Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane MIRA de Bejaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse et Probabilités

Par

MEHENAOUI Naima
KHALFOUNE Samia

THÈME

Etude variationnelle du système d'élasticité linéaire

Soutenu publiquement, le 25 /05/2017 devant le jury composé de :

Mme	H. BECHIR	M. C. A	Université A. Mira de Béjaia	Présidente
Mme	S. TAS	Prof	Université A. Mira de Béjaia	Promotrice
Mr	B. KERAI	M. A. A	Université A. Mira de Béjaia	Examinateur

Remerciements

Tout d'abord, nous remercions Dieu, le tout puissant, de nous avoir aidé à accomplir ce modeste travail.

Nous adressons nos chaleureux remerciements et témoignons notre profonde reconnaissance à notre promotrice Mme S. TAS pour les conseils qu'elle n'a pas cessé de nous prodiguer, ses orientations, ses judicieuses remarques et sa disponibilité.

Nous remercions vivement Mme H. Bechir pour l'honneur qu'elle nous fait en présidant le jury de soutenance.

Nous tenons à remercier également Mr B. Kerai d'avoir bien voulu examiner ce travail ainsi que pour son aide et ses conseils forts utiles.

Enfin, nous témoignons notre gratitude à tous ceux qui nous ont aidé de près ou de loin à réaliser ce mémoire.

Dédicaces

Je dédie ce mémoire à :

Ma mère, pour son soutien, ses sacrifices, ses précieux conseils, son assistance et sa présence dans ma vie .

Mon père, pour les longues années de sacrifice et de privation afin de m'aider à avancer dans la vie.

Un grand merci donc à mes parents pour les valeurs inculquées et leur soutien permanent.

Ma soeur qui ne cesse d'être pour moi un exemple de persévérance, de courage et de générosité.

Mon adorable frère Said.

Toute ma grande famille.

Tous mes amis.

Mes professeurs.

Toute ma promotion de 2017.

KHALFOUNE Samia

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

Ma mère qui a tant oeuvré pour ma réussite.

Mon père, pour son soutien, ses sacrifices, ses précieux conseils et sa présence dans ma vie.

Ma grand mère

Mes deux frères.

Tous mes amis et camarades de promotion 2017.

MEHENAOUI Naima

Table des matières

Introduction

La modélisation mathématique a acquis une importance considérable, ces dernières décennies, dans de nombreux domaines notamment dans les applications industrielles et les sciences de l'ingénieur. Elle consiste à transformer un phénomène physique en des modèles abstraits accessibles à l'analyse et au calcul. La modélisation d'un problème réel utilise les lois de la physique (mécanique, thermodynamique, électromagnétisme, acoustique, etc.). Ces lois sont généralement, écrites sous forme de bilans qui se traduisent par des Equations aux Dérivées Partielles (EDP).

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'analyse mathématique de l'élasticité linéaire qui est un système d'équations aux dérivées partielles de type elliptique correspondant à un modèle physique stationnaire, c'est-à-dire indépendant du temps. Ce système a pour objectif d'étudier le comportement mécanique des solides déformables, considérés comme milieux continus, dont le matériau obéit à une loi constitutive linéaire réversible. En outre, les déformations et les déplacements provoqués par des actions extérieures sont considérés très faibles. Soulignons aussi que dans ce mémoire, nous nous attachons principalement à étudier les effets mécaniques (déformations, contraintes) se produisant dans les solides en déformation, en nous préoccupant assez peu des phénomènes thermiques qui peuvent se produire simultanément. De manière plus précise, nous allons supposer que la température n'influe pas sur les relations entre contraintes et déformations dans le solide. Dans ces conditions, nous décrivons les déformations des solides élastiques au moyen de la seule équation (mécanique) de conservation de la quantité de mouvement car elle est tout à fait découplée de l'équation (thermique) de conservation de l'énergie.

Nous exposons, en premier lieu, les définitions de différents types de tenseur qui sont primordiales pour la compréhension du problème d'élasticité ainsi que quelques rappels sur les espaces de Sobolev et la formulation variationnelles de problèmes aux limites elliptiques linéaires. Ensuite, nous montrons que le problème aux limites étudié est bien posé pour cette équation aux dérivées partielles elliptiques, c'est-à-dire qu'elle admet une solution unique qui dépend continûment des données. Nous montrons aussi que ces solutions minimisent une énergie correspondante. Nous considérons d'abord des conditions aux limites de type Dirichlet, puis des conditions mixtes. L'inégalité de Korn est l'ingrédient essentiel dans la démonstration de la coercivité de la forme bilinéaire associée au problème. Pour cela, nous nous appuyons sur l'approche variationnelle et nous faisons appel aux espaces de Sobolev le cadre le plus approprié pour l'étude des EDP en général.

Historique

C'est au début du XIX siècle qu'est née la théorie de l'élasticité, qui a rapidement attiré l'attention de nombreux savants et mathématiciens.

Il y a un siècle et demi ou même moins, des traités tels que ceux de Saint-Venant, de Love ou de Todhunter pouvaient contenir l'histoire du développement de cette discipline. Dans cette dernière décennie, l'ouvrage d'Amy Dahan a permis de rafraîchir les mémoires sur une partie de l'histoire de l'élasticité en France qui avait un lien étroit avec Cauchy. Tout au long du XIXe siècle, la théorie de l'élasticité a connu une période d'intense développement.

L'histoire de l'élasticité des solides est étroitement liée au développement des moyens mathématiques. Ce lien a suscité la mise au point de nouveaux outils mathématiques. Le développement de la théorie de l'élasticité est principalement dû à Navier, Poisson, Cauchy, Lamé, Kirchhoff, Maxwell, Clebsch et Thomson.

La théorie de l'élasticité peut se réduire à l'établissement des relations fondamentales liant ses différents paramètres physiques et à l'étude des conditions aux limites à l'aide des équations aux dérivées partielles, comme l'a démontré Cauchy. La théorie de l'élasticité des corps n'est pas une théorie mathématique, mais une branche de la mécanique qui, à son tour, représente une partie de la physique. Ce qui nous amène à tenir compte des différentes propriétés d'ordre pratique.

L'histoire des théories et des expériences, qui ont donné lieu au développement de la théorie de l'élasticité des solides, présente un très grand intérêt. Plusieurs théories physiques ont été utiles pour saisir la réalité du phénomène de l'élasticité. En effet, à travers les siècles, la théorie de l'élasticité des solides est passée par plusieurs étapes qui ont contribué à son développement et à son accomplissement.

Dans les années 1820, plusieurs savants français vont aborder le domaine de l'élasticité des solides. Il s'agit en premier lieu d'écrire les équations aux dérivées partielles qui définissent le mouvement des points d'un corps solide, c'est-à-dire son processus de déformation, quand ce corps est soumis à l'action d'un système de forces extérieures ou intérieures, ou quand il est en état de mouvement interne. La définition de la notion de pression, on dit aujourd'hui contrainte, se pose. On peut considérer que la théorie moderne de l'élasticité est née en 1821, quand Navier donna pour la première fois, dans son célèbre mémoire, les équations générales de l'équilibre et du mouvement d'un corps solide élastique. La plupart des problèmes que pose cette théorie ont déjà été partiellement résolus ou discutés dans des cas particuliers aux XVIIe et XVIIIe siècles ; de Galilée à Euler en passant par Hooke et les Bernoulli, plusieurs résultats d'un grand intérêt avaient été obtenus. Seulement, aucune théorie mathématique rigoureuse n'a été établie. Au XIX siècle, la loi de Hooke fut le point de départ de plusieurs recherches qui débouchèrent sur la naissance d'une vraie théorie mathématique de l'élasticité.

CHAPITRE 1

Préliminaires et outils de base

1.1 Tenseurs

1.1.1 Pourquoi parle-t-on de tenseur ?

Comment exprimer mathématiquement les contraintes qui s'exercent en chaque point d'un milieu continu (solide, fluide, etc.) ? Les scalaires permettent certes d'exprimer des pressions et les vecteurs des forces, mais ces entités mathématiques s'avèrent insuffisantes. Une contrainte en un point d'un milieu continu n'est pas une simple pression ni même représentable par un unique vecteur force.

Le mot tenseur vient donc bien de l'idée d'exprimer, entre autres, des sortes de tensions, des contraintes, etc. Mais la notion de tenseur se révèle d'une grande généralité, avec des applications dans bien d'autres domaines que la seule mécanique des milieux continus (électromagnétisme, relativité, géométrie différentielle).

1.1.2 Définition d'un tenseur

La notation tensorielle est une **nomenclature**, c'est-à-dire une façon systématique d'appeler les variables et les champs d'intérêt physique et mathématique. Elle permet de faire simplement des opérations sur nos équations de physique mathématique qui autrement seraient beaucoup plus lourde.

Une grandeur b_{ij} à deux indices qui est appliquée à un vecteur c_j, donne un autre vecteur a_i selon la loi

$$a_i = b_{ij} c_j$$

est un **tenseur du second ordre**. Un vecteur est encore appelé **tenseur du premier ordre** et un scalaire, **tenseur d'ordre 0**. Plus généralement, et par récurrence, une grandeur $b_{i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_l}$ à $(k+l)$ indices qui, appliquée à un tenseur d'ordre l, $c_{j_1 \ldots j_l}$, donne un tenseur d'ordre k, $a_{i_1 \ldots i_k}$ selon la loi

$$a_{i_1 \ldots i_k} = b_{i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_l} c_{j_1 \ldots j_l}$$

est un **tenseur d'ordre** $(k+l)$.

Le plus simple des tenseurs du second ordre est le tenseur de Kronecker, défini par

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

C'est bien un tenseur, car il applique un vecteur a_i sur lui-même :

$$a_i = \delta_{ij} a_j$$

Remarque 1.1.1 *Un scalaire, un vecteur, une forme linéaire, une forme bilinéaire, une application linéaire sont des tenseurs particuliers.*

1.1.3 Tenseur des déformations

Les déformations d'un objet sont mesurées à partir d'une position initiale, qui est généralement la position de repos dans laquelle aucune force n'est appliquée à l'objet.

Le champ vectoriel déplacement, généralement noté u, est, par définition pour chaque point, le vecteur reliant sa position au repos à sa position actuelle dans la configuration déformée.

On considère les premières dérivées spatiales de ce champ u à travers la matrice A qui est son gradient :

$$A = \mathrm{grad}\, u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_{x_1}}{\partial x_1} & \frac{\partial u_{x_1}}{\partial x_2} & . & . & \frac{\partial u_{x_1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_{x_2}}{\partial x_1} & \frac{\partial u_{x_2}}{\partial x_2} & . & . & \frac{\partial u_{x_2}}{\partial x_n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \frac{\partial u_{x_n}}{\partial x_1} & \frac{\partial u_{x_n}}{\partial x_2} & . & . & \frac{\partial u_{x_n}}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

A peut être écrite sous la forme d'une somme de deux matrices $n \times n$:

$$A = grad\ u = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathrm{grad}\, u + \mathrm{grad}\, u^T)}_{E} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathrm{grad}\, u - \mathrm{grad}\, u^T)}_{R}$$

E est une matrice symétrique tandis que R est antisymétrique et est liée au rotationnel $\mathrm{rot}\, u$ du champ de déplacement.

Définition 1.1.1 *La matrice E représente les déformations du matériau et définit le tenseur des déformations noté ε.*
On a donc

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_{x_1}}{\partial x_1} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_{x_1}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{x_2}}{\partial x_1}) & . & . & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_{x_1}}{\partial x_n} + \frac{\partial u_{x_n}}{\partial x_1}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u_{x_2}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{x_1}}{\partial x_2}) & \frac{\partial u_{x_2}}{\partial x_2} & . & . & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_{x_2}}{\partial x_n} + \frac{\partial u_{x_n}}{\partial x_2}) \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u_{x_n}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{x_1}}{\partial x_n}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_{x_n}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{x_2}}{\partial x_n}) & . & . & \frac{\partial u_{x_n}}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

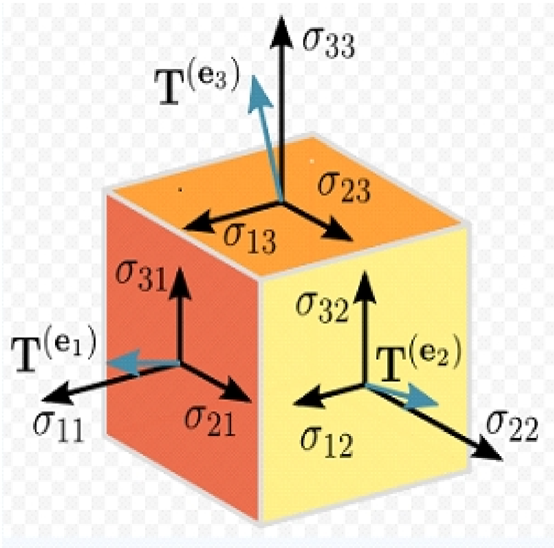
Les termes de la matrice peuvent s'écrire :

$$(\varepsilon)_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}), \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

1.1.4 Tenseur des contraintes

Après la description des déformations, nous introduisons le tenseur des contraintes qui va décrire en chaque point la répartition des forces internes.

Les contraintes représentent les efforts de cohésion dans un solide qui permettent à la matière de résister aux sollicitations. Si nous prenons un cube de matériel et le soumettons à une charge arbitraire, nous pouvons mesurer la contrainte sur plusieurs directions. Ces mesures forment un tenseur de second degré, le tenseur des contraintes.



Vecteur contrainte et tenseur des contraintes

Le vecteur contrainte caractérise les efforts de contact exercés à travers un élément de surface dS de normale $\vec{N}$ sur une partie D du milieu continu : le vecteur contrainte est défini par

$$\vec{T}(\vec{N}) = \lim_{dS \to D} \frac{d\vec{f}}{dS} \quad ; \quad d\vec{f} = \vec{T}(\vec{N})dD.$$

Pour connaître l'état de contrainte en un point donné, il faut connaître les vecteurs contraintes associés à toutes les facettes, c'est-à-dire à tout vecteur unitaire $\vec{N}$.

Il existe donc une application linéaire, le tenseur des contraintes, faisant passer $\vec{N}$ à $\vec{T}$

$$\vec{T} = \sigma \vec{N} \tag{1.1}$$

Définition 1.1.2 *Le tenseur des contraintes est une application linéaire de l'espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. Si l'on choisit une base orthonormée $\vec{e}_i$ cette application* *linéaire est représentée par une matrice d'éléments σ_{ij} $(i,j=1,...n)$ et la relation (1.1) donne la relation matricielle*

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ . \\ . \\ T_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & . & . & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & . & . & \sigma_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & . & . & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ . \\ . \\ N_n \end{bmatrix}$$

Le tenseur σ est un tenseur réel symétrique d'ordre 2 représentable par une matrice $n \times n$ symétrique.

1.1.5 Tenseur d'élasticité

Le comportement élastique est caractérisé par une relation linéaire entre contraintes et déformations. Cette relation s'écrit

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

ou inversement

$$\varepsilon_{ij} = \Lambda_{ijkl}\sigma_{kl}$$

où E_{ijkl} et Λ_{ijkl} sont les composantes de deux applications E et Λ, inverses l'une de l'autre, de l'espace des tenseurs symétriques dans lui-même. Ce sont **les tenseurs d'élasticité**. Souvent E est appelé **tenseur de rigidité** et Λ **tenseur de complaisance**. Compte-tenu de la symétrie des tenseurs des contraintes et des déformations, on doit avoir par exemple, pour E

$$E_{ijkl} = E_{jikl} \quad \text{et} \quad E_{ijlk} = E_{ijkl}$$

Si on ajoute de plus l'hypothèse thermodynamique (le tenseur d'élasticité est symétrique) alors on a

$$E_{ijkl} = E_{klij}$$

1.2 Quelques rappels sur les espaces de Sobolev

1.2.1 Espace $L^2(\Omega)$ et $(L^2(\Omega))^n$

Définition 1.2.1 *L'espace $L^2(\Omega)$ des fonctions mesurables et de carré intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, est un espace vectoriel muni du produit scalaire et de la norme associée: pour tout $f, g \in L^2(\Omega)$:*

$$(f,g)_{L^2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} f(x)g(x)dx, \qquad \|f\|_{L^2(\Omega)} = (\int\limits_{\Omega} |f(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 1.2.1 *([6]) L'espace $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire $(.,.)_{L^2(\Omega)}$ et de la norme $\|.\|_{L^2(\Omega)}$ est un espace de Hilbert.*

Définition 1.2.2 *Soit $f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, une fonction définie sur Ω à valeurs vectorielles dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$. On note $f = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ . \\ . \\ . \\ f_n(x) \end{pmatrix}$.*

L'espace $(L^2(\Omega))^n = \underbrace{L^2(\Omega) \times ... \times L^2(\Omega)}_{n \text{ fois}}$ est l'espace des fonction $f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ dont les composantes $(f_i)_{i=1,...n}$ sont dans $L^2(\Omega)$.

Pour faire de $(L^2(\Omega))^n$ un espace de Hilbert, on le munit du produit scalaire cartésien:

$$(f,g)_{(L^2(\Omega))^n} = \sum_{i=1}^{n} (f_i, g_i)_{L^2(\Omega)}$$

associé à la norme:

$$\|f\|_{(L^2(\Omega))^n} = \sqrt{\|f_1\|^2_{L^2(\Omega)} + ... + \|f_n\|^2_{L^2(\Omega)}}.$$

1.2.2 Espace de Sobolev $H^1(\Omega)$

On note $D(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω. Notons que les fonctions de $D(\Omega)$ s'annulent, ainsi que toutes leurs dérivées, sur le bord de Ω.

Théorème 1.2.1 *([6])*
L'espace $D(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, c'est-à-dire pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe une suite $f_n \in D(\Omega)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{L^2(\Omega)} = 0$$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in L^2(\Omega)$, u s'identifie à une distribution sur Ω, notée encore u (car $L^2(\Omega) \subset L^1{}_{loc}(\Omega) \subset D'(\Omega)$). On note $\dfrac{\partial u}{\partial x_j},\ \ j = 1, ...n$ les dérivées partielles premières de u au sens des distributions.

Définition 1.2.3 *On appelle "espace de Sobolev" d'ordre 1 sur Ω, l'espace*

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^2(\Omega) \qquad \forall j = 1, ...n \right\}.$$

On munit $H^1(\Omega)$ du produit scalaire, pour $u, v \in H^1(\Omega)$:

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega u(x)\bar{v}(x)dx + \sum_{j=1}^n \int\limits_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j}(x)dx$$

et de la norme correspondante

$$\begin{aligned}\|u\|_{H^1(\Omega)} &= (\int\limits_\Omega |u(x)|^2 dx + \sum_{j=1}^n \int\limits_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\int\limits_\Omega |u(x)|^2 dx + \sum_{j=1}^n \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

En physique ou en mécanique, l'espace de Sobolev est souvent appelé **espace d'énergie finie,** au sens où il est constitué des fonctions d'énergie finie (c'est-à-dire de norme $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ finie). Les fonctions d'énergie finie peuvent éventuellement être “singulières”, ce qui a un sens physique possible (concentration ou explosion locale de certaines grandeurs).

Proposition 1.2.2 *([6]) L'espace $H^1(\Omega)$, muni de la norme $\|.\|_{H^1(\Omega)}$, est un Hilbert.*

1.2.3 Espace de Sobolev $H^m(\Omega)$

On peut aisément généraliser la définition de l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ aux fonctions qui sont m fois dérivables au sens faible, $m \in \mathbb{N}$.

Définition 1.2.4 *Pour un entier $m \in \mathbb{N}$, l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ est défini par*

$$H^m(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) \colon \forall\alpha \ \in \mathbb{N}^N \ avec \ |\alpha| \leq m, \ \partial^\alpha v \in L^2(\Omega)\right\}$$

où la dérivée partielle $\partial^\alpha v$ est à prendre au sens faible et

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha n}} \quad , \quad |\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$$

On munit $H^m(\Omega)$ du produit scalaire : pour $u, v \in H^m(\Omega)$

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha u(x) \partial^\alpha v(x) \ dx$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = (\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha u(x) \partial^\alpha u(x) \ dx)^{1/2}$$

Proposition 1.2.3 *([6]) L'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$, munit de la norme$\|.\|_{H^m(\Omega)}$, est un espace de Hilbert.*

Les fonctions de $H^m(\Omega)$ ne sont pas toujours continues ou régulières (cela dépend de m et de la dimension n). Mais si m est suffisamment grand, alors toute fonction de $H^m(\Omega)$ est continue.

Pour $\Omega = \mathbb{R}^n$, il est possible de définir les espaces de Sobolev en utilisant la transformée de Fourier.

1.2.4 Espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$

Rappels sur la transformée de Fourier

Définition 1.2.5 *Soit $u \in S(\mathbb{R}^n)$*

$$S(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}^n),\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n,\ \lim_{|x| \to \infty} \left| x^\alpha D^\beta u(x) \right| = 0 \right\}.$$

On définit la transformée de Fourier de $u \in S(\mathbb{R}^n)$ par

$$\hat{u}(\xi) = F(u(\xi)) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \exp(-ix.\xi)\ dx,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Propriétés

1) $\forall u \in S(\mathbb{R}^n) : \hat{u} \in S(\mathbb{R}^n)$.

2) $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ est linéaire, bijective et bicontinue. Son inverse, noté $\bar{\mathcal{F}}$, est défini par :

$$\bar{\mathcal{F}} v(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} v(\xi) e^{ix\xi} d\xi \tag{TFI}$$

3) $\forall u \in S(\mathbb{R}^n), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, on a :

$$\mathcal{F}(D^\alpha u) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{u} \tag{R1}$$

$$\mathcal{F}(x^\alpha u) = i^{|\alpha|} D^\alpha \hat{u} \tag{R2}$$

Définition 1.2.6 *On définit la transformée de Fourier de toute distributions temperée $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ par :*

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

De même, la transformée de Fourier inverse de $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ est donnée par :

$$\left\langle \bar{\mathcal{F}}T, \varphi \right\rangle = \left\langle T, \bar{\mathcal{F}}\varphi \right\rangle, \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

$$\mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}T = \bar{\mathcal{F}}\mathcal{F}T = T, \quad \forall T \in S'(\mathbb{R}^n)$$

Propriétés

1) $\mathcal{F} : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$ est linéaire, bijective et bicontinue.

2) Les relations (R1) et (R2) sont vérifiées au sens des distributions, $\forall T \in S'(\mathbb{R}^n)$.

3) Si $u \in S'(\mathbb{R}^n) \cap L^1(R^n)$ alors les expressions de $\mathcal{F}u$ et $\bar{\mathcal{F}}u$ sont données explicitement par (TF) et (TFI). De plus, est une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}^n$.

Théorème 1.2.2 *(de Plancherel)*

Si $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ alors $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. De plus, l'application $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ est une isométrie. l'identité :

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

Théorème 1.2.3 *L'espace $H^m(\mathbb{R}^n)$ peut être défini par :*

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \left\{u \in L^2(\mathbb{R}^n)/(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n).\right\}$$

et la norme $\|.\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}$ est équivalente à la norme :

$$u \longmapsto (\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^{\,2})^m \, |\hat{u}(\xi)|^{\,2} d\xi)^{\frac{1}{2}}$$

Définition 1.2.7 *Pour $s \in \mathbb{R}$, l'espace $H^s(\mathbb{R}^n)$ est définit par :*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{u \in S^{'}(\mathbb{R}^n) \, : \, ((1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}) \in L^2(\mathbb{R}^n)\right\}.$$

On munit $H^s(\mathbb{R}^n)$ du produit scalaire :

$$(u \ , \ v)_s = ((1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u} \ , \ (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{v})_{L^2((\mathbb{R}^n)}$$

$$(u \ , \ v)_s = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \ \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)} \ d\xi$$

et de la norme associée

$$\|u\|_s = (\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \ \ |\hat{u}(\xi)|^2 \ \ d\xi)^{\frac{1}{2}}.$$

1.2.5 Espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$

Définition 1.2.8 *Soit $D(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω. L'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.*

$H_0^1(\Omega)$ est en fait le sous-espace de $H^1(\Omega)$ constitué des fonctions qui s'annulent sur le bord $(\partial\Omega)$ puisque tel est le cas des fonctions de $D(\Omega)$. En général, $H_0^1(\Omega)$ est strictement plus petit que $H^1(\Omega)$ car $D(\Omega)$ est un sous-espace strict de $D(\bar{\Omega})$. Une exception importante est le cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$: en effet, dans ce cas $\bar{\Omega} = \mathbb{R}^n = \Omega$ et $D(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}^n)$, donc, on a $H_0^1(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n)$. Cette exception se comprend aisément puisque l'espace entier $\mathbb{R}^n$ n'a pas de bord.

Proposition 1.2.4 *([6]) L'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, munit de la norme $\|.\|_{H^1(\Omega)}$, est un espace de Hilbert.*

Théorème 1.2.4 *([6]) (Inégalité de Poincaré)*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ borné dans au moins une direction de l'espace. Il existe une constante $c > 0$, telle que, pour toute fonction $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega |v(x)|^2 \, dx \leq c \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 \, dx.$$

1.2.6 Théorème de trace et formule de Green

Théorème 1.2.5 *([6])*
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de classe C^1. Alors $D(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$ et l'application restriction γ_0 définie par

$$\begin{aligned} \gamma_0 : (D(\bar{\Omega}), \|.\|_{H^1(\Omega)}) &\to (C^0(\Gamma), \|.\|_{L^2(\Gamma)}) \\ v &\longmapsto \gamma_0(v) = v_{|\Gamma} \end{aligned}$$

est linéaire et continue (pour $D(\bar{\Omega})$ muni de la norme $\|.\|_{H^1(\Omega)}$ et $C^0(\Gamma)$ muni de la norme $\|.\|_{L^2(\Gamma)}$), et γ_0 se prolonge par continuité de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$.
On définit ainsi :

$$\begin{aligned} \gamma_0 : H^1(\Omega) &\to L^2(\Gamma) \\ v &\longmapsto \gamma_0(v) = v_{|\Gamma} \end{aligned}$$

et la continuité s'écrit :

$$\exists c > 0,\ \forall v \in H^1(\Omega), \quad \|\gamma_0(v)\|_{L^2(\Gamma)} \leq c\,\|v\|_{H^1(\Omega)} .$$

γ_0 est appelée "application trace".

Théorème 1.2.6 *([6]) (Formule de Green)*
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de classe C^1 par morceaux. Alors si u et v sont des fonctions de $H^1(\Omega)$, on a :

$$\int_\Omega u(\frac{\partial v}{\partial x_j})dx = -\int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial x_j})v dx + \int_\Gamma uvN_j d\sigma, \qquad j = 1, ..., n$$

où N_j est la j-ème composante de la normale extérieure.

Théorème 1.2.7 *([1]) (Formule de la divergence)*
Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$, N sa normale extérieure. Soit $u \in (C^1(\Omega))^n$ un champ de vecteur défini sur Ω. On a :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} u dx = \int_{\Gamma} u.N d\sigma$$

1.2.7 Un résultat de compacité

Rappelons tout d'abord que, dans un espace de Hilbert de dimension infinie, il n'est pas vrai que, de toute suite bornée, on puisse extraire une sous-suite convergente au contraire de ce qui se passe en dimension finie.

Théorème 1.2.8 *([6]) (de Rellich)*
Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ borné et de classe C^1 alors de toute suite bornée de $H^1(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite convergente dans $L^2(\Omega)$ (on dit que l'injection canonique de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte).

Remarque 1.2.1 *Si on remplace $H^1(\Omega)$ par $H_0^1(\Omega)$ alors non seulement le Théorème (1.2.4) de Rellich reste vrai, mais en plus il n'est pas nécessaire de supposer que l'ouvert Ω est régulier.*

1.3 Problèmes aux limites elliptiques linéaires

1.3.1 Formulation variationnelle

Nous appelons "formulation variationnelle" tout problème du type suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H \text{ tel que :} \\ a(u,v) = \langle l, v \rangle \ , \forall v \in H. \end{cases}$$

où :

i) H est un espace de Hilbert (réel) dont le produit scalaire est noté $(.,.)_H$ et la norme associée $\|.\|_H$.

ii) $a(.,.)$ est une forme bilinéaire sur $H \times H$, qui de plus est continue sur $H \times H$ c'est à dire :

$$\exists C_a > 0, \forall u, v \in H \ : \ |a(u,v)| \leq C_a \|u\|_H \|v\|_H .$$

iii) l est une forme linéaire sur H. De plus, l est continue sur H c'est à dire :

$$\exists C_l > 0, \forall v \in H \ : \ |l(v)| \leq C_l \|v\|_H .$$

Définition 1.3.1 *On dit qu'une forme bilinéaire $a(.,.) : H \times H \to R$ est* coercive *si :*

$$\exists \alpha > 0 \ \textit{tel que} \ \forall v \in H \qquad a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2{}_H$$

1.3.2 Théorème de Lax-Milgram

Théorème 1.3.1 *([1]) (Lax-Milgram)*
Soit H un espace de Hilbert (réel). Soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire sur $H \times H$, continue et coercive.
i) Pour tout $l \in H'$, il existe un unique $u \in H$, solution de

$$a(u,v) = \langle l, v \rangle , \quad \forall v \in H.$$

De plus, il existe une constante $C > 0$, indépendante de l telle que

$$\|u\|_H \leq C \|l\|_{H'} \tag{1.2}$$

ii) Si de plus $a(.,.)$ est symétrique alors l'unique solution u de (1.2) est caractérisée par

$$J(u) = \min_{v \in H} J(v)$$

où

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - \langle l, v \rangle$$

CHAPITRE 2

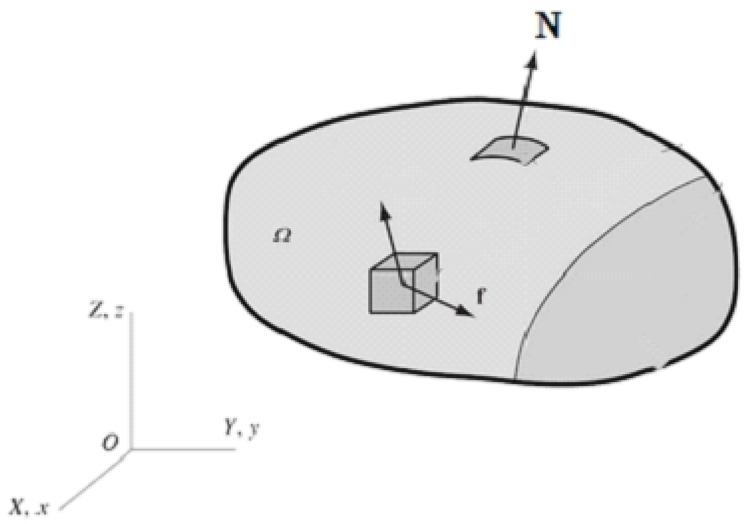
Modélisation du problème d'élasticité

Lorsqu'un solide est soumis à des forces extérieures, il peut se déplacer et ou se déformer. Un solide est dit élastique si, conformément à l'intuition, il reprend spontanément sa forme de départ lorsque les contraintes extérieures sont supprimées. Ainsi, les déformations des solides élastiques sont par définition réversibles.

Un système d'élasticité linéaire est représenté par un ensemble d'équations aux dérivées partielles. Ces équations modélisent les déformations d'un matériau solide élastique sous l'hypothèse de petits déplacements et de petites déformations, cette hypothèse permet d'obtenir des équations linéaires ; d'où le nom d'élasticité linéaire. De plus, dans la théorie de l'élasticité linéaire, les déformations et les contraintes sont supposées liées linéairement. La linéarité est entendue au sens d'une relation de proportionnalité entre la sollicitation et la réponse du milieu.

2.1 Equations générales

Le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3) qui représente un solide soumis à une force volumique $f(x)$. Le déplacement d'un point matériel M_0 (dans une configuration de référence) sous l'action des forces extérieures f est défini par $u = \overrightarrow{M_0M}$, où M est la position actuelle du point M_0. Le problème consiste donc à calculer les composantes du déplacement $u(x)$ que subit un corps élastique soumis à diverses sollicitations.



Nous écrivons l'équilibre d'une partie quelconque D de Ω. Cela fait intervenir le tenseur des contraintes σ, défini implicitement en exprimant que la force exercée sur un élément de surface dS, de normale unitaire N est

$$TdS = \sigma NdS$$

L'équation d'équilibre s'écrit

$$\int_{\partial D} \sigma(u).NdS + \int_{D} fdx = 0$$

et en utilisant la formule de la divergence, on obtient la forme ponctuelle

$$\operatorname{div}(\sigma(u)) + f = 0 \tag{1}$$

où $\operatorname{div}(\sigma(u))$ est le vecteur de composantes

$$(\operatorname{div}(\sigma(u)))_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j}$$

Nous relions maintenant le tenseur des contraintes aux tenseur des déformations. Une telle relation est encore une **loi de comportement**. Nous nous restreindrons ici à l'élasticité linéaire. Dans ce cadre, la relation entre ces deux tenseurs est linéaire, donc s'exprime elle-même à l'aide d'un tenseur d'ordre 4, le tenseur d'élasticité :

$$\sigma(u)_{i,j} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u) \quad 1 \leq i, j \leq n$$

En pratique, cette loi est souvent trop générale et il est possible de la simplifier en considérant un matériau **homogène** (il a les mêmes propriétés en tout point) et **isotrope** (en un point donné, il a les mêmes propriétés dans toutes les directions). La loi linéaire de comportement élastique reliant le tenseur des contraintes au tenseur des déformations est alors :

$$\sigma(u) = 2\mu\varepsilon(u) + \lambda\ trace(\varepsilon(u))\ I. \tag{2}$$

Cette loi linéaire porte le nom de **la loi de Hooke**, où I est le tenseur identité d'ordre 2, μ et λ sont des coefficients indépendants appelés **les constantes de Lamé** et qui sont spécifiques à chaque matériau. En fait, grâce aux tests mécaniques permettant de mesurer les coefficients E et υ propres à chaque matériau, les constantes μ et λ sont données par les relations

$$\mu = \frac{E}{2(1+\upsilon)} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{E\upsilon}{(1-2\upsilon)(1+\upsilon)}$$

où E est **le module de Young** qui correspond à **la rigidité** du matériau, alors que υ est le **coefficient de Poisson** et il mesure le degré de **compressibilité** du matériau. Donc, dans le cas isotrope, le tenseur d'élasticité E est défini par

$$E_{ijkl} = \mu(I_{ik}I_{jl} + I_{il}I_{jk}) + \lambda I_{ij}I_{lk}.$$

Le problème consiste donc à déterminer un champ de déplacement u vérifiant l'équation d'équilibre (1) et la loi de comportement (2). Bien entendu, ces équations doivent être complétées par des conditions aux limites convenables sur le bord Γ de Ω. Celles-ci peuvent être de deux types :

Déplacement imposé : Sur une partie du bord Γ_0, le déplacement est une fonction donnée

$$u = u_0 \quad \text{sur } \Gamma_0. \tag{3}$$

Une telle condition aux limites s'appelle une condition essentielle.

Contrainte imposée : Sur une partie du bord Γ_N, la contrainte normale est imposée

$$\sigma(u).N = g_N \quad \text{sur } \Gamma_N. \tag{4}$$

Cette condition aux limites s'appelle une condition naturelle.

Finalement, déterminer le déplacement u revient à résoudre le système d'équations aux dérivées partielles (1) et (2), avec les conditions aux limites (3) et (4).

Ainsi, le problème aux limites considéré est :

$$(P)\left\{\begin{array}{c} -div(2\mu\varepsilon(u) + \lambda\ trace(\varepsilon(u))\ I) = f \quad \text{dans } \Omega \\ u = u_0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \\ \sigma(u).N = g_N \quad \text{sur } \Gamma_N \end{array}\right.$$

CHAPITRE 3

Formulation variationnelle du problème de l'élasticité linéaire

3.1 Problème de Dirichlet homogène

Soit Ω un ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^n (n = 2$ ou $n = 3$ dans les applications) de frontière Γ, C^1 par morceaux. On considère le problème suivant : étant donnée $f \in (L^2(\Omega))^n$, trouver u solution de

$$(P_1) \begin{cases} -div(2\mu\varepsilon(u) + \lambda\ trace(\varepsilon(u))\ I) = f \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Les équations du problème (P_1) décrivent les petits déplacements u à partir de l'état naturel d'un solide élastique homogène et isotrope soumis à une densité volumique f dans Ω, les déplacements u étant fixés nuls sur le bord de Γ.

Munissons les espaces $(L^2(\Omega))^n$ et $(H^1(\Omega))^n$ des normes hilbertiennes suivantes

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} = (\sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}$$

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = (\sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2_{H^1(\Omega)})^{\frac{1}{2}}$$

En vue d'établir l'existence et l'unicité de la solution de (P_1) et afin d'appliquer le théorème de Lax-Milgram, il faut vérifier la coercivité de la forme bilinéaire. Pour cela, on a besoin d'un lemme qui est un cas particulièrement simple de l'inégalité de Korn qu'on verra un peu plus loin.

Lemme 3.1.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour toute fonction $v \in ({H^1}_0(\Omega))^n$, on a*

$$\|\nabla v\|_{(L^2(\Omega))^n} \leq \sqrt{2}\, \|\varepsilon(v)\|_{L^2(\Omega)} \tag{1.1}$$

Démonstration.

Soit $v \in (D(\Omega))^n$. on a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\varepsilon(v)|^2 \, dx &= \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega (\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})^2 dx \\
&= \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega (\left|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|^2 + \left|\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right|^2 + 2\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_j}{\partial x_i})dx
\end{aligned}$$

puisque $\varepsilon(u)_{ij}$ est symétrique, donc

$$\int_\Omega |\varepsilon(v)|^2 \, dx = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega (\left|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|^2 + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_j}{\partial x_i})dx$$

Intégrons par partie deux fois

$$\int_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega v_i \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j \partial x_i} dx = \int_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\frac{\partial v_j}{\partial x_j} dx$$

Finalement

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\varepsilon(v)|^2 \, dx &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega (\left|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|^2 + \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\frac{\partial v_j}{\partial x_j})dx \\
&= \frac{1}{2} \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \left|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|^2 + \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right|^2 dx \\
&\geq \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx
\end{aligned}$$

Donc

$$\sqrt{2}\,\|\varepsilon(v)\|_{L^2(\Omega)} \geq \|\nabla v\|_{(L^2(\Omega))^n} \quad \forall v \in v \in (D(\Omega))^n$$

Par densité de $v \in D(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, on en déduit (1.1). ■

Démontrons maintenant le théorème 3.1.1.

Théorème 3.1.1 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $\Gamma = \partial\Omega$. Soit $f \in (L^2(\Omega))^n$. Il existe une unique solution faible $u \in ({H^1}_0(\Omega))^n$ de (P_1).*

Démonstration.

$1^{ère}$ Etape : Recherche de la formulation variationnelle.

En utilisant le fait que

$$div\sigma = (\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j})_{1\leq i,j\leq n}$$

$$\sigma_{ij} = \mu(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) + \lambda(\mathrm{div}(u))$$

et $trace(\varepsilon(u)) = \mathrm{div}(u)$, on déduit les équations de (P_1), pour $1 \leq i \leq n$

$$-\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) + \lambda(\mathrm{div}(u))\delta_{ij}\right] = f_i \tag{1.2}$$

Pour trouver la formulation variationnelle, on multiplie chaque équation (1.2) par une fonction test $v_i \in H_0^1(\Omega)$ et on intègre sur Ω, on obtient:

$$-\sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) + \lambda(\mathrm{div}(u))\delta_{ij}\right] v_i dx = \int_{\Omega} f_i v_i dx$$

En appliquant la formule de Green, on trouve

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} \left[\mu(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})\right] \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx - \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma} \left[\mu(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})\right] v_i N_j d\sigma$$

$$+\sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} \lambda(\mathrm{div}(u)) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx - \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma} \lambda(\mathrm{div}(u)) v_i N_j d\sigma = \int_{\Omega} f_i v_i dx$$

Or, $v_i = 0$ sur Γ, donc

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} \left[\mu(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})\right] \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx + \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} \lambda(\mathrm{div}(u)) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} f_i v_i dx$$

On somme alors ces équations pour i allant de 1 à n, afin de faire apparaître la divergence de la fonction $v = (v_1, ..., v_n)$ et de simplifier la première intégrale car

$$\sum_{i,j=1}^{n}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}) = 2\varepsilon(u).\varepsilon(v)$$

On obtient alors la formulation variationnelle :

$$(FV)\begin{cases} \text{Trouver } u \in (H_0^1(\Omega))^n \text{ tel que } \forall v \in (H_0^1(\Omega))^n \\ \int\limits_{\Omega} 2\mu\varepsilon(u).\varepsilon(v)dx + \int\limits_{\Omega} \lambda \operatorname{div}(u) \operatorname{div}(v)dx = \int\limits_{\Omega} f.vdx \end{cases}$$

2ème Etape : Résolution du problème varaitionnel.

On pose

$$a(u,v) = \int\limits_{\Omega} 2\mu\varepsilon(u).\varepsilon(v)dx + \int\limits_{\Omega} \lambda \operatorname{div}(u) \operatorname{div}(v)dx$$
$$L(v) = \int\limits_{\Omega} f.vdx$$

$a(.,.)$ est une forme bilinéaire continue sur $(H_0^1(\Omega))^n \times (H_0^1(\Omega))^n$.

L est une forme linéaire continue sur $(H_0^1(\Omega))^n$.

Montrons la coercivité en trois étapes.

Premièrement, montrons que

$$\int\limits_{\Omega} 2\mu\,|\varepsilon(v)|^2 dx + \int\limits_{\Omega} \lambda\,|\operatorname{div}(v)|^2 dx \geq \nu \int\limits_{\Omega} |\varepsilon(v)|^2 dx \tag{1.3}$$

avec $\nu = \min(2\mu, (2\mu + n\lambda))$.

Pour cela, on utilise une inégalité algébrique: si on note

$$A.B = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$$

le produit scalaire usuel des matrices symétriques, on peut décomposer toute matrice réelle symétrique A sous la forme

$$A = A^d + A^h \quad \text{avec } A^d = A - \frac{1}{n}\operatorname{tr} A \operatorname{Id} \text{ et } A^h = \frac{1}{n}\operatorname{tr} A \operatorname{Id}$$

de telle maniére que

$$A^d.A^h = 0 \text{ et } |A|^2 = \left|A^d\right|^2 + \left|A^h\right|^2.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
2\mu\,|A|^2 + \lambda\,(\operatorname{tr} A)^2 &= 2\mu\left|A^d + A^h\right|^2 + \lambda\,(\operatorname{tr} A)^2 \\
&= 2\mu\left(\left|A^d\right|^2 + \left|A^h\right|^2\right) + \lambda\,(\operatorname{tr} A)^2 \\
&= 2\mu\left|A^d\right|^2 + (2\mu + n\lambda)\left|A^h\right|^2 \\
&\geq \min(2\mu, 2\mu + n\lambda)\left(\left|A^d\right|^2 + \left|A^h\right|^2\right) \\
&\geq \nu\,|A|^2
\end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat pour $A = \varepsilon(v)$.

Deuxièment, on utilise le lemme (3.1.1) qui donne une constante $C > 0$ telle que, pour tout $v \in (H_0^1(\Omega))^n$

$$\int_\Omega |\varepsilon(v)|^2 dx \geq C \int_\Omega |\nabla v|^2 dx. \tag{1.4}$$

Troisièment, on utilise l'inégalité de Poincaré (composante par composante) qui donne une constante $C_a > 0$ telle que, pour tout $v \in (H_0^1(\Omega))^n$

$$\int_\Omega |v|^2 dx \leq C_a \int_\Omega |\nabla v|^2 dx. \tag{1.5}$$

Au total, ces trois inégalités (1.3),(1.4) et (1.5) conduisent à la coercivité

$$\begin{aligned}
a(v,v) &= \int_\Omega 2\mu\,|\varepsilon(v)|^2 dx + \int_\Omega \lambda\,|\operatorname{div}(v)|^2 dx \\
&\geq \nu \int_\Omega |\varepsilon(v)|^2 dx \\
&\geq C\nu \int_\Omega |\nabla v|^2 dx \\
&\geq C\nu C_a \int_\Omega |v|^2 dx \\
&\geq C_p\,\|v\|^2_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après le théorème de Lax-Milgram, il existe une unique solution $u \in (H^1(\Omega))^n$ solution faible de la formulation variationnelle (FV).

3ème Etape : Equivalence avec le problème aux limites.

La troisième étape consiste à vérifier qu'en résolvant la formulation variationnelle (FV), on a bien résolu le problème aux limites (P_1).

On a

$$\int_\Omega 2\mu\varepsilon(u).\varepsilon(v)dx + \int_\Omega \lambda \operatorname{div}(u) \operatorname{div}(v)dx = \int_\Omega f.vdx \quad , \forall v \in (H_0^1(\Omega))^n$$

ou encore

$$\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \left[\mu(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})\right] \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx + \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \lambda(\operatorname{div}(u)) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta_{ij} dx = \sum_{i=1}^n \int_\Omega f_i v_i dx \quad , \ \forall v_i \in H_0^1(\Omega)$$

En appliquant la formule de Green pour $v_i \in H_0^1(\Omega)$, on obtient :

$$-\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) + \lambda(\operatorname{div}(u))\delta_{ij}\right] v_i dx = \sum_{i=1}^n \int_\Omega f_i v_i dx$$

ou encore

$$\int_\Omega -div(2\mu\varepsilon(u) + \lambda \operatorname{div}(u)\ I).vdx = \int_\Omega f.vdx \quad , \forall v \in (H_0^1(\Omega))^n$$

Puisque $\operatorname{div}(u) = tr(\varepsilon(u))$, on a

$$\int_\Omega -div(2\mu\varepsilon(u) + \lambda tr(\varepsilon(u))\ I).vdx = \int_\Omega f.vdx \ , \quad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^n.$$

Comme $D(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, alors en particulier pour $\varphi \in (D(\Omega))^n$, on a

$$\int_\Omega -div(2\mu\varepsilon(u) + \lambda tr(\varepsilon(u))\ I).\varphi dx = \int_\Omega f.\varphi dx$$

Or, $D(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, donc :

$$\int_\Omega -div(2\mu\varepsilon(u) + \lambda tr(\varepsilon(u))\ I).\varphi dx = \int_\Omega f.\varphi dx \quad \forall \varphi \in (L^2(\Omega))^n$$

Par suite

$$-div(2\mu\varepsilon(u) + \lambda tr(\varepsilon(u))\ I) = f \quad \text{dans } (L^2(\Omega))^n$$

ou encore

$$-div(2\mu\varepsilon(u) + \lambda tr(\varepsilon(u))\ I) = f \quad \text{presque partout dans } \Omega.$$

D'autre part : $u \in (H_0^1(\Omega))^n \Rightarrow u = 0$ sur Γ.

On a donc bien retrouvé l'équation et la condition aux limites (P_1).

Ainsi la solution faible u vérifie bien (P_1). ■

Proposition 3.1.1 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, et $f \in (L^2(\Omega))^n$. L'application qui à $f \in (L^2(\Omega))^n$ fait correspondre la solution unique $u \in (H_0^1(\Omega))^n$ de la formulation variationnelle de (P_1) est linéaire et continue de $(L^2(\Omega))^n$ dans $(H_0^1(\Omega))^n$. En particulier, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $f \in (L^2(\Omega))^n$,*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \tag{1.6}$$

Démonstration. La linéarité de cette application est évidente. La continuité est une conséquence du théorème de Lax-Milgram. En effet, on a

$$a(u,u) = \int_\Omega f.udx \geq C_p \|u\|^2{}_{H^1(\Omega)}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

D'où le résultat. ■

Remarque 3.1.1 *L'inégalité (1.6) est ce qu'on appelle une **estimation d'énergie**. Elle garantit que l'énergie de la solution est contrôlée par celle de la donnée. Les estimations d'énergie sont très naturelles d'un point de vue physique et très utiles d'un point de vue mathématique.*

L'analyse du problème aux limites (P_1) avec une condition aux limites de Dirichlet sur tout le bord $\partial\Omega$ est un peu trompeuse par sa simplicité. En effet, dès que l'on introduit une autre condition aux limites (par exemple, de Neumann) sur une partie du bord, la démonstration de la coercivité de la formulation variationnelle devient beaucoup plus difficile car on doit remplacer l'inégalité élémentaire du Lemme 3.1.1 par sa généralisation, nettement plus technique, dite **inégalité de Korn**. Rappelons qu'on ne peut pas, en général, se contenter d'une condition aux limites de Dirichlet sur l'intégralité du bord $\partial\Omega$ car elle s'interprète comme le fait que le solide est fixé et immobile sur son bord. En pratique, tout le bord n'est pas bloqué et souvent une partie du bord est libre de bouger, ou bien des forces surfaciques sont appliquées sur une autre partie. Les conditions aux limites de Neumann s'écrivent $\sigma(u).N = h$ sur Γ_N où h est une fonction à valeurs vectorielles. La condition de Neumann s'interprète en disant que h est une force appliquée sur le bord (plus précisément, h est une densité de forces surfacique, homogène à une pression, tandis que f est une densité de forces volumique). Si $h = 0$, aucune force ne s'applique et le bord peut bouger sans restriction : on dit que le bord est libre.

Nous allons maintenant aborder le cas général du problème d'élasticité linéaire pour un matériau anisotrope, et nous allons considérer le système d'élasticité avec les conditions aux limites mixtes (un mélange de Dirichlet et de Neumann).

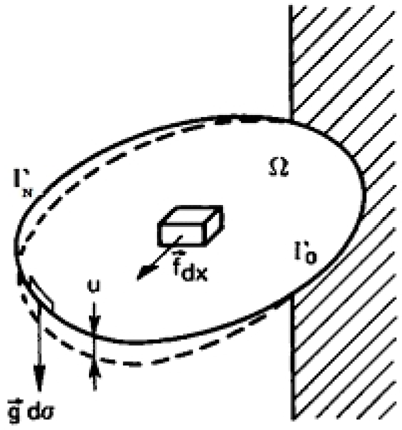
3.2 Problème mixte

Soit Ω un ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^n$ $(n = 2$ ou $3)$, de frontière Γ, C^1 par morceaux. Soit Γ_0 une partie de mesure superficielle strictement positive, et soit Γ_N son complémentaire dans Γ. Considérons le problème en déplacement u suivant :

$$(P_2)\begin{cases} -\operatorname{div}(\sigma(u)) = f & \text{dans } \Omega \\ u = u_0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \sigma(u).N = h & \text{sur } \Gamma_N \end{cases}$$

où la frontière du domaine Ω est donnée par $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_N$ et le vecteur N représente la normale unitaire extérieure sur l'interface Γ_N. Ce système d'équations est celui que satisfait, en petit déplacement, un corps occupant dans la configuration initiale un domaine Ω, et soumis à l'action des forces volumiques f s'exerçant dans Ω, et des forces surfaciques h

s'appliquant sur la partie Γ_N de la frontière de Ω. Le corps subit un déplacement imposé u_0 sur sa frontière Γ_0.



Sans perte de généralité, nous traitons dans cette section, le cas homogène $u_0 = 0$, les autres cas s'en déduisent aisément.

On considère une relation linéaire plus générale entre le tenseur des contraints σ_{ij} et le tenseur des déformations linéaire ε_{ij} :

$$\sigma_{ij}(u) = \sum_{k,l} E_{ijkl}\, \varepsilon_{kl}\, (u)$$

Munissons les espaces $(L^2(\Omega))^n$ et $(H^1(\Omega))^n$ des normes hilbertiennes suivantes

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} = (\sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}$$

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = (\sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2_{H^1(\Omega)})^{\frac{1}{2}}$$

On pose

$$V = \left\{ v \in (H^1(\Omega))^n \ : v = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \ \right\} = (H^1_{\Gamma_0}(\Omega))^n \ .$$

V est un espace de Hilbert. En effet, l'application

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma_0)$$

est linéaire et continue. Or, $V = \ker(\gamma_0)$. Donc V est un sous espace fermé de $(H^1(\Omega))^n$ .D'où : V est un Hilbert.

Théorème 3.2.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ borné, connexe de frontière Γ, C^1 par morceaux, et $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_N$ avec mes $(\Gamma_0) > 0$. La semi-norme $|v|_{H^1(\Omega)} = \|\nabla v\|_{(L^2\,(\Gamma))^n}$ définit une norme sur $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ équivalente à la norme induite par $\|.\|_{H^1(\Omega)}$. On note*

$$\forall v \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) : \|v\|_{H^1_{\Gamma_0}(\Omega)} = \|\nabla v\|_{(L^2\,(\Gamma))^n}$$

et

$$(u, v)_{H^1_{\Gamma_0}(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}$$

définit un produit scalaire sur $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$.

Démonstration. On vérifie que $|v|_{H^1(\Omega)}$ est une norme sur $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$: c'est une semi-norme et

$$|v|_{H^1(\Omega)} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x_i} = 0 \text{ pour tout } i = 1, ...n$$

D'où v est constante (presque partout) sur Ω qui est connexe. Puisque $mes(\Gamma_0) > 0$, on déduit lorsque $v \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ que $v = 0$ presque partout dans Ω.
Montrons qu'il existe deux constante $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telle que

$$C_1 \|v\|_{H^1(\Omega)} < \|\nabla v\|_{(L^2\,(\Omega))^n} < C_2 \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Trivialement $C_2 = 1$. Il reste à vérifier l'existence de C_1. Supposons le contraire : il existe une suite de fonctions (u_n) de $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ telle que :

$$\frac{1}{n} \|u_n\|_{H^1(\Omega)} > \|\nabla u\|_{(L^2\,(\Omega))^n}$$

On pose :

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{H^1(\Omega)}}$$

telle que :

$$\begin{cases} \|v_n\|_{H^1(\Omega)} = 1 \\ \|\nabla v\|_{(L^2\,(\Omega))^n} < \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

Donc, on peut extraire une sous suite noté encore (v_n) qui converge faiblement vers v dans $H^1(\Omega)$. Sachant que Ω est borné et régulier, le théorème de Rellich indique que l'injection canonique de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte. Donc (v_n) converge fortement vers v dans $L^2(\Omega)$. En particulier (v_n) est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$:

$$\|v_n - v_m\|_{L^2(\Omega)} = 0 \text{ quand } n, m \to \infty$$

On en déduit avec $\|\nabla v\|_{(L^2\,(\Omega))^n} < \dfrac{1}{n}$ que

$$\|v_n - v_k\|^2_{H^1(\Omega)} = \|v_n - v_k\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla(v_n - v_k)\|^2 \underset{n,m\to\infty}{\to} 0 + 0 = 0$$

et (v_n) est une suite de Cauchy dans $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$. $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ est complet pour la norme $\|.\|_{H^1(\Omega)}$(car fermé dans $H^1(\Omega)$ qui est complet), et (v_n) converge vers un élément $w \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ tel que $\nabla w = 0$. D'où $w = 0$ puisque $mes(\Gamma_0) \neq 0$. Ce qui n'est pas compatible avec $\|w\|_{H^1(\Omega)} = 1$, d'où l'existence de $C_1 > 0$. ■

Si la fonction $f \in (L^2\,(\Omega))^n$ et $h \in (L^2\,(\Gamma))^n$, et si les conditions de symétrie suivantes:

$$E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{ijlk} \qquad 1 \leq i, j, k, l \leq n$$

sont satisfaites alors le tenseur des contraintes σ est symétrique.

Pour trouver la formulation variationnelle du problème (P_2), on multiplie la première équation de (P_2) par une fonction test v qui s'annule sur Γ_0, c'est à dire $v \in V$ et on intègre sur Ω, on obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega - \operatorname{div}(\sigma(u)).v dx &= \int_\Omega f.v dx \\ -\sum_{i,j} \int_\Omega \frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j} v_i dx &= \int_\Omega f.v dx \end{aligned} \tag{2.1}$$

On suppose $u \in (H^2(\Omega))^n$ alors $\forall\ v \in (H^1(\Omega))^n$, on a d'après la formule de Green

$$\sum_{i,j} \int_\Omega (\sigma_{ij}(u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\ dx = -\sum_{i,j} \int_\Omega (\frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j}) v_i\ dx\ + \sum_{i,j} \int_\Gamma (\sigma_{ij}(u) N_j v_j))\ d\sigma$$

Ainsi, l'équation (2.1) devient :

$$\sum_{i,j} \int_\Omega (\sigma_{ij}(u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx = \int_\Omega f.v dx + \sum_{i,j} \int_\Gamma (\sigma_{ij}(u) N_j v_j))\ d\sigma,\ \forall v \in V$$

Or, $v = 0$ sur Γ_0 ce qui implique

$$\sum_{i,j} \int_{\Omega} (\sigma_{ij}(u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}) \ dx = \int_{\Omega} f.vdx + \sum_{i,j} \int_{\Gamma_N} (\sigma_{ij}(u) N_j v_j)) \ d\sigma, \ \forall v \in V$$

En tenant compte de la condition au limites $\sigma(u).N = h$ sur Γ_N, on obtient

$$\sum_{i,j} \int_{\Omega} (\sigma_{ij}(u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \ dx = \int_{\Omega} f.vdx + \int_{\Gamma_N} h.v \ d\sigma \qquad \forall v \in V$$

Grâce à la symétrie de σ, ona

$$\sum_{i,j} \int_{\Omega} (\sigma_{ij}(u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}) dx = \sum_{i,j} \int_{\Omega} (\sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) \ dx$$

Ainsi, la formulation variationnelle est

$$(FV) \begin{cases} \text{Trouver } u \in V, \text{ tel que } \forall v \in V \\ \sum\limits_{i,j} \int_{\Omega} (\sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) \ dx = \int\limits_{\Omega} f.vdx + \int_{\Gamma_N} h.v \ d\sigma \end{cases}$$

On pose :

$$a(u,v) = \sum_{i,j} \int_{\Omega} (\sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij} \ (v)) \ dx$$

et

$$L(v) = \int_{\Omega} f.v \ dx + \int_{\Gamma_N} h.v \ d\delta$$

Nous allons maintenant énoncer et démontrer un résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème variationnel (FV) de l'élasticité linéaire, pour cela on doit démontrer un résultat très important qui est "l'inégalité de Korn".

On démontre l'inégalité de Korn en s'appuyant sur le lemme de Lions suivant.

Lemme 3.2.1 *(Lions)*
Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$ et v un élément de $H^{-1}(\Omega)$ tel que

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} \in H^{-1}(\Omega), \ \forall i = 1, ..., n.$$

alors $v \in L^2(\Omega)$.

Démonstration. On introduit l'espace

$$X(\Omega) = \left\{ v \in H^{-1}(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in H^{-1}(\Omega), \ \forall i \right\}$$

qui est un Hilbert pour la norme

$$(\|v\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|^2_{H^{-1}(\Omega)})^{\frac{1}{2}}.$$

On montre en plusieurs étapes que $X(\Omega) = L^2(\Omega)$.

1) Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$, le lemme de Lions se déduit rapidement d'un calcul de transformé de Fourier. En effet une distribution tempérée v est dans $H^{-1}(\Omega)$ si et seulement si $(1 + |\xi|^2)^{-\frac{1}{2}} \hat{v} \in L^2(\Omega)$.

Par conséquent,

$$v \in H^{-1}(\Omega), \ \frac{\partial v}{\partial x_i} \in H^{-1}(\Omega) \Leftrightarrow \int_{\Omega} \frac{|\hat{v}(\xi)|^2}{1 + |\xi|^2} d\xi < +\infty \text{ et } \int_{\Omega} \frac{\xi_i{}^2 \, |\hat{v}(\xi)|^2}{1 + |\xi|^2} d\xi < +\infty$$

En sommant toutes les intégrales, on obtient

$$\int_{\Omega} |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi < +\infty$$

c'est-à-dire $\hat{v} \in L^2(\Omega)$. D'où $v \in L^2(\Omega)$ (d'après le théorème de Plancherel).

2) Il suffit de montrer que (2.2) pour le demi-espace

$$\Omega = \left\{ (x', x_n) : x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \ x_n > 0 \right\}.$$

En effet, soient α_0, $\alpha_1, ..., \alpha_N$ tels que

$$\alpha_0 \in D(\Omega) \ , \ \alpha_1 \in D(\bar{\Omega}) \quad , \ i = 1, ..., N, \quad \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$$

et $\text{supp}(\alpha_i) \subset$ carte locale définissant Γ. Notons que

$$\varphi \in D(\bar{\Omega}), \ v \to \varphi v \text{ l'application de } X(\Omega) \text{ à lui-même.}$$

On peut écrire aussi

$$v = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i v$$

On peut considérer $\alpha_0 v$ comme un élément de $X(\mathbb{R}^n)$, en utilisant la première étape $\alpha_0 v \in L^2(\Omega)$. On aura ce résultat si on montre que

$$\alpha_i v \in L^2(\Omega)$$

Si on suppose que Γ est une variété continuellement différentiable de dimension $n-1$, puis l'image de $\alpha_i v$ est dans l'espace $X(\Omega)$ avec $\Omega = \left\{(x^{'}, x_n) : x^{'} \in \mathbb{R}^{n-1},\ x_n > 0\right\}$, ce qui achève la preuve de cette étape.

3) On introduit

$$H_0^1(0,\infty,L^2(\mathbb{R}^{n-1})) = \left\{\varphi|\varphi, \frac{d\varphi}{dx_n} \in L^2(0,\infty,L^2(\mathbb{R}^{n-1})), \varphi(x',0) = 0\right\}$$

où $x' = (x_1, x_2, ..., x_{n-1})$.

$$H^{-1}(0,\infty,L^2(\mathbb{R}^{n-1})) \text{ dual de } H_0^1(0,\infty,L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$$

où $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ est identifié à son dual,

$$Y(\Omega) = \left\{v|v, \frac{dv}{dx_n} \in H^1(0,\infty,L^2(\mathbb{R}^{n-1}))\right\}$$

On montre que $Y(\Omega)$ est dense dans $X(\Omega)$. En effet, soit ρ_m une suite régularisante dans $D(\mathbb{R}^{n-1})$. Pour $v \in X(\Omega)$, on définit

$$v_m = v(x') * \rho_m,$$

ou plus précisément

$$v_m = \int_{\mathbb{R}^2} v(x'-y',x_n)\rho_m(y')dy'.$$

Alors comme $m \to \infty$, on a $v_m \to v$ dans $X(\Omega)$. Notez que v_m est en particulier contenu dans $Y(\Omega)$.

4) $D(\bar{\Omega})$ est dense dans $X(\Omega)$. Il suffit de montrer la densité dans $Y(\Omega)$. Comme une simple conséquence du théorème de Hahn-Banach, il suffit de montrer que pour toute fonctionnelle M qui est nule sur $D(\bar{\Omega})$, est nule sur un espace entier $Y(\Omega)$. Soit $v \longmapsto M(v)$ une forme linéaire continue dans $Y(\Omega)$ et donc de la forme

$$M(v) = \int_0^\infty \left[(f,v) + \left(g, \frac{dv}{dx_n}\right)\right] dx_n$$

$$f, g \in H_0^1(0,\infty,L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$$

On suppose que $M = 0$ sur $D(\bar{\Omega})$. Si $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ indique la continuité de f et g en 0 pour $x_n < 0$, la supposition est équivalente à

$$\tilde{f} - \frac{d\tilde{g}}{dx_n} = 0$$

Donc $\dfrac{d\tilde{g}}{dx_n} \in H_0^1(0, \infty, L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$, mais alors

$$\int_0^\infty \left(g, \frac{dv}{dx_n}\right) dx_n = -\int_0^\infty \left(\frac{dg}{dx_n}, v\right) dx_n \quad \forall v \in Y(\Omega)$$

Donc $M = 0$ sur $Y(\Omega)$.

5) Pour $v \in D(\bar{\Omega})$ on pose

$$Pv(x) = \begin{cases} v(x) \quad si\ x_n > 0 \\ a_1 v(x', -x_n) + a_2 v(x', -2x_n) \end{cases}$$

où $a_1 + a_2 = 1, a_1 + \dfrac{a_2}{2} = 1$. On vérifie que $v \longmapsto Pv$ est continue dans $D(\bar{\Omega})$, avec la topologie induite par $X(\Omega)$ dans $X(\mathbb{R}^n)$. En utilisant cela, et du point précédent, nous pouvons étendre P à une application linéaire continu de $X(\Omega) \to X(\mathbb{R}^n)$ et tel que P restreint à Ω équivaut à v. Ensuite, pour $v \in X(\Omega)$, $Pv \in X(\mathbb{R}^n)$, donc comme conséquence de l'étape 1), $Pv \in L^2(\mathbb{R}^n)$ donc

$$v \in L^2(\Omega)$$

Il reste à montrer la continuité de P.

$$\frac{\partial}{\partial x_n} Pv = \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_n} \quad x_n > 0 \\ -a_1 \dfrac{\partial v}{\partial x_n}(x', -x_n) - 2a_2 \dfrac{\partial v}{\partial x_n}(x', -2x_n) \quad x_n < 0 \end{cases}$$

On pose $\dfrac{\partial v}{\partial x_n} = w$, on introduit

$$Qw = \begin{cases} w(x) \quad si \quad x_n > 0 \\ -a_1 w(x', -x_n) - 2a_2 w(x', -2x_n) \quad x_n < 0 \end{cases}$$

On a besoin de montrer que P (resp Q) est continu dans $D(\bar{\Omega})$ avec la topologie induite par $H^{-1}(\Omega)$ dans $H^{-1}(\mathbb{R}^n)$, donc par transposition, ${}^tP$ (resp ${}^tQ$) est continu en tant que fonctionnelle $H^1(\mathbb{R}^n)$ dans $H_0^1(\Omega)$. Maintenant, pour $H^1(\mathbb{R}^n)$, nous avons

$$
\begin{aligned}
{}^tP\varphi(x) &= \varphi(x) + a_1\varphi(x', -x_n) + \frac{1}{2}a_2\varphi(x', -\frac{x_n}{2}),\\
{}^tQ\varphi(x) &= \varphi(x) - a_1\varphi(x', -x_n) - a_2\varphi(x', -\frac{x_n}{2})
\end{aligned}
$$

Alors

$$
{}^tP\varphi(x', 0) =^t Q\varphi(x', 0) = 0
$$

d'où le résultat. ∎

On adopte dans l'énoncé et la démonstration du théorème de l'inégalité de Korn la convention d'Einstein de sommation des indices répétés.

Théorème 3.2.2 *(L'inégalité de Korn)*
Soit Ω un ouvert borné et régulier. Il existe une constante $C>0$ (dépendant de Ω) tel que:

$$
\int_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\, \varepsilon_{ij}(v)dx + \int_\Omega v_i v_i dx \geq C\,\|v\|_H^2 \quad , \quad \forall v \in (H^1(\Omega))^n
$$

Notons que l'inégalité de Korn est loin d'être une trivialité car le premier membre de l'inégalité ne fait intervenir que certaines combinaisons linéaires des dérivées partielles premières $\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}$ (en dimension $n = 2$, $\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial v_2}{\partial x_2}$ et $\dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2})$) tandis que le second membre de l'inégalité fait intervenir toutes les dérivées $\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}$. On s'attend donc plutôt à ce que $\varepsilon(v)$ contienne moins d'informations que ∇u, et il est étonnant de voir que l'on peut néanmoins contrôler dens L^2 dans toutes les dérivées partielles de v à l'aide de ses seules combinaisons linéaires, et de v elle-même. La raison profonde est que, contrairement aux apparences, $\varepsilon(v)$ contient bien toute l'information de ∇v, puisque grâce à l'identité (2.3), on peut récupérer toutes les dérivées secondes de v à partir de $\varepsilon(v)$.

Démonstration.
Soit E l'espace des fonction $v \in (L^2(\Omega))^n$ telles que:

$$
\varepsilon_{ij}(v) \in (L^2(\Omega))^n, \quad \forall i, j.
$$

E est un espace de Hilbert pour la norme

$$
(\int_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\, \varepsilon_{ij}(v)dx + \int_\Omega v_i v_i dx)^{1/2}.
$$

En utilisant la définition de ε_{ij} nous constatons que

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j}\varepsilon_{ik}(v) + \frac{\partial}{\partial x_k}\varepsilon_{ij}(v) - \frac{\partial}{\partial x_i}\varepsilon_{jk}(v) \tag{2.3}$$

Si $v \in E$ alors $\varepsilon_{ij} \in L^2(\Omega)$. Par conséquent, $\dfrac{\partial}{\partial x_k}\varepsilon_{ij}(v) \in H^{-1}(\Omega)$. Donc, en utilisant l'égalité établie, on a

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} \in H^{-1}(\Omega) \quad \forall i, j, k$$

En appliquant le Lemme 3.2.1 à $\dfrac{\partial v_i}{\partial x_k}$, on voit que

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \in L^2(\Omega), \quad \forall i, k.$$

Ainsi

$$v \in (H^1(\Omega))^n.$$

Nous avons l'égalié algébrique $E = (H^1(\Omega))^n$ et puisque l'injection

$$(H^1(\Omega))^n \subset E$$

est continue, on applique le théorème du graphe fermé pour obtenir un isomorphisme des espaces de Banach. ■

Remarque 3.2.1 *L'interprétation mécanique de l'inégalité de Korn est la suivante : l'énergie élastique, proportionnelle à la norme du tenseur des déformations $\varepsilon(u)$ dans $L^2(\Omega)$ contrôle la norme du déplacement u dans $(H^1(\Omega))^n$, à l'addition près de la norme de u dans $L^2(\Omega)$.*

Pour montrer que l'inégalite de Korn entraine la coercivité du problème variationnel de l'élasticité linéarisée, nous allons avoir besoin du lemme suivant.

Lemme 3.2.2 *Soit $v \in D'(\Omega)$ une distribution telle que $\varepsilon(v) = 0$. Alors v est un déplacement rigide infinitésimal*

$$v(x) = a \wedge x + b \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{R}^n.$$

Démonstration. En effet, si $\varepsilon(v) = 0$, on déduit de l'identité (2.3) que $\dfrac{\partial v}{\partial x_j \partial x_k} = 0$ pour tout j, k.

Par conséquent, v est une fonction affine de la forme

$$v(x) = Ax + b \;\text{ où } A \in M_n \text{ et } b \in \mathbb{R}^n.$$

Comme $\nabla v = A$, on déduit que : $A^T + A = 0$. Donc A est antisymétrique.

On peut par conséquent représenter son action sur un vecteur x comme un produit vectoriel par un vecteur a. ■

La loi de comportement $\sigma_{ij} = \sum_{k,l} E_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u)$ correspond à un matériau anisotrope. Lorsqu'en outre ce matériau est non homogène, les coefficients d'élasticité E_{ijkl} dépendent de x ; on suppose alors que les fonctions E_{ijkl} appartiennent à $L^\infty(\Omega)$, $1 \le i,j,k,l \le n$ et que la propriété d'ellipticité est uniforme, c'est-à-dire qu'il existe une constante $\alpha > 0$ indépendante de x. On a alors

Théorème 3.2.3 *(Existence et unicité de la solution)*
Si le tenseur d'élasticité $E \in (L^\infty(\Omega))^n$, vérifie la propriété de symétrie

$$E_{ijkl}(x) = E_{jikl}(x) = E_{ijlk}(x), \quad 1 \le i,j,k,l \le n, \;\; \forall x \in \Omega$$

et si la condition d'ellipticité est satisfaite

$$\exists \alpha \ge 0 \;\; \textit{tel que} \sum_{i,j,k,l} E_{ijkl}\, \varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \ge \alpha \sum_{k,l} (\varepsilon_{kl})^2$$

pour tout tenseur symétrique ε, alors le problème variationnel (FV)

$$(FV) \begin{cases} \textit{Trouver } u \in V \textit{ tel que} \\ a(u,v) = L(v), \forall v \in V. \end{cases}$$

admet une solution unique dans V.
Si de plus, on a

$$E_{ijkl} = E_{klij} \;\; 1 \le i,j,k,l \le n$$

alors la solution de (FV) correspond à l'unique solution du problème de minimisation

$$\min_{v \in V} J(v)$$

où

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v)$$

Démonstration.

$a(.,.)$ est une forme bilinéaire sur $V \times V$ et L est une forme linéaire sur V.

1) Montrons la coercivité

$$\begin{aligned}
a(u,u) &= \sum_{i,j} \int_{\Omega_1} (\sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(u))\ dx \\
&= \sum_{i,j} \int_{\Omega} (\sum_{k,l} E_{ijkl}\ \varepsilon_{kl}\ (u))\ \varepsilon_{ij}\ (u)\ dx \\
&= \alpha \int_{\Omega} (\sum_{i,j,k,l} E_{ijkl}\ \varepsilon_{kl}\ (u))\ \varepsilon_{ij}\ (u)\ dx \\
&\geq \alpha\ \int_{\Omega} \sum_{k,l} (\ \varepsilon_{kl}\ (u))^2 dx \\
&\geq \alpha\ \sum_{i,j} \|\varepsilon_{ij}\ \|^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

Pour simplifier la notation, on met : $\|\varepsilon(u)\| = \sum_{i,j} \|\varepsilon_{ij}\ \|^2_{L^2(\Omega)}$. Donc :

$$a(u,u) \geq \alpha \|\varepsilon(u)\|$$

Pour montrer que $a(.,.)$ est coercive, il suffit de trouver $C_p > 0$ tel que

$$\|\varepsilon(u)\| \geq C_p \|u\|^2_V$$

On raisonne par l'absurde. On suppose donc qu'il existe une suite (u_n) de V telle que

$$\begin{cases} \|\varepsilon(u_n)\| \to 0 \quad \text{quand } n \to \infty \\ \quad\quad \text{et } \|u_n\|_{H^1(\Omega)} = 1 \end{cases}$$

Comme la suite (u_n) est bornée dans $(H^1(\Omega))^n$, on peut extraire une sous suite notée (u_n) encore telle que

$$u_n \to u \quad \text{faiblement dans } (H^1(\Omega))^n.$$

La trace étant continue, on a aussi $u = 0$ sur Γ_0, c'est-à-dire $u \in V$. De plus :

$$\|\varepsilon(u_n)\| \to \varepsilon(u) \;\; \text{faiblement dans } (L^2(\Omega))^n.$$

Par ailleurs, la première partie de notre hypothèse est que

$$\|\varepsilon(u_n)\| \to 0 \quad \text{fortement dans } (L^2(\Omega))^n.$$

On déduit donc que $\varepsilon(u) = 0$.

Par le lemme 3.2.2, il vient que v est un déplacement rigide infinitésimal. Or, un déplacement infinitésimal ne peut s'annuler que

a) sur une droite si $a \neq 0$

b) nulle part si $a = 0$ et $b \neq 0$

c) partout si $a = b = 0$.

Comme il s'annule sur une partie du bord qui est de mesure positive, on est nécessairement dans la situation c), c'est à dire que $u = 0$.

On utilise le théorème de Rellich, pour déduire que $u_n \to 0$ fortement dans $(L^2(\Omega))^n$. Par l'inégalité de Korn, il vient que

$$\nabla u_n \to 0 \quad \text{fortement dans } (L^2(\Omega))^n,$$

d'où finalement $u_n \to 0$ fortement dans $(H^1(\Omega))^n$. Ceci contredit la seconde partie de notre hypothèse.

La forme bilinéaire $a(.,.)$ est donc coercive.

2) Montrons la continuité de $a(.,.)$.

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= \left| \sum_{i,j} \int_{\Omega} (\sum_{k,l} E_{ijkl}\, \varepsilon_{kl}\,(u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\, dx \right| \\
&\leq \sum_{i,j,k,l} \int_{\Omega} |E_{ijkl}\, \varepsilon_{kl}\,(u)| \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right| dx \\
&\leq \|E\|_\infty \sum_{i,j,k,l} \int_{\Omega} \left| \varepsilon_{kl}\,(u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right| dx \\
&\leq C(\Omega) \|u\|_V \|v\|_V
\end{aligned}$$

La forme bilinéaire $a(.,.)$ est donc continue sur V.

3) Montrons la continuité de L.

$$\begin{aligned}
|L(v)| &= \left| \int_{\Omega} f.vdx + \int_{\Omega} h.vd\sigma \right| \\
&\leq \left| \int_{\Omega} f.vdx \right| + \left| \int_{\Omega} h.vd\sigma \right|
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|h\|_{L^2(\Gamma)} \|v\|_{L^2(\Gamma)} .$$

Or, d'après le théorème 1.2.2 l'application trace $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ est continue et

$$\|v\|_{L^2(\Gamma)} \leq c \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
|L(v)| &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + c \|h\|_{L^2(\Gamma)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \\
&\leq \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + c \|h\|_{L^2(\Gamma)}\right) \|v\|_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

donc L est une forme linéaire continue sur V.

On peut aisément conclure en utilisant le théorème de Lax-Milgram qu'il existe une unique solution faible $u \in V$. De plus, si le tenseur E est tel que

$$E_{ijkl}\,(x) = E_{klij}\,(x),\ \forall\ x \in \Omega$$

alors la forme bilinéaire $a(.,.)$ est symétrique. En effet

$$\begin{aligned}
a(u,v) &= \sum_{i,j} \int_{\Omega_1} (\sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v))\ dx \\
&= \sum_{i,j} \int_{\Omega} (\sum_{k,l} E_{ijkl}\ \varepsilon_{kl}\ (u))\ \varepsilon_{ij}\ (v)\ dx \\
&= \sum_{i,j} \int_{\Omega} (E_{ijkl}\ \varepsilon_{kl}\ (u))\ \varepsilon_{ij}\ (v)\ dx \\
&= \sum_{k,l} \int_{\Omega} (\sum_{i,j} E_{klij}\ \varepsilon_{ij}\ (v))\ \varepsilon_{kl}(u)\ dx \\
&= \sum_{k,l} \int_{\Omega} (\sigma_{ij}(v))\varepsilon_{kl}(u)\ dx \\
&= a(v,u)
\end{aligned}$$

Dans ce cas, l'équation variationnelle $a(v,u) = L(v)$, $\forall\ v \in V$ correspond à la condition d'optimalité de minimisation

$$\min_{v \in V}\ (\frac{1}{2}a(v,v) - L(v)). \tag{2.4}$$

Finalement, on montre que la solution unique de (FV) est bien une solution du problème aux limites (P_2).

En effet, grâce à la symétrie de σ, on a

$$a(u,v) = \sum_{i,j} \int_{\Omega} (\sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}\ (v))\ dx = \sum_{i,j} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\ dx$$

Soit $\varphi \in (D(\Omega))^n$. Alors,

$$a(u,\varphi) = \sum_{i,j} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u)\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\ dx = \int_{\Omega} f.\varphi\ dx + \int_{\Gamma_N} h.\varphi\ d\sigma$$

et comme la fonction test φ est nulle sur Γ_N, alors

$$\sum_{i,j} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u)\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\ dx = \int_{\Omega} f.\varphi\ dx \tag{2.5}$$

En appliquant la formule de Green, on a

$$\sum_{i,j} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u)\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx = \sum_{i,j} \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j}\varphi_i dx = -\int_{\Omega} \mathrm{div}(\sigma(u)).\varphi\ dx$$

Ainsi, (2.5) devient

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma(u)).\varphi \; dx = \int_{\Omega} f.\varphi \; dx$$

ce qui implique

$$-\operatorname{div}(\sigma(u)) = f \quad \text{ dans } (L^2(\Omega))^n.$$

Comme $\quad f \in (L^2(\Omega))^n$ alors

$$-\operatorname{div}(\sigma(u)) = f \quad \text{ presque partout dans } \Omega.$$

Soit $v \in (H^1_{\Gamma_0}(\Omega))^n$, d'après la formule de Green, on a

$$-\sum_{i,j}\int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j} v_i dx = \sum_{i,j}\int_{\Omega} \sigma_{ij}(u)\frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx - \sum_{i,j}\int_{\Gamma} \sigma_{ij}(u) N_i v_j d\sigma.$$

Or

$$\sum_{i,j} \frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j} dx = \operatorname{div}(\sigma(u))$$

Donc

$$-\int\limits_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma(u)).v dx = \sum_{i,j}\int\limits_{\Omega} \sigma_{ij}(u)\frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx - \sum_{i,j}\int\limits_{\Gamma} \sigma_{ij}(u) N_i v_j d\sigma.$$

Par suite

$$a(u,v) = -\int\limits_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma(u)).v dx + \sum_{i,j}\int\limits_{\Gamma} \sigma_{ij}(u) N_i v_j d\sigma = \int\limits_{\Omega} f.v \; dx + \int\limits_{\Gamma_N} h.v \; d\sigma.$$

Comme $-\operatorname{div}(\sigma(u)) = f \quad$ presque partout dans Ω, alors

$$\sum_{i,j}\int\limits_{\Gamma} \sigma_{ij}(u) N_i v_j d\sigma = \int\limits_{\Gamma_N} h.v \; d\sigma.$$

$$\sum_{i,j}\int\limits_{\Gamma_N} \sigma_{ij}(u) N_i v_j d\sigma + \sum_{i,j}\int\limits_{\Gamma_0} \sigma_{ij}(u) N_i v_j d\sigma = \int\limits_{\Gamma_N} h.v \; d\sigma.$$

$$\int\limits_{\Gamma_N} \sigma(u).N.v d\sigma + \int\limits_{\Gamma_0} \sigma(u).N.v d\sigma = \int\limits_{\Gamma_N} h.v \; d\sigma.$$

Comme $v = 0$ sur Γ_0, on a

$$\int\limits_{\Gamma_N} \sigma(u).N.v d\sigma = \int\limits_{\Gamma_N} h.v \; d\sigma.$$

D'où :

$$h = \sigma(u).N \quad \text{preque partout sur } \Gamma_N$$

Enfin, comme $u \in V = (H^1{}_{\Gamma_0}(\Omega))^n$, et que Ω est un ouvert régulier, la trace de u est bien définie et $u = 0$ presque partout sur Γ_0. Ainsi, la solution faible $u \in V$ est bien une solution du problème (P_2). ■

Remarque 3.2.2 *L'interprétation de l'égalité (2.4) est la suivante. La solution de la formulation variationnelle (FV) réalise le minimum d'une énergie mécanique. En termes mécaniques, $J(v)$ est la somme de* ***l'énergie de déformation***

$$\frac{1}{2}(\sum_{i,j}\int_{\Omega_1}(\sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(u))\ dx)$$

et de ***l'énergie potentielle des forces extérieures*** *(ou travail des forces extérieures au signe près)*

$$-\int_{\Omega} f.udx - \int_{\Gamma_N} h.ud\sigma.$$

Proposition 3.2.1 *L'application de $(L^2(\Omega))^n \times (L^2(\Gamma))^n$ dans $(H^1(\Omega))^n$ qui à f fait correspondre u, unique solution faible de problème aux limites (P_2) est linéaire continue.*

Démonstration.

Il est clair que $(f, g) \to (L^2(\Omega))^n \times (L^2(\Gamma))^n$ est linéaire. Pour montrer qu'elle est continue de $(L^2(\Omega))^n \times (L^2(\Gamma))^n$ dans $(H^1(\Omega))^n$, on prend $v = u$ dans la formulation variationnelle (FV) et on utilise la coercivité de la forme bilinéaire, on obtient :

$$a(u, u) = \sum_{i,j}\int_{\Omega}(\sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(u)\ dx = \int_{\Omega} f.udx + \int_{\Gamma_N} h.ud\sigma \geq C_p \left\|u\right\|^2_{H^1(\Omega)}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left\|u\right\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{C_p}(\left\|f\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|u\right\|_{L^2(\Omega)} + \left\|h\right\|_{L^2(\Gamma)}\left\|u\right\|_{L^2(\Gamma)}).$$

Grâce au théorème de trace, on a

$$\left\|u\right\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C(\left\|f\right\|_{L^2(\Omega)} + \left\|h\right\|_{L^2(\Gamma)})\left\|u\right\|_{H^1(\Omega)}.$$

Donc

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|h\|_{L^2(\Gamma)}) \|u\|_{H^1(\Omega)} \, .$$

Ce qui prouve la continuité. ■

Remarque 3.2.3 *La formulation variationnelle n'est rien d'autre que **le principe des travaux virtuels** en mécanique. Poursuivant cette analogie, l'espace V est l'espace des **déplacements** v **cinématiquement admissibles**, et l'espace des tenseurs symétriques $\sigma \in (L^2(\Omega))^n$, tels que $-div\sigma = f$ dans Ω et $\sigma.N = h$ sur Γ_N , est celui des tenseurs de **contraintes statiquement admissibles**.*

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons montré que le problème d'élasticité linéaire est bien posé, c'est-à-dire, nous avons montré l'existence et l'unicité de la solution ainsi que la stabilité de celle-ci par rapport à des perturbations des données, en appliquant l'approche variationnelle. En premier lieu, nous avons établi la formulation variationnelle, puis nous avons résolu la formulation variationnelle en utilisant le théorème de Lax-Milgram, afin d'appliquer ce théorème, la seule hypothèse non triviale à vérifier porte sur la coercivité de la forme bilinéaire $a(.,.)$, nous avons réglé le problème en démontrant l'inégalité de Korn. Enfin, nous avons interprété la formulation variationnelle pour vérifier qu'on a bien résolu le problème aux limites de l'élasticité.

L'approche variationnelle s'avère riche et puissante, elle permet de construire la méthode des éléments finis, fournissant ainsi un moyen d'approcher la solution qui, bien souvent, n'est pas calculable explicitement.

L'élasticité linéaire ne représente qu'un comportement simplifié très particulier des solides. Dans la nature, la plupart des problèmes rencontrés obéissent à des lois de comportement non linéaires, c'est-à-dire le tenseur des contrainte σ est une fonction non linéaire du tenseur des déformation $\varepsilon(u)$ dans le cadre de l'élasticité non linéaire en petits déplacements. Il en résulte que les équations correspondantes de l'équilibre sont non linéaires, contrairement aux équations rencontrées dans l'élasticité linéaire. Les phénomènes mécaniques non linéaires sont un domaine très actif actuellement de la mécanique des solides, en liaison avec la recherche des matériaux nouveaux (polymères, matériaux composites, $\ldots$) et de l'étude de leurs propriétés mécaniques.

Bibliographie

[1] ALLAIRE G., Analyse numérique et optimisation, Editions de l'Ecole polytechnique, Palaiseau (2005).

[2] BONY J.-M., Cours d'analyse. Théorie des distributions et analyse de Fourier, Editions de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau (2001).

[3] Brézis H., Analyse fonctionnelle, Masson, Paris (1983).

[4] Lions J. L. , Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles, Presses de l'Univ. de Montréal (1965).

[5] RAVIART P.-A.,THOMAS J.-M., Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Masson, Paris (1983).

[6] Cours des espaces de Sobolev et de formulation variationnelle du master 1 et du master 2.