_n = \sup\{t > 0 : u^* \geq th_n\}$. Puisque $u^* = Bu^* \geq B\theta \geq \varepsilon h_0 \geq \varepsilon h_n$, nous avons

$$0 < \varepsilon \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq \cdots \leq 1, \; u^* \geq t_n h_n,$$

$$\begin{aligned} u^* = Bu^* &\geq B(t_n h_n) \geq (1-t_n) B\theta + t_n Bh_n, \\ &\geq (1-t_n)\varepsilon h_0 + t_n h_{n+1} \geq [(1-t_n)\varepsilon + t_n] h_{n+1}. \end{aligned}$$

Ainsi, à partir de la définition de $t_{n+1}$, on obtient $t_{n+1} \geq (1-t_n)\varepsilon + t_n$ et donc

$$1 - t_{n+1} \leq (1-t_n)(1-\varepsilon) \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

ce qui implique que

$$1 - t_n \leq (1-t_1)(1-\varepsilon)^{n-1} \leq (1-\varepsilon)^n \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Puisque nous avons

$$\theta \leq h_n - u^* \leq h_n - t_n h_n \leq (1-t_n) h_0 \leq (1-\varepsilon)^n h_0,$$

il s'ensuit que

$$\|h_n - u^*\| \leq N \|h_0\| (1-\varepsilon)^n \quad n \in \mathbb{N}^*. \tag{2.1.13}$$

Maintenant, pour $y_0 \in [\theta, h_0]$, soit la suite $(y_n)$ définie par $y_n = By_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors par récurrence nous obtenons que $u_n \leq y_n \leq h_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. De (2.1.12) et (2.1.13), il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \|y_n - u^*\| &\leq \|y_n - u_n\| + \|u_n - u^*\| & (2.1.14)\\ &\leq N \|h_n - u_n\| + \|u_n - u^*\| & (2.1.15)\\ &\leq N \|h_n - u^*\| + (N+1) \|u_n - u^*\| \\ &\leq M (1-\varepsilon)^n \quad n \in \mathbb{N}^*, \end{aligned}$$

où $M = N^2 \|h_0\| + (N+1) M_0$ est une constante, ce qui implique que $B$ a un point fixe unique dans $[\theta, h_0]$. En fait, supposons que $\bar{x} \in [\theta, h_0]$ tel que $\bar{x} = B\bar{x}$. En choisissant $y_0 = \bar{x}$, puis $y_n = By_{n-1} = \bar{x}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Ensuite, à partir de (2.1.14), on obtient

$$\|\bar{x} - u^*\| \leq M (1-\varepsilon)^n \to 0 \quad n \to +\infty$$

et donc $\bar{x} = u^*$.

Enfin, pour terminer la preuve, il suffit de poser $x^* = u^* + u_0$ et $x_n = y_n + u_0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons que la condition (ii) et satisfaite et soit $B = v_0 - A(v_0 - x)$.

Alors $B : [\theta, h_0] \to E$ est un opérateur croissant concave et satisfaisant $B\theta \geq \varepsilon h_0$, $Bh_0 \leq h_0$. Par une preuve similaire de (i) et par le lemme 2.1.1, nous pouvons prouver que les résultats du théorème sont vérifiées. Ceci complète la preuve. ■

**Corollaire 2.1.4** *Soient $P$ un cône solide normal, $u_0$, $v_0 \in E$ tels que $u_0 < v_0$ et $A : [u_0, v_0] \to E$ un opérateur croissant.*

*Supposons que l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

*(i) $A$ est un opérateur concave, $Au_0 \gg u_0$ et $Av_0 \leq v_0$,*

*(ii) $A$ est un opérateur convexe, $Au_0 \geq u_0$ et $Av_0 \ll v_0$,*

*Alors $A$ a un point fixe unique $x^*$ dans $[u_0, v_0]$.*

*De plus, si $x_n = Ax_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, alors pour tout $x_0 \in [u_0, v_0]$, on a*

$$\|x_n - x^*\| \to 0 \text{ quand } n \to \infty \text{ et } \|x_n - x^*\| \leq Mr^n \quad n \in \mathbb{N}^*, \tag{2.1.16}$$

*où $0 < r < 1$ et $M > 0$ sont des constantes.*

**Démonstration.** Soit $h_0 = v_0 - u_0$. De $Au_0 \gg u_0$ (ou $Av_0 \ll v_0$), nous savons qu'il existe $0 < \varepsilon < 1$ suffisamment petit tel que $Au_0 \geq u_0 + \varepsilon h_0$ (ou $Av_0 \leq v_0 - \varepsilon h_0$), puis, du théorème 2.1.6, on peut obtenir la conclusion (où $r = 1 - \varepsilon$).
Ceci complète la preuve. ■

**Corollaire 2.1.5** *Soit $P$ un cône solide normal, $u_0, v_0 \in E$ avec $u_0 < v_0$ et $A : [u_0, v_0] \to E$ est un opérateur fortement croissant c'est-à-dire*

$$\forall x, y \in [u_0, v_0], x < y \Longrightarrow Ax \ll Ay.$$

*Supposons que l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

*(i) $A$ est un opérateur concave, $Au_0 > u_0$ et $Av_0 \leq v_0$.*

*(ii) $A$ est un opérateur convexe, $Au_0 \geq u_0$ et $Av_0 < v_0$.*

*Alors $A$ a un point fixe unique $x^*$ dans $[u_0, v_0]$.*
*De plus, si $x_n = Ax_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, alors, pour tout $x_0 \in [u_0, v_0]$, nous avons $\|x_n - x^*\| \to 0$ quand $n \to +\infty$ et*

$$\|x_n - x^*\| \to 0 \text{ quand } n \to \infty \text{ et } \|x_n - x^*\| \leq Mr^n \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

*où $0 < r < 1$ et $M > 0$ sont des constantes.*

**Démonstration.** Supposons que la condition (i) est satisfaite, (si la condition (ii) est satisfaite, la preuve est similaire). Soit $u_1 = Au_0$, puis $u_1 > u_0$.
Puisque $A$ est fortement croissant, nous obtenons $Au_1 \gg Au_0 = u_1$.
Alors, en appliquant le corollaire 2.1.4, pour l'intervalle $[u_1, v_0]$, nous obtenons que $A$ a un point fixe unique $x^*$, et pour tout $x_0 \in [u_1, v_0]$, la suite définie par $x_n = Ax_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ vérifie (2.1.16).
Soit $\bar{x}$ un point fixe de $A$ dans $[u_0, v_0]$. Alors $\bar{x} > u_0$ et puis $\bar{x} = A\bar{x} \gg Au_0 = u_1$.
Donc $A$ n'a pas de point fixe dans $[u_0, u_1]$. De plus, pour tout $x_0 \in [u_0, v_0]$ nous aurons $x_1 \in [u_1, v_0]$. Par conséquent, (2.1.16) est vérifiée, $\forall x_0 \in [u_0, v_0]$.
Ceci complète la preuve. ■

**Remarque 2.1.3** *Dans le théorème 2.1.6, corollaire 2.1.4 et corollaire 2.1.5, la compacité et la continuité de $A$ ne sont pas exigées.*

## 2.2 Applications

**Exemple 2.2.1** *Considérons le problème à valeur initiale associé à l'équation différentielle ordinaire non linéaire du premier ordre :*

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \ 0 \le t \le a, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{2.2.1}$$

*où $f$ est continue sur $J \times \mathbb{R}$ et $J = [0,a]$.*

**Théorème 2.2.1** *Supposons qu'ils existent $u_0$, $v_0 \in C^1(J)$ qui sont la sous-solution et la sur-solution du problème de Cauchy* (2.2.1)*, c'est-à-dire,*

$$\begin{cases} u_0' \le f(t,u_0), \ t \in J, \\ u_0(0) \le x_0, \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} v_0' \ge f(t,v_0), \ t \in J, \\ v_0(0) \ge x_0, \end{cases} \tag{2.2.2}$$

*telles que $u_0(t) \le v_0(t)$ pour tout $t \in J$.*
*De plus, supposons qu'il existe une constante $M > 0$ telle que*

$$f(t,x) - f(t,y) \ge -M(x-y), \ t \in J, \ u_0(t) \le y \le x \le v_0(t). \tag{2.2.3}$$

*Soit*

$$[u_0, v_0] = \{x \in C(J) : u_0(t) \le x(t) \le v_0(t), \ t \in J\}.$$

*Alors le problème initial* (2.2.1) *a une solution minimale $x_* \in C^1(J)$ et une solution maximale $x^* \in C^1(J)$ telles que $x_*, x^* \in [u_0, v_0]$.*
*De plus les suites $(u_n)$, $(v_n)$ convergent uniformément vers $x_*, x^*$ sur $J$ respectivement où*

$$u_n(t) = e^{-Mt}\left\{x_0 + \int_0^t [f(s,u_{n-1}(s)) + Mu_{n-1}(s)]\, e^{Ms} ds\right\},$$

$$v_n(t) = e^{-Mt}\left\{x_0 + \int_0^t [f(s,v_{n-1}(s)) + Mv_{n-1}(s)]\, e^{Ms} ds\right\}$$

*pour $n \in \mathbb{N}^*$.*

**Démonstration.** Soit $E = C(J)$ et $P = \{x \in C(J) : x(t) \ge 0, \ t \in J\}$. Alors $P$ est un cône normal dans $E$. Pour tout $y \in [u_0, v_0]$ fixé, on montre facilement que le problème de Cauchy linéaire :

$$\begin{cases} x' + Mx = f(t,y) + My, \ t \in J, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{2.2.4}$$

a une solution unique $x \in C^1(J)$, qui peut être exprimée comme suit :

$$x(t) = e^{-Mt}\left\{x_0 + \int_0^t [f(s, y(s)) + My(s)] e^{Ms} ds\right\}.$$

On définit l'opérateur $A : [u_0, v_0] \to C(J)$ par

$$(Ay)(t) = e^{-Mt}\left\{x_0 + \int_0^t [f(s, y(s)) + My(s)] e^{Ms} ds\right\}. \tag{2.2.5}$$

D'après (2.2.4), il s'ensuit que $y \in C^1(J) \cap [u_0, v_0]$ est la solution de (2.2.1) si et seulement si $y \in [u_0, v_0]$ et $y = Ay$, c'est-à-dire $y$ est un point fixe de $A$.
Montrons que $A$ admet un point fixe maximal et un point fixe minimal dans $[u_0, v_0]$ en utilisant le théorème 2.1.1.

- Montrons que l'opérateur $A : [u_0, v_0] \to C(J)$ est complètement continu.

    1. $A$ est continu sur $C(J)$. En effet, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $C(J)$, convergente vers un certain élément $x$.

    $$(Ax_n)(t) = e^{-Mt}\left\{x_0 + \int_0^t [f(s, x_n(s)) + Mx_n(s)] e^{Ms} ds\right\}$$

    D'une part, la continuité de $f$ entraîne que

    $$f(s, x_n(s)) + Mx_n(s) \to f(s, x(s)) + Mx(s),\ \forall s \in J \text{ quand } n \to +\infty.$$

    D'autre part, on a pour tout $t \in J$ :

    $$\begin{aligned}
|(Ax_n)(t)| &\leq e^{-Mt}\left(|x_0| + \int_0^a \left|(f(s, x_n(s)) + Mx_n(s)) e^{Ms}\right| ds\right)\\
&\leq e^{-Mt}\left(|x_0| + \sup_{s\in[0,a]} |f(s, x_n(s)) + Mx_n(s)| \int_0^a e^{Ms} ds\right)\\
&\leq e^{-Mt}\left(|x_0| + K\frac{(e^{aM} - 1)}{M}\right)\\
&\leq \left(|x_0| + K\frac{(e^{aM} - 1)}{M}\right) < \infty,\ \text{où } K = \sup_{s\in[0,a]} |f(s, x_n(s)) + Mx_n(s)|.
\end{aligned}$$

    Ensuite, le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, donne

    $$\|Ax_n - Ax\|_{C(J)} \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

2. $A$ est compact. En effet, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $C(J)$ et montons que la suite $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $C^1(J)$.

   Pour tout $t \in J$ on a

$$\begin{aligned}
|(Ax_n)(t)| &\leq e^{-Mt}\left(|x_0| + \int_0^a \left|(f(s, x_n(s)) + Mx_n(s))\, e^{Ms}\right| ds\right) \\
&\leq \left(|x_0| + K\frac{(e^{aM}-1)}{M}\right).
\end{aligned}$$

   Donc $(Ax_n)$ est bornée dans $C(J)$. De plus, on a

$$\begin{aligned}
|(Ax_n)'(t)| &= |\frac{\partial}{\partial t} e^{-Mt}\left(x_0 + \int_0^a (f(s, x_n(s)) + Mx_n(s))\, e^{Ms} ds\right)| \\
&\leq Me^{-Mt}\left(|x_0| + \sup_{s\in[0,a]} |f(s, x_n(s)) + Mx_n(s)| \int_0^a e^{Ms} ds\right) \\
&\leq M\left(|x_0| + K\frac{(e^{aM}-1)}{M}\right) < \infty.
\end{aligned}$$

   Ce qui montre que $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $C^1(J)$, et d'après le corollaire 3.2.1 (voir Annexe), $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente, c'est à dire la suite $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte, d'où la compacité de $A$.

- $A$ est croissant. En effet, d'après (2.2.3) nous avons

$$f(t,x) + Mx \geq f(t,y) + My,\ t \in J,\ u_0(t) \leq y \leq x \leq v_0(t). \tag{2.2.6}$$

  Ainsi, de (2.2.5) et (2.2.6), nous obtenons que $A$ est croissant.

- On prouve que $u_0 \leq Au_0$. Soit $u_1 = Au_0$, alors de (2.2.4), nous avons

$$\begin{cases} u_1' = f(t, u_0) - M(u_1 - u_0),\ t \in J, \\ u_0(0) = x_0. \end{cases} \tag{2.2.7}$$

  Posons $w = u_1 - u_0$, alors $w \in C^1(J)$ et, par (2.2.2) et (2.2.7), on a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[w(t)\, e^{Mt}\right] &= \left[u_1'(t) + Mu_1(t) - u_0'(t) - Mu_0(t)\right] e^{Mt} \\
&= \left[f(t, u_0(t)) - u_0'(t)\right] e^{Mt} \geq 0,\ t \in J.
\end{aligned}$$

  De plus, $w(0) = u_1(0) - u_0(0) \geq 0$ et donc $w(t) \geq 0$ pour tout $t \in J$, ce qui implique que $Au_0 \geq u_0$.

De même, on peut prouver que $Av_0 \leq v_0$.

Par conséquent, la conclusion est déduite du théorème 2.1.1.

Cela complète la preuve. ■

**Remarque 2.2.1** *Notons que si $f'_x(t,x)$ existe et est continue sur $J \times \mathbb{R}$, alors la condition (2.2.3) est vérifiée, où la constante $M$ peut être choisie comme suit :*

$$M = \max\left\{\left|f'_x(t,x)\right| : t \in J,\ b \leq x \leq c\right\},$$

*où $b = \min_{t\in J} u_0(t)$ et $c = \max_{t\in J} v_0(t)$.*

**Exemple 2.2.2** *Considérons le problème aux limites à deux points de type Dirichlet :*

$$\begin{cases} -x'' = \lambda f(t,x),\ t \in [0,1], \\ x(0) = x(1) = 0, \end{cases} \tag{2.2.8}$$

*où $\lambda \in \mathbb{R}$, $f : [0,1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, et $f(t,0) = 0$, $\forall t \in [0,1]$. Il est évident que $x_\lambda \equiv 0$ est une solution triviale du problème (2.2.8) pour tout $\lambda$.*

**Théorème 2.2.2** *Supposons maintenant que :*

*(i) La fonction $f$ est croissante par rapport à $x$, c'est-à-dire, $\forall t \in [0,1]$, $\forall x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}_+$, $x_1 \leq x_2$ implique que $f(t,x_1) \leq f(t,x_2)$.*

*(ii) $f(t,x) > 0$, pour tout $t \in \,]0,1[$ et $x > 0$.*

*(iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(t,x)}{x} = 0$ uniformément par rapport à $t \in [0,1]$.*

*Alors, pour tout $M > 0$, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que, pour $\lambda \geq \lambda_0$, le problème (2.2.8) a au moins une solution non triviale $\overline{x}_\lambda \in C^2([0,1])$ qui vérifie*

$$\overline{x}_\lambda(t) \geq Mt(1-t),\ pour\ tout\ t \in [0,1]. \tag{2.2.9}$$

**Démonstration.** On sait que (voir l'annexe), $x \in C^2([0,1])$ est une solution du problème (2.2.8) si et seulement si $x \in C^1([0,1])$ est une solution de l'équation intégrale

$$x(t) = \lambda \int_0^1 G(t,s) f(s,x(s))\, ds,\ t \in [0,1], \tag{2.2.10}$$

où la fonction de Green $G\ : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$G(t,s) = \begin{cases} t(1-s)\,,\ t \leq s\ ; \\ s(1-t)\,,\ t > s. \end{cases}$$

Soit $E = C([0,1])$ et $P = \{x \in C([0,1]) : x(t) \geq 0,\ \forall t \in [0,1]\}$. Clairement $P$ est un cône normal de $E$. Considérons l'opérateur

$$\begin{aligned} A : P \quad &\to \quad C([0,1]\,,\mathbb{R}) \\ x \quad &\mapsto \quad (Ax)(t) = \int_0^1 G(t,s)\, f(s, x(t))\, ds. \end{aligned}$$

- Montrons que l'opérateur $A$ est complètement continu.

1. $A$ est continu sur $C([0,1])$. En effet, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $C([0,1])$, convergente vers un certain élément $x$.

$$(Ax_n)(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,x_n(s))ds,\ \forall t \in [0,1]\,.$$

D'une part, la continuité de $f$ entraîne que

$$f(s,x_n(s)) \to f(s,x(s)),\ \forall s \in [0,1]\ \text{ quand } n \to +\infty.$$

D'autre part, on a pour tout $t \in [0,1]$ :

$$\begin{aligned} |(Ax_n)(t)| &\leq \int_0^1 |G(t,s)f(s,x_n(s))|\, ds \\ &\leq \sup_{s\in[0,1]} |f(s,x_n(s))| \int_0^1 G(t,s)ds \\ &\leq \frac{K}{2} t(1-t) \\ &\leq K. \end{aligned}$$

Ensuite, le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, donne

$$\|Ax_n - Ax\|_{C([0,1])} \to 0 \text{ quand } \ n \to +\infty.$$

2. $A$ est compact. En effet, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $C([0,1])$ et montons que la suite $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $C^1([0,1])$.

Pour tout $t \in [0,1]$ on a

$$|(Ax_n)(t)| \leq \int_0^1 |G(t,s)f(s,x_n(s))|\,ds \leq K.$$

Donc $(Ax_n)$ est bornée dans $C([0,1])$. De plus, on a

$$\begin{aligned} |(Ax_n)'(t)| &= |\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}G(t,s)f(s,x_n(s))ds| \\ &\leq \sup_{s\in[0,1]} |f(s,x_n(s)| \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}G(t,s)ds \\ &\leq K. \end{aligned}$$

Ce qui montre que $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $C^1([0,1])$, et d'après le corollaire 3.2.1 (voir Annexes), $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente, c'est à dire la suite $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte, d'où la compacité de $A$.

- Montrons que l'opérateur $A$ est croissant.
  Comme $f$ est croissante alors, $\forall x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}_+,\ x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(t,x_1) \leq f(t,x_2)$. Ensuite la croissante de l'intégrale et la positivité de la fonction de Green $G$ entraînent que $\int_0^1 G(t,s)\,f(s,x_1(t))\,ds \leq \int_0^1 G(t,s)\,f(s,x_2(t))\,ds$, d'où la croissance de $A$.
- Soit $u_0(t) = Mt(1-t)$, où $M > 0$, montrons qu'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\forall \lambda \geq \lambda_0$, $\lambda A u_0 \geq u_0$ sur $[0,1]$. Pour tout $t \in [0,1]$ on a

$$(Au_0)(t) = \int_0^t s(1-t)\,f(s,u_0(s))\,ds + \int_t^1 t(1-s)\,f(s,u_0(s))\,ds.$$

  Dérivons $Au_0$ une fois, on obtient

$$(Au_0)'(t) = \int_0^t (-s)\,f(s,u_0(s))\,ds + \int_t^1 (1-s)\,f(s,u_0(s))\,ds,\ \forall t \in [0,1],$$

  par la suite, d'après la condition $(ii)$, on aura

$$\begin{aligned} (Au_0)'(0) &= \int_0^1 (1-s)\,f(s,u_0(s))\,ds > 0, \qquad (2.2.11) \\ (Au_0)'(1) &= -\int_0^1 sf(s,u_0(s))\,ds < 0. \end{aligned}$$

Ainsi, à partir de $(Au_0)(0) = (Au_0)(1) = u_0(0) = u_0(1) = 0$, il s'ensuit qu'il existe $\tau > 0$ et $\delta > 0$ tels que

$$(Au_0)(t) \geq \tau u_0(t), \forall t \in [0, \delta] \cup [1 - \delta, 1]. \tag{2.2.12}$$

Il est clair que $(Au_0)(t) > 0$ pour tout $t \in ]0, 1[$ et donc

$$\min_{\delta \leq t \leq 1-\delta} (Au_0)(t) > 0. \tag{2.2.13}$$

À partir de (2.2.12) et (2.2.13), nous savons qu'il existe $\gamma > 0$ tel que

$$(Au_0)(t) \geq \gamma u_0(t), \forall t \in [0, 1].$$

Ensuite, posons $\lambda_0 = \gamma^{-1}$, alors pour tout $\lambda \geq \lambda_0$ nous obtenons que

$$\lambda (Au_0)(t) \geq u_0(t), \forall t \in [0, 1].$$

- D'autre part, à partir de la condition $(iii)$, choisissons $c > M$ telle que

$$\frac{f(t, c)}{c} \leq \frac{8}{\lambda}, \forall t \in [0, 1].$$

Posons $v_0(t) \equiv c$, alors $u_0(t) < v_0(t)$, $\forall t \in [0, 1]$ et

$$\begin{aligned} \lambda (Av_0)(t) &= \lambda \int_0^1 G(t, s) f(s, c)\, ds \leq 8c \int_0^1 G(t, s)\, ds \\ &= 4ct(1 - t) \leq c = v_0(t), \ \ \forall t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Par suite, en utilisant le théorème 2.1.1, l'opérateur $\lambda A$ a un point fixe $\bar{x}_\lambda$ dans $[u_0, v_0]$ pour tout $\lambda \geq \lambda_0$. Par conséquent, $\bar{x}_\lambda \in C^2[0, 1]$ est une solution du problème aux limites (2.2.8) vérifiant

$$\bar{x}_\lambda(t) \geq u_0(t) = Mt(1 - t), \forall t \in [0, 1].$$

■

**Exemple 2.2.3** *Considérons le système de $n$ équations algébriques suivant :*

$$x_i = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad i = 1, \cdots, n, \tag{2.2.14}$$

*où les fonctions $f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ sont définies sur $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$.*

**Théorème 2.2.3** *Supposons que :*

1. *Les fonctions* $f_i = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *sont croissantes par rapport à toute les variables, c'est-à-dire si*

$$a_1 \le x_1 \le y_1 \le b_1, \cdots, a_n \le x_n \le y_n \le b_n,$$

*donc*

$$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \le f_i(y_1, y_2, \cdots, y_n) \quad i = 1, \cdots, n,$$

*mais* $f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *peuvent ne pas être continues.*

2. $f_i(a_1, a_2, \cdots, a_n) \ge a_i$ *et* $f_i(b_1, b_2, \cdots, b_n) \le b_i \quad i = 1, \cdots, n.$

*Alors, le système* (2.2.14) *a au moins une solution* $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)$ *satisfaisant*

$$a_i \le \bar{x}_i \le b_i \; i = 1, \cdots, n.$$

**Démonstration.** Soit $E = \mathbb{R}^n$ et $P = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \ge 0 \; i = 1, \cdots, n\}$. Alors $P$ est un cône fortement minihedral dans $E$. Le système (2.2.14) peut s'écrire sous la forme :

$$X = F(X), \tag{2.2.15}$$

où $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ et $F = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$.

Soit $u_0 = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ et $v_0 = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$, alors, d'après les hypothèses (1) et (2), on trouve que l'opérateur $F \; : [u_0, v_0] \to E$ est croissant vérifiant $F(u_0) \ge u_0$ et $F(v_0) \le v_0$. Ainsi, du théorème 2.1.2, il s'ensuit que $F$ a au moins un point fixe $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)$ dans $[u_0, v_0]$. Cela complète la preuve. ■

**Exemple 2.2.4** *Nous considérons l'équation intégrale non linéaire suivante :*

$$x(t) = \int_\Omega K(t, s, x(s))\, ds, \tag{2.2.16}$$

*où* $\Omega$ *est un ensemble mesurable dans* $\mathbb{R}^n$ *avec* $0 < mes\Omega < \infty$.

**Théorème 2.2.4** *Supposons que :*

1. $K(t,s,x)$ *une fonction positive définie sur* $\Omega\times\Omega\times\mathbb{R}_+$ *de Caratheodory, c'est-à-dire,*

   $(i)$ *pour presque tout* $(t,s)\in\Omega\times\Omega$, $K(t,s,x)$ *est continue par rapport à* $x$ $(x\geq 0)$,

   $(ii)$ *pour chaque* $x\geq 0$, $K(t,s,x)$ *est mesurable en* $(t,s)$ *sur* $\Omega\times\Omega$.

2. *Il existe* $w\in L^p(\Omega)$ $(p\geq 1)$, $w(t)\geq 0$ *pour presque tout* $t\in\Omega$ *tel que*

$$\int_\Omega K(t,s,w(s))\,ds\leq w(t)\,,\ \text{p.p } t\in\Omega. \tag{2.2.17}$$

3. *La fonction* $K=K(t,s,x)$ *est croissante par rapport à* $x$, *c'est-à-dire si, pour presque tout* $(t,s)\in\Omega\times\Omega$, $0\leq x_1\leq x_2$, *alors* $K(t,s,x_1)\leq K(t,s,x_2)$.

*Alors, l'équation intégrale* (2.2.16) *a au moins une solution* $x$ *dans* $L^p(\Omega)$ *satisfaisant* $0\leq x(t)\leq w(t)$ *presque tout* $t\in\Omega$.

**Démonstration.** Soit $E=L^p(\Omega)$ et $P=\{x\in L^p(\Omega):x(t)\geq 0,\ \text{p.p } t\in\Omega\}$. Alors $P$ est un cône régulier. Nous considérons l'opérateur $A$ défini par :

$$(Ax)(t)=\int_\Omega K(t,s,x(s))\,ds,\ \text{p.p } t\in\Omega$$

Soient $u_0(t)\equiv 0$ et $v_0(t)=w(t)$ $(t\in\Omega)$, alors $u_0,v_0\in E$ et $u_0<v_0$. Soit $x\in[u_0,v_0]$, c'est-à-dire $x\in L^p(\Omega)$, et $0\leq x(t)\leq w(t)$ pour presque partout $t\in\Omega$. Comme la fonction $K$ est positive et croissante par rapport à $x$, alors

$$0\leq K(t,s,x(s))\leq K(t,s,w(s))\,,\ \text{p.p }\ (t,s)\in\Omega\times\Omega$$

et donc, de (2.2.17),

$$0\leq(Ax)(t)\leq(Aw)(t)\leq w(t)\,,\ \text{p.p } t\in\Omega.$$

Donc $Ax\in L^p(\Omega)$ et $A\ :[u_0,v_0]\to E$. De plus, la croissance de la fonction $K$ par rapport à $x$ implique que l'opérateur $A$ est croissant. D'autre part, puisque $K(t,s,x)$ est positive, de (2.2.17), il s'ensuit que $u_0\leq Au_0$ et $Av_0\leq v_0$.
Par conséquent, selon le théorème 2.1.5, la conclusion est valable.
Celà complète la preuve. ■

**Exemple 2.2.5** *Considérons l'équation intégrale de Hammerstein suivante :*

$$x(t) = \int_{\mathbb{R}^n} k(t,s) f(s, x(s))\, ds, \tag{2.2.18}$$

*où* $k(t,s)$ *est positive et mesurable sur* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{t \to t_0} \int_{\mathbb{R}^n} |k(t,s) - k(t_0,s)|\, ds = 0,\ t_0 \in \mathbb{R}^n, \tag{2.2.19}$$

*et ils existent* $M > m > 0$ *tels que*

$$m \leq \int_{\mathbb{R}^n} k(t,s)\, ds \leq M,\ t \in \mathbb{R}^n. \tag{2.2.20}$$

**Théorème 2.2.5** *Supposons que pour* $x \geq 0$, *la fonction* $f(\cdot, x)$ *est mesurable sur* $\mathbb{R}^n$ *et pour* $t \in \mathbb{R}^n$, $f(t, \cdot)$ *est continu sur* $[0, +\infty[$.
*De plus, ils existent deux constantes* $R > r > 0$ *telles que l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

$(i)$ *Pour* $t \in \mathbb{R}^n$, $f(t,\cdot) : [r, R] \to \mathbb{R}$ *est une fonction croissante concave vérifiant*

$$f(t,r) \geq \left(\frac{1}{m} + \varepsilon_1\right) r \quad \text{et } f(t,R) \leq \frac{1}{M} R,\ t \in \mathbb{R}^n,$$

*où* $\varepsilon_1 > 0$ *est une constante.*

$(ii)$ *Pour* $t \in \mathbb{R}^n$, $f(t,\cdot)\ : [r, R] \to \mathbb{R}$ *est une fonction croissante convexe vérifiant*

$$f(t,r) \geq \frac{1}{m} r \quad \text{et } f(t,R) \geq \left(\frac{1}{M} + \varepsilon_2\right) R,\ t \in \mathbb{R}^n,$$

*où* $\varepsilon_2 > 0$ *est une constante.*

*Alors, l'équation intégrale* (2.2.18) *a une solution continue unique* $x^*$ *telle que*

$$r \leq x^*(t) \leq R \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}^n.$$

*De plus, pour toute fonction continue* $x_0$ *satisfaisant* $r \leq x_0(t) \leq R$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}^n$, *si la suite* $(x_n)$ *est définie par*

$$x_n(t) = \int_{\mathbb{R}^n} k(t,s) f(s, x_{n-1}(s))\, ds,\ t \in \mathbb{R}^n,\ n \in \mathbb{N}^*,$$

*alors nous avons*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^n} |x_n(t) - x^*(t)| \leq M_0 r^n \to 0 \quad n \to +\infty,$$

*où* $M_0 > 0$ *et* $0 < r < 1$ *sont des constantes, qui ne dépendent pas du choix de* $x_0(t)$.

**Démonstration.** Soit

$$E = C_B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \left\{ x \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : \sup_{t \in \mathbb{R}^n} |x(t)| < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|x\|_{C_B} = \sup_{t \in \mathbb{R}^n} |x(t)|$$

et

$$P = \{ x \in C_B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : x(t) \geq 0,\ t \in \mathbb{R}^n \}.$$

Alors $P$ est un cône solide normal dans $E$ avec

$$\mathring{P} = \left\{ x \in C_B(\mathbb{R}^n) : \inf_{t \in \mathbb{R}^n} x(t) > 0 \right\}.$$

Maintenant, supposons que la condition $(i)$ est satisfaite (si la condition $(ii)$ est satisfaite, la preuve est similaire).

Soit $u_0(t) \equiv r$ et $v_0(t) \equiv R$ pour tout $t \in \mathbb{R}^n$.

Considérons l'opérateur $A\ : [u_0, v_0] \to E$ définie par :

$$(Ax)(t) = \int_{\mathbb{R}^n} k(t,s) f(s, x(s))\, ds.$$

Comme la fonction $f(t, \cdot)$ est croissante concave sur l'intervalle ordonné $[r, R]$ $\forall t \in \mathbb{R}^n$, alors $A$ est un opérateur concave et croissant.

Par suite les estimations sur la fonction $f$ nous assurent que $Au_0 \gg u_0$ et $Av_0 \leq v_0$. En effet,

$$\begin{aligned} (Au_0)(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} k(t,s) f(s,r)\, ds \\ &\geq \left( \frac{1}{m} + \varepsilon_1 \right) r \int_{\mathbb{R}^n} k(t,s)\, ds \\ &> r \frac{1}{m} m = r, \end{aligned}$$

c'est à dire $(Au_0)(t) - r > 0$ $\forall t \in \mathbb{R}^n$ ce qui veut dire que $(Au_0)(t) - r \in \mathring{P}$ et

$$\begin{aligned} (Av_0)(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} k(t,s) f(s,R)\, ds \\ &\leq \frac{1}{M} R \int_{\mathbb{R}^n} k(t,s)\, ds \\ &\leq R. \end{aligned}$$

Par conséquent, par le corollaire 2.1.4, nous pouvons en conclure.

Par exemple, si

$$f(t,x) = a_0(t)\,x + a_1(t)\sqrt{x},$$

où $a_0$, $a_1$ sont des fonctions positives mesurables sur $\mathbb{R}^n$ et satisfaisant ce qui suit :

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^n} a_0(t) < \frac{1}{M},\ 0 < \inf_{t\in\mathbb{R}^n} a_1(t) \leq \sup_{t\in\mathbb{R}^n} a_1(t) < +\infty,$$

alors la condition (i) est satisfaite (pour $r > 0$ suffisamment petit et $R$ assez grand).

Si $f(t,x) = a(t)(e^{-x} + x)$, où $a$ est une fonction positive mesurable sur $\mathbb{R}^n$ et satisfait ce qui suit :

$$0 < \inf_{t\in\mathbb{R}^n} a(t) \leq \sup_{t\in\mathbb{R}^n} a(t) < \frac{1}{M},$$

alors la condition $(ii)$ est satisfaite (pour $r > 0$ suffisamment petit et $R$ assez grand). ■

CHAPITRE 3

# Théorèmes du point fixe pour les opérateurs décroissants et applications

## 3.1 Théorème du point fixe pour les opérateurs décroissants

Soit $P$ un cône dans l'espace de Banach réel $E$ et " $\leq$ " l'ordre partiel dans $E$ introduit par $P$.

**Définition 3.1.1** *On dit qu'un opérateur $A\ :D \rightarrow E$ est décroissant si*

$$\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \leq x_2 \Longrightarrow Ax_1 \geq Ax_2.$$

*$A$ est dit strictement décroissant si $\forall x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2 \Longrightarrow Ax_1 > Ax_2$.*
*$A$ est dit fortement décroissant si $\forall x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2 \Longrightarrow Ax_1 \gg Ax_2$ dans le cas où $\mathring{P} \neq \emptyset$.*

**Théorème 3.1.1** ([1], *page 47*) *Supposons que :*

**(i)** *$P$ est normal et l'opérateur $A\ :P \rightarrow P$ est complètement continu décroissant ;*

**(ii)** *$A\theta > \theta$ et $A^2\theta > \varepsilon_0 A\theta$, où $\varepsilon_0 > 0$ et $\theta$ désigne le zéro de l'espace $E$ ;*

**(iii)** *pour tout* $x \geq \alpha A\theta$ $(\alpha = \alpha(x) > 0)$ *et* $0 < t < 1$, *il existe un* $\eta = \eta(x,t) > 0$ *tel que*

$$A(tx) \leq [t(1+\eta)]^{-1} Ax. \tag{3.1.1}$$

*Alors, $A$ admet un unique point fixe positif $x^* > \theta$. De plus, on peut construire successivement la suite $x_n = Ax_{n-1}$ $n \in \mathbb{N}^*$, telle que pour tout point initial $x_0 \in P$, nous avons*

$$\|x_n - x^*\| \to 0 \text{ quand } n \to \infty. \tag{3.1.2}$$

**Démonstration.** Définissons la suite récurrente $u_0 = \theta$, $u_n = Au_{n-1}$ $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $A$ est un opérateur décroissant, on peut montrer par récurrence que :

$$\theta = u_0 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_{2n} \leq \cdots \leq u_{2n-1} \leq u_3 \leq u_1 = A\theta. \tag{3.1.3}$$

$$u_{2n} = A^2 u_{2n-2}, \qquad u_{2n+1} = A^2 u_{2n-1} \ \ n \in \mathbb{N}^* \tag{3.1.4}$$

et

$$u_{2n} = Au_{2n-1}, \qquad u_{2n+1} = Au_{2n} \ \ n \in \mathbb{N}^* \tag{3.1.5}$$

Puisque $P$ est un cône normal, l'intervalle ordonné $[\theta, A\theta]$ est borné. De (3.1.3), on obtient que $u_{2n-2} \in [\theta, A\theta]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et comme $A^2$ est un opérateur complètement continu, la suite $(u_{2n})$ contient donc une sous-suite convergente $(u_{2n_k})$. Il existe donc $u^* \in [\theta, A\theta]$, $u_{2n_k} \to u^*$ quand $k \to +\infty$.
D'après (3.1.3), on obtient $\theta \leq u_{2n_k} \leq u_{2n} \leq u^*, \forall\, n > n_k$.
Comme $P$ est un cône normal, alors il existe une constante $N > 0$ telle que :

$$\|u_{2n} - u_{2n_k}\| \leq N\|u^* - u_{2n_k}\|;\ \forall\, n > n_k.$$

donc

$$\|u^* - u_{2n}\| \leq N' \left\|u^* - u_{2n_k}\right\|;\ \forall\, n > n_k \text{ avec } N' = N+1;$$

ce qui montre que $u_{2n} \to u^*$ quand $n \to +\infty$. De la même manière, on montre que la suite $(u_{2n+1})$ est une suite convergente ; il existe donc $v^* \in [\theta, A\theta]$ : $v_{2n+1} \to v^*$ quand $n \to +\infty$. L'hypothèse $(ii)$ et l'assertion (3.1.3) entraînent que

$$\theta < \varepsilon_0 A\theta \leq A^2\theta = u_2 \leq u_{2n} \leq u^* \leq v^* \leq u_{2n-1} \ \ n \in \mathbb{N}^*. \tag{3.1.6}$$

Par passage à la limite dans (3.1.5) et (3.1.4), on aura :

$$u^* = A^2 u^*,\ v^* = A^2 v^*,\ v^* = Au^*,\ u^* = Av^*. \tag{3.1.7}$$

D'après (3.1.6), nous voyons que $u^* \geq \varepsilon_0 A\theta = \varepsilon_0 u_1 \geq \varepsilon_0 v^*$.

Donc, si on pose $t_0 = \sup\{t > 0 : u^* \geq tv^*\}$, on trouve $0 < \varepsilon_0 \leq t_0 < \infty$ et $u^* \geq t_0 v^*$ avec $t_0 \leq 1$ car $u^* \leq v^*$.

Montrons, maintenant que $t_0 = 1$ ; par l'absurde, on suppose $0 < t_0 < 1$ ; dans ce cas l'hypothèse $(iii)$ entraîne qu'il existe $\eta_0 > 0$ tel que

$$v^* = Au^* \leq A(t_0 v^*) \leq [t_0(1+\eta_0)]^{-1} Av^* = [t_0(1+\eta_0)]^{-1} u^*.$$

D'après (3.1.6) et la décroissance de $A$. On obtient donc $u^* \geq t_0(1+\eta_0)v^*$, ce qui contredit la définition de $t_0$ ; d'où $t_0 = 1$ c'est à dire $u^* \geq v^*$.

Ensuite, de (3.1.6), nous obtenons

$$u^* = v^*. \tag{3.1.8}$$

Par conséquent, de (3.1.7), on en déduit que $u^*$ est un point fixe positif de $A$.

Finalement, nous prouvons que $A$ admet un unique point fixe. En fait, si on suppose qu'il existe deux points fixes de $A$, $x_1^*$ et $x_2^*$ ; (3.1.2) entraîne que

$$\|x_1^* - x_2^*\| \leq \|x_1^* - x_n\| + \|x_n - x_2^*\| \to 0, \quad n \to +\infty.$$

Donc $x_1^* = x_2^*$, d'où l'unicité du point fixe de $A$.

Maintenant, notons l'unique point fixe de $A$ par $x^*$.

On montre qu'on peut construire successivement une suite $(x_n)$ définie par : $x_n = Ax_{n-1}$ $n \in \mathbb{N}^*$ telle que

$$\forall x_0 \in P, \|x_n - x^*\|_{n\to+\infty} \to 0.$$

Comme $A$ est décroissant, $x_0 \geq \theta$ implique que $\theta \leq Ax_0 \leq A\theta$ i.e. $u_0 \leq x_1 \leq u_1$.

Appliquons l'inégalité précédente à $A$, nous trouvons

$$u_2 \leq x_2 \leq u_1.$$

En continuant ce processus, nous obtenons plus généralement :

$$u_{2n} \leq x_{2n} \leq u_{2n-1} \text{ et } u_{2n} \leq x_{2n+1} \leq u_{2n+1} \leq u_{2n-1} \quad n \in \mathbb{N}^*. \tag{3.1.9}$$

De la même façon, on obtient que

$$u_{2n} \leq x^* \leq u_{2n-1} \quad n \in \mathbb{N}^*. \tag{3.1.10}$$

Par suite, comme $P$ est un cône normal, (3.1.9) et (3.1.10) entraînent que

$$\begin{aligned}\|x_{2n}-x^*\| &\leq \|x_{2n}-u_{2n}\|+\|u_{2n}-x^*\|\\ &\leq N\|u_{2n-1}-u_{2n}\|+N\|u_{2n-1}-u_{2n}\|\\ &= 2N\|u_{2n-1}-u_{2n}\|\\ &\leq 2N(\|u_{2n}-u^*\|+\|u_{2n-1}-u^*\|)\rightarrow 0 \quad n\rightarrow+\infty.\end{aligned}$$

(car $u_{2n}\rightarrow u^*, u_{2n+1}\rightarrow v^*=u^*$ ; $n\rightarrow+\infty$). Et de la même façon, on déduit que $\|x_{2n-1}-x^*\|\rightarrow 0$ quand $n\rightarrow+\infty$. La relation (3.1.2) est donc vraie pour toute la suite $(x_n)_n$ et la preuve est donc complète. ■

**Corollaire 3.1.1** *Lorsque $P$ est solide, le théorème 3.1.1 est encore vrai si l'on remplace l'hypothèse (iii) par la condition suivante :*

**(iii*)** *Pour tout $x\geq\alpha A\theta$ $(\alpha=\alpha(x)>0)$ et $0<t<1$, on a*

$$A(tx)\ll t^{-1}Ax. \tag{3.1.11}$$

**Démonstration.** On a (3.1.11) c'est à dire $t^{-1}Ax-A(tx)\in\mathring{P}$,
alors il existe un $\varepsilon$ suffisamment petit $(0<\varepsilon<1)$ tel que

$$t^{-1}Ax-A(tx)-\varepsilon t^{-1}Ax\geq\theta,$$

ce qui implique

$$A(tx)\leq t^{-1}(1-\varepsilon)Ax=[t(1+\eta)]^{-1}Ax,$$

où $\eta=\varepsilon/(1-\varepsilon)>0$. Ainsi, (iii*) implique (iii).
Il est facile de voir que l'hypothèse (iii) du théorème 3.1.1 est équivalente à la condition :

$(vi)$ Pour tout $x\geq\alpha A\theta$ $(\alpha=\alpha(x)>0)$ et $t>1$, il existe un $\eta=\eta(x,t)$, $0<\eta<1$, tel que

$$A(tx)\geq[t(1-\eta)]^{-1}Ax. \tag{3.1.12}$$

De même, la condition (iii*) est équivalente à la condition :

$(vi^*)$ Pour tout $x\geq\alpha A\theta$ $(\alpha=\alpha(x)>0)$ et $t>1$, on a

$$A(tx)\gg t^{-1}Ax. \tag{3.1.13}$$

■

**Théorème 3.1.2** ([*1*], *page 50*) *Supposons que :*

**(i)** *$P$ est un cône normal, solide et l'opérateur $A\ : P \to P$ complètement continu et fortement décroissant.*

**(ii)** *$A\theta > \theta$ et $A^2\theta \geq \varepsilon_0 A\theta$, où $\varepsilon_0 > 0$*

**(iii)** *Pour tout $x \geq \alpha A\theta$ $(\alpha = \alpha(x) > 0)$ et $0 < t < 1$, on a*

$$A(tx) < t^{-1}Ax. \tag{3.1.14}$$

*Alors, $A$ admet exactement un point fixe positif $x^* > \theta$ et* (3.1.2) *est vérifiée.*

**Démonstration.** La preuve est la même que celle du théorème 3.1.1. La seule différence est comment établir que $u^* = v^*$. Dans ce cas, nous pouvons procéder comme suit. Comme précédemment, on pose $t_0 = \sup\{t > 0 \mid u^* \geq tv^*\}$, et on doit prouver que $t_0 = 1$. Supposons par l'absurde que $0 < t_0 < 1$, par l'hypothèse $(iii)$ on a,

$$v^* = Au^* \leq A(t_0v^*) < t_0^{-1}Av^* = t_0^{-1}\ u^*.$$

Puisque $A$ est fortement décroissant, il résulte de $u^* > t_0v^*$ que

$$v^* = A\ u^* \ll A(t_0v^*) < t_0^{-1}\ u^*,$$

et donc il existe un $\delta_0 > 0$, suffisamment petit tel que

$$t_0^{-1}\ u^* - v^* - \delta_0 v^* \geq \theta,$$

c'est-à-dire

$$u^* \geq t_0(1 + \delta_0)v^*,$$

qui contredit la définition de $t_0$. ■

**Remarque 3.1.1** *Notons que l'hypothèse (iii) du théorème 3.1.2 est équivalente à la condition :*
*pour tout $x \geq \alpha A\theta$ $(\alpha = \alpha(x) > 0)$ et $t > 1$, on a*

$$A(tx) > t^{-1}Ax. \tag{3.1.15}$$

## 3.2 Applications

**Exemple 3.2.1** *Considérons l'équation intégrale non linéaire :*

$$1 = \Psi(x) + \Psi(x) \int_{\alpha}^{\beta} \frac{R(x,y)}{x^2 - y^2} \Psi(x)\, dy,\ x \in [\alpha, \beta] \tag{3.2.1}$$

**Théorème 3.2.1** *Soient $\alpha = 0$, $\beta = 1$ et supposons que :*

*(i) La fonction $R = R(x,y)$ est continue et non identiquement nulle sur $0 \leq x,\ y \leq 1$ et*

$$\begin{cases} R(x,y) \geq 0, \text{ pour } x > y \\ R(x,y) \leq 0, \text{ pour } x < y. \end{cases}$$

*(ii) Il existe $\upsilon > 0$ tel que*

$$|R(x,y)| \leq c\, |x-y|^{\upsilon}\, S(x,y), \forall 0 \leq x, y \leq 1,\ x \neq y,$$

*où $c = c^{te}$ et $S = S(x,y)$ est une fonction positive bornée sur $0 \leq x,\ y \leq 1$ vérifiant*

$$\lim_{x,y \to 0^+} \frac{S(x,y)}{x+y} < +\infty.$$

*Alors, l'équation intégrale (3.2.1) admet une unique solution continue positive $\Psi^*$ telle que $0 < \Psi^*(x) \leq 1$, $\forall x \in [0,1]$.*
*De plus, pour toute fonction initiale $\Psi_0(x) \in C([0,1])$ vérifiant $0 < \Psi_0(x) \leq 1$, on a*

$$\|\Psi_n - \Psi^*\|_C = \max_{x \in [0,1]} |\Psi_n(x) - \Psi^*(x)| \to 0, \quad n \to +\infty,$$

*où la suite $(\Psi_n)_n$ est définie par :*

$$\Psi_{n+1}(x) = \left[ 1 + \int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2 - y^2} \Psi_n(y)\, dy \right]^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}^* \tag{3.2.2}$$

**Démonstration.** Posons :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\psi(x)} - 1. \tag{3.2.3}$$

L'équation (3.2.1) s'écrit

$$\varphi(x) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{R(x,y)}{x^2 - y^2} \frac{1}{1 + \varphi(x)}\, dy \tag{3.2.4}$$

avec $\varphi(x) \geq 0$ pour $0 < \psi(x) \leq 1$.

Soient $E = C([0,1])$ muni de la norme de la convergence uniforme,

$$P = \{\varphi \in C([0,1]) \ : \varphi(x) \geq 0\},$$

et

$$\begin{aligned} A : P &\rightarrow E \\ \varphi &\mapsto A\varphi\,(x) = \int_\alpha^\beta \frac{R(x,y)}{x^2-y^2}\frac{1}{1+\varphi(x)}\,dy. \end{aligned}$$

Alors, on a :

1. $P$ est un cône normal avec la constante $N = 1$.

2. $A\ : P \rightarrow P$ est un opérateur complètement continu. En effet, d'une part, d'après la condition (i), $A$ est un opérateur de $P$ dans $P$. D'autre part, posons : $A = LG$ où

$$LG = \int_0^1 H(x,y)G(y)\,dy,\ H(x,y) = \frac{R(x,y)}{x^2-y^2}, G(\varphi) = \frac{1}{1+\varphi(x)}$$

Il est clair que $G$ est une fonction continue et bornée de $P$ dans $P$.

De plus $|G(\varphi)| \leq 1$.

- $A$ est continu :

  Soit $(\varphi_n)_n$ une suite convergente dans $P$ vers un certain élément $\varphi$, alors

  $$|A\varphi_n(x) - A\varphi(x)| = |\int_0^1 H(x,y)[G\varphi_n(y) - G\varphi(y)]\,dy|.$$

  La continuité des fonctions $H$ et $G$ implique que

  $$H(x,y)[G\varphi_n(y) - G\varphi(y)] \rightarrow 0 \text{ p.p. sur } [0,1];$$

  d'autre part, la condition (ii) entraîne que la fonction $H$ est bornée.

  Par suite la bornitude de $H$ et le fait que $G$ est continue donnent alors $H(x,y)\,[G\varphi_n(y) - G\varphi(y)] \in L^1(G)$. Donc, le théorème de la convergence dominée de Lebesgue entraîne que $A\varphi_n - A\varphi \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ dans $C([0,1])$ ; d'où la continuité de $P$ dans $P$.

- $A$ est compact :

  Soit $B \subset P$ borné. Montrons par le lemme d'Ascoli-Arzela que $A(B)$ est relativement compacte.

$(a)$ $A(B)$ est uniformément bornée. En effet,

$\forall\, v \in A(B), \exists \varphi \in B : v = A\varphi$, donc $\forall\, x \in [0,1]$ on a

$$\begin{aligned} |v(x)| &\leq \int_0^1 |H(x,y)||G\varphi(y)|\,dy \\ &\leq \max_{(x,y)\in[0,1]} H(x,y) < \infty. \end{aligned}$$

$(b)$ $A(B)$ est équi-continue. En effet,

$\forall\ (x_1, x_2) \in [0,1]^2\,,\ \forall \varphi \in B$

$$|A\varphi(x_1) - A\varphi(x_2)| = \left| \int_0^1 \left[H(x_1,y) - H(x_2,y)\right] G\varphi(y)\,dy \right|$$

et comme la fonction $H$ étant continue sur $[0,1] \times [0,1]$, on obtient que

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ : |x_1 - x_2| \leq \delta \Rightarrow |A\varphi(x_1) - A\varphi(x_2)| \leq \varepsilon.$$

Donc $A$ est un opérateur complètement continu.

3. $A\ : P \to P$ est un opérateur décroissant. En effet,

$$\forall\, \varphi, \varphi' \in P \text{ on a } 0 \leq \varphi \leq \varphi' \Rightarrow \frac{1}{1+\varphi'(y)} \leq \frac{1}{1+\varphi(y)},$$

ce qui entraîne que $A\varphi \geq A\varphi'$. D'où la décroissance de l'opérateur $A$.

4. Montrons que $A\theta > \theta,\ A^2\theta \geq \varepsilon_0 A\theta$. On a, $A\theta = \int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2-y^2}\,dy$, donc d'après l'hypothèse (i), on aura $A\theta > 0$. D'autre part, on aura

$$\begin{aligned} A^2\theta = A(A\theta) &= \int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2-y^2}\frac{1}{1+A\theta}\,dy \\ &\geq \int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2-y^2}\frac{1}{1+\max\limits_{0\leq x\leq 1}\int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2-y^2}dy}\,dy \\ &= \{1+\max_{0\leq x\leq 1}\int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2-y^2}\,dy\}^{-1} A\theta \end{aligned}$$

i.e. $A^2\theta \geq \varepsilon_0 A\theta$, où $\varepsilon_0 = \left\{1+\max\limits_{0\leq x\leq 1}\int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2-y^2}\,dy\right\}^{-1} > 0.$

5. Maintenant, pour $\varphi > \theta$ et $0 < t < 1$, on a :

$$\begin{aligned} A(t\varphi(x)) &= \int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2-y^2}\frac{1}{1+t\varphi(y)}\,dy \\ &= \frac{1}{t}\int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2-y^2}\frac{1+\varphi(y)}{t^{-1}+\varphi(y)}\frac{1}{1+\varphi(y)}\,dy. \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Posons

$$\min_{0\le y\le 1}\frac{t^{-1}+\varphi(y)}{1+\varphi(y)} = 1+\eta\ ;$$

nous voyons que $\eta > 0$, par (3.2.5), nous obtenons :

$$A(t\varphi(x)) \le \frac{1}{t(1+\eta)}\int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2-y^2}\frac{1}{1+\varphi(y)}\,dy = [t(1+\eta)]^{-1}A\varphi(x).$$

Toutes les conditions du théorème 3.1.1, sont donc satisfaites, ce qui entraîne que l'équation (3.2.4) admet exactement une solution positive $\varphi^* > \theta$.
De plus, pour toute fonction $\varphi_0 \in P$, la suite itérative $(\varphi_n)$ définie par :
$\varphi_n = A\varphi_{n-1}\ n \in \mathbb{N}^*$ converge vers $\varphi^*$ i.e. $\|\varphi_n - \varphi^*\| \to 0,\ n \to +\infty$.
Par la transformation (3.2.3), nous voyons que la fonction $\psi^* = \dfrac{1}{1+\varphi^*}$ est la seule solution continue positive de l'équation (3.2.1) avec $\theta < \psi^*(x) \le 1$.
Pour $\psi_0(x) \in C([0,1])$ donné tel que $\theta < \psi_0(x) \le 1$, posons $\varphi_0(x) = \dfrac{1}{\psi_0(x)} - 1$, alors $\varphi_0 \in P$. Par récurrence, on peut démontrer facilement que

$$\psi_n(x) = \frac{1}{1+\varphi_n(x)},\quad n \in \mathbb{N}$$

où $\varphi_n = A\varphi_{n-1}, \quad \psi_{n+1}(x) = [1+\displaystyle\int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2-y^2}\psi_n(y)]^{-1},\ n \in \mathbb{N}$.

On en déduit donc que

$$\|\psi_n - \psi^*\|_C \to 0,\ n \to +\infty \tag{3.2.6}$$

car

$$\begin{aligned} \|\psi_n - \psi^*\|_C &= \|\frac{1}{1+\varphi_n} - \frac{1}{1+\varphi^*}\|_C \\ &= \frac{\|\varphi_n - \varphi^*\|_C}{\|(1+\varphi_n)(1+\varphi^*)\|_C} \to 0,\ n \to +\infty \end{aligned}$$

La preuve est donc complète.

■

# Annexe

**Fonction de Green**

On considère les équations différentielles de Sturm-Liouville linéaires sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.

$$(H) : (py')' + qy = 0, \ (NH) : (py')' + qy = f,$$

où $f, q \in \mathcal{C}([a,b])$ et $p \in \mathcal{C}^1([a,b])$,

associées aux conditions aux bords homogènes et non homogènes

$$(CB)_h \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{array} \right.$$

$$(CB)_{nh} \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \gamma, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \delta, \end{array} \right.$$

où $\gamma, \delta, \alpha_i, \beta_i (i = 1, 2)$ sont des constantes réelles telles que $|\alpha_1| + |\alpha_2|, |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$.

**Théorème 3.2.2** *Supposons que le problème $(H) - (CB)_h$ admet pour unique solution la solution triviale nulle ; alors il existe une unique fonction $G = G(x,y)$ (dite fonction de Green), telle que pour toute fonction $f$, la solution $y$ du problème homogène $(NH) - (CB)_h$ s'écrit d'une manière unique sous la forme*

$$y(x) = \int_a^b G(x,y) f(y) \, dy.$$

*De plus, $G$ vérifiée les propriétés suivantes:*

*$(a)$ $G$ est continue sur $[a,b]^2$ ;*

*$(b)$ $G$ est symétrique i.e. $G(x,y) = G(y,x)$, $\forall x, y \in [a,b]$;*

*$(c)$ $\frac{\partial G}{\partial x}(x,y)$ est continue pour tout $x \neq y$ ;*

*(d) La fonction partielle* $x \mapsto G(x,y)$ *est solution de l'équation* $(H)$ *pour tout* $x$, $x \neq y$ *;*

*(e) La fonction partielle* $x \mapsto G(x,y)$ *vérifiée les conditions* $(CB)_h$ *pour tout* $y \in [a,b]$ *.*

**Exemple 3.2.2** *Considérons le problème aux limites du second ordre*

$$(P) \qquad \begin{cases} -u''(t) = f(u(t)),\ 0 < t < 1, \\ \qquad u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

• $(P)$ *est équivalent à l'équation intégrale*

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s) f(u(s)) ds$$

*où la fonction de Green* $G\ : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ *est donnée par :*

$$G(t,s) = \begin{cases} t(1-s),\ 0 \leq t \leq s \leq 1 \\ s(1-t),\ 0 \leq s \leq t \leq 1, \end{cases}$$

***Propriétés de la fonction de Green associée au problème*** $(P)$.

1. $G(t,s) \geq 0,\ \forall t,s \in [0,1]$

2. $G(t,s) \leq s(1-s) < 1,\ \forall t,s \in [0,1]$

3. $G(t,s) \geq \frac{1}{4}s(1-s),\ \forall t \in [\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$ *et* $\forall s \in [0,1]$

4. $\int_0^1 G(t,s)ds = \frac{t(1-t)}{2} \leq \frac{1}{8},\ \forall t \in [0,1]$

5. $\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} G(t,s)ds \leq \frac{1}{2},\ \forall t \in [0,1].$

**Critère de compacité d'Ascoli-Arzéla**

**Théorème 3.2.3** *Soit* $X$ *un espace métrique compact,* $Y$ *un espace de Banach et* $H \subset \mathcal{C}(X,Y)$ *un sous-espace muni de la norme sup. Alors* $H$ *est relativement compact si et seulement si :*

1. $H$ *est uniformément borné, i,e.*
   $\forall x \in X$, *l'ensemble* $\{f(x) : f \in H\}$ *est borné dans* $Y$.

2. $H$ *est équi-continu, i,e.*
   $\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}(x), \forall y \in X\ ; y \in V \Rightarrow \|f(y) - f(x)\|_Y \leq \varepsilon, \forall f \in H.$

- Cas où $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ et $Y = \mathbb{R}$.

**Théorème 3.2.4** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ une suite vérifiant :*

1. *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément borné, i.e.*
   $\exists c > 0, \forall n \in \mathbb{N} \ : \|f_n\| \leq c.$

2. *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-continue, i.e.*
   $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon), \forall x, y \in [a, b] \ : |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}.$

*Alors, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente. (i.e. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$est relativement compacte).*

**Corollaire 3.2.1** *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est borné dans $\mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$, i.e. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, indépendamment de $n$, alors elle admet une sous-suite convergente dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.*

**Démonstration.**

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \Rightarrow$ la condition (1). (Evident)
- $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \Rightarrow$ la condition (2).
  En effet, pour tout $x, y \in [a, b]$, on a :

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(y)| &\leq |f'_n(\xi)|\,|x - y|, \ \xi \in ]x, y[ \text{ et } n \in \mathbb{N} \\ &\leq c\,|x - y|, \end{aligned}$$

il suffit donc de prendre $\delta = \dfrac{\varepsilon}{c}$, (indépendant de $n$).

■

**Théorème de la convergence dominée de Lebegue**

**Théorème 3.2.5** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions appartenant à $L^1(\Omega)$ avec $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. On suppose que :*

1. *$f_n(x) \longrightarrow f(x)$ p.p sur $\Omega$ ;*

2. *Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que*
   $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq g(x)$ *p.p sur* $\Omega$.

*Alors, $f \in L^1(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \longrightarrow 0$.*

**Lemme de Fatou**

**Lemme 3.2.1** *Soient* $(E, \Omega, \mu)$ *un espace mesuré,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M_+$*. On pose pour tout* $x \in E$ *:*

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \inf f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \left(\inf_{P\geq n} f_P(x)\right) \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

*Alors* $f \in M_+$ *et :*

$$\int f d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \int f_n d\mu = \lim_{n\to+\infty} \left(\inf_{P\geq n} \int f_P d\mu\right).$$

**Espace réflexif**

Soit $E$ un espace de Banach. On dit que $E$ est réflexif s'il est le dual de son dual c'est à dire, si l'application

$$J : x \in E \longmapsto J(x) \in E^{**} \text{ où } \langle J(x); f\rangle = \langle f, x\rangle \text{ pour tout } f \in E^*,$$

est surjective.

# Conclusion

La théorie du point fixe est très importante dans l'étude de l'existence de solutions pour les problèmes non linéaires. Dans notre travail, on a présenté quelques théorèmes du point fixe pour les opérateurs monotones (les opérateurs croissants et les opérateurs décroissants). Les différents théorèmes présentés discutent l'existence et l'unicité du point fixe, l'existance des points fixes maximal et minimal ainsi que la convergence des suites itérées vers des points fixes. On a aussi appliqué quelques résultats pour établir l'existence de solutions de certaines équations différentielles et intégrales non linéaires.

# Bibliographie


[1] D. Guo et V. Lakshmikantham, Nonlinear problems in abstract cones, Academic press, Inc. London LTD, 1988.

[2] D. Guo et Y.J. Cho et J. Zhu, Partial ordering methods in nonlinear problems, Tatiana Shohov, Susan Boriotti and Donna Dennis, 2004.

[3] D. O'Regan et Y.J. Cho et Y.Q. Chen, Topological degree theory and applications, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, London, New York, 2006.