

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ Abderrahmane Mira - Béjaïa
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES
Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master en mathématiques

Option : Analyse et probabilités

Par

M^{elle}: KHELFAOUI Fahima

Et

M^{elle}: OUCHENE Siham

THÈME

Problème de flot. Application à un réseau de transport

Soutenu le 20\06\2013 devant le jury composé de :

Mr.	BELAID	Ahror	M.C.B Université A-Mira de Bejaïa.	Président.
Mme.	AMAROUCHE	Soraya	M.A.A Université A-Mira de Bejaïa.	Examinatrice.
Mr.	BOURAINÉ	Mohand	M.A.A Université A-Mira de Bejaïa.	Promoteur.

Promotion 2013

Table des matières

Introduction générale	1
1 Généralités sur les graphes	6
1.1 Introduction	6
1.2 Quelques définitions et concepts de base	7
1.2.1 Concepts orientés	7
1.2.2 Concept non orienté	10
1.2.3 Principales définitions	10
1.3 Représentation d'un graphe	16
1.3.1 Matrice d'incidence sommets-arcs	16
1.3.2 Matrice d'incidence sommets-arêtes	17
1.3.3 Matrice d'adjacence ou matrice d'incidence sommets-sommets	18
1.4 Connexité dans les graphes	19
1.4.1 Chaînes et cycles:	19
1.4.2 Connexité	21
1.4.3 Chemins et circuits	22
1.4.4 Forte connexité	24
2 Cycles, cocycles et arbres	25
2.1 Cycles	25
2.1.1 Vecteur représentatif d'un cycle	25
2.1.2 Cycle indépendants - base de cycle	27
2.2 Cocycles	32

2.2.1	Cocycle et vecteur associé à un cocycle	32
2.2.2	Cocycle élémentaire	33
2.2.3	Base de cocycle	34
2.3	Arbres	36
2.3.1	Définitions et propriété	36
2.3.2	Coarbre	40
2.3.3	Arborescence	42
3	Notions de flot et tension	43
3.1	Introduction	43
3.2	Flots: définitions et propriétés	44
3.2.1	Définition	44
3.2.2	Définition algébrique des flots	45
3.2.3	Opérations sur les flots	46
3.2.4	Cycles élémentaires et flots élémentaires	47
3.2.5	Décomposition d'un flot en somme de cycles élémentaires	48
3.2.6	Lemme des arcs colorés de Minty	49
3.2.7	Décomposition en circuits d'un flot positif ou nul	51
3.3	Tensions: définitions et propriétés	52
3.3.1	Définition	52
3.3.2	Propriété sur les tensions	53
4	Le problème de flot de valeur maximum ou de coût minimum	59
4.1	Introduction	59
4.2	Flot de valeur maximale	60
4.3	Définitions	60
4.4	Recherche d'un flot complet	61
4.5	Position du problème	65
4.5.1	Capacité d'une coupe	65
4.5.2	Théorème du flot maximum et de la coupe minimale	67

4.5.3	Graphe d'écart	68
4.6	Algorithme de Ford et Fulkerson	70
4.6.1	Principe de l'algorithme	70
4.7	Organigramme de l'algorithme de Ford et Fulkerson	71
4.7.1	Convergence de l'algorithme	76
4.7.2	Extensions diverses	77
4.7.3	Algorithme de Ford et Fulkerson avec bornes inférieures de capacité	79
4.8	Problème du flot compatible	80
4.8.1	Une condition nécessaire d'existence	80
4.8.2	Algorithme de recherche d'un flot compatible	81
4.8.3	Organigramme de l'algorithme	82
4.9	Flot de coût minimum	86
4.9.1	Formulation du problème	86
4.9.2	Algorithme d'obtention d'un flot de coût minimum	87
4.9.3	Organigramme de d'obtention d'un flot de valeur ϕ_0 donnée, de coût minimum	88
5	Problème de transport	93
5.1	Introduction	93
5.2	Problème de transport	93
5.2.1	Formulation du problème	93
5.2.2	Algorithme Primal-dual	96
5.2.3	Organigramme de l'algorithme Primal-dual	98
Conclusion		105
Bibliographie		106

Introduction générale

La théorie des graphes est un très vaste domaine, en évolution constante tant du point de vue des recherches fondamentales que de celui des applications. Ces dernières sont très nombreuses, elles justifient une recherche importante en algorithmique.

La théorie des graphes offre d'autre part un intérêt pédagogique certain. En effet, les définitions sont simples et de véritables problèmes de recherche peuvent être posés sous forme de « jeux mathématiques ».

Comme les graphes modélisant de très nombreuses situations, les problèmes posés sont des plus « naturels ».

L'un des défauts de la théorie des graphes est le foisonnement des définitions particulières, et des résultats les concernant. On est conduit à se demander où sont les principaux résultats, quels sont les objets centraux de la théorie. Une autre difficulté est l'absence de notation algébrique pour les graphes. Un graphe est toujours un objet global, dont la définition formelle peut être soit une matrice de 0 et de 1, soit une liste de sommets et de couples de sommets, soit une description par une propriété, soit un dessin.

Une valeur, très souvent numérique mais pas exclusivement, est souvent attachée aux sommets et/ou aux arcs. La valeur d'un arc pourra être la distance entre deux villes, ou la durée d'un trajet, ou une capacité dans le cas d'un réseau de transport. L'algorithmique des graphes porte très souvent sur des graphes values. Il ne faut pas confondre un graphe et son dessin : un même graphe peut être dessiné de plusieurs façons. La lisibilité de la visualisation est une question importante, et le dessin de graphes est à lui seul un domaine de recherche dont les applications sont nombreuses: fabrication de cartes routières, le problème de flot de valeur maximale ou de coût minimum, représentation d'interactions entre sous-systèmes, problème de transport et d'affectation, pour ne prendre que quelques exemples.

Les problèmes de flot et leurs dérivés: problèmes de transport, d'affectation ... constituent un très important domaine d'application de la théorie des graphes. Sous leur forme la plus simple, ils consistent à organiser de façon optimale, sous diverses contraintes, les mouvements de certaines quantités d'un bien dans un réseau. Ces mouvements concernent, par exemple, l'acheminement d'un produit depuis les centres de production vers les centres de distribution (réseau géographique), la répartition des communications téléphoniques entre les différents centres de gestion (réseau téléphonique), l'organisation de la circulation routière entre plusieurs villes (réseau routier), la distribution des tâches au sein d'un ensemble de personnes (problème d'affectation) ...

Les caractéristiques des flux élémentaires sont supposées suffisantes pour définir n'importe quelle politique de flot. Elles dépendent, bien sûr, du problème étudié: on distingue des caractéristiques physiques telles que les capacités de débit, d'écoulement et de réception, et des caractéristiques économiques telles que les coûts unitaires de mouvement ou d'attente.

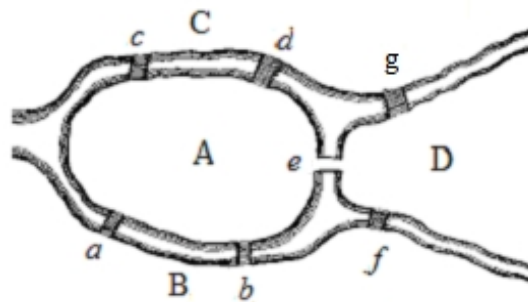
Dans ce mémoire nous portant un intérêt particulier aux problèmes de flots. Nous essayerons dans un premier temps de rappeler quelques définitions et résultats sur la théorie des graphes. Par la suite nous donnerons un aperçu sur les notions de flot et tension. Un intérêt particulier sera donné au problème de flot maximum. Le problème de flot de valeur donnée sera aussi abordé avec une application au problème de transport. Ce mémoire est composé d'une introduction générale, de cinq chapitres et d'une conclusion générale.

Dans le premier chapitre, nous donnerons les concepts de base de la théorie des graphes. Le deuxième chapitre sera consacré à quelques définitions et propriétés sur les cycles, les cocycles et les arbres. Dans le troisième chapitre, nous présenterons les notions de flots et tensions. Les réseaux de transport et les méthodes fondamentales de recherche d'un flot maximum ou de coût minimum feront l'objet du quatrième chapitre.

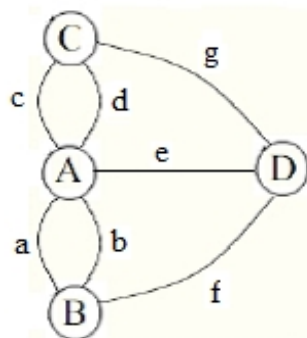
Nous terminerons notre travail par une application permettant de modéliser un problème de transport sous forme d'un problème de flot maximal à coût minimal.

Un bref historique sur la théorie des graphes

Tout le monde s'accorde à considérer que la théorie des graphes est née en 1736 avec la communication d'Euler (1707 – 1783) dans laquelle il proposait une solution au célèbre problème des ponts de Königsberg (Euler, 1736). Le problème posé était le suivant: Deux îles A et D sur la rivière Pregel à Königsberg étaient reliées entre elles ainsi qu'aux rivages B et C à l'aide de sept ponts comme le montre la figure suivante:



Le problème posé consistait, à partir d'une terre quelconque A, B, C, ou D, à traverser chacun des ponts une fois et une seule et à revenir à son point de départ. Euler représenta cette situation à l'aide d'un "dessin" où les sommets représentent les terres et les arêtes, les ponts comme le montre la figure ci-dessous :



Il a montré qu'un tel parcours est impossible.

Pendant les cent années qui suivirent, rien ne fut fait dans ce domaine de recherche. En 1847, Kirchhoff (1824 – 1887) développa la théorie des arbres pour l'appliquer à l'analyse de circuits électriques.

L'un des pionniers de cette période fut König à qui l'on doit le premier ouvrage consacré entièrement à la théorie des graphes (König, 1936). Il est sans doute à l'origine de l'utilisation du terme "graphe" pour désigner ce qui était préalablement considéré comme un ensemble de "points et de flèches".

A partir de 1946, la théorie des graphes a connu un développement intense sous l'impulsion de chercheurs motivés par la résolution de problèmes concrets. Parmi ceux-ci, citons de manière privilégiée Kuhn (1955), Ford et Fulkerson (1956) et Roy (1959). Parallèlement, un important effort de synthèse a été opéré par Claude Berge. Son ouvrage "Théorie des graphes et ses applications" publié en 1958 (Berge, 1958) marque sans doute l'avènement de l'ère moderne de la théorie des graphes par l'introduction d'une théorie des graphes unifiée et abstraite rassemblant de nombreux résultats épars dans la littérature. Depuis, cette théorie a pris sa place, en subissant de très nombreux développements essentiellement dus à l'apparition des calculateurs, au sein d'un ensemble plus vaste d'outils et de méthodes généralement regroupées sous l'appellation "recherche opérationnelle" ou "mathématiques discrètes".

Généralités sur les graphes

1.1 Introduction

La théorie des graphes concerne de nombreux domaines d'application. Leurs objectifs sont distincts mais le langage utilisé est le même, tout au moins en ce qui concerne les définitions et propriétés générales. C'est pour quoi nous consacrons ce premier chapitre à la présentation des concepts de base que nous développerons dans la suite.

Nous distinguons les graphes orientés de ceux qui ne le sont pas.

1.2 Quelques définitions et concepts de base

1.2.1 Concepts orientés

Définition 1.2.1 Un graphe $G = (X, U)$ est déterminé par la donnée:

- d'un ensemble $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dont les éléments sont appelés "sommets". Si $|X| = n$, on dit que G est d'ordre n .
- d'un ensemble $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ dont les éléments $u \in U$ sont des couples ordonnés de sommets appelés des arcs.

Graphiquement, les sommets sont représentés par des points et $u = (i, j)$ sera représenté par une flèche allant du point i vers le point j .

Définition 1.2.2 Soit $u = (i, j)$ un arc de G tel que:

- i est l'extrémité initiale de u .
- j est l'extrémité terminale de u .

Un arc $v = (i, i)$ dont les extrémités coïncident est appelé une boucle.

Exemple 1.2.1

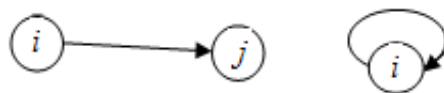


Fig.1-1: Extrémités d'un arc.

Définition 1.2.3 Un p -graphe est un graphe dont lequel il n'existe jamais plus de " p " arcs de la forme (i, j) , entre deux sommets quelconques i et j , pris dans cet ordre.

Un 1-graphe est un graphe tel qu'il n'existe jamais plus d'un arc de la forme (i, j) , $\forall i, j \in X$.

Exemple 1.2.2

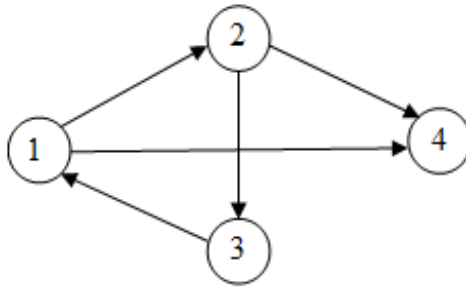


Fig.1-2: Un 1-graphe

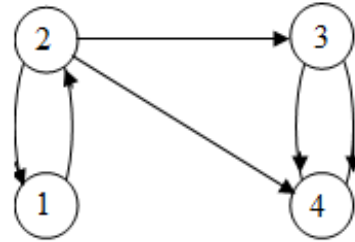


Fig.1-3: Un 2-graphe

Graphes et applications multivoques

Définition 1.2.4 On dit que " j " est un successeur de " i " s'il existe un arc u ayant " i " comme extrémité initiale et " j " comme extrémité terminale. L'ensemble des successeurs d'un sommet $i \in X$ est noté Γ_i^+ , avec Γ^+ est l'application multivoque défini par:

$$\Gamma^+ : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$$

$$i \mapsto \Gamma^+(i) = \Gamma_i^+$$

Définition 1.2.5 On dit que "i" est un prédécesseur de "j" s'il existe un arc u ayant "i" comme extrémité initiale et "j" comme extrémité terminale. L'ensemble des prédécesseurs d'un sommet $j \in X$ est noté Γ_j^- , avec Γ^- est l'application multivoque défini par:

$$\Gamma^- : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$$

$$j \mapsto \Gamma^-(j) = \Gamma_j^-$$

Exemple 1.2.3 Soit le graphe $G = (X, U)$, où $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$,

$$U = \{(x_1, x_2), (x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_3, x_5), (x_4, x_5), (x_5, x_5), (x_5, x_1)\}$$

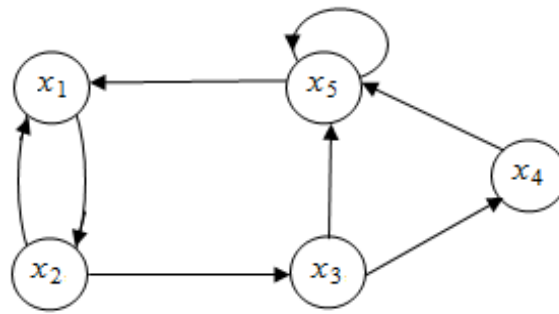


Fig.1-4: Graphe et application multivoque.

Les fonctions multivoques Γ^+ , Γ^- et Γ (où $\Gamma_i = \Gamma_i^+ \cup \Gamma_i^-$) sont définies comme suit:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Γ^+	$\{x_2\}$	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_4, x_5\}$	$\{x_5\}$	$\{x_1, x_5\}$
Γ^-	$\{x_2, x_5\}$	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_3, x_4, x_5\}$
Γ	$\{x_2, x_5\}$	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_4, x_5\}$	$\{x_3, x_5\}$	$\{x_1, x_3, x_4, x_5\}$

1.2.2 Concept non orienté

Dans certains graphes on ne s'intéresse pas à l'orientation des arcs. Dans ce cas on parle d'arêtes. Le graphe est souvent appelé multi-graphe.

Définition 1.2.6 *Un graphe est dit simple:*

- *S'il est sans boucle.*
- *S'il n'y a jamais plus d'une arête entre deux sommets quelconques.*

1.2.3 Principales définitions

Définition 1.2.7 *Soit $G = (X, U)$ un graphe, $u = (i, j) \in U$.*

- *i et j sont deux sommets adjacents.*
- *i et j sont adjacents à l'arc u .*
- *l'arc u est adjacent aux sommets i et j , (on dit aussi incident).*
- *Deux arcs u et v sont adjacents s'ils sont adjacents à un même sommet.*

Définition 1.2.8 *A tout sommet i du graphe $G = (X, U)$, on associe:*

- $d_G^+(i)$ "*demi-degré extérieur du sommet i dans G* ": *c'est le nombre d'arcs ayant i comme extrémité initiale.*
- $d_G^-(i)$ "*demi-degré intérieur du sommet i dans G* ": *c'est le nombre d'arcs ayant i comme extrémité terminale.*
- $d_G(i) = d_G^+(i) + d_G^-(i)$ "*degré du sommet i dans G* ": *c'est le nombre d'arcs ayant i comme extrémité.*

Remarque 1.2.1 Un sommet de degré zéro est dit isolé.

Définition 1.2.9 Un graphe est dit régulier si les degrés de tous ses sommets sont égaux.

Exemple 1.2.4 Soit le graphe $G = (X, U)$, où $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$,

$U = \{(x_1, x_2), (x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_3, x_5), (x_5, x_5), (x_5, x_1)\}$

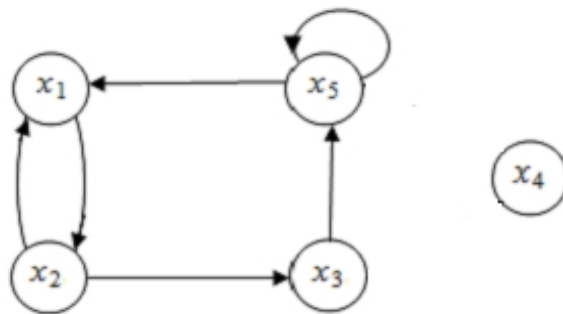


Fig.1-5: Degré des sommets d'un graphe

Nous avons les degrés:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$d_G^+(x)$	1	2	1	0	2
$d_G^-(x)$	2	1	1	0	2
$d_G(x)$	3	3	2	0	4

Ce graphe n'est pas régulier.

Théorème 1.2.1 $G = (X, U)$ un graphe orienté, on a:

$$\sum_{i \in X} d_G^+(i) = \sum_{i \in X} d_G^-(i)$$

Preuve. $G = (X, U)$ un graphe orienté. On a $d_G^+(i) = |\{(i, j) : j \in X \text{ et } (i, j) \in U\}|$.

$$\text{Donc } \sum_{i \in X} d_G^+(i) = \sum_{i \in X} |\{(i, j) : j \in X \text{ et } (i, j) \in U\}| = |U|.$$

On a aussi $d_G^-(i) = |\{(j, i) : i \in X \text{ et } (j, i) \in U\}|$.

$$\text{Alors } \sum_{i \in X} d_G^-(i) = \sum_{i \in X} |\{(j, i) : i \in X \text{ et } (j, i) \in U\}| = |U|. \text{ D'où:}$$

$$\sum_{i \in X} d_G^+(i) = \sum_{i \in X} d_G^-(i)$$

■

Corollaire 1.2.1 Soit $G = (X, U)$ un graphe avec $|U| = m$, la somme des degrés des sommets de G est égale à deux fois le nombre d'arcs de ce graphe.

Preuve. $G = (X, U)$ un graphe.

$$\text{On a: } \sum_{i \in X} d_G(i) = \sum_{i \in X} d_G^+(i) + \sum_{i \in X} d_G^-(i) = |U| + |U| = m + m = 2m. \quad \blacksquare$$

Graphe symétrique:

Définition 1.2.10 un graphe $G = (X, U)$ est dit symétrique si pour toute paire de sommets (i, j) , il existe autant d'arcs de la forme (j, i) que de la forme (i, j) . Si G est un 1-graphe, il est symétrique si et seulement si:

$$(i, j) \in U \implies (j, i) \in U.$$

Graphe antisymétrique:

Définition 1.2.11 un 1-graphe est dit antisymétrique si:

$$(i, j) \in U \implies (j, i) \notin U.$$

Graphe transitif:

Définition 1.2.12 *Un graphe $G = (X, U)$ est transitif si:*

$$((i, k) \in U \text{ et } (k, j) \in U) \implies (i, j) \in U$$

Graphe complet:

Définition 1.2.13

- *Un graphe non orienté $G = (X, U)$ est complet si $\forall (i, j) \in X^2$ il existe une arête entre i et j .*
- *Un 1-graphe $G = (X, U)$ est complet si $\forall (i, j) \in X^2$ il existe un arc de la forme (i, j) et un arc de la forme (j, i) .*

Graphe biparti:

Définition 1.2.14

- *Un graphe est biparti si l'ensemble des sommets peut être partitionné en deux sous-ensembles X_1 et X_2 de sorte que deux sommets quelconques du même sous-ensemble ne soient jamais adjacents. On le note $G = (X_1, X_2, U)$.*
- *Un graphe est biparti complet si: $\forall x_1 \in X_1$ et $\forall x_2 \in X_2$, il existe au moins une arête entre x_1 et x_2 .*
- *Un graphe est biparti simple et complet si: $\forall x_1 \in X_1$ et $\forall x_2 \in X_2$, il existe une et une seule arête entre x_1 et x_2 .*

Exemple 1.2.5 Soit $G = (X, U)$ un graphe où, $X = X_1 \cup X_2$ et $X_1 = \{1, 2\}$,

$X_2 = \{3, 4, 5\}$



Fig.1-6: Graphe biparti

Sous-graphe engendré par un sous-ensemble de sommets:

Définition 1.2.15 Etant donné $A \subset X$, le sous-graphe engendré par A est le graphe G_A dont les sommets sont les éléments de A et dont les arcs sont les arcs de G ayant leurs deux extrémités dans A .

Graphe partiel engendré par un sous-ensemble d'arcs:

Définition 1.2.16 Soient un graphe $G = (X, U)$ et $V \subset U$. Le graphe partiel engendré par $V \subset U$ est le graphe $G' = (X, V)$ ayant le même ensemble X de sommets que G , et dont les arcs sont les arcs de V (on élimine de G les arcs de $U - V$).

Sous-graphe partiel:

Définition 1.2.17 Etant donné un graphe $G = (X, U)$ et $A \subset X$, $V \subset U$ le sous graphe partiel engendré par A et V est le graphe partiel de G_A engendré par V .

Exemple 1.2.6 Soient le graphe $G = (X, U)$, $V \subset U$ et $A \subset X$ tel que $V = \{u_1, u_4, u_6\}$,
 $A = \{1, 2, 3\}$

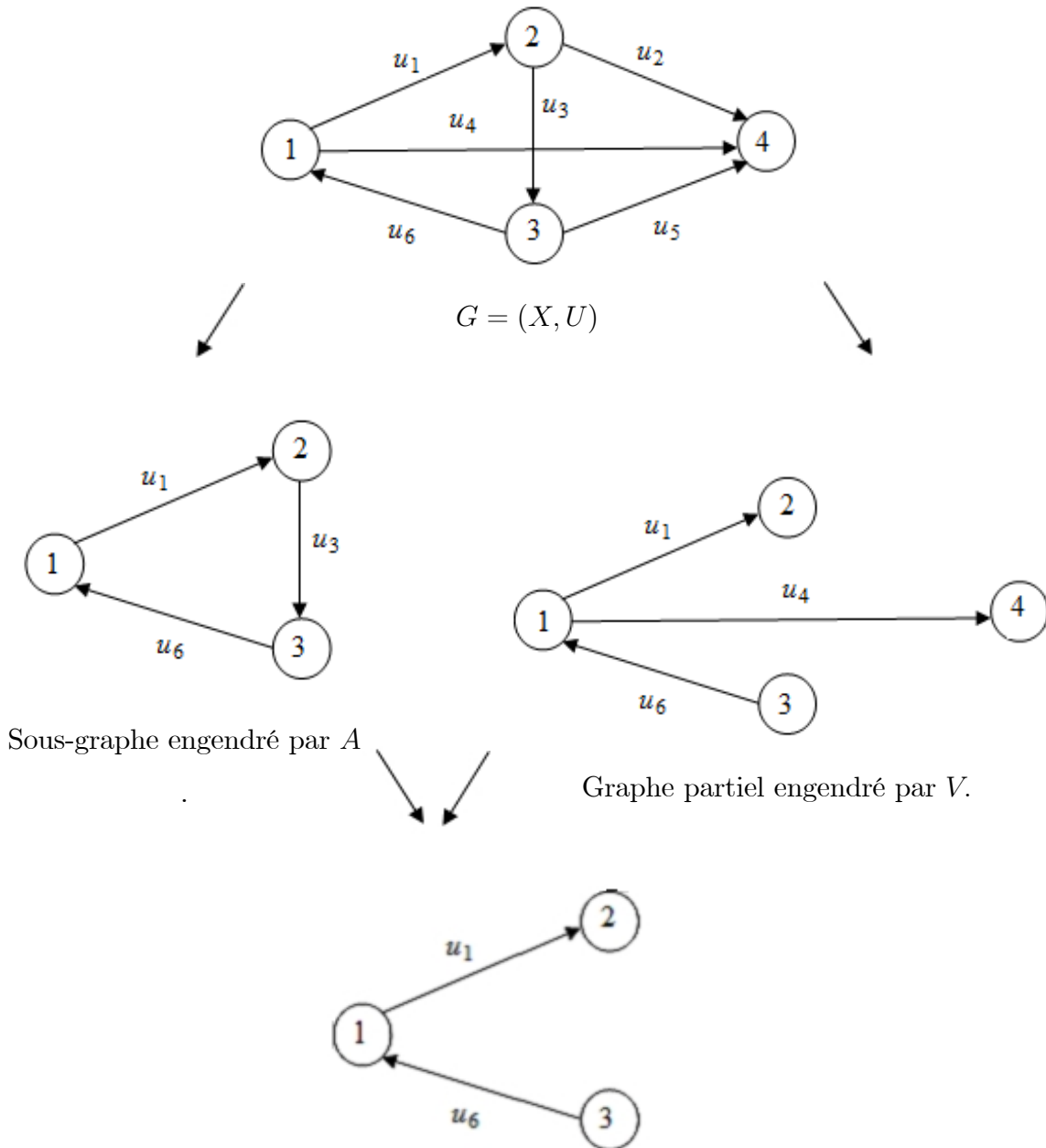


Fig.1-7: Sous-graphe engendré par A et V

1.3 Représentation d'un graphe

1.3.1 Matrice d'incidence sommets-arcs

$G = (X, U)$ un graphe orienté sans boucle, $X = \{1, 2, \dots, n\}$ et $U = \{1, 2, \dots, m\}$.

Définition 1.3.1 La matrice d'incidence sommets-arcs (aux arcs) du graphe G est la matrice A de type $n \times m$ dont l'élément a_{ij} , $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne, est :

$$a_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{si } i \text{ est l'extrémité initiale de l'arc } u_j \\ -1, & \text{si } i \text{ est l'extrémité terminale de l'arc } u_j \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple 1.3.1 Soit le graphe $G = (X, U)$ tel que $X = \{1, 2, 3, 4\}$ et $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$

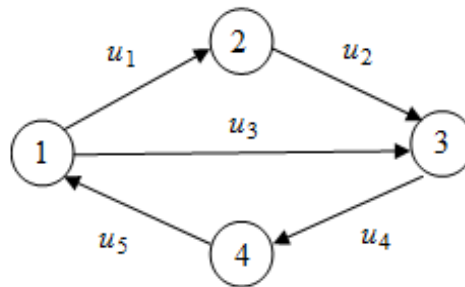


Fig.1-8

A : matrice d'incidence sommets-arcs associée à G .

$$A = \begin{pmatrix} +1 & 0 & +1 & 0 & -1 \\ -1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

Remarques 1.3.1

- 1) Une matrice d'incidence aux arcs d'un graphe contient deux éléments non nuls par colonne qui sont égaux à $+1$ et -1 .
- 2) A toute matrice ayant cette propriété, on peut faire correspondre un graphe dont cette matrice est la matrice d'incidence aux arcs.
- 3) Le demi-degré extérieur (respectivement intérieur, degré) du sommet " i " est égale au nombre de $+1$ (respectivement -1 , de termes non nuls) de la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice d'incidence aux arcs de G .

1.3.2 Matrice d'incidence sommets-arêtes

$G = (X, U)$ graphe non orienté sans boucles avec: $X = \{1, 2, \dots, n\}$ et $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$.

Définition 1.3.2 La matrice d'incidence sommets-arêtes de G est la matrice B de type $n \times m$ dont l'élément b_{ij} est:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si le sommet } i \text{ est l'une des extrémités de l'arête } u_j; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple 1.3.2 Considérons le graphe $G = (X, U)$ ci-dessous :

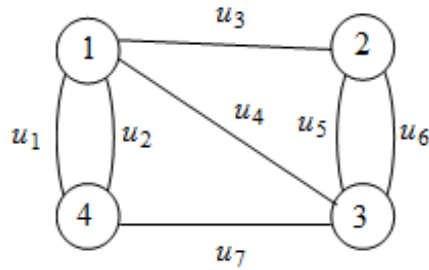


Fig.1-10

B : matrice d'incidence sommets-arêtes associée à G .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.3.3 Matrice d'adjacence ou matrice d'incidence sommets-sommets

Soit $G = (X, U)$ un graphe comportant éventuellement des boucles (pas plus d'une boucle par sommet), $X = \{1, 2, \dots, n\}$ et $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$.

Définition 1.3.3 La matrice d'adjacence du graphe est la matrice C de type $n \times n$ dont

l'élément C_{ij} est :

$$C_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } (i, j) \in U \text{ (il y a un arcs allant de } i \text{ vers } j); \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 1.3.2 Dans le cas d'un graphe simple, on considère qu'à chaque arête (i, j) correspond deux arcs (i, j) et (j, i) . Dans ce cas la matrice est symétrique.

Exemple 1.3.3 Soit le graphe $G = (X, U)$ tel que $X = \{1, 2, \dots, 6\}$ et $U = \{u_1, u_2, \dots, u_8\}$

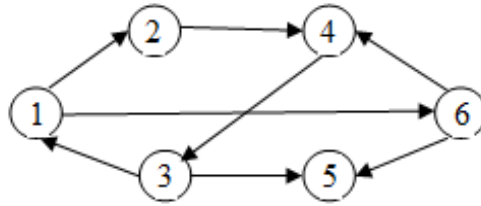


Fig.1-9

C : la matrice d'adjacence associée à G .

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.4 Connexité dans les graphes

1.4.1 Chaînes et cycles:

Soit $G = (X, U)$ un graphe et $(i, j) \in X^2$.

Définition 1.4.1 Une chaîne de longueur q , $L = \{u_1, u_2, \dots, u_q\}$, joignant les sommets i et j dans G est une séquence de q arcs tel que:

- Le premier arc de la séquence (u_1) est adjacent à i par l'une de ses extrémités et au second arc de la séquence (u_2) par son autre extrémités.

- Le dernier arc de la séquence (u_q) est adjacent à j par l'une de ses extrémités et à l'arc précédent de la séquence (u_{q-1}) par son autre extrémités.
- Chaque arc intermédiaire (u_k) $1 < k < q$ est adjacent à l'arc précédent de la séquence (u_{k-1}) par l'une de ses extrémités et à l'arc suivant (u_{k+1}) par son autre extrémités.

Le nombre d'arcs de la séquence est la longueur de la chaîne.

Définition 1.4.2 Une chaîne qui n'utilise pas deux fois le même sommet est dite élémentaire.

Définition 1.4.3 Une chaîne qui n'utilise pas deux fois le même arc est dite simple.

Exemple 1.4.1 Soit le graphe $G = (X, U)$ tel que $X = \{1, 2, 3, 4\}$ et $U = \{u_1, \dots, u_6\}$

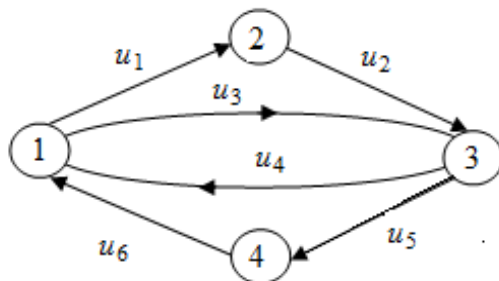


Fig.1-11

$L_1 = \{u_2, u_5, u_6, u_1\}$ est une chaîne de longueur 4 simple et non élémentaire car le sommet 2 est répété.

$L_2 = \{u_5, u_6, u_3, u_4, u_1, u_2, u_4\}$ est une chaîne de longueur 7 qui n'est ni simple ni élémentaire.

Définition 1.4.4

- *Un cycle est une chaîne d'arcs tous distincts dont les extrémités coïncident.*
- *Un cycle élémentaire est un cycle minimal pour l'inclusion c'est-à-dire ne contenant strictement aucun autre cycle. Ainsi, on ne rencontre pas deux fois le même sommet sauf le sommet choisi comme origine de parcours.*

Théorème 1.4.1 (voir [6]) *Une chaîne joignant les sommets "i" et "j" dans G contient une chaîne élémentaire joignant "i" et "j".*

Théorème 1.4.2 (voir [6]) *Tout cycle est union disjointe de cycles élémentaires.*

1.4.2 Connexité

Définition 1.4.5

- *Un graphe $G = (X, U)$ est connexe si $\forall (i, j) \in X^2$, il existe une chaîne joignant "i" et "j".*
- *Un graphe non connexe est constitué de plusieurs composantes connexes. Chaque composante connexe est un graphe connexe, c'est-à-dire un sous-ensemble X_k de sommets tels qu'il existe une chaîne joignant tout couple de sommets quelconques de X_k .*
- *Un graphe est connexe s'il comporte une composante connexe maximale et une seule.*

Exemple 1.4.2 Le graphe $G = (X, U)$ contient deux composantes connexes: $\{1, 2\}$, $\{3, 4, 5\}$

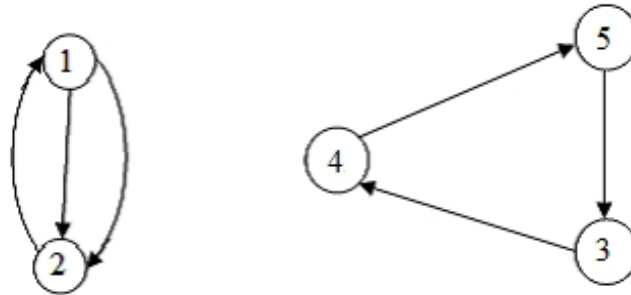


Fig.1-12: Graphe ayant deux composantes connexes

1.4.3 Chemins et circuits

Définition 1.4.6 $G = (X, U)$ un graphe orienté $(i, j) \in X^2$. Un chemin de longueur q ,

$L = \{u_1, u_2, \dots, u_q\}$ allant de i vers j dans G est une séquence de q arcs tel que:

- Le premier arc de la séquence (u_1) est adjacent à i par son extrémité initiale et à l'arc suivant de la séquence (u_2) par son extrémité terminale.
- Le dernier arc de la séquence (u_q) est adjacent à j par son extrémité terminale et à l'arc précédent de la séquence (u_{q-1}) par son extrémité initiale.
- Chaque arc intermédiaire (u_k) , $1 < k < q$, est adjacent à l'arc précédent de la séquence (u_{k-1}) par son extrémité initiale et à l'arc suivant (u_{k+1}) par son extrémité terminale.

Ainsi, un chemin est une chaîne dont tous les arcs sont orientés dans le même sens.

- i est l'extrémité initiale du chemin.
- j est l'extrémité terminale du chemin.

Définition 1.4.7 Un chemin est dit élémentaire si, en le parcourant, on ne rencontre pas deux fois le même sommet.

Un chemin qui n'utilise pas deux fois le même arc est dit simple

Exemple 1.4.3 Soit le graphe $G = (X, U)$ ou $X = \{1, \dots, 5\}$ et $U = \{u_1, u_2, \dots, u_6\}$

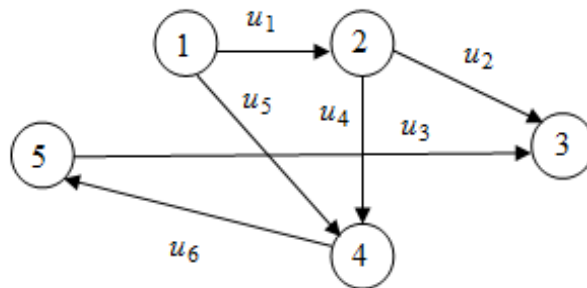


Fig.1-13

$L = \{u_5, u_6, u_3\}$ c'est un chemin de longueur 3 allant du sommet 1 vers le sommet 3 simple et élémentaire.

Définition 1.4.8

- Un circuit est un chemin d'arc tous distincts dont les extrémités coïncident.
- Un circuit est élémentaire s'il est minimal pour l'inclusion.

Théorème 1.4.3 (voir [6]) Un chemin allant de i vers j dans G contient un chemin élémentaire allant de i vers j .

Théorème 1.4.4 (voir [6]) Tout circuit est union disjoints de circuits élémentaires.

1.4.4 Forte connexité

Définition 1.4.9

- Un graphe $G = (X, U)$ est fortement connexe si $\forall (i, j) \in X^2$, il existe un chemin, allant de "i" vers "j" et un autre chemin allant de "j" vers "i".
- Une composante fortement connexe est un sous-ensemble X_k de sommets tel qu'il existe un chemin, allant de "i" vers "j" et un autre chemin allant de "j" vers "i".
- Les différentes composantes fortement connexe définissent une partition de X .
- Un graphe est fortement connexe s'il comporte une seule composante fortement connexe maximale.

Exemple 1.4.4 Soit le graphe $G = (X, U)$ suivant:

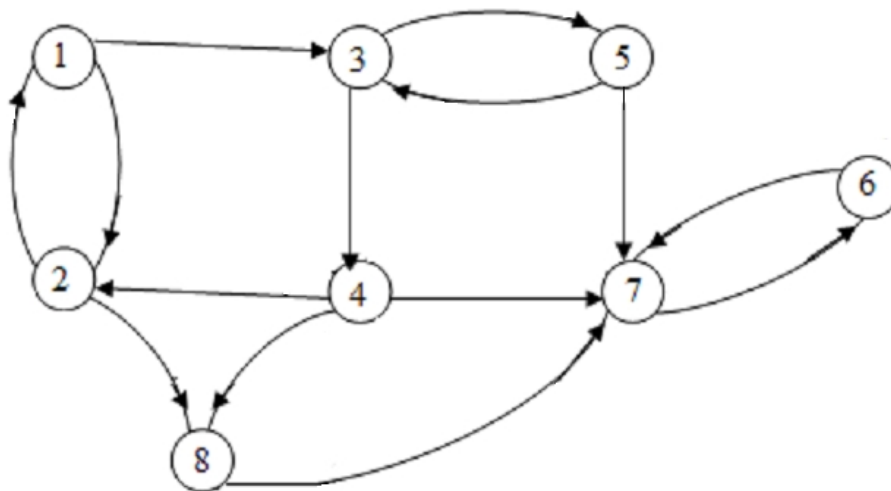


Fig.1-14: Trois composantes fortement connexes X_1, X_2, X_3 .

Ce graphe n'est pas fortement connexe, il est constitué de trois composantes fortement connexes $X_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $X_2 = \{8\}$ et $X_3 = \{6, 7\}$.

Ce chapitre introduit les notions de cycles et cocycles, leurs vecteurs représentatifs, ainsi que les notions de base de cycle et base de cocycle. Il introduit aussi les notions d'arbre et d'arborescence.

2.1 Cycles

2.1.1 Vecteur représentatif d'un cycle

Définition 2.1.1 $G = (X, U)$ un graphe avec $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$.

Soit μ un cycle de G sur lequel on définit un sens de parcours.

Un arc du cycle est orienté dans le sens de parcours (respectivement sens inverse de parcours) du cycle s'il est adjacent à l'arc qui le précède par son extrémité initiale (respectivement terminale).

On désigne par μ^+ (respectivement μ^-) l'ensemble des arcs du cycle μ orientés dans le sens de parcours (respectivement dans le sens inverse de parcours).

Définition 2.1.2 A un cycle μ du graphe G , on associe le vecteur

$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) \in \mathbb{R}^m$, dit vecteur représentatif de μ , défini par:

$$\mu_j = \begin{cases} +1, & \text{si } u_j \in \mu^+; \\ -1, & \text{si } u_j \in \mu^-; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

μ désigne à la fois le cycle et son vecteur représentatif.

Exemple 2.1.1 Soit $G = (X, U)$, où $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ et

$C = (u_1, u_2, u_3, u_6, u_4)$

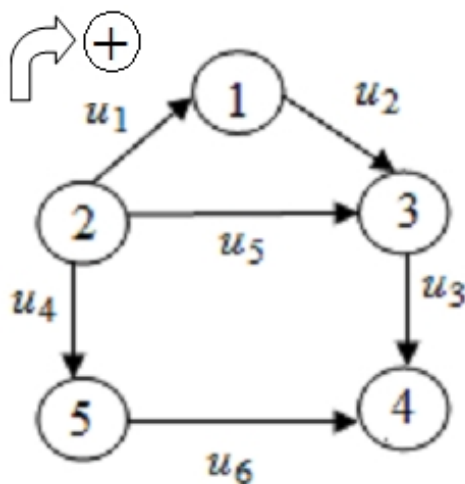


Fig.2-1

Soit μ son vecteur représentatif: $\mu = (+1, +1, +1, -1, 0, -1)$.

Remarques 2.1.1

-le vecteur représentatif d'un circuit à toutes ses composantes non nulles égales à -1 ou $+1$.

-La somme de deux cycles μ^1 et μ^2 indique la somme vectorielle.

Théorème 2.1.1 (voir [14]) *Tout cycle μ est somme de cycles élémentaires disjoints.*

Théorème 2.1.2 (voir [14]) *Un cycle est élémentaire si et seulement si c'est un cycle minimal pour l'inclusion.*

2.1.2 Cycle indépendants - base de cycle

Définition 2.1.3 *On dit que "p" cycles $\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^p$ sont indépendants si leurs vecteurs représentatifs vérifient :*

$$\lambda_1\mu^1 + \lambda_2\mu^2 + \dots + \lambda_p\mu^p = 0 \implies \lambda_i = 0, \forall i = 1 \dots p$$

Définition 2.1.4 *Une base de cycle est un ensemble minimal de cycles indépendants*

$\{\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^p\}$ tel que, tout vecteur représentatif d'un cycle puisse s'écrire :

$$\mu = \lambda_1\mu^1 + \lambda_2\mu^2 + \dots + \lambda_p\mu^p; \lambda_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1 \dots p$$

Définition 2.1.5 *On appelle "nombre cyclomatique" d'un graphe G la dimension d'une base de cycle, on le note: $\nu(G)$.*

Le lemme suivant permet de montrer le théorème 2.1.3.

Lemme 2.1.1 *L'adjonction d'un arc $u = (a, b)$, $(a, b) \in X^2$ à un graphe $G = (X, U)$ a pour effet :*

1) *Soit de diminuer le nombre de composantes connexes d'une unité; auquel cas l'arc u n'appartient à aucun cycle de $G' = (X, U \cup \{u\})$.*

2) Soit de laisser inchangé le nombre de composantes connexes de G ; auquel cas l'arc u appartient à un cycle de $G' = (X, U \cup \{u\})$.

Preuve. On distingue deux cas:

1) a et b appartiennent à deux composantes connexes différentes de G .

Ces deux composantes connexes deviennent une seule composante connexe de G' . Ainsi le nombre de composantes connexes diminue d'une unité. L'arc u n'appartient pas à un cycle de G' . Sinon a et b seraient reliés par une chaîne n'utilisant pas l'arc u . Donc a et b seraient dans la même composante connexe.

2) a et b appartiennent à la même composante connexe de G . Donc G' a les mêmes composantes connexes que G . G est connexe alors il existe une chaîne μ joignant a et b dans G' et en ajoutant l'arc $u = (a, b)$ on obtient un nouveau cycle dans G' . ■

Théorème 2.1.3 Soit $G = (X, U)$ un graphe ayant " n " sommets, " m " arcs et " p " composantes connexes; la dimension d'une base de cycle $\nu(G)$ est:

$$\nu(G) = m - n + p$$

Preuve. Considérons une succession de graphes partiels G_0, G_1, \dots, G_m . Le graphe $G_0 = (X, \emptyset)$ est constitué par les sommets de G isolés les uns des autres et chaque graphe $G_i = (X, U_i)$ est obtenu à partir du graphe précédent $G_{i-1} = (X, U_{i-1})$ par l'adjonction d'un arc de G .

Notons $\nu(G_i)$ la dimension d'une base de cycle de G_i , p_i : le nombre de composantes

connexes de G_i et $m_i = |U_i|$ le nombre d'arc de G_i .

✓ Pour $i = 0$, c'est à dire pour G_0 : $\nu(G_0) = 0$ et $m_0 - n + p_0 = 0 - n + n = 0$. D'où :

$$\nu(G_0) = m_0 - n + p_0$$

✓ Pour $i = 1$, c'est à dire pour $G_1 = (X, U_1)$

- Si l'arc ajouté à deux extrémités différentes $\nu(G_1) = 0$, $p_1 = n - 1$ et $m_1 = |U_1| = 1$

$$\nu(G_1) = m_1 - n + p_1 = 1 - n + (n - 1) = 0$$

- Si les deux extrémités de l'arc ajouté sont confondus : $\nu(G_1) = 1$, $m_1 = 1$, $p_1 = n$,

$$\nu(G_1) = m_1 - n + p_1 = 1 - n + n = 1$$

Supposons que la formule de récurrence est vraie pour $G_i = (X, U_i)$,

c'est à dire $\nu(G_i) = m_i - n + p_i$ et montrons qu'elle reste vraie pour $G_{i+1} = (X, U_{i+1})$

c'est à dire $\nu(G_{i+1}) = m_{i+1} - n + p_{i+1}$. On distingue deux cas:

- Si l'arc ajouté joint deux sommets de deux composantes connexes différentes,

$$\nu(G_{i+1}) = \nu(G_i), m_{i+1} = m_i + 1, p_{i+1} = p_i - 1$$

$$\nu(G_{i+1}) = m_{i+1} - n + p_{i+1} = m_i + 1 - n + p_i - 1 = m_i - n + p_i = \nu(G_i)$$

D'où :

$$\nu(G_{i+1}) = m_{i+1} - n + p_{i+1}$$

- Si l'arc ajouté joint deux sommets différents de la même composante connexe,

$$\nu(G_{i+1}) = \nu(G_i) + 1, m_{i+1} = m_i + 1, p_{i+1} = p_i$$

$$\nu(G_{i+1}) = m_{i+1} - n + p_{i+1} = (m_i + 1) - n + p_i = (m_i - n + p_i) + 1 = \nu(G_i) + 1$$

- Si l'arc ajouté a deux extrémités confondues (l'arc est dans une composante connexe),

$$\nu(G_{i+1}) = \nu(G_i) + 1, m_{i+1} = m_i + 1, p_{i+1} = p_i$$

$$\nu(G_{i+1}) = m_{i+1} - n + p_{i+1} = (m_i + 1) - n + p_i = (m_i - n + p_i) + 1 = \nu(G_i) + 1$$

Donc

$$\nu(G) = m - n + p$$

On a donc $\nu(G)$ cycles indépendants: $\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^{\nu(G)}$ (car chaque cycle contient un arc que les autres ne contiennent pas) obtenus par l'adjonction des arcs $u_1, u_2, \dots, u_{\nu(G)}$. En effet:

$$\mu^1 = (1, 0, \dots, 0, \gamma, \dots, \gamma) \in \mathbb{R}^m$$

$$\mu^2 = (0, 1, 0, \dots, 0, \gamma, \dots, \gamma)$$

....

$$\mu^i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \gamma, \dots, \gamma)$$

...

$$\mu^{\nu(G)} = (0, 0, \dots, 0, 1, \gamma, \dots, \gamma)$$

où à partir de $\nu(G)$ il peut y'avoir des 1 ou des -1 ou bien des 0 c'est-à-dire γ est égale à 1 ou -1 ou bien 0.

$$\sum \lambda_i \mu^i = 0 \Leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\nu(G)}, ?\dots?) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{\nu(G)} = 0$$

Donc : $\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^{\nu(G)}$ sont indépendants. ■

Remarque 2.1.2 La démonstration sert de méthode pour construire une base de cycle.

On commence par le graphe $G_0 = (X, \emptyset)$, où : $m_0 = m$, $p_0 = n$, $\nu(G_0) = 0$, auquel on ajoute les arcs de G dans un ordre quelconque pour chaque arc ajouté:

✓ Ou bien, on crée un cycle linéairement indépendant avec les précédents et la base de cycle augmente d'une unité.

✓ Ou bien, on ne crée pas de cycle et $\nu(G)$ ne change pas. La procédure s'arrête lorsqu'il n'y a plus d'arcs à ajouter.

Exemple 2.1.2 Soit $G = (X, U)$, $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$

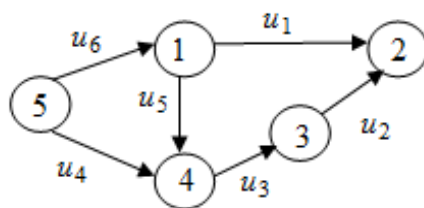


Fig.2-2

$$\nu(G) = m - n + p = 6 - 5 + 1 = 2$$

<i>Arc ajouté</i>	<i>Cycle crée</i>	<i>Nombre de cycle crée</i>
u_1	—	0
u_2	—	0
u_3	—	0
u_5	$C_1 = (u_5, u_1, u_2, u_3)$	1
u_4	—	1
u_6	$C_2 = (u_6, u_4, u_1, u_2, u_3)$	2

La base de cycle est $C = (C_1, C_2)$

2.2 Cocycles

2.2.1 Cocycle et vecteur associé à un cocycle

Définition 2.2.1 Soit $G = (X, U)$ un graphe avec: $X = \{1, 2, \dots, n\}$, $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$,

$A \subset X$, $A \neq \emptyset$.

- $w^+(A)$: l'ensemble des arcs ayant leurs extrémités initiales dans A et leurs extrémités terminales dans $X \setminus A$.
- $w^-(A)$: l'ensemble des arcs ayant leurs extrémités terminales dans A et leurs extrémités initiales dans $X \setminus A$.
- $w(A) = w^+(A) \cup w^-(A)$: l'ensemble des arcs ayant l'une des extrémités dans A et l'autre extrémités dans $X \setminus A$.

Exemple 2.2.1 Soit $G = (X, U)$, $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\}$,

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $X \setminus A = \{5\}$

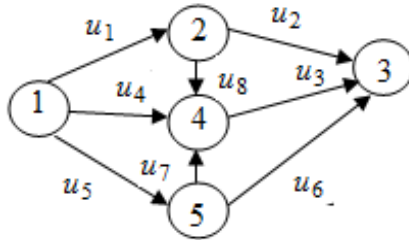


Fig.2-3

$w(A) = \{u_5, u_6, u_7\}$ avec $w^+(A) = \{u_5\}$ et $w^-(A) = \{u_6, u_7\}$

Remarque 2.2.1 Dans un cocycle $w(A) = w^+(A) \cup w^-(A)$ si : $w^+(A) = \emptyset$ ou

$w^-(A) = \emptyset$, le cocycle est alors appelé cocircuit. Ainsi tous les arcs sont orientés dans le même sens.

Définition 2.2.2 A un cocycle $w(A)$ on associé un vecteur représentatif

$w = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ de \mathbb{R}^m , défini par:

$$w_j = \begin{cases} +1, & \text{si } u_j \in w^+(A); \\ -1, & \text{si } u_j \in w^-(A); \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans toute la suite le cocycle sera identifié au vecteur w .

2.2.2 Cocycle élémentaire

Définition 2.2.3 Un cocycle est dit élémentaire s'il est formé d'arcs reliant deux sous-graphes connexes G_{A_1} et G_{A_2} de G , avec : $A_1 \neq \emptyset$, $A_2 \neq \emptyset$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ et $A_1 \cup A_2$ est

une composante connexe de G .

Ou encore, s'il ne contient pas proprement un ensemble d'arcs qu'est un cocycle.

2.2.3 Base de cocycle

Définition 2.2.4 $G = (X, U)$ un graphe.

Une base de cocycle est un ensemble $\{w^1, w^2, \dots, w^l\}$ de cocycles élémentaires indépendants tel que tout cocycle w puisse s'écrire sous la forme :

$$w = \alpha_1 w^1 + \alpha_2 w^2 + \dots + \alpha_l w^l, \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, l$$

Théorème 2.2.1 Soit G un graphe ayant " n " sommets, " m " arcs est " p " composantes connexes. La dimension de la base de cycle de G est:

$$\lambda(G) = n - p$$

Dans ce cas, $\lambda(G)$ est appelé "nombre cocyclomatique" de G .

Preuve. On suppose que G est connexe ($p = 1$)

* Soit $x_1 \in X$ et posons $A_1 = \{x_1\}$. Le cocycle $w(A_1)$ contient un cocycle élémentaire w^1 , et soit (x_1, x_2) un arc de ce cocycle élémentaire avec $x_1 \in A_1$ et $x_2 \notin A_1$.

* $A_2 = A_1 \cup \{x_2\} = \{x_1, x_2\}$. $w(A_2)$ contient un cocycle élémentaire w^2 et soit (x, x_3) un arc de ce cocycle avec $x = x_1$ ou $x_2 \in A_2$ et $x_3 \notin A_2$.

* $A_3 = A_2 \cup \{x_3\} = \{x_1, x_2, x_3\}$. $w(A_3)$ contient un cocycle élémentaire w^3 et soit (x, x_4) un arc de ce cocycle avec $x \in A_3$ et $x_4 \notin A_3$.

* $A_4 = A_3 \cup \{x_4\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ et recommençons les mêmes itérations.

A la fin, on aura $(n - 1)$ cocycles élémentaires w^1, w^2, \dots, w^{n-1} . Ces derniers sont linéairement indépendants car chacun contient un arc que les autres ne contiennent pas.

D'où, la base de cocycle de G contient $\lambda(G) = n - 1$ cocycles élémentaires indépendants dans le cas où G est connexe.

Si G n'est pas connexe, soient $G_1 = (X_1, U_1), \dots, G_i = (X_i, U_i), \dots, G_p = (X_p, U_p)$ ses " p " composants connexes, avec $n_i = |X_i|$, $i = 1 \dots p$ et $\sum_{i=1}^p n_i = n$.

La composante connexe $G_i = (X_i, U_i)$ est un graphe connexe, alors : $\lambda(G_i) = n_i - 1$.

Donc :

$$\lambda(G) = \sum_{i=1}^p \lambda(G_i) = \sum_{i=1}^p (n_i - 1) = \sum_{i=1}^p n_i - \sum_{i=1}^p 1 = n - p.$$

■

Remarque 2.2.2 La démonstration sert de méthode pour construire une base de cocycle.

Exemple 2.2.2 Considérons le graphe $G = (X, U)$, ci-dessus où $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\}$ et $\lambda(G) = n - p = 5 - 1 = 4$

A_i	$w(A_i)$
$A_1 = \{1\}$	$w(A_1) = \{u_1, u_4, u_5\}$
$A_2 = \{1, 2\}$	$w(A_2) = \{u_2, u_8, u_4, u_5\}$
$A_3 = \{1, 2, 4\}$	$w(A_3) = \{u_2, u_3, u_7, u_5\}$
$A_4 = \{1, 2, 4, 5\}$	$w(A_4) = \{u_2, u_3, u_6\}$

La base de cocycle est l'ensemble $\{w^1, w^2, w^3, w^4\}$

2.3 Arbres

La notion d'arbre est très importante en théorie des graphes. Elle trouve des applications dans les réseaux téléphoniques, les réseaux informatiques, ...

2.3.1 Définitions et propriété

Définition 2.3.1 *Un graphe valué est un graphe noté $G = (X, U, C)$ tel que $C : U \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire qu'à tout arc (arrêt) u de U est associé un nombre $C(u)$, appelé poids (ou valeur, distance, ou bien coût, ...).*

Définition 2.3.2 *Un arbre est un graphe $G = (X, U)$ connexe et sans cycle.*

Théorème 2.3.1 *Soit $G = (X, U)$ un graphe avec : $n = |X|$ et $m = |U|$.*

- Si G est connexe alors:

$$|U| \geq n - 1;$$

- Si G est sans cycle alors:

$$|U| \leq n - 1.$$

Preuve. On construit le graphe G par adjonction de ses arcs à partir du graphe $G_0 = (X, \emptyset)$, comportant n composantes connexes:

- A chaque étape le nombre de composantes connexes décroît au plus d'une unité.

Donc il faut au moins $n - 1$ arcs pour passer du graphe G_0 qui a n composantes connexes

à un graphe connexe. D'où:

$$|U| \geq n - 1;$$

- Si G est sans cycle, c'est que tout graphe partiel de G est sans cycle.

Donc, à chaque étape, le nombre de composantes connexes diminue exactement d'une unité. Comme G possède au moins une composante connexe, le nombre d'étapes est égale au plus à $n - 1$. D'où:

$$|U| \leq n - 1.$$

■

Théorème 2.3.2 (voir [17]) $G = (X, U)$ un graphe avec: $|X| \geq 2$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- 1) G est connexe sans cycle.
- 2) G est connexe minimal pour cette propriété.
- 3) G est connexe et possède $(n - 1)$ arcs.
- 4) G est sans cycle et maximal pour cette propriété.
- 5) G est sans cycle et possède $(n - 1)$ arcs.
- 6) Il existe dans G une chaîne et une seule joignant tout couple de sommets.

Corollaire 2.3.1 Soit $G = (X, U)$ un arbre, si on ajoute à U un arc u le graphe obtenu $G' = (X, U \cup \{u\})$ contient un seul cycle.

Preuve. En ajoutant un arc u à G on crée un cycle (d'après (4) du théorème précédent). Supposons que plusieurs cycles sont créés par l'ajout de l'arc u à G ; dans ce cas tout les cycles de G' utilisent l'arc u . En supprimant l'arc u , on obtient deux chaînes reliant les deux extrémités de u formant un cycle dans G , ce qui est en contradiction avec le fait que G est un arbre, c'est-à-dire un graphe connexe sans cycle. ■

Corollaire 2.3.2 *Un graphe connexe $G = (X, U)$ possède un graphe partiel qui est un arbre.*

Preuve. Ce résultat est dû à la propriété (2) du théorème ci-dessus. Dans G cherchons s'il existe un arc dont la suppression ne disconnecte pas le graphe.

✓ Si un tel arc n'existe pas alors G est un arbre.

✓ Sinon, on le supprime, et de la même manière, on cherche un arc à éliminer.

✓ Dès qu'on pourra plus supprimer d'arcs, on aura un arbre dans la suppression d'un arc quelconque disconnecte le graphe. ■

Remarques 2.3.1

1) *Ce corollaire permet de construire un arbre maximal dans un graphe connexe G .*

2) *On peut aussi le construire de la manière suivante :*

- *On considère un arc quelconque u_1 .*
- *Choisissons un arc u_2 qui ne forme pas de cycle avec l'arc u_1 .*

- Puis choisissons un arc u_3 qui ne forme pas de cycle avec $\{u_1, u_2\}$.
- Lorsque la procédure ne pourra plus se continuer, on aura un arbre maximal H .

Exemple 2.3.1 Soit $G = (X, U)$, $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}\}$

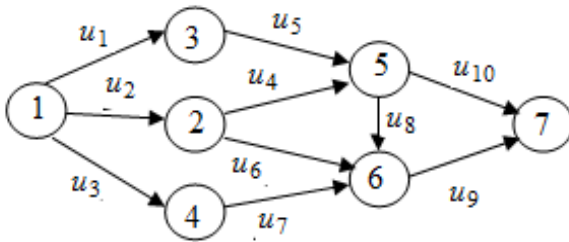


Fig.2-4: Le graphe G

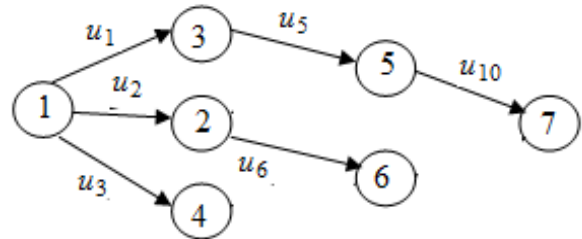


Fig.2-5: Arbre associé au graphe G

$H = (X, V)$ avec $V = \{u_1, u_2, u_3, u_5, u_6, u_{10}\}$ est un arbre maximal de G .

Base de cycle associée à l'arbre $H = (X, V)$:

Arc ajouté	Cycle crée
u_4	$c_1 = (u_4, u_5, u_1, u_2)$
u_7	$c_2 = (u_7, u_3, u_2, u_6)$
u_8	$c_3 = (u_8, u_5, u_1, u_2, u_6)$
u_9	$c_4 = (u_9, u_{10}, u_5, u_1, u_3, u_7)$

Théorème 2.3.3 (voir [2]) $G = (X, U)$ un graphe connexe, $H = (X, V)$ un arbre maximal de G .

Si u_i est un arc de G ne figurant pas dans H , sans adjonction à H détermine un seul est un seul cycle μ^i . Les différents cycles créés constituent une base de cycles indépendants.

Remarque 2.3.2 *Il existe des algorithmes permettant la recherche d'un arbre de poids minimum comme l'algorithme de Kruskal et l'algorithme de Prim.*

2.3.2 Coarbre

Définition 2.3.3 *Soit $G = (X, U)$ un graphe connexe, $F = (X, W)$ un graphe partiel de G .*

$F = (X, W)$ est un coarbre de G s'il ne contient pas de cocycle élémentaire de G , mais en lui ajoutant un arc quelconque de $U \setminus W$ il contient un cocycle élémentaire.

Théorème 2.3.4 *(voir [2]) Soit $G = (X, U)$ un graphe connexe et (V, W) une partition de U en deux classes:*

$$V \cup W = U, V \cap W = \emptyset$$

(X, V) arbre $\Leftrightarrow (X, W)$ coarbre.

Théorème 2.3.5 *Soit $G = (X, U)$ un graphe connexe, $F = (X, W)$ un coarbre de G . Si u_i est un arc ne figurant pas dans F , son adjonction à F détermine un seul cocycle w^i , et les différents cocycles créés constituent une base de cocycles indépendants.*

Preuve. Si on supprime l'arc u_i de $(X, U \setminus W)$, on détermine deux composantes connexes A et B et le cocycle cherché est déterminé d'une façon unique par $w(A) = w^i$. Ces cocycles sont indépendants puisque chacun d'eux contient un arc que les autres ne contiennent pas. Le nombre de cocycles créés correspond aux nombres d'arcs de l'arbre $(X, U \setminus W)$ à savoir $\lambda(G) = n - 1$. ■

Remarque 2.3.3 Ce théorème donne une méthode simple pour construire une base de cocycles.

Exemple 2.3.2 Soit $G = (X, U)$, $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}\}$

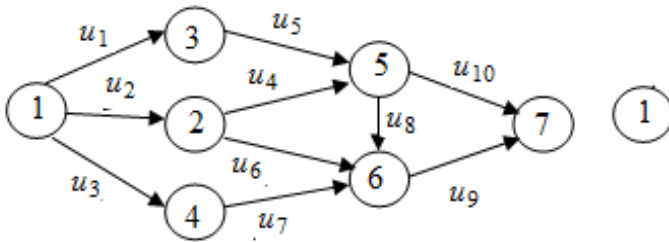


Fig.2-4: Le graphe G

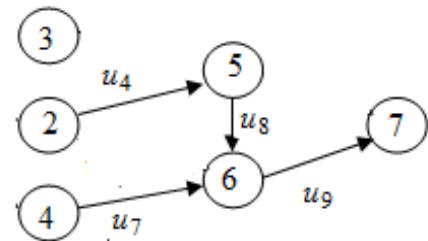


Fig.2-6: Un coarbre associé à G

$F = (X, W)$, avec $W = \{u_4, u_7, u_8, u_9\}$

Base de cocycle associée au coarbre $F = (X, W)$:

Arc ajouté	Cocycle créée	A_i
u_1	$w(A_1) = \{u_1, u_4, u_8, u_9\}$	$A_1 = \{3, 5, 7\}$
u_2	$w(A_2) = \{u_2, u_4, u_7, u_8, u_9\}$	$A_2 = \{2, 6\}$
u_3	$w(A_3) = \{u_3, u_7\}$	$A_3 = \{4\}$
u_5	$w(A_4) = \{u_5, u_4, u_8, u_9\}$	$A_4 = \{5, 7\}$
u_6	$w(A_5) = \{u_6, u_7, u_8, u_9\}$	$A_5 = \{6\}$
u_{10}	$w(A_6) = \{u_{10}, u_9\}$	$A_6 = \{7\}$

2.3.3 Arborescence

Définition 2.3.4 *Un graphe G est une arborescence s'il existe un sommet a appelé racine de G tel que, pour tout sommet x de G , il existe un chemin et un seul de a vers x .*

Définition 2.3.5 *Un graphe $G = (X, U)$ est dit quasi-fortement connexe si pour tout couple de sommets (x, y) il existe un sommet z d'où partent à la fois un chemin allant vers x et un chemin allant vers y .*

Remarque 2.3.4 *Une arborescence est un arbre, mais un arbre n'est pas forcément une arborescence.*

Exemple 2.3.3

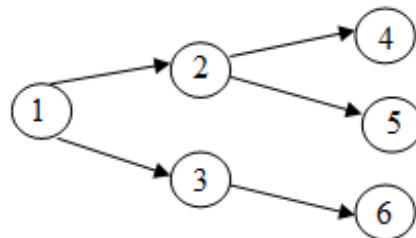


Fig.2-7: Une arborescence

3.1 Introduction

Le flot est une notion très importante en théorie des graphes puisqu'elle permet de représenter des flux. De nombreux problèmes autour de ce concept ont été modélisés et étudiés, et par conséquent de nombreuses méthodes de résolution et d'importants résultats théoriques sont disponibles. Nous donnons quelques définitions et propriétés élémentaires sur les flots et tensions.

3.2 Flots: définitions et propriétés

3.2.1 Définition

Soit $G = (X, U)$ un graphe connexe. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$.

Un flot sur un graphe G est un vecteur ligne $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m) \in \mathbb{R}^m$ à m composantes qui affecte à chaque arc u un nombre φ_u tel que:

en tout sommet $i \in X$ de G , la première loi de Kirchoff (loi de conservation aux nœuds) est vérifiée, c'est-à-dire

$$\sum_{u \in w^+(i)} \varphi_u = \sum_{u \in w^-(i)} \varphi_u \quad (1)$$

pour $u \in U$, la composante u du vecteur φ est appelée quantité de flot ou flux sur l'arc u .

Remarque 3.2.1 *La relation (1) exprime simplement que la somme des flux entrant en un sommet est égale à la somme des flux sortant de ce sommet.*

Exemple 3.2.1 Soit $G = (X, U)$ un graphe avec $X = \{1, 2, 3, 4\}$ et $U = \{u_1, \dots, u_6\}$ de

la figure ci-dessous:

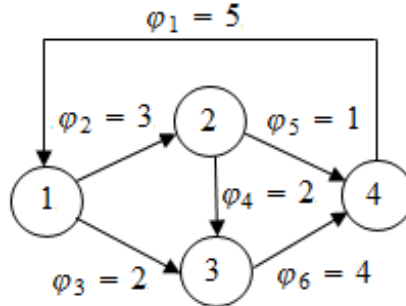


Fig.3-1

Le vecteur $\varphi = (5, 3, 2, 2, 1, 4)$ est un flot sur G , alors la loi de conservation aux nœuds est bien vérifiée. On prend par exemple le sommet (1) :

$$\sum_{u \in w^+(1)} \varphi_u = \varphi_2 + \varphi_3 = 2 + 3 = 5 \text{ et } \sum_{u \in w^-(1)} \varphi_u = \varphi_1 = 5.$$

3.2.2 Définition algébrique des flots

Soit $A = (a_{iu_j})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}$ la matrice d'incidence sommet-arcs du graphe $G = (X, U)$.

A chaque sommet $i \in X$ correspond la ligne i de A , on a :

$$\begin{cases} w^+(i) = \{u \in U / a_{iu} = +1\} \\ w^-(i) = \{u \in U / a_{iu} = -1\} \end{cases}$$

Les lois de conservation aux nœuds (1) peuvent donc se mettre sous la forme matricielle

équivalente:

$$\forall i = 1, \dots, n; \sum_{j=1}^m a_{iu_j} \cdot \varphi_j = 0 \Leftrightarrow A \cdot \varphi = 0. \quad (2)$$

Si on considère l'application linéaire g associée à la matrice $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, l'ensemble Φ des flots sur G constitue, d'après (2), le noyau de g . C'est donc un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^m , et sa dimension vérifie :

$$\dim(\Phi) + \text{rang}(A) = m.$$

Si G possède p composantes connexes, on a :

$$\text{rang}(A) = n - p$$

et par suite, la dimension de Φ est :

$$\dim(\Phi) = m - n + p$$

qui n'est autre que le nombre cyclomatique de G noté $\nu(G)$.

3.2.3 Opérations sur les flots

Soient $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ des flots sur G et $k \in \mathbb{R}$.

Lemme 3.2.1 (voir [2])

- $k.\varphi$ est un flot sur G .
- $\varphi_1 + \varphi_2$ est un flot sur G .
- $\varphi_1 - \varphi_2$ est un flot sur G .

Théorème 3.2.1 (voir [7]) Un flot sur un arbre est nécessairement identiquement nul.

3.2.4 Cycles élémentaires et flots élémentaires

Définition 3.2.1 *Le support d'un vecteur $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m) \in \mathbb{R}^m$ est l'ensemble des $u \in U$ tels que : $\varphi_u \neq 0$. On le note $\text{supp}(\varphi)$. Un vecteur $\varphi \in \Phi$ (Φ est l'ensemble des flots sur G) est dit élémentaire si et seulement si son support est minimal pour l'inclusion.*

Autrement dit, φ est élémentaire si et seulement s'il n'existe pas $\varphi' \in \Phi$ tel que:

$$\text{supp}(\varphi') \subsetneq \text{supp}(\varphi).$$

Soit μ le vecteur représentatif associé à un cycle élémentaire de G . On rappelle que μ est

défini par:

$$\begin{cases} \mu_u = +1, & \text{si } u \in \mu \text{ orienté dans le sens de parcours;} \\ \mu_u = -1, & \text{si } u \in \mu \text{ orienté dans le sens contraire;} \\ \mu_u = 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a:

$$A \cdot \mu = 0$$

ce qui prouve que μ est un flot sur G c'est-à-dire $\mu \in \Phi$.

Par conséquent, il existe des flots ayant pour supports les cycles élémentaires de G .

D'autre part, un flot $\varphi \in \Phi$ non nul contient nécessairement au moins un cycle dans son support. Sinon, ce serait un flot non nul à composantes sur un arbre, et il contredirait le résultat du théorème précédant.

Enfin, un flot φ contenant plus d'un cycle dans son support ne peut être élémentaire.

3.2.5 Décomposition d'un flot en somme de cycles élémentaires

Théorème 3.2.2 Soit $G = (X, U)$ un graphe et $H = (X, V)$ un arbre maximale de G .

Notons $W = U \setminus V$ le complémentaire de V dans U . Pour $u \in W$ et soit μ^u le cycle associés à H . Un flot φ est défini, de façon unique sur W par:

$$\varphi = \varphi_1 \mu^1 + \varphi_2 \mu^2 + \dots + \varphi_{\nu(G)} \mu^{\nu(G)}.$$

Preuve. Soit $G = (X, U)$ un graphe, $|X| = n$, $|U| = m$. Considérons alors le flot:

$$\varphi' = \varphi - \sum_{u \in W} \varphi_u \cdot \mu^u$$

Par construction, les composantes de φ' sur les arcs de W sont nulles, donc: $\text{supp}(\varphi') \subset V$.

Comme tout flot sur un arbre est identiquement nul, alors:

$$\varphi = \sum_{u \in W} \varphi_u \cdot \mu^u$$

■

Corollaire 3.2.1 (voir [2]) Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un vecteur

$\varphi \in \Phi$ soit un flot est qu'il soit de la forme:

$$\varphi = \lambda_1 \mu^1 + \lambda_2 \mu^2 + \dots + \lambda_{\nu(G)} \mu^{\nu(G)}$$

où les λ_i sont des scalaires, et les μ^i les vecteurs associés à des cycles élémentaires indépendants.

Remarque 3.2.2 Ce résultat signifie aussi qu'un flot est défini, de façon unique par ses composantes sur un coarbre de G .

3.2.6 Lemme des arcs colorés de Minty

Lemme 3.2.2 Soit $G = (X, U)$ un graphe dont les arcs u_1, u_2, \dots, u_m sont colorés soit en noir, soit en rouge, soit en vert, certains arcs pouvant être incolore. Supposons que l'arc u_0 est coloré en noir, alors une seule des deux propositions suivantes est vérifiée:

- a) Il passe par l'arc u_0 un cycle élémentaire d'arcs rouges et / ou noirs et / ou verts mais ne contenant pas d'arc incolore, avec tous les arcs noirs orientés dans le même sens (sens de u_0) et tous les arcs verts orientés dans le sens contraire de u_0 ;
- b) Il passe par l'arc u_0 un cocycle élémentaire d'arcs non rouges mais pouvant contenir des arcs incolores avec tous les arcs noirs orientés dans le même sens (sens de u_0) et les arcs verts orientés dans le sens contraire de u_0 .

Preuve. Notons $u_0 = (t, s)$. La démonstration repose sur la procédure de marquage suivante:

- 1) On marque le sommet "s", extrémité terminale de u_0 .
- 2) Si i est un sommet déjà marqué, et j un sommet non marqué, on marque j dans les situations suivantes:

- S'il existe un arc noir $(i, j) \neq u_0$ allant du sommet i vers le sommet j ;
- S'il existe un arc rouge allant de i vers j , ou de j vers i .
- S'il existe un arc vert (j, i) allant de j vers i .

On continue cette procédure de marquage jusqu'à ce qu'on ne puisse plus marquer de

sommet. Alors deux cas peuvent se présenter:

✓ 1^{er} cas: on a marqué le sommet "t", extrémité initiale de u_0 . Cela veut dire qu'il existe une chaîne élémentaire L entre s et t empruntant des arcs noirs, rouges ou verts, avec tous les arcs noirs orientés dans le sens de s vers t , et les arcs verts dans le sens de t vers s .

En ajoutant l'arc u_0 à cette chaîne, on obtient un cycle conforme au (a) du lemme;

✓ 2^{eme} cas: on n'a pas pu marqué le sommet "t". Si $A \subset X$ est l'ensemble des sommets marqués et $X \setminus A$ est l'ensemble des sommets non marqués,

on a donc: $s \in A$ et $t \in X \setminus A$. D'après la règle de marquage adopté. Le cocycle $w(A)$ ne peut contenir d'arcs rouges, ni d'arcs noirs orientés de A vers $X \setminus A$, ni d'arcs verts orientés de $X \setminus A$ vers A , sinon dans chaque cas, on aurait pu marquer un sommet de $X \setminus A$. Le cocycle $w(A)$ est alors conforme au (b) du lemme. ■

Corollaire 3.2.2 (voir [7]) *Tout arc d'un graphe appartient soit à un circuit élémentaire soit à un cocircuit élémentaire.*

3.2.7 Décomposition en circuits d'un flot positif ou nul

Théorème 3.2.3 *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un vecteur $\varphi \in \Phi$ soit un flot à composantes toutes positives ou nulles est qu'il puisse se mettre sous la forme:*

$$\varphi = \lambda_1 \mu^1 + \lambda_2 \mu^2 + \dots + \lambda_{v(G)} \mu^{v(G)}$$

où: $\lambda_i \geq 0$ et μ^i sont des vecteurs associés à des circuits (flots élémentaires positifs ou nuls).

On note Φ^+ l'ensemble des flots à composantes toutes positives ou nulles:

$$\Phi^+ = \Phi \cap \mathbb{R}^{m^+}.$$

Preuve. Un vecteur φ vérifiant la condition du théorème est évidemment un flot positif ou nul. Réciproquement, soit $\varphi \in \Phi^+$, $\varphi \neq 0$, et soit G' le graphe partiel de G obtenu en supprimant tous les arcs sur lesquels le flux est nul. G' ne contient pas de cocircuit (en vertu des lois de conservation aux nœuds), et par conséquent, d'après le corollaire précédant, il contient un circuit μ^1 . Soit $\lambda_1 = \min_{u \in \mu^1} \{\varphi_u\} > 0$.

Le vecteur $\varphi_1 = \varphi - \lambda_1 \mu^1$ est un flot de Φ^+ qui a au moins une composante nulle de plus que φ . Si $\varphi_1 = 0$ le théorème est démontré. Sinon, on réitère l'argument précédent autant de fois que nécessaire, jusqu'à ce que:

$$\varphi_{v(G)} = \varphi - \lambda_1 \mu^1 - \lambda_2 \mu^2 - \dots - \lambda_{v(G)} \mu^{v(G)} = 0$$

et on a bien: $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \dots, \lambda_{v(G)} \geq 0$. ■

3.3 Tensions: définitions et propriétés

3.3.1 Définition

Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté où $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$.

Une tension sur un graphe G est un vecteur $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \in \mathbb{R}^m$ à m composantes

tel que, pour tout cycle élémentaire μ , on a:

$$\sum_{u \in \mu^+} \theta_u = \sum_{u \in \mu^-} \theta_u \quad (3)$$

Cette égalité s'exprime aussi par le produit scalaire

$$\langle \mu, \theta \rangle = \sum \mu_u \theta_u = 0.$$

Opérations sur les tensions

Soient $\theta, \theta_1, \theta_2 \in \Theta$ où Θ désigne l'ensemble des tensions et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Lemme 3.3.1 (*voir [2]*)

- $\lambda \cdot \theta$ est une tension.
- $\theta_1 + \theta_2$ est une tension.

3.3.2 Propriété sur les tensions

Définition 3.3.1 On appelle *potentiel* dans un graphe $G = (X, U)$ tout vecteur de \mathbb{R}^n c'est-à-dire toute fonction qui à chaque sommet associé un nombre réel.

Théorème 3.3.1 Dans un graphe $G = (X, U)$ un vecteur $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ de \mathbb{R}^m est une tension si et seulement s'il existe une fonction $t \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout arc $u = (x_i, x_j) \in U$ on ait:

$$\theta_u = t(x_j) - t(x_i)$$

La fonction t est par définition un potentiel attaché à la tension θ .

Preuve. 1) Soit θ un vecteur définie par une fonction t et considérons un cycle $\mu = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ rencontrant successivement les sommet x_1, x_2, \dots, x_k ; on peut écrire:

$$\mu_{u_1} \theta_{u_1} = t(x_2) - t(x_1)$$

$$\mu_{u_2} \theta_{u_2} = t(x_3) - t(x_2)$$

...

$$\mu_{u_k} \theta_{u_k} = t(x_1) - t(x_k)$$

D'où en sommant:

$$\sum_{u \in \mu^+} \theta_u - \sum_{u \in \mu^-} \theta_u = 0$$

Donc θ est une tension.

2) Soit θ une tension et cherchons à construire la fonction t .

*) Prenons un sommet x_0 arbitraire, que l'on affecte du coefficient $t(x_0)$.

*) Si x a été marqué, si y n'a pas été marqué, et si $u = (x, y) \in U$, on pose

$$t(y) = t(x) + \theta_u$$

*) De même si $u = (y, x) \in U$, on pose

$$t(y) = t(x) - \theta_u$$

Ainsi on peut marquer de proche en proche tous les sommets du graphe s'il est connexe, s'il n'est pas connexe on traitera séparément chaque composante connexe de la même façon. Le coefficient attribué à un sommet est défini d'une façon unique, car sinon, il existerait deux chaînes μ^1 et μ^2 allant de x_0 à x , avec:

$$\langle \mu^1, \theta \rangle \neq \langle \mu^2, \theta \rangle$$

donc:

$$\langle \mu^1 - \mu^2, \theta \rangle \neq 0$$

Comme $\mu^1 - \mu^2$ est un flot donc il existe un cycle élémentaire μ avec:

$$\langle \mu, \theta \rangle \neq 0$$

Ceci est une contradiction avec la définition d'une tension. ■

Corollaire 3.3.1 *Le vecteur représentatif d'un cocycle est une tension.*

Preuve. Considérant le cocycle $w(A)$, où $A \in X$ et

$$t(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in A; \\ 1, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

On aura:

$$t(x_j) - t(x_i) = w_u(A) = \begin{cases} +1, & \text{si } u \in w^+(A); \\ -1, & \text{si } u \in w^-(A); \\ 0, & \text{si } u \notin w(A). \end{cases}$$

■

Théorème 3.3.2 Soit $G = (X, U)$ un graphe connexe, $H = (X, V)$ un arbre maximal,

$1, 2, \dots, \lambda(G)$ les arcs de cet arbre. $w^1, w^2, \dots, w^{\lambda(G)}$ les cocycles associés à H ;

une tension $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ est définie d'une façon unique par ses valeurs sur les arcs

de l'arbre au moyen de la formule:

$$\theta = \theta_1 w^1 + \theta_2 w^2 + \dots + \theta_{\lambda(G)} w^{\lambda(G)}$$

Preuve. Posons $\theta' = \theta - \theta_1 w^1 - \theta_2 w^2 - \dots - \theta_{\lambda(G)} w^{\lambda(G)}$ est une tension qui a toutes ses valeurs nulles sur tous les arcs de l'arbre $H = (X, V)$.

Si θ' est défini par une fonction potentielle $t'(x)$, on a donc:

$$t'(x_1) = t'(x_2) = \dots = t'(x_n)$$

Donc:

$$\theta' = 0 \implies \theta = \sum_{i=1}^{\lambda(G)} \theta_i w^i$$

■

Corollaire 3.3.2 (voir [16]) Une condition nécessaire et suffisante pour que $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$

soit une tension est qu'il soit de la forme:

$$\theta = \lambda_1 w^1 + \lambda_2 w^2 + \dots + \lambda_{\lambda(G)} w^{\lambda(G)}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\lambda(G)} \in \mathbb{R}$ et $w^1, w^2, \dots, w^{\lambda(G)}$ sont des cocycles élémentaires.

Théorème 3.3.3 Une condition nécessaire et suffisante pour que $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ soit

une tension supérieure ou égale à zéro est que l'on ait:

$$\theta = \lambda_1 w^1 + \lambda_2 w^2 + \dots + \lambda_{\lambda(G)} w^{\lambda(G)}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\lambda(G)} \geq 0$ et $w^1, w^2, \dots, w^{\lambda(G)}$ sont des cocircuits élémentaires.

Preuve. 1) Toute combinaison linéaire de cocircuits, avec des coefficients supérieurs

ou égaux à zéro est une tension supérieure ou égale à zéro

2) Considérons une tensions $\theta, \theta \geq 0$ et $\theta \neq 0$

Notons $u = 1$ un arc avec $\theta_1 = \min \{\theta_u / \theta_u \neq 0, 1 \leq u \leq m\}$ et posons

$$\theta_1 = \lambda_1 > 0$$

On applique le théorème de Minty aux arcs du graphe, en coloriant en noir les arcs u avec

$\theta_u > 0$, et en rouge les arcs u avec $\theta_u = 0$.

Alors il ne peut exister un cycle élémentaire rouge et noir passant par l'arc 1 (avec les

arcs noir dans le même sens); donc il passe par l'arc 1 un cocycle élémentaire w^1 avec les

arcs noirs orientés dans le même sens.

w^1 est donc un cocircuit, et le vecteur $\theta - \lambda_1 w^1$ a d'avantage de composantes nulles que le vecteur θ ; c'est aussi une tension supérieure ou égale à zéro.

Si $\theta - \lambda_1 w^1 \neq 0$, on recommence la même réduction avec la nouvelle tension, on aura enfin:

$$\theta - \lambda_1 w^1 - \lambda_2 w^2 - \dots - \lambda_{\lambda(G)} w^{\lambda(G)} = 0 \Rightarrow \theta = \sum_{u=1}^{\lambda(G)} \lambda_u w^u$$

■

Théorème 3.3.4 *Un vecteur $\varphi \in \mathbb{R}^m$ est un flot si et seulement si il est orthogonal à tout vecteur de Θ ;*

Un vecteur $\theta \in \mathbb{R}^m$ est une tension si et seulement si il est orthogonal à tout vecteur de Φ .

Preuve. 1) $\varphi \in \Phi$ et $\theta \in \Theta$. Ce sont des vecteurs orthogonaux c'est-à-dire

$$\sum_{u=1}^m \varphi_u \theta_u = \langle \varphi, \theta \rangle = 0$$

En effet, on a pour tout cycle élémentaire μ

$$\langle \mu, \theta \rangle = 0$$

D'après le corollaire 3.2.1, φ est de la forme

$$\varphi = \sum_{u=1}^{v(G)} \lambda_u \mu^u$$

donc

$$\langle \varphi, \theta \rangle = \left\langle \sum_{u=1}^{v(G)} \lambda_u \mu^u, \theta \right\rangle = \sum_{u=1}^{v(G)} \lambda_u \langle \mu^u, \theta \rangle = 0$$

2) Soit φ un vecteur tel que $\langle \varphi, \theta \rangle = 0, \forall \theta \in \Theta$

Montrons que φ est un flot.

Considérons un sommet x du graphe et si on prend $\theta = w(x)$ on a:

$$\sum_{u \in w^+(x)} \varphi_u - \sum_{u \in w^-(x)} \varphi_u = \langle w(x), \varphi \rangle = 0$$

3) Soit θ un vecteur tel que

$$\langle \varphi, \theta \rangle = 0, \forall \varphi \in \Phi$$

c'est une tension, car on a en particulier, pour un cycle élémentaire μ , la relation:

$$\langle \mu, \theta \rangle = 0$$

■

Le problème de flot de valeur maximum ou de coût minimum

4.1 Introduction

Parmi les problèmes les plus classiques en théorie des graphes, on peut citer celui de la recherche d'un flot maximal. On se donne une capacité maximale sur chaque arc qui sera une borne supérieure du flot autorisé sur cet arc.

Le problème du flot maximal consiste à déterminer un flot dont la valeur en un certain lieu est maximale. On peut, de plus se donner un coût de transport d'une unité de flot sur chaque arc et chercher le flot maximal de coût minimal.

4.2 Flot de valeur maximale

4.3 Définitions

Définition 4.3.1 *Un graphe fortement connexe, sans boucle et ayant plus d'un sommet est appelé un réseau.*

Définition 4.3.2 *Soit $G = (X, U)$ un 1-graphe orienté antisymétrique comportant n sommets. Nous supposons qu'il existe dans X deux sommets particuliers x_1 et x_n tels que $\Gamma^-(x_1) = \emptyset$ et $\Gamma^+(x_n) = \emptyset$, avec x_1 est appelé sommet-entrée ou source noté $x_1 = s$ et x_n est appelé sommet-sortie ou destination noté $x_n = t$ ($t \neq s$). De plus, nous affectons chaque arc $u = (x_i, x_j) \in U$ d'une quantité $c_u \geq 0$ qui représente la capacité de cet arc.*

Un tel graphe est appelé réseau avec capacité; il est défini par le triplet $R = (X, U, C)$, où $C = \{c_{ij}, (x_i, x_j) \in U\}$. On considère le graphe $G^0 = (X, U^0)$ déduit de G en rajoutant un arc (t, s) dont les extrémités initiale et terminale sont respectivement t et s . L'arc (t, s) est appelé l'arc de retour du flot, et on convient de lui attribuer le numéro 0. Les arcs de G^0 sont donc numérotés $0, 1, \dots, m$.

Définition 4.3.3 *Dans un graphe orienté G , un flot $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$ de s à t dans G est l'affectation d'une valeur réelle à chaque arc de G , représentant une quantité transportée sur cet arc, de telle sorte que, en chaque sommet, la somme des flots entrants soit égale à la somme des flots sortants sauf aux sommets s et t (les lois de conservation aux*

nœuds) et on a:

$$\sum_{u \in w^+(s)} \varphi_u = \sum_{u \in w^-(t)} \varphi_u = \varphi_0$$

La quantité φ_0 est appelée la valeur du flot. Si $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$ est un flot de s à t dans G est de valeur φ_0 , alors $\varphi' = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$ est un flot dans G^0 .

Le flot est dit compatible si $0 \leq \varphi_u \leq c_u, \forall u = 1, \dots, m$.

Définition 4.3.4 Pour un flot φ dans un réseau de transport $R = (X, U, C)$, on dit qu'un arc est saturé si on a:

$$\varphi_u = c_u.$$

Définition 4.3.5 Le flot est dit complet si tout chemin allant de s à t contient au moins un arc saturé.

4.4 Recherche d'un flot complet

Soit $R = (X, U, C)$ un réseau de transport, un flot φ sur R est dit complet si pour tout chemin μ de s à t , il existe un arc $u \in \mu$ tel que $\varphi_u = c_u$.

- Autrement dit, tout chemin allant de s à t possède au moins un arc saturé par le flot.
- Un flot complet n'est pas nécessairement maximum.

Construction d'un flot complet :

- Poser $\varphi = 0$.
- **Répéter**
 - Choisir un chemin μ tel que $u \in \mu$ on a $\varphi_u < c_u$.
 - Si un tel chemin n'existe pas alors fin.
 - Sinon pour tout $u \in \mu$ faire $\alpha = \min_{u \in \mu} c_u, \varphi_0 = \varphi_0 + \alpha$.

Exemple 4.4.1 Déterminons un flot complet de 1 à 8 dans le réseau $R = (X, U, C)$ ci-dessous.

On commence par le flot nul $\varphi = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ de valeur $\varphi_0 = 0$

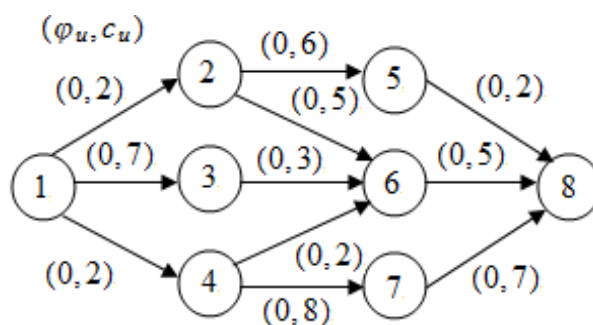


Fig.4-1

Etape 1:

- $\mu = ((1, 2), (2, 5), (5, 8))$ est un chemin dans R .
- $\alpha = \min_{u \in \mu} (2, 6, 2) = 2$.
- $\varphi_{12} = \varphi_{25} = \varphi_{58} = 2, \varphi_{ij} = 0$ ailleurs.
- $\varphi_0 = 2$.

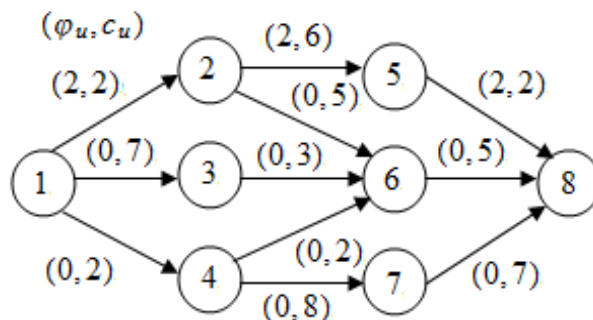


Fig.4-2

Etape 2:

- $\mu = ((1, 3), (3, 6), (6, 8))$ est un chemin dans R .
- $\alpha = \min_{u \in \mu} (7, 3, 5) = 3$
- $\varphi_{13} = \varphi_{36} = \varphi_{68} = 3$, $\varphi_{12} = \varphi_{25} = \varphi_{58} = 2$; $\varphi_{ij} = 0$ ailleurs.
- $\varphi_0 = 5$.

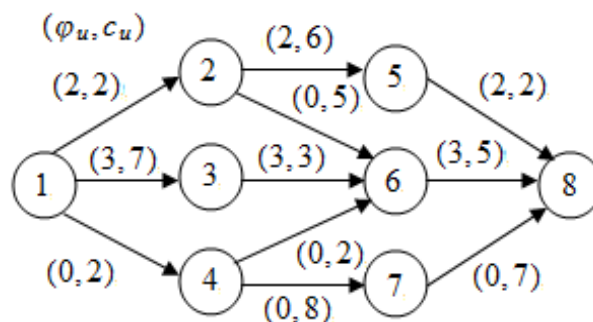


Fig.4-3

Etape 3:

- $\mu = ((1, 4), (4, 6), (6, 8))$ est un chemin dans R .
- $\alpha = \min_{u \in \mu} (2, 2, 5) = 2$
- $\varphi_{13} = \varphi_{36} = 3$, $\varphi_{68} = 5$, $\varphi_{12} = \varphi_{25} = \varphi_{58} = 2$; $\varphi_{ij} = 0$ ailleurs.
- $\varphi_0 = 7$.

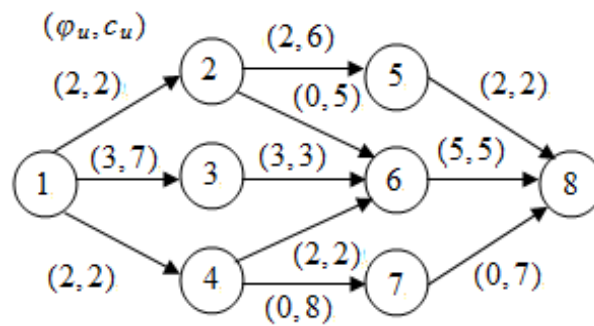


Fig.4-4

Etape 4:

- Il n'y a pas de chemin de 1 à 8 dans R . Donc le flot φ à l'étape 3 est complet et sa valeur est $\varphi_0 = 7$.

4.5 Position du problème

Le problème de flot maximum de s à t dans G muni des capacités c_u avec $u \in U$, revient à déterminer un flot $\varphi' = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$ dans G^0 vérifiant les contraintes de capacité, $0 \leq \varphi_u \leq c_u, \forall u = 1, \dots, m$, tel que la composante φ_0 sur l'arc de retour soit maximale.

4.5.1 Capacité d'une coupe

Définition 4.5.1 On appelle coupe séparant s et t , un ensemble d'arcs de la forme : $w^+(A)$ où $A \subset X$ est un sous-ensemble de sommets tel que $s \in A$ et $t \in X \setminus A$.

On définit la capacité de la coupe $w^+(A)$ comme la somme des capacités des arcs qui la constituent:

$$C(A, X \setminus A) = \sum_{u \in w^+(A)} c_u$$

Lemme 4.5.1 La valeur maximale d'un flot de s et t compatible avec les capacités c_u ne dépasse jamais la capacité d'une coupe séparant s et t .

Preuve. Soit $A \subset X$ quelconque tel que $s \in A$ et $t \in X \setminus A$.

Soit $\varphi' = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$ un flot quelconque dans G^0 . D'après la loi de conservation aux nœuds pour φ on a:

$$\sum_{u \in w^-(A)} \varphi_u = \sum_{u \in w^+(A)} \varphi_u$$

Or l'arc u_0 est un arc de $w^-(A)$, on peut écrire:

$$\varphi_0 + \sum_{\substack{u \in w^-(A) \\ u \neq 0}} \varphi_u = \sum_{u \in w^+(A)} \varphi_u$$

d'où

$$\varphi_0 = \sum_{u \in w^+(A)} \varphi_u - \sum_{\substack{u \in w^-(A) \\ u \neq 0}} \varphi_u$$

Comme $0 \leq \varphi_u \leq c_u$, $\forall u \in U$, on a:

$$\sum_{u \in w^+(A)} \varphi_u \leq \sum_{u \in w^+(A)} c_u \text{ et } \sum_{\substack{u \in w^-(A) \\ u \neq 0}} \varphi_u > 0$$

on peut écrire:

$$\varphi_0 \leq \sum_{u \in w^+(A)} \varphi_u \leq \sum_{u \in w^+(A)} c_u$$

Ceci est vrai $\forall A \subset X$, pour tout flot φ compatible avec les capacités c_u et, en particulier pour le flot donnant à φ_0 une valeur maximale. Donc:

$$\max \varphi_0 \leq \min \left\{ \sum_{u \in w^+(A)} c_u \right\}.$$

d'où le résultat ■

Corollaire 4.5.1 (voir [7]) *Si un flot φ et une coupe $w^+(A)$ sont tels que la valeur φ_0 du flot est égale à la capacité de la coupe, alors φ est un flot maximum de s à t et $w^+(A)$ est une coupe de capacité minimale séparant s et t .*

Corollaire 4.5.2 *Une condition nécessaire et suffisante pour que le problème du flot maximum de s à t dans G ait une solution de valeur finie, est qu'il n'existe pas de chemin de capacité infinie entre s et t .*

Preuve. La condition est évidemment nécessaire.

Réciproquement, s'il n'existe pas de chemin de capacité infinie entre s et t , cela veut dire que le graphe partiel : $G' = (X, U')$ avec:

$$U' = \{u \in U / c_u = +\infty\}$$

n'est pas connexe. Soit $A \subset X$ l'ensemble des sommets reliés à s par un chemin dans G .

Les arcs de $\omega^+(A)$ ont tous une capacité $c_u < +\infty$, donc:

$$\max \varphi_0 \leq \sum_{u \in \omega^+(A)} c_u < +\infty$$

D'où le résultat ■

Dans la suite, nous supposons toujours cette condition réalisée.

4.5.2 Théorème du flot maximum et de la coupe minimale

Théorème 4.5.1 *La valeur maximale d'un flot de s à t dans $G = (X, U)$ muni des capacités c_u avec $u \in U$ est égale à la capacité d'une coupe de capacité minimale séparant s et t .*

Preuve. Soit $\varphi' = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m)$ un flot maximum dans G^0 compatible avec les capacités c_u .

Associons à φ la coloration suivant du graphe G^0 .

- l'arc de retour u_0 est coloré en noir,
- Un arc $u \neq u_0$ tel que $\varphi_u = 0$ est coloré en noir,

- Un arc $u \neq u_0$ tel que $0 < \varphi_u < c_u$ est coloré en rouge,
- Un arc $u \neq u_0$ tel que $\varphi_u = c_u$ est coloré en vert (ici il n'y a pas d'arc incolore).

Supposons alors que l'on soit dans l'éventualité (a) du lemme de Minty. Il existe un cycle μ noir, rouge et vert passant par l'arc u_0 , avec tous les arcs noirs dans le sens de u_0 est tous les arcs verts dans le sens contraire, les arcs rouges sont dans n'importe quel sens.

Soit $\bar{\mu}$ le vecteur associé au cycle μ tel que $(\bar{\mu})_0 = +1$. Alors, en ajoutant au flot φ un flot $\epsilon \cdot \bar{\mu}$ avec $\epsilon > 0$ suffisamment petit, on obtiendrait un flot de valeur supérieure.

Comme le flot φ est maximum, on se trouve donc nécessairement dans l'éventualité (b). Il existe un cocycle $w(A)$ noir et vert mais pas rouge avec $s \in A$ et $t \in X \setminus A$ et tel que tous les arcs de $w^+(A)$ soient verts et tous les arcs de $w^-(A)$ noirs en particulier, $u_0 \in w^-(A)$.

On a alors:

$$\varphi_0 = \sum_{u \in w^+(A)} \varphi_u - \sum_{\substack{u \in w^-(A) \\ u \neq 0}} \varphi_u = \sum_{u \in w^+(A)} c_u$$

ce qui prouve que la valeur du flot φ est égale à la capacité de la coupe $w^+(A)$. D'après le corollaire du lemme de Minty le flot est maximum et la coupe est minimale. ■

4.5.3 Graphe d'écart

Définition 4.5.2 Soit $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$ un flot entre s et t dans $G = (X, U)$ tel que

$$0 \leq \varphi_u \leq c_u, \forall u = 1, \dots, m.$$

Le graphe d'écart associé à φ est le graphe $G(\varphi) = (X, U(\varphi))$ où $U(\varphi)$ est donné comme suit :

A chaque arc $u = (i, j)$ de G , on associe au plus deux arcs de $G(\varphi)$:

$$\begin{cases} u^+ = (i, j), & \text{si } \varphi_u \leq c_u; \\ u^- = (j, i), & \text{si } \varphi_u > 0. \end{cases}$$

On associe également, à chaque arc de $G(\varphi)$ une capacité égale à:

$$\begin{cases} r_{ij} = \varphi_u - c_u > 0 & \text{si } \varphi_u < c_u; \\ r_{ji} = \varphi_u > 0 & \text{dans le second cas.} \end{cases}$$

Théorème 4.5.2 Soit φ un flot de s à t dans G , compatible avec les capacités c_u

($0 \leq \varphi_u \leq c_u$), et soit $G(\varphi)$ le graphe d'écart associé à φ .

Une condition nécessaire et suffisante pour que le flot φ soit maximum est qu'il n'existe pas de chemin de s à t dans $G(\varphi)$.

Preuve. Soit $\varphi' = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m)$ un flot maximum dans $G(\varphi)$ compatible avec les capacités c_u .

Associons à φ la coloration suivant du graphe $G(\varphi)$.

- l'arc de retour u_0 est coloré en noir,
- Un arc $u \neq u_0$ tel que $\varphi_u = 0$ est coloré en noir,
- Un arc $u \neq u_0$ tel que $0 < \varphi_u < c_u$ est coloré en rouge,
- Un arc $u \neq u_0$ tel que $\varphi_u = c_u$ est coloré en vert (ici il n'y a pas d'arc incolore).

Supposons qu'il n'existe pas un chemin "p" entre "s" et "t" dans $G(\varphi)$.

Au chemin p correspond une chaîne entre "s" et "t" dans G , dont tous les arcs noirs sont orientés dans le sens de "s" vers "t", et les arcs verts dans le sens de "t" vers "s".

En ajoutant l'arc de retour u_0 , on obtient un cycle μ de G^0 conforme au cas (a) du lemme de Minty et φ n'est pas maximum.

En effet, pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, $\varphi + \epsilon\mu$ est encore un flot entre "s" et "t", compatible avec les capacités, et de valeur $\varphi_0 + \epsilon > \varphi_0$.

Inversement, si φ est maximum, on se trouve nécessairement dans le cas (b) du lemme de Minty, et il n'existe pas de chemin entre "s" et "t" dans $G(\varphi)$. ■

Ce résultat est la base de construction de l'algorithme de Ford et Fulkerson.

4.6 Algorithme de Ford et Fulkerson

4.6.1 Principe de l'algorithme

Une itération de l'algorithme de Ford et Fulkerson revient à choisir une chaîne joignant s et t , constituée d'arcs $(x_1, \cdot), \dots, (x_i, x_j), \dots, (\cdot, x_n)$ tels que:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) (x_i, x_j) \in U, \text{ avec } r_{ij} = c_{ij} - \varphi_{ij} > 0; \\ \text{ou} \\ 2) (x_j, x_i) \in U, \text{ avec } r_{ji} = \varphi_{ji} > 0. \end{array} \right.$$

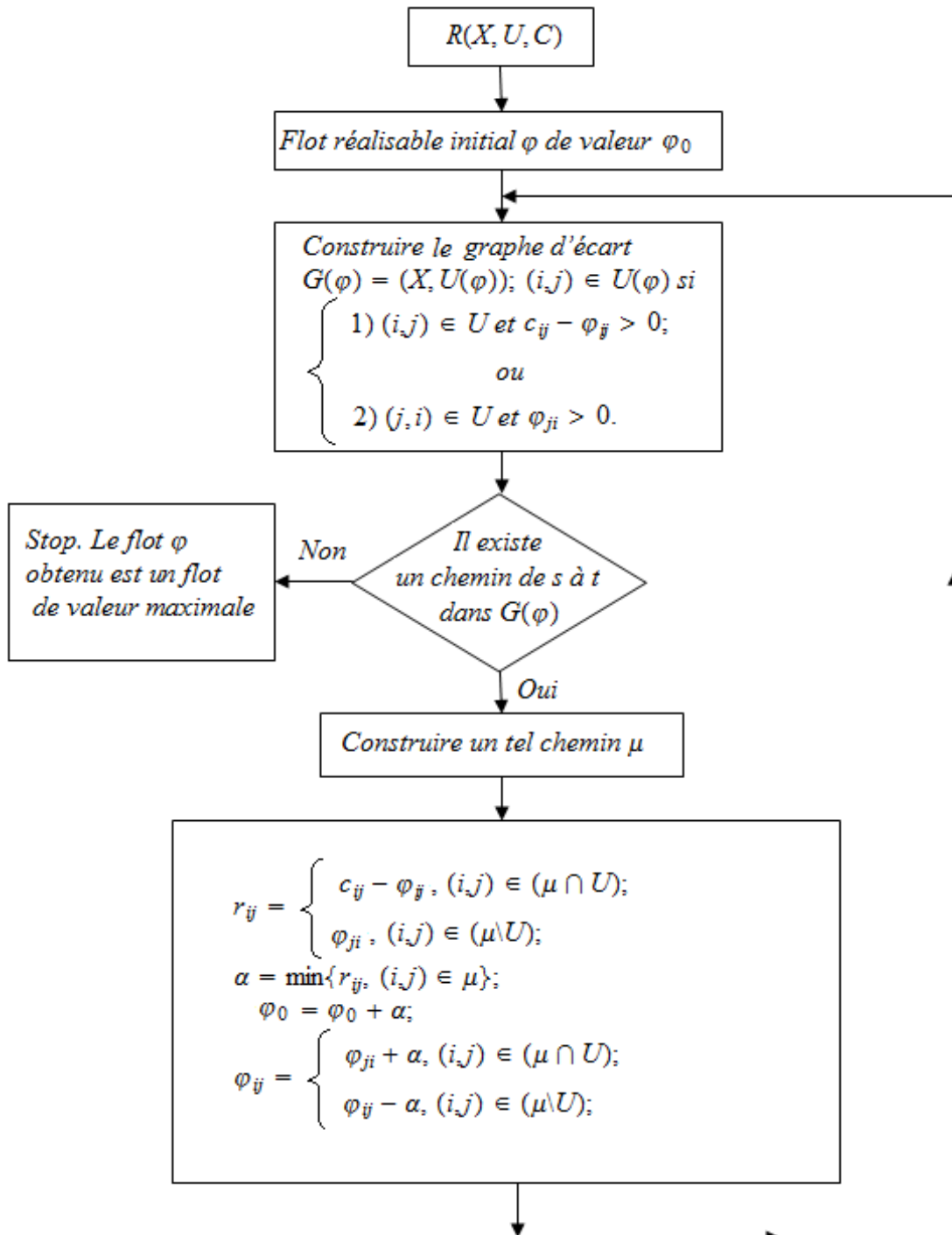
On peut associer au flot φ_0 existant au début de chaque étape un graphe

$G(\varphi) = (X, U(\varphi))$, dit graphe d'écart, dont les arcs sont définis comme suit:

Pour tout $(x_i, x_j) \in U$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) (x_i, x_j) \in U(\varphi), \text{ si } c_{ij} - \varphi_{ij} > 0; \\ 2) (x_j, x_i) \in U(\varphi), \text{ si } \varphi_{ij} > 0. \end{array} \right.$$

4.7 Organigramme de l'algorithme de Ford et Fulkerson



Exemple 4.7.1 Déterminons un flot maximum de 1 à 7 dans le réseau $G = (X, U, C)$

ci-dessous.

On commence par le flot nul $\varphi = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ de valeur $\varphi_0 = 0$

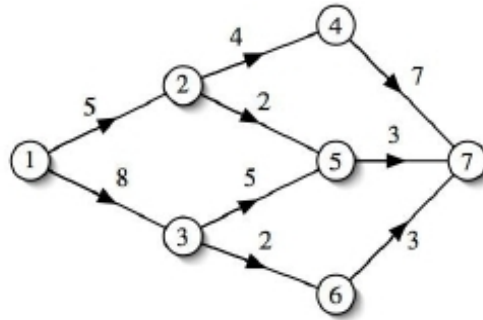


Fig.4-5: Graphe orienté initial

Etape 1:

- Graphe d'écart: comme φ est nul, alors le graphe d'écart $G(\varphi)$ correspond au graphe initial.
- $\mu = ((1, 2), (2, 4), (4, 7))$ est un chemin dans $G(\varphi)$, alors le flot peut être augmenté.
- $\alpha = \min(5, 4, 7) = 4$.
- $\varphi_{12} = \varphi_{24} = \varphi_{47} = 4$, $\varphi_{ij} = 0$ ailleurs.
- $\varphi_0 = 4$.

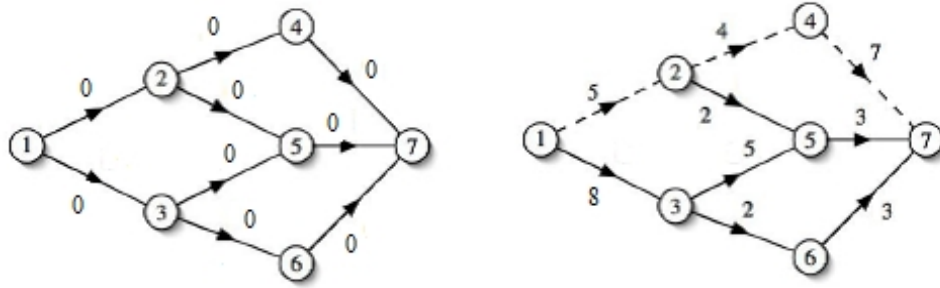


Fig.4-6: Flot initial et graphe d'écart

Etape 2:

- Graphe d'écart $G(\varphi)$: donné ci-dessous.
- $\mu = ((1, 2), (2, 5), (5, 7))$ est un chemin dans $G(\varphi)$. Alors, le flot peut être augmenté.
- $\alpha = \min(1, 2, 3) = 1$
- $\varphi_{12} = 5, \varphi_{24} = \varphi_{47} = 4, \varphi_{25} = \varphi_{57} = 1; \varphi_{ij} = 0$ ailleurs.
- $\varphi_0 = 5$.

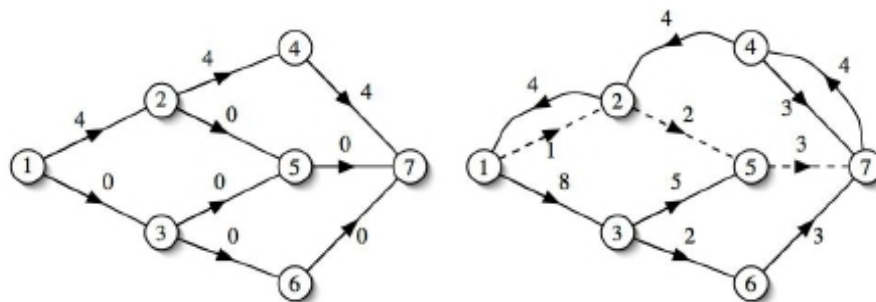


Fig.4-7: Flot à l'itération numéro 1 et graphe d'écart

Etape 3:

- Graphe d'écart $G(\varphi)$: donné ci-dessous
- $\mu = ((1, 3), (3, 5), (5, 7))$ est un chemin 1 à 7 dans $G(\varphi)$. Alors, le flot peut être augmenté.
- $\alpha = \min(8, 5, 2) = 2$
- $\varphi_{12} = 5, \varphi_{24} = \varphi_{47} = 4, \varphi_{13} = \varphi_{35} = 2, \varphi_{57} = 3, \varphi_{25} = 1, \varphi_{ij} = 0$.
- $\varphi_0 = 7$.

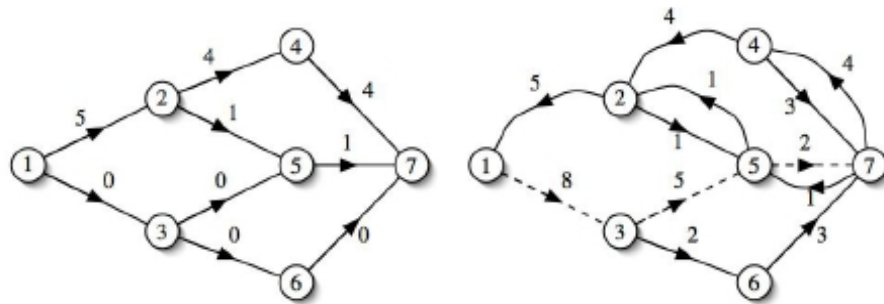


Fig.4-8: Flot à l'itération numéro 2 et graphe d'écart

Etape 4:

- Graphe d'écart $G(\varphi)$: donné ci-dessous.
- $\mu = ((1, 3), (3, 6), (6, 7))$ est un chemin 1 à 7 dans $G(\varphi)$. Alors, le flot peut être augmenté.
- $\alpha = \min(6, 2, 3) = 2$
- $\varphi_{12} = 5, \varphi_{24} = \varphi_{47} = 4, \varphi_{13} = \varphi_{35} = 2, \varphi_{57} = 3, \varphi_{25} = 1, \varphi_{36} = \varphi_{67} = 2$.
- $\varphi_0 = 9$.

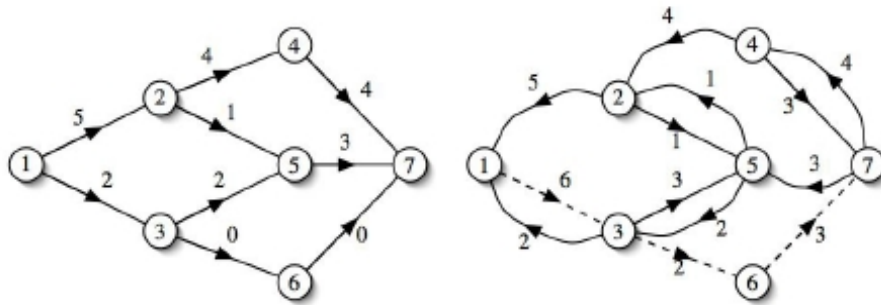


Fig.4-9: Flot à l'itération numéro 3 et graphe d'écart

Etape 5:

- Graphe d'écart $G(\varphi)$: donné ci-dessous.
- Il n'y a pas de chemin de 1 à 7 dans $G(\varphi)$.

Alors, le flot ne peut pas être augmenté. Donc le flot φ à l'étape 4 est maximal et sa valeur est $\varphi_0 = 9$.

$$\varphi = (\varphi_{12}, \varphi_{24}, \varphi_{47}, \varphi_{25}, \varphi_{57}, \varphi_{13}, \varphi_{35}, \varphi_{36}, \varphi_{67}) = (5, 4, 4, 1, 3, 4, 2, 2, 2) \text{ et } \varphi_0 = 9$$

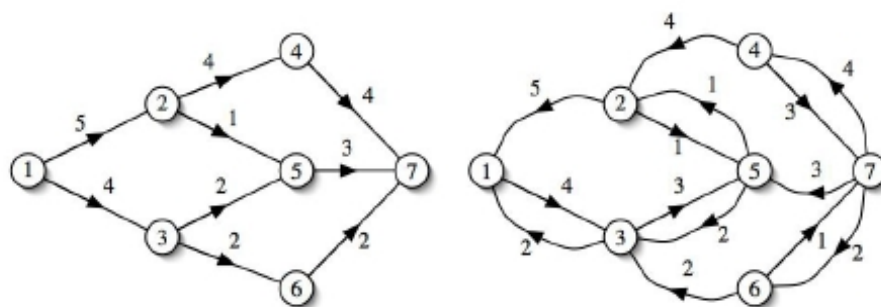


Fig.4-10: Flot à l'itération numéro 4 et graphe d'écart

Remarque 4.7.1 *Un flot maximal est complet. Mais un flot complet n'est pas nécessairement maximal*

4.7.1 Convergence de l'algorithme

Par définition du graphe d'écart, les flots φ sont tous compatibles avec les capacités. Par ailleurs, $\epsilon > 0$ à chaque itération, et par suite l'algorithme produit une séquence de flots compatibles de valeurs strictement croissantes.

Si les capacités $c_u (u \in U)$ sont des nombres entiers les ϵ sont entiers positifs à chaque itération, donc les flots φ ont toujours leurs composantes entières, et la valeur du flot augmente d'une unité au moins à chaque itération. L'algorithme converge donc en un nombre fini d'itérations.

Théorème 4.7.1 *(voir [7]) "des valeurs entières" Si les capacités des arcs sont des nombres entiers, le flot maximum de s à t dans G a ses composantes toutes entières.*

Remarque 4.7.2 *Si les capacités c_u sont des nombres réels quelconques alors l'algorithme de Ford et Fulkerson peut ne pas converger: cela dépend du choix du chemin μ dans $G(\varphi)$ à chaque itération.*

4.7.2 Extensions diverses

1) On peut trouver un ensemble S de sommets sources et un ensemble T de sommets puits (destination). Ce cas se réduit au précédent en ajoutant au réseau initial un sommet s dit "supersource" et un sommet t "superpuits" ainsi que les arcs (s, x) , $\forall x \in S$ et (y, t) , $\forall y \in T$, ces arcs ayant des capacités infinies

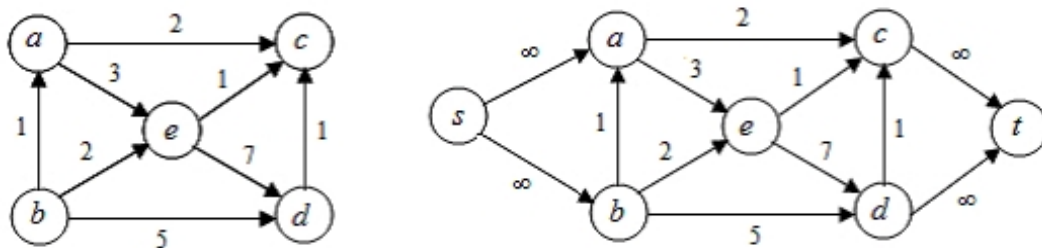


Fig.4-11

2) Nous avons supposé jusqu'ici que le graphe $G = (X, U)$ était un graphe orienté. Il est cependant facile d'utiliser l'algorithme de Ford et Fulkerson pour rechercher un flot maximum dans un graphe où certains arcs sont non orientés (le flot pouvant passer dans les deux sens).

Il suffit pour cela de se ramener au cas orienté en construisant à partir du graphe de départ, un graphe orienté, où tout arc $u = (i, j)$ non orienté de capacité c_u , est remplacé

par deux arcs orientés: $u' = (i, j)$ de capacité c_u et $u'' = (j, i)$ de capacité c_u .

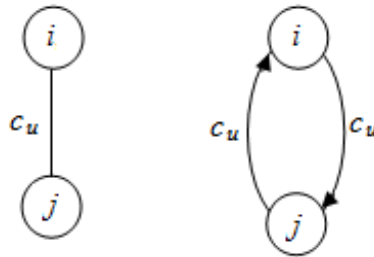


Fig.4-12

3) S'il y a des capacités définies sur les sommets du réseau dans ce cas on dédoublera chacun des sommets x en deux sommets x'' extrémité terminale et x' extrémité initiale reliés par un arc orienté (x', x'') auquel est affectée la capacité du sommet x .

Les arcs $u \in w^-(x)$ dont x constitue l'extrémité sont alors rattachés à x' et les arcs $u \in w^+(x)$ sont rattachés à x'' . On a plus qu'à chercher un flot maximum sur le nouveau graphe ainsi formé.

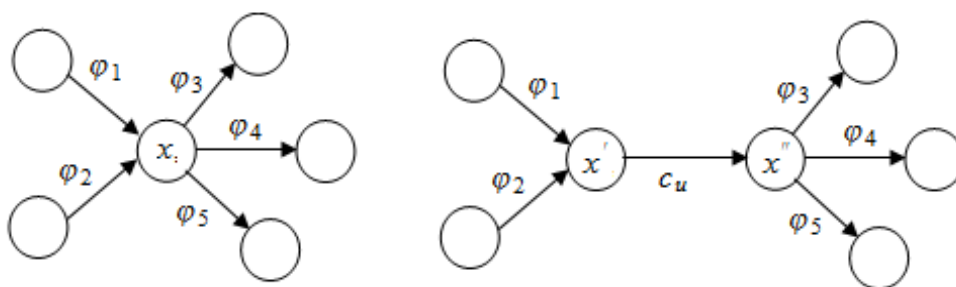


Fig.4-13

4) Un autre cas intéressant consiste à faire intervenir le temps en considérant que le flot partant de i et parcourant un arc (i, j) arrive en j avec un certain retard t_{ij} : ce type de problème a été étudié par Ford et Fulkerson (1985) sous le nom de flots dynamiques.

4.7.3 Algorithme de Ford et Fulkerson avec bornes inférieures de capacité

Jusqu'ici, nous avons toujours supposé que les flux φ_u étaient positifs ou nuls, c'est-à-dire bornés inférieurement par zéro.

Il est possible de généraliser l'algorithme de Ford et Fulkerson au cas où on impose, en plus d'une borne supérieure c_u , une borne inférieure $b_u > 0$ du flux sur chaque arc $u \in U$. L'algorithme de Ford et Fulkerson reste valable à ce cas, à condition d'étendre la notion de graphe d'écart $G(\varphi) = (X, U(\varphi))$ à un flot φ quelconque compatible avec les contraintes: $b_u \leq \varphi_u \leq c_u$ en définissant $U(\varphi)$ comme l'ensemble des couples:

$$\begin{aligned} u^+ &= (i, j) \text{ si } u = (i, j) \in U \text{ et } \varphi_u \leq c_u; \\ u^- &= (j, i) \text{ si } u = (i, j) \in U \text{ et } \varphi_u > b_u. \end{aligned}$$

Dans le premier cas, la capacité résiduelle de l'arc u^+ est: $c_u - \varphi_u$; dans le seconde cas, $\varphi_u - b_u$.

Le problème ici est de trouver un flot compatible pour débiter les itérations de l'algorithme de Ford et Fulkerson.

4.8 Problème du flot compatible

Définition 4.8.1 Soit un graphe $G = (X, U)$ connexe. A chaque arc $u \in U$ de G on affecte deux nombres b_u et c_u tels que: $b_u \leq c_u$. Le problème est de trouver un flot φ dans G compatible avec les contraintes:

$$b_u \leq \varphi_u \leq c_u, \forall u \in U.$$

Remarque 4.8.1 le flot nul n'est pas nécessairement compatible.

4.8.1 Une condition nécessaire d'existence

Si φ est un flot dans G , alors pour tout sous-ensemble de sommets $A \subset X$

$$\sum_{u \in w^+(A)} \varphi_u - \sum_{u \in w^-(A)} \varphi_u = 0.$$

Si φ est un flot compatible c'est-à-dire $b_u \leq \varphi_u \leq c_u, \forall u \in U$ alors:

$$\sum_{u \in w^+(A)} c_u - \sum_{u \in w^-(A)} b_u \geq 0$$

4.8.2 Algorithme de recherche d'un flot compatible

Principe de l'algorithme

Soit φ un flot quelconque dans G , compatible ou non.

On appelle distance de φ_{ij} à l'intervalle $[b_{ij}, c_{ij}]$ le nombre r_{ij} défini par:

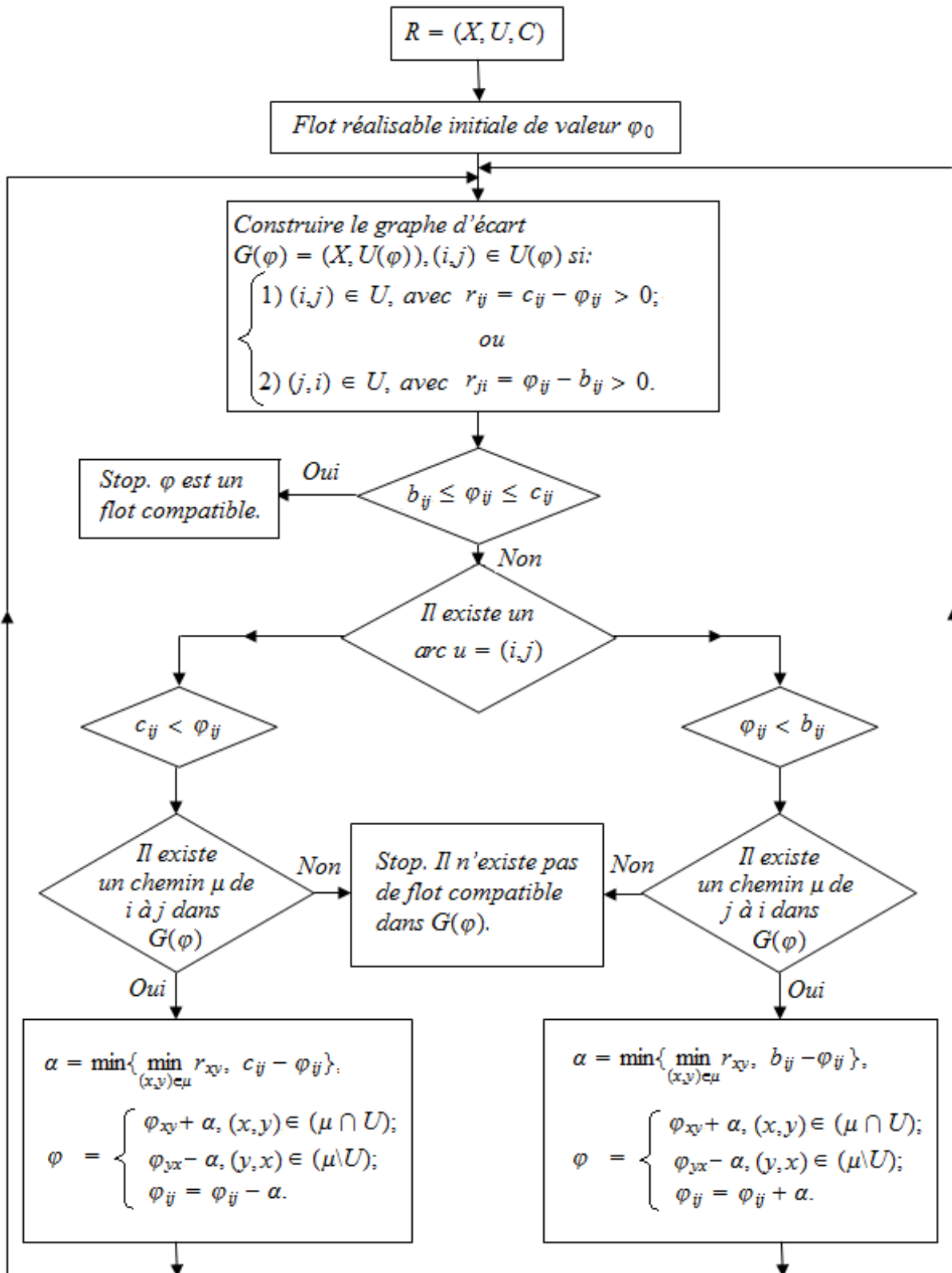
$$\begin{cases} r_{ij} = 0, & \text{si } \varphi_{ij} \in [b_{ij}, c_{ij}]; \\ r_{ji} = \varphi_{ij} - b_{ij}, & \text{si } \varphi_{ij} > b_{ij}; \\ r_{ij} = c_{ij} - \varphi_{ij}, & \text{si } c_{ij} > \varphi_{ij}. \end{cases}$$

Donc, pour un flot quelconque φ , on a:

$$r = \sum_{(i,j) \in U} r_{ij} \geq 0.$$

L'idée est de minimaliser r sur l'ensemble Φ de tous les flots.

4.8.3 Organigramme de l'algorithme



Exemple 4.8.1 Déterminons un flot compatible de 1 à 6 dans le réseau $G = (X, U, C)$

ci-dessous.

On commence par le flot $\varphi = (3, 2, 1, 2, 0, 3, 1, 1, 4)$.

Etape 1:

- Graphe d'écart $G(\varphi)$ donné ci-dessous.
- $u = (3, 4)$, $\mu = ((4, 5), (5, 3))$ est un chemin μ dans $G(\varphi)$.
- $\alpha = \min\{\min_{(x,y) \in \mu} r_{xy}, b_u - \varphi_u\} = \min\{1, 1, 1\} = 1$.
- $\varphi_{45} = 2, \varphi_{53} = 2, \varphi_{34} = 1$.
- $\varphi = (3, 2, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 4)$

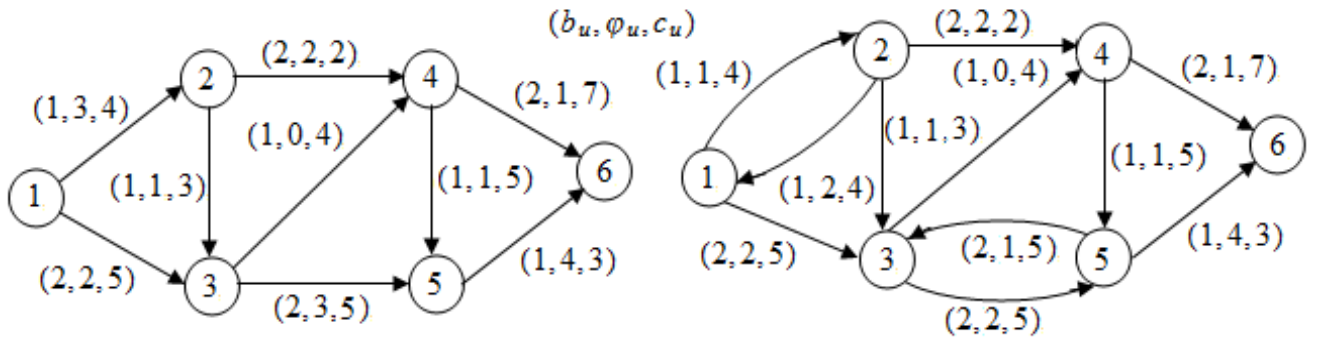


Fig.4-14: Flot initial et graphe d'écart

Etape 2:

- Graphe d'écart $G(\varphi)$ donné ci-dessous.
- $u = (5, 6)$, $\mu = ((5, 4), (4, 6))$ est un chemin μ dans $G(\varphi)$.
- $\alpha = \min\{\min_{(x,y) \in \mu} r_{xy}, \varphi_u - c_u\} = \min\{6, 4, 1\} = 1$.
- $\varphi_{54} = 1, \varphi_{46} = 2, \varphi_{56} = 3$

- $\varphi = (3, 4, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 3)$.

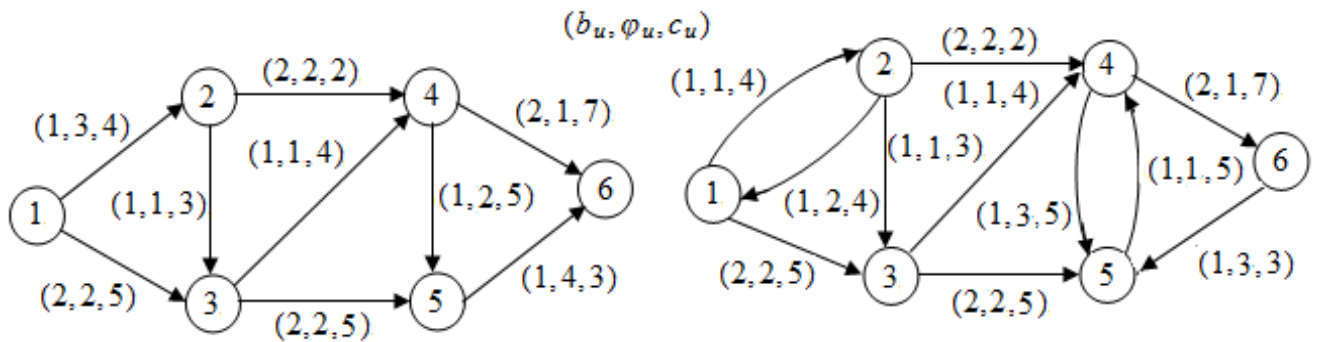


Fig.4-15: Flot à l'itération numéro 1 et graphe d'écart

Etape 3:

- Graphe d'écart $G(\varphi)$: donné ci-dessous.
- $\varphi = (3, 4, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 3)$, vérifie $b_u \leq \varphi_u \leq c_u, \forall u \in U$ tel que $U = \{u_1, \dots, u_9\}$

Alors, le flot φ est compatible.

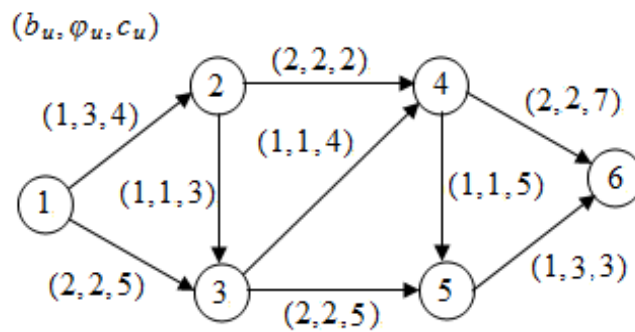


Fig.4-16: Flot compatible dans G

Convergence de l'algorithme

Si les nombres b_u et c_u sont entiers, r décroît d'au moins une unité à chaque itération, et par suite l'algorithme s'arrête, au bout d'un nombre fini d'itérations:

- Soit lorsqu'on a trouvé un flot compatible $r = 0$;
- Soit avec la preuve qu'il n'existe pas de flot compatible.

Théorème 4.8.1 (voir [2]) *Etant donné un graphe $G = (X, U)$ et pour chaque arc $u \in U$ on associe deux nombres b_u et c_u tels que: $b_u \leq c_u$. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un flot φ vérifiant:*

$$b_u \leq \varphi_u \leq c_u, \forall u \in U;$$

est que:

$$\sum_{u \in w^+(A)} c_u - \sum_{u \in w^-(A)} b_u \geq 0;$$

pour tout cocycle $w(A) = w^+(A) \cup w^-(A)$.

Remarque 4.8.2 *Ce théorème peut être considéré comme une généralisation du théorème du flot maximum de la coupe minimale. En effet, en prenant $b_u = 0, \forall u \in U$ sauf pour l'arc de retour $u_0 = (t, s)$ sur lequel on pose $b_0 = c_0 = \varphi_0$. La condition nécessaire devient alors:*

$$\sum_{u \in w^+(A)} c_u - \varphi_0 \geq 0, \forall A \subset X, s \in A \text{ et } t \in X \setminus A,$$

et par conséquent, il existe un flot de valeur φ_0 entre s et t si et seulement si:

$$\min_{\substack{ACX \\ s \in A, t \in X \setminus A}} \left\{ \sum_{u \in w^+(A)} c_u \right\} \geq \varphi_0.$$

Un flot maximum est donc:

$$\varphi_0 = \min_{\substack{ACX \\ s \in A, t \in X \setminus A}} \left\{ \sum_{u \in w^+(A)} c_u \right\}$$

4.9 Flot de coût minimum

4.9.1 Formulation du problème

Soit $R = (X, U, C)$ un réseau avec capacité. Supposons qu'à chaque arc $(i, j) \in U$ est associé un nombre réel f_{ij} qui représente le coût unitaire de mouvement de la matière le long de cet arc. Le coût total d'un flot réalisable φ , noté $f(\varphi)$ est:

$$f(\varphi) = \sum_{(i,j) \in U} f_{ij} \varphi_{ij}.$$

Considérons l'ensemble des flots réalisables φ de même valeur ϕ_0 , $0 \leq \phi_0 \leq \phi_M$ où $\phi_M = \max\{\varphi_0, \varphi \in \Phi\}$. Un flot de cet ensemble est dit de coût minimal s'il minimise le coût total $f(\varphi)$. Nous présentons ci-dessous un algorithme permettant l'obtention d'un tel flot, pour une valeur ϕ_0 donnée. Cet algorithme est une extension directe de l'algorithme de Ford et Fulkerson.

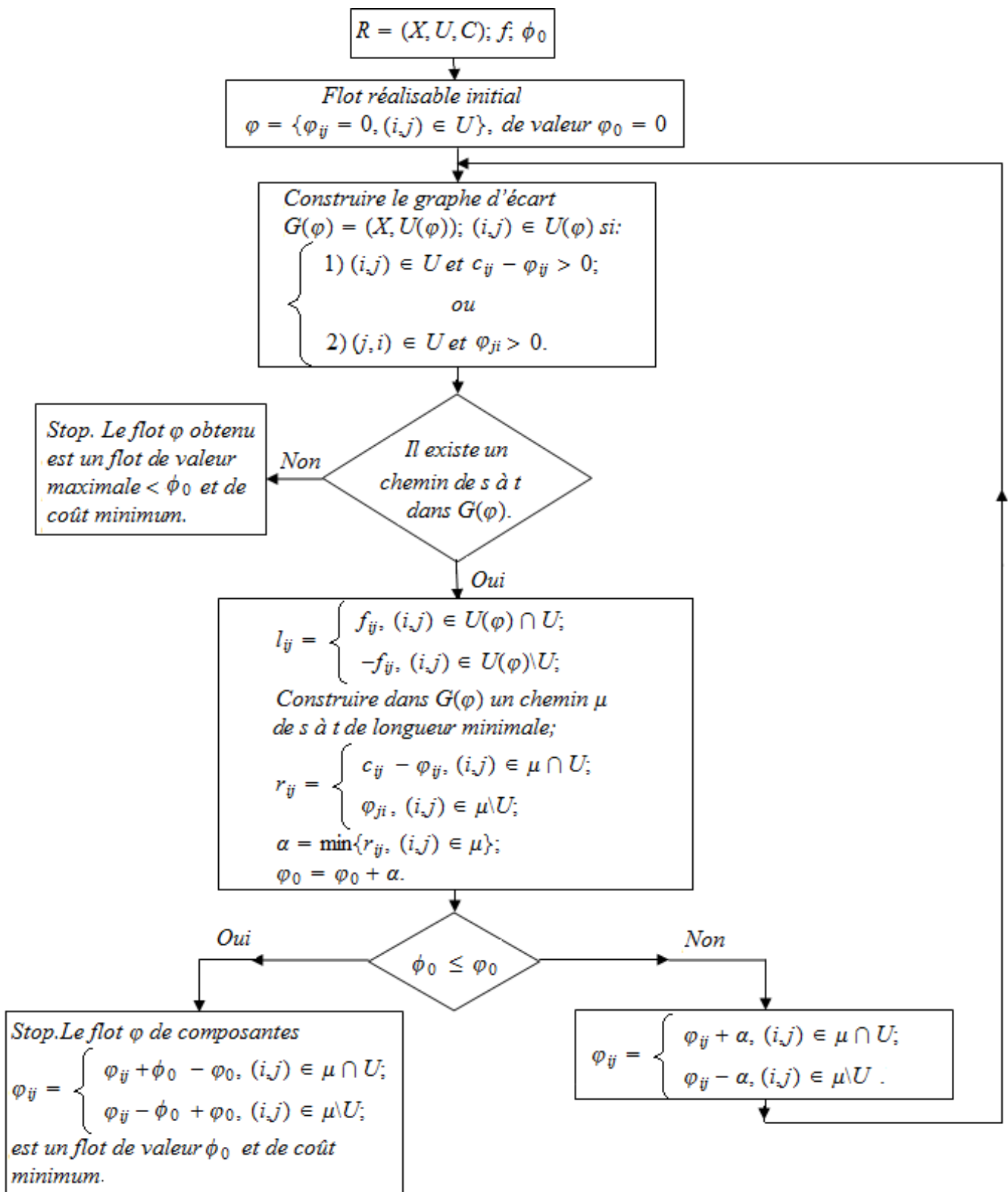
4.9.2 Algorithme d'obtention d'un flot de coût minimum

Principe de l'algorithme:

Rappelons que chaque étape de l'algorithme de Ford et Fulkerson consiste à rechercher un chemin μ de s à t dans le graphe d'écart $G(\varphi)$. Pour minimiser les coûts de circulation de matière, il suffit donc de déterminer, à chaque itération un chemin de coût minimum.

En assimilant le coût unitaire f_{ij} sur l'arc (i, j) à une longueur l_{ij} , le problème revient à obtenir, à chaque étape, un chemin de longueur minimale, et cela jusqu'à ce que la valeur du flot ainsi construit atteigne le niveau ϕ_0 . Remarquons qu'il convient généralement de choisir ici comme flot réalisable initial le flot de valeur nulle.

4.9.3 Organigramme de d'obtention d'un flot de valeur ϕ_0 donnée, de coût minimum



Exemple 4.9.1 Déterminons un flot de valeur ϕ_0 de coût minimal de 1 à 7 dans le réseau ci-dessous, où les couples de nombres associés aux arcs représentent, respectivement, les capacités et les coûts unitaires:

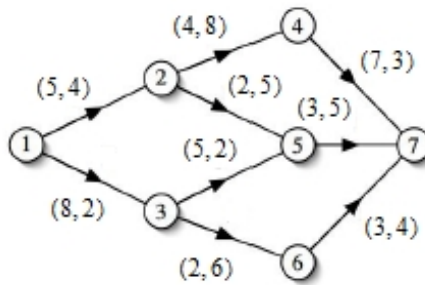


Fig.4-17: Graphe d'écart

On commence par le flot nul $\varphi = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ de valeur $\varphi_0 = 0$

Etape 1:

- Graphe d'écart: comme φ est nul, alors le graphe d'écart $G(\varphi)$ correspond au graphe initial.
- $\mu = ((1, 3), (3, 5), (5, 7))$ est un chemin μ de longueur minimale dans $G(\varphi)$.
- $\alpha = \min(8, 5, 3) = 3$, le flot initial peut être amélioré de la quantité $\alpha = 3$.
- Un flot de valeur ϕ_0 , où $0 < \phi_0 \leq 3$, de coût minimal.

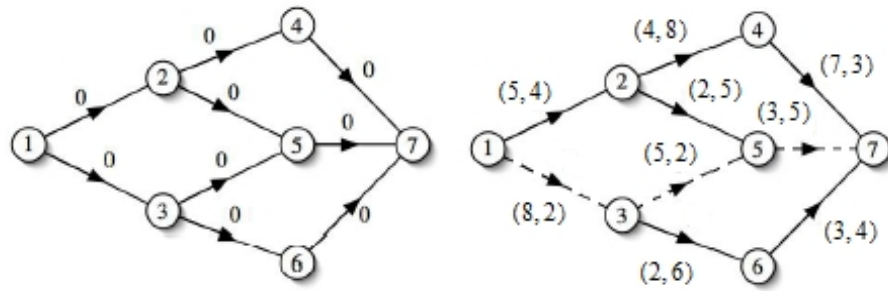


Fig.4-18: Flot initial et graphe d'écart

Si la valeur de flot choisie $\phi_0 > 3$ alors $\phi_0 = 3$.

Etape 2:

- Graphe d'écart $G(\varphi)$: donné ci-dessous.
- $\mu = ((1, 3), (3, 6), (6, 7))$ est un chemin μ de longueur minimale dans $G(\varphi)$.
- $\alpha = \min(5, 2, 3) = 2$, le flot initial peut être amélioré de la quantité $\alpha = 2$.
- Un flot de valeur ϕ_0 , où $3 < \phi_0 \leq 5$, de coût minimal.

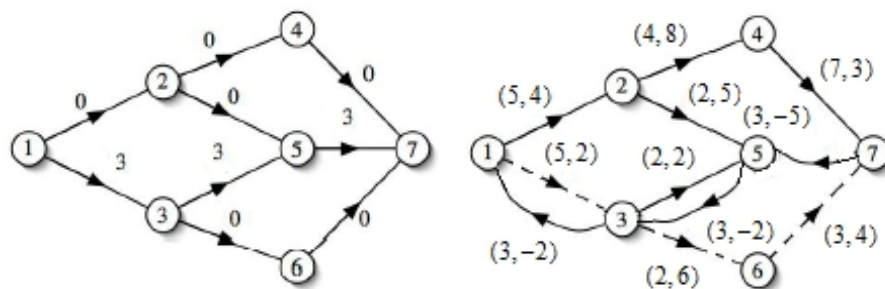


Fig.4-19: Flot à l'itération numéro 1 et graphe d'écart

Si la valeur de flot choisie $\phi_0 > 5$ alors $\phi_0 = 5$

Etape 3:

- Graphe d'écart $G(\varphi)$: donné ci-dessous.
- $\mu = ((1, 2), (2, 4), (4, 7))$ est un chemin μ de longueur minimale dans $G(\varphi)$.
- $\alpha = \min(5, 4, 5) = 4$, le flot initial peut être amélioré de la quantité $\alpha = 4$.
- Un flot de valeur ϕ_0 , où $5 < \phi_0 \leq 9$, de coût minimal.

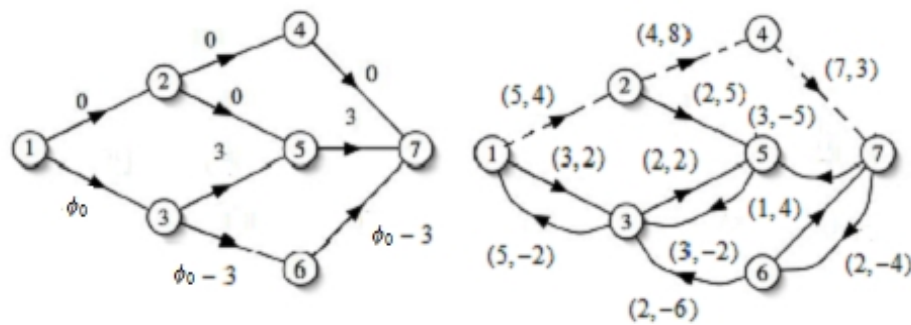


Fig.4-20: Flot à l'itération numéro 2 et graphe d'écart

Si la valeur de flot choisie $\phi_0 > 9$ alors $\phi_0 = 9$

Etape 4:

- Graphe d'écart $G(\varphi)$: donné ci-dessous.
- Il n'y a pas de chemin de 1 à 7 dans $G(\varphi)$.

Alors, le flot $\phi_0 = 9$ obtenu à l'étape 3 est de valeur maximale et de coût minimal. Ce

flot est donc:

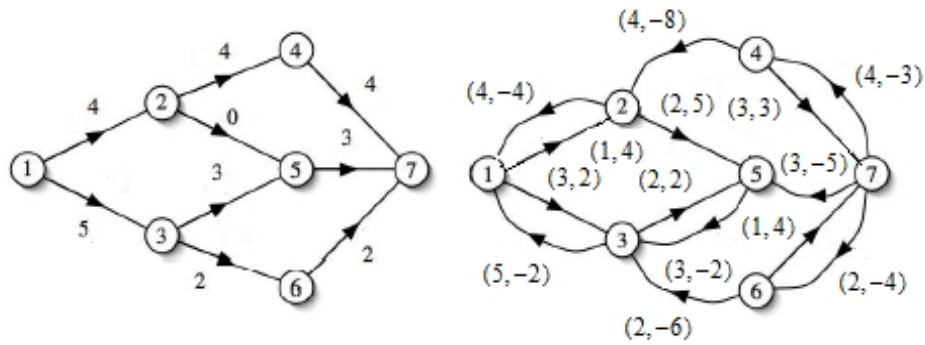


Fig.4-21: Flot à l'itération numéro 3 et graphe d'écart

et le coût total correspondant est égale à

$$(4 \times 4) + (4 \times 8) + (4 \times 3) + (5 \times 2) + (6 \times 2) + (2 \times 4) + (3 \times 2) + (3 \times 5) + (0 \times 5) = 111.$$

Remarque 4.9.1 *L'exécution de cet algorithme nécessite la recherche d'un chemin de longueur minimale. A cet effet, il existe des algorithmes permettant de trouver un tel chemin. Citons à titre d'exemple, l'algorithme de Dijkstra, l'algorithme de Ford,...*

5.1 Introduction

Le problème de transport constitue un champ d'application classique de la théorie des flots. Ce problème peut être résolu par les méthodes générales exposées au chapitre précédant. L'objet de ce chapitre est de présenter un algorithme qui permet de résoudre très facilement un tel problème.

5.2 Problème de transport

5.2.1 Formulation du problème

Nous considérons ici un problème de transport sous la forme dite de Hitchcock. Un bien donné est disponible en m lieux O_1, \dots, O_m , appelés origines, en quantités respectives a_1, \dots, a_m , et doit être livré en n lieux D_1, \dots, D_n , appelés destinations, en quantités respectives b_1, \dots, b_n . Soient $I = \{1, \dots, m\}$ et $J = \{1, \dots, n\}$; par abus de langage, il nous arrivera fréquemment de noter i l'origine O_i et j la destination D_j . Les quantités offertes

et demandées sont des entiers non négatifs tels que l'offre totale est égale à la demande totale, c'est-à-dire

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} b_j.$$

Chaque origine O_i est reliée à chaque destination D_j par une route (O_i, D_j) , et à l'acheminement d'une unité du bien considéré de O_i à D_j correspond un coût de transport f_{ij} entier et non négatif. Le problème est d'obtenir un schéma de transport φ de coût minimum, c'est-à-dire de déterminer les quantités φ_{ij} à transporter de $O_i, i \in I$, à $D_j, j \in J$, de manière à satisfaire les demandes au moindre coût. Plus précisément, il s'agit de minimiser

$$f(\varphi) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} f_{ij} \varphi_{ij}$$

sous les contraintes

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j \in J} \varphi_{ij} = a_i, i \in I; \\ \sum_{i \in I} \varphi_{ij} = b_j, j \in J; \\ \varphi_{ij} \geq 0, i \in I, j \in J. \end{array} \right.$$

Un schéma de transport de coût minimum peut également s'obtenir à partir de la théorie générale des flots, en effet associés à ce problème le réseau de transport suivant:

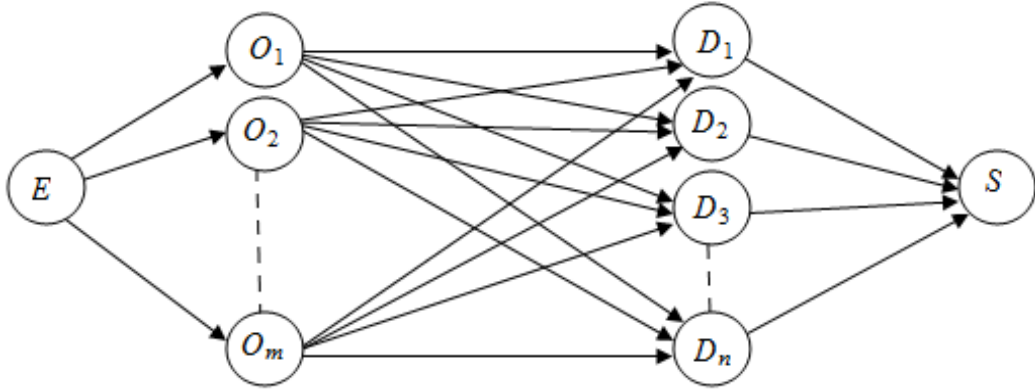


Fig.5-1: Modélisation d'un problème de transport sous forme d'un problème de flot.

dans lequel E est une entrée fictive, S est une sortie fictive, et les capacités associées aux arcs valent respectivement

<i>Arcs</i>	$(E, O_i), i \in I$	$(O_i, D_j), i \in I, j \in J$	$(D_j, S), j \in J$
<i>Capacités</i>	a_i	∞	b_j

Il est clair que le problème se ramène en fait à la recherche dans ce réseau d'un flot de valeur maximale et de coût minimal

5.2.2 Algorithme Primal-dual

Principe de l'algorithme:

Cet algorithme permet d'obtenir un schéma de transport de coût minimum. Chaque étape se subdivise en trois parties principales.

1) Augmenter ou diminuer tous les éléments de chaque rangée de la matrice des f_{ij} d'une même quantité par rangée; le choix, à chaque étape, de ces quantités est de diminuer d'une même quantité u_i les coûts unitaires sur tous les arcs en provenance de O_i , et d'une même quantité v_j les coûts unitaires sur tous les arcs à destination de D_j .

- ces opérations sur la matrice des f_{ij} ne modifient pas la solution optimale du problème de transport.

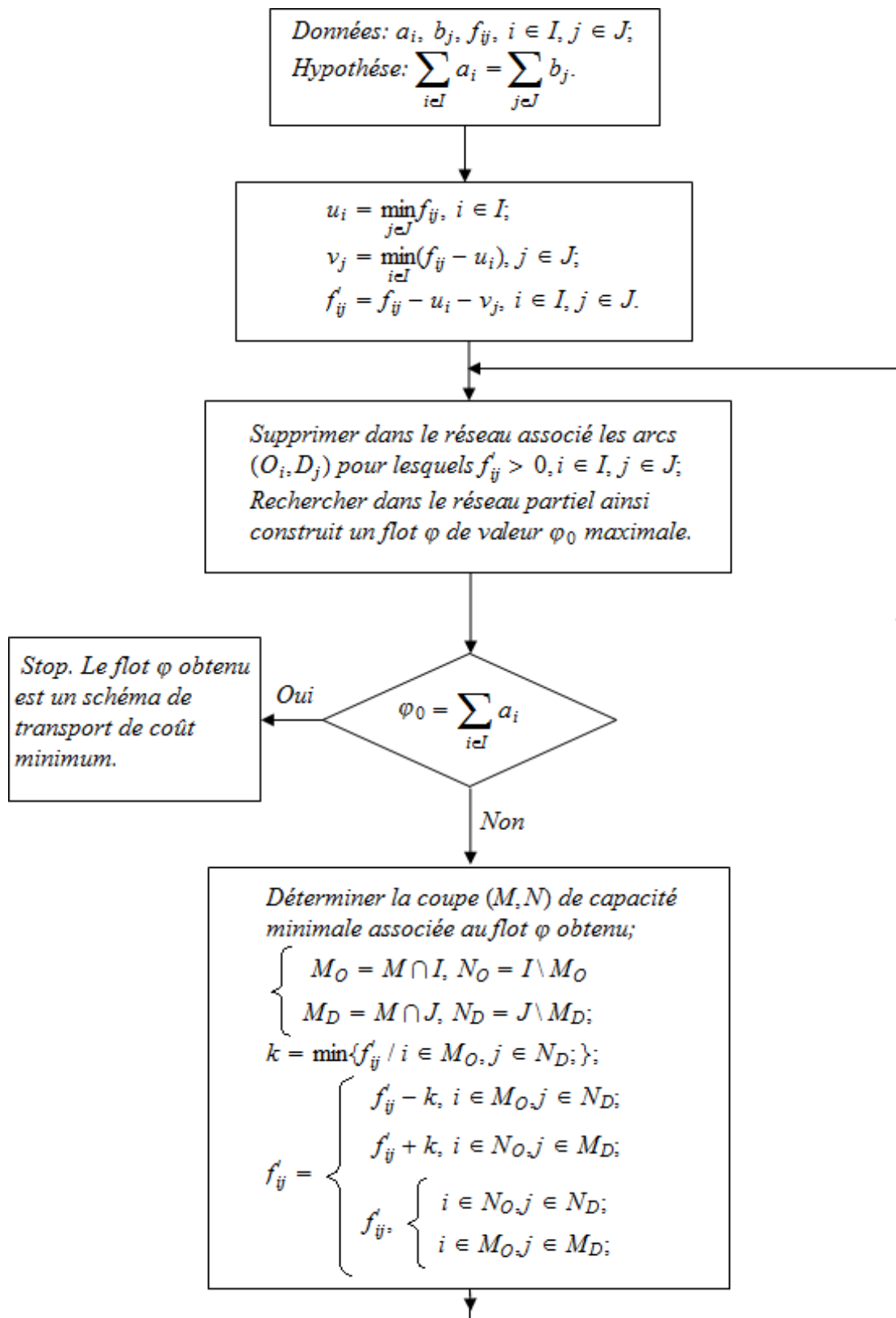
- Le choix des quantités est tel que les coûts transformés, notés f'_{ij} , sont toujours non négatifs.

2) Supprimer dans le réseau associé les arcs (O_i, D_j) pour lesquels f'_{ij} est strictement positif, c'est-à-dire construire un réseau partiel en ne conservant que les arcs (O_i, D_j) pour lesquels f'_{ij} est nul; ces arcs constituent donc les seules routes ouvertes entre les origines et les destinations. On recherche dans ce réseau partiel un flot de valeur maximale au moyen de l'algorithme de Ford et Fulkerson.

3) Rechercher dans ce réseau partiel un flot maximum. Si le flot obtenu sature les arcs initiaux (E, O_i) , et donc aussi les arcs terminaux (D_j, S) , alors il constitue un schéma de transport de coût minimum; dans le cas contraire, déterminer la coupe (M, N) de

capacité minimale associée à ce flot avec M représente l'ensemble des sommets marqués, N l'ensemble des sommets non marqués. On partitionne M en deux sous-ensembles, l'ensemble M_O des sommets de I marqués et l'ensemble M_D des sommets J marqués; de la même manière, N est partitionné en deux sous-ensembles N_O et N_D .

5.2.3 Organigramme de l'algorithme Primal-dual



Exemple 5.2.1 Un fabricant de papier produit des feuilles pour duplicateurs dans quatre usines différentes (O_1, O_2, O_3, O_4) en quantités mensuelles de 15, 30, 25, 35 unités respectivement. Cinq centres de ventes (D_1, D_2, D_3, D_4, D_5) lui demandent livraison dans un mois des quantités de 25, 35, 12, 27 et 21 unités respectivement. Si l'on sait que les quatre usines disposent actuellement de stocks contenant respectivement 7, 6, 9 et 3 unités, et que les unités stockées donnent lieu à un coût unitaire de stockage égale à 16, déterminons un schéma de transport de coût minimum en se basant sur le tableau de coûts unitaires de transport suivant:

f_{ij}	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
O_1	7	9	12	12	10
O_2	6	14	7	10	12
O_3	12	10	12	11	9
O_4	20	12	22	15	8

Rappelons que pour pouvoir appliquer la méthode primal-duale il est nécessaire que l'offre soit égale à la demande totale. Vérifions si cette condition est bien satisfaite pour ce problème. L'offre totale est égale à la production des quatre usines.

$15 + 30 + 25 + 35 = 105$ augmentées des stocks disponibles $7 + 6 + 9 + 3 = 25$, soit une quantité égale à 130 unités.

La demande totale est égale à $25 + 35 + 12 + 27 + 21 = 120$ unités

L'offre totale étant supérieure de 10 unités à la demande totale, nous devons envisager

une demande fictive de 10 unités qui correspondra en réalité à un stockage de ces 10 unités dans les usines de production. Nous ajoutant donc un centre de vente fictif D_6 , le coût unitaire de transport des quatre usines vers D_6 étant le coût unitaire de stockage 16. Le tableau des coûts ainsi complété est repris ci-dessous:

f_{ij}	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	O_i
O_1	7	9	12	12	10	16	7
O_2	6	14	7	10	12	16	6
O_3	12	10	12	11	9	16	9
O_4	20	12	22	15	8	16	8

Etape 1: Nous pouvons maintenant appliquer l'algorithme primal-dual. Le calcul successif

des quantités u_i, v_j et f'_{ij} est développé ci-dessous:

$f_{ij} - u_i$	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6
O_1	0	2	5	5	3	9
O_2	0	8	1	4	6	10
O_3	3	1	3	2	0	7
O_4	12	4	14	7	0	8
v_j	0	1	1	2	0	7

f'_{ij}	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6
O_1	0	1	4	3	3	2
O_2	0	7	0	2	6	3
O_3	3	0	2	0	0	0
O_4	12	3	13	5	0	1

Le réseau partiel associé aux coûts $f'_{ij} = 0$ est alors le suivant:

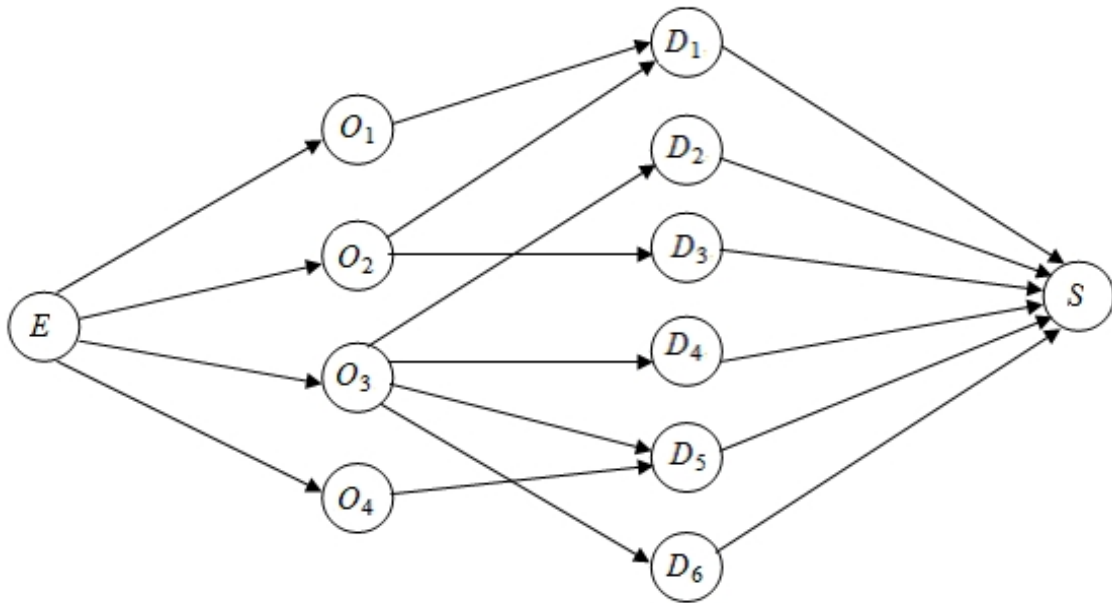


Fig.5-2

Ce réseau peut être représenté au moyen d'un tableau rectangulaire en procédant comme suit. Dans la première colonne sont inscrites les offres a_i des quatre usines, et sur la première ligne les demandes b_j des six centres de ventes; l'intérieur du tableau est subdivisé en cases (i, j) barrées ou non selon que la route (i, j) correspondante existe ou non dans le réseau. Cette présentation du réseau rend immédiate l'application de l'algorithme de Ford et Fulkerson. Il est évident qu'un flot φ de valeur maximale s'obtient en acheminant de O_i et D_j les quantités φ_{ij} indiquées dans les cases non barrées du tableau ci suivant:

		D_1^*	D_2	D_3^*	D_4	D_5^*	D_6
	b_j	25	35	12	27	21	10
a_i							
O_1^*	22	22					
O_2^*	36	3		12			
O_3	34		34				
O_4^*	38					21	

Le flot obtenu, de valeur $\varphi_0 = 92$ inférieure à 130, ne sature pas les arcs initiaux et ne construit donc pas un schéma de transport de coût minimum.

Etape 2: Déterminons les ensembles M_O et M_D en utilisant l'algorithme, on obtient

$M_O = \{1.2.4\}$, $N_O = \{3\}$, $M_D = \{1.3.5\}$, $N_D = \{2.4.6\}$; il en résulte que

$k = \min\{1, 3, 2, 7, 2, 3, 3, 5, 1\} = 1$. Le tableau des nouveaux coûts f'_{ij} est alors le suivant:

f'_{ij}	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6
O_1	0	0	4	2	3	1
O_2	0	6	0	1	6	2
O_3	4	0	3	0	1	0
O_4	12	2	13	4	0	0

Considérons le réseau partiel associé aux coût $f'_{ij} = 0$. On constate que par rapport au réseau précédent, deux nouvelles routes (O_1, D_2) et (O_4, D_6) ont été ouvertes: de toutes les routes reliant les offres marquées aux demandes non marquées, elles sont les moins chères

(le coût unitaire est de $k = 1$). La route (O_3, D_5) , par contre, a été fermée: elle relie O_3 , dont l'offre est entièrement absorbée par D_2 , à D_5 dont la demande est entièrement satisfaite par O_4 , et est donc inutile à la réalisation du flot présenté dans le tableau ci-dessus. On obtient facilement un flot φ de valeur maximale dans le nouveau réseau partiel ainsi construit:

		D_1	D_2	D_3	D_4	D_5^*	D_6^*	
		b_j	25	35	12	27	21	10
a_i								
O_1	22	1	21					
O_2	36	24		12				
O_3	34		7		27			
O_4^*	38					21	10	

Ce flot, de valeur $\varphi_0 = 123$ inférieure à 130, ne constitue pas un schéma de transport de coût minimum.

Etape 3: On obtient $M_O = \{4\}$, $N_D = \{1, 2, 3\}$, $M_D = \{5, 6\}$, et $N_D = \{1, 2, 3, 4\}$, de sorte que $k = \min\{12, 2, 13, 4\} = 2$.

Le tableau des nouveaux coûts f'_{ij} est alors le suivant:

f'_{ij}	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6
O_1	0	0	4	2	5	3
O_2	0	6	0	1	8	4
O_3	4	0	3	0	3	2
O_4	10	0	11	2	0	0

Remarquons que dans le nouveau réseau associé, la route (O_4, D_6) est provisoirement fermée. Un flot φ de valeur maximale dans ce réseau est donné ci-dessous:

		D_1	D_2	D_3	D_4	D_5^*	D_6^*	
		b_j	25	35	12	27	21	10
a_i	O_1	22	1	21				
O_2	36	24		12				
O_3	34		7		27			
O_4^*	38		7			21	10	

Ce flot, de valeur $\varphi_0 = 130$, écoule l'offre et satisfait à la demande: il constitue donc un schéma de transport de coût minimum, unique dans ce cas. Par conséquent, le fabricant devra livrer et gardera en stock 10 unités à l'usine D_4 . Le coût total correspondant s'élève à $1.7 + 21.9 + 24.6 + 12.7 + 7.10 + 27.11 + 7.12 + 21.8 + 10.16 = 1203$ unité.

Conclusion

La théorie des graphes est un très vaste domaine ayant à la fois un intérêt théorique et pratique au vu de ses applications dans des domaines aussi divers que variés. Dans ce mémoire nous nous sommes intéressés au problème de flot et ses applications. Après un rappel des résultats principaux de la théorie des graphes, nous avons abordé le problème. Par la suite, nous nous sommes intéressés au problème de flot maximum. Comme nous nous sommes intéressés aussi au problème de flot de valeur donnée et de coût minimal. Nous avons terminé ce mémoire par une application des problèmes de flots à coût minimal à un problème de transport.

Bibliographie

- [1] B. Bachelet, Modélisation et optimisation de problèmes de synchronisation dans les documents hypermédia, Thèse de doctorat Université Blaise Pascal-Clermont-Ferrand II, 2003.
- [2] C. Berge, Graphe et hypergraphes, Bordas 1973.
- [3] B. Courcelle, Introduction à la théorie des graphes, Université Bordeaux 1, 2004.
- [4] R. Diestel, Graph Theory, Second Edition, Springer-Verlag, 2000.
- [5] F. Drosbeke, M. Hallin et C. Lefevre, Les graphes par l'exemple, Ellipses, 1987.
- [6] J.-C. Fournier, Théorie des graphes et applications, Lavoisier, 2006.
- [7] M. Gondran et M. Minoux, Graphes et algorithmes, Eyrolles, 1985.
- [8] G. Gutin et J. Bang-Jensen, Digraphs theory, algorithms and applications, Springer, 2006.
- [9] J. Labelle, Théorie des graphes, Modulo, 1981.

- [10] P. Lacomme, C. Prins, M. Sevaux, Algorithmes de graphes, Erolles, Paris, 2003.
- [11] P. Lopez, Cours de graphes, LASS–CNRS, 2 avril 2008.
- [12] D. Maquin, Eléments de Théorie des Graphes et Programmation Linéaire, L'INPL, 2008.
- [13] J.-M. Mény, G. Aldon, L. Xavier, Introduction à la théorie des graphes, CRDP, 2005.
- [14] C.-F. Picard, Graphes et questionnaires, tome 1 graphes, Gauthier-Villars, 1972.
- [15] B. Roy, Algèbre moderne et théorie des graphes, Tome II, Dunod, Paris, 1984.
- [16] G. Royer, Graphes et applications, IUP MIAGE, 2003.
- [17] M. Sakarovitch, Graphes et programmation linéaire, Hermann, 1984.