

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane MIRA de Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'Etudes

En vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse et probabilités

Thème

**Quelques éléments de la théorie du point fixe
positif**

Présenté par :

Mr BENLASSOUS Salah

Mr TAREZOUT Mahdi

Encadré par :

M^{me} KHELOUFI Karima

Devant le jury :

Mr A. BERBOUCHA Maître de conférences U. Béjaïa Président

M^{me} S. ALLILI- ZAHAR Maître de conférences U. Béjaïa Examinatrice

M^{me} K. KHELOUFI Maître de conférences U. Béjaïa Promotrice

Promotion Juin 2012

Remerciements

Au terme de ce travail, nous tenons à remercier très vivement M^{me} Kheloufi, née Mebarki Karima, notre promotrice pour ses précieux conseils, sa constante disponibilité, qu'elle trouve ici l'expression de nos sincères remerciements.

Nous remercions également les membres du jury: M^r Ahmed BERBOUCHA et M^{me} Samira ZAHAR epx ALLILI, pour avoir accepté de juger notre travail.

Nous tenons à remercier d'avantage, tous ceux qui nous ont encouragé à continuer nos études, surtout l'ensemble des enseignants du département de mathématiques.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à:

Mes chers parents qui étaient toujours attentifs affectueux et compréhensifs qui m'ont soutenu durant les laborieuses années de mes études, à qui je témoigne toute ma gratitude.

Mes sœurs: Hayat, Nora, Karima et mon frère Fatah.

Tous mes amis surtout Rafik.

Mon cher binôme Salah.

Toute ma famille chacun par son nom.

Tous les étudiants de notre département, en particulier notre promotion.

Mahdi.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à:

Mes parents

Mes frères et mes sœurs

Tous mes enseignants

Mes camarades et mes amis surtout Moulai

Mon cher binôme Mahdi.

Toute ma famille chacun par son nom.

Tous les étudiants de notre département, en particulier notre promotion.

Salah.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Indice du point fixe	4
1.1 Les cônes	4
1.2 Le degré topologique	10
1.2.1 Degré topologique de Brouwer	10
1.2.2 Degré topologique de Leray-Schauder, 1934 [13]	19
1.3 Indice du point fixe	24
1.3.1 Axiomes de l'indice du point fixe	25
1.3.2 Lemmes fondamentaux	29
2 Quelques théorèmes du point fixe sur les cônes	36
2.1 Théorèmes du point fixe d'expansion et de compression d'un cône	36
2.1.1 Théorème du point fixe de Krasnosel'skii	36
2.1.2 Théorème du point fixe d'expansion et de compression d'un cône de type norme	40
2.1.3 Théorème du point fixe d'expansion et de compression d'un cône de type fonctionnel	41
2.2 Théorèmes d'existence des points fixes multiples	45
2.2.1 Théorème des points fixes multiples dû à H.Amann	45
2.2.2 Théorèmes des points fixes multiples de Leggett-Williams	47

3 Applications à des problèmes aux limites de type Dirichlet	53
3.1 Application du théorème du point fixe d'expansion et de compression d'un cône de type norme	54
3.2 Application du théorème des points fixes multiples de Leggett-Williams . .	58
3.3 Application du théorème du point fixe d'expansion et de compression d'un cône de type fonctionnel	62
Annexes	72
Bibliographie	76

Introduction générale

L'objectif de ce travail est de présenter quelques théorèmes du point fixe sur les cônes en introduisant la théorie de l'indice du point fixe et de donner ensuite quelques applications à des problèmes aux limites associés à certains types d'équations différentielles ordinaires. Beaucoup de problèmes en analyse et dans les applications peuvent être réduits à l'étude de l'ensemble de solutions d'une équation de la forme $f(x) = y_0$ dans un espace approprié. La théorie du degré topologique est un moyen d'examiner cet ensemble de solutions et obtenir des informations sur l'existence des solutions, leurs nombre et leurs nature. Cette théorie est utilisée aussi dans l'étude des équations différentielles ordinaires et des équations aux dérivées partielles. Plusieurs de ces applications impliquent l'usage des théorèmes du point fixe convenables; le degré topologique fournit une technique naturelle pour présenter de tels théorèmes.

Dans ce mémoire, on commence par définir le degré topologique $deg(f, \Omega, y_0)$ dans le cas le plus simple où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et f est continue différentiable. Comme les espaces seront généralisés, des restrictions seront mises sur les fonctions. Cependant, en relation avec les fonctions non linéaires dans les espaces de Banach ordonnés, il est naturel de considérer des fonctions définies sur des sous-ensembles ouverts d'un cône. Si le cône n'a pas de points intérieurs, la plupart des cônes positifs en dimension infinie ont ce défaut; le degré de Leray-Schauder n'est pas immédiatement applicable. Mais à cause du fait que le cône est un rétracté de l'espace de Banach qui le contient, il est possible, d'après le théorème d'extension de Dugundji, de définir un nombre entier $i(f, \Omega, X)$ appelé indice du point fixe de f sur Ω par rapport à X tel que X soit un rétracté de l'espace de Banach qui le contient, Ω un ouvert borné dans X et $f : \overline{\Omega} \rightarrow X$ une fonction compacte sans points

fixes sur $\partial\Omega$. Notons que cet indice du point fixe est une extension du degré topologique de Leray-Schauder.

Dans ce mémoire, on s'intéresse notamment à l'étude d'existence de points fixes positifs par l'utilisation de la théorie de l'indice du point fixe sur les cônes. On commencera par présenter une généralisation du théorème des valeurs intermédiaires dans un espace de Banach ordonné; c'est un résultat dû à Krasnosel'skii [11] en 1960. Pour P un cône dans un espace de Banach X , soit P_R un ensemble dans P défini par $P_r = \{x \in P : \|x\| < r\}$ et $F : P \rightarrow P$ un opérateur compact; les conditions importantes de cette généralisation sont: $Fx \not\leq x$, $x \in \partial P_r$ et $Fx \not\geq x$, $x \in \partial P_R$. Quand $r < R$, nous parlerons de la compression d'un cône; par contre le cas $R < r$, représente l'expansion d'un cône. On appelle cette généralisation, le théorème du point fixe d'expansion et de compression d'un cône; il assure l'existence d'un point fixe dans la coquille conique $\{x \in P : \min\{r, R\} \leq \|x\| \leq \max\{r, R\}\}$. On rappelle que $Fx \not\leq x \Leftrightarrow x - Fx \notin P$ par contre $Fx > x \Leftrightarrow Fx - x \in P - \{0\}$. Ces dernières années, ce théorème a connu un grand développement par Guo [9], Avery et Anderson [2], Avery, Anderson et Krueger [3] et d'autres. Parmi ces développements, le plus utilisé dans les applications, est le théorème d'expansion et de compression d'un cône de type norme dû à Guo; ce théorème a été ensuite amélioré, en 2002, par Avery et Anderson à un théorème d'expansion et de compression d'un cône de type fonctionnel. Cette amélioration permet de choisir deux fonctionnelles α et β satisfaisant certaines conditions qui seront utilisées au lieu de la norme; dans ce cas, on cherche l'existence d'un point fixe dans la coquille conique $\{x \in P : \alpha(x) \geq r \text{ et } \beta(x) \leq R\}$ avec r, R deux nombres réels vérifiant $R > r > 0$. Signalons enfin que Avery, Anderson et Krueger, en 2006, ont pu améliorer ce dernier théorème en utilisant la convergence des itérations de Picard pour estimer la solution obtenue. Notons que la flexibilité d'utiliser des fonctionnelles au lieu d'une norme permet au théorème d'être utilisé dans beaucoup de situations. En particulier dans les problèmes aux limites, ces fonctionnelles permettent d'améliorer des conditions suffisantes pour assurer l'existence des solutions positives multiples. Pour traiter la question de multiplicité de solutions, nous nous basons essentiellement sur l'article de Leggett et Williams [14] (1979), où ils

présentent de nouveaux théorèmes des points fixes multiples qui améliorent les résultats de H. Amman [1]. Les résultats présentés dans ce mémoire sont dûs essentiellement à Guo [9] en 1988. Ce mémoire se compose de trois chapitres:

Nous présentons, dans le premier chapitre, quelques résultats préliminaires indispensables à la compréhension de la suite du travail. Ces résultats concernent essentiellement les notions suivantes: les cônes, le degré topologique et l'indice du point fixe. Nous avons rassemblé à la fin de ce chapitre quelques lemmes fondamentaux auxquels nous aurons à se référer tout au long de ce travail.

Dans la première partie du deuxième chapitre, nous présentons quelques théorèmes du point fixe sur les cônes pour les opérateurs compacts qui entraînent l'existence d'un point fixe positif.

Dans la deuxième partie, nous nous intéressons à l'existence des points fixes multiples d'un opérateur non linéaire complètement continu défini sur un cône dans un espace de Banach ordonné. Nous présentons dans cette partie des théorèmes qui donnent des conditions suffisantes pour qu'un opérateur puisse avoir deux ou trois points fixes positifs.

Dans le dernier chapitre, on étudiera quelques problèmes aux limites du type Dirichlet, associés aux équations différentielles ordinaires du second ordre.

1.1 Les cônes

Soit E un espace de Banach.

Définition 1.1.1 *Un sous-ensemble non vide P de E est dit cône ordonné sur E s'il est convexe, fermé et vérifie les deux conditions suivantes:*

1. $(x \in P \text{ et } \lambda \geq 0) \Rightarrow \lambda x \in P$;
2. $P \cap (-P) = \{0_E\}$. i.e. $(x \in P \text{ et } -x \in P) \Rightarrow x = 0_E$.

La première condition entraîne que $0_E \in P$.

Définition 1.1.2 *Un sous-ensemble non vide $C \subset E$ est appelé cône si:*

$$x \in C \text{ et } a > 0 \text{ implique } ax \in C.$$

Chaque cône ordonné est un cône, mais la réciproque est fausse.

Dans ce qui suit, pour simplifier, l'appellation cône sera réservée pour cône ordonné.

Définition 1.1.3 *Soit P un cône sur E . Alors on définit sur E une relation d'ordre partiel donnée par*

$$\forall x, y \in E : x \leq y \Leftrightarrow y - x \in P.$$

Nous pouvons aussi introduire les relations suivantes:

- $x < y \Leftrightarrow x \leq y$ et $x \neq y$.
- $x \ll y \Leftrightarrow y - x \in \overset{\circ}{P}$ où $\overset{\circ}{P} \neq \emptyset$.

De plus, on définit le segment d'un cône P par $[x, y] = \{z \in P : x \leq z \leq y\}$.

Proposition 1.1.1 *Pout tout u, x, y et $z \in P$ et $a, b \in \mathbb{R}$, on a*

1. $x \leq x$.
2. $(x \leq y \text{ et } y \leq z) \Rightarrow x \leq z$.
3. $(x \leq y \text{ et } y \leq x) \Rightarrow x = y$.
4. $(x \leq y \text{ et } 0 \leq a \leq b) \Rightarrow ax \leq by$.
5. $(x \leq y \text{ et } u \leq z) \Rightarrow x + u \leq y + z$.
6. $(x \ll y \text{ et } y \ll z) \Rightarrow x \ll z$.
7. $(x \ll y \text{ et } y \leq z) \Rightarrow x \ll z$.
8. $(x \leq y \text{ et } y \ll z) \Rightarrow x \ll z$.
9. $(x \ll y \text{ et } a > 0) \Rightarrow ax \ll ay$.
10. Soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites de E telles que: $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \leq y_n$. Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Démonstration. Elles se démontrent en utilisant les définitions précédentes. ■

Définition 1.1.4 *Un espace de Banach est dit ordonné s'il contient un cône P .*

Définition 1.1.5 *Soit P un cône sur E . Alors, on dit que*

- P est solide si $\overset{\circ}{P} \neq \emptyset$ où $\overset{\circ}{P} = \text{int}(P)$.
- P est générateur si $E = P - P$. i.e. $\forall x \in E, \exists u, v \in P$ tels que: $x = u - v$.

Exemples des cônes solides et générateurs

1) $E = \mathbb{R}$, $P = \mathbb{R}_+$.

On a: \mathbb{R}_+ est convexe, fermé de \mathbb{R} et il vérifie les deux conditions

- $(x \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \lambda \geq 0) \Rightarrow \lambda x \geq 0 \Rightarrow \lambda x \in \mathbb{R}_+$.
- $(x \in \mathbb{R}_+ \text{ et } -x \in \mathbb{R}_+) \Rightarrow (x \geq 0 \text{ et } -x \geq 0) \Rightarrow x = 0$.

Donc \mathbb{R}_+ est bien un cône sur \mathbb{R} .

Il est solide, car: $\text{int}(\mathbb{R}_+) =]0, +\infty[\neq \emptyset$. Il est générateur, car: $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists u, v \in \mathbb{R}_+$ tels que: $x = u - v$.

Remarque 1.1.1 Sur \mathbb{R} , on définit deux cônes solides et générateurs: \mathbb{R}_- et \mathbb{R}_+ .

2) $E = \mathbb{R}^2$, $P = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

On a: P est convexe et fermé de \mathbb{R}^2 . De plus, on vérifie que

- $X = (x, y) \in P$ et $\lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda x, \lambda y \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \lambda X \in P$.
- $X \in P$ et $-X \in P \Rightarrow x, -x \in \mathbb{R}_+$ et $y, -y \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow X = 0_{\mathbb{R}^2}$.

Ainsi, on a montré que P est un cône sur \mathbb{R}^2 . Il est solide, car: $\text{int}(P) =]0, +\infty[\times]0, +\infty[\neq \emptyset$ et il est générateur, car le fait que \mathbb{R}_+ est un cône générateur sur \mathbb{R} , nous donne:

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \exists u_1, v_1 \in \mathbb{R}_+ : x = u_1 - v_1. \\ \forall y \in \mathbb{R}, \exists u_2, v_2 \in \mathbb{R}_+ : y = u_2 - v_2. \end{cases}$$

Donc, $\forall X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\exists U = (u_1, u_2)$ et $\exists V = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ tels que $X = U - V$.

Remarque 1.1.2 Sur \mathbb{R}^2 , on définit quatre cônes solides et générateurs: $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-$, $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_-$.

Cône normal

Définition 1.1.6 Un cône P sur E est dit normal (ou naturel) si

$$\exists \delta > 0 : \forall x, y \in P, (\|x\| = \|y\| = 1) \Rightarrow \|x + y\| \geq \delta.$$

Géométriquement, la normalité de P signifie que l'angle entre chaque deux vecteurs unitaires positifs ne peut pas dépasser π . Autrement dit, un cône normal ne peut pas être trop large.

Le théorème suivant nous donne d'autres définitions d'un cône normal à savoir;

Théorème 1.1.1 *Soit P un cône sur E . Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

(1) P est normal;

(2) $\exists \gamma > 0 : \forall x, y \in P, \|x + y\| \geq \gamma \max\{\|x\|, \|y\|\}$;

(3)

$$\exists N > 0 : \forall x, y \in P, 0_E \leq x \leq y \Rightarrow \|x\| \leq N \|y\|;$$

(i.e. la norme $\|\cdot\|$ est semi-monotone.)

(4) Il existe une norme équivalente $\|\cdot\|_1$ sur E telle que

$$\forall x, y \in P, 0_E \leq x \leq y \Rightarrow \|x\|_1 \leq \|y\|_1;$$

(i.e. la norme $\|\cdot\|_1$ est monotone.)

(5) $\forall (x_n)_n, (y_n)_n$ et $(z_n)_n \subset P$, on a :

$$x_n \leq z_n \leq y_n, \|x_n - x\| \rightarrow 0 \text{ et } \|y_n - x\| \rightarrow 0 \Rightarrow \|z_n - x\| \rightarrow 0;$$

(6) L'ensemble $(B + P) \cap (B - P)$ est borné, où B est la boule unité fermée sur E ;

(7) Tout intervalle ordonné $[x, y] = \{z \in E : x \leq z \leq y\}$ est borné.

Démonstration. [9] ■

Remarque 1.1.3 *l'assertion (3) peut être considérée comme définition d'un cône normal P sur E , et dans ce cas, la plus petite constante $N > 0$ telle que (3) soit vérifiée est appelée "constante de normalité de P ".*

Exemples de cônes normaux

1) $E = \mathbb{R}^n$, $P_1 = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \forall i = \overline{1, n}\} = (\mathbb{R}_+)^n$.

• P_1 est un cône solide et générateur sur E_1 , car $\overset{\circ}{P}_1 = (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $\forall i = \overline{1, n} : \forall x_i \in \mathbb{R};$
 $(\mathbb{R}_+ \text{ étant un cône générateur sur } \mathbb{R}), \exists u_i, v_i \in \mathbb{R}_+ : x_i = u_i - v_i$.

• P_1 est normal, avec la constante de normalité $N = 1$, car toutes les normes sur \mathbb{R}^n sont monotones.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, 0_{\mathbb{R}^n} \leq x \leq y \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|.$$

2) $E_2 = \mathcal{C}(G)$: l'espace des fonctions continues sur un ensemble fermé borné de \mathbb{R}^n .

$$P_2 = \{x \in \mathcal{C}(G) : x(t) \geq 0, \forall t \in G\}.$$

- P_2 est un cône solide et générateur sur $\mathcal{C}(G)$.
- Il est normal car $\|\cdot\|_{\mathcal{C}(G)}$ définie par

$$\|x\|_{\mathcal{C}(G)} = \sup_{t \in G} |x(t)|$$

est monotone sur P_2 .

- On définit d'autres cônes sur $\mathcal{C}(G)$ tels que:

$$P_3 = \{x \in \mathcal{C}(G) : x(t) \geq 0 \text{ et } \int_{G_0} x(t) dt \geq \varepsilon_0 \|x(t)\|_{\mathcal{C}(G)}\},$$

$$P_4 = \{x \in \mathcal{C}(G) : x(t) \geq 0 \text{ et } \min_{t \in G_0} x(t) \geq \varepsilon_0 \|x(t)\|_{\mathcal{C}(G)}\},$$

où G_0 est un sous ensemble fermé de G et $\varepsilon_0 \in]0, 1[$. P_3 et P_4 sont des cônes solides et normaux sur $\mathcal{C}(G)$.

3) $E_3 = L^p(\Omega)$: l'espace des fonctions Lebesgue-mesurables, p -sommables sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avec $p \geq 1$ et $0 < \text{mes}(\Omega) < \infty$.

$$P_5 = L_p^+(\Omega) = \{x \in L^p(\Omega) : x(t) \geq 0 \text{ p.p dans } \Omega\}.$$

- Il est clair que P_5 est un cône générateur, et puisque la norme de $L^p(\Omega)$ est croissante, alors il est normal, mais il n'est pas solide, car $\text{int}(P_5) = \emptyset$ sauf pour le cône $L_\infty^+(\Omega)$ qui est d'intérieur non vide.

4) $E_4 = C^1([0, 2\pi])$: l'espace des fonctions continûment différentiables sur $[0, 2\pi]$ muni de la norme

$$\|x\|_{E_4} = \max_{0 \leq t \leq 2\pi} |x(t)| + \max_{0 \leq t \leq 2\pi} |x'(t)|.$$

Soit

$$P_6 = \{x \in E_4 : x(t) \geq 0, \forall t \in [0, 2\pi]\}.$$

- Il est clair que P_6 est un cône solide sur E_4 . Ainsi, P_6 est générateur car, $\forall x \in E_4$, x peut s'écrire: $x = y - z$ où $y = M > 0$ et $z = M - x$, $M > \max_{0 \leq t \leq 2\pi} x(t)$ et $y, z \in P_6$. Mais il n'est pas normal car sinon, la troisième propriété du théorème précédent donne:

$$\exists N > 0 : \forall x, y \in P_6, 0 \leq x \leq y \Rightarrow \|x\|_{E_4} \leq N \|y\|_{E_4}.$$

Soit donc $x_n(t) = 1 - \cos nt$, $y_n(t) = 2$. On a: $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n, y_n \in P_6$ et $0 \leq x_n(t) \leq y_n(t)$ car $\forall t \in [0, 2\pi]$, $1 - \cos nt \leq 2$. Mais,

$$\begin{aligned} \|x_n\|_{E_4} &= \max_{0 \leq t \leq 2\pi} |1 - \cos nt| + n \max_{0 \leq t \leq 2\pi} |\sin nt| \\ &= 2 + n, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Alors, $2 + n \leq 2N, \forall n \in \mathbb{N}$, ce qui est impossible par passage à la limite quand $n \rightarrow +\infty$.

Opérateurs monotones

Définition 1.1.7 Soit X et Y deux espaces de Banach ordonnés .

1. L'opérateur $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ est dit croissant si pour tout $x, y \in D(T)$,
 $x < y \Rightarrow Tx \leq Ty$.
2. L'opérateur T est dit strictement ou fortement croissant si le symbole " \leq " est remplacé par " $<$ " ou " \ll " respectivement.
3. L'opérateur $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ est dit décroissant si pour tout $x, y \in D(T)$,
 $x < y \Rightarrow Tx \geq Ty$.
4. L'opérateur T est dit strictement ou fortement décroissant si le symbole " \geq " est remplacé par " $>$ " ou " \gg " respectivement.
5. L'opérateur T est dit positif si, $T(0) > 0$ et pour tout $x \in D(T)$, $x > 0 \Rightarrow Tx \geq 0$.

1.2 Le degré topologique

1.2.1 Degré topologique de Brouwer

Introduction et motivation

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de $\mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ et $y_0 \in \mathbb{R}^n$. On considère le problème suivant:

$$(\mathcal{P}) \quad \text{Trouver } x \in \Omega \text{ tel que } f(x) = y_0.$$

Si f est linéaire et $\det M_f \neq 0$, où M_f est la matrice associée à f , alors (\mathcal{P}) admet une solution unique dans Ω pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Mais ceci n'est pas une condition nécessaire et suffisante, car il peut exister des solutions pour certains y lorsque $\det M_f = 0$, donc les solutions ne sont pas stables : si l'on perturbe un peu y_0 , il peut ne plus exister de solutions du tout. Par contre, si $\det M_f \neq 0$, la solution de (\mathcal{P}) est particulièrement stable; si l'on perturbe y_0 ou f (par une application linéaire), on sait qu'il continue à exister une solution de (\mathcal{P}) , qui est de plus proche de la solution originellement cherchée. Notre but, est de développer un outil jouant, pour les applications non linéaires, ce rôle de déterminant pour les applications linéaires. C'est ce qu'on appellera " le degré de f en y_0 par rapport à Ω " et qu'on notera $d = \deg(f, \Omega, y_0)$ dont la non nullité de ce dernier, entraîne que le problème considéré possède au moins une solution dans Ω . Evidemment, ce degré dépendra de f et y_0 , ainsi que de l'ensemble sur lequel on veut résoudre (\mathcal{P}) .

Une première idée de définir le degré, pourra être la suivante

"C'est le nombre de solutions de (\mathcal{P}) ."

Et comme l'on a déjà indiqué ci-avant, il est plus facile de prouver que $d \neq 0$ que de prouver l'existence des solutions de (\mathcal{P}) , et pour cela, cette définition est inutile. De manière un peu pratique, pour rendre cette définition puissante, on ne compte que les solutions stables avec une "orientation". En d'autres termes, on s'intéresse au comportement des solutions au fur et à mesure que l'on modifie f . On commence donc par partir d'une fonction f_0 assez simple pour laquelle l'équation $f_0(x) = y_0$ admet au moins une solution, et on cherche à modifier continûment f_0 pour arriver à f (plus précisément,

on utilise une homotopie entre f_0 et f). En général, ceci n'est pas faisable, car les solutions à "suivre" peuvent sortir du domaine, ou bien disparaître tout simplement. (par exemple, une parabole de \mathbb{R}^2 orientée vers le haut et ayant deux zéros; si on la monte progressivement; à un moment donné, ces deux zéros se rejoignent, puis disparaissent). Il faudra donc éliminer ces deux situations :

- **La première: " fuite d'une solution par le bord du domaine concerné "**

Elle sera évitée en ne regardant que des fonctions pour lesquelles les solutions éventuelles de $f(x) = y_0$ restent éloignées de $\partial\Omega$ (la frontière de Ω).

- **La deuxième: " disparition des solutions "**

Elle sera réglée en associant à chaque solution de $f(x) = y_0$ "un signe" indiquant si elle est susceptible ou non de disparaître après s'être rassemblée avec l'une des autres solutions.

Exemples en dimension 1

Exemple 1.2.1 Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) \neq 0$ et $f(1) \neq 0$ et notons

$$d = d(f,]0, 1[, 0) = \frac{1}{2} [\text{sgn}(f(1)) - \text{sgn}(f(0))].$$

Considérons le problème

$$(\mathcal{P}_1) \quad \text{Trouver } x \in]0, 1[: f(x) = 0.$$

Si $d \neq 0$, alors $f(0)$ et $f(1)$ ont des signes différents. i.e. $f(0)f(1) < 0$.

Le théorème des valeurs intermédiaires nous donne

$$\exists x \in]0, 1[: f(x) = 0$$

L'entier d (qui vaut $-1, 0$ ou 1), permet donc (d'après ce qui précède) de s'assurer que (\mathcal{P}_1) admet au moins une solution dans $]0, 1[$, il suffit qu'il soit non nul, et il est très facile à calculer dont il ne demande qu'à estimer le signe de f au bord du domaine de définition. Si l'on perturbe f légèrement, alors comme $f|_{\{0,1\}}(x) \neq 0$, son signe en ces deux points reste inchangé, donc d est constant; s'il était non nul avant perturbation, il le reste aussi après perturbation, et une solution de (\mathcal{P}_1) continue donc à exister.

Rappelons que la non nullité de d est une condition suffisante seulement. Il peut exister des fonctions de degré nul, pour lesquelles (\mathcal{P}) admet au moins une solution, comme le montre l'exemple suivant: (pour (\mathcal{P}_1))

Soit $f(x) = 1 - \lambda x(1 - x)$, où $\lambda > 0$. On vérifie bien que $f(0) = f(1) = 1 \neq 0$.

Donc, $f(x) = 0 \Rightarrow 1 - \lambda x(1 - x) = 0 \Rightarrow \lambda x^2 - \lambda x + 1 = 0$, $\Delta = \lambda(\lambda - 4)$.

Si $\lambda > 4$, alors $\Delta > 0$ et (\mathcal{P}_1) admet deux solutions distinctes sur $]0, 1[$, mais $d = 0$.

Si l'on souhaite un degré adapté à (\mathcal{P}_1) où le second membre n'est pas forcément nul, en tenant compte de l'ouvert Ω sur lequel on cherche les solutions, alors en le décomposant en ses composantes connexes

$$\Omega = \bigcup_{i \in I}]a_i, b_i[,$$

on peut définir

$$d(f, \Omega, y_0) = \frac{1}{2} \sum_{i \in I} [\text{sgn}(f(b_i) - y_0) - \text{sgn}(f(a_i) - y_0)],$$

lorsque $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue telle que $f|_{\partial\Omega}(x) \neq 0$ (comme Ω est borné, cette non annulation implique que $f - y_0$ ne peut changer de signe que sur un nombre fini de composantes connexes de Ω , et que la somme sur I est en fait finie.)

Exemple 1.2.2 $\Omega =]0, 1[$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe \mathcal{C}^1 vérifiant l'hypothèse

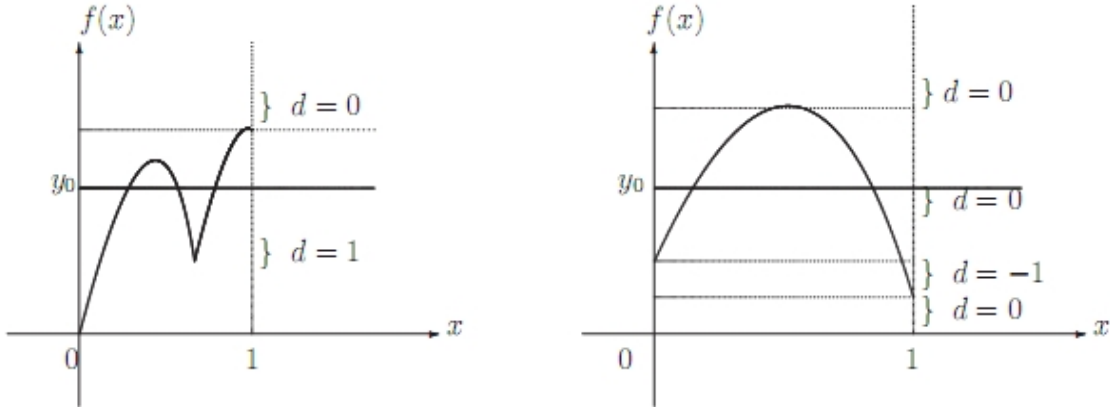
$$(\mathcal{H}) \text{ Pour toute solution } x \text{ de } (\mathcal{P}), f'(x) \neq 0,$$

On définit alors le degré topologique (qui est un entier relatif) de f en y_0 relativement à Ω par

$$d(f, \Omega, y_0) = \begin{cases} \sum_{i \in I} \text{sgn}(f'(x_i)), & \text{si } \{x_i, i \in I\} \text{ est l'ensemble des solutions de } (\mathcal{P}); \\ 0 & , \text{ si le problème } (\mathcal{P}) \text{ n'a pas de solution.} \end{cases}$$

où $y_0 \notin f(\partial\Omega)$ et $I \subset \mathbb{N}$.

Illustrations graphiques :



Définition du degré topologique de Brouwer en utilisant le signe du déterminant Jacobien

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application dans $\mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ et $y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$. On considère le problème suivant

(\mathcal{P}) Trouver $x \in \Omega$ tel que $f(x) = y_0$.

Le cas régulier: Pour $x_0 \in \Omega$, on notera $\mathcal{D}f(x_0) = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{1 \leq i, j \leq n}(x_0)$, la matrice Jacobienne de f en x_0 et $\mathcal{J}_f(x_0) = \det[\mathcal{D}f(x_0)]$ le déterminant Jacobien de f en x_0 .

Définition 1.2.1 1. Un point $x_0 \in \Omega$ est dit "régulier" si $\mathcal{J}_f(x_0) \neq 0$.

2. Un point $x_0 \in \Omega$ est dit "singulier" ou bien "critique" s'il n'est pas régulier.

Dans ce cas, l'ensemble des points singuliers de f sur Ω est donné par

$$\mathcal{S}_f(\Omega) = \{x_0 \in \Omega : \mathcal{J}_f(x_0) = 0\}.$$

3. Une valeur $y_0 \in f(\overline{\Omega})$ est dite "régulière" si

$$f^{-1}(\{y_0\}) \cap \mathcal{S}_f(\Omega) = \emptyset.$$

Autrement dit, y_0 est régulière si: $\forall x \in f^{-1}(\{y_0\}), \mathcal{J}_f(x) \neq 0$. Sinon, elle est dite "singulière".

Proposition 1.2.1 *Si $y_0 \notin f(\partial\Omega)$ est une valeur régulière, alors l'ensemble $f^{-1}(\{y_0\})$ est fini.*

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 y_0 \text{ régulière} &\Rightarrow \forall x \in f^{-1}(\{y_0\}), \mathcal{J}_f(x) \neq 0 \\
 &\Rightarrow \forall x \in f^{-1}(\{y_0\}), \exists U \in \mathcal{V}(x) \text{ tel que } f|_U \text{ est un homéomorphisme} \\
 &\quad \text{(théorème de l'inversion locale.)} \\
 &\Rightarrow \text{tous les points de } f^{-1}(\{y_0\}) \text{ sont isolés.} \\
 &\quad (f^{-1}(\{y_0\}) \text{ est un ensemble discret})
 \end{aligned}$$

Or, f étant continue, $f^{-1}(\{y_0\})$ est fermé donc compact car il est inclus dans le borné Ω . Enfin,

$$f^{-1}(\{y_0\}) \text{ est compact et discret} \Leftrightarrow f^{-1}(\{y_0\}) \text{ est fini.}$$

■

Définition du degré topologique de Brouwer:

Si $y_0 \notin [f(\partial\Omega) \cup f(\mathcal{S}_f(\Omega))]$, alors on définit le degré topologique de Brouwer de f en y_0 relativement à Ω par

$$\deg(f, \Omega, y_0) = \begin{cases} \sum_{x \in \Omega \cap f^{-1}(\{y_0\})} \text{sgn} \mathcal{J}_f(x); \\ 0, \text{ si } \Omega \cap f^{-1}(\{y_0\}) = \emptyset. \end{cases}$$

Le cas singulier: Si $y_0 \notin f(\partial\Omega)$ est une valeur singulière, on pose

$$\deg(f, \Omega, y_0) = \deg(f, \Omega, y_1),$$

où y_1 est une valeur régulière proche de y_0 et dont l'existence est assurée par le lemme suivant:

Lemme 1.2.1 (Lemme de Sard) *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et f une application continûment dérivable sur Ω . Alors, l'ensemble $f(\mathcal{S}_f(\Omega))$ est de mesure de Lebesgue-nulle.*

Démonstration. [12] ■

Exemple de calcul du degré topologique en dimension 2

Soit $\Omega =]-1, 1]^2$ et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction définie par

$$f(x, y) = (y - x^3, y).$$

Montrons que $\deg(f, \Omega, 0_{\mathbb{R}^2}) = -1$. On a: $\mathcal{S}_f(\Omega) = \{X = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \mathcal{J}_f(X) = 0\}$,

$$\mathcal{D}f(x, y) = \begin{pmatrix} -3x^2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{J}_f(x, y) = -3x^2. \text{ Donc, } \mathcal{J}_f(x, y) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ et } y \in \mathbb{R}.$$

D'où:

$$\mathcal{S}_f(\Omega) = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\} = (Oy).$$

i.e. les valeurs singulières sont alors représentées par l'axe des ordonnées.

$$f(x, y) = Y_0 = (0, 0) \Rightarrow (x, y) = (0, 0) \Rightarrow f^{-1}(\{Y_0\}) = \{(0, 0)\}. \text{ Alors}$$

$$f^{-1}(\{Y_0\}) \cap \mathcal{S}_f(\Omega) = \{(0, 0)\} \neq \emptyset,$$

ceci montre que Y_0 est une valeur singulière. Calculons maintenant $f(\partial\Omega)$.

On a $\partial\Omega = (D_1) \cup (D_2) \cup (D_3) \cup (D_4)$ avec

$$(D_1) = \{(-1, y) / -1 \leq y \leq 1\}, \quad (D_3) = \{(x, +1) / -1 \leq x \leq 1\},$$

$$(D_2) = \{(+1, y) / -1 \leq y \leq 1\}, \quad (D_4) = \{(x, -1) / -1 \leq x \leq 1\}.$$

Donc, $f(\partial\Omega) = (\Delta_1) \cup (\Delta_2) \cup (\Delta_3) \cup (\Delta_4)$ où $(\Delta_i) = f(D_i), \forall i = \overline{1, 4}$. On trouve $(\Delta_1) :$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = x - 1 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right., (\Delta_2) : \left\{ \begin{array}{l} y = x + 1 \\ -1 \leq x \leq 0 \end{array} \right., (\Delta_3) : \left\{ \begin{array}{l} y = 1 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{array} \right. \text{ et } (\Delta_4) : \left\{ \begin{array}{l} y = -1 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{array} \right. .$$

Il est clair que $Y_0 \notin f(\partial\Omega)$. Posons donc

$$\deg(f, \Omega, Y_0) = \deg(f, \Omega, Y_1),$$

avec $Y_1 = (-\frac{1}{2}, 0) \in \mathcal{B}(0, 1)$ pour la norme

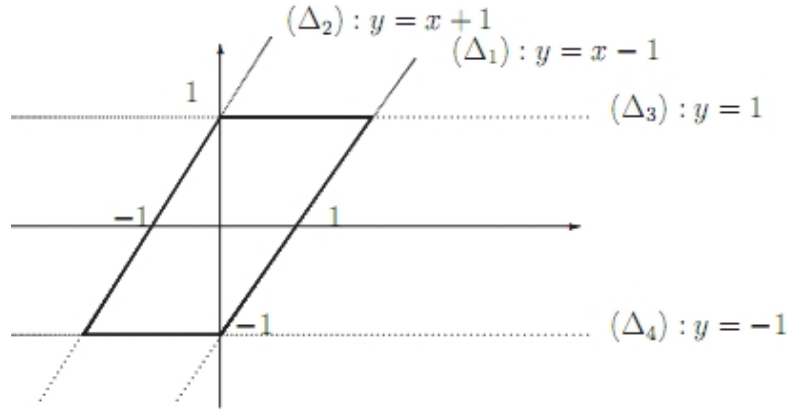
$$\|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|).$$

Vérifions que Y_1 est une valeur régulière. On a:

$$f(x, y) = (-\frac{1}{2}, 0) \Rightarrow (x, y) = (\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, 0),$$

alors $f^{-1}(\{Y_1\}) \cap \mathcal{S}_f(\Omega) = \emptyset$. De plus, $f^{-1}(\{Y_1\}) \subset \Omega$, $Y_1 \notin f(\partial\Omega)$ et $Y_1 \notin f(\mathcal{S}_f(\Omega))$, car $f(\mathcal{S}_f(\Omega)) = f((Oy)) = \{f(x, y) : (x, y) \in (Oy)\} = \{f(0, y) : y \in \mathbb{R}\} = \{(y, y) : y \in \mathbb{R}\}$, donc $f(\mathcal{S}_f(\Omega))$ est exactement la première bissectrice. Finalement, on trouve :

$$\deg(f, \Omega, 0_{\mathbb{R}^2}) = \text{sgn} \mathcal{J}_f\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, 0\right) = -1, \text{ (car: } \forall x \in \mathbb{R}^*, \mathcal{J}_f(x) < 0\text{)}.$$



Propriétés du degré topologique de Brouwer

Dans tout ce qui suit, on désignera par \mathcal{I}_d l'application identité sur \mathbb{R}^n . Alors on a les propriétés suivantes :

1) Degré de l'identité

$$(a) \deg(\mathcal{I}_d, \Omega, y_0) = \begin{cases} 1, & \text{si } y_0 \in \Omega \\ 0, & \text{si } y_0 \notin \bar{\Omega} \end{cases}$$

$$(b) \deg(-\mathcal{I}_d, \Omega, y_0) = \begin{cases} (-1)^n, & \text{si } y_0 \in \Omega \\ 0, & \text{si } y_0 \notin \bar{\Omega} \end{cases}$$

2) Additivité

Soit $y_0 \in \mathbb{R}^n$ et $(\Omega_i)_{i \in I} \subset \Omega$ une famille d'ouverts deux à deux disjoints vérifiant l'une des conditions suivantes:

- (a) $\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ et $y_0 \notin f(\partial\Omega)$.
- (b) $\bigcup_{i \in I} \Omega_i \subset \Omega$ et $y_0 \notin f(\bar{\Omega} \setminus \bigcup_{i \in I} \Omega_i)$.

Alors,

$$\deg(f, \Omega, y_0) = \sum_{i \in I} \deg(f, \Omega_i, y_0),$$

où seul un nombre fini de termes dans la somme est non nul.

3) Invariance par homotopie

Soit $\{f_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ une famille d'applications de $\mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, dépendant continûment de t et $\{y_0(t)\}_{0 \leq t \leq 1}$ une famille de points continus en t et tels que $y_0(t) \notin f_t(\partial\Omega)$, $\forall t \in [0, 1]$. Alors le degré $\deg(f_t, \Omega, y_0(t))$ ne dépend pas de t .

$$\deg(f_0, \Omega, y_0(0)) = \deg(f_1, \Omega, y_0(1)).$$

Les fonctions f_t sont dites reliées homotopiquement. Plus généralement, on dit que deux fonctions f et g sont homotopes s'il existe une fonction continue $H : [0, 1] \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que:

$$H(0, x) = f(x), H(1, x) = g(x), \forall x \in \overline{\Omega}.$$

4) Résolution des équations algébriques

$$\deg(f, \Omega, y_0) \neq 0 \Rightarrow \exists x \in \Omega : f(x) = y_0.$$

5) Continuité par rapport à y_0

Si y_1 est voisin de $y_0 \notin f(\partial\Omega)$ (dans un sens à préciser), alors

$$\deg(f, \Omega, y_0) = \deg(f, \Omega, y_1).$$

6) Invariance sur le bord

Si $y_0 \notin f(\partial\Omega)$ et $f|_{\partial\Omega}(x) = g|_{\partial\Omega}(x)$, alors

$$\deg(f, \Omega, y_0) = \deg(g, \Omega, y_0).$$

Cette propriété montre que, pour le degré, tout se passe sur le bord.

7) Continuité par rapport à la fonction

Soit $r = \text{dist}(y_0, f(\partial\Omega)) > 0$ et soit $g \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ telle que

$$\sup_{x \in \partial\Omega} \|g(x) - f(x)\| < r;$$

alors,

$$\deg(f, \Omega, y_0) = \deg(g, \Omega, y_0).$$

Autrement dit, deux fonctions voisines ont le même degré.

8) Constance sur les composantes connexes de $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$

$\deg(f, \Omega, \cdot)$ est constant sur les composantes connexes de $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$.

Corollaire 1.2.1 (*Propriété d'excision*)

Soit $\mathcal{K} \subset \Omega$ un fermé et $y_0 \notin [f(\mathcal{K}) \cup f(\partial\Omega)]$. Alors,

$$\deg(f, \Omega, y_0) = \deg(f, \Omega \setminus \mathcal{K}, y_0).$$

Corollaire 1.2.2 (*Propriété d'invariance par rapport à l'ouvert*)

Si $x_0 \in \Omega$ est une solution isolée de $f(x) = y_0$, alors $\exists r_0 > 0$ tel que pour tout $r \leq r_0$, le degré $\deg(f, \mathcal{B}_r(x_0), y_0)$ est constant. i.e.

$$\deg(f, \mathcal{B}_r(x_0), y_0) = \deg(f, \mathcal{B}_{r_0}(x_0), y_0), \forall r \leq r_0.$$

Démonstration. [4] ■

Théorème du point fixe de Brouwer, 1912

Théorème 1.2.1 Soit C un compact, convexe non vide de \mathbb{R}^n et $f : C \rightarrow C$ une application continue. Alors f admet au moins un point fixe dans C .

En particulier, pour $C = \overline{\mathcal{B}}$; la boule unité fermée de \mathbb{R}^n .

Démonstration. Démontrons ce théorème dans le cas où $C = \overline{\mathcal{B}}(0, R)$, $R > 0$.

- Si $f(x_0) = x_0$ pour $x_0 \in \partial C$, alors le théorème est démontré.
- Sinon, $f(x) \neq x, \forall x \in \partial C$. Dans ce cas, on considère la déformation continue

$$f_t(x) = x - tf(x)$$

Pour $t \in [0, 1[$ et $x \in \partial C$, on a:

$$\begin{aligned} \|f_t(x)\| &= \|x - tf(x)\| \\ &\geq \| \|x\| - t \|f(x)\| \| \\ &\geq |R - t \|f(x)\|| \\ &\geq (1 - t)R \\ &> 0, \end{aligned}$$

car: $\forall x \in \overline{\mathcal{B}}(0, R), f(x) \in \overline{\mathcal{B}}(0, R) \Rightarrow \|f(x)\| \leq R$. Donc, $f_t(x) \neq 0, \forall x \in \partial C$, d'où $y_0 = 0 \notin f_t(\partial C)$. Le degré $\deg(\mathcal{I}_d - tf, \overset{\circ}{C}, 0)$ est donc bien défini et vaut, par homotopie,

$$\deg(f_1, \overset{\circ}{C}, 0) = \deg(\mathcal{I}_d - f, \overset{\circ}{C}, 0) = \deg(f_0, \overset{\circ}{C}, 0) = \deg(\mathcal{I}_d, \overset{\circ}{C}, 0) = 1.$$

Alors f admet au moins un point fixe sur C . ■

Remarque 1.2.1 *Ce théorème a une extension en dimension infinie, le théorème du point fixe de Schauder.*

1.2.2 Degré topologique de Leray-Schauder, 1934 [13]

Dans cette partie, on veut construire un degré de façon qu'il ait la même conclusion que celui de Brouwer, mais en dimension infinie. C'est l'outil permettant de s'assurer l'existence d'au moins une solution pour l'équation $f(x) = y_0$, où f est une application continue d'un espace de Banach E dans lui-même. Contrairement au cas de dimension finie, ce degré; dit de Leray-Schauder, ne pourra pas être défini pour toutes les applications continues de E dans E . Il faudra donc restreindre les fonctions que l'on considère et pour cela, on construit le degré topologique de Leray-Schauder sur les applications qui diffèrent de l'identité par une application compacte.

A présent, énonçons la proposition suivante qui donne la différence essentielle entre les espaces de dimensions finie et infinie à savoir;

Proposition 1.2.2 *Soit \mathcal{B} la boule unité ouverte d'un espace vectoriel normé X . Alors on a les équivalences suivantes :*

$\dim X < +\infty \Leftrightarrow$ toute application continue $f : \overline{\mathcal{B}} \rightarrow \overline{\mathcal{B}}$ admet au moins un point fixe.

\Leftrightarrow la boule unité fermée $\overline{\mathcal{B}}$ est compacte.

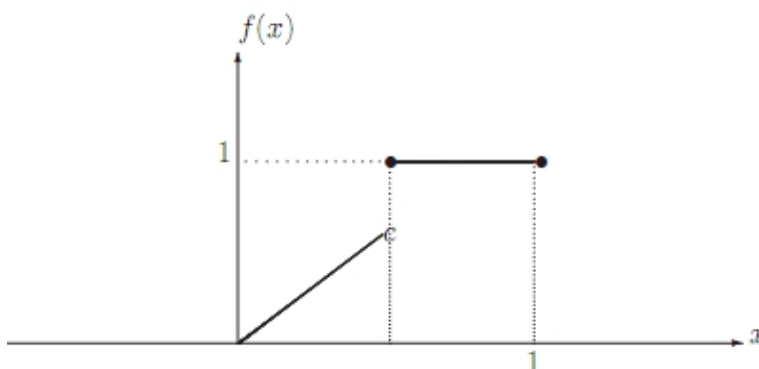
\Leftrightarrow la frontière $\partial\mathcal{B}$ est compacte.

\Leftrightarrow de toute suite de $\overline{\mathcal{B}}$, on peut extraire une sous-suite convergente.

Application compacte [4]

Définition 1.2.2 Soit X et Y deux espaces de Banach, Ω un ouvert de X et $f : \Omega \rightarrow Y$ une fonction continue.

1. f est dite compacte si $f(\overline{\Omega})$ est compacte.
2. f est dite complètement continue si l'image de tout borné est relativement compacte.



Remarques 1.2.2 (a) Il est clair que toute application continue, compacte est complètement continue. La réciproque est vraie si on a la bornitude de Ω .

(b) En général, la compacité n'implique pas la continuité comme le montre l'exemple illustré ci-dessus, où $\Omega =]0, 1[\subset \mathbb{R}$. f est compacte, car $f(\overline{\Omega})$ est un fermé borné dans \mathbb{R} , donc compact. Mais f n'est pas continue.

(c) Toute application linéaire compacte est continue; la réciproque est vraie si f est de rang fini. (le rang est la dimension de l'espace image.)

Caractérisation des applications compactes

Soient X et Y deux espaces de Banach.

Proposition 1.2.3 Une application continue $f : X \rightarrow Y$ est dite compacte si et seulement si de toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X , on peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ telle que la suite $(f(x_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ converge dans Y .

Approximation des applications compactes

Proposition 1.2.4 *Soit \mathcal{K} un fermé borné d'un espace de Banach X et $f : \mathcal{K} \rightarrow X$ une application. Alors, f est compacte si et seulement si f est limite uniforme d'une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications compactes de rangs finis.*

Perturbation compacte de l'identité

Définition 1.2.3 *Une application de la forme $f = \mathcal{I}_d - K$ où \mathcal{I}_d est l'application identité et K une application compacte (caractérisée par la proposition 1.2.4 comme limite uniforme d'une suite d'applications compactes de rangs finis $(K_\varepsilon)_\varepsilon$) est dite perturbation compacte de l'identité (ou application de Leray-Schauder).*

Définition du degré topologique de Leray-Schauder

La raison pour laquelle on est capable de construire un degré pour les perturbations compactes de l'identité est que les applications compactes s'approchent bien par des applications continues en dimension finie (pour lesquelles on a déjà le degré de Brouwer).

Définition 1.2.4 *Soit X un espace de Banach, $\Omega \subset X$ un ouvert borné et*

$$f = \mathcal{I}_d - K : \bar{\Omega} \rightarrow X \text{ une perturbation compacte de l'identité.}$$

Pour $y_0 \in X \setminus f(\partial\Omega)$, on pose $\delta = \text{dist}(y_0, f(\partial\Omega)) = \inf_{x \in \partial\Omega} \|y_0 - f(x)\|_X > 0$. Soit $K_\varepsilon : \bar{\Omega} \rightarrow X$ une application compacte à valeur dans un espace $N_\varepsilon \subset X$ de dimension finie contenant y_0 et telle que

$$\sup_{x \in \bar{\Omega}} \|K_\varepsilon(x) - K(x)\|_X \leq \frac{\delta}{2}.$$

Alors on définit le degré de Leray-Schauder par

$$\deg(\mathcal{I}_d - K, \Omega, y_0) = \deg(\mathcal{I}_d - K_\varepsilon, \Omega, y_0) = \deg(\mathcal{I}_d - K_\varepsilon|_{\bar{\Omega} \cap N_\varepsilon}, \Omega \cap N_\varepsilon, y_0).$$

Ce dernier est un degré de Brouwer, car $\Omega \cap N_\varepsilon$ est de dimension finie du fait que N_ε l'est aussi.

Proposition 1.2.5 *Le degré de Brouwer $\deg(\mathcal{I}_d - K_\varepsilon|_{\overline{\Omega \cap N_\varepsilon}}, \Omega \cap N_\varepsilon, y_0)$ est bien défini.*

Démonstration. [4] ■

Remarques 1.2.3 (1) *La définition du degré de Leray-Schauder est indépendante du choix de K_ε et N_ε .* [4]

(2) *Si $\dim X < \infty$, les degrés de Brouwer et Leray-Schauder coïncident.*

Propriétés du degré topologique de Leray-Schauder

On cite les propriétés les plus importantes du degré de Leray-Schauder. Soit donc Ω un ouvert borné d'un espace de Banach X .

1) Normalisation

$$\deg(\mathcal{I}_d, \Omega, y_0) = \begin{cases} 1, & \text{si } y_0 \in \Omega; \\ 0, & \text{si } y_0 \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

2) Additivité

Si Ω_1, Ω_2 sont deux ouverts disjoints inclus dans Ω tels que $y_0 \notin (\mathcal{I}_d - K)(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$, alors,

$$\deg(\mathcal{I}_d - K, \Omega, y_0) = \deg(\mathcal{I}_d - K, \Omega_1, y_0) + \deg(\mathcal{I}_d - K, \Omega_2, y_0).$$

3) Invariance par homotopie

si $H : [0, 1] \times \overline{\Omega} \rightarrow X$ est compacte, $y_0 : [0, 1] \rightarrow X$ est continue et pour tout $t \in [0, 1]$, $y_0(t) \notin (\mathcal{I}_d - H(t, \cdot))(\partial\Omega)$, alors

$$\deg(\mathcal{I}_d - H(0, \cdot), \Omega, y_0(0)) = \deg(\mathcal{I}_d - H(1, \cdot), \Omega, y_0(1)).$$

4) Résolution des équations algébriques

$$\deg(\mathcal{I}_d - K, \Omega, y_0) \neq 0 \Rightarrow \exists x \in \Omega : x - K(x) = y_0.$$

Théorème du point fixe de Schauder, 1930

Théorème 1.2.2 *Soit C un sous-ensemble convexe, fermé, borné, non vide d'un espace de Banach X et $K : C \rightarrow C$ une application compacte. Alors K admet au moins un point fixe dans C .*

Démonstration. La preuve classique du théorème du point fixe de Schauder est probablement celle qui consiste à se ramener au théorème du point fixe de Brouwer en utilisant le fait qu'une application compacte en dimension infinie est approchable par des applications continues de rangs finis. Elle se fait en deux étapes;

1^{ère} étape : $C = \overline{\mathcal{B}}(0, R)$, $R > 0$ (une boule fermée centrée en 0 de rayon R).

- S'il existe $x_0 \in \partial C : K(x_0) = x_0$, alors il n'y a rien à démontrer.
- Sinon, $\forall x \in \partial C, K(x) \neq x$. Dans ce cas, on considère la déformation compacte

$$K_t = \mathcal{I}_d - tK,$$

où $t \in [0, 1]$. S'il existe $x \in \partial C : tK(x) = x$, alors $R = \|x\| = \|tK(x)\| = t\|K(x)\| \leq Rt$, car $K(x) \in \overline{\mathcal{B}}(0, R), \forall x \in \overline{\mathcal{B}}(0, R)$. Donc : $t \geq 1$, et comme $t \in [0, 1]$, alors $t = 1$ et $K(x) = x$ ce qui contredit le fait que $K(x) \neq x$ sur ∂C . Par conséquent, $\forall t \in [0, 1], \forall x \in \partial C$, on a :

$$\begin{aligned} tK(x) \neq x &\Rightarrow x - tK(x) \neq 0 \\ &\Rightarrow y_0 = 0 \notin K_t(\partial C). \end{aligned}$$

D'où le degré $\deg(K_t, \overset{\circ}{C}, 0)$ est bien défini et vaut, par homotopie,

$$\deg(K_1, \overset{\circ}{C}, 0) = \deg(\mathcal{I}_d - K, \overset{\circ}{C}, 0) = \deg(K_0, \overset{\circ}{C}, 0) = \deg(\mathcal{I}_d, \overset{\circ}{C}, 0) = 1.$$

Alors, $\exists x \in \overset{\circ}{C}$ tel que $(\mathcal{I}_d - K)(x) = 0 \Rightarrow K(x) = x$. D'où l'existence d'au moins un point fixe de K dans C .

2^{ème} étape : C est un convexe, fermé, borné, non vide. On considère l'application continue $r : \mathcal{B} \rightarrow C$ telle que C soit contenu dans \mathcal{B} . Soit le diagramme $\mathcal{B} \xrightarrow{r} C \xrightarrow{K} \mathcal{B}$ et $r(x) = x, \forall x \in C$. L'application $K \circ r$ est compacte car K est compacte et r est continue. D'après la première étape, $K \circ r$ admet un point fixe $x_0 \in \mathcal{B}$, i.e: $x_0 = (K \circ r)(x_0)$. Or, $r(x_0) \in C$ et par hypothèse, $K(C) \subset C$, alors $K(r(x_0)) \in C$ et donc $x_0 \in C$. ■

Remarque 1.2.4 *Les deux théorèmes du point fixe en question sont cependant similaires. En fait, le théorème du point fixe de Brouwer est un cas particulier du théorème du point fixe de Schauder, puisque toute application continue est compacte en dimension finie.*

1.3 Indice du point fixe

Commençons d'abord par donner la définition suivante:

Définition 1.3.1 Soit X un espace de Banach. Un sous-ensemble $Y \subset X$ est dit un rétracté de X s'il existe une application continue $r : X \rightarrow Y$ telle que

$$r(x) = x, \forall x \in Y.$$

Ou encore si $\mathcal{I}_{d|Y}$ admet une extension à X . L'application r est alors appelée rétraction.

Remarque 1.3.1 Toute partie convexe fermée d'un espace de Banach X est une rétractée de X , en particulier, tout cône $P \subset X$ est un rétracté de X .

Exemple 1.3.1 La boule $\mathcal{B}_n = \overline{\mathcal{B}}(x_0, R)$ est une rétractée de \mathbb{R}^n . Il suffit pour cela de considérer l'application définie par

$$r(x) = \begin{cases} x, & \text{si } \|x - x_0\| \leq R. \\ x_0 + R \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}, & \text{si } \|x - x_0\| \geq R. \end{cases}$$

Un des outils les plus importants de l'analyse fonctionnelle non linéaire, est le degré topologique de Leray-Schauder pour les applications compactes, définies sur la fermeture des sous-ensembles ouverts bornés dans les espaces de Banach. Cependant, en relation avec les applications non linéaires définies dans les espaces ordonnés, il est naturel de considérer aussi les applications définies sur les sous-ensembles ouverts d'un cône positif. Si ce dernier n'a pas de points intérieurs (la plupart des cônes de dimension infinie intéressants -du point de vue des applications- ne sont pas solides), alors le degré de Leray-Schauder n'est pas immédiatement applicable. Mais à cause du fait qu'un cône est un rétracté de l'espace de Banach qui le contient, il est possible de définir dans un cône positif, "l'indice du point fixe" pour les applications compactes. Cet indice du point fixe est une extension de la notion du degré de Leray-Schauder.

Dans ce qui suit, on donnera les propriétés les plus importantes de cet indice; on indiquera en particulier que l'indice du point fixe peut être dérivé du degré bien connu de Leray-Schauder.

1.3.1 Axiomes de l'indice du point fixe

Théorème 1.3.1 (*définitions axiomatiques*)

Soit E un espace de Banach, X un rétracté de E . Pour tout ouvert borné Ω de X et toute application compacte $f : \overline{\Omega} \rightarrow X$ sans points fixes sur $\partial\Omega$, il existe un unique nombre entier noté $i(f, \Omega, X)$ ayant les propriétés suivantes:

1. Normalisation

$i(f, \Omega, X) = 1$ si f est constante sur $\overline{\Omega}$. (i.e. $f(x) = y_0, \forall x \in \overline{\Omega}$, où y_0 est une constante de Ω .)

2. Additivité

Pour tous sous-ensembles ouverts et disjoints Ω_1, Ω_2 de Ω tels que f n'admet pas de point fixe sur $\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$, on a:

$$i(f, \Omega, X) = i(f, \Omega_1, X) + i(f, \Omega_2, X),$$

où $i(f, \Omega_k, X) = i(f|_{\overline{\Omega_k}}, \Omega_k, X); k \in \{1, 2\}$.

3. Invariance homotopique

L'entier $i(h_t, \Omega, X)$ est indépendant du choix du paramètre $t \in [0, 1]$, où

$$h_t : [0, 1] \times \overline{\Omega} \rightarrow X$$

$$(t, x) \mapsto h_t(x) = h(t, x)$$

est un opérateur compact tel que $\forall x \in \partial\Omega, \forall t \in [0, 1] : h_t(x) \neq x$.

i.e. h_t n'admet pas de points fixes sur $\partial\Omega$, et on a:

$$i(h_0, \Omega, X) = i(h_1, \Omega, X).$$

4. Permanence

Si Y est un rétracté de X telle que $f(\overline{\Omega}) \subset Y$, alors

$$i(f, \Omega, X) = i(f, \Omega \cap Y, Y) = i(f|_{\overline{\Omega \cap Y}}, \Omega, Y).$$

Plus généralement, l'intervalle $[0, 1]$ peut être remplacé par un intervalle fermé de \mathbb{R} .

La famille $\{i(f, \Omega, X)$ tel que X est un rétracté de E , Ω est un ouvert borné de X et $f : \overline{\Omega} \rightarrow X$ est une application compacte sans points fixes sur $\partial\Omega\}$ est uniquement déterminée par les propriétés (1) – (4), avec l'entier $i(f, \Omega, X)$ est appelé l'indice du point fixe de f sur Ω par rapport à X .

Démonstration. Soit $\{i(f, \Omega, X)\}$ une famille satisfaisant les propriétés (1) – (4). Si on choisit $X = E$, alors (1) – (4) représentent les propriétés du degré de Leray-Schauder, d'où la définition

$$i(f, \Omega, X) = \deg(\mathcal{I}_d - f, \Omega, 0), \quad (1)$$

où $(\mathcal{I}_d - f)(x) \neq 0, \forall x \in \partial\Omega$, i.e: le degré de Leray-Schauder $\deg(\mathcal{I}_d - f, \Omega, 0)$ est bien défini.

Supposons maintenant que X soit un rétracté de E , donc il existe une rétraction $r : E \rightarrow X$ telle que $\forall x \in X, r(x) = x$. Pour tout sous-ensemble ouvert Ω de X , on choisit une boule $\mathcal{B}_R = \{x \in E : \|x\| < R\}$. D'après la propriété (4), on a

$$i(f, \Omega, X) = i(f \circ r, \mathcal{B}_R \cap r^{-1}(\Omega), E) = \deg(\mathcal{I}_d - f \circ r, \mathcal{B}_R \cap r^{-1}(\Omega), 0).$$

En effet, d'une part, $r : E \rightarrow X$ est une rétraction donc continue, par conséquent, Ω est un ouvert de $X \Rightarrow r^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de E . Evidemment, $\mathcal{B}_R \cap r^{-1}(\Omega)$ est un ouvert borné de E et on a

$$\overline{\mathcal{B}_R \cap r^{-1}(\Omega)} \subset \overline{r^{-1}(\Omega)} \subset \overline{r^{-1}(\overline{\Omega})} = r^{-1}(\overline{\Omega}).$$

Il s'en suit que

$$(f \circ r)(\overline{\mathcal{B}_R \cap r^{-1}(\Omega)}) \subset (f \circ r)(r^{-1}(\overline{\Omega})) = f(\overline{\Omega}) \subset X.$$

La propriété de permanence est donc applicable et on a:

$$\begin{aligned} i(f \circ r, \mathcal{B}_R \cap r^{-1}(\Omega), E) &= i(f \circ r, [\mathcal{B}_R \cap r^{-1}(\Omega)] \cap X, X) \\ &= i(f \circ r|_{[\mathcal{B}_R \cap r^{-1}(\Omega)] \cap X}, \Omega, X) \\ &= i(f \circ r|_{\mathcal{B}_R \cap r^{-1}(\Omega)}, \Omega, X) \\ &= i(f, \Omega, X). \end{aligned}$$

Enfin, le résultat demandé est obtenu en utilisant l'égalité (1). ■

Remarque 1.3.2 *D'après ce qui précède, on définit l'indice du point fixe d'un opérateur compact f sur Ω relativement à X par*

$$i(f, \Omega, X) = \deg(\mathcal{I}_d - f \circ r, \mathcal{B}_R \cap r^{-1}(\Omega), 0). \quad (2)$$

où $r : E \rightarrow X$ est une rétraction et \mathcal{B}_R est une boule de X .

Notons que cette définition est indépendante du choix de la rétraction r et de la boule \mathcal{B}_R . En effet, soit $r_1 : E \rightarrow X$ une autre rétraction. On pose $V = r_1^{-1}(\Omega) \cap r^{-1}(\Omega)$ et $r_0 = r$. D'après la propriété d'excision du degré de Leray-Schauder, on obtient:

$$\deg(\mathcal{I}_d - f \circ r_j, \mathcal{B}_R \cap r_j^{-1}(\Omega), 0) = \deg(\mathcal{I}_d - f \circ r_j, \mathcal{B}_R \cap V, 0), \quad j \in \{0, 1\}.$$

Introduisons l'opérateur compact $h : [0, 1] \times \overline{V} \rightarrow X$ par:

$$h(\lambda, x) = h_\lambda(x) = r_0[(1 - \lambda)f(r_0(x)) + \lambda f(r_1(x))].$$

On remarque que $h(\lambda, x) \neq x$, $\forall (\lambda, x) \in [0, 1] \times \partial V$. i.e. le degré de Leray-Schauder $\deg(\mathcal{I}_d - h(\lambda, \cdot), \mathcal{B}_R \cap V, 0)$ est bien défini $\forall \lambda \in [0, 1]$. La propriété d'invariance homotopique du degré de Leray-Schauder entraîne que:

$$\deg(\mathcal{I}_d - f \circ r_0, \mathcal{B}_R \cap V, 0) = \deg(\mathcal{I}_d - f \circ r_1, \mathcal{B}_R \cap V, 0).$$

Par conséquent, la définition de $i(f, \Omega, X)$ est indépendante du choix de la rétraction r et de la boule \mathcal{B}_R .

Rappelons que le degré de Leray-Schauder admet une extension aux ouverts non bornés de X . (Voir Annexes.)

Finalement, par la définition (2) et les propriétés de degré de Leray-Schauder, on peut vérifier les propriétés (1) – (4). Voici quelques conséquences simples:

Corollaire 1.3.1 *L'indice du point fixe vérifie les propriétés suivantes:*

(i) **Propriété d'excision**

Soit $V \subset \Omega$ un sous-ensemble ouvert tel que f soit sans points fixes sur $\overline{\Omega} \setminus V$, alors

$$i(f, \Omega, X) = i(f, V, X).$$

(ii) Propriété de l'existence

$$i(f, \Omega, X) \neq 0 \Rightarrow f \text{ admet au moins un point fixe sur } \Omega.$$

Démonstration. (i) Soit $\Omega_1 = \Omega$ et $\Omega_2 = \emptyset$. Alors on a : $\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2) = \overline{\Omega} \setminus \Omega = \partial\Omega$, f est donc, par hypothèse, sans points fixes sur $\partial\Omega$, la propriété d'additivité de l'indice a lieu et on a :

$$i(f, \Omega, X) = i(f, \Omega, X) + i(f, \emptyset, X) \Rightarrow i(f, \emptyset, X) = 0.$$

Si on prend maintenant $\Omega_1 = V$, la même propriété nous donne

$$i(f, \Omega, X) = i(f, V, X) + i(f, \emptyset, X) = i(f, V, X).$$

D'où le résultat demandé.

(ii) On raisonne par l'absurde. On suppose que $i(f, \Omega, X) \neq 0$ et que f n'admet pas de point fixe sur Ω . Soit $V = \emptyset$, i.e : $\overline{\Omega} \setminus V = \overline{\Omega}$, f étant sans points fixes sur Ω et $\partial\Omega$, donc elle l'est aussi sur $\Omega \cup \partial\Omega = \overline{\Omega}$. Ceci nous permet d'appliquer la propriété d'excision pour $V = \emptyset$, et on a :

$$i(f, \Omega, X) = i(f, V, X) = i(f, \emptyset, X) = 0.$$

Ce qui contredit le fait que $i(f, \Omega, X) \neq 0$. D'où le résultat demandé. ■

Autre démonstration du théorème du point fixe de Schauder en utilisant l'indice du point fixe

Le théorème du point fixe de Schauder qui dit: toute application compacte $K : C \rightarrow C$ d'un sous-ensemble convexe, fermé, borné, non vide d'un espace de Banach dans lui même, admet au moins un point fixe dans C , peut se démontrer en utilisant l'indice du point fixe. En effet, supposons que K est sans point fixe sur ∂C car sinon, il n'y aura rien à démontrer. Par la remarque 1.3.1, C est un rétracté de X , donc l'indice $i(K, C, C)$ est bien défini. On se fixe $x_0 \in \overset{\circ}{C}$ et on définit l'application compacte $h_t : [0, 1] \times C \rightarrow C$ par

$$h_t(x) = h(t, x) = (1 - t)Kx + tx_0, \text{ où } t \in [0, 1].$$

Alors, h_t n'admet pas de point fixe sur ∂C car sinon, il existerait $x \in \partial C$ tel que

$$(1-t)Kx + tx_0 = x, \forall t \in [0, 1] \Rightarrow Kx - x = t(Kx - x_0), \forall t \in [0, 1].$$

Donc en particulier, pour $t = 0$, on obtient: $Kx - x = 0$, ceci implique que K admet un point fixe sur ∂C , mais par hypothèse, il ne l'est pas. D'où la contradiction. Par conséquent, la propriété de l'invariance homotopique de l'indice du point fixe et la normalisation nous donnent

$$i(K, C, C) = i(x_0, C, C) = 1.$$

Finalement, la propriété de l'existence entraîne que K admet au moins un point fixe dans C .

Remarque 1.3.3 *On peut démontrer le même résultat si C est seulement un rétracté de X , en considérant une boule contenant $\overline{f(C)}$ et en appliquant la propriété de l'invariance homotopique du degré de Leray-Schauder pour la déformation homotopique*

$$h_\lambda(x) = x - \lambda(K \circ r)(x), 0 \leq \lambda \leq 1,$$

avec r est une rétraction quelconque.

1.3.2 Lemmes fondamentaux

Dans tout ce qui suit, on considère X un espace de Banach, $P \subset X$ un cône et Ω un ouvert borné de X .

Définition 1.3.2 *Soit $P \subset X$ un cône. Pour $r > 0$, on introduit les ensembles:*

$$P_r = P \cap \mathcal{B}(0, r) = \{x \in P : \|x\| < r\};$$

$$\partial P_r = \{x \in P : \|x\| = r\}.$$

Lemme 1.3.1 *Soit $0 \in \Omega$ et $F : P \cap \overline{\Omega} \rightarrow P$ un opérateur compact satisfaisant l'hypothèse*

$$(\mathcal{H}_1) \quad Fx \neq \lambda x, \forall x \in P \cap \partial\Omega \text{ et } \forall \lambda \geq 1.$$

Alors,

$$i(F, P \cap \Omega, P) = 1.$$

Démonstration. Soit la déformation homotopique

$$H : [0, 1] \times P \cap \bar{\Omega} \rightarrow P$$

$$(t, x) \longmapsto H(t, x) = H_t(x) = tFx.$$

Alors, H est un opérateur compact sans points fixes sur $P \cap \partial\Omega$. i.e. $\forall t \in [0, 1]$, $\forall x \in P \cap \partial\Omega$, $H_t(x) \neq x$. En effet, s'il existe $t \in [0, 1]$, pour lequel $\exists x_0 \in P \cap \partial\Omega$, $H_t(x_0) = x_0$, alors deux cas se présentent;

- Pour $t = 0$, on obtient l'existence d'un point $x_0 \in P \cap \partial\Omega$ tel que $x_0 = 0$, d'où la contradiction.

- Pour $t \in]0, 1]$, on obtient l'existence d'un point fixe $x_0 \in P \cap \partial\Omega$ tel que $tFx_0 = x_0$; donc $Fx_0 = \frac{1}{t}x_0$, où $\frac{1}{t} \geq 1$, d'où la contradiction avec l'hypothèse (\mathcal{H}_1) . Alors, d'après les propriétés de l'invariance homotopique et de la normalisation de l'indice du point fixe, on en déduit que

$$i(H_1, P \cap \Omega, P) = i(F, P \cap \Omega, P) = i(H_0, P \cap \Omega, P) = i(0, P \cap \Omega, P) = 1.$$

D'où le résultat demandé. ■

Lemme 1.3.2 Soit $0 \in \Omega$ et $F : P \cap \bar{\Omega} \rightarrow P$ un opérateur compact satisfaisant l'hypothèse

$$(\mathcal{H}_2) \quad \|Fx\| \leq \|x\| \quad \text{et} \quad Fx \neq x, \quad \forall x \in P \cap \partial\Omega.$$

Alors,

$$i(F, P \cap \Omega, P) = 1.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que $(\mathcal{H}_2) \Rightarrow (\mathcal{H}_1)$. En effet; raisonnons par l'absurde et supposons que (\mathcal{H}_2) est vérifiée sans que (\mathcal{H}_1) le soit. Donc, $\exists x_0 \in P \cap \partial\Omega$, $\exists \lambda_0 \geq 1$ tels que $Fx_0 = \lambda_0 x_0$.

- Si $\lambda_0 > 1$: $\|Fx_0\| = \|\lambda_0 x_0\| = \lambda_0 \|x_0\| > \|x_0\|$, ce qui contredit le fait que $\|Fx\| \leq \|x\|, \forall x \in P \cap \partial\Omega$.

- Si $\lambda_0 = 1$: $Fx_0 = x_0$. ce qui contredit le fait que $Fx \neq x, \forall x \in P \cap \partial\Omega$.

Ainsi, on a démontré que $(\mathcal{H}_2) \Rightarrow (\mathcal{H}_1)$, par suite, le premier lemme nous donne

$$i(F, P \cap \Omega, P) = 1.$$

■

Lemme 1.3.3 Soit $0 \in \Omega$ et $F : P \cap \overline{\Omega} \rightarrow P$ un opérateur compact satisfaisant l'hypothèse

$$(\mathcal{H}_3) \quad Fx \not\leq x, \quad \forall x \in P \cap \partial\Omega.$$

Alors,

$$i(F, P \cap \Omega, P) = 1.$$

Démonstration. En procédant de la même manière que la démonstration du lemme précédent, on montre que $(\mathcal{H}_3) \Rightarrow (\mathcal{H}_1)$. En effet, s'il existe $x_0 \in P \cap \partial\Omega$ et $\lambda_0 \geq 1$: $Fx_0 = \lambda_0 x_0$, alors, $Fx_0 \geq x_0$, ce qui contredit (\mathcal{H}_3) . ■

Lemme 1.3.4 Soit $0 \in \Omega$ et $F : P \cap \overline{\Omega} \rightarrow P$ un opérateur compact satisfaisant l'hypothèse

$$(\mathcal{H}_4) \quad \exists u_0 > 0; u_0 \in P \setminus \{0\} \text{ tel que: } x - Fx \neq \lambda u_0, \quad \forall x \in P \cap \partial\Omega, \quad \forall \lambda \geq 0.$$

Alors,

$$i(F, P \cap \Omega, P) = 0.$$

Démonstration. Dans le cas où Ω est une boule ouverte de centre 0 et de rayon r , on aura $P \cap \Omega = P_r = P \cap \mathcal{B}(0, r)$. Soit $\mu = \sup_{x \in \overline{P_r}} \|Fx\|$ et soit $\lambda > \frac{r+\mu}{\|u_0\|}$.

On définit l'application compacte $H : [0, 1] \times \overline{P_r} \rightarrow P$ par

$$H(t, x) = H_t(x) = tFx + (1-t)(Fx + \lambda u_0).$$

Alors, H n'admet pas de points fixes sur ∂P_r , car sinon, il existerait $t_0 \in [0, 1]$ et $x_0 \in \partial P_r$ tels que

$$t_0 Fx_0 + (1-t_0)(Fx_0 + \lambda u_0) = x_0 \Rightarrow x_0 - Fx_0 = \lambda(1-t_0)u_0.$$

Et comme $t_0 \leq 1$, alors $\lambda(1-t_0) \geq 0$, ce qui contredit l'hypothèse (\mathcal{H}_4) . D'après la propriété de l'invariance homotopique du point fixe de H_t , on obtient

$$i(H_1, P_r, P) = i(F, P_r, P) = i(H_0, P_r, P) = i(F + \lambda u_0, P_r, P).$$

Si on suppose que $i(F + \lambda u_0, P_r, P) \neq 0$, alors $\exists x_0 \in P_r$ tel que $x_0 = Fx_0 + \lambda u_0$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \|x_0\| &= \|Fx_0 + \lambda u_0\| \\ &\geq \lambda \|u_0\| - \|Fx_0\| \\ &> \frac{r + \mu}{\|u_0\|} \|u_0\| - \|Fx_0\| \\ &> r + \mu - \|Fx_0\| \\ &> r + \|Fx_0\| - \|Fx_0\| = r. \end{aligned}$$

Mais $x_0 \in P_r \Rightarrow \|x_0\| < r$, d'où la contradiction. Ainsi, on a démontré que $i(F + \lambda u_0, P_r, P) = 0$ et donc le résultat demandé en découle. ■

Lemme 1.3.5 Soit $0 \in \Omega$ et $F : P \cap \overline{\Omega} \rightarrow P$ un opérateur compact satisfaisant l'hypothèse

$$(\mathcal{H}_5) : \begin{cases} (a) \inf_{x \in P \cap \partial\Omega} \|Fx\| > 0, \\ (b) Fx \neq \mu x, \forall x \in P \cap \partial\Omega \text{ et } \forall \mu \in]0, 1]. \end{cases}$$

Alors,

$$i(F, P \cap \Omega, P) = 0.$$

Démonstration. Posons $\Omega = \mathcal{B}(0, r)$. Grâce aux théorèmes d'extension de Dugundji (voir Annexes), on peut toujours considérer l'application compacte $F_1 : X \rightarrow \text{Conv}(F(\partial P_r))$, où $\text{Conv}(F(\partial P_r))$ est le plus petit convexe contenant $F(\partial P_r)$, et telle que

$$F_1 x = Fx, \forall x \in \partial P_r.$$

D'autre part, le fait que $[0 \notin C \subset P \text{ et } C \text{ est compact}] \Rightarrow [0 \notin \text{Conv}(C)]$; permet de dire que

$$\inf_{x \in X} \|F_1 x\| = \alpha > 0.$$

En effet, d'une part, on a:

$$\begin{aligned} (a) &\Rightarrow \|Fx\| > 0, \forall x \in P \cap \partial\Omega = \partial P_r \\ &\Rightarrow \text{dist}(Fx, 0) > 0, \forall x \in \partial P_r \\ &\Rightarrow 0 \notin F(\partial P_r). \end{aligned}$$

D'autre part, l'opérateur $F : P_r \rightarrow P$ est compact $\Rightarrow F(\overline{P_r})$ l'est aussi, donc $F(\partial P_r)$ est un compact inclus dans P . On obtient donc $0 \notin \text{Conv}(F(\partial P_r))$.

Maîtrenant, on considère la déformation homotopique

$$H_\mu(x) = H(\mu, x) = (1 - \mu)Fx + \mu k F_1 x, \quad \mu \in [0, 1] \text{ et } k > 1.$$

• L'indice du point fixe $i(H_\mu, P_r, P)$ est bien défini, $\forall \mu \in [0, 1]$, du fait que H_μ est sans points fixes sur ∂P_r . En effet, supposons par l'absurde qu'il existe $x_0 \in \partial P_r$ et $\mu_0 \in [0, 1]$ tels que $H_{\mu_0}(x_0) = x_0$. Donc,

$$(1 - \mu_0)Fx_0 + \mu_0 k F_1 x_0 = x_0 \Rightarrow (1 + (k - 1)\mu_0)Fx_0 = x_0,$$

car $F_1 x = Fx, \forall x \in \partial P_r$. D'où

$$Fx_0 = \frac{1}{1 + (k - 1)\mu_0} x_0.$$

Mais, $\frac{1}{1 + (k - 1)\mu_0} \in]0, 1]$, ceci contredit (b). Alors, la propriété de l'invariance homotopique de l'indice du point fixe a lieu, et on a

$$i(F, P_r, P) = i(kF_1, P_r, P).$$

Si $i(kF_1, P_r, P) \neq 0$, alors $\exists x_1 \in P_r$ tel que $x_1 = kF_1 x_1$. Or, $\|F_1 x\| > \alpha, \forall x \in P_r$, donc

$$\|F_1 x_1\| > \alpha \Rightarrow k \|F_1 x_1\| > k\alpha \Rightarrow \|x_1\| > k\alpha \Rightarrow k\alpha < r \Rightarrow k < \frac{r}{\alpha}.$$

On trouve finalement, $i(kF_1, P_r, P) = 0$, pour $k > \max\{1, \frac{r}{\alpha}\}$.

Donc, le résultat demandé en découle. ■

Lemme 1.3.6 Soit $F : P \cap \overline{\Omega} \rightarrow P$ un opérateur compact satisfaisant l'hypothèse

$$(\mathcal{H}_6) \quad \|Fx\| \geq \|x\| \text{ et } Fx \neq x, \quad \forall x \in P \cap \partial\Omega.$$

Alors,

$$i(F, P \cap \Omega, P) = 0.$$

Démonstration. Montrons par l'absurde que $(\mathcal{H}_6) \Rightarrow (\mathcal{H}_4)$. Supposons donc que :

$$\forall u_0 > 0, \exists x_0 \in P \cap \partial\Omega, \exists \lambda_0 \geq 0 : x_0 - Fx_0 = \lambda_0 u_0.$$

- $\lambda_0 = 0 : Fx_0 = x_0$, contradiction avec $Fx \neq x, \forall x \in P \cap \partial\Omega$.
- $\lambda_0 > 0 : x_0 - Fx_0 = \lambda_0 u_0 > 0 \Rightarrow Fx_0 < x_0 \Rightarrow \|Fx_0\| < \|x_0\|$, contradiction avec $\|Fx\| \geq \|x\|, \forall x \in P \cap \partial\Omega$. D'où $(\mathcal{H}_6) \Rightarrow (\mathcal{H}_4)$, et par le lemme 1.3.4, on trouve $i(F, P \cap \Omega, P) = 0$. ■

Lemme 1.3.7 Soit $F : \overline{P_r} \rightarrow P$ un opérateur compact satisfaisant l'hypothèse

$$(\mathcal{H}_7) \quad Fx \not\leq x, \forall x \in \partial P_r.$$

Alors,

$$i(F, P_r, P) = 0.$$

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Supposons que $i(F, P_r, P) \neq 0$. Comme F est compact, alors il est borné sur $\overline{P_r}$, ceci est équivalent à dire que

$$\exists a > 0 : \forall x \in \overline{P_r}, \|Fx\| \leq a.$$

Soit $x_0 \in P$ tel que $\|x_0\| > r + a$ et considérons l'homotopie compacte

$$H(t, x) = H_t(x) = Fx + tx_0, \quad t \in [0, 1].$$

Alors H_t est sans point fixe sur ∂P_r , car sinon, il existerait $x \in \partial P_r$ tel que $H(t, x) = Fx + tx_0 = x$. Donc,

$$x = Fx + tx_0 \Leftrightarrow x - Fx = tx_0 \in P, \quad (\text{car } t \geq 0 \text{ et } x_0 \in P)$$

$$\Leftrightarrow Fx \leq x, \quad (\text{relation d'ordre sur } P),$$

ceci contredit (\mathcal{H}_7) . Par l'invariance homotopique de l'indice du point fixe, on obtient

$$i(F + x_0, P_r, P) = i(F, P_r, P).$$

Si $i(F + x_0, P_r, P) \neq 0$, alors $\exists x_1 \in P_r : Fx_1 + x_0 = x_1$.

Donc, $x_0 = x_1 - Fx_1 \Rightarrow \|x_0\| = \|x_1 - Fx_1\| \leq \|x_1\| + \|Fx_1\| < r + a$, d'après la bornitude de F sur $\overline{P_r}$. Ainsi, on a trouvé que $\|x_0\| < r + a$, mais x_0 est supposé tel que $\|x_0\| > r + a$, d'où la contradiction. Finalement, on déduit que

$$i(F + x_0, P_r, P) = i(F, P_r, P) = 0.$$

Ceci termine la démonstration du lemme 1.3.7. ■

Quelques théorèmes du point fixe sur les cônes

Maintenant, on est en mesure d'énoncer quelques théorèmes du point fixe sur les cônes.

2.1 Théorèmes du point fixe d'expansion et de compression d'un cône

2.1.1 Théorème du point fixe de Krasnosel'skii

Commençons d'abord par le théorème principal suivant, appelé théorème du point fixe d'expansion et de compression d'un cône (dû à Krasnosel'skii [11] en 1960) qui généralise le théorème des valeurs intermédiaires dans un espace de Banach ordonné affirmant que si $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ où $[a, b] \subset \mathbb{R}$ est un intervalle non vide tel que

$$(F(a) - a)(b - F(b)) > 0.$$

Alors F admet au moins un point fixe dans $]a, b[$.

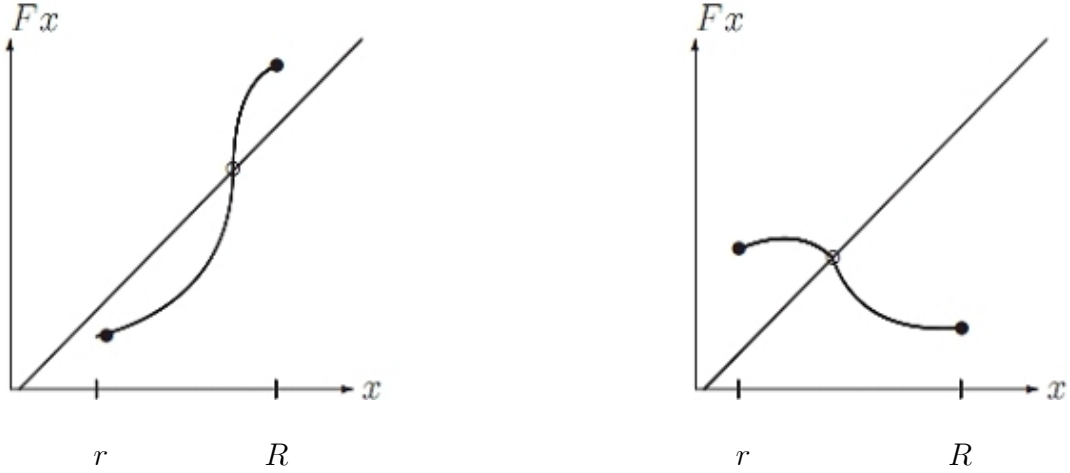
Théorème 2.1.1 *Soient P un cône dans un espace de Banach X et $F : P \rightarrow P$ un opérateur compact vérifiant l'une des conditions suivantes :*

1. $Fx \not\leq x, \forall x \in \partial P_r$ et $Fx \not\geq x, \forall x \in \partial P_R$.

2. $Fx \not\leq x, \forall x \in \partial P_r$ et $Fx \not\geq x, \forall x \in \partial P_R$.

Alors, si $0 < r < R$, F admet au moins un point fixe $x \in P$ tel que $r \leq \|x\| \leq R$.

Illustration graphique dans \mathbb{R} où $P = \mathbb{R}_+$, $\partial P_r = \{r\}$ et $\partial P_R = \{R\}$.



Démonstration. 1^{er} cas : F vérifie 1.

- S'il existe $x \in \partial P_r \cup \partial P_R$ tel que $Fx = x$, alors la preuve est terminée.
- Sinon, posons $\Omega = \overline{P_R}$, $\Omega_1 = \overline{P_R} \setminus P_r \subset \overline{P_R}$ et $\Omega_2 = P_r \subset \overline{P_R}$. On vérifie alors que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, $\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2) = \partial P_r \cup \partial P_R$, et comme $Fx \neq x, \forall x \in \partial P_r \cup \partial P_R$, l'indice du point fixe étant additif, donc

$$i(F, \overline{P_R}, P) = i(F, \overline{P_R} \setminus P_r, P) + i(F, P_r, P) \Rightarrow i(F, \overline{P_R} \setminus P_r, P) = -1.$$

En effet, d'après les lemmes 1.3.3 et 1.3.7, la première inégalité de 1 donne

$$i(F, P_r, P) = 1,$$

et la deuxième donne

$$i(F, \overline{P_R}, P) = 0.$$

- **2^{ème} cas :** F vérifie 2.

Si on procède de la même manière que dans le premier cas, on trouve

$$i(F, P_r, P) = 0,$$

$$i(F, \overline{P_R}, P) = 1.$$

Par suite, on obtient

$$i(F, \overline{P_R} \setminus P_r, P) = 1.$$

Finalement, on a démontré que $i(F, \overline{P_R} \setminus P_r, P) \neq 0$, et en utilisant la propriété de l'existence de l'indice du point fixe, on conclut que F admet au moins un point fixe $x \in \overline{P_R} \setminus P_r$. D'où le résultat. ■

Remarque 2.1.1 *Dans le théorème précédent,*

- Si F vérifie 1, alors on dit que F est l'expandeur du cône P .
- Si F vérifie 2, alors on dit que F est le compresseur du cône P .

Théorèmes d'expansion d'un cône

Les théorèmes suivants assurent l'existence du point fixe de l'opérateur F dans la coquille conique définie par (en posant $0 < r < R$)

$$\overline{P_{r,R}} = \{x \in P : r \leq \|x\| \leq R\};$$

dont les frontières inférieure et supérieure sont de type

$$\{x \in P : \|x\| = \rho\} \text{ où } \rho \in \{r, R\}.$$

Théorème 2.1.2 *Soit $F : \overline{P_R} \rightarrow P$ un opérateur compact tel que les conditions suivantes soient satisfaites:*

1. $\exists u_0 > 0 : x - Fx \neq \lambda u_0, \forall x \in \partial P_r \text{ et } \forall \lambda \geq 0.$
2. $Fx \neq \lambda x, \forall x \in \partial P_R \text{ et } \forall \lambda \geq 1.$

Alors, F admet au moins un point fixe $x \in \overline{P_{r,R}}$.

Démonstration. Notons d'abord que les conditions 1 et 2 de ce théorème, sont respectivement les conditions (\mathcal{H}_4) et (\mathcal{H}_1) des lemmes 1.3.4 et 1.3.1, donc

$$i(F, P_r, P) = 0 \text{ et } i(F, P_R, P) = 1.$$

Comme l'on a déjà vu dans la démonstration du théorème de Krasnosel'skii, et par l'additivité de l'indice du point fixe, on obtient

$$i(F, P_R \setminus \overline{P_r}, P) = 1.$$

Par suite, l'opérateur F admet au moins un point fixe dans $P_R \setminus \overline{P_r} = P_{r,R} \subset \overline{P_{r,R}}$. ■

Théorème 2.1.3 Soit $F : \overline{P_R} \rightarrow P$ un opérateur compact vérifiant les conditions suivantes :

1. $Fx \neq \lambda x$ pour $\|x\| = r$ et $\lambda \geq 1$;
2. $Fx \neq \mu x$ pour $\|x\| = R$ et $0 < \mu \leq 1$;
3. $\inf_{x \in \partial P_R} \|Fx\| > 0$.

Alors, F admet au moins un point fixe $x \in \overline{P_{r,R}}$.

Démonstration. Le résultat est donné par les lemmes 1.3.1, 1.3.5 et le théorème

2.1.1. ■

Théorème 2.1.4 Soit $F : \overline{P_R} \rightarrow P$ un opérateur compact tel que :

1. $Fx \neq \lambda x, \forall x \in \partial P_r$ et $\forall \lambda \geq 1$;
2. $\|Fx\| \geq \|x\|$ et $Fx \neq x, \forall x \in \partial P_R$.

Alors, F admet au moins un point fixe $x \in \overline{P_{r,R}}$.

Démonstration. Il se montre de la même manière que dans la démonstration du théorème 2.1.1 en utilisant les lemmes 1.3.1 et 1.3.6. ■

Théorème 2.1.5 Soit $F : \overline{P_R} \rightarrow P$ un opérateur compact satisfaisant les conditions :

1. $\|Fx\| \leq \|x\|$ et $Fx \neq x, \forall x \in \partial P_r$;
2. $\exists u_0 > 0 / x - Fx \neq \lambda u_0, \forall x \in \partial P_R$ et $\forall \lambda \geq 0$.

Alors, F admet au moins un point fixe $x \in \overline{P_{r,R}}$.

Démonstration. Elle est basée sur les lemmes 1.3.2 et 1.3.4. ■

Remarque 2.1.2 Les théorèmes du point fixe de compression d'un cône s'obtiennent si la première condition est vérifiée sur ∂P_R et la deuxième sur ∂P_r .

2.1.2 Théorème du point fixe d'expansion et de compression d'un cône de type norme

La version de type norme du théorème du point fixe d'expansion et de compression d'un cône de Krasnosel'skii, est obtenue par Guo [9].

Théorème 2.1.6 Soit X un espace de Banach, Ω_1 et Ω_2 deux ouverts bornés de X tels que $0 \in \Omega_1$, $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$ et $P \subset X$ un cône. On considère l'opérateur compact $F : P \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1) \rightarrow X$ vérifiant l'une des conditions suivantes:

1. $\|Fx\| \leq \|x\|$, $\forall x \in P \cap \partial\Omega_1$ et $\|Fx\| \geq \|x\|$, $\forall x \in P \cap \partial\Omega_2$.
2. $\|Fx\| \geq \|x\|$, $\forall x \in P \cap \partial\Omega_1$ et $\|Fx\| \leq \|x\|$, $\forall x \in P \cap \partial\Omega_2$.

Alors, F admet au moins un point fixe dans $P \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$.

Démonstration. Démontrons ce théorème sous la condition 1. (la preuve est analogue si F vérifie 2).

Commençons d'abord par étendre F à $P \cap \overline{\Omega_2}$; grâce au théorème d'extension de Dugundji 3.3.3 (voir Annexes), On peut donc supposer, sans perte de généralité, que F n'admet pas un point fixe sur $P \cap \partial\Omega_1$ et sur $P \cap \partial\Omega_2$, sinon le théorème est démontré. Dans ce cas, 1 devient

$$\|Fx\| \leq \|x\| \text{ et } Fx \neq x, \forall x \in P \cap \partial\Omega_1.$$

$$\|Fx\| \geq \|x\| \text{ et } Fx \neq x, \forall x \in P \cap \partial\Omega_2.$$

Par conséquent, les lemmes 1.3.2 et 1.3.6 entraînent que

$$i(F, P \cap \Omega_1, P) = 1 \text{ et } i(F, P \cap \Omega_2, P) = 0.$$

On a: $P \cap (\Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1}) \subset P \cap \Omega_2$, $P \cap \Omega_1 \subset P \cap \Omega_2$, $[P \cap (\Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1})] \cap [P \cap \Omega_1] = \emptyset$ et F n'admet pas de points fixes sur $\overline{P \cap \Omega_2} \setminus [(P \cap (\Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1})) \cup (P \cap \Omega_1)] = P \cap \partial\Omega_2$, donc par la propriété d'additivité de l'indice du point fixe, on aura:

$$i(F, P \cap \Omega_2, P) = i(F, P \cap (\Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1}), P) + i(F, P \cap \Omega_1, P).$$

De cette égalité, on déduit que $i(F, P \cap (\Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1}), P) = -1$, et par conséquent, $\exists x \in P \cap (\Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1})$ tel que $Fx = x$. Or, $\Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1} \subset \overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1$, ceci implique l'existence d'au moins un point fixe dans $P \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$. D'où le résultat. ■

2.1.3 Théorème du point fixe d'expansion et de compression d'un cône de type fonctionnel

Dans cette partie, on va voir une autre version du théorème de Krasnosel'skii; généralisant la version de type norme; dite de type fonctionnel (dûe à Avery-Anderson [2] en 2002). Cette généralisation permet de choisir deux fonctionnelles satisfaisant certaines conditions qui seront utilisées à la place de la norme et permettant d'utiliser ce théorème dans un cadre plus grand de situations. En particulier, pour les problèmes aux limites, ces fonctionnelles permettent d'améliorer des conditions suffisantes assurant l'existence de solutions positives multiples.

A présent, donnons la définition suivante qui sera utile pour la suite :

Définition 2.1.1 Une fonction α est dite fonctionnelle continue positive sur un cône P , si $\alpha : P \rightarrow [0, \infty)$ est continue.

Soient α, β deux fonctionnelles continues positives sur P . Pour $0 < r < R$, on définit les ensembles suivants:

$$P(\beta, R) = \{x \in P : \beta(x) < R\};$$

$$P(\beta, \alpha, r, R) = \{x \in P : r < \alpha(x) \text{ et } \beta(x) < R\}.$$

Résultat principal

Le théorème suivant (étant une généralisation du théorème 2.1.6), donne au moins un point fixe dans la coquille conique $\bar{P}(\beta, \alpha, r, R) = \{x \in P : r \leq \alpha(x) \text{ et } \beta(x) \leq R\}$ dont les frontières inférieure et supérieure sont respectivement

$$\partial P(\alpha, r) = \{x \in P : \alpha(x) = r\} \text{ et } \partial P(\beta, R) = \{x \in P : \beta(x) = R\},$$

(au lieu de ∂P_r et ∂P_R dans le théorème 2.1.6.)

Théorème 2.1.7 *Soit P un cône dans un espace de Banach réel X et soit α, β deux fonctionnelles continues positives sur P . Supposons que l'ensemble $P(\beta, \alpha, r, R)$ est non vide, borné et $F : \bar{P}(\beta, \alpha, r, R) \rightarrow P$ un opérateur complètement continu vérifiant:*

$$\inf_{x \in \partial P(\beta, \alpha, r, R)} \|Fx\| > 0 \text{ et } \bar{P}(\alpha, r) \subseteq P(\beta, R).$$

Supposons de plus que l'une des conditions suivantes soit satisfaite:

(C₁) : $\alpha(Fx) \leq r, \forall x \in \partial P(\alpha, r), \beta(Fx) \geq R, \forall x \in \partial P(\beta, R)$, et pour $y \in \partial P(\alpha, r), z \in \partial P(\beta, R), \lambda \geq 1$ et $\mu \in (0, 1]$, on a : $\alpha(\lambda y) \geq \lambda \alpha(y), \beta(\mu z) \leq \mu \beta(z)$ avec $\alpha(0_X) = 0$.

(C₂) : $\alpha(Fx) \geq r, \forall x \in \partial P(\alpha, r), \beta(Fx) \leq R, \forall x \in \partial P(\beta, R)$ et pour $y \in \partial P(\alpha, r), z \in \partial P(\beta, R), \lambda \in (0, 1]$ et $\mu \geq 1$, on a : $\alpha(\lambda y) \leq \lambda \alpha(y), \beta(\mu z) \geq \mu \beta(z)$ avec $\beta(0_X) = 0$.

Alors, F admet au moins un point fixe $x^ \in \bar{P}(\beta, \alpha, r, R)$.*

Démonstration. • S'il existe $x \in \partial P(\beta, \alpha, r, R)$ tel que $Fx = x$, alors le théorème est démontré.

• Sinon, $Fx \neq x, \forall x \in \partial P(\beta, \alpha, r, R)$. Grâce au théorème d'extension de Dugundji 3.3.3 (voir Annexes), F admet une extension complètement continue notée encore $F : \bar{P}(\beta, R) \rightarrow P$. On suppose que la condition **(C₁)** est vérifiée. (la preuve étant analogue pour la condition **(C₂)**). Alors, on a les deux résultats suivants:

1) $Fy \neq \lambda y, \forall y \in \partial P(\alpha, r)$ et $\forall \lambda \geq 1$.

En effet, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $y_0 \in \partial P(\alpha, r), \lambda_0 > 1$ tel que $Fy_0 = \lambda_0 y_0$, et comme F est sans points fixes sur les bords, alors

$$\alpha(Fy_0) = \alpha(\lambda_0 y_0) \geq \lambda_0 \alpha(y_0) > \alpha(y_0) = r;$$

ce qui contredit le fait que $\alpha(Fx) \leq r, \forall x \in \partial P(\alpha, r)$. Notons que $0_X \in P(\alpha, r)$, car $0_X \in P$ et $\alpha(0_X) = 0 < r$ par hypothèse. Le lemme 1.3.1 nous donne

$$i(F, P(\alpha, r), P) = 1.$$

2) $Fz \neq \mu z, \forall z \in \partial P(\beta, R)$ et $\forall \mu \in (0, 1]$.

En effet, s'il existe $z_0 \in \partial P(\beta, R)$ et $\mu_0 \in (0, 1[$ tels que $Fz_0 = \mu_0 z_0$, alors

$$\beta(Fz_0) = \beta(\mu_0 z_0) \leq \mu_0 \beta(z_0) < \beta(z_0) = R ;$$

mais, $\beta(Fx) \geq R, \forall x \in \partial P(\beta, R)$, d'où la contradiction. De plus, $0_X \in P(\beta, R)$ et $\inf_{x \in \partial P(\beta, \alpha, r, R)} \|Fx\| > 0$, par hypothèse, et donc le lemme 1.3.5 donne

$$i(F, P(\beta, R), P) = 0.$$

D'autre part, on a : $P(\alpha, r) \subset \overline{P}(\alpha, r) \subseteq P(\beta, R)$, $P(\beta, \alpha, r, R) \subset P(\beta, R)$,
 $P(\alpha, r) \cap P(\beta, \alpha, r, R) = \emptyset$ et F n'admet pas de points fixes sur

$$\overline{P}(\beta, R) \setminus [P(\beta, \alpha, r, R) \cup P(\alpha, r)] = \partial P(\alpha, r) \cup \partial P(\beta, R) = \partial P(\beta, \alpha, r, R).$$

Donc la propriété d'additivité de l'indice du point fixe a lieu et on a :

$$i(F, P(\beta, R), P) = i(F, P(\beta, \alpha, r, R), P) + i(F, P(\alpha, r), P).$$

De cette dernière, on déduit que $i(F, P(\beta, \alpha, r, R), P) = -1 \neq 0$, et par conséquent, F admet au moins un point fixe positif $x^* \in \overline{P}(\beta, \alpha, r, R)$. D'où le résultat. ■

Extension du théorème du point fixe d'expansion et de compression d'un cône de type fonctionnel

Théorème 2.1.8 (Avery-Anderson-Krueger [3] en 2006)

Sous les hypothèses du théorème précédent, on suppose qu'il existe $x_l, x_u \in P$ où P est un cône normal, telles que $\overline{P}(\beta, \alpha, r, R) \subset [x_l, x_u]$. Alors, les assertions suivantes sont vraies:

(**E₁**) *S'il existe un opérateur croissant, complètement continu $U : [x_l, x_u] \rightarrow P$ tel que $Fx \leq Ux$, pour tout $x \in [x_l, x_u]$ et $U^2x_u \leq Ux_u$, alors*

$$x^* \leq x_u^* \leq U^n x_u, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

avec $x_u^* = \lim_{n \rightarrow +\infty} U^n x_u$.

(**E₂**) *S'il existe un opérateur croissant, complètement continu $L : [x_l, x_u] \rightarrow P$ tel que $Lx \leq Fx$, pour tout $x \in [x_l, x_u]$ et $Lx_l \leq L^2x_l$, alors*

$$L^n x_l \leq x_l^* \leq x^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

avec $x_l^* = \lim_{n \rightarrow +\infty} U^n x_l$.

Démonstration. • *Le théorème 2.1.7 du point fixe d'expansion et de compression d'un cône de type fonctionnel, assure l'existence d'un point fixe $x^* \in P(\beta, \alpha, r, R)$ pour l'opérateur F .*

• *Nous allons démontrer l'assertion (**E₁**), (la preuve de (**E₂**) est analogue). On suppose donc qu'il existe $x_l, x_u \in P$ tels que $\overline{P}(\beta, \alpha, r, R) \subseteq [x_l, x_u]$ et un opérateur croissant, complètement continu*

$$U : [x_l, x_u] \rightarrow P$$

satisfaisant

$$Fx \leq Ux, \quad U^2x_u \leq Ux_u, \quad \forall x \in [x_l, x_u].$$

Alors,

$$x^* = Fx^* \leq Ux^* \leq Ux_u.$$

U étant croissant, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x^* \leq U^n x_u \leq U^{n-1} x_u \leq \dots \leq Ux_u.$$

D'où la série $\{U^n x_u\}_{n=1}^{\infty}$ est décroissante et minorée par x^ . D'après le théorème 3 (voir Annexes), il existe x_u^* tel que $x_u^* = \lim_{n \rightarrow \infty} U^n x_u$ avec*

$$x^* \leq x_u^* \leq U^n x_u.$$

■

Commentaires

Les théorèmes du point fixe d'expansion et de compression d'un cône sont en fait des généralisations du théorème des valeurs intermédiaires dans un espace de Banach ordonné qui assure l'existence d'un point fixe dans une coquille cônica. Comme simple généralisation de ce théorème, il semble naturel de remplacer l'intervalle $[a, b]$ par un intervalle ordonné de la forme $\{x \in P : a \leq x \leq b\}$ au lieu de la coquille cônica. En effet, si on suppose que $f : [a, b] \rightarrow P$ est compacte et croissante, alors $f([a, b]) = [f(a), f(b)] \subset [a, b]$ à condition que $a < f(a)$ et $f(b) < b$. Ceci permet d'appliquer le théorème du point fixe de Schauder pour avoir l'existence d'un point fixe sur $]a, b[$. L'avantage de ce théorème et qu'on doit vérifier seulement deux conditions, permettant à f de transformer les points a, b dans l'intervalle ordonné $[a, b]$. C'est un problème beaucoup plus facile que de vérifier les hypothèses du théorème de la compression d'un cône.

2.2 Théorèmes d'existence des points fixes multiples

2.2.1 Théorème des points fixes multiples dû à H. Amann

Dans cette partie, on montre que sous certaines propriétés supplémentaires, il est possible de généraliser le théorème des valeurs intermédiaires dans un espace de Banach quelconque en utilisant les intervalles ordonnés. Un résultat de multiplicité est basé sur le théorème principal suivant; dû à H. Amann [1] en 1976.

Théorème 2.2.1 *Soit X un espace de Banach, $D \subset X$ un rétracté, $F : D \rightarrow D$ un opérateur compact sans point fixe sur ∂D . Supposons que D_1, D_2 sont deux rétractés disjoints de D , $\Omega_i \subset D_i$ un ouvert de D pour $i \in \{1, 2\}$. Supposons de plus que $F(D_i) \subset D_i$ et $Fix(F) \cap (D_i \setminus \Omega_i) = \emptyset$, où $Fix(F)$ désigne l'ensemble des points fixes de F . Alors, F admet au moins trois points fixes distincts x, x_1, x_2 tels que*

$$x_i \in \Omega_i, i \in \{1, 2\} \text{ et } x \in D \setminus (D_1 \cup D_2).$$

Démonstration. • On a : $F(D_i) \subset D_i$, pour $i \in \{1, 2\}$, D_i étant un rétracté de D , donc de X . Ceci permet d'appliquer le théorème du point fixe de Schauder (voir la

remarque 1.3.3), et on a

$$\exists x_i \in D_i : Fx_i = x_i, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Or, F est sans point fixe dans $D_i \setminus \Omega_i$, donc forcément $x_i \in \Omega_i$. Ainsi, on a démontré l'existence de deux points fixes de F ; $x_1 \in \Omega_1$ et $x_2 \in \Omega_2$. Evidemment, $x_1 \neq x_2$. Il reste donc à montrer l'existence d'un autre point fixe $x \in D \setminus (D_1 \cup D_2)$.

D'une part, $(\Omega_1 \cup \Omega_2) \subset D$, $[D \setminus (\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2})] \subset D$, $(\Omega_1 \cup \Omega_2) \cap [D \setminus (\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2})] = \emptyset$ et F n'admet pas de point fixe sur $\overline{D} \setminus [D \setminus (\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2}) \cup (\Omega_1 \cup \Omega_2)] = \partial D \cup \partial \Omega_1 \cup \partial \Omega_2$, donc la propriété d'additivité de l'indice du point fixe a lieu, et on a

$$i(F, D, D) = i(F, \Omega_1 \cup \Omega_2, D) + i(F, D \setminus (\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2}), D).$$

De même,

$$i(F, \Omega_1 \cup \Omega_2, D) = i(F, \Omega_1, D) + i(F, \Omega_2, D).$$

De plus, $F(\overline{\Omega_i}) \subset D_i$, la propriété de permanence implique que

$$i(F, \Omega_i, D) = i(F, \Omega_i \cap D_i, D_i) = i(F, \Omega_i, D_i).$$

D'autre part, on a $\Omega_i \subset D_i$, et comme F est sans point fixe sur $\overline{D_i} \setminus \Omega_i$ alors la propriété d'excision entraîne que

$$i(F, \Omega_i, D_i) = i(F, D_i, D_i).$$

Par conséquent, on déduit des égalités précédentes que

$$i(F, D \setminus (\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2}), D) = i(F, D, D) - \sum_{j=1}^2 i(F, \Omega_j, D_j) = i(F, D, D) - \sum_{j=1}^2 i(F, D_j, D_j).$$

En utilisant la remarque 1.3.2, avec $C = D$, puis $C = D_i$ on trouve

$$i(F, D, D) = i(F, D_1, D_1) = i(F, D_2, D_2) = 1.$$

Donc, $i(F, D \setminus (\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2}), D) = -1 \neq 0$, et par la propriété de l'existence, on conclut finalement que F admet au moins un point fixe $x \in D \setminus (\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2}) \subset D \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$. (On vérifie bien que $x \notin \{x_1, x_2\}$, car $(\Omega_1 \cup \Omega_2) \cap [D \setminus (\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2})] = \emptyset$.) ■

Corollaire 2.2.1 *Soit X un espace de Banach, $P \subset X$ un cône solide. Considérons l'existence de quatre points fixés $\bar{y}_i, \hat{y}_i \in X$, $i = 1, 2$ avec*

$$\bar{y}_1 < \hat{y}_1 < \bar{y}_2 < \hat{y}_2.$$

Et supposons que $F : [\bar{y}_1, \hat{y}_2] \rightarrow X$ est un opérateur compact et fortement croissant tel que

$$\bar{y}_1 \leq F\bar{y}_1, F\hat{y}_1 < \hat{y}_1, \bar{y}_2 < F\bar{y}_2, F\hat{y}_2 < \hat{y}_2.$$

Alors, f admet au moins trois points fixes distincts x, x_1, x_2 tels que

$$\bar{y}_1 \leq x_1 \ll \hat{y}_1, \bar{y}_2 \ll x_2 \leq \hat{y}_2 \text{ et } \bar{y}_2 \not\leq x \not\leq \hat{y}_1.$$

Démonstration. [15] ■

Puisque l'usage d'intervalle ordonné ne peut pas être toujours approprié (les conditions imposées sur F dans le corollaire précédent, sont très fortes), on peut prouver aussi un résultat de multiplicité semblable, pour un opérateur complètement continu, sur une coquille conique dont la frontière supérieure est encore donnée par

$$\{x \in P : \|x\| = r\},$$

mais, la frontière supérieure est de type

$$\{x \in P : \varphi(x) = \varrho\},$$

avec $\varphi : P \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonctionnelle continue et concave.

2.2.2 Théorèmes des points fixes multiples de Leggett-Williams

Dans cette partie, on s'intéresse à l'existence de points fixes positifs multiples d'un opérateur non linéaire complètement continu défini sur un cône P d'un espace de Banach X . Les résultats principaux donnent des conditions suffisantes pour qu'un tel opérateur puisse

admettre deux ou trois points fixes positifs sans être fortement croissant. Nous allons considérer tout d'abord des ensembles (remplaçant les intervalles ordonnés) de la forme

$$\mathcal{S}(\alpha, a, b) = \{x \in P : \alpha(x) \geq a \text{ et } \|x\| \leq b\}, \quad a, b \in]0, +\infty[.$$

où α est une fonctionnelle positive, continue et concave sur P et on définit pour $0 < c \leq \infty$, l'ensemble P_c comme suit:

$$P_c = \{x \in P : \|x\| < c\}, \text{ si } 0 < c < \infty,$$

$$P_\infty = P.$$

Résultats principaux

Le premier résultat donne des conditions suffisantes pour que l'opérateur $F : \overline{P_c} \rightarrow P$ ait au moins un point fixe non trivial dans $\mathcal{S}(\alpha, a, c)$.

Théorème 2.2.2 *Soit $F : P_c \rightarrow P$ un opérateur complètement continu. Supposons qu'il existe une fonctionnelle concave α vérifiant $\alpha(x) \leq \|x\|$, pour tout $x \in P$ ainsi que des réels $c \geq b > a > 0$ satisfaisant les conditions suivantes:*

1. *Si $x \in \mathcal{S}(\alpha, a, b)$, alors $\{x \in \mathcal{S}(\alpha, a, b) : \alpha(x) > a\} \neq \emptyset$ et $\alpha(Fx) > a$;*
2. *Si $x \in \mathcal{S}(\alpha, a, c)$, alors $Fx \in P_c$;*
3. *$\forall x \in \mathcal{S}(\alpha, a, c)$ avec $\|Fx\| > b$, on a : $\alpha(Fx) > a$.*

Alors F admet au moins un point fixe dans $\mathcal{S}(\alpha, a, c)$.

Démonstration. Notons d'abord que l'ensemble $U = \{x \in \mathcal{S}(\alpha, a, c) : \alpha(x) > a\}$ est l'intérieur de $\mathcal{S}(\alpha, a, c)$. Supposons que $x \in \partial U$ soit un point fixe de F , alors $\alpha(x) = a$, et comme $\mathcal{S}(\alpha, a, b) \subset \mathcal{S}(\alpha, a, c)$ (du fait que $b \leq c$), ceci montre que $x \in \mathcal{S}(\alpha, a, b)$ ou bien $\|x\| > b$.

- Si $x \in \mathcal{S}(\alpha, a, b)$, alors $x = Fx \Rightarrow \alpha(x) = \alpha(Fx) > a$ d'après 1, ce qui contredit le fait que $\alpha(x) = a$.

• Si $\|x\| > b$, alors $\|Fx\| > b$ et par la condition 3, on obtient $\alpha(x) = \alpha(Fx) > a$, d'où la contradiction. Donc F n'admet pas de points fixes sur ∂U et $i(F, U, P_c)$ est bien défini. Choisissons maintenant $x_0 \in \overset{\circ}{U}$ et définissons l'opérateur complètement continu $H_t : [0, 1] \times \bar{U} \rightarrow P_c$ par

$$H_t(x) = (1 - t)Fx + tx_0, \quad t \in [0, 1].$$

Alors H_t est sans point fixe sur ∂U . En effet, s'il existe $x \in \partial U$; $\alpha(x) = a$, tel que $H_t(x) = x$ alors deux cas se présentent :

- $\|Fx\| > b$: par la condition 3, on obtient $\alpha(Fx) > a$, donc,

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \alpha((1 - t)Fx + tx_0) \\ &\geq (1 - t)\alpha(Fx) + t\alpha(x_0) \\ &> a. \end{aligned}$$

D'où la contradiction.

- $\|Fx\| \leq b$: dans ce cas, on a : $\|x\| = \|(1 - t)Fx + tx_0\| \leq (1 - t)\|Fx\| + t\|x_0\| \leq b$. Alors $x \in \mathcal{S}(\alpha, a, b)$. D'après 1, $\alpha(x) > a$, ce qui contredit le fait que $\alpha(x) = a$. Ainsi, on a démontré que l'indice $i(H_t, U, P_c)$ est bien défini, et par la normalisation l'invariance homotopique de l'indice du point fixe, on trouve :

$$i(F, U, P_c) = i(x_0, U, P_c) = 1.$$

Par conséquent, F admet au moins un point fixe x^* dans U . De plus, on vérifie que ce point fixe est non nul, car : $x^* \in U \Rightarrow x^* \in \mathcal{S}(\alpha, a, c) \Rightarrow x^* \in P$, $\alpha(x^*) \geq a$ et $\|x^*\| \leq c$, mais $\alpha(x) \leq \|x\|$, $\forall x \in P$, donc $0 < a \leq \alpha(x^*) \leq \|x^*\| \leq c \Rightarrow \|x^*\| > 0 \Rightarrow x^* > 0_X$. ■

Remarque 2.2.1 *La condition 3 du théorème précédent sera satisfaite si l'une des conditions suivantes est vérifiée*

1. $\alpha(Fx) > \frac{a}{b} \|Fx\|$, $\forall x \in \mathcal{S}(\alpha, a, c)$.
2. $\|Fx\| - \alpha(Fx) < b - a$, $\forall x \in \mathcal{S}(\alpha, a, c)$.

(Il suffit de poser $\|Fx\| > b$ dans l'une de ces deux conditions, pour que 3 soit vérifiée.)

Dans les applications de ce théorème et des résultats qui le suivent, il est souvent plus facile d'établir la validité de 1 ou 2 que d'établir directement la condition plus générale 3. Le résultat suivant donne l'existence d'au moins trois points fixes positifs pour l'opérateur F , mais avec une restriction supplémentaire sur ce dernier.

Théorème 2.2.3 *Soit $F : P_c \rightarrow P_c$ un opérateur complètement continu. On suppose qu'il existe une fonctionnelle concave α vérifiant $\alpha(x) \leq \|x\|$, $\forall x \in P$, et des constantes réelles a, b, λ avec $0 < \lambda < a < b \leq c$ satisfaisant les conditions suivantes :*

1. *Si $x \in \mathcal{S}(\alpha, a, b)$, alors $\{x \in \mathcal{S}(\alpha, a, b) : \alpha(x) > a\} \neq \emptyset$ et $\alpha(Fx) > a$;*
2. *Si $x \in P_\lambda$, alors $\|Fx\| < \lambda$;*
3. *$\forall x \in \mathcal{S}(\alpha, a, c)$ avec $\|Fx\| > b$, on a : $\alpha(Fx) > a$.*

Alors F admet au moins trois points fixes x_1, x_2, x_3 dans P_c tels que

$$\|x_1\| \leq \lambda, \alpha(x_2) > a \text{ et } \|x_3\| \geq \lambda \text{ avec } \alpha(x_3) \leq a.$$

Démonstration. Soit $U_1 = \{x \in P_c : \|x\| < \lambda\}$ et $U_2 = \{x \in \mathcal{S}(\alpha, a, c) : \alpha(x) > a\}$. Alors U_1 et U_2 sont deux ensembles ouverts disjoints, convexes dans P_c et F n'admet pas de point fixe sur $\partial U_1 \cup \partial U_2 = \partial(U_1 \cup U_2)$. En effet,

- S'il existe $x \in \partial U_1 / Fx = x$, on obtient $\|Fx\| = \|x\| = \lambda$. Contradiction avec la condition 2.

- S'il existe $x \in \partial U_2 / Fx = x$, on obtient une contradiction (voir la preuve du théorème précédent, où $U_2 = U$). D'après 2, on aura $F(\overline{U_1}) \subset \overline{U_1}$, car si $y = Fx \in F(\overline{U_1})$, alors $Fx \in P_c$ et $x \in \overline{U_1} \subset P_\lambda$. De plus, $\|y\| = \|Fx\| < \lambda$.

- Par le théorème du point fixe de Schauder, F admet au moins un point fixe $x_1 \in \overline{U_1}$.

- Par le théorème précédent, F admet au moins un point fixe $x_2 \in U_2$. Il reste donc à montrer l'existence d'au moins d'un autre point fixe. On a: $P_c \setminus (\overline{U_1 \cup U_2}) \subset P_c$, $U_1 \cup U_2 \subset P_c$, $[P_c \setminus (\overline{U_1 \cup U_2})] \cap (U_1 \cup U_2) = \emptyset$ et $P_c \setminus ([P_c \setminus (\overline{U_1 \cup U_2})] \cup (U_1 \cup U_2)) = \partial(U_1 \cup U_2)$, et comme F est sans point fixe sur $\partial(U_1 \cup U_2)$, alors la propriété d'additivité de l'indice du point fixe nous donne

$$i(F, P_c \setminus (\overline{U_1 \cup U_2}), P_c) = i(F, P_c, P_c) - i(F, U_1 \cup U_2, P_c).$$

De même,

$$i(F, U_1 \cup U_2, P_c) = \sum_{j=1}^2 i(F, U_j, P_c).$$

Donc,

$$i(F, P_c \setminus \overline{(U_1 \cup U_2)}, P_c) = i(F, P_c, P_c) - \sum_{j=1}^2 i(F, U_j, P_c).$$

Soit V un sous-ensemble ouvert, convexe de P_c tel que $F : \bar{V} \rightarrow \bar{V}$ n'admet pas de point fixe sur ∂V . Puisque \bar{V} est un rétracté de P_c ; comme fermé convexe du rétracté P , par la propriété de permanence de l'indice du point fixe, on aura :

$$i(F, V, P_c) = i(F, V \cap \bar{V}, \bar{V}) = i(F, V, \bar{V}).$$

D'autre part, on peut montrer que $i(F, V, \bar{V}) = 1$. En effet, par la preuve du théorème du point fixe de Schauder utilisant l'indice du point fixe, on obtient

$$i(F, P_c, P_c) = 1.$$

Par la remarque 1.3.3, nous obtenons :

$$i(F, \bar{V}, \bar{V}) = 1,$$

V étant un ouvert de \bar{V} et F est sans point fixe sur $\bar{V} \setminus V = \partial V$, alors la propriété d'excision donne

$$i(F, \bar{V}, \bar{V}) = i(F, V, \bar{V}) = 1.$$

D'après ce qui précède, si on pose $V = U_1$, ce dernier vérifie bien toutes les conditions imposées sur V , alors

$$i(F, U_1, \bar{U}_1) = 1 = i(F, U_1, P_c).$$

D'où:

$$i(F, U_1, P_c) = 1 = i(F, P_c, P_c).$$

Comme dans la démonstration du théorème 2.2.2, on aura:

$$i(F, U_2, P_c) = 1.$$

Par conséquent,

$$i(F, P_c \setminus \overline{(U_1 \cup U_2)}, P_c) = 1 - 2 = -1.$$

La propriété de l'existence assure donc l'existence d'au moins un point fixe $x_3 \in P_c \setminus \overline{(U_1 \cup U_2)}$. ■

**problèmes aux limites de
type Dirichlet****Introduction**

Le théorème principal du point fixe de Krasnosel'skii sur les cônes a été souvent utilisé pour discuter l'existence des solutions positives à des problèmes aux limites de type

$$(P) \quad \begin{cases} -u''(t) = f(u(t)), & 0 < t < 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

où $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$. Sous certaines hypothèses sur f , Avery [2] a montré l'existence d'au moins trois solutions positives au problème (P) en appliquant le théorème des points fixes multiples de Leggett-Williams [14]. Henderson et Thompson [10] ont amélioré ce résultat en utilisant la symétrie de la fonction de Green associée au problème (P) .

3.1 Application du théorème du point fixe d'expansion et de compression d'un cône de type norme

Considérons le problème aux limites du second ordre (P) avec $f(0) = 0$, donc $u = 0$ est une solution triviale de ce problème. Nous allons démontrer l'existence de solutions non triviales en exigeant à f de satisfaire les deux conditions suivantes:

1. $0 \leq \overline{\lim}_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(u)}{u} < 8$;
2. $\frac{128}{3} < \underline{\lim}_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u} \leq +\infty$.

Notons que 1 et 2 sont vérifiées pour $f(u) = u^\gamma$, $\gamma > 1$. Alors (P) admet au moins une solution $u \in \mathcal{C}^2([0, 1])$ telle que $u(t) > 0$, $\forall t \in (0, 1)$.

- (P) est équivalent à l'équation intégrale

$$u(t) = \int_0^1 G(t, s) f(u(s)) ds$$

où la fonction de Green $G : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée par:

$$G(t, s) = \begin{cases} t(1-s), & 0 \leq t \leq s \leq 1 \\ s(1-t), & 0 \leq s \leq t \leq 1, \end{cases}$$

en utilisant la méthode de la variation des constantes.

Propriétés de la fonction de Green

1. $G(t, s) \geq 0$, $\forall t, s \in [0, 1]$
2. $G(t, s) \leq s(1-s)$, $\forall t, s \in [0, 1]$
3. $G(t, s) \geq \frac{1}{4}s(1-s)$, $\forall t \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ et $\forall s \in [0, 1]$
4. $\int_0^1 G(t, s) ds = \frac{t(1-t)}{2} \leq \frac{1}{8}$, $\forall t \in [0, 1]$
5. $\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} G(t, s) ds \leq \frac{1}{2}$, $\forall t \in [0, 1]$.

On définit maintenant l'opérateur \mathcal{A} par

$$(\mathcal{A}u)(t) = \int_0^1 G(t, s) f(u(s)) ds.$$

• L'opérateur $\mathcal{A} : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1])$ est complètement continu d'après le lemme d'Ascoli-Arzelà (voir Annexes). En effet,

1. \mathcal{A} est continu sur $\mathcal{C}([0, 1])$: soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{C}([0, 1])$, convergente vers un certain élément u .

$$(\mathcal{A}u_n)(t) = \int_0^1 G(t, s)f(u_n(s))ds, \quad \forall t \in [0, 1].$$

D'une part, la continuité de f entraîne que

$$f(u_n(s)) \rightarrow f(u(s)), \quad \forall s \in [0, 1] \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

D'autre part, on a pour tout $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} |(\mathcal{A}u_n)(t)| &\leq \int_0^1 G(t, s)f(u_n(s))ds \\ &\leq \sup_{s \in [0, 1]} f(u_n(s)) \int_0^1 G(t, s)ds \\ &\leq \frac{M}{8} \in L^1([0, 1]). \end{aligned}$$

Ainsi, on a vérifié les deux conditions du théorème de la convergence dominée de Lebesgue (voir Annexes), donc $\mathcal{A}u \in L^1([0, 1])$ et $\|\mathcal{A}u_n - \mathcal{A}u\|_{L^1([0, 1])} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, ceci montre la continuité de \mathcal{A} sur $\mathcal{C}([0, 1])$.

2. \mathcal{A} est borné sur $\mathcal{C}([0, 1])$: soit $u \in \mathcal{C}([0, 1])$, alors

$$|(\mathcal{A}u)(t)| \leq \frac{M}{8} < \infty, \quad \forall t \in [0, 1].$$

3. \mathcal{A} est compact : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans $\mathcal{C}([0, 1])$. \mathcal{A} étant borné, donc $(\mathcal{A}u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'est aussi dans $\mathcal{C}([0, 1])$. De plus, par la propriété 5 de G (ci-dessus), on aura :

$$\begin{aligned} |(\mathcal{A}u_n)'(t)| &= \left| \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} G(t, s)f(u_n(s))ds \right| \\ &\leq \left(\sup_{s \in [0, 1]} f(u_n(s)) \right) \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} G(t, s)ds \\ &\leq \frac{M}{2} < \infty. \end{aligned}$$

Donc $(\mathcal{A}u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{C}^1([0, 1])$, et d'après le corollaire 3.3.1 (voir Annexes), $(\mathcal{A}u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente, ce qui montre la compacité de \mathcal{A} .

Considérons maintenant les ensembles:

$$P = \{u \in C([0, 1]) : u(t) \geq 0, \forall t \in [0, 1]\}$$

$$P_1 = \{u \in P : \min_{t \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} u(t) \geq \frac{1}{4} \|u\|\},$$

qui sont des cônes sur $\mathcal{C}([0, 1])$.

• $\mathcal{A} : P \rightarrow P_1$:

En effet, en utilisant les propriétés de la fonction de Green, alors pour toute $u \in P$, on aura les estimations suivantes:

$$\|\mathcal{A}u\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |(\mathcal{A}u)(t)| = \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 G(t, s) f(u(s)) ds \leq \int_0^1 s(1-s) f(u(s)) ds,$$

$$\min_{t \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} (\mathcal{A}u)(t) = \min_{t \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} \int_0^1 G(t, s) f(u(s)) ds \geq \frac{1}{4} \int_0^1 s(1-s) f(u(s)) ds \geq \frac{1}{4} \|\mathcal{A}u\|,$$

et comme $(\mathcal{A}u)(t) \geq 0, \forall t \in [0, 1]$, alors $\mathcal{A}u \in P_1$.

• La condition $0 \leq \overline{\lim}_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(u)}{u} < 8$, nous permet de choisir $r > 0$ tel que $0 \leq f(u) \leq 8u, 0 \leq u \leq r$.

• Montrons que $\|\mathcal{A}u\| \leq \|u\|, \forall u \in \partial P_r$. Soit $u \in P_1$ avec $\|u\| = r$, alors

$$\begin{aligned} |(\mathcal{A}u)(t)| &= \int_0^1 G(t, s) f(u(s)) ds \\ &\leq 8 \int_0^1 G(t, s) u(s) ds \\ &\leq 8 \|u\| \int_0^1 G(t, s) ds \\ &\leq 8 \|u\| \frac{1}{8} \\ &\leq \|u\|. \end{aligned}$$

Donc, $\max_{t \in [0, 1]} |(\mathcal{A}u)(t)| = \|\mathcal{A}u\| \leq \|u\|$.

• La condition $\frac{128}{3} < \underline{\lim}_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u} \leq +\infty$ entraîne qu'il existe $\eta > 0$ tel que $f(u) \geq \frac{128}{3}u$, si $u \geq \eta$. Soit $R = \max\{2r, 4\eta\}$. Si $u \in P_1$ et $\|u\| = R$, on a alors,

$$\min_{t \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} u(t) \geq \frac{1}{4} \|u\| = \frac{R}{4} \geq \eta \Rightarrow f(u(t)) \geq \frac{128}{3}u(t), \forall t \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}].$$

- Montrons que $\|\mathcal{A}u\| \geq \|u\|$, $\forall u \in \partial P_R$. Soit $u \in P_1$ avec $\|u\| = R$, alors

$$\begin{aligned}
 |(\mathcal{A}u)(\frac{1}{2})| &= \int_0^1 G(\frac{1}{2}, s) f(u(s)) ds \\
 &\geq \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G(\frac{1}{2}, s) f(u(s)) ds \\
 &\geq \frac{128}{3} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G(\frac{1}{2}, s) u(s) ds \\
 &\geq \frac{128}{3} [\min_{s \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} u(s)] \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G(\frac{1}{2}, s) ds \\
 &\geq \frac{128}{3} (\frac{1}{4} \|u\|) \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G(\frac{1}{2}, s) ds \\
 &\geq \frac{32}{3} \|u\| J \\
 &= \|u\|,
 \end{aligned}$$

où $J = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G(\frac{1}{2}, s) ds = \frac{3}{32}$. Donc $\|\mathcal{A}u\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |(\mathcal{A}u)(t)| \geq |(\mathcal{A}u)(\frac{1}{2})| \geq |(\mathcal{A}u)(\frac{1}{2})| \geq \|u\|$. D'où $\|\mathcal{A}u\| \geq \|u\|$, $\forall u \in \partial P_R$. Par conséquent, le théorème 2.2.1 entraîne que $i(\mathcal{A}, P_1 \cap (U_R \setminus \overline{U_r}), P_1) \neq 0$, où $U_R = \{u \in P : \|u\| < R\}$. i.e. l'opérateur \mathcal{A} admet au moins un point fixe $u \in P_1 \cap (U_R \setminus \overline{P_r}) = P_1 \cap \{u \in P : r < u < R\}$. Ceci est équivalent à dire que le problème (P) admet au moins une solution $u \in C^2([0, 1])$ avec $u(t) > 0$ sur $(0, 1)$.

Remarque 3.1.1 *Le dernier exemple était au cas d'expansion d'un cône de type norme. On peut considérer aussi un exemple au cas de compression d'un cône donnant le même résultat. Supposons qu'une fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ satisfait*

1. $\liminf_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(u)}{u} > \frac{128}{3}$,
2. $0 \leq \overline{\lim}_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u} < 4$.

Alors, le problème (P) admet au moins une solution $u \in C^2([0, 1])$ avec $u(t) > 0$ sur $(0, 1)$.

Démonstration. Analogue à la précédente. ■

3.2 Application du théorème des points fixes multiples de Leggett-Williams

Considérons le problème aux limites de type Dirichlet suivant:

$$(P) \quad \begin{cases} -y''(t) = f(y(t)), & 0 < t < 1; \\ y(0) = 0 = y(1). \end{cases}$$

On applique le théorème de Leggett-Williams pour obtenir trois solutions positives (au moins deux sont non triviales), concaves et symétriques au problème (P). Ce dernier peut s'écrire, en utilisant la variation des constantes, sous la forme intégrale:

$$y(t) = \int_0^1 G(t, s) f(y(s)) ds,$$

où G est la fonction de Green associée.

• On va utiliser les propriétés de G suivantes:

1. $0 < G(t, s) \leq G(s, s) = s(1 - s)$, $t > 0$, $s < 1$,
2. $G(t, s) \geq \frac{1}{4}s(1 - s)$, $t \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$, $s \in [0, 1]$,
3. $\max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 G(t, s) ds = \frac{1}{8}$,
4. $\min_{\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{3}{4}} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G(t, s) ds = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G(\frac{1}{4}, s) ds = \frac{1}{16}$,
5. $\min_{0 \leq r \leq 1} \frac{G(\frac{1}{4}, r)}{G(\frac{1}{2}, r)} = \frac{1}{2}$.

Soit $X = \mathcal{C}([0, 1])$; l'espace de Banach muni de la norme sup et $P_2 \subset X$ le cône défini par

$$P_2 = \{y \in P : y \text{ est positive, concave et symétrique sur } [0, 1]\},$$

où $P = \{y \in \mathcal{C}([0, 1]) : y(t) \geq 0, \forall t \in [0, 1]\}$.

• Finalement, on définit la fonctionnelle continue et concave $\alpha : P_2 \rightarrow [0, +\infty)$ par

$$\alpha(y) = \min_{\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{3}{4}} y(t), \quad y \in P_2.$$

Notons que

$$\alpha(y) = y\left(\frac{1}{4}\right) \leq \max_{\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{3}{4}} y(t) \leq \max_{0 \leq t \leq 1} y(t) = y\left(\frac{1}{2}\right) = \|y\|. \quad (*)$$

De même, y est une solution du problème (P) si et seulement

$$y(t) = \int_0^1 G(t, s) f(y(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

• Comme outil de la démonstration, le théorème suivant donne des hypothèses de croissance que doit vérifier la non-linéarité f .

Théorème 3.2.1 Soit $0 < a < b < \frac{c}{2}$ et supposons que f vérifie :

1. $f(w) < 8a$, pour $0 \leq w \leq a$,
2. $f(w) \geq 16b$, pour $b \leq w \leq 2b$,
3. $f(w) < 8c$, pour $0 \leq w \leq c$.

Alors (P) admet trois solutions positives symétriques y_1 , y_2 et y_3 (au moins deux sont strictement positives) telles que

$$\|y_1\| < a, \quad \alpha(y_2) > b \text{ et } \|y_3\| > a \text{ avec } \alpha(y_3) < b.$$

Démonstration. Commençons par définir l'opérateur complètement continu

$$\begin{aligned} \mathcal{A}: X &\rightarrow X \\ y &\mapsto (\mathcal{A}y)(t), \end{aligned}$$

où

$$(\mathcal{A}y)(t) = \int_0^1 G(t, s) f(y(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Remarquons que y est une solution de (P) si et seulement si y est un point fixe de \mathcal{A} . (i.e. $\mathcal{A}y = y$). Notons d'abord que si $y \in P_2$, alors

$$(\mathcal{A}y)(t) \geq 0, \quad \forall t \in [0, 1] \Rightarrow \mathcal{A}y \text{ est positive sur } [0, 1],$$

3.2. Application du théorème des points fixes multiples de Leggett-Williams

$$(\mathcal{A}y)''(t) = -f(y(t)) \leq 0, \quad \forall t \in [0, 1] \Rightarrow \mathcal{A}y \text{ concave sur } [0, 1],$$

$$(\mathcal{A}y)(t) = (\mathcal{A}y)(1-t), \quad \forall t \in [0, \frac{1}{2}] \Rightarrow \mathcal{A}y \text{ est symétrique sur } [0, 1].$$

Par conséquent, $\mathcal{A}y \in P_2$ et $\mathcal{A} : P_2 \rightarrow P_2$.

• Montrons maintenant que les conditions du théorème 2.2.3, notées 1, 2 et 3 sont satisfaites.

1) D'après (*), nous avons $\alpha(y) \leq \|y\|$, $\forall y \in P_2$.

2) Soit $y \in P_c$, alors $\|y\| \leq c \Rightarrow 0 \leq \max_{0 \leq t \leq 1} y(t) \leq c \Rightarrow y(t) \in [0, c]$, et d'après 3, $f(y(s)) < 8c$, $0 \leq s \leq 1$. En utilisant la propriété 3 de la fonction de Green, on trouve

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}y\| &= \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 G(t, s) f(y(s)) ds \\ &< 8c \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 G(t, s) ds \\ &< 8c \frac{1}{8} = c. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{A}(P_c) \subset P_c$.

3) Soit $y \in P_a$. Alors par 1, on obtient $f(y(s)) < 8a$, $0 \leq s \leq 1$. Nous déduisons comme ci-dessus, que $\|\mathcal{A}y\| < a$, ce qui montre que $\mathcal{A}(P_a) \subset P_a$. La condition 2. est donc satisfaite.

4) On a : $y(t) = 2b$ est un élément de $\mathcal{S}(\alpha, b, 2b)$, car $\|y\| = \max_{0 \leq t \leq 1} (2b) = 2b$ et $\alpha(y(t)) = \min_{\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{3}{4}} (2b) = 2b > b$, donc $\{y \in \mathcal{S}(\alpha, b, 2b) : \alpha(y) > b\} \neq \emptyset$. De plus, si $y \in \mathcal{S}(\alpha, b, 2b)$, alors $\alpha(y) = y(\frac{1}{4}) = \min_{\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{3}{4}} (y) \geq b$, ceci entraîne que

$$b \leq \min_{\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{3}{4}} y(t) \leq y(s) \leq \max_{0 \leq t \leq 1} y(t) = \|y\| \leq 2b.$$

i.e : $b \leq y(s) \leq 2b$, $\forall s \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$. Or, la condition 2 nous donne

$$f(y(s)) \geq 16b, \quad \forall y \in \mathcal{S}(\alpha, b, 2b) \text{ et } \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{3}{4}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 \alpha(\mathcal{A}y) &= \min_{\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{3}{4}} \int_0^1 G(t, s) f(y(s)) ds \\
 &= \int_0^1 G\left(\frac{1}{4}, s\right) f(y(s)) ds \\
 &> \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G\left(\frac{1}{4}, s\right) f(y(s)) ds \\
 &> 16b \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G\left(\frac{1}{4}, s\right) ds \\
 &> b, \text{ car } \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G\left(\frac{1}{4}, s\right) ds = \frac{1}{16}.
 \end{aligned}$$

Alors, la condition 1 est satisfaite.

5) Finalement, montrons que la condition 3 est satisfaite, i.e. si $y \in \mathcal{S}(\alpha, b, c)$ telle que $\|\mathcal{A}y\| > 2b$, on a : $\alpha(\mathcal{A}y) > b$. Soit $y \in \mathcal{S}(\alpha, b, c)$ telle que $\|\mathcal{A}y\| > 2b$. Alors

$$\begin{aligned}
 \alpha(\mathcal{A}y) &= (\mathcal{A}y)\left(\frac{1}{4}\right) \\
 &= \int_0^1 G\left(\frac{1}{4}, s\right) f(y(s)) ds \\
 &= \int_0^1 \frac{G\left(\frac{1}{4}, s\right)}{G\left(\frac{1}{2}, s\right)} G\left(\frac{1}{2}, s\right) f(y(s)) ds \\
 &\geq \left(\min_{0 \leq r \leq 1} \frac{G\left(\frac{1}{4}, r\right)}{G\left(\frac{1}{2}, r\right)}\right) \int_0^1 G\left(\frac{1}{2}, s\right) f(y(s)) ds \\
 &\geq \frac{1}{2} (\mathcal{A}y)\left(\frac{1}{2}\right) \\
 &\geq \frac{1}{2} \|\mathcal{A}y\| \\
 &> b.
 \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Ainsi, on a vérifié toutes les hypothèses du théorème de Leggett-Williams. Ce dit théorème, assure l'existence de trois points fixes positifs y_1, y_2 et y_3 qui sont des solutions du problème (P) considéré. ■

3.3 Application du théorème du point fixe d'expansion et de compression d'un cône de type fonctionnel

- **Introduction**

Dans cette partie, on va étudier l'existence de solutions positives pour le problème aux limites du second ordre, posé sur la demi-droite réelle positive, suivant:

$$\begin{cases} -y''(t) + cy'(t) + \lambda y(t) = f(t, y(t)), & t \in I, \\ y(0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0. \end{cases} \quad (\mathcal{P}_1)$$

où $I =]0, +\infty[$, les paramètres c, λ sont des constantes réelles strictement positives et $f : I \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction continue vérifiant

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, 0) = 0.$$

Résultat principal

En posant $k = \sqrt{\lambda + \frac{c^2}{4}}$ et $z(t) = y(t)e^{-\frac{c}{2}t}$ dans le problème (\mathcal{P}_1) , on peut reformuler ce problème pour la fonction z comme suit :

$$\begin{cases} -z''(t) + k^2 z(t) = e^{-\frac{c}{2}t} f(t, e^{\frac{c}{2}t} z(t)), & t \in I; \\ z(0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = 0. \end{cases} \quad (\mathcal{P}_2)$$

- Le problème (\mathcal{P}_2) est équivalent à l'équation intégrale

$$z(t) = \int_0^{+\infty} G(t, s) e^{-\frac{c}{2}s} f(s, e^{\frac{c}{2}s} z(s)) ds, \quad (1)$$

où la fonction de Green positive G définie sur $I \times I$ par

$$G(t, s) = \frac{1}{2k} \begin{cases} e^{-ks}(e^{kt} - e^{-kt}), & t \leq s; \\ e^{-kt}(e^{ks} - e^{-ks}), & s \leq t. \end{cases} \quad (2)$$

est déterminée en utilisant la méthode de la variation des constantes.

Ainsi, on a réécrit le problème (\mathcal{P}_2) sous forme d'une équation intégrale, ce qui nous permet de conclure que l'équation

$$y(t) = \int_0^{+\infty} e^{\frac{c}{2}(t-s)} G(t, s) f(s, y(s)) ds, \quad (3)$$

3.3. Application du théorème du point fixe d'expansion et de compression d'un cône de type fonctionnel

est solution du problème (\mathcal{P}_1) .

• Notons que les conditions aux bords $y(0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$ entraînent que $G(0, s) = 0$, $\forall s \geq 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} (e^{\frac{c}{2}t} G(t, s)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} [(e^{ks} - e^{-ks})e^{(\frac{c}{2}-k)t}] = 0$, $\forall s \geq 0 \Rightarrow \frac{c}{2} - k < 0 \Rightarrow k > \frac{c}{2}$.

• Le lemme suivant nous prouvera une estimation du noyau G , et sera utile pour la suite;

Lemme 3.3.1 *La fonction de Green G satisfait les propriétés suivantes :*

1. $G(t, s) \leq \frac{1}{2k}$, $G(t, s)e^{-\mu t} \leq G(s, s)e^{-ks}$, $\forall t, s \in I$ et $\forall \mu \geq k$.

2. $\forall \gamma \in]0, \delta[, \forall t \in [\gamma, \delta], \forall s \in I$, $G(t, s) \geq \Lambda G(s, s)e^{-ks}$.

Où

$$\Lambda = \min\{e^{-k\delta}, e^{k\gamma} - e^{-k\gamma}\} \quad (4)$$

Finalement, pour tous nombres réels positifs $0 < \gamma < \delta$, on va utiliser les notations

$$\mathcal{G}(t) = \int_{\gamma}^{\delta} e^{\frac{c}{2}(t-s)} G(t, s) ds, \quad m = \min_{t \in [\gamma, \delta]} \mathcal{G}(t) \quad \text{et} \quad M = \max_{t \in [\gamma, \delta]} \mathcal{G}(t). \quad (5)$$

Théorème 3.3.1 (a) *La fonction non linéaire $f : I \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est continue et satisfait la condition de croissance polynômiale suivante :*

$$\exists p > 0 : p \neq 1, \quad 0 \leq f(t, y) \leq a(t) + b(t)y^p, \quad \forall (t, y) \in I \times \mathbb{R}_+, \quad (6)$$

où les fonctions $a, b \in C(I, \mathbb{R}_+)$ vérifient

$$\exists \theta > k + \frac{c}{2} \quad \text{telle que} \quad M_2 = \int_0^{+\infty} e^{(p\theta - k - \frac{c}{2})s} b(s) ds < \infty. \quad (7)$$

(b) *En notant $M_1 = \int_0^{+\infty} e^{-(k + \frac{c}{2})s} a(s) ds$, alors*

$$\exists R > 0, \quad \frac{1}{2k}(M_1 + M_2 R^p) \leq R. \quad (8)$$

(c) *On suppose qu'il existe $\gamma \in]0, \delta[$ tel que*

$$H = H(\gamma, \delta, \theta; R, f) = \min_{t \in [\gamma, \delta], y \in [0, R e^{\theta \delta}]} f(t, y) > 0. \quad (9)$$

Alors,

3.3. Application du théorème du point fixe d'expansion et de compression d'un cône de type fonctionnel

1. Le problème (\mathcal{P}_1) admet une solution positive y^* avec les propriétés :

$$\|y^*\|_\theta = \sup_{t \in I} (e^{-\theta t} y^*(t)) \leq R \quad , \quad \Lambda \|y^*\|_\theta \leq \min_{t \in [\gamma, \delta]} y^*(t). \quad (10)$$

2. Pour tout

$$0 < r < \min(\Lambda R, H(m + M)), \quad (11)$$

y^* satisfait

$$r \leq \min_{t \in [\gamma, \delta]} y^*(t) + \max_{t \in [\gamma, \delta]} y^*(t). \quad (12)$$

3. Par ailleurs, pour tout $t \in I$, les comparaisons suivantes sont vraies :

$$y_l(t) \leq y^*(t) \leq y_u^*(t) \leq U^n y_u(t), \forall n \in \mathbb{N},$$

où l'application U définie sur X est telle que

$$\forall t \in I, (Uy)(t) = \int_0^{+\infty} e^{\frac{\theta}{2}(t-s)} G(t, s) [a(s) + b(s)|y(s)|^p] ds, \quad (13)$$

$y_u^* = \lim_{n \rightarrow +\infty} U^n y_u$ et les fonctions y_l, y_u sont définies sur I par

$$y_l(t) = H\mathcal{G}(t) \quad \text{et} \quad y_u(t) = R e^{\theta t}. \quad (14)$$

Présentation du problème

Soient θ, γ et $\delta \in \mathbb{R}$ tels qu'ils sont dans (7) et (9). Considérons l'espace de Banach

$$X = \{y \in C(I, \mathbb{R}) : \sup_{t \in I} (e^{-\theta t} |y(t)|) < \infty\},$$

muni de la norme:

$$\|y\|_\theta = \sup_{t \in I} (e^{-\theta t} |y(t)|).$$

Soit P le cône positif défini sur X par

$$P = \{y \in X : y \geq 0 \text{ sur } I \text{ et } \min_{t \in [\gamma, \delta]} y(t) \geq \Lambda \|y\|_\theta\}.$$

Sur le cône P , on introduit les fonctionnelles $\alpha, \beta : P \rightarrow \mathbb{R}_+$ telles que

$$\alpha(y) = \min_{t \in [\gamma, \delta]} y(t) + \max_{t \in [\gamma, \delta]} y(t); \quad \beta(y) = \|y\|_\theta. \quad (15)$$

Remarque 3.3.1 Si on considère la fonctionnelle α telle que $\alpha(y) = \min_{t \in [\gamma, \delta]} y(t)$, alors la partie (b) du théorème précédent, aura pour résultat:

$$\forall r : 0 < r < \min(\Lambda R, Hm), \quad y^* \text{ vérifie: } r \leq \min_{t \in [\gamma, \delta]} y^*(t).$$

Maintenant, on considère sur X , l'opérateur F défini par

$$\forall t \in I, \quad (Fy)(t) = \int_0^{+\infty} e^{\frac{\epsilon}{2}(t-s)} G(t, s) f(s, y(s)) ds. \quad (16)$$

D'après (3), y est une solution du problème (\mathcal{P}_1) si et seulement si y est un point fixe de l'opérateur F sur X , et inversement.

Par l'utilisation des théorèmes 2.1.7 et 2.1.8, on va démontrer le théorème 3.3.1 en deux parties. Mais avant de commencer cette démonstration, nous étudions d'abord, dans les lemmes suivants, les propriétés principales de l'opérateur non linéaire F .

Lemme 3.3.2 $F(X) \subset X$ et $F(P) \subset P$.

Démonstration. • Montrons d'abord que

$$\forall y \in X, \quad F(y) \in X. \quad \text{i.e.} \quad \forall y \in X, \quad \sup_{t \in I} (e^{-\theta t} |(Fy)(t)|) < \infty.$$

Soit $y \in X$, donc $\sup_{t \in I} (e^{-\theta t} |y(t)|) < \infty$. Si on choisit $\mu = \theta - \frac{\epsilon}{2}$ dans la partie 1 du lemme 3.3.1, alors par (7), $\mu > k$, et en utilisant (6), on aura les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} 0 &\leq e^{-\theta t} (Fy)(t) \\ &\leq e^{-\theta t} \int_0^{+\infty} e^{\frac{\epsilon}{2}(t-s)} G(t, s) f(s, y(s)) ds \\ &\leq e^{-(\theta - \frac{\epsilon}{2})t} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\epsilon}{2}s} G(t, s) f(s, y(s)) ds \\ &\leq e^{-(\theta - \frac{\epsilon}{2})t} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\epsilon}{2}s} G(t, s) [a(s) + b(s)|y(s)|^p] ds \\ &\leq \int_0^{+\infty} e^{-(k + \frac{\epsilon}{2})s} G(s, s) [a(s) + b(s)|y(s)|^p] ds \\ &\leq \frac{1}{2k} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(k + \frac{\epsilon}{2})s} a(s) ds + \int_0^{+\infty} e^{-(k + \frac{\epsilon}{2})s} b(s) |y(s)|^p ds \right) \\ &\leq \frac{1}{2k} (M_1 + [\sup_{s \in I} (e^{-\theta s} |y(s)|)^p] \int_0^{+\infty} e^{(p\theta - k - \frac{\epsilon}{2})s} b(s) ds) \\ &\leq \frac{1}{2k} (M_1 + M_2 \|y\|_\theta^p) \\ &\leq \|y\|_\theta < \infty, \quad \text{d'après (8) en prenant } R = \|y\|_\theta. \end{aligned}$$

• Maintenant, on montre que $F(P) \subset P$.

En effet, soit $y \in P$, alors $y \geq 0$ sur I et $\min_{t \in [\gamma, \delta]} y(t) \geq \Lambda \|y\|_\theta$. Il est clair que $(Fy)(t) \geq 0$, $\forall t \in I$, de plus, en utilisant successivement la partie 2 et la partie 1 du lemme 3.3.1 avec $\mu = \theta - \frac{c}{2}$, on obtient pour tout $t \in [\gamma, \delta]$:

$$\begin{aligned} (Fy)(t) &\geq \Lambda \int_0^{+\infty} e^{\frac{c}{2}(\gamma-s)} G(s, s) f(s, y(s)) ds \\ &\geq \Lambda e^{-\theta\tau} e^{\frac{c}{2}\gamma} \int_0^{+\infty} e^{\frac{c}{2}(\tau-s)} G(\tau, s) f(s, y(s)) ds. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \min_{t \in [\gamma, \delta]} (Fy)(t) &\geq \Lambda e^{\frac{c}{2}\gamma} e^{-\theta\tau} \int_0^{+\infty} e^{\frac{c}{2}(\tau-s)} G(\tau, s) f(s, y(s)) ds \\ &\geq \Lambda e^{\frac{c}{2}\gamma} (\sup_{\tau \in I} e^{-\theta\tau} |(Fy)(\tau)|) \\ &\geq \Lambda e^{\frac{c}{2}\gamma} \|Fy\|_\theta \\ &\geq \Lambda \|Fy\|_\theta. \end{aligned}$$

Ceci montre que $Fy \in P$, d'où $F(P) \subset P$. ■

Lemme 3.3.3 F est complètement continu.

Démonstration. La démonstration est basée sur le critère de compacité de Zima (voir Annexes).

i) Soit $\Omega_1 = \{y \in X : \|y\|_\eta < R\}$ et $\Omega_2 = \{y \in X : \|y\|_\theta < R\}$ avec $0 < \eta < \theta$. La famille $\{Fy : y \in P \cap \overline{\Omega}\}$ est donc uniformément bornée au sens de la norme $\|\cdot\|_\eta$. En effet,

$$\|Fy\|_\eta \leq \frac{1}{2k} (M_1 + M_2 R^p) \leq R < \infty, \forall y \in P \cap \overline{\Omega}.$$

ii) La famille $\{Fy : y \in P \cap \overline{\Omega}\}$ est presque équicontinue sur I . [6].

iii) En prenant $q(t) = e^{-\eta t}$, on vérifie que:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{p(t)}{q(t)} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\theta t}}{e^{-\eta t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(\eta-\theta)t} \\ &= 0, \text{ car } \eta - \theta < 0. \end{aligned}$$

3.3. Application du théorème du point fixe d'expansion et de compression d'un cône de type fonctionnel

Donc $F(P \cap \overline{\Omega}) = \{Fy : y \in P \cap \overline{\Omega}\}$ est relativement compact. De plus, F est continu $P \cap \overline{\Omega}$ d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, alors F est complètement continu. ■

Démonstration. (du théorème 3.3.1)

1^{ère} partie : (1 et 2)

1) Montrons que la condition (C_1) du théorème 2.1.7 est satisfaite. En effet,

- D'après la propriété (3) du théorème 1.1.1, P est normal (avec la constante de normalité $N = 1$).

- Montrons que $\overline{P}(\alpha, r) \subset P(\beta, R)$.

Si $y \in \overline{P}(\alpha, r)$, alors

$$\begin{aligned} r &\geq \alpha(y) = \min_{t \in [\gamma, \delta]} y(t) + \max_{t \in [\gamma, \delta]} y(t) \\ &\geq \min_{t \in [\gamma, \delta]} y(t) \\ &\geq \Lambda \|y\|_\theta. \end{aligned}$$

Par (11), on obtient:

$$\|y\|_\theta \leq \frac{r}{\Lambda} < R \Rightarrow \beta(y) < R \Rightarrow y \in P(\beta, R).$$

- Par ailleurs, pour tout $y \in \partial P(\alpha, r)$, $z \in \partial P(\beta, R)$, $\lambda \in (0, 1]$ et $\mu \geq 1$, les fonctionnelles α et β satisfont les propriétés

$$\alpha(\lambda y) = \lambda \alpha(y), \quad \beta(\mu z) = \mu \beta(z) \text{ et } \beta(0_X) = 0.$$

2) Montrons que $\alpha(Fy) \geq r$, $\forall y \in \partial P(\alpha, r)$.

En effet, soit $y \in \partial P(\alpha, r)$, donc $\alpha(y) = \min_{t \in [\gamma, \delta]} y(t) + \max_{t \in [\gamma, \delta]} y(t) = r$. Comme ci-dessus, on trouve $\|y\|_\theta < R$, alors pour tout $t \in [\gamma, \delta]$, $0 < y(t) \leq Re^{\theta\delta}$ et par (5) et (11), on

obtient respectivement les estimations suivantes :

$$\begin{aligned}
\alpha(Fy) &= \min_{t \in [\gamma, \delta]} (Fy)(t) + \max_{t \in [\gamma, \delta]} (Fy)(t) \\
&= \min_{t \in [\gamma, \delta]} \int_0^{+\infty} e^{\frac{c}{2}(t-s)} G(t, s) f(s, y(s)) ds + \max_{t \in [\gamma, \delta]} \int_0^{+\infty} e^{\frac{c}{2}(t-s)} G(t, s) f(s, y(s)) ds \\
&\geq \min_{t \in [\gamma, \delta]} \int_{\gamma}^{\delta} e^{\frac{c}{2}(t-s)} G(t, s) f(s, y(s)) ds + \max_{t \in [\gamma, \delta]} \int_{\gamma}^{\delta} e^{\frac{c}{2}(t-s)} G(t, s) f(s, y(s)) ds \\
&\geq \min_{t \in [\gamma, \delta], y \in [0, Re^{\theta\delta}]} f(t, y) \left[\min_{t \in [\gamma, \delta]} \int_{\gamma}^{\delta} e^{\frac{c}{2}(t-s)} G(t, s) ds + \max_{t \in [\gamma, \delta]} \int_{\gamma}^{\delta} e^{\frac{c}{2}(t-s)} G(t, s) ds \right] \\
&\geq \min_{t \in [\gamma, \delta], y \in [0, Re^{\theta\delta}]} f(t, y) (m + M) \\
&\geq \frac{r}{m + M} (m + M) = r.
\end{aligned}$$

Donc, $\alpha(Fy) \geq r, \forall y \in \partial P(\alpha, r)$.

3) Montrons que $\beta(Fy) \leq R, \forall y \in \partial P(\beta, R)$.

Soit $y \in \partial P(\beta, R)$, donc $\|y\|_{\theta} = R$. Par les démonstrations des lemmes 3.3.2, 3.3.3 et (8), on déduit que pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned}
e^{-\theta t} (Fy)(t) &\leq \frac{1}{2k} (M_1 + M_2 R^p) \\
&\leq R.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\sup_{t \in I} (e^{-\theta t} (Fy)(t)) = \|Fy\|_{\theta} \leq R.$$

D'où $\beta(Fy) \leq R, \forall y \in \partial P(\beta, R)$.

4) Montrons que $\inf_{y \in \partial P(\beta, \alpha, r, R)} \|Fy\|_{\theta} > 0$. En effet, pour un certain $t_0 \in I$, on a :

$$\begin{aligned}
e^{-\theta t_0} (Fy)(t_0) &= e^{-\theta t_0} \int_0^{+\infty} e^{\frac{c}{2}(t_0-s)} G(t_0, s) f(s, y(s)) ds \\
&\geq e^{-\theta t_0} \min_{t \in [\gamma, \delta], y \in [0, Re^{\theta\delta}]} f(t, y) \int_{\gamma}^{\delta} e^{\frac{c}{2}(t_0-s)} G(t_0, s) ds \\
&\geq \frac{r}{m + M} \left(\min_{t \in [\gamma, \delta]} \int_{\gamma}^{\delta} e^{\frac{c}{2}(t-s)} G(t, s) ds \right) e^{-\theta t_0} \\
&\geq \frac{r}{m + M} m e^{-\theta t_0} = M_0.
\end{aligned}$$

Par passage au sup sur $t \in I$, on trouve alors

$$\sup_{t \in I} (e^{-\theta t} (Fy)(t)) = \|Fy\|_{\theta} \geq M_0 > 0.$$

Donc,

$$\inf_{y \in \partial P(\beta, \alpha, r, R)} \|Fy\|_\theta > 0.$$

Ainsi, on a vérifié l'hypothèse (\mathbf{C}_1) du théorème 2.1.7, et par les lemmes 3.3.2 et 3.3.3, on déduit que le problème (\mathcal{P}_1) admet une solution positive $y^* \in \overline{P(\beta, \alpha, r, R)}$. Cette solution est de classe $C^2(I, \mathbb{R}_+)$.

2^{ème} partie : (3)

En définissant l'opérateur croissant $U : P \rightarrow P$ par (13) et en tenant compte des assertions (\mathbf{E}_1) et (\mathbf{E}_2) dans le théorème 2.1.8, on aura donc,

$$1) y^* \in [y_l, y_u].$$

En effet, comme $\beta(y^*) \leq R$, alors $y^*(t) \leq Re^{\theta t} = y_u(t)$, $\forall t \in I$. D'autre part, pour tout $t \in I$, on a :

$$\begin{aligned} y^*(t) &= \int_0^{+\infty} e^{\frac{\epsilon}{2}(t-s)} G(t, s) f(s, y^*(s)) ds \\ &\geq \int_\gamma^\delta e^{\frac{\epsilon}{2}(t-s)} G(t, s) f(s, y^*(s)) ds \\ &\geq \min_{t \in [\gamma, \delta], y^* \in [0, Re^{\theta \delta}]} f(t, y^*) \mathcal{G}(t, s) \\ &\geq H\mathcal{G}(t, s) = y_l(t). \end{aligned}$$

Donc, $\forall t \in I$, $y_l(t) \leq y^*(t) \leq y_u(t)$.

$$2) Fy \in [y_l, U_y].$$

En effet, $\forall y \in P$, par (6) on aura :

$$\begin{aligned} (Fy)(t) &= \int_0^{+\infty} e^{\frac{\epsilon}{2}(t-s)} G(t, s) f(s, y(s)) ds \\ &\leq \int_0^{+\infty} e^{\frac{\epsilon}{2}(t-s)} G(t, s) [a(s) + b(s)|y(s)|^p] ds \\ &\leq (Uy)(t), \quad \forall t \in I. \end{aligned}$$

Par ailleurs, si $y \in [y_l, y_u]$, alors pour tout $t \in [\gamma, \delta]$, on a $y(t) \in [0, Re^{\theta \delta}]$, donc les estimations suivantes ont lieu :

$$\begin{aligned} (Fy)(t) &\geq \int_\gamma^\delta e^{\frac{\epsilon}{2}(t-s)} G(t, s) f(s, y(s)) ds \\ &\geq H\mathcal{G}(t, s) = y_l(t). \end{aligned}$$

3.3. Application du théorème du point fixe d'expansion et de compression d'un cône de type fonctionnel

Maintenant, on définit sur P , la fonction exponentielle y_u par (14) comme suit :

$$y_u(t) = Re^{\theta t}, \quad \forall t \in I.$$

3) $Uy_u \leq y_u$.

En effet, comme $\theta > k + \frac{c}{2}$, on obtient donc par le lemme 3.3.1, ainsi que (6) et (8) respectivement, les estimations :

$$\begin{aligned} (Uy_u)(t) &= \int_0^{+\infty} e^{\frac{c}{2}(t-s)} G(t, s) [a(s) + b(s) |y_u(s)|^p] ds \\ &= \int_0^{+\infty} e^{\theta t} e^{-(\theta - \frac{c}{2})t - \frac{c}{2}s} G(t, s) [a(s) + b(s) |y_u(s)|^p] ds \\ &\leq \int_0^{+\infty} e^{\theta t} e^{-(\mu + \frac{c}{2})s} G(s, s) [a(s) + b(s) R^p e^{p\theta s}] ds, \quad (\text{en posant } \mu = \theta - \frac{c}{2}) \\ &\leq \frac{1}{2k} e^{\theta t} \left[\int_0^{+\infty} e^{-(k + \frac{c}{2})s} a(s) ds + R^p \int_0^{+\infty} e^{(p\theta - k - \frac{c}{2})s} b(s) ds \right] \\ &\leq \frac{1}{2k} (M_1 + M_2 R^p) e^{\theta t} \\ &\leq R e^{\theta t} = y_u(t), \quad \forall t \in I. \end{aligned}$$

Finalement, la croissance de U nous donne $U^2 y_u \leq U y_u$, et par le lemme 3.3.4 (voir Annexes), on peut conclure que U est complètement continu. ■

Conclusion

On définit sur X , l'opérateur constant L par :

$$Ly = y_l.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L^n y = y_l$ et $Ly \leq Fy$. De plus, par l'extension du théorème du point fixe d'expansion et de compression d'un cône de type fonctionnel, la solution y^* du problème (\mathcal{P}_1) satisfait pour tout $n \in \mathbb{N}$, les inégalités suivantes:

$$y_l(t) = Ly_l(t) = L^n y_l(t) \leq y^*(t) \leq y_u^*(t) \leq U^n y_u(t),$$

où $y_u^* = \lim_{n \rightarrow +\infty} U^n y_u$.

Annexes

Théorèmes d'extension de Dugundji

Théorème 1 : Soient X et Y deux espaces vectoriels normés, $A \subset X$ une partie fermée de X et $f : A \rightarrow Y$ une application continue. Alors f admet une extension continue $\tilde{f} : X \rightarrow Y$ telle que $\tilde{f}(X) \subset \text{Conv}(f(A))$.

Théorème 2 : Soient X et Y deux espaces de Banach, $A \subset X$ une partie fermée bornée de X et $f : A \rightarrow Y$ une application compacte. Alors f admet une extension compacte $\tilde{f} : X \rightarrow Y$ telle que $\tilde{f}(X) \subset \text{Conv}(f(A))$.

Le théorème suivant est utilisé comme outil pour la démonstration du théorème 2.1.8.

Théorème 3 : Soient P un cône normal dans un espace de Banach réel X et $\mathcal{A} : P \rightarrow X$ un opérateur croissant, complètement continu. Si $u \in P$ avec $\mathcal{A}u \leq u$ et s'il existe $v \in P$ tel que $v \leq \mathcal{A}^n u, \forall n \in \mathbb{N}$, alors $\{\mathcal{A}^n u\}_{n=1}^\infty$ est une série décroissante minorée par v . De plus, il existe $u^* \in P$ tel que

$$u^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{A}^n u,$$

avec

$$v \leq u^* \leq \mathcal{A}^n u \leq \mathcal{A}^{n-1} u \leq \dots \leq \mathcal{A}u.$$

Critère de compacité d'Ascoli-Arzéla

Théorème 4 : Soit X un espace métrique compact, Y un espace de Banach et $H \subset \mathcal{C}(X, Y)$ un sous-espace muni de la norme sup. Alors H est relativement compact si et seulement si :

1. H est uniformément borné, i.e.

$$\forall x \in X, \text{ l'ensemble } \{f(x) : f \in H\} \text{ est borné dans } Y.$$

2. H est équicontinu, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \subset \mathcal{V}(x), \forall y \in X; y \in V \Rightarrow \|f(y) - f(x)\|_Y \leq \varepsilon, \forall f \in H.$$

- Cas où $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ et $Y = \mathbb{R}$.

Théorème 5 : Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ une suite vérifiant:

1. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément bornée, i.e.

$$\exists c > 0, \forall n \in \mathbb{N} : \|f_n\| \leq c \|g\|.$$

2. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équicontinue, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon), \forall x, y \in [a, b] : |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente. (i.e. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est relativement compacte.)

Corollaire : Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$, i.e. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, indépendamment de n , alors elle admet une sous-suite convergente dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

Démonstration. • $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \Rightarrow 1$. (Evident)

- $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \Rightarrow 2$. En effet, pour tout $x, y \in [a, b]$, on a :

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(y)| &\leq |f'_n(\xi)| |x - y|, \quad \xi \in]x, y[\text{ et } n \in \mathbb{N} \\ &\leq c |x - y|, \end{aligned}$$

il suffit donc de prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$, (indépendant de n). ■

Critère de compacité de Zima

Soit $p : I \rightarrow I$ une fonction continue sur $I =]0, +\infty[$. On désigne par X l'espace de Banach défini par

$$X = \{y \in C(I) : \sup_{t \in I} |y(t)|p(t) < \infty\}$$

muni de la norme de type Bieleck's suivante:

$$\|y\|_p = \sup_{t \in I} |y(t)|p(t) < \infty.$$

Finalement, donnons la définition suivante:

Définition : Un ensemble de fonctions $u \in \Omega \subset X$ est dit presque-équicontinu, s'il l'est aussi sur tout intervalle $[0, T]$, $0 < T < +\infty$.

Lemme : Si la fonction $u \in \Omega$ est complètement équicontinue sur $I =]0, +\infty[$ et bornée uniformément au sens de la norme $\|\cdot\|_q$ telle que $q \in C(I, I)$ vérifiant

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{p(t)}{q(t)} = 0.$$

Alors, Ω est relativement compact dans X .

Théorème de la convergence dominée de Lebesgue

Théorème 6 : Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions appartenant à $L^1(\Omega)$ avec $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

On suppose que :

1. $f_n(x) \rightarrow f(x)$ p.p sur Ω ;
2. Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq g(x) \text{ p.p sur } \Omega.$$

Alors,

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0.$$

Bibliographie

- [1] H. Amann, Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces, *SIAM Review* 18 (1976), 620 – 709.
- [2] R. Avery & D. Anderson, Fixed point theorem of cone expansion and compression of functional type, *J. Differ. Eqn. Appl.* 8(2002)1073 – 1083.
- [3] R. Avery, D. Anderson & R. Krueger, An extension of the fixed point theorem of Cone Expansion and Compression of functional type, *International Publication on Applied Nonlinear Analysis*, Volume 13(2006), Number 1, 15 – 26.
- [4] S. Djebali, Degré topologique: théorie et applications, Cours policopié, département de mathématiques, ENS-Kouba, Alger, Algérie, 2007.
- [5] S. Djebali, Problèmes aux limites associés aux E.D.O du second ordre, Département de Mathématiques, E.N.S Kouba, Alger, Algérie. (2007).
- [6] S. Djebali & T. Moussaoui, A Class of second order BVPs on infinite intervals, *Elec. Jour. Qualit. Theo. Diff. Equa.*, 4(2006), 1 – 19.
- [7] S. Djebali & K. Mebarki, Existence Results for a class of BVPs on the Positive Half-line, *Communications on Applied Nonlinear Analysis*, Volume 4(2007), Number 2, 13 – 31,
- [8] J. Droniou, Degrés topologiques et applications, Département de Mathématiques, UMR CNRS 5149, CC 051, Université Montpellier II, Place Eugene Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5, France, 2006.

- [9] D. Guo & V. Lakshmikantham, *Nonlinear Problems in Abstract Cones*, Academic Press, San Diego, 1988.
- [10] J. Henderson & H. Thompson, Multiple symmetric positive solutions for a second order boundary value problem, *Proceedings of the American Mathematical Society* (2000).
- [11] M. Krasnosel'skii, *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations*, Pergamon, Elmsford, NY, (1964).
- [12] O. Kavian , *Introduction à la Théorie des Points Critiques et Applications aux problèmes elliptiques*, Springer Verlag, Math. et Appl., Vol 13, 1993.
- [13] J. Leray & J. Schauder, Topologie et équations fonctionnelles, *Ann. Sci, Ecole. Norm. Sup.* 51(1934), 45 – 78.
- [14] R. Leggett & L. Williams, Multiple positive fixed-points of nonlinear operators on orderd Banach spaces, *Indiana University Mathematics Journal*, 28 (1979), 673 – 688.
- [15] K. Mebarki, *Quelques théorèmes du point fixe sur les cônes et Applications à des équations différentielles ordinaires*, Mémoire de Magistère, Département de Mathématiques, E.N.S-Kouba, Alger, Algérie, 2006.