

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ Abderrahmane Mira - Béjaïa
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES
Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master
en mathématiques

Par

Salim BENSLIMANE

THÈME

***APPROXIMATION STOCHASTIQUE :
INEGALITES EXPONENTIELLES ET ETUDE NUMERIQUE***

Soutenu publiquement, le 20/06/2017 devant le jury composé de :

M.	F. BOUHMILA	M.C.A	Université A. Mira - Béjaïa	Président
M.	A. DAHMANI	Professeur	C.Universitaire Tamenghest	Rapporteur
Mme	A. BARECHE	M.A.A	Université A. Mira - Béjaïa	examinatrice
Mme	H. ZEROUATI	M.C.A	Université A. Mira - Béjaïa	Examinatrice

Remerciements

Mes remerciements vont premièrement à M. Dahmani qui m'a proposé ce sujet, m'a conseillé et m'a consacré le temps nécessaire à la réalisation de ce travail. Je remercie également M. Arab pour son aide précieuse et pour avoir partagé son expérience avec moi.

Je remercie aussi tous les enseignants qui ont contribué à ma formation, ce fut une expérience formidable et ce travail n'est que le fruit de leurs enseignements.

Mes remerciements vont aussi à mes parents qui m'ont soutenu pendant toute la période de réalisation de ce travail, à eux mon infinie gratitude.

Finalement, je remercie Mme BARECHE, Mme ZEROUATI et M. BOUHMILA pour avoir bien voulu évaluer ce travail et pour l'aide qu'ils ont apportée pour l'amélioration de celui-ci.

Dédicaces

Je dédie ce travail à mes parents pour tout ce qu'ils représentent pour moi.

Table des matières

Introduction	1
1 Approximation stochastique	3
1.1 Introduction	3
1.2 Aspect mathématique de l'approximation stochastique	5
1.2.1 Forme générale des algorithmes	5
1.2.2 Modes de convergence des méthodes stochastiques	5
1.2.3 Exemple	7
2 Généralités sur les mélanges	8
2.1 Principales formes de mélanges	8
2.2 Valeurs possibles des mélanges	10
2.3 Relations principales entre mélanges	15
2.4 Quelques résultats sur le ψ -mélange	17
3 Inégalités exponentielles	26
3.1 Résultats préliminaires	26
3.2 L'inégalité qui en résulte	32
4 Etude numérique	37
4.1 Introduction	37
4.2 Motivation	38
4.3 Application	38
4.3.1 Présentation de la simulation	39
4.3.2 Exemples et résultats	40
4.4 Conclusion	41

Conclusion	42
-------------------	-----------

Introduction

Les problèmes rencontrés en sciences de l'ingénieur sont en général le fruit d'expériences réalisées dans des conditions non totalement maîtrisées, c'est à dire que les informations sont toujours bruitées et par conséquent non exactes. La modélisation de tels problèmes se fait alors avec la présence inévitable d'erreurs dans les observations de la fonction objectif en chaque instant. Ces erreurs étant aléatoires, il nous est impossible d'approximer la solution du problème, qui est en général une racine de la fonction objectif, avec les techniques d'approximations déterministes. On utilise pour cela les algorithmes d'approximation stochastique. La consistance de ces algorithmes dépend grandement de la nature des erreurs rencontrées, qui sont rarement indépendantes. C'est pourquoi au Laboratoire de Mathématiques Appliquées de l'université de Béjaia on s'intéresse à la construction des inégalités exponentielles pour l'algorithme d'approximation stochastique de Robins-Monro avec les principales formes de mélange des erreurs aléatoires. Ainsi, Bondarev et Dahmani [4] ont construit de telles inégalités lorsque les variables aléatoires sont φ -mélangeantes. En [1], de telles inégalités sont construites lorsque les variables aléatoires sont α -mélangeantes. En [8], ces inégalités sont construites dans le cas indépendant. Le cas où les variables sont associées a été présenté par Arab [2]. D'autres inégalités exponentielles ont été construites selon le type des variables aléatoires considérées dans [[5], [6], [7], [10]]. Dans ce mémoire, nous considérons que les variables aléatoires de la procédure d'approximation stochastique sont ψ -mélangeantes. Nous commençons dans le premier chapitre par la présentation de la forme générale de ces algorithmes d'approximation stochastique et nous en donnons quelques aspects mathématiques.

Dans le deuxième chapitre, nous introduisons les principaux mélanges existants, puis nous donnons quelques valeurs particulières de ceux-ci ainsi que quelques relations entre eux, en mettant l'accent sur le cas du ψ -mélange.

Dans le troisième chapitre, nous présentons le résultat essentiel de ce mémoire à savoir la construction d'inégalités exponentielles pour l'algorithme de Robins-Monro lorsque les erreurs d'observation sont ψ -mélangeantes.

Nous terminons ce mémoire par un quatrième chapitre, dans lequel nous présentons l'application, qu'on a construite en nous basant sur le résultat principal de ce mémoire, et nous en donnons quelques résultats obtenus avec cette dernière.

Approximation stochastique

1.1 Introduction

Les algorithmes d'approximation stochastique sont des méthodes récursives, de mise à jour, qui peuvent être utilisés entre autres pour résoudre des problèmes d'optimisation ou des équations du point fixe, (y compris les systèmes linéaires standards), lorsque les données collectées sont soumises à un bruit. En ingénierie, les problèmes d'optimisation sont souvent de ce type, lorsqu'on ne dispose pas d'un modèle mathématique du système (ou qu'il est trop complexe) mais que l'on souhaite tout de même optimiser son comportement en ajustant certains paramètres.

A cet effet, on peut faire des expériences ou des simulations pour évaluer la performance du système à des valeurs données des paramètres. Les algorithmes d'approximation stochastique ont également été utilisés dans les sciences sociales pour décrire une dynamique collective : jeu fictif dans la théorie de l'apprentissage et des algorithmes de consensus qui peuvent être étudiés en utilisant leur théorie.

Apparue au milieu du vingtième siècle, l'approximation stochastique s'est avérée être un beau mélange entre la théorie des systèmes dynamiques et celle des probabilités, essentiellement quand elle est jumelée aux techniques d'approximation des équations différentielles ordinaires. Cette théorie a en plus apporté des réponses importantes nées de l'approximation numérique, dont la plus importante est : "comment approximer la solution d'une équation liée à une fonction qui est le résultat d'une expérience mais dont on ne connaît pas l'expression exacte mais plutôt sa valeur "mesurée" en chaque point?".

Les algorithmes de l'approximation stochastique se présentent en général sous cette forme.

Soit $f(x)$ le résultat attendu au point x , d'une expérience donnée. f étant une fonction en x supposée monotone mais non connue, et on désire trouver la solution

$$x = \theta$$

de l'équation

$$f(x) = \alpha$$

où α est une constante donnée.

En 1951, Herbert Robbins et Sutton Monro ont donné une méthode pour faire des expériences successives à des points x_1, x_2, \dots de telle sorte que la suite x_n tende vers θ presque sûrement quand n tend vers l'infini. Ainsi naquit l'approximation stochastique.

1.2 Aspect mathématique de l'approximation stochastique

1.2.1 Forme générale des algorithmes

Les algorithmes de l'approximation stochastique se présentent en général sous la forme suivante :

$$x_{n+1} = x_n + a_n Y_n$$

où

$$Y_n = f(x_n) + \xi_n,$$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty.$$

et ξ_n représente l'erreur de mesure commise en évaluant la fonction inconnue à travers l'expérience f au point x_n .

1.2.2 Modes de convergence des méthodes stochastiques

En théorie des probabilités, il existe différentes notions de convergence de variables aléatoires. Certaines de ces notions ne sont pas spécifiques des probabilités, mais de l'analyse en général, comme la convergence presque sûre de variables aléatoires, ou encore la convergence L_p . La convergence en loi de suites de variables aléatoires est un concept appartenant plus spécifiquement à la théorie des probabilités, utilisé notamment en statistique et dans l'étude des processus stochastiques.

Convergence en loi

La convergence en loi est souvent notée en ajoutant la lettre L ou D pour distribution au-dessus de la flèche de convergence.

La convergence en loi est la forme la plus faible de convergence de variables aléatoires au sens où, en général, elle n'implique pas les autres formes de convergence de variables aléatoires, alors que ces autres formes de convergence impliquent la convergence en loi. Le théorème central limite, un des résultats les plus importants de la théorie des probabilités, concerne la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.

Définition 1.2.1 Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire X , et soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions de répartition des variables aléatoires de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où F_n est la fonction de répartition de $X_n \forall n \in \mathbb{N}$.

Notons que les variables aléatoires sont toutes à valeurs dans \mathbb{R} .

On dira la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers X si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t) = F(t).$$

Convergence en probabilité

Plus forte que la convergence en loi, la convergence en probabilité reste la plus utilisée de par la simplicité de son expression.

Définition 1.2.2 Soit X une variable aléatoire et soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

On dit que X_n converge vers X en probabilité si $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \{ |X_n - X| > \varepsilon \} = 0.$$

Convergence presque sûre

La convergence presque sûre est plus forte que la convergence en probabilité.

Définition 1.2.3 Soit X une variable aléatoire et soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

On dit que X_n converge presque sûrement vers X si

$$\mathbb{P} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \right\} = 1.$$

1.2.3 Exemple

Algorithme de Robbins-Monro

Soit

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

une fonction continue, bornée, strictement croissante et s'annulant en un unique point X^* .

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires identiquement distribuées de loi uniforme sur $[-1, 1]$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs tels que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty. \quad (1.2.1)$$

On définit alors une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} X_0 \in \mathbb{R} \\ X_{n+1} = X_n - a_{n+1}(f(X_n) + U_{n+1}) \end{cases}$$

alors

$$\mathbb{P} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X^* \right\} = 1$$

c'est à dire que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers X^* quand n tends vers l'infini.

Remarque 1.2.1 *Il est intéressant de préciser que $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ vérifie la condition (1.2.1), si et seulement si*

$$0.5 < \alpha \leq 1.$$

Généralités sur les mélanges

La grande majorité des résultats qu'on connaît en théorie des probabilités et qui sont relatifs aux variables aléatoires, ne sont généralement valables que pour des variables aléatoires indépendantes, et il est souvent difficile voire impossible de généraliser ces résultats aux variables aléatoires dépendantes. Pour remédier à cette anomalie, des mesures de dépendance ont été créées pour savoir à quel point ces variables étaient dépendantes. Parmi ces mesures précédemment citées, il y a les mélanges.

2.1 Principales formes de mélanges

Il existe beaucoup de mélanges différents, en voici quelques-uns.

Définition 2.1.1 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, \mathcal{A} et \mathfrak{B} deux sous tribus de \mathcal{F} .

1. Le α -mélange

$$\alpha(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) = \sup_{A \in \mathcal{A}, B \in \mathfrak{B}} |\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)|,$$

introduit par Rosenblatt (1956).

2. Le β -mélange

Mélange introduit par Kolmogorov et apparu dans le livre de Wolkonski et Rosanov (1959).

$$\beta(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) = \sup_{\substack{A_i \in \mathcal{A}, B_j \in \mathfrak{B} \\ A_i, B_i \text{ partitions de } \Omega}} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (|\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B_j) - \mathbb{P}(A_i \cap B_j)|) \right\}.$$

3. Le ϕ -mélange

$$\phi(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) = \sup_{\substack{A \in \mathcal{A}, B \in \mathfrak{B} \\ \mathbb{P}(A) \neq 0}} \left(\left| \mathbb{P}(B) - \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \right| \right),$$

introduit par Ibragimov (1962).

4. Le ψ -mélange

$$\psi(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) = \sup_{\substack{A \in \mathcal{A}, B \in \mathfrak{B} \\ \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \neq 0}} \left(\left| 1 - \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)} \right| \right),$$

appelé aussi $*$ -mélange, a été introduit par Blum, Hanson et Koppmans (1963).

5. le ρ -mélange

$$\rho(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) = \sup_{X \in \mathbb{L}^2(\mathcal{A}), Y \in \mathbb{L}(\mathfrak{B})} |\text{corr}(X, Y)|$$

où

$$|\text{corr}(X, Y)| = \left| \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} \right|.$$

Introduit par Hirschfeld (1935) et Gablein (1941).

6. ψ^* -mélange

$$\psi^*(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) = \sup_{\substack{A \in \mathcal{A}, B \in \mathfrak{B} \\ \mathbb{P}(A) \neq 0, \mathbb{P}(B) \neq 0}} \left(\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)} \right).$$

7. ψ' -mélange

$$\psi'(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) = \inf_{\substack{A \in \mathcal{A}, B \in \mathfrak{B} \\ \mathbb{P}(A) \neq 0, \mathbb{P}(B) \neq 0}} \left(\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)} \right).$$

Définition 2.1.2 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{N}} \subset (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ une suite de variables aléatoires et soit

$$F_j^l = \sigma(X_k, j \leq k \leq l) \text{ avec } (k \in \mathbb{Z}).$$

où

$$\sigma(X_k, j \leq k \leq l)$$

est la tribu engendrée $X_k, j \leq k \leq l$.

$(X_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ est dite α -mélangeante ou fortement mélangeante si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{j \in \mathbb{Z}} \alpha(F_{-\infty}^j, F_{j+n}^{+\infty}) = 0.$$

$(X_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ est dite β -mélangeante ou absolument régulière si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{j \in \mathbb{Z}} \beta(F_{-\infty}^j, F_{j+n}^{+\infty}) = 0.$$

$(X_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ est dite ψ -mélangeante si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{j \in \mathbb{Z}} \psi(F_{-\infty}^j, F_{j+n}^{+\infty}) = 0.$$

$(X_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ est dite ϕ -mélangeante si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{j \in \mathbb{Z}} \phi(F_{-\infty}^j, F_{j+n}^{+\infty}) = 0.$$

$(X_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ est dite ρ -mélangeante si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{j \in \mathbb{Z}} \rho(F_{-\infty}^j, F_{j+n}^{+\infty}) = 0.$$

$(X_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ est dite ψ^* -mélangeante si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi^*(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{j \in \mathbb{Z}} \psi^*(F_{-\infty}^j, F_{j+n}^{+\infty}) = 1.$$

$(X_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ est dite ψ' -mélangeante si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi'(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{j \in \mathbb{Z}} \psi'(F_{-\infty}^j, F_{j+n}^{+\infty}) = 1.$$

2.2 Valeurs possibles des mélanges

Proposition 2.2.1 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

$\forall \mathcal{A}$ et \mathcal{B} deux sous tribus de \mathcal{F} on a

$$0 \leq \alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq \frac{1}{4}.$$

Démonstration. Pour la première inégalité.

Soit $A \in \mathcal{A}$ et soit $B \in \mathfrak{B}$.

On a grâce aux propriétés de la probabilité

$$\max(\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1, 0) \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \min(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)).$$

Grâce à la deuxième inégalité on obtient

$$\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \leq \min(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B),$$

sans perte de généralité on peut supposer que $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$, ce qui nous donne

$$\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)^2.$$

Or

$$\max(x - x^2, x \in \mathbb{R}) = \frac{1}{4}, \quad (2.2.1)$$

d'où le résultat

$$\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \leq \frac{1}{4}. \quad (2.2.2)$$

D'un autre côté, nous avons

$$\max(\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1, 0) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

On distingue ainsi deux cas

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \leq 1 \text{ ou } \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \geq 1.$$

Si

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \leq 1$$

alors

$$\mathbb{P}(A) \leq 1 - \mathbb{P}(B),$$

on obtient donc

$$-\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

et

$$-\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Mais puisque

$$\mathbb{P}(A) \leq 1 - \mathbb{P}(B),$$

alors

$$-\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \leq (1 - \mathbb{P}(B))\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B)^2.$$

Nous obtenons finalement grâce à (2.2.1),

$$-\frac{1}{4} \leq \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B). \quad (2.2.3)$$

Dans le cas où

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) > 1,$$

on aura

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B),$$

mais

$$\min [x + y - 1 - xy, (x, y) \in \{x + y > 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}] = -\frac{1}{4},$$

ce qui nous donne alors

$$-\frac{1}{4} \leq \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B). \quad (2.2.4)$$

De (2.2.2) et (2.2.3) et (2.2.4) on obtient

$$|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \frac{1}{4},$$

par conséquent

$$0 \leq \alpha(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) \leq \frac{1}{4}.$$

■

Proposition 2.2.2 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

$\forall \mathcal{A}$ et \mathfrak{B} deux sous tribus de \mathcal{F} on a

$$0 \leq \phi(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) \leq 1.$$

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{A}$ et soit $B \in \mathfrak{B}$.

On a

$$-1 \leq -\mathbb{P}(B|A) = -\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \leq 0$$

et

$$0 \leq \mathbb{P}(B) \leq 1.$$

On obtient donc

$$-1 \leq \mathbb{P}(B) - \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \leq 1$$

ce qui se traduit par

$$0 \leq \phi(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) \leq 1.$$

■

Proposition 2.2.3 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.*

$\forall \mathcal{A}$ et \mathfrak{B} deux sous tribus de \mathcal{F} on a

$$0 \leq \psi(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) \leq \infty.$$

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{A}$ et soit $B \in \mathfrak{B}$.

On a l'inégalité

$$0 \leq \psi(\mathcal{A}, \mathfrak{B}),$$

qui est évidente mais on doit montrer qu'il n'existe pas de $l > 1$ tel que $\psi(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) \leq l$.

Pour

$$\mathcal{A} = \mathfrak{B},$$

on prend

$$A = B \text{ tel que } p(A) = P(B) = \max\left(\frac{1}{l^2}, \frac{1}{4}\right) = p(A \cap B),$$

on aura alors

$$\begin{aligned} \left|1 - \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}\right| &= \left|1 - \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}\right| = \left|1 - \frac{\min(\frac{1}{l}, \frac{1}{4})}{(\min(\frac{1}{l^2}, \frac{1}{4}))^2}\right| \\ &= \left|1 - (\max(l^2, 4))^2 \min\left(\frac{1}{l^2}, \frac{1}{4}\right)\right| = |1 - (\max(l^2, 4))|. \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\left|1 - \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}\right| > l.$$

Ce qui veut dire

$$\psi(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) > l,$$

donc il n'existe pas de $l > 0$, tel que $\psi(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) < l$, ce qui prouve que l'inégalité

$$0 \leq \psi(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) \leq \infty,$$

est optimale. ■

Proposition 2.2.4 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.*

$\forall \mathcal{A}$ et \mathfrak{B} deux sous tribus de \mathcal{F} on a

$$0 \leq \rho(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) \leq 1.$$

Démonstration. Soit $X \in$ et Y deux variables aléatoires.

On sait que

$$\text{Cov}(X, Y) \leq \sigma(X) \sigma(Y).$$

Or

$$|\text{corr}(X, Y)| = \left| \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X) \sigma(Y)} \right|$$

ce qui implique que

$$\rho(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) \leq 1.$$

■

Proposition 2.2.5 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

$\forall \mathcal{A}$ et \mathfrak{B} deux sous tribus de \mathcal{F} on a

$$0 \leq \beta(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) \leq 1.$$

Démonstration. Soient $(A_i)_{i \in I} \subset \mathcal{A}$ et $(B_j)_{j \in J} \subset \mathfrak{B}$ deux partitions de Ω .

Grâce à la définition de la probabilité on a

$$\sum_{j=1}^J (|\mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(B_j) - \mathbb{P}(A_i \cap B_j)|) \leq 1$$

ainsi on obtient l'inégalité

$$0 \leq \beta(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) \leq 1.$$

■

Proposition 2.2.6 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

$\forall \mathcal{A}$ et \mathfrak{B} deux sous tribus de \mathcal{F} on a

$$1 \leq \psi^*(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) \leq +\infty.$$

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{A}$ et soit $B \in \mathfrak{B}$.

On a

$$\sup_{A \in \mathcal{A}, B \in \mathfrak{B}} \left(\frac{P(A \cap B)}{P(A) P(B)} \right) \geq 1,$$

$$\mathbb{P}(A) \neq 0, \mathbb{P}(B) \neq 0$$

car pour $A = B = \Omega$ on a

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A) P(B)} = 1$$

et donc

$$1 \leq \psi^*(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) \leq +\infty.$$

Le ψ^* -mélange n'est pas borné pour les mêmes raisons que le ψ -mélange. ■

Proposition 2.2.7 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

$\forall \mathcal{A}$ et \mathfrak{B} deux sous tribus de \mathcal{F} on a

$$0 \leq \psi'(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) \leq 1.$$

Démonstration. Puisque pour $A = B = \Omega$ on a

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)P(B)} = 1,$$

alors

$$\inf_{\substack{A \in \mathcal{A}, B \in \mathfrak{B} \\ \mathbb{P}(A) \neq 0, \mathbb{P}(B) \neq 0}} \left(\frac{P(A \cap B)}{P(A)P(B)} \right) \leq 1,$$

et par conséquent

$$0 \leq \psi'(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) \leq 1.$$

Remarque 2.2.1 Il est évident que si \mathcal{A} et \mathfrak{B} sont indépendantes alors

$$\alpha(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) = \beta(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) = \psi(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) = \phi(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) = \rho(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) = 1 - \psi'(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) = 1 - \psi^*(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) = 0.$$

■

2.3 Relations principales entre mélanges

Proposition 2.3.1 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

$\forall \mathcal{A}$ et \mathfrak{B} deux sous tribus de \mathcal{F} on a

$$2\alpha(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) \leq \beta(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) \leq \phi(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) \leq \frac{1}{2}\psi(\mathcal{A}, \mathfrak{B}).$$

Démonstration. Soient $(A_i)_{i \in I} \subset \mathcal{A}$ et $(B_j)_{j \in J} \subset \mathfrak{B}$ des partitions de Ω .

Soit $A \in \mathcal{A}$ et soit $B \in \mathfrak{B}$.

On a

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| &\leq |\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| + |\mathbb{P}(A^c \cap B) - \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B)| \\ &\quad + |\mathbb{P}(A \cap B^c) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)| + |\mathbb{P}(A^c \cap B^c) - \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c)|. \end{aligned}$$

Mais comme

$$|\mathbb{P}(A^c \cap B) - \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B)| = |\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) - (1 - \mathbb{P}(A))\mathbb{P}(B)|,$$

et

$$|\mathbb{P}(A \cap B^c) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)| = |\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) - (1 - \mathbb{P}(B))\mathbb{P}(A)|,$$

et

$$|\mathbb{P}(A^c \cap B^c) - \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c)| = |1 - \mathbb{P}(A \cup B) - (1 - \mathbb{P}(B))(1 - \mathbb{P}(A))|,$$

c'est à dire que

$$|\mathbb{P}(A^c \cap B) - \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B)| = |\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)|.$$

Ajouté à

$$|\mathbb{P}(A \cap B^c) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)| = |\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)|$$

et

$$|\mathbb{P}(A^c \cap B^c) - \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c)| = |\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)|,$$

on aura

$$2|\mathbb{P}(A^c \cap B^c) - \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c)| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (|\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B_j) - \mathbb{P}(A_i \cap B_j)|).$$

Ainsi,

$$2\alpha(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) \leq \beta(\mathcal{A}, \mathfrak{B}).$$

D'une autre part nous avons grâce aux propriétés de la probabilité et grâce au fait que les B_i constituent une partition de Ω

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (|\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B_j) - \mathbb{P}(A_i \cap B_j)|) \leq \sup_{\substack{A \in \mathcal{A}, B \in \mathfrak{B} \\ \mathbb{P}(A) \neq 0}} \left(\left| \mathbb{P}(B) - \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \right| \right),$$

donc

$$\beta(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) \leq \phi(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$$

et par conséquent

$$\left| \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \right| \leq \left| \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)} \right|, \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \neq 0.$$

Car

$$0 < \mathbb{P}(B) \leq 1.$$

Finalement

$$\phi(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) \leq \frac{1}{2} \psi(\mathcal{A}, \mathfrak{B}).$$

Ce qui montre ainsi que

$$2\alpha(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) \leq \beta(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) \leq \phi(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) \leq \frac{1}{2} \psi(\mathcal{A}, \mathfrak{B}).$$

■

Proposition 2.3.2 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.*

$\forall \mathcal{A}$ et \mathfrak{B} deux sous tribus de \mathcal{F} on a

$$\psi(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) = \max \left\{ \psi^*(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) - 1, 1 - \psi'(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) \right\}.$$

Démonstration. Soient $A \in \mathcal{A}$ et soit $B \in \mathfrak{B}$.

D'une part nous avons

$$\begin{aligned} \psi^*(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) - 1 &= \sup_{\substack{A \in \mathcal{A}, B \in \mathfrak{B} \\ \mathbb{P}(A) \neq 0, \mathbb{P}(B) \neq 0}} \left(\frac{P(A \cap B)}{P(A)P(B)} \right) - 1, \end{aligned}$$

et d'une autre nous avons

$$\begin{aligned} 1 - \psi'(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) &= 1 - \inf_{\substack{A \in \mathcal{A}, B \in \mathfrak{B} \\ \mathbb{P}(A) \neq 0, \mathbb{P}(B) \neq 0}} \left(\frac{P(A \cap B)}{P(A)P(B)} \right). \end{aligned}$$

On en déduit que la proposition est vraie, c'est-à-dire

$$\psi(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) = \max \left\{ \psi^*(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) - 1, 1 - \psi'(\mathcal{A}, \mathfrak{B}) \right\}.$$

■

2.4 Quelques résultats sur le ψ -mélange

Lemme 2.4.1 *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X, Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans \mathbb{R} . Alors*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X > z - kh\} \cap \{kh \leq Y < (k+1)h\}) = \mathbb{P}\{X + Y > z\}.$$

Démonstration. Montrons d'abord que

$$\bigcup_{k=-\infty}^{k=+\infty} (\{X > z - kh\} \cap \{kh \leq Y < (k+1)h\}) = \{X + Y > z\}.$$

Faisons cela par double inclusion.

Soient X et Y deux variables aléatoires.

Posons $X(w) = x$ et $Y(w) = y$.

Soient

$$h \in \mathbb{R}^*,$$

et

$$(x, y) \in \{X + Y > z\},$$

donc

$$x + y > z.$$

On sait aussi que

$$\exists k_1 \in \mathbb{Z},$$

tel que

$$k_1 h \leq y < (k_1 + 1)h,$$

où k est la partie entière de

$$\frac{y}{h}.$$

On aura donc

$$x > z - k_1 h.$$

Ainsi, on aura démontré que

$$(x, y) \in (\{X > z - k_1 h\} \cap \{k_1 h \leq Y < (k_1 + 1)h\}),$$

et par conséquent

$$(x, y) \in \bigcup_{k=-\infty}^{k=+\infty} (\{X > z - kh\} \cap \{kh \leq Y < (k+1)h\}).$$

C'est-à-dire

$$\{X + Y > z\} \subset \bigcup_{k=-\infty}^{k=+\infty} (\{X > z - kh\} \cap \{kh \leq Y < (k+1)h\}).$$

Soit maintenant

$$(x, y) \in \bigcup_{k=-\infty}^{k=+\infty} (\{X > z - kh\} \cap \{kh \leq Y < (k+1)h\}).$$

Donc $\exists k_1 \in \mathbb{Z}$, tel que

$$(x, y) \in (\{X > z - k_1 h\} \cap \{k_1 h \leq Y < (k_1 + 1)h\}),$$

c'est-à-dire

$$\{x > z - k_1 h\} \text{ et } \{k_1 h \leq y < (k_1 + 1)h\}$$

et donc

$$\{x + y > z\}.$$

Ainsi, on aura

$$\bigcup_{k=-\infty}^{k=+\infty} (\{X > z - kh\} \cap \{kh \leq Y < (k+1)h\}) \subset \{X + Y > z\}.$$

Ce qui démontre finalement que

$$\bigcup_{k=-\infty}^{k=+\infty} (\{X > z - kh\} \cap \{kh \leq Y < (k+1)h\}) = \{X + Y > z\}.$$

On aura ainsi

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{k=-\infty}^{k=+\infty} (\{X > z - kh\} \cap \{kh \leq Y < (k+1)h\}) \right) = \mathbb{P} \{X + Y > z\},$$

comme

$$(\{X > z - k_1 h\} \cap \{k_1 h \leq Y < (k_1 + 1)h\}),$$

est indépendant de

$$(\{X > z - k_2 h\} \cap \{k_2 h \leq Y < (k_2 + 1)h\}), \forall k_1 \neq k_2,$$

on obtient ainsi grâce aux propriétés de la probabilité

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{k=-\infty}^{k=+\infty} (\{X > z - kh\} \cap \{kh \leq Y < (k+1)h\}) \right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbb{P} (\{X > z - kh\} \cap \{kh \leq Y < (k+1)h\}).$$

Par conséquent

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbb{P} (\{X > z - kh\} \cap \{kh \leq Y < (k+1)h\}) = \mathbb{P} \{X + Y > z\}.$$

Mais puisque le résultat est vrai $\forall h \in \mathbb{R}$, on a le résultat recherché, c'est-à-dire

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X > z - kh\} \cap \{kh \leq Y < (k+1)h\}) = \mathbb{P}\{X + Y > z\}.$$

■

Proposition 2.4.1 *Soient $n > 1$ et X_1, X_2, \dots, X_n , n variables aléatoires ψ -mélangeantes.*

Alors il existe n variables aléatoires indépendantes Y_1, Y_2, \dots, Y_n telles que

$$(1 - \psi)^{n-1} \mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^n Y_i > x\right\} \leq \mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^n X_i > x\right\} \leq (1 + \psi)^{n-1} \mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^n Y_i > x\right\}. \quad (2.4.1)$$

Démonstration. Nous allons procéder par récurrence.

Démontrons le résultat pour $n = 2$.

Par hypothèse de ψ -mélange, on a

$$(1 - \psi) \mathbb{P}\{X_1 > x_1\} \mathbb{P}\{X_2 > x_2\} \leq \mathbb{P}\{X_1 > x_1, X_2 > x_2\} \leq (1 + \psi) \mathbb{P}\{X_1 > x_1\} \mathbb{P}\{X_2 > x_2\}. \quad (2.4.2)$$

Par ailleurs, pour tout $h > 0$, on a

$$\{X_1 + X_2 > x\} = \bigcup_{k=-\infty}^{k=+\infty} \{X_1 + X_2 > x\} \cap \{kh \leq X_2 < (k+1)h\}.$$

Aussi, pour tout k , on a

$$\begin{aligned} \{X_1 > x - kh\} \cap \{kh \leq X_2 < (k+1)h\} &\subset \{X_1 + X_2 > x\} \cap \{kh \leq X_2 < (k+1)h\} \\ &\subset \{X_1 > x - (k+1)h\} \cap \{kh \leq X_2 < (k+1)h\}. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} &\bigcup_{k=-\infty}^{k=+\infty} \{X_1 > x - kh\} \cap \{kh \leq X_2 < (k+1)h\} \subset \{X_1 + X_2 > x\} \\ &\subset \bigcup_{k=-\infty}^{k=+\infty} \{X_1 > x - (k+1)h\} \cap \{kh \leq X_2 < (k+1)h\}. \end{aligned}$$

En vertu des propriétés de la probabilité, on obtient

$$\begin{aligned} &\sum_k \mathbb{P}(\{X_1 > x - kh\} \cap \{kh \leq X_2 < (k+1)h\}) \leq \mathbb{P}\{X_1 + X_2 > x\} \\ &\leq \sum_k \mathbb{P}(\{X_1 > x - (k+1)h\} \cap \{kh \leq X_2 < (k+1)h\}). \end{aligned}$$

De (2.4.2), on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{X_1 > x - (k+1)h\} \cap \{kh \leq X_2 < (k+1)h\}) &\leq (1+\psi) \mathbb{P}\{X_1 > x - kh\} \mathbb{P}\{kh \leq X_2 < (k+1)h\} \\ \mathbb{P}\{X_1 > x - kh\} \cap \{kh \leq X_2 < (k+1)h\} &\geq (1-\psi) \mathbb{P}\{X_1 > x - kh\} \mathbb{P}\{kh \leq X_2 < (k+1)h\} \end{aligned}$$

Si on note

$$\mathbb{P}\{X_1 > x_1\} = \mathbb{P}\{Y_1 > x_1\} \text{ et } \mathbb{P}\{X_2 > x_2\} = \mathbb{P}\{Y_2 > x_2\}$$

avec Y_1 et Y_2 indépendantes, on aura

$$\begin{aligned} &\sum_k \mathbb{P}(\{Y_1 > x - kh\} \cap \{kh \leq Y_2 < (k+1)h\}) \leq \mathbb{P}\{X_1 + X_2 > x\} \\ &\leq \sum_k \mathbb{P}(\{Y_1 > x - (k+1)h\} \cap \{kh \leq Y_2 < (k+1)h\}). \end{aligned}$$

Qui donne

$$\begin{aligned} &\sum_k (1-\psi) \mathbb{P}\{Y_1 > x - kh\} \mathbb{P}\{kh \leq Y_2 < (k+1)h\} \leq \mathbb{P}\{X_1 + X_2 > x\} \\ &\leq \sum_k (1+\psi) \mathbb{P}\{Y_1 > x - kh\} \mathbb{P}\{kh \leq Y_2 < (k+1)h\}. \end{aligned}$$

Quand h tend vers 0, on obtient

$$(1-\psi) \mathbb{P}\{Y_1 + Y_2 > x\} \leq \mathbb{P}\{X_1 + X_2 > x\} \leq (1+\psi) \mathbb{P}\{Y_1 + Y_2 > x\}. \quad (2.4.3)$$

Ainsi le résultat est démontré pour $n = 2$.

Démontrons la proposition pour $n = 3$.

Pour tout $h > 0$, on a

$$\{X_1 + X_2 + X_3 > x\} = \bigcup_{k=-\infty}^{k=+\infty} \{X_1 + X_2 + X_3 > x\} \cap \{kh \leq X_3 < (k+1)h\}.$$

Pour tout k , on a

$$\begin{aligned} \{X_1 + X_2 > x - kh\} \cap \{kh \leq X_3 < (k+1)h\} &\subset \{X_1 + X_2 + X_3 > x\} \cap \{kh \leq X_3 < (k+1)h\} \\ &\subset \{X_1 + X_2 > x - (k+1)h\} \cap \{kh \leq X_3 < (k+1)h\}. \end{aligned}$$

Ce qui donne, par passage à la somme sur \mathbb{Z}

$$\begin{aligned} &\bigcup_{k=-\infty}^{k=+\infty} \{X_1 + X_2 > x - kh\} \cap \{kh \leq X_3 < (k+1)h\} \subset \{X_1 + X_2 + X_3 > x\} \\ &\subset \bigcup_{k=-\infty}^{k=+\infty} \{X_1 + X_2 > x - (k+1)h\} \cap \{kh \leq X_3 < (k+1)h\}, \end{aligned}$$

et en vertu des propriétés de la probabilité, on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_k \mathbb{P}(\{X_1 + X_2 > x - kh\} \cap \{kh \leq X_3 < (k+1)h\}) \leq \mathbb{P}\{X_1 + X_2 + X_3 > x\} \\ & \leq \sum_k \mathbb{P}(\{X_1 + X_2 > x - (k+1)h\} \cap \{kh \leq X_3 < (k+1)h\}). \end{aligned}$$

Qui donne grâce à (2.4.2)

$$\begin{aligned} & \sum_k (1 - \psi) \mathbb{P}\{X_1 + X_2 > x - kh\} \mathbb{P}\{kh \leq X_3 < (k+1)h\} \leq \mathbb{P}\{X_1 + X_2 + X_3 > x\} \\ & \leq \sum_k (1 + \psi) \mathbb{P}\{X_1 + X_2 > x - (k+1)h\} \mathbb{P}\{kh \leq X_3 < (k+1)h\}. \end{aligned}$$

En utilisant (2.4.3) pour X_1 et X_2 , on obtient

$$\begin{aligned} & (1 - \psi) \sum_k (1 - \psi) \mathbb{P}\{Y_1 + Y_2 > x - kh\} \mathbb{P}\{kh \leq X_3 < (k+1)h\} \leq \mathbb{P}\{X_1 + X_2 + X_3 > x\} \\ & \leq (1 + \psi) \sum_k (1 + \psi) \mathbb{P}\{Y_1 + Y_2 > x - (k+1)h\} \mathbb{P}\{kh \leq X_3 < (k+1)h\}. \end{aligned}$$

En notant

$$\mathbb{P}\{X_3 > x_3\} = \mathbb{P}\{Y_3 > x_3\},$$

On obtient

$$\begin{aligned} & (1 - \psi)^2 \sum_k \mathbb{P}\{Y_1 + Y_2 > x - kh\} \mathbb{P}\{kh \leq Y_3 < (k+1)h\} \leq \mathbb{P}\{X_1 + X_2 + X_3 > x\} \\ & \leq (1 + \psi)^2 \sum_k \mathbb{P}\{Y_1 + Y_2 > x - (k+1)h\} \mathbb{P}\{kh \leq Y_3 < (k+1)h\}. \end{aligned}$$

Quand h tend vers 0, on obtient

$$(1 - \psi)^2 \mathbb{P}\{Y_1 + Y_2 + Y_3 > x\} \leq \mathbb{P}\{X_1 + X_2 + X_3 > x\} \leq (1 + \psi)^2 \mathbb{P}\{Y_1 + Y_2 + Y_3 > x\}.$$

Ainsi, la proposition est démontrée pour $n = 3$.

Montrons la maintenant pour $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que la proposition est vérifiée pour $(n - 1)$, et démontrons la pour n .

Pour tout $h > 0$, on a

$$\left\{ \sum_{i=1}^n X_i > x \right\} = \bigcup_{k=-\infty}^{k=+\infty} \left\{ \sum_{i=1}^n X_i > x \right\} \cap \{kh \leq X_n < (k+1)h\}, h > 0.$$

Par ailleurs, pour tout k on a

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} X_i > x - kh \right\} \cap \{kh \leq X_n < (k+1)h\} \subset \left\{ \sum_{i=1}^n X_i > x \right\} \cap \{kh \leq X_n < (k+1)h\} \\ & \subset \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} X_i > x - (k+1)h \right\} \cap \{kh \leq X_n < (k+1)h\}. \end{aligned}$$

Par passage à la somme sur \mathbb{Z} , on obtient

$$\begin{aligned} & \bigcup_{k=-\infty}^{k=+\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} X_i > x - kh \right\} \cap \{kh \leq X_n < (k+1)h\} \subset \left\{ \sum_{i=1}^n X_i > x \right\} \\ & \subset \bigcup_{k=-\infty}^{k=+\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} X_i > x - (k+1)h \right\} \cap \{kh \leq X_n < (k+1)h\}. \end{aligned}$$

En vertu des propriétés de la probabilité, on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_k \mathbb{P} \left(\left\{ \sum_{i=1}^{n-1} X_i > x - kh \right\} \cap \{kh \leq X_n < (k+1)h\} \right) \leq \mathbb{P} \left\{ \sum_{i=1}^n X_i > x \right\} \\ & \leq \sum_k \mathbb{P} \left(\left\{ \sum_{i=1}^{n-1} X_i > x - (k+1)h \right\} \cap \{kh \leq X_n < (k+1)h\} \right). \end{aligned}$$

Qui donne grâce à (2.4.2)

$$\begin{aligned} & \sum_k (1 - \psi) \mathbb{P} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} X_i > x - kh \right\} \mathbb{P} \{kh \leq X_n < (k+1)h\} \leq \mathbb{P} \left\{ \sum_{i=1}^n X_i > x \right\} \\ & \leq \sum_k (1 + \psi) \mathbb{P} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} X_i > x - (k+1)h \right\} \mathbb{P} \{kh \leq X_n < (k+1)h\}. \end{aligned}$$

La formule étant vérifiée pour $n - 1$, on obtient

$$\begin{aligned} & (1 - \psi) \sum_k (1 - \psi)^{n-1} \mathbb{P} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} Y_i > x - kh \right\} \mathbb{P} \{kh \leq X_n < (k+1)h\} \leq \mathbb{P} \left\{ \sum_{i=1}^n X_i > x \right\} \\ & \leq (1 + \psi) \sum_k (1 + \psi)^{n-1} \mathbb{P} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} Y_i > x - (k+1)h \right\} \mathbb{P} \{kh \leq X_n < (k+1)h\}. \end{aligned}$$

En notant

$$\mathbb{P} \{X_n > x_n\} = \mathbb{P} \{Y_n > x_n\},$$

on obtient

$$\begin{aligned} & (1 - \psi)^n \sum_k \mathbb{P} \left\{ \sum_{i=1}^n Y_i > x - kh \right\} \mathbb{P} \{kh \leq Y_n < (k+1)h\} \leq \mathbb{P} \left\{ \sum_{i=1}^n Y_i > x \right\} \\ & \leq (1 + \psi)^n \sum_k \mathbb{P} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} Y_i > x - (k+1)h \right\} \mathbb{P} \{kh \leq Y_n < (k+1)h\}. \end{aligned}$$

Quand h tend vers 0, on obtient

$$(1 - \psi)^{n-1} \mathbb{P} \left\{ \sum_{i=1}^n Y_i > x \right\} \leq \mathbb{P} \left\{ \sum_{i=1}^n X_i > x \right\} \leq (1 + \psi)^{n-1} \mathbb{P} \left\{ \sum_{i=1}^n Y_i > x \right\}.$$

Le résultat est ainsi démontré. ■

Proposition 2.4.2 Soient $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}, \mathbb{P}_{\mathbb{R}})$ un espace probabilisé, $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires ψ -mélangeantes et φ une fonction borélienne. Alors $\varphi(X_i)$ est une variable ψ -mélangeante $\forall i \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration. Soient B_1 et B_2 deux éléments de $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$, la tribu borélienne de \mathbb{R} .

Démontrons d'abord le résultat pour des variables indépendantes.

Soient $X_i \in B_1$ et $X_j \in B_2$, deux variables aléatoires indépendantes, alors

$$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}(\varphi(X_i) \in B_1, \varphi(X_j) \in B_2) = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(X_i \in \varphi^{-1}(B_1), X_j \in \varphi^{-1}(B_2)) \text{ avec } i \neq j.$$

et directement

$$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}(X_i \in \varphi^{-1}(B_1), X_j \in \varphi^{-1}(B_2)) = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(X_i \in \varphi^{-1}(B_1)) \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(X_j \in \varphi^{-1}(B_2)),$$

grâce à l'indépendance de X_i et X_j .

Ainsi, on obtient

$$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}(\varphi(X_i) \in B_1, \varphi(X_j) \in B_2) = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(\varphi(X_i) \in B_1) \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(\varphi(X_j) \in B_2)$$

ce qui implique que

$$\psi(\sigma(\varphi(X_i)), \sigma(\varphi(X_j))) = 0.$$

Ce qui montre que les $\varphi(X_i)$ sont ψ -mélangeantes.

Démontrons maintenant le résultat dans le cas où X_i et X_j sont dépendantes et ψ -mélangeantes

$$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}(\varphi(X_i) \in B_1, \varphi(X_j) \in B_2) \leq (1 + \psi) \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(\varphi(X_i) \in B_1) \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(\varphi(X_j) \in B_2)$$

et

$$(1 - \psi) \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(\varphi(X_i) \in B_1) \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(\varphi(X_j) \in B_2) \leq \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(\varphi(X_i) \in B_1, \varphi(X_j) \in B_2)$$

donc

$$(1 - \psi) \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(\varphi(X_i) \in B_1) \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(\varphi(X_j) \in B_2) \leq \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(\varphi(X_i) \in B_1, \varphi(X_j) \in B_2)$$

$$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}(\varphi(X_i) \in B_1, \varphi(X_j) \in B_2) \leq (1 + \psi) \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(X_i \in \varphi^{-1}(B_1)) \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(X_j \in \varphi^{-1}(B_2))$$

ce qui veut dire que

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(\varphi(X_i) \in B_1, \varphi(X_j) \in B_2) - \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(X_i \in \varphi^{-1}(B_1)) \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(X_j \in \varphi^{-1}(B_2)) \\ & \leq \psi(n) \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(X_i \in \varphi^{-1}(B_1)) \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(X_j \in \varphi^{-1}(B_2)). \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

et

$$\begin{aligned} & -\psi(n) \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(X_i \in \varphi^{-1}(B_1)) \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(X_j \in \varphi^{-1}(B_2)) \\ & \leq \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(\varphi(X_i) \in B_1, \varphi(X_j) \in B_2) - \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(X_i \in \varphi^{-1}(B_1)) \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(X_j \in \varphi^{-1}(B_2)) \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Mais puisque X_i et X_j sont ψ -mélangeantes alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{j \in \mathbb{Z}} \psi(\sigma(X_k, -\infty \leq k \leq i), \sigma(X_k, i+n \leq k \leq +\infty)) = 0$$

et donc grâce aux inégalités (2.4.4) et (2.4.5), nous obtenons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{j \in \mathbb{Z}} \psi(\sigma(\varphi(X_k), -\infty \leq k \leq i), \sigma(\varphi(X_k), i+n \leq k \leq +\infty)) = 0$$

qui montre que les variables aléatoires $\varphi(X_i)$ sont ψ -mélangeantes. ■

3.1 Résultats préliminaires

Lemme 3.1.1 *Pour tout $a > 0, c > 0, i + 1 > ac$ et $i \in \mathbb{N}$, on a*

$$\prod_{j=i+1}^n \left(1 - \frac{ac}{j}\right) \leq \left(\frac{i+1}{n+1}\right)^{ac}.$$

Démonstration. On a

$$\log \left(\prod_{j=i+1}^n \left(1 - \frac{ac}{j}\right) \right) = \sum_{j=i+1}^n \log \left(1 - \frac{ac}{j}\right)$$

et

$$\forall x < 1, \ln(1 - x) \leq -x.$$

Donc

$$\log \left(\prod_{j=i+1}^n \left(1 - \frac{ac}{j}\right) \right) \leq \sum_{j=i+1}^n -\frac{ac}{j},$$

mais

$$\left(-\frac{ac}{j}\right)_{j \in \mathbb{N}^*} \text{ est strictement croissante,}$$

donc grâce au théorème de comparaison série-intégrale, on obtient

$$\sum_{j=i+1}^n -\frac{ac}{j} \leq -\int_{i+1}^{n+1} \frac{ac}{x} dx.$$

Par conséquent

$$\log \left(\prod_{j=i+1}^n \left(1 - \frac{ac}{j}\right) \right) \leq ac(\log(i+1) - \log(n+1)).$$

En vertu des propriétés du logarithme népérien, on a

$$\log \left(\prod_{j=i+1}^n \left(1 - \frac{ac}{j}\right) \right) \leq ac \log \left(\frac{i+1}{n+1}\right).$$

Comme l'exponentielle est une fonction croissante, on obtient

$$\exp\left(\log\left(\prod_{j=i+1}^n\left(1-\frac{ac}{j}\right)\right)\right)\leq\exp\left(ac\log\left(\frac{i+1}{n+1}\right)\right).$$

Du fait que

$$\exp(\log x)=x,\forall x>0,$$

on obtient

$$\prod_{j=i+1}^n\left(1-\frac{ac}{j}\right)\leq\left(\frac{i+1}{n+1}\right)^{ac}.$$

Ce qui met fin à cette démonstration. ■

Lemme 3.1.2 *Pour tout $a > 0, c > 0, ac \leq 1$ on a*

$$\sum_{i=1}^n\frac{a}{i}\prod_{j=i+1}^n\left(1-\frac{ac}{j}\right)\leq\frac{2}{c}.$$

Démonstration. Vue que

$$i+1<ac\text{ car }ac\leq 1,$$

on a grâce au lemme (3.1.1)

$$\prod_{j=i+1}^n\left(1-\frac{ac}{j}\right)\leq\left(\frac{i+1}{n+1}\right)^{ac},$$

et donc on a

$$\frac{a}{i}\prod_{j=i+1}^n\left(1-\frac{ac}{j}\right)\leq\frac{a}{i}\left(\frac{i+1}{n+1}\right)^{ac},\forall i\in\mathbb{N}^*.$$

Ce qui donne, en passant à la somme sur \mathbb{N}^*

$$\sum_{i=1}^n\frac{a}{i}\prod_{j=i+1}^n\left(1-\frac{ac}{j}\right)\leq\sum_{i=1}^n\frac{a}{i}\left(\frac{i+1}{n+1}\right)^{ac}.$$

Comme

$$i+1\leq 2i,\forall i\in\mathbb{N}^*,$$

alors

$$\sum_{i=1}^n\frac{a}{i}\prod_{j=i+1}^n\left(1-\frac{ac}{j}\right)\leq\sum_{i=1}^n\frac{a}{i}\left(\frac{2i}{n+1}\right)^{ac}.$$

Comme $a, 2^{ac}$ et $(n+1)^{ac}$ sont des constantes par rapport à i , alors

$$\sum_{i=1}^n\frac{a}{i}\prod_{j=i+1}^n\left(1-\frac{ac}{j}\right)\leq\frac{a(2)^{ac}}{(n+1)^{ac}}\sum_{i=1}^n(i)^{ac-1}.$$

Puisque $ac \leq 1$ alors $(i)^{ac-1}$ est une suite décroissante.

Donc grâce au théorème de comparaison série-intégrale on a

$$\sum_{i=1}^n (i)^{ac-1} \leq \left(\int_1^n (x)^{ac-1} dx + 1 \right).$$

Ce qui fait que

$$\sum_{i=1}^n \frac{a}{i} \prod_{j=i+1}^n \left(1 - \frac{ac}{j} \right) \leq \frac{a(2)^{ac}}{(n+1)^{ac}} \left(\int_1^n (x)^{ac-1} dx + 1 \right).$$

Comme

$$\int_1^n (x)^{ac-1} dx + 1 = \frac{1}{ac} ((n)^{ac} - 1) + 1,$$

alors

$$\sum_{i=1}^n \frac{a}{i} \prod_{j=i+1}^n \left(1 - \frac{ac}{j} \right) \leq \frac{a(2)^{ac}}{(n+1)^{ac}} \left(\frac{1}{ac} ((n)^{ac} - 1) + 1 \right),$$

qui est équivalent à

$$\sum_{i=1}^n \frac{a}{i} \prod_{j=i+1}^n \left(1 - \frac{ac}{j} \right) \leq \frac{a}{ac} \frac{(2)^{ac} (n)^{ac}}{(n+1)^{ac}}.$$

Mais puisque

$$\frac{n^{ac}}{(n+1)^{ac}} \leq 1,$$

alors

$$\sum_{i=1}^n \frac{a}{i} \prod_{j=i+1}^n \left(1 - \frac{ac}{j} \right) \leq \frac{1}{c} (2)^{ac}.$$

Comme $ac < 1$, alors

$$\sum_{i=1}^n \frac{a}{i} \prod_{j=i+1}^n \left(1 - \frac{ac}{j} \right) \leq \frac{2}{c}.$$

■

Proposition 3.1.1 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes centrées et $t > 0$, alors

$$E \left(\cosh t \left| \sum_{i=1}^n X_i \right| \right) \leq \prod_{i=1}^n E (e^{t|X_i|} - t|X_i|),$$

où E représente l'espérance mathématique.

Démonstration. Le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \cosh x$ donne

$$E \left(\cosh t \left| \sum_{i=1}^n X_i \right| \right) = E \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m)!} \left(t \left| \sum_{i=1}^n X_i \right| \right)^{2m} \right).$$

Ainsi, grâce aux propriétés de l'espérance mathématique, nous obtenons

$$E \left(\cosh t \left| \sum_{i=1}^n X_i \right| \right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{t^{2m}}{(2m)!} E \left| \sum_{i=1}^n X_i \right|^{2m},$$

qui devient

$$E \left(\cosh t \left| \sum_{i=1}^n X_i \right| \right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{t^{2m}}{(2m)!} E \left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} X_i X_j \right|^m.$$

En développant

$$\left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} X_i X_j \right|^m,$$

on trouve

$$E \left(\cosh t \left| \sum_{i=1}^n X_i \right| \right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{t^{2m}}{(2m)!} E \sum' |X_{i_1} X_{j_1}| \dots |X_{i_m} X_{j_m}|,$$

et nous obtenons finalement

$$E \left(\cosh t \left| \sum_{i=1}^n X_i \right| \right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{t^{2m}}{(2m)!} E \sum' |X_{i_1}| |X_{j_1}| \dots |X_{i_m}| |X_{j_m}|.$$

Où \sum' représente la sommation sur les vecteurs $(i_1, \dots, i_m, j_1, \dots, j_m)$, dont le nombre de termes est différent de 1 pour tout $1 \leq i \leq n$ et avec $1 \leq i_k, j_k \leq n$ sachant que k est compris entre 1 et m .

La proposition est ainsi démontrée. ■

Lemme 3.1.3 (de Kronecker) Soient U_n le terme général d'une série convergente et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de termes positifs divergeant vers l'infini alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n b_k U_k = 0.$$

Démonstration. Notons

$$S_n = \sum_{k=n}^{\infty} U_k \text{ et } b_0 = 0.$$

Alors

$$U_k = \sum_{k=n}^{\infty} U_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} U_k = S_k - S_{k+1}.$$

Ce qui nous donne

$$\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n b_k U_k = \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n b_k (S_k - S_{k+1}).$$

Ainsi, en développant la formule

$$\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n b_k U_k = \frac{1}{b_n} \left(\sum_{k=1}^n b_k S_k - \sum_{k=1}^n b_k S_{k+1} \right),$$

on obtient

$$\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n b_k U_k = \frac{1}{b_n} \left(\sum_{k=1}^n b_k S_k - \sum_{k=1}^{n-1} b_k S_{k+1} - b_n S_{n+1} \right).$$

Mais puisque $b_0 = 0$, alors

$$\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n b_k U_k = \frac{1}{b_n} \left(\sum_{k=1}^n b_k S_k - \sum_{k=1}^n b_{k-1} S_k - b_n S_{n+1} \right).$$

En rassemblant les sommes et en simplifiant, on obtient

$$\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n b_k U_k = \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k-1}) S_k - S_{n+1}.$$

Comme d'après le lemme de Cesàro généralisé⁽¹⁾ on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k-1}) S_k \right) = 0,$$

alors on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k-1}) S_k - S_{n+1} \right) = 0,$$

qui se traduit par

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n b_k U_k = 0.$$

■

Proposition 3.1.2 *Soit une fonction*

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

(1)

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l , alors la suite de ses moyennes de Césaro aussi, c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right) = l.$$

dérivable et telle que

$$\exists M > 0 \text{ tel que } \left| f'(x) \right| < M, \forall x \in \Omega.$$

Soit la relation de récurrence suivante

$$x_{n+1} = x_n - a_n (f(x_n) + \xi_n), \quad (3.1.1)$$

telle que a_n , est le terme général d'une série divergente et de manière que la série de terme général a_n^2 soit convergente. Alors, en posant x^* l'unique racine de la fonction f , on aura

$$x_{n+1} - x^* = (x_1 - x^*) \prod_{i=1}^n \left(1 - a_i f'(c_i)\right) - \sum_{i=1}^n a_i \prod_{j=i+1}^n \left(1 - a_j f'(c_j)\right) \xi_i.$$

Démonstration. Soit $x^* \in \Omega$ tel que

$$f(x^*) = 0,$$

grâce au théorème des accroissements finis on a

$$\forall x_i, \exists c_i \text{ tel que } f'(c_i) = \frac{f(x_i) - f(x^*)}{x_i - x^*},$$

donc

$$f(x_i) = f'(c_i) (x_i - x^*), \forall i \in \mathbb{N}.$$

Or

$$x_{n+1} - x^* = x_n - a_n (f(x_n) + \xi_n) - x^*,$$

donc

$$x_{n+1} - x^* = (x_n - x^*) - a_n \left[(x_n - x^*) f'(c_n) + \xi_n \right]. \quad (3.1.2)$$

En développant et simplifiant l'expression, on obtient

$$x_{n+1} - x^* = \left(1 - a_n f'(c_n)\right) (x_n - x^*) - a_n \xi_n.$$

Ceci est donc valable $\forall i \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire

$$x_{i+1} - x^* = \left(1 - a_i f'(c_i)\right) (x_i - x^*) - a_i \xi_i,$$

et par conséquent

$$x_n - x^* = \left(1 - a_{n-1} f'(c_{n-1})\right) (x_{n-1} - x^*) - a_{n-1} \xi_{n-1}.$$

En remplaçant la valeur de $x_n - x^*$ dans (3.1.2), on obtient

$$x_{n+1} - x^* = \left(1 - a_n f'(c_n)\right) \left(\left(1 - a_{n-1} f'(c_{n-1})\right) (x_{n-1} - x^*) - a_{n-1} \xi_{n-1} \right) - a_n \xi_n.$$

On simplifie une deuxième fois et on obtient

$$x_{n+1} - x^* = \left(1 - a_n f'(c_n)\right) \left(1 - a_{n-1} f'(c_{n-1})\right) (x_{n-1} - x^*) - \left(1 - a_n f'(c_n)\right) a_{n-1} \xi_{n-1} - a_n \xi_n.$$

On réapplique le résultat (3.1.2) obtenu grâce au théorème des accroissements finis et on simplifie les expressions obtenues à chaque fois, jusqu'à arriver au résultat recherché, qui est

$$x_{n+1} - x^* = (x_1 - x^*) \prod_{i=1}^n \left(1 - a_i f'(c_i)\right) - \sum_{i=1}^n a_i \prod_{j=i+1}^n \left(1 - a_j f'(c_j)\right) \xi_i.$$

■

3.2 L'inégalité qui en résulte

Dans ce qui suit, on considérera les ξ_i comme une suite de variables aléatoires ψ -mélangeantes, centrées et vérifiant la condition de Cramer, c'est-à-dire:

$$E \xi_i = 0, \forall i \in \mathbb{N}^*$$

et

$$E |\xi_i|^m \leq \frac{m!}{2} \sigma^2 H^{m-2} \text{ avec } \sigma = E |\xi_i|^2 \text{ et } H > 0,$$

où E représente l'espérance mathématique

Proposition 3.2.1 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires vérifiant la relation de récurrence (3.1.1), alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|x_{n+1} - x^*| > \varepsilon) = 0.$$

Démonstration. Sachant que

$$\mathbb{P}\{|x_{n+1} - x^*| > \varepsilon\} = \mathbb{P}\left(\left| (x_1 - x^*) \prod_{i=1}^n \left(1 - a_i f'(c_i)\right) - \sum_{i=1}^n a_i \prod_{j=i+1}^n \left(1 - a_j f'(c_j)\right) \xi_i \right| > \varepsilon \right),$$

on obtient grâce à l'inégalité triangulaire

$$\mathbb{P}\{|x_{n+1} - x^*| > \varepsilon\} \leq \mathbb{P}\left(\left| (x_1 - x^*) \prod_{i=1}^n \left(1 - a_i f'(c_i)\right) \right| + \left| \sum_{i=1}^n a_i \prod_{j=i+1}^n \left(1 - a_j f'(c_j)\right) \xi_i \right| > \varepsilon \right).$$

Mais en posant

$$a_i = \frac{f'(c_i)}{|f'(c_i)| iM}$$

et du fait que

$$|f'(c_i)| \leq M.$$

On a

$$0 < a_i f'(c_i) < 1,$$

et donc

$$0 < (1 - a_i f'(c_i)) < 1, \forall i \in \mathbb{N}^*.$$

On a alors

$$\prod_{i=1}^n (1 - a_i f'(c_i)) \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Il existe donc n_0 tel que $\forall n > n_0$

$$\left| (x_1 - x^*) \prod_{i=1}^n (1 - a_i f'(c_i)) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.2.1)$$

Ce qui nous donne, pour $n > n_0$

$$\mathbb{P}\{|x_{n+1} - x^*| > \varepsilon\} \leq \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n a_i \prod_{j=i+1}^n (1 - a_j f'(c_j)) \xi_i\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Posons

$$X_i = a_i \prod_{j=i+1}^n (1 - a_j f'(c_j)) \xi_i,$$

nous obtenons

$$\mathbb{P}\{|x_{n+1} - x^*| > \varepsilon\} \leq \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n X_i\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Puisque les ξ_i sont ψ -mélangeantes, alors les X_i le sont aussi.

Il existe donc grâce à l'inégalité (2.4.1), n variables aléatoires indépendantes Y_1, Y_2, \dots, Y_n , telles que

$$(1 - \psi)^{n-1} \mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^n Y_i > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \leq \mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^n X_i > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \leq (1 + \psi)^{n-1} \mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^n Y_i > \frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

ce qui implique donc que

$$\mathbb{P}\{|x_{n+1} - x^*| > \varepsilon\} \leq (1 + \psi)^{n-1} \mathbb{P}\left\{\left|\sum_{i=1}^n Y_i\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Mais on sait que $\forall t > 0$

$$\mathbb{P} \left\{ \left| \sum_{i=1}^n Y_i \right| > \frac{\varepsilon}{2} \right\} = \mathbb{P} \left\{ t \left| \sum_{i=1}^n Y_i \right| > \frac{t\varepsilon}{2} \right\}.$$

Part conséquent, $\forall t > 0$

$$\mathbb{P} \left\{ \left| \sum_{i=1}^n Y_i \right| > \frac{\varepsilon}{2} \right\} = \mathbb{P} \left\{ \exp \left(t \left| \sum_{i=1}^n Y_i \right| \right) > \exp \left(\frac{t\varepsilon}{2} \right) \right\},$$

la fonction exponentielle étant croissante.

Ainsi, grâce à l'inégalité de Markov et à l'inégalité triangulaire, nous obtenons

$$\mathbb{P} \{|x_{n+1} - x^*| > \varepsilon\} \leq (1 + \psi)^{n-1} \exp \left(\frac{-t\varepsilon}{2} \right) \mathbb{E} \left(\exp \left(t \sum_{i=1}^n |Y_i| \right) \right).$$

Sachant que

$$\exp x \leq 2 \cosh x,$$

on obtient

$$\mathbb{P} \{|x_{n+1} - x^*| > \varepsilon\} \leq (1 + \psi)^{n-1} \exp \left(\frac{-t\varepsilon}{2} \right) \mathbb{E} \left(2 \cosh \left(t \sum_{i=1}^n |Y_i| \right) \right).$$

En vertu du Théorème 3 page 144 (voir [9]), on a

$$\mathbb{E} \left(2 \cosh \left(t \sum_{i=1}^n |Y_i| \right) \right) \leq \mathbb{E} \prod_{i=1}^n (e^{t|Y_i|} - t|Y_i|).$$

La fonction $x \mapsto e^x - x$ est continue, donc borélienne. Par conséquent les variables aléatoires $e^{t|Y_i|} - t|Y_i|$ sont indépendantes grâce à l'indépendance des variables aléatoires Y_i . Ce qui donne

$$\mathbb{P} \{|x_{n+1} - x^*| > \varepsilon\} \leq (1 + \psi)^{n-1} \exp \left(\frac{-t\varepsilon}{2} \right) \prod_{i=1}^n \mathbb{E} (e^{t|Y_i|} - |tY_i|).$$

En utilisant le développement en série entière de la fonction exponentielle,

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

on obtient

$$\mathbb{P} \{|x_{n+1} - x^*| > \varepsilon\} \leq (1 + \psi)^{n-1} \exp \left(\frac{-t\varepsilon}{2} \right) \prod_{i=1}^n \mathbb{E} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{|tY_i|^m}{m!} - |tY_i| \right).$$

Ce qui nous donnera

$$\mathbb{P} \{|x_{n+1} - x^*| > \varepsilon\} \leq (1 + \psi)^{n-1} \exp \left(\frac{-t\varepsilon}{2} \right) \left(\prod_{i=1}^n \left(1 + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\mathbb{E} |tY_i|^m}{m!} \right) \right).$$

Les $|tY_i|$ répondant à la condition de Cramer, c'est-à-dire

$$E |tY_i|^m \leq t^m \frac{m!}{2} a_i^m \left| \prod_{j=i+1}^n (1 - a_j f'(c_j)) \right|^m \sigma^2 H^{m-2}, \text{ avec } H > 0.$$

Ainsi, en utilisant le Lemme 3.1.1, on obtient

$$\prod_{i=1}^n \left(1 + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\mathbb{E} |tY_i|^j}{j!} \right) \leq \prod_{i=1}^n \left(1 + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{t^m}{2} a_i^m \left(\frac{i+1}{n+1} \right)^{mac} \sigma^2 H^{m-2} \right).$$

Ce qui nous donne finalement

$$\mathbb{P} \{ |x_{n+1} - x^*| > \varepsilon \} \leq (1 + \psi)^{n-1} \exp \left(\frac{-t\varepsilon}{2} \right) \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{t^2 \sigma^2 a_i^2}{2} \left(\frac{i+1}{n+1} \right)^{2ac} \sum_{m=2}^{\infty} \left(t a_i H \left(\frac{i+1}{n+1} \right)^{ac} \right)^{m-2} \right).$$

Ceci étant valable pour tout t positif, on peut fixer $t < \frac{1}{2a_i H}$, de manière à avoir

$$\sum_{m=2}^{\infty} \left(t a_i H \left(\frac{i+1}{n+1} \right)^{ac} \right)^{m-2} \leq 1.$$

Avec ce même t on aura donc

$$\mathbb{P} \{ |x_{n+1} - x^*| > \varepsilon \} \leq (1 + \psi)^{n-1} \exp \left(\frac{-t\varepsilon}{2} \right) \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{t^2 \sigma^2 a_i^2}{2} \left(\frac{i+1}{n+1} \right)^{2ac} \right).$$

Puisque

$$\forall x > 0, 1 + x \leq \exp x,$$

on a

$$\mathbb{P} \{ |x_{n+1} - x^*| > \varepsilon \} \leq (1 + \psi)^{n-1} \exp \left(\frac{-t\varepsilon}{2} \right) \prod_{i=1}^n \exp \left(\frac{t^2 \sigma^2}{2} \left(\frac{i+1}{n+1} \right)^{2ac} \right).$$

Et de ce fait

$$\mathbb{P} \{ |x_{n+1} - x^*| > \varepsilon \} \leq (1 + \psi)^{n-1} \exp \left(t^2 \sigma^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 \left(\frac{i+1}{n+1} \right)^{2ac} - \frac{t\varepsilon}{2} \right). \quad (3.2.2)$$

Notons

$$b_n = \sigma^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 \left(\frac{i+1}{n+1} \right)^{2ac}.$$

Par le Lemme de Kronecker 3.1.3, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

Le t qui minimise dans l'expression 3.2.2 est

$$t = \frac{\varepsilon}{4b_n}.$$

En rapportant cette valeur dans (3.2.2) on obtient

$$\mathbb{P}\{|x_{n+1} - x^*| > \varepsilon\} \leq (1 + \psi)^{n-1} \exp\left(\frac{-3}{16b_n}\varepsilon^2\right).$$

La démonstration est ainsi terminée et nous obtenons le résultat principal de ce mémoire, qui est

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|x_{n+1} - x^*| > \varepsilon) = 0.$$

■

4 Etude numérique

4.1 Introduction

Historiquement, on s'est intéressé depuis le début du vingtième siècle à ce qu'on appelle la génération de nombres aléatoires, par l'utilisation de certaines tables formées chacune de manière différente. Ainsi, la plus ancienne table de nombres aléatoires connue est la table de Tippett, créée en 1927, elle est constituée de 10400 nombres de 4 chiffres. Puis en 1939 il y eut la table de Kandall et B.B. Smith qui contient cent mille chiffres obtenus à partir de disques tournants. Avec le temps, les techniques de génération de ces nombres ont considérablement évolué et on peut facilement aujourd'hui obtenir des nombres aléatoires grâce aux logiciels de mathématiques présents dans le marché. Nous utiliserons pour notre application numérique le logiciel MATLAB version R2009b.

4.2 Motivation

L'approximation stochastique a fait ses preuves depuis maintenant plus d'un demi siècle, et trouve des applications dans divers domaines. Ainsi, depuis son apparition, elle a été utilisée dans différents domaines de l'ingénierie et de l'économie. Robbins et Monro ont mis au point le premier algorithme d'approximation stochastique en voulant trouver les zéros d'une fonction f , dont on ne connaît pas l'expression analytique mais dont on peut obtenir une valeur mesurée $f(x)$ en chaque point x donné. Leur travail a été réalisé sur un phénomène chimique où $f(x)$ représentait la valeur moyenne de l'effet qu'a produit une dose x d'une substance utilisée pour l'expérience. Depuis, des algorithmes d'approximation stochastique ont été développés pour résoudre des problèmes de ce genre, c'est-à-dire des problèmes dont on ne peut obtenir l'expression analytique de leur fonction objectif, mais dont on peut obtenir des valeurs bruitées en chaque point donné. On pourrait voir un exemple d'utilisation de ces algorithmes en économie dans [12].

4.3 Application

Considérons une suite de variables aléatoires indépendantes $(e_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ telle que pour tout $t \in \mathbb{Z}$, la variable aléatoire e_t suit une loi de Rademacher. Autrement dit,

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \mathbb{P}\{e_t = 1\} = \mathbb{P}\{e_t = -1\} = \frac{1}{2}.$$

Considérons une suite de variables aléatoires gaussiennes $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ indépendantes de $(e_t)_{t \in \mathbb{Z}}$.

La suite de variables aléatoires $\xi_t := e_t \cdot X_t$ obtenue, est une suite de variables aléatoires ψ -mélangeantes.

4.3.1 Présentation de la simulation

Nous avons construit notre application sur Matlab (Matrix laboratory), qui est un langage de programmation utilisé à des fins de calcul numérique.

La fonction "rand" sur Matlab permet de retourner aléatoirement un nombre $a \in]0, 1[$, elle simule donc des variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme.

Pour simuler des variables aléatoires suivant une loi de Rademacher qui nous donne le résultat 1 ou -1 avec la même probabilité, nous avons procédé de la manière suivante :

Nous avons remarqué que

$$P(\text{rand} < 0.5) = \frac{1}{2} \text{ et } P(\text{rand} \geq 0.5) = \frac{1}{2}.$$

Pour simuler une suite de variables indépendantes $(e_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ suivant une loi de Rademacher on utilise la condition "si" et on affecte à e_t la valeur 1 ou -1 selon la valeur retourné par "rand", c'est-à-dire

$$\text{Si } \text{rand} < 0.5 \text{ alors } e_t = 1 \text{ sinon } e_t = -1.$$

Pour obtenir des variables aléatoires gaussiennes nous pouvons procéder comme suit, $X = \sqrt{-2 * \log(\text{rand})} \cdot \cos(2\pi \text{rand})$, comme nous pouvons le vérifier à la page du cours [13].

Ainsi programmée, $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

4.3.2 Exemples et résultats

Notre application peut approximer le zéro de toute fonction monotone à dérivée bornée.

Le tableau suivant résume les résultats que nous avons obtenus pour quelques fonctions.

	N ^{bre} d'itérations	10	500	5000	50000	200000
<i>Fonctions</i>	Points de départ					
$3x + 5$	$\frac{11}{2}$	-1.5579	-1.6731	-1.6711	-1.6673	-1.66628
$3x + 5$	2500	28.8051	-0.0344	-1.3756	-1.6492	-1.66566
$-2x - 6$	$\frac{1}{2}$	-2.8541	-2.9615	-2.9957	-3.0007	-3.00028
$-2x - 6$	-3000	-82.5274	-8.9023	-4.2725	-3.1743	-3.10739
$-7x + 2$	1	0.1795	0.2853	0.2866	0.2863	0.28545
$-7x + 2$	7500	16.8154	0.8179	0.3582	0.2955	0.28848
$6x - 4$	-6000	-17.3388	0.0389	0.5777	0.6542	0.66292
$6x - 4$	4	0.7437	0.6691	0.6660	0.6664	0.66671

4.4 Conclusion

La première chose qu'on remarque en analysant le tableau des résultats obtenus est que l'algorithme est à convergence lente, c'est-à-dire qu'il faut plusieurs, (des milliers), d'itérations pour approcher efficacement la solution théorique de la fonction.

La deuxième chose est la sensibilité du programme à la distance entre le point de départ et la solution de la fonction choisie.

On remarque par exemple que pour la fonction $3x + 5$, avec le point de départ $\frac{11}{2}$, on obtient après 50.000 itérations un résultat proche au millième près de la solution théorique. Alors que pour le point de départ 2500 il faut 200000 itérations pour obtenir un résultat comparable.

Finalement, on remarque qu'on peut quand même se faire une idée de la région où se trouve la solution après 5000 itérations, ce qui est assez bon.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons construit une inégalité exponentielle pour l'algorithme de Robins-Monro. Nous avons commencé notre travail par la présentation d'une forme des algorithmes de l'approximation stochastique. Nous avons ensuite défini quelques mélanges et présenté quelques propriétés de ceux-ci. En plus de cela, nous avons donné quelques lemmes dont celui de Kronecker et quelques propositions qui nous ont permis de démontrer le résultat principal de notre mémoire qui est la convergence de l'algorithme de Robins-Monro quand les données collectées sont soumises à un bruit du type ψ -mélangeant. Enfin, nous avons présenté une application numérique qui utilise le résultat principal de ce mémoire, et qui vient le corroborer.

Bibliographie

- [1] N. AIANE, A. DAHMANI On the Rate of Convergence of the Robbins-Monro's Algorithm in a Linear Stochastic Ill-posed Problems with alpha-mixing Data. Communications in Statistics - Theory and Methods. Accepted.
- [2] ARAB, A. DAHMANI Consistency of stochastic approximation algorithm with quasi-associated random errors. Communications in Statistics-Theory and Methods. Volume 45, issue 23, 2016, pp. 6883-6890.
- [3] I. ARAB, A. DAHMANI Complete Convergence of Stochastic Approximation Algorithm in \mathbb{R}^d under Random Errors. Sequential Analysis: Design Methods and Applications. 35: 2, 2016, pp. 216-225.
- [4] B.V. BONDAREV, A. DAHMANI Exponential Bound in stochastic approximation procedures. 1990, p. 741-745 translated from Ukainskii Matematicheskii Zhurnal 41, N°7, 1989, p. 867-872.
- [5] B.V. BONDAREV, A. DAHMANI Estimates for the unknown parameters in recurrent stochastic procedures. (Russian) Theory of random processes and its applications (Russian), "Naukova Dumka", Kiev, 1990, pp. 25-34,
- [6] A. DAHMANI, M.H. BENGRINA, A. AIT SAIDI Bernstein-Frechet inequalities for the Robbins Monro's Algorithm. International Journal of Applied Mathematics and Statistics. (2005). Vol.3, D05. pp 17-24.
- [7] A. DAHMANI, A. AIT SAIDI Consistency of Robbins Monro's algorithm within a mixing framework. Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, Vol. 79, 2010, pp. 131-140

- [8] F. MAOUCHE, A. DAHMANI, N. RAHMANIA stochastic procedure to solve linear ill-posed problems. *Communications in Statistics - Theory and Methods*. Volume 46, issue 3, 2017, pp. 1519-1531.
- [9] I.F. PINELIS, A.I. SAKHANENKO Remarks on Inequalities for Large Deviation Probabilities. *Theory of Probability and Its Applications*, 1986, pp.143-148.
- [10] S. RAHMANI, A. DAHMANI Exponential Inequalities for the Robbins-Monro's Algorithm Under Mixing Condition. *Communications in Statistics - Theory and Methods*. Volume 45, issue 2, 2016, pp. 520-528.
- [11] M.T. VASAN *Stochastic Approximation*, Cambridge University Press; Revised edition (June 3, 2004).
- [12] P. MAX L'approximation et l'optimisation stochastiques en économie : deux exemples. *Revue économique*, volume 24, numéro 1, 1973, pp.176-182.
- [13] C. SUQUET *Simulation*, Université des Sciences et Technologies de Lille, Agrégation Externe 2007-2008.