REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE ABDERRAHMANE MIRA- BEJAIA

FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

OPTION : Analyse et Probabilités

Présenté par

SALHI Hanane

THEME

ETUDE DE PROBLEMES ELLIPTIQUES DANS DES POLYGONES PLANS A L'AIDE DES FONCTIONS POIDS

Soutenu publiquement, le 27/06/2013 devant le jury composé de :

Mr.	**F. BOUHMILA**	M. C. A	Université A-Mira de Béjaïa	Président
Mme.	**H. BECHIR**	M. C. B	Université A-Mira de Béjaïa	Examinatrice
Mme.	**S. TAS**	Professeur	Université A-Mira de Béjaïa	Promotrice

Remerciements

*Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements et ma sincère gratitude à Madame **S. TAS** ainsi qu'à Monsieur **B. Kerai** pour l'intéressant sujet qu'ils m'ont proposée.*

Leur lecture attentive, leurs remarques et leurs conseils ont été d'une aide certaine à l'aboutissement de ce mémoire. De plus, nos discussions m'ont fait partager leurs connaissances et leurs expériences. Merci pour tout!

Mes très respectueux remerciements sont adressés à Monsieur **F. BOUHMILA** qui me fait l'honneur de présider le jury et à Madame **H. BECHIR**, qui a bien voulu faire partie du jury.

Je ne saurais oublier de remercier toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin au parachèvement de ce travail. Plus particulièrement, tous les enseignants que j'ai eu durant mes années d'étude et qui m'ont inculquée les valeurs du savoir, du travail et de l'organisation.

Je ne saurai omettre l'amitié et la complicité de mes amis étudiants. Merci à tous!

Je poursuivrai par les apports non officiels mais néanmoins de première importance qu'ont été le dévouement de ma maman, l'œil bionique de mon petit frère Nasro et la causticité de ses remarques qui n'a toujours pas réussi à me dégouter des mathématiques. Un merci particulier pour l'Homme de ma vie; mon mari "Tahou", avec qui j'ai pu partager mes doutes et mes rêves.

Pour finir mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à mes deux familles **SALHI** et **BOULZAZENE** ainsi à tous mes amis(es) . . . ‹‹merci›› devient un mot trop petit pour exprimer ‹‹ça››.

Table des matières

Introduction

Il est bien connu que les solutions des problèmes aux limites elliptiques posés dans des domaines avec coins présentent des singularités au niveau de ces coins.

L'étude de l'équation de Laplace dans un polygone n'a été abordée que depuis une date relativement récente.

En **1974**, **M. MERIGOT** publia la première étude de la régularité dans les espaces $L^p(\Omega)$, où le noyau de Poisson de l'opérateur ainsi que la transformation de Mellin ont été utilisés afin d'exhiber des estimations à priori permettant l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution.

En outre, **V. A. Kondratiev** s'est penché sur les problèmes aux limites elliptiques dans des domaines avec "coins". Pour éviter les points anguleux, il a utilisé le changement de variable $\rho = \exp(-t)$. Ceci ramène l'étude au cas classique dans une bande et introduit des espaces avec poids à l'origine.

Enfin, plus récemment **M. Dauge** a construit une résolvante pour le Laplacien, en étudiant dans un polygone plan, l'équation:

$$\Delta u = \lambda u + f \tag{0.0.1}$$

C'est à dire

$$u = (\Delta - \lambda)^{-1} f \tag{0.0.2}$$

Elle a décomposé la résolvante en deux parties: l'une régulière, l'autre singulière pour obtenir les mêmes résultats.

En ce qui nous concerne, nous nous sommes intéressés à l'étude du rôle que jouent les fonctions poids dans l'étude des problèmes elliptiques de la forme

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma \end{cases} \tag{0.0.3}$$

Où Ω est un ouvert plan de frontière polygonale notée Γ et f donnée dans $L^2(\Omega)$.

A cet effet, on affecte l'opérateur Δ d'une fonction poids $\mu(x, y)$ qui est une fonction indéfiniment différentiable à l'intérieur de Ω, ne s'annulant pas dans Ω et qui est définie par:

$$\mu(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}} & \text{au voisinage de chaque sommet de } \Omega \\ \omega(x, y) & \text{si } \rho_1 < (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \leq \rho_2 \\ 1 & \text{si } (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} > \rho_2 \end{cases} \tag{0.0.4}$$

Avec $0 < \alpha < 1$, et ρ_1 suffisamment petit, ρ_2 suffisamment grand.

Nous étudions alors un problème du type:

$$\begin{cases} \mu(x, y)\ \Delta u = \mu(x, y)\ f = g & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma \end{cases} \tag{0.0.5}$$

Dans une première étape, nous traitons le problème dans un secteur plan infini d'ouverture φ qu'on note Ω_φ, et qui est défini par:

$$\Omega_\varphi = \{(\rho, \theta), \rho > 0; 0 < \theta < \varphi < 2\pi\} \tag{0.0.6}$$

On désigne par Γ_φ la frontière de Ω_φ.

On peut toujours ramener le sommet de Ω_φ à l'origine et ceci par rotation et par translation.

La frontière de Ω_φ correspond à la réunion des deux demi droites issues de l'origine et d'équations respectives $\theta = 0$ et $\theta = \varphi$. Il est clair que les coordonnées polaires sont mieux adaptées à la géométrie du domaine Ω_φ.

La fonction poids $\mu(x, y) = \lambda(\rho)$ en coordonnées polaires s'écrit:

$$\lambda(\rho) = \begin{cases} \rho^\alpha & \text{si } 0 < \rho < \rho_1; 0 < \alpha < 1 \\ \omega(x, y) = \delta(\rho) & \text{si } \rho_1 < \rho \leq \rho_2 \\ 1 & \text{si } \rho > \rho_2 \end{cases}$$

En passant en coordonnées polaires, le problème (0.0.5) , s'écrit:

$$\begin{cases} \lambda(\rho)\ \Delta u = \lambda(\rho)\ f = h & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma \end{cases} \tag{0.0.7}$$

Dans le secteur Ω_φ, le problème (0.0.7) s'écrit:

$$\begin{cases} \lambda(\rho) \left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right] = g & \text{dans} \quad \Omega_\varphi \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{0.0.8}$$

g désigne ici la restriction de la fonction h au secteur Ω_φ.

Comme au voisinage de chaque sommet du polygone Ω, la fonction poids $\lambda(\rho)$ vaut ρ^α, alors au voisinage de l'origine le problème (0.0.8) s'écrit:

$$\begin{cases} \rho^\alpha \Delta u = g & \text{dans} \quad \Omega_\varphi \cap V(0) \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{0.0.9}$$

Où $V(0)$ désigne un voisinage de l'origine.

La transformation de Fourier dans le cas classique joue le même rôle que celui tenu par la transformation de Mellin.

Une convolution multiplicative donne la solution du problème (0.0.3) . On obtient donc des résultats dans des espaces avec poids qui cachent les phénomènes qui se produisent aux voisinages des sommets (Voir [19]).

CHAPITRE 1 Préliminaires

1.1 Rappels d'analyse fonctionnelle

1.1.1 Espaces de Sobolev

Définition 1.1.1 *On définit les espaces de Sobolev d'ordre m, $(m \in \mathbb{N}^*)$ par:*

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^N ; |\alpha| \leq m \right\}$$

$H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

On le munit du produit scalaire suivant:

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^N \\ |\alpha| \leq m}} \int_\Omega D^\alpha u \ D^\alpha v \ dx$$

et la norme associée:

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^N \\ |\alpha| \leq m}} \int_\Omega |D^\alpha u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Remarques

1. Si $m = 0$ alors $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

2. Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^N$, il est possible de définir les espaces de Sobolev en utilisant la transformée de Fourier.

Proposition 1.1.1 *L'espace $H^m\left(\mathbb{R}^N\right)$, $m \in \mathbb{N}^*$, peut être défini par:*

$$H^m\left(\mathbb{R}^N\right) = \left\{u \in L^2\left(\mathbb{R}^N\right) : \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{2}} \widehat{u} \in L^2\left(\mathbb{R}^N\right)\right\}$$

et la norme $\|.\|_{H^m(\mathbb{R}^N)}$ est équivalente à:

$$u \longmapsto \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(1+|\xi|^2\right)^m \ \left|\widehat{u}\left(\xi\right)\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

Remarque 1.1.1 *$H_0^m\left(\Omega\right), m \in \mathbb{N}^*$, désigne l'adhérence de $D\left(\Omega\right)$ dans $H^m\left(\Omega\right)$.*

Définition 1.1.2 *On désigne par $H^{-m}\left(\Omega\right)$, l'espace dual de $H_0^m\left(\Omega\right)$ (Voir [27]).*

Théorème 1.1.1 *Pour tout $s \in \mathbb{R}$, le dual de $H^s\left(\mathbb{R}^N\right)$ coïncide dans $D'\left(\mathbb{R}^N\right)$ (algébriquement et topologiquement) avec $H^{-s}\left(\mathbb{R}^N\right)$.*

1.1.2 Inégalité de Poincaré

Proposition 1.1.2 *Soit Ω un ouvert borné (Au moins dans une direction). Alors:*

$$\exists C = C(\Omega) > 0 \text{ tel que: } \quad \forall u \in \ H_0^1(\Omega), \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \ \ \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

Théorème 1.1.2 *Lorsque Ω est un ouvert de classe C^1 avec Γ borné (Ou bien $\Omega = \mathbb{R}_+^N$) alors:*

$$\begin{aligned}
\text{Si } m &> \frac{N}{2} \text{ alors } H^m(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}) \\
\text{Si } m &= \frac{N}{2} \text{ alors } H^m(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in [2, +\infty[\\
\text{Si } 0 &\leq m < \frac{N}{2} \text{ alors } H^m(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in \left[2, \frac{2N}{N-2m}\right]
\end{aligned}$$

avec injections continues.

Théorème 1.1.3 *Si Ω est borné et de classe C^1 alors on a:*

$$\begin{aligned}
\text{Si } N &< 2 \text{ alors } H^1(\Omega) \underset{compacte}{\hookrightarrow} C(\overline{\Omega}) \\
\text{Si } N &= 2 \text{ alors } H^1(\Omega) \underset{compacte}{\hookrightarrow} L^q(\Omega), \forall q \in [1, +\infty[\\
\text{Si } N &> 2 \text{ alors } H^1(\Omega) \underset{compacte}{\hookrightarrow} L^q(\Omega), \forall q \in \left[1, \frac{2N}{N-2}\right[
\end{aligned}$$

En particulier:

$$H^1(\Omega) \underset{compacte}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$$

1.1.3 Théorèmes de traces

Cas d'un ouvert régulier

Théorème 1.1.4 *Soit Ω un ouvert de classe C^1. Alors il existe un opérateur linéaire continu appelé opérateur trace et noté γ_0 de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$ où $\Gamma = \partial\Omega$ qui coïncide avec l'opérateur de restriction usuelle pour les fonctions continues. De plus, on a:*

$$\ker \gamma_0 = H_0^1(\Omega)$$

et on définit alors:

$$\gamma_0(H^1(\Omega)) = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

Dans un polygone

Avant d'énoncer quelques théorèmes de traces pour un ouvert polygonal du plan, nous commençons par le cas d'un secteur.

Soit Ω_φ le secteur plan limité par la demi-droite Ox et la demi-droite Oy issue de l'origine et formant un angle $(Ox, Oy) = \theta$. On identifie Ox et Oy à $\mathbb{R}^+$ à traves les applications:

$$\rho \longrightarrow \rho\tau_x = (\rho, 0) \text{ et } \rho \longrightarrow \rho\tau_y = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) \text{ respectivement.}$$

Ainsi une fonction g définie sur Oy est identifiée à la fonction $\overline{g}$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\overline{g}(\rho) = g(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$$

Soit ν la normale unitaire à Oy orientée vers l'extérieur de Ω_φ.

Pour une fonction u, définie sur Ω_φ , on notera $u/_{Oy}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}/_{Oy}$ les traces de u et de sa dérivée normale sur l'axe Oy.

Théorème 1.1.5 *L'application:*

$$u \longrightarrow \left(u(x,0),\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0),\ u/_{Oy},\ \frac{\partial u}{\partial \nu}/_{Oy} \right)$$

est linéaire continue surjective de $H^2(\Omega_\varphi)$ sur le sous espace de $H^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+) \times H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^+) \times H^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+) \times H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^+)$ formé des quadruplets (f_0, f_1, g_0, g_1) tels que:

$$f_0(0) = g_0(0) \tag{1.1.1}$$

$$\int_0^\infty \left| f\,'_0(\rho) - \cos(\theta)\ \ g\,'_0(\rho) + \sin(\theta)\ \ g_1(\rho) \right|^2\ \frac{d\rho}{\rho} < \infty \tag{1.1.2}$$

$$\int_0^\infty \left| f_1(\rho) - \sin(\theta)\ \ g\,'_0(\rho) - \cos(\theta)\ \ g_1(\rho) \right|^2\ \frac{d\rho}{\rho} < \infty \tag{1.1.3}$$

On considère à présent un polygone plan Ω de frontière $\Gamma = \cup_{j=1}^{m}\overline{\Gamma_j}$ où Γ_j est un segment linéaire d'extrémités S_j et S_{j+1} (en convenant que $S_{m+1} = S_1$). $\{S_j\}_{j=1}^{m}$ sont les sommets de Ω.

La normale unitaire à Γ_j orientée vers l'extérieur de Ω est notée ν_j.

Chaque segment Γ_j de la frontière est identifié à un intervalle ouvert $]a,b[$ de $\mathbb{R}$ et on identifie, comme précédemment, $H^s(\Gamma_j)$ à $H^s(]a,b[)$ à travers l'application affine isométrique qui transforme $]a,b[$ en Γ_j. Pour une fonction u définie sur Ω on note $u_{/\Gamma_j}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial \nu_j}{}_{/\Gamma_j}$ sa trace et celle de sa dérivée normale sur le segment Γ_j.

Soit S_j un sommet de Ω, Γ_{j-1} et Γ_j les cotés de Ω issus de S_j. On note τ_{j-1} et τ_j les vecteurs unitaires portés par Γ_{j-1} et Γ_j et orientés de S_j vers S_{j-1} et de S_j vers S_{j+1} respectivement.

Définition 1.1.3 *On dira que deux fonctions, f_{j-1} et f_j de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{j-1})$ et de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$ respectivement, se raccordent en S_j si:*

$$\int_0^\delta \left|\ f_j(S_j + \rho\tau_j) - f_{j-1}(S_j + \rho\tau_{j-1}) \right|^2\ \frac{d\rho}{\rho} < \infty$$

pour un réel $\delta > 0$.

Théorème 1.1.6 *L'application:*

$$u \longrightarrow \left(u_{/\Gamma_j},\ j = 1, ..., m\right)$$

est linéaire continue surjective de $H^1(\Omega)$ sur le sous espace T du produit $\prod_{j=1}^{m} H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$ formé des m-uplets $(f_j\ ,\ j = 1, ..., m)$ tels que pour tout $j = 1, ..., m$, les fonctions f_{j-1} et f_j se raccordent en S_j au sens de la définition(1.1.3) (en convenant que $f_0 = f_m$). Cette application admet un relèvement linéaire continu.

N.B. Ce théorème assure l'existence d'un opérateur de relèvement. La continuité d'un tel opérateur n'est cependant assurée que si l'espace de traces T est muni d'une norme qui fait intervenir des termes de raccord aux sommets S_j, c'est à dire:

$$\|(f_1, f_2, ..., f_m)\|_T^2 = \sum_{j=1}^{m} \|f_j\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)} + \sum_{j=1}^{m} \int_0^{\delta} \mid f_j\left(S_j + \rho\tau_j\right) - f_{j-1}\left(S_j + \rho\tau_{j-1}\right)|^2 \ \frac{d\rho}{\rho}$$

avec $\delta > 0$ convenablement choisi (et en convenant toujours que $f_0 = f_m$).

Théorème 1.1.7 *L'application:*

$$u \longrightarrow \left(u_{/\Gamma_j},\ j = 1, ..., m\right)$$

est linéaire continue surjective de $H^2(\Omega)$ sur le sous espace du produit $\prod_{j=1}^{m} H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_j)$ formé des m-uplets $(f_j\ ,\ j = 1, ..., m)$ vérifiant les conditions de compatibilité

$$f_j\left(S_{j+1}\right) = f_{j+1}\left(S_{j+1}\right), \quad j = 1, ..., m$$

(en convenant que $f_{m+1} = f_1$).
Cette application admet un relèvement linéaire continu.

La preuve de ce théorème s'obtient, après localisation, comme conséquence du théorème (1.1.5) . Une autre conséquence intéressante du même théorème est le résultat ci-dessous. Pour u dans $H^2(\Omega)$, $\frac{\partial u}{\partial \nu_j}/_{\Gamma_j}$ est à priori bien définie comme élément de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$. On note, par ailleurs, $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ le sous espace de $H^2(\Omega)$ formé des fonctions à trace nulle. Nous avons alors le théorème:

Théorème 1.1.8 *L'application:*

$$u \longrightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial \nu_j}/_{\Gamma_j}\ , \quad j = 1, ..., m\right)$$

est linéaire continue surjective:

a) *de $H^2(\Omega)$ sur le produit $\prod_{j=1}^{m} H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$*

b) *de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ sur le produit $\prod_{j=1}^{m} H_{0,0}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$*

Chacune de ces deux applications admet un relèvement linéaire continu.

Dans ce théorème les espaces de traces $\prod_{j=1}^{m} H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$ et $\prod_{j=1}^{m} H_{0,0}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$ sont munis de leurs normes naturelles d'espaces produits (sans termes de raccord).

1.2 Transformation de Mellin et ses propriétés

1.2.1 Définitions

La transformation de Mellin a l'avantage de bien s'adapter aux domaines qui présentent des angles tels que des polygones, des cônes ou des polyèdres.

Elle joue un rôle équivalent à celui de la transformation de Fourier dans le cas classique où on utilise les coordonnées cartésiennes.

En revanche, elle débouche sur des espaces fonctionnels avec poids, qui ne sont pas des espaces classiques.

D'autre part, le passage aux coordonnées polaires, allège les calculs.

Puisque nous travaillons dans un secteur plan, il est préférable d'utiliser les coordonnées polaires qui sont mieux adaptées à la géométrie de ce domaine, et dans nos calculs nous utiliserons la transformation de Mellin, ce qui nous permet d'obtenir la solution dans des espaces avec poids qui cachent les singularités qui se présentent au voisinage du sommet.

Dans ce qui suit nous allons donner quelques rappels sur la transformation de Mellin et ses propriétés ainsi que sa relation avec la transformation de Fourier.

Définition 1.2.1 *Soit la fonction $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$. On appelle transformation de Mellin de la fonction u la fonction notée $\widetilde{u}$, définie par:*

$$M(u) = \widetilde{u}(\sigma, \theta) = \int_0^{\infty} u(\rho, \theta)\rho^{\sigma-1} d\rho = \int_0^{+\infty} u(\rho, \theta)\rho^{\sigma} \frac{d\rho}{\rho}, \sigma \in \mathbb{C}$$

Et ceci lorsque cette intégrale converge (Voir [22] et [24]).

1.2.2 Propriétés

On trouve ces propriétés dans [23] et [24].

1.
$$\widetilde{\frac{du}{d\rho}}(\sigma) = -(\sigma - 1)\ \widetilde{u}(\sigma - 1) \tag{1.2.1}$$

2. Et en général si $n \in \mathbb{N}^*$, on a:
$$\widetilde{\frac{d^n u}{d\rho^n}}(\sigma) = (-1)^n (\sigma - 1)(\sigma - 2)\ldots(\sigma - n)\ \widetilde{u}(\sigma - n) \tag{1.2.2}$$

3. Si $\alpha \in \mathbb{R}^+$, avec $\alpha = \eta + \beta$, et $0 < \beta < 1$, on vérifie que:
$$D^\alpha = D^{\eta+\beta} = D^\eta(D^\beta) = D^\beta\,(D^\eta)$$

4. On utilise la transformation de Fourier:
$$\widehat{D^\beta u} = (i\xi)^\beta\, \widehat{u}\,(\xi)$$

5. Par analogie avec la transformation de Mellin, on vérifie que:
$$\widetilde{\frac{d^\beta u}{d\rho^\beta}}(\sigma) = \Gamma(\sigma)\ \Gamma(\sigma - \beta)\ \widetilde{u}(\sigma - \beta)$$
et pour $\alpha \in \mathbb{R}^+$, avec $\alpha = \eta + \beta$, on vérifie que:
$$\widetilde{\frac{d^\alpha u}{d\rho^\alpha}}(\sigma) = \Gamma(\sigma)\ \Gamma(\sigma - \alpha)\ \widetilde{u}(\sigma - \alpha)$$

6. On vérifie aussi que:
$$\rho\widetilde{\frac{du}{d\rho}} = -\sigma\ \widetilde{u}\,(\sigma)$$

7. Analogie du théorème de convolution:

   Pour tout $a \in \mathbb{R}^N$ tel que les fonctions u et v soient intégrables sur $\mathbb{R}^N$, on pose:
$$[u * v]\,(a) = \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\ v(a - x)\ dx$$

   Nous noterons par $[u * v]$ la convolution multiplicative de $u$et v par rapport à la mesure $\frac{dt}{t}$ définie par:
$$[u * v]\,(\rho) = \int_0^\infty u(t)\ v(\frac{\rho}{t})\ \frac{dt}{t}$$

   On a alors:
$$\widetilde{u * v}\ (\sigma) = \widetilde{u}(\sigma)\ \widetilde{v}(\sigma)$$

8. Relations des transformations de Fourier et Mellin:

   Il y a une certaine analogie entre la transformation de Fourier et celle de Mellin.

   En effet:
$$\widehat{u}(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(2i\pi\sigma t)\ \ u(t)\, dt$$
   En utilisant le changement de variable $\rho = \exp(-t)$, il vient:
$$\widehat{u}(\sigma) = \int_{0}^{\infty} \rho^{-2i\pi\sigma}\ u(-\ln\rho)\,\frac{d\rho}{\rho}$$
   Si on note $u(-\ln\rho)$ par $u_1(\rho)$, on trouve:
$$\widehat{u}(\sigma) = \int_{0}^{\infty} \rho^{-2i\pi\sigma} u_1(\rho)\,\frac{d\rho}{\rho} = \widetilde{u_1}(-2i\pi\sigma)$$
   Donc:
$$\widehat{u}(\sigma) = \widetilde{u_1}(-2i\pi\sigma)$$

9. La transformation de Mellin inverse est donnée par la fonction u, avec $\widetilde{u}(\sigma)$ qui est définie pour $\alpha_1 < \mathrm{Re}(\sigma) < \alpha_2$ et
$$u(\rho) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\nu\to+\infty}\int_{\mu-i\nu}^{\mu+i\nu} \widetilde{u}(\sigma)\,\rho^{-\sigma} d\sigma$$
   et ceci pour tout μ fixé et $\alpha_1 < \mu < \alpha_2$.

1.2.3 Problème obtenu par transformation de Mellin

Soit le problème:
$$(P_\varphi)\begin{cases} \Delta u = f & \text{dans} \quad \Omega_\varphi \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_\varphi \end{cases}$$
Le problème obtenu par la transformation de Mellin de (P_φ) est:
$$\widetilde{(P_\varphi)}\begin{cases} \widetilde{\Delta u} = \widetilde{f} & \text{dans} \quad \Omega_\varphi \\ \widetilde{u} = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_\varphi \end{cases}$$
En utilisant les propriétés de la transformation de Mellin, on trouve:
$$\widetilde{(P_\varphi)}\begin{cases} (\sigma-1)(\sigma-2)\,\widetilde{u}(\sigma-2,\theta) - (\sigma-2)\,\widetilde{u}(\sigma-2,\theta) + \dfrac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial\theta^2}(\sigma-2,\theta) = \widetilde{f} & \text{dans} \quad \Omega_\varphi \\ \widetilde{u} = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_\varphi \end{cases}$$

Donc:

$$\widetilde{(P_\varphi)} \begin{cases} (\sigma-2)^2\ \widetilde{u}\,(\sigma-2,\theta) + \dfrac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \theta^2}\,(\sigma-2,\theta) = \widetilde{f} & \text{dans} \quad \Omega_\varphi \\ \widetilde{u} = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_\varphi \end{cases}$$

1.3 Etude d'un problème modèle dans le cas régulier

Soit le problème (P) suivant:

$$(P): \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

On a:

$$\forall \varphi \in D(\Omega) : \langle -\Delta u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$$

C-à-d:

$$\forall \varphi \in D(\Omega) : \left\langle -\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}, \varphi \right\rangle = \langle f, \varphi \rangle \Longleftrightarrow \forall \varphi \in D(\Omega) : -\sum_{j=1}^{N} \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}, \varphi \right\rangle = \langle f, \varphi \rangle$$

La dérivation est au sens des distributions, d'où:

$$\forall \varphi \in D(\Omega) : \sum_{j=1}^{N} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle = \langle f, \varphi \rangle$$

Puisque $u \in H_0^1(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$ alors:

$$\forall \varphi \in D(\Omega) : \sum_{j=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x)\ dx = \int_\Omega f(x)\ \varphi(x)\ dx$$

C.-à-d.:

$$\forall \varphi \in D(\Omega) : \int_\Omega \nabla u(x)\ \nabla \varphi(x)\ dx = \int_\Omega f(x)\ \varphi(x)\ dx$$

Comme $D(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$ alors:

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega \nabla u(x)\ \nabla v(x)\ dx = \int_\Omega f(x)\ v(x)\ dx$$

D'où la formulation variationnelle suivante:

$$(FV) \begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tq } \forall v \in H_0^1(\Omega) : \\ \int_\Omega \nabla u(x)\ \nabla v(x)\ dx = \int_\Omega f(x)\ v(x)\ dx \end{cases}$$

Posons:

$$H = H_0^1(\Omega),\ a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x)\ \nabla v(x)\ dx,\ \ \langle l, v\rangle = \int_\Omega f(x)\ v(x)\ dx$$

Il est clair que $a(.,.)$ est une forme bilinéaire sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ et que $\langle l, .\rangle$ est une forme linéaire sur $H_0^1(\Omega)$.

Montrons que $a(.,.)$ est continue, C.-à-d. montrons que:

$$\exists C_a > 0, \forall u, v \in H_0^1(\Omega) : |a(u,v)| \leq C_a \left\|u\right\|_{H^1(\Omega)} \left\|v\right\|_{H^1(\Omega)}$$

On a:

$$|a(u,v)| = \left|\int_\Omega \nabla u(x)\ \nabla v(x)\ dx\right| \leq \int_\Omega |\nabla u(x)|\,|\nabla v(x)|\,dx \qquad (*)$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient:

$$(*) \leq (\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx)^{\frac{1}{2}}(\int_\Omega |\nabla v(x)|^2\,dx)^{\frac{1}{2}} = \left\|\nabla u\right\|_{L^2(\Omega)} \left\|\nabla v\right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\|u\right\|_{H^1(\Omega)} \left\|v\right\|_{H^1(\Omega)}$$

D'où:

$$\exists C_a = 1 > 0, \forall u, v \in H_0^1(\Omega) : |a(u,v)| \leq C_a \left\|u\right\|_{H^1(\Omega)} \left\|v\right\|_{H^1(\Omega)}$$

Donc: $a(.,.)$ est continue.

Montrons que $a(.,.)$ est coercive. C'est à dire, montrons que:

$$\exists \alpha > 0, \forall v \in H_0^1(\Omega) : a(v,v) \geq \alpha \left\|v\right\|_{H^1(\Omega)}^2$$

On a:

$$a(v,v) = \int_\Omega |\nabla v(x)|^2\,dx = \left\|\nabla v\right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

D'après l'inégalité de Poincaré, on a:

$$\exists C_p > 0, \forall v \in H_0^1(\Omega) : \left\|v\right\|_{L^2(\Omega)} \leq C_p\ \left\|\nabla v\right\|_{L^2(\Omega)}$$

D'où:

$$\left\|v\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|\nabla v\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_p^2\ \left\|\nabla v\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|\nabla v\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \Leftrightarrow \left\|v\right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq (1 + C_p^2)\ \left\|\nabla v\right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Donc:

$$\exists \alpha = \frac{1}{1 + C_p^2} > 0, \forall v \in H_0^1(\Omega) : a(v,v) \geq \alpha \left\|v\right\|_{H^1(\Omega)}^2$$

Donc: $a(.,.)$ est coercive.

Montrons que $\langle l,.\rangle$ est continue. C'est à dire montrons que:

$$\exists C_l > 0, \forall v \in H_0^1(\Omega) : |\langle l, v\rangle| \leq C_l \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

On a:

$$|\langle l, v\rangle| = \left|\int_\Omega f(x)\ v(x)\ dx\right| \leq \int_\Omega |f(x)|\ \ |v(x)|\, dx$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient:

$$|\langle l, v\rangle| \leq (\int_\Omega |f(x)|^2\, dx)^{\frac{1}{2}}\ (\int_\Omega |v(x)|^2\, dx)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{L^2(\Omega)}\ \ \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\ \ \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

D'où:

$$\exists C_l = \|f\|_{L^2(\Omega)} > 0, \forall v \in H_0^1(\Omega) : |\langle l, v\rangle| \leq C_l \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Donc: $\langle l,.\rangle$ est continue.

Les hypothèses du théorème de Lax-Milgram étant réunies, alors:

$$\exists! u \in H_0^1(\Omega) \text{ solution faible de } (P)$$

CHAPITRE 2

Etude de la régularité d'un problème modèle dans le cas non régulier

Soit le problème:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma \end{cases} \tag{2.0.1}$$

(En coordonnées polaires).

On pose:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}$$

Où $\rho > 0$ et $0 < \theta < \varphi < 2\pi$.

Le problème (2.0.1) devient:

$$(P) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0 & (E_1) \quad \text{dans} \quad \Omega \\ v(\rho, 0) = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1 \\ v(\rho, \varphi) = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_2 \end{cases}$$

Montrons que $v(\rho, \theta) = \rho^{\alpha}\ \Phi(\theta)$ est une solution du problème (P):

On a:

$$v(\rho, \theta) = \rho^{\alpha}\Phi(\theta)$$

D'où:

$$\frac{\partial v}{\partial \rho} = \alpha \rho^{\alpha-1} \Phi(\theta) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} = \alpha\left(\alpha-1\right)\rho^{\alpha-2}\Phi(\theta) \qquad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \rho^{\alpha}\ \Phi^{'}(\theta)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = \rho^{\alpha}\ \Phi^{''}(\theta) \qquad (3)$$

On remplace (1), (2) et (3) dans (E_1), on obtient une équation différentielle du second ordre linéaire homogène à coefficients constants, qui est sous la forme:

$$(E) : \Phi^{''}(\theta) + \alpha^2 \Phi(\theta) = 0$$

L'équation caractéristique associée est donnée par:

$$y^{''} + \alpha^2 y = 0; \quad \Delta = -4\alpha^2 \quad \leq 0$$

On distingue deux cas:

$\mathbf{1^{ier}cas}$: $\alpha = 0 \Rightarrow \Delta = 0$

Solution double:

$$y_1 = y_2 = 0$$

La solution générale de (E) est:

$$\Phi(\theta) = A\theta + B$$

D'où:

$$\begin{aligned} v(\rho,\theta) &= \rho^{\alpha}\ \Phi(\theta) = \rho^0(A\theta + B); \rho > 0 \\ &= A\theta + B \end{aligned}$$

Telles que A et B sont deux constantes réelles à déterminer.

D'où:

$$v(\rho, 0) = 0 \Leftrightarrow B = 0$$

De même:

$$v(\rho,\varphi)=0 \Leftrightarrow A\varphi=0 \Leftrightarrow A=0, \text{ car } \varphi>0$$

Donc:

$$\alpha=0 \Rightarrow v(\rho,\theta)=0, \forall\rho>0, \forall 0<\theta<\varphi<2\pi \Rightarrow v\equiv 0\in H^2(\Omega) \Rightarrow \text{Pas de singularités.}$$

2$^{\text{ème}}$cas : $\alpha\neq 0 \Rightarrow \Delta=-4\alpha^2<0$

On aura donc deux solutions complexes conjuguées:

$$\begin{cases} y_1=\dfrac{-i\sqrt{4\alpha^2}}{2}=-\left|\alpha\right| i \\ \text{et} \\ y_2=\dfrac{+i\sqrt{4\alpha^2}}{2}=+\left|\alpha\right| i \end{cases}$$

Si $\alpha>0$ alors:

$$\begin{cases} y_1=-\alpha i \\ \text{et} \\ y_2=+\alpha i \end{cases}$$

D'où la solution générale de (E) est:

$$\Phi(\theta)=A\cos(\alpha\theta)+B\sin(\alpha\theta)$$

Donc:

$$v(\rho,\theta)=\rho^{\alpha}\left[A\cos(\alpha\theta)+B\sin(\alpha\theta)\right]$$

Telles que A et B sont deux constantes réelles à déterminer.

$$v(\rho,0)=0 \Leftrightarrow \rho^{\alpha}A=0 \Leftrightarrow A=0; \rho>0$$

De même:

$$v(\rho,\varphi)=0 \Leftrightarrow \rho^{\alpha}\left[B\sin(\alpha\varphi)\right]=0 \Leftrightarrow B\sin(\alpha\varphi)=0; \rho>0 \Leftrightarrow (B=0) \text{ ou } \left[\sin(\alpha\varphi)=0\right]$$

Si $B=0$ et $A=0$ alors $v\equiv 0\in H^2(\Omega)$, donc: pas de singularités.

Si $\sin(\alpha\varphi)=0$ alors $\alpha\varphi=k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Mais $\alpha > 0$ et $\varphi > 0$, d'où:

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{k\pi}{\varphi}, k \in \mathbb{N} \\ \text{et} \\ A = 0 \end{cases}$$

Donc:

$$v(\rho, \theta) = B\ \rho^{\frac{k\pi}{\varphi}} \sin\left(\frac{k\pi}{\varphi}\theta\right)$$

Question: Quelles sont les valeurs de α afin qu'il n'y ait pas de singularités?

On a: $v(\rho, \theta) = \rho^{\alpha}\ \Phi(\theta)$

Soit $\rho \in B\,(0, 1)$ (L'étude sera locale)

$v \in^{?} H^2(\Omega)$, c.-à-d.

$$v \in L^2(\Omega)\ ,\ \frac{\partial v}{\partial \rho} \in L^2(\Omega)\ ,\ \frac{\partial v}{\partial \theta} \in L^2(\Omega)\ ,\ \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} \in L^2(\Omega)\ ,\ \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \in L^2(\Omega),\ \frac{\partial^2 v}{\partial \rho \partial \theta} \in L^2(\Omega)$$

D'où:

1. $v \in L^2(\Omega) \Longleftrightarrow \int_0^{\varphi} \int_0^1 |v(\rho, \theta)|^2\, \rho d\rho d\theta < +\infty$. On a:
$$\int_0^{\varphi} \int_0^1 |v(\rho, \theta)|^2\, \rho d\rho d\theta = \left(\int_0^1 \rho^{1+2\alpha} d\rho\right) \left(\int_0^{\varphi} |\Phi(\theta)|^2\, d\theta\right)$$
Telle que: $\int_0^1 \rho^{1+2\alpha} d\rho = \int_0^1 \dfrac{1}{\rho^{-(1+2\alpha)}} d\rho$ qui converge ssi $-(1+2\alpha) < 1$ c.-à-d. ssi $\alpha > -1$.

2. $\dfrac{\partial v}{\partial \rho} \in L^2(\Omega) \Longleftrightarrow \int_0^{\varphi} \int_0^1 \left|\dfrac{\partial v}{\partial \rho}(\rho, \theta)\right|^2 \rho d\rho d\theta < +\infty$. On a:
$$\int_0^{\varphi} \int_0^1 \left|\frac{\partial v}{\partial \rho}(\rho, \theta)\right|^2 \rho d\rho d\theta = \alpha^2 \left(\int_0^1 \rho^{2\alpha-1} d\rho\right) \left(\int_0^{\varphi} |\Phi(\theta)|^2\, d\theta\right)$$
Telle que: $\int_0^1 \rho^{2\alpha-1} d\rho = \int_0^1 \dfrac{1}{\rho^{1-2\alpha}} d\rho$ converge ssi $1 - 2\alpha < 1$ c.-à-d. $\alpha > 0$.

3. $\dfrac{\partial v}{\partial \theta} \in L^2(\Omega) \Longleftrightarrow \int_0^{\varphi} \int_0^1 \left|\dfrac{\partial v}{\partial \theta}(\rho, \theta)\right|^2 \rho d\rho d\theta < +\infty$. On a:
$$\int_0^{\varphi} \int_0^1 \left|\frac{\partial v}{\partial \theta}(\rho, \theta)\right|^2 \rho d\rho d\theta = \left(\int_0^1 \rho^{2\alpha+1} d\rho\right) \left(\int_0^{\varphi} \left|\Phi'(\theta)\right|^2 d\theta\right)$$
Telle que: $\int_0^1 \rho^{1+2\alpha} d\rho = \int_0^1 \dfrac{1}{\rho^{-(1+2\alpha)}} d\rho$ converge ssi $-(1+2\alpha) < 1$ c.-à-d. $\alpha > -1$.

4. $\dfrac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} \in L^2(\Omega) \Longleftrightarrow \int_0^{\varphi} \int_0^1 \left| \dfrac{\partial^2 v}{\partial \rho^2}(\rho,\theta) \right|^2 \rho d\rho d\theta < +\infty$. On a:

$$\int_0^{\varphi} \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2}(\rho,\theta) \right|^2 \rho d\rho d\theta = \alpha^2 (\alpha - 1)^2 \left(\int_0^1 \rho^{2\alpha-3} d\rho \right) \left(\int_0^{\varphi} |\Phi(\theta)|^2 d\theta \right)$$

Telle que: $\int_0^1 \rho^{2\alpha-3} d\rho = \int_0^1 \dfrac{1}{\rho^{3-2\alpha}} d\rho$ converge ssi et $3 - 2\alpha < 1$ c.-à-d. $\alpha > 1$.

5. $\dfrac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \in L^2(\Omega) \Longleftrightarrow \int_0^{\varphi} \int_0^1 \left| \dfrac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(\rho,\theta) \right|^2 \rho d\rho d\theta < +\infty$. On a:

$$\int_0^{\varphi} \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(\rho,\theta) \right|^2 \rho d\rho d\theta = \left(\int_0^1 \rho^{2\alpha+1} d\rho \right) \left(\int_0^{\varphi} \left| \Phi''(\theta) \right|^2 d\theta \right)$$

Telle que: $\int_0^1 \rho^{2\alpha+1} d\rho = \int_0^1 \dfrac{1}{\rho^{-(2\alpha+1)}} d\rho$ converge ssi $-(2\alpha+1) < 1$ c.-à-d. $\alpha > -1$.

<u>**Conclusion:**</u>

Si $\alpha > 1 \Longrightarrow v(\rho,\theta) = \rho^{\alpha}\ \Phi(\theta) \in H^2(\Omega) \Longrightarrow$Il n'y a pas de singularité.

Si $\alpha = 1 \Longrightarrow v(\rho,\theta) = \rho\ \Phi(\theta) \in H^2(\Omega)$ si et seulement si

$$v \in L^2(\Omega)\ ,\ \frac{\partial v}{\partial \rho} \in L^2(\Omega)\ ,\ \frac{\partial v}{\partial \theta} \in L^2(\Omega)\ ,\ \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} \in L^2(\Omega)\ ,\ \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \in L^2(\Omega)\ ,\ \frac{\partial^2 v}{\partial \rho \partial \theta} \in L^2(\Omega)$$

D'où:

6. $v \in L^2(\Omega) \Longleftrightarrow \int_0^{\varphi} \int_0^1 |v(\rho,\theta)|^2 \rho d\rho d\theta < +\infty$. On a:

$$\begin{aligned} \int_0^{\varphi} \int_0^1 |v(\rho,\theta)|^2 \rho d\rho d\theta &= \left(\int_0^1 \rho^3 d\rho \right) \left(\int_0^{\varphi} |\Phi(\theta)|^2 d\theta \right) < +\infty \\ \text{car} \int_0^{\varphi} |\Phi(\theta)|^2 d\theta &< +\infty \text{ et } \int_0^1 \rho^3 d\rho = \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4} < +\infty \end{aligned}$$

7. $\dfrac{\partial v}{\partial \rho} = \varphi(\theta) \in L^2(\Omega) \Longleftrightarrow \int_0^{\varphi} \int_0^1 \left| \dfrac{\partial v}{\partial \rho}(\rho,\theta) \right|^2 \rho d\rho d\theta < +\infty$. On a:

$$\begin{aligned} \int_0^{\varphi} \int_0^1 \left| \frac{\partial v}{\partial \rho}(\rho,\theta) \right|^2 \rho d\rho d\theta &= \left(\int_0^{\varphi} |\Phi(\theta)|^2 d\theta \right) \left(\int_0^1 \rho d\rho \right) < +\infty \\ \text{car} \int_0^{\varphi} |\Phi(\theta)|^2 d\theta &< +\infty \text{ et } \int_0^1 \rho d\rho = \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} < +\infty \end{aligned}$$

8. $\dfrac{\partial v}{\partial \theta} = \rho\ \Phi'(\theta) \in L^2(\Omega) \Longleftrightarrow \int_0^\varphi \int_0^1 \left|\dfrac{\partial v}{\partial \theta}(\rho,\theta)\right|^2 \rho d\rho d\theta < +\infty$. On a:

$$\begin{aligned} \int_0^\varphi \int_0^1 \left|\frac{\partial v}{\partial \theta}(\rho,\theta)\right|^2 \rho d\rho d\theta &= \left(\int_0^\varphi \left|\Phi'(\theta)\right|^2 d\theta\right)\left(\int_0^1 \rho^3 d\rho\right) < +\infty \\ \text{car } \int_0^\varphi \left|\Phi'(\theta)\right|^2 d\theta &< +\infty \text{ et } \int_0^1 \rho^3 d\rho = \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4} < +\infty \end{aligned}$$

9. $\dfrac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} = 0 \in L^2(\Omega)$.

10. $\dfrac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = \rho\ \Phi''(\theta) \in L^2(\Omega) \Longleftrightarrow \int_0^\varphi \int_0^1 \left|\dfrac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(\rho,\theta)\right|^2 \rho d\rho d\theta < +\infty$. On a:

$$\begin{aligned} \int_0^\varphi \int_0^1 \left|\frac{\partial v}{\partial \theta}(\rho,\theta)\right|^2 \rho d\rho d\theta &= \left(\int_0^\varphi \left|\Phi'(\theta)\right|^2 d\theta\right)\left(\int_0^1 \rho^3 d\rho\right) < +\infty \\ \text{car } \int_0^\varphi \left|\Phi'(\theta)\right|^2 d\theta &< +\infty \text{ et } \int_0^1 \rho^3 d\rho = \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4} < +\infty \end{aligned}$$

11. $\dfrac{\partial^2 v}{\partial \rho \partial \theta} = \Phi'(\theta) \in L^2(\Omega) \Longleftrightarrow \int_0^\varphi \int_0^1 \left|\dfrac{\partial^2 v}{\partial \rho \partial \theta}(\rho,\theta)\right|^2 \rho d\rho d\theta < +\infty$. On a:

$$\begin{aligned} \int_0^\varphi \int_0^1 \left|\frac{\partial^2 v}{\partial \rho \partial \theta}(\rho,\theta)\right|^2 \rho d\rho d\theta &= \left(\int_0^1 \rho d\rho\right)\left(\int_0^\varphi \left|\Phi'(\theta)\right|^2 d\theta\right) < +\infty \\ \text{car } \int_0^\varphi \left|\Phi'(\theta)\right|^2 d\theta &< +\infty \text{ et } \int_0^1 \rho d\rho = \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} < +\infty \end{aligned}$$

Donc:

Si $\alpha = 1$ alors $v(\rho,\theta) = \rho\ \Phi(\theta) \in H^2(\Omega)$.

Conclusion:

$\alpha \geq 1 \Rightarrow v \in H^2(\Omega) \Rightarrow$Pas de singularités.

$\alpha < 1 \Rightarrow v \notin H^2(\Omega) \Rightarrow$Existence de singularité.

D'où:

$$\alpha = \frac{k\pi}{\varphi}, k \in \mathbb{N}$$

Pour k = 0 :

$\alpha = 0 \Rightarrow v \in H^2(\Omega) \Rightarrow$Il n'y a pas de singularités.

Pour k = 1 :

$\alpha = \dfrac{\pi}{\varphi}$: On distingue deux cas:

$$\begin{aligned} \text{Si } \frac{\pi}{\varphi} &< 1 \Rightarrow \varphi > \pi \Rightarrow \text{Existence de singularité.} \\ \text{Si } \frac{\pi}{\varphi} &\geq 1 \Rightarrow \varphi \leq \pi \ \Rightarrow \text{Il n'y a pas de singularités.} \end{aligned}$$

<u>**Conclusion:**</u>

$$v(\rho,\theta) = \rho^{\alpha}\ \Phi(\theta) \text{ avec } 0 < \alpha < 1 \text{ est bien une solution de } (P).$$

La solution du problème (2.0.1) est de la forme

$$u = u_0 + B\ \rho^{\frac{k\pi}{\varphi}}\ \sin\left(\frac{k\pi}{\varphi}\theta\right)$$

Où B est une constante et $u_0 \in H^2(\Omega)$.
Lorsque $\varphi > \pi$, u n'appartient pas toujours à $H^2(\Omega)$ car $\dfrac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} \notin L^2(\Omega)$.
Tandis que l'unicité de la solution est toujours assurée (Il suffit de considérer l'unicité variationnelle (Pour plus de détail voir [14])).
On constate que $\rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \in L^2(\Omega)$ ce qui nous donne l'idée d'affecter le Laplacien d'une fonction poids qui dépend de ρ.
On choisit donc un espace fonctionnel E_α défini par:

$$E_\alpha\left(\Omega_\varphi\right) = \left\{u \in H^1\left(\Omega_\varphi\right) \text{ à support compact dans } \overline{\Omega_\varphi} \text{ telles que } \rho^\alpha D^2 u \in L^2(\Omega_\varphi)\right\} \tag{2.0.2}$$

Où le symbole D^2 désigne les dérivées partielles d'ordre 2 par rapport aux variables ρ et η tq

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

Le symbole D^β désigne la dérivée d'ordre β par rapport aux variables x et y.
On munit $E_\alpha\left(\Omega_\varphi\right)$ d'une norme dite "norme du graphe" :

$$\left\|u\right\|_{E_\alpha} = \left\|u\right\|_{H^1} + \sum_{|\beta|=2}\left\|\rho^\alpha D^\beta u\right\| \tag{2.0.3}$$

CHAPITRE 3

Etude du problème direct

3.1 Le problème dans un secteur plan

3.1.1 Position du problème

Soit Ω_φ un secteur plan infini d'ouverture φ défini par la relation (0.0.6) .

Supposons que le sommet de Ω_φ est situé à l'origine et soit $\lambda(\rho)$ la fonction poids définie précédemment, qui ne s'annule pas dans Ω_φ et qui vaut: $\rho^\alpha = (x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}$ avec $(0<\alpha<1)$, au voisinage de chaque sommet du polygone Ω.

Il est à remarquer que par rotation et par translation on peut toujours ramener chaque sommet de Ω à l'origine en coordonnées locales.

On considère le problème suivant:

$$\begin{cases} \lambda(\rho)\,\Delta u = g & \text{dans} \quad \Omega_\varphi \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{3.1.1}$$

avec $g = \lambda(\rho)\, f$, et f est donnée dans $L^2(\Omega_\varphi)$.

On étudiera ce problème au voisinage du secteur Ω_φ, car le seul problème qui se pose quant à la régularité des solutions du problème (3.1.1) se situe au voisinage de l'origine.

On va donc étudier le problème suivant:

$$\begin{cases} \rho^\alpha \Delta u = g & \text{dans} \quad \Omega_\varphi \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{3.1.2}$$

Pour la condition de Dirichlet homogène ($u = 0$ sur Γ_φ), il est plus commode de chercher la solution du problème (3.1.2) , dans un espace fonctionnel qu'on note par $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ et qu'on définit par la relation:

$$E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi) = E_\alpha(\Omega_\varphi) \cap H_0^1(\Omega_\varphi) \tag{3.1.3}$$

Où l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ est défini par la formule (2.0.2) .

On munit l'espace $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ par la norme induite par (2.0.3) qui en fait un espace de Banach.

3.1.2 Remarque

L'opérateur $\rho^\alpha \Delta$ est un opérateur elliptique qui dégénère à l'origine.

3.2 Formule de Green

3.2.1 Formule de Green adaptée au problème

On se propose de construire une formule de Green adaptée au problème (3.1.2) dans le secteur plan Ω_φ. Le résultat obtenu s'étendra au polygone tout entier.

Proposition 3.2.1 (Formule de Green)

$$\forall u, v \in C_0^\infty(\Omega_\varphi) : \langle \rho^\alpha \Delta u, v\rangle - \langle u, (\rho^\alpha\Delta)^* v\rangle = \int_{\Gamma_\varphi} \rho^{\alpha-1} v \frac{\partial u}{\partial \theta} d\rho - \int_{\Gamma_\varphi} u \rho^{\alpha-1} \frac{\partial v}{\partial \theta} d\rho \tag{3.2.1}$$

$$= \int_{\Gamma_\varphi} \rho^\alpha v \frac{\partial u}{\partial \eta} d\rho - \int_{\Gamma_\varphi} u \rho^\alpha \frac{\partial v}{\partial \eta} d\rho$$

où η est le vecteur normal à la frontière du secteur Ω_φ et dirigé vers l'extérieur de celle-ci et

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

L'opérateur adjoint de $\rho^\alpha \Delta$ est donné par l'expression:

$$(\rho^\alpha \Delta)^* = \rho^\alpha \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + (2\alpha+1)\rho^{\alpha-1}\frac{\partial}{\partial \rho} + \rho^{\alpha-2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \alpha^2\right) \tag{3.2.2}$$

$$= \rho^{\alpha}\Delta + \alpha\frac{\partial}{\partial\rho} + \alpha^2\rho^{\alpha-2} \tag{3.2.3}$$

Démonstration.

Soient u et v deux fonctions définies dans $C_0^{\infty}(\Omega_{\varphi})$.

En coordonnées polaires, le Laplacien s'écrit:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

D'où:

$$\rho^{\alpha}\Delta = \rho^{\alpha}\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \rho^{\alpha-1}\frac{\partial}{\partial\rho} + \rho^{\alpha-2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \tag{3.2.4}$$

On a donc:

$$\langle\rho^{\alpha}\Delta u, v\rangle = \int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}(\rho^{\alpha}\Delta u)(v)\rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}(\rho^{\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \rho^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial\rho} + \rho^{\alpha-2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2})v\rho d\rho d\theta \tag{3.2.5}$$

$$= \underbrace{\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}(\rho^{\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2})v\rho d\rho d\theta}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}(\rho^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial\rho})v\rho d\rho d\theta}_{I_2} + \underbrace{\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}(\rho^{\alpha-2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2})v\rho d\rho d\theta}_{I_3}$$

On intègre I_1 par parties par rapport à la variable ρ, telle que:

$$I_1 = \int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}(\rho^{\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2})v\rho d\rho d\theta = \int_0^{\varphi}\left[\int_0^{\infty}(\rho^{\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2})(\rho^{\alpha+1}v)d\rho\right]d\theta$$

On pose:

$$\begin{cases} f\,' = \dfrac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} & \Longrightarrow \quad f = \dfrac{\partial u}{\partial\rho} \\ g = \rho^{\alpha+1}v & \Longrightarrow \quad g' = (\alpha+1)\rho^{\alpha}v + \rho^{\alpha+1}\dfrac{\partial v}{\partial\rho} \end{cases}$$

D'où:

$$I_{1=}\int_0^{\varphi}\left(\left[\frac{\partial u}{\partial\rho}\rho^{\alpha+1}v\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\frac{\partial u}{\partial\rho}\left((\alpha+1)\rho^{\alpha}v + \rho^{\alpha+1}\frac{\partial v}{\partial\rho}\right)d\rho\right)d\theta$$

On intègre $I_{1,1}$ par parties, par rapport à la variable ρ telle que:

$$I_{1,1} = \int_0^{\infty}\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)\left((\alpha+1)\rho^{\alpha}v + \rho^{\alpha+1}\frac{\partial v}{\partial\rho}\right)d\rho$$

On pose:

$$\begin{cases} f\,' = \dfrac{\partial u}{\partial\rho} \\ g = (\alpha+1)\rho^{\alpha}v + \rho^{\alpha+1}\dfrac{\partial v}{\partial\rho} \end{cases}$$

Ce qui implique que:

$$\begin{cases} f = u \\ g' = (\alpha+1)\alpha\rho^{\alpha-1}v + 2(\alpha+1)\rho^{\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial \rho} + \rho^{\alpha+1}\dfrac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} \end{cases}$$

D'où:

$$I_{1,1} = \begin{pmatrix} \left[u\left((\alpha+1)\rho^{\alpha}v + \rho^{\alpha+1}\dfrac{\partial v}{\partial \rho}\right)\right]_0^{\infty} + \\ \\ -\int_0^{\infty} u\left(\alpha(\alpha+1)\rho^{\alpha-1}v + 2(\alpha+1)\rho^{\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial \rho} + \rho^{\alpha+1}\dfrac{\partial^2 v}{\partial \rho^2}\right)d\rho \end{pmatrix}$$

En tenant compte du fait que les fonctions sont à support compact dans $\overline{\Omega}_{\varphi}$, il vient:

$$I_1 = \int_0^{\varphi}\int_0^{\infty} u\left[\rho^{\alpha}\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + (2\alpha+1)\,\rho^{\alpha-1}\frac{\partial v}{\partial \rho} + \alpha(\alpha-1)\rho^{\alpha-2}v\right]\rho d\rho d\theta \qquad (3.2.6)$$

On intègre I_2 par parties par rapport à la variable ρ telle que:

$$I_2 = \int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\frac{\partial u}{\partial \rho}\rho^{\alpha}v d\rho d\theta$$

On pose:

$$\begin{cases} f\,' = \dfrac{\partial u}{\partial \rho} & \Longrightarrow \quad f = u \\ g = \rho^{\alpha}v & \Longrightarrow \quad g' = \alpha\rho^{\alpha-1}v + \rho^{\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial \rho} \end{cases}$$

D'où:

$$I_2 = \int_0^{\varphi}\left[[\rho^{\alpha}uv]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} u\left(\alpha\rho^{\alpha-1}v + \rho^{\alpha}\frac{\partial v}{\partial \rho}\right)d\rho\right]d\theta$$

Or u et v sont à support compact dans $\overline{\Omega}_{\varphi}$, d'où:

$$I_2 = -\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty} u\left[\rho^{\alpha-1}\frac{\partial v}{\partial \rho} + \alpha\rho^{\alpha-2}v\right]\rho d\rho d\theta \qquad (3.2.7)$$

On intègre I_3 par parties par rapport à la variable θ telle que:

$$I_3 = \int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\left(\rho^{\alpha-2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right)v\rho d\rho d\theta = \int_0^{\infty}\rho^{\alpha-1}\left[\int_0^{\varphi}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right)(v)\,d\theta\right]d\rho$$

On pose:

$$\begin{cases} f\,' = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} & \Longrightarrow \quad f = \dfrac{\partial u}{\partial \theta} \\ g = v & \Longrightarrow \quad g' = \dfrac{\partial v}{\partial \theta} \end{cases}$$

D'où:

$$I_3 = \int_0^\infty \rho^{\alpha-1} \left[\left[\frac{\partial u}{\partial \theta} v \right]_0^\varphi - \int_0^\varphi \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} \right) d\theta \right] d\rho$$

On intègre $I_{3,3}$ par parties par rapport à la variable θ telle que:

$$I_{3,3} = \int_0^\varphi \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta$$

On pose:

$$\begin{cases} f' = \dfrac{\partial u}{\partial \theta} & \Longrightarrow \quad f = u \\ g = \dfrac{\partial v}{\partial \theta} & \Longrightarrow \quad g' = \dfrac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \end{cases}$$

D'où:

$$I_3 = \int_0^\infty \rho^{\alpha-1} \left[\left[\frac{\partial u}{\partial \theta} v \right]_0^\varphi - \left(\left[u \frac{\partial v}{\partial \theta} \right]_0^\varphi - \int_0^\varphi u \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} d\theta \right) \right] d\rho$$

$$I_3 = \int_0^\infty \left[\rho^{\alpha-1} v \frac{\partial u}{\partial \theta} \right]_0^\varphi d\rho - \int_0^\infty \left[u \rho^{\alpha-1} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right]_0^\varphi d\rho + \int_0^\varphi \int_0^\infty u \rho^{\alpha-2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \rho d\rho d\theta \qquad (3.2.8)$$

On a donc le résultat dans l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$. ■

Proposition 3.2.2 *L'opérateur $(\rho^\alpha \Delta)^*$ est elliptique et il dégénère à l'origine.*

Preuve. On a $(\rho^\alpha \Delta)^*$ est donné par la relation (3.2.3) , son polynôme caractéristique peut s'écrire sous la manière suivante:

$$P_\alpha(x, y) = \rho^\alpha \left(a_\alpha x^2 + b_\alpha y^2 \right)$$

qui ne s'annule qu'à l'origine, avec a_α et b_α sont des constantes qui dépendent de α et qui ne s'annule pas lorsque $\alpha \in]0, 1[$, qui est notre cas. ■

Proposition 3.2.3 *L'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$, muni de la norme du graphe, est un espace de Hilbert.*

Démonstration.

D'après sa définition, l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ est un espace de Banach, donc complet.

Reste à montrer qu'il est préhilbertien.

D'où en munissant l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ de la norme (2.0.3) qui découle du produit scalaire défini par:

$$\langle u, v \rangle_{E_\alpha(\Omega_\varphi)} = \langle u, v \rangle_{H^1(\Omega_\varphi)} + \sum_{|\beta|=2} \left\langle \rho^\alpha D^\beta u, \rho^\alpha D^\beta v \right\rangle_{L^2(\Omega_\varphi)} \qquad (3.2.9)$$

Où l'opérateur D désigne les dérivées partielles d'ordre deux par rapport aux variables ρ et η respectivement et

$$\frac{\partial}{\partial\eta} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

■

Remarque

L'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ n'est pas unique.

3.3 Propriétés de l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$

3.3.1 Comparaison des espaces $H^s_{x,y}$ et $H^s_{\rho,\eta}$

Cas s=1:

On pose:

$$H^1_{x,y}(\Omega_\varphi) = \left\{u \in L^2(\Omega_\varphi) : \frac{\partial u}{\partial x} \in L^2(\Omega_\varphi) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y} \in L^2(\Omega_\varphi)\right\}$$
$$H^1_{\rho,\eta}(\Omega_\varphi) = \left\{u \in L^2(\Omega_\varphi) : \frac{\partial u}{\partial \rho} \in L^2(\Omega_\varphi) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial \eta} \in L^2(\Omega_\varphi)\right\}$$

Proposition 3.3.1 *L'espace $H^1_{x,y}(\Omega_\varphi)$ coïncide avec l'espace $H^1_{\rho,\eta}(\Omega_\varphi)$.*

Démonstration.

Il s'agit de démontrer que si:

$$u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \text{ sont dans } L^2(\Omega_\varphi) \Longleftrightarrow u, \frac{\partial u}{\partial \rho}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \text{ sont dans } L^2(\Omega_\varphi)$$

En effet on a:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} &= \cos(\theta)\dfrac{\partial u}{\partial \rho} - \sin(\theta)\dfrac{\partial u}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} &= \sin(\theta)\dfrac{\partial u}{\partial \rho} + \cos(\theta)\dfrac{\partial u}{\partial \eta} \end{cases}$$

Il est clair que si $u, \dfrac{\partial u}{\partial \rho}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}$sont dans $L^2(\Omega_\varphi)$ alors $u, \dfrac{\partial u}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ sont dans $L^2(\Omega_\varphi)$.

Inversement, on a:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \rho} &= \cos(\theta)\dfrac{\partial u}{\partial x} + \sin(\theta)\dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} &= -\sin(\theta)\dfrac{\partial u}{\partial x} + \cos(\theta)\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

Comme $u, \dfrac{\partial u}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ sont dans $L^2(\Omega_\varphi)$ alors $u, \dfrac{\partial u}{\partial \rho}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}$ sont dans $L^2(\Omega_\varphi)$.
Donc:

$$H^1_{x,y}(\Omega_\varphi) = H^1_{\rho,\eta}(\Omega_\varphi)$$

■

3.3.2 Propriétés des espaces $E_{\alpha,\beta}$

Remarque

Le résultat précédent ne s'étend pas aux espaces d'ordre supérieur, on a à titre d'exemple:

$$H^2_{x,y}(\Omega_\varphi) \subset H^2_{\rho,\eta}(\Omega_\varphi)$$

Il s'agit de démontrer que si:

$$\begin{aligned} & u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ sont dans } L^2(\Omega_\varphi) \\ \Longrightarrow \quad & u, \frac{\partial u}{\partial \rho}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \eta} \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \text{ sont dans } L^2(\Omega_\varphi) \end{aligned}$$

Il est clair que si $u, \dfrac{\partial u}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ sont dans $L^2(\Omega_\varphi)$ alors $u, \dfrac{\partial u}{\partial \rho}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}$sont dans $L^2(\Omega_\varphi)$ car

$$H^1_{x,y}(\Omega_\varphi) \subset H^1_{\rho,\eta}(\Omega_\varphi)$$

Reste à montrer que si:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ sont dans } L^2(\Omega_\varphi) \Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \eta} \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \text{ sont dans } L^2(\Omega_\varphi)$$

En effet on a:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \rho} &= \cos(\theta)\frac{\partial u}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial u}{\partial y} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} &= \frac{\partial}{\partial \rho}\left[\cos(\theta)\frac{\partial u}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial u}{\partial y}\right] \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left[\cos(\theta)\frac{\partial u}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial u}{\partial y}\right] \times \cos(\theta) + \\ + \frac{\partial}{\partial y}\left[\cos(\theta)\frac{\partial u}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial u}{\partial y}\right] \times \sin(\theta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2(\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin(\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\cos(\theta) + \\ + \cos(\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\sin(\theta) + \sin^2(\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2(\theta) + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\sin(2\theta) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2(\theta)$$

En outre:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}(-\rho\sin(\theta)) + \frac{\partial u}{\partial y}(\rho\cos(\theta)) \\
&\Longrightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\sin(\theta)\frac{\partial u}{\partial x} + \cos(\theta)\frac{\partial u}{\partial y} \\
&\Longrightarrow \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{1}{\rho}\sin(\theta)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\cos(\theta)\frac{\partial u}{\partial y} \\
&\Longrightarrow \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left[-\frac{1}{\rho}\sin(\theta)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\cos(\theta)\frac{\partial u}{\partial y}\right] \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{1}{\rho}\sin(\theta)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\cos(\theta)\frac{\partial u}{\partial y}\right] \times (-\rho\sin(\theta)) + \\ + \frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{1}{\rho}\sin(\theta)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\cos(\theta)\frac{\partial u}{\partial y}\right] \times (\rho\cos(\theta)) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin^2(\theta) - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\sin(2\theta) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2(\theta)$$

De plus:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \rho} &= \cos(\theta)\frac{\partial u}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial u}{\partial y} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\cos(\theta)\frac{\partial u}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial u}{\partial y}\right] \\
\frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \theta} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left[\cos(\theta)\frac{\partial u}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial u}{\partial y}\right] \times (-\rho \sin(\theta)) + \\ \\ +\frac{\partial}{\partial y}\left[\cos(\theta)\frac{\partial u}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial u}{\partial y}\right] \times (\rho\cos(\theta)) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\cos(\theta)\sin(\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\rho - \sin(\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\rho\sin(\theta) + \\ \\ +\rho\cos^2(\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \sin(\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\rho\cos(\theta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(-\frac{2}{2}\rho\cos(\theta)\sin(\theta)\right) + \\ \\ +\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\left(-\rho\sin^2(\theta) + \rho\cos^2(\theta)\right) + \\ \\ +\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\rho\frac{2}{2}\cos(\theta)\sin(\theta)\right) \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{2}\rho\sin(2\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho\cos(2\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}\rho\sin(2\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \eta} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \theta} = \left[-\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos(2\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}\sin(2\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

Donc:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \eta} = -\frac{1}{2}\sin(2\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos(2\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}\sin(2\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

D'où:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2(\theta) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\sin(2\theta) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2(\theta) \\ \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin^2(\theta) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\sin(2\theta) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2(\theta) \\ \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \eta} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin(2\theta) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\cos(2\theta) - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin(2\theta) \end{cases}$$

Comme $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ sont dans $L^2(\Omega_\varphi)$ alors $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \eta}$ et $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ sont dans $L^2(\Omega_\varphi)$.
Donc:

$$H^2_{x,y}(\Omega_\varphi) \subset H^2_{\rho,\eta}(\Omega_\varphi)$$

Remarque

A partir de maintenant l'espace $H^1_{x,y}(\Omega_\varphi)$ sera noté $H^1(\Omega_\varphi)$.

Proposition 3.3.2

$$u \in E(\Omega_\varphi) \Longrightarrow \rho^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial \rho} \in L^2(\Omega_\varphi)$$

Démonstration.

On a si $u \in E(\Omega_\varphi)$ alors $u \in H^1(\Omega_\varphi)$ et u est à support compact dans $\overline{\Omega_\varphi}$.
(Telle que $\rho^\alpha D^2 u \in L^2(\Omega_\varphi)$)
Et comme $u \in H^1(\Omega_\varphi)$ alors $\dfrac{\partial u}{\partial \rho} \in L^2(\Omega_\varphi)$.
Posons:

$$v = \frac{\partial u}{\partial \rho}$$

Et montrons que:

$$\rho^{\alpha-1}v \in L^2(\Omega_\varphi)$$

On a donc:

$$\left\|\rho^{\alpha-1}v\right\|^2_{L^2(\Omega_\varphi)} = \int_0^\varphi \int_0^\infty \left(\rho^{\alpha-1}|v|\right)^2 \rho d\rho d\theta = \int_0^\varphi \int_0^\infty \rho^{2\alpha-2}|v|^2 \rho d\rho d\theta$$

1$^{\text{ier}}$cas :

$$\rho \geq 1$$

On a:

$$0 < \alpha < 1 \Longrightarrow 2\alpha - 2 < 0$$

D'autre part, si:

$$\rho \geq 1 \Longrightarrow \log(\rho) \geq 0 \Longrightarrow (2\alpha-2)\log(\rho) \leq 0 \Longrightarrow \log\left(\rho^{2\alpha-2}\right) \leq 0 \Longrightarrow \rho^{2\alpha-2} \leq 1$$

$$\Longrightarrow \left\|\rho^{\alpha-1}v\right\|^2 \leq \int_0^\varphi \int_0^\infty |v|^2 \rho d\rho d\theta = \|v\|^2 \in L^2(\Omega_\varphi)$$

Donc pour $\rho \geq 1$, la proposition est vérifiée.

Il reste le cas

$$\rho < 1$$

Si $\rho < 1$, on a:

$$\int_0^\varphi \int_0^1 \rho^{2\alpha-2} |v|^2 \rho d\rho d\theta = \int_0^\varphi \int_0^\epsilon \rho^{2\alpha-2} |v|^2 \rho d\rho d\theta + \int_0^\varphi \int_\epsilon^1 \rho^{2\alpha-2} |v|^2 \rho d\rho d\theta \qquad (*)$$

Or:

$$0 < \epsilon < \rho < 1$$

$$0 < \epsilon < \rho < 1 \Longrightarrow \log(\epsilon) < \log(\rho) < 0$$

$$\Longrightarrow 0 < (2\alpha-2)\log(\rho) < (2\alpha-2)\log(\epsilon) \text{ tq } 0 < \alpha < 1$$

$$\Longrightarrow 0 < \log\left(\rho^{2\alpha-2}\right) < \log\left(\epsilon^{2\alpha-2}\right) \Longrightarrow 1 < \rho^{2\alpha-2} < \epsilon^{2\alpha-2}$$

Or la fonction $\rho \mapsto \rho^{2\alpha-2}$ est décroissante et continue sur le compact $[\epsilon, 1]$, donc elle est bornée et atteint ses bornes sur ce compact.

D'où:

$$\int_0^\varphi \int_\epsilon^1 \rho^{2\alpha-2} |v|^2 \rho d\rho d\theta \leq \epsilon^{2\alpha-2} \int_0^\varphi \int_\epsilon^1 |v|^2 \rho d\rho d\theta$$

Il reste à étudier l'intégrale

$$\int_0^\varphi \int_0^\epsilon \rho^{2\alpha-2} |v|^2 \rho d\rho d\theta$$

, pour ϵ suffisamment petit et strictement positif.

Le développement en série entière de la fonction $X \mapsto (1+X)^\beta$ tel que $|X| < 1$, donne:

$$(1+X)^\beta = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} (\beta - i) X^n$$

Or:

$$\begin{cases} 0 < \rho < \epsilon \\ \text{et} \\ \rho < 1(\text{hyp}) \end{cases}$$

Ce qui implique que:

$$0 < \rho < \epsilon < 1$$

D'où:

$$-1 < \rho - 1 < \epsilon - 1 < 0 < 1$$

C'est à dire:

$$|\rho - 1| < 1$$

En remplaçant X par $\rho - 1$ et β par $2\alpha - 2$ et en appliquant le développement en série entière ci-dessus à la fonction $\rho \mapsto \rho^{2\alpha-2}$, on obtient:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left| \int_0^\varphi \int_0^\epsilon \rho^{2\alpha-2} |v|^2 \rho d\rho d\theta \right| = \left| \int_0^\varphi \int_0^\epsilon (1 + (\rho - 1))^{2\alpha-2} |v|^2 \rho d\rho d\theta \right| \\
&= \left| \int_0^\varphi \int_0^\epsilon \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} (2\alpha - 2)(2\alpha - 3) \ldots (2\alpha - n - 1) (\rho - 1)^n |v|^2 \rho d\rho d\theta \right| \\
&\leq \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} (2\alpha - 2)(2\alpha - 3) \ldots (2\alpha - n - 1) \int_0^\varphi \int_0^\epsilon |\rho - 1|^n |v|^2 \rho d\rho d\theta \\
&\leq S \int_0^\varphi \int_0^\epsilon |v|^2 \rho d\rho d\theta \text{ car } |\rho - 1| < 1
\end{aligned}$$

Telle que S est la série numérique de terme général

$$\frac{1}{n!} (2\alpha - 2)(2\alpha - 3) \ldots (2\alpha - n - 1)$$

On a alors:

$$0 \leq \left| \int_0^\varphi \int_0^\epsilon \rho^{2\alpha-2} |v|^2 \rho d\rho d\theta \right| \leq S \int_0^\varphi \int_0^\epsilon |v|^2 \rho d\rho d\theta$$

Et comme $v \in L^2$, on a donc le résultat souhaité. ■

Proposition 3.3.3 $\exists K = K(\Omega_\varphi) > 0$ *telle que*

$$\left\| \rho^{\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right\|^2 \leq K \left\| \rho^{\alpha-1} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \eta} \right\|^2$$

Démonstration.

Si u est dans $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ alors $\rho^{\alpha-1}\dfrac{\partial u}{\partial \rho} \in L^2(\Omega_\varphi)$.

(Découle de la proposition précédente).

On pose: $v = \rho^{\alpha-1}\dfrac{\partial u}{\partial \rho}$, d'où il suffit de montrer l'inégalité

$$\|v\|^2 \leq K \left\| \frac{\partial v}{\partial \theta} \right\|^2$$

On a:

$$\int_0^\theta \frac{\partial v}{\partial \theta}(\rho\cos t, \rho\sin t)\, dt = [v(\rho\cos t, \rho\sin t)]_{t=0}^{t=\theta} = v(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) - v(\rho, 0)$$

Or v est à support compact dans $\overline{\Omega_\varphi}$ car u l'est, d'où:

$$\int_0^\theta \frac{\partial v}{\partial \theta}(\rho\cos t, \rho\sin t)\, dt = v(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = v(x,y)$$

C'est à dire:

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \int_0^\theta \frac{\partial v}{\partial \theta}(\rho\cos t, \rho\sin t)\, dt \\ &\Longrightarrow |v(x,y)| \leq \int_0^\theta \left| \frac{\partial v}{\partial \theta}(\rho\cos t, \rho\sin t) \right| dt \\ &\Longrightarrow |v(x,y)|^2 \leq \left(\int_0^\theta \left| \frac{\partial v}{\partial \theta}(\rho\cos t, \rho\sin t) \right| dt \right)^2 \\ &\Longrightarrow |v(x,y)|^2 \leq \int_0^\theta \left| \frac{\partial v}{\partial \theta}(\rho\cos t, \rho\sin t) \right|^2 dt \end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \int_0^\varphi |v(x,y)|^2 \rho d\rho d\theta &\leq \int_0^\infty \int_0^\varphi \int_0^\theta \left| \frac{\partial v}{\partial \theta}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \right|^2 dt\rho d\rho d\theta \\
&= \int_0^\theta dt \int_0^\infty \int_0^\varphi \left| \frac{\partial v}{\partial \theta}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \right|^2 \rho d\rho d\theta \\
&= \theta \int_0^\infty \int_0^\varphi \left| \frac{\partial v}{\partial \theta}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \right|^2 \rho d\rho d\theta \\
&\leq \varphi \int_0^\infty \int_0^\varphi \left| \frac{\partial v}{\partial \theta}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \right|^2 \rho d\rho d\theta
\end{aligned}$$

Donc:

$$\exists K = \varphi > 0, \text{ dépend de l'ouvert } \Omega_\varphi, \text{tq} : \|v\|^2 \leq \varphi \left\| \frac{\partial v}{\partial \theta} \right\|^2$$

Et le résultat est donc vérifié. ■

Définition 3.3.1 *On pose pour $\alpha = 0$,*

$$\begin{aligned}
E_0(\Omega_\varphi) &= H^2_{\rho,\eta}(\Omega_\varphi) \\
&= \left\{ u \in H^1(\Omega_\varphi) \ \textit{tq } u \textit{ est à support compact dans } \overline{\Omega_\varphi} \textit{ et } D^2u \in L^2(\Omega_\varphi) \right\}
\end{aligned}$$

et pour $\alpha = 1$,

$$\begin{aligned}
E_1(\Omega_\varphi) &= E(\Omega_\varphi) \\
&= \left\{ u \in H^1(\Omega_\varphi) \ \textit{tq } u \textit{ est à support compact dans } \overline{\Omega_\varphi} \textit{ et } \rho D^2u \in L^2(\Omega_\varphi) \right\}
\end{aligned}$$

Proposition 3.3.4 *Si α et β sont deux réels pris dans l'intervalle $[0,1]$ tels que $\alpha < \beta$ alors $E_\alpha(\Omega_\varphi) \subset E_\beta(\Omega_\varphi)$.*

Démonstration.

Pour montrer que: $E_\alpha(\Omega_\varphi) \subset E_\beta(\Omega_\varphi)$ tels que

$$E_\alpha(\Omega_\varphi) = \left\{ u \in H^1(\Omega_\varphi) \ \text{tq } u \text{ est à support compact dans } \overline{\Omega_\varphi} \text{ et } \rho^\alpha D^2u \in L^2(\Omega_\varphi) \right\}$$

et

$$E_\beta(\Omega_\varphi) = \left\{ u \in H^1(\Omega_\varphi) \ \text{tq } u \text{ est à support compact dans } \overline{\Omega_\varphi} \text{ et } \rho^\beta D^2u \in L^2(\Omega_\varphi) \right\}$$

Il suffit de montrer que: $u \in E_\alpha(\Omega_\varphi) \Longrightarrow u \in E_\beta(\Omega_\varphi)$.

C'est à dire: $\rho^\alpha D^2 u \in L^2\left(\Omega_\varphi\right) \Longrightarrow \rho^\beta D^2 u \in L^2\left(\Omega_\varphi\right)$.

En d'autres termes, montrons que si toutes les dérivées secondes de la fonction u par rapport aux variables ρ et η, et affectées du poids ρ^α sont carré intégrables par rapport à la mesure $dxdy$ alors toutes les dérivées secondes de la fonction u par rapport aux variables ρ et η, et affectées du poids ρ^β sont aussi carré intégrables par rapport à la même mesure.

On distingue deux cas:

1^ier^ cas : $\rho < 1$.

On a:

$$0 < \rho < 1 \Longrightarrow \log\left(\rho\right) < 0 \Longrightarrow \left(\beta - \alpha\right)\log\left(\rho\right) < 0$$

Car on a par hypothèse:

$$0 < \alpha < \beta < 1$$

Ceci implique que:

$$\beta \log\left(\rho\right) < \alpha \log\left(\rho\right) \Longrightarrow \log\left(\rho^\beta\right) < \log\left(\rho^\alpha\right)$$

Car

$$0 < \alpha < \beta < 1$$

Ceci implique que:

$$\begin{aligned}
\rho^\beta &< \rho^\alpha \Longrightarrow \rho^\beta \left|D^2 u\right| \leq \rho^\alpha \left|D^2 u\right| \\
&\Longrightarrow \left|\rho^\beta D^2 u\right|^2 \leq \left|\rho^\alpha D^2 u\right|^2 \Longrightarrow \rho^{2\beta} \left|D^2 u\right|^2 \leq \rho^{2\alpha} \left|D^2 u\right|^2 \\
&\Longrightarrow \int_0^\varphi \int_0^\infty \left|\rho^\beta D^2 u\right|^2 \rho d\rho d\theta \leq \int_0^\varphi \int_0^\infty \left|\rho^\alpha D^2 u\right|^2 \rho d\rho d\theta \\
&\Longrightarrow \left\|\rho^\beta D^2 u\right\|^2_{L^2(\Omega_\varphi)} \leq \left\|\rho^\alpha D^2 u\right\|^2_{L^2(\Omega_\varphi)}
\end{aligned}$$

Il reste à vérifier le résultat pour le cas: $\rho \geq 1$.

On pose: $w = \rho^\alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}$ qui est dans $L^2\left(\Omega_\varphi\right)$ car $u \in E_\alpha(\Omega_\varphi)$.

On a:

$$\begin{aligned}
\left\|\rho^\beta \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\right\|^2 &= \int_0^\varphi \int_1^\infty \left|\rho^\beta \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\right|^2 \rho d\rho d\theta = \int_0^\varphi \int_1^\infty \rho^{2\beta-2\alpha+2\alpha} \left|\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\right|^2 \rho d\rho d\theta \\
&= \int_0^\varphi \int_1^\infty \rho^{2(\beta-\alpha)} \rho^{2\alpha} \left|\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\right|^2 \rho d\rho d\theta = \int_0^\varphi \int_1^\infty \rho^{2(\beta-\alpha)} \left|\rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\right|^2 \rho d\rho d\theta \\
&= \int_0^\varphi \int_1^\infty \rho^{2(\beta-\alpha)} |w|^2 \rho d\rho d\theta \\
&= \int_0^\varphi \left[\int_1^A \rho^{2(\beta-\alpha)} |w|^2 \rho d\rho + \int_A^\infty \rho^{2(\beta-\alpha)} |w|^2 \rho d\rho\right] d\theta \\
&= \int_0^\varphi \int_1^A \rho^{2(\beta-\alpha)} |w|^2 \rho d\rho d\theta + \int_0^\varphi \int_A^\infty \rho^{2(\beta-\alpha)} |w|^2 \rho d\rho d\theta
\end{aligned}$$

Or la fonction $\rho \mapsto \rho^{2(\beta-\alpha)}$ est continue sur le compact $[1, A]$ tel que A est fini, donc elle est bornée.

De plus, elle est croissante sur ce compact, donc elle atteint ses bornes.

D'où:

$$\int_0^\varphi \int_1^A \rho^{2(\beta-\alpha)} |w|^2 \rho d\rho d\theta \leq A^{2(\beta-\alpha)} \int_0^\varphi \int_1^A |w|^2 \rho d\rho d\theta$$

D'autre part:

$$\int_0^\varphi \int_A^\infty \rho^{2(\beta-\alpha)} |w|^2 \rho d\rho d\theta = 0$$

En effet, on a: $w = \rho^\alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}$ est à support compact dans $\overline{\Omega_\varphi}$ car u l'est.

Il suffit donc de choisir A suffisamment grand tel que $supp(w) \subset [1, A] \times [0, \varphi]$.

Donc la proposition est aussi vérifiée pour $\rho \geq 1$. ■

Proposition 3.3.5 *L'espace $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ peut s'écrire sous la forme suivante:*

$$E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi) = \left\{u \in H_0^1(\Omega_\varphi),\ \textit{telle que } \rho^\alpha u \in H_0^2(\Omega_\varphi)\right\} \tag{3.3.1}$$

où les fonctions sont à support compact dans $\overline{\Omega_\varphi}$.

Démonstration.

On pose:

$$G_{\alpha,0}(\Omega_\varphi) = \left\{u \in H_0^1(\Omega_\varphi),\ \text{telle que } \rho^\alpha u \in H_0^2(\Omega_\varphi)\right\}$$

a) Montrons que $G_{\alpha,0}(\Omega_\varphi) \subset E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ et supposons que

$$u \in G_{\alpha,0}(\Omega_\varphi) \Longrightarrow u \in H_0^1(\Omega_\varphi) \text{ et } \rho^\alpha u \in H_0^2(\Omega_\varphi)$$

(C'est la définition même de $G_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$).

Ce qui implique que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\rho^\alpha u)}{\partial\rho} &= \rho^\alpha \frac{\partial u}{\partial\rho} + \alpha\rho^{\alpha-1}u \in H_0^1(\Omega_\varphi) \\
&\Longrightarrow \left[\frac{\partial^2(\rho^\alpha u)}{\partial\rho^2} = \rho^\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \alpha\rho^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial\rho} + \alpha\rho^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial\rho} + \alpha(\alpha-1)\rho^{\alpha-2}u\right] \in L^2(\Omega_\varphi) \\
&\Longrightarrow \left[\frac{\partial^2(\rho^\alpha u)}{\partial\rho^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}[\rho^\alpha] + \frac{\partial u}{\partial\rho}\left[\alpha\rho^{\alpha-1} + \alpha\rho^{\alpha-1}\right] + \underbrace{\alpha(\alpha-1)\rho^\alpha u}_{=0}\right] \in L^2(\Omega_\varphi) \\
&\Longrightarrow \left[\frac{\partial^2(\rho^\alpha u)}{\partial\rho^2} = \rho^\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + 2\alpha\rho^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial\rho}\right] \in L^2(\Omega_\varphi) \\
&\Longrightarrow \rho^\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} \in L^2(\Omega_\varphi) \text{ car } u \in E_\alpha(\Omega_\varphi) \\
&\Longrightarrow \rho^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial\rho} \in L^2(\Omega_\varphi)
\end{aligned}$$

b) Par le même procédé, on vérifie aisément l'inclusion dans l'autre sens. ■

Remarque 3.3.1 *L'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ peut s'écrire sous la forme:*

$$E_\alpha(\Omega_\varphi) = \left\{u \in H^1(\Omega_\varphi),\ \textit{telle que } \rho^\alpha u \in H^2(\Omega_\varphi)\right\}$$

Les fonctions sont à support compact dans $\overline{\Omega_\varphi}$.

Proposition 3.3.6 *L'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ est un espace intermédiaire entre les espaces $H^1(\Omega_\varphi)$ et $H^2(\Omega_\varphi)$.*

Démonstration.

Il suffit de montrer que $H^2(\Omega_\varphi) \subset E_\alpha(\Omega_\varphi)$, car l'inclusion $E_\alpha(\Omega_\varphi) \subset H^1(\Omega_\varphi)$ découle de la définition même de l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$.

Soit u une fonction à support compact dans $\overline{\Omega_\varphi}$.

Si $u \in H^2(\Omega_\varphi)$ alors $u \in H^2_{\rho,\eta}(\Omega_\varphi)$, car $H^2(\Omega_\varphi) \subset H^2_{\rho,\eta}(\Omega_\varphi)$ (Voir remarque (3.3.2)).

Donc $u \in H^1_{\rho,\eta}(\Omega_\varphi)$ et $D^2 u \in L^2(\Omega_\varphi)$.

L'opérateur D^2 désigne l'opérateur de dérivation d'ordre 2 par rapport aux variables ρ et η.

On a, d'après la proposition (3.3.1) , $H^1_{x,y}(\Omega_\varphi) = H^1_{\rho,\eta}(\Omega_\varphi)$.

On a donc pour $0 < \alpha < 1$, et comme les fonctions sont à support compact dans $\overline{\Omega_\varphi}$, il existe r_0 une constante finie, telle que:

$$\int_{\Omega_\varphi} \left|\rho^\alpha D^2 u\right|^2 dxdy = \int_0^\varphi \int_0^{r_0} \left|\rho^\alpha D^2 u\right|^2 dxdy \leq r_0^\alpha \int_0^\varphi \int_0^{r_0} \left|D^2 u\right|^2 dxdy \leq \int_0^\varphi \int_0^\infty \left|D^2 u\right|^2 dxdy$$

Or $D^2 u \in L^2(\Omega_\varphi)$.

Donc: $\rho^\alpha D^2 u \in L^2(\Omega_\varphi)$ et $u \in E_\alpha(\Omega_\varphi)$. ■

Remarque 3.3.2 *L'espace $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ est un espace intermédiaire entre les espaces $H^1_0(\Omega_\varphi)$ et $H^2_0(\Omega_\varphi)$.*

3.4 Etude de l'existence des solutions

3.4.1 Inégalité à priori

Le théorème suivant nous permet d'étudier l'existence de la solution du problème (3.1.2) dans l'espace $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$.

Théorème 3.4.1 *Soient E, F, G trois espaces de Banach réflexifs, tel que E s'injecte dans G et cette injection est compacte, et soit L un opérateur linéaire continu de E dans F. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

C1.*L'image de L est fermée dans F et L a un noyau de dimension finie.*

C2.*Il existe une constante $K > 0$, telle que:*

$$\|u\|_E \leq K\left(\|Lu\|_F + \|u\|_G\right) \tag{3.4.1}$$

Démonstration.

On montre d'abord que la condition **C2** implique la condition **C1**.

Pour cela, on suppose qu'il existe une constante $K > 0$, telle que:

$$\|u\|_E \leq K\left(\|Lu\|_F + \|u\|_G\right)$$

Donc: Le noyau de L est de dimension finie car la boule unité dans $\ker(L)$ est compacte.

Reste à montrer que l'image de L est fermée dans F.

On pose: $N = \ker(L)$.

On a:

$$L : E \longrightarrow F$$

et N est de dimension finie.

D'où: E se décompose en somme directe c.-à-d.

$$E = N \oplus M$$

Donc: La restriction de L à M est injective.

On vérifie qu'il existe une constante $C > 0$, telle que:

$$\|u\|_E \leq C\,\|u\|_G\,, \forall u \in M \tag{3.4.2}$$

On raisonne par l'absurde; c.-à-d. on montre que:

$$\forall C_1 > 0, \exists u \in M \text{ tq } \|u\|_E > C\ \|u\|_G$$

En tenant compte que E s'injecte de façon compacte dans G et que

$$\exists K > 0 \text{ tq } \|u\|_E \leq K\left(\|Lu\|_F + \|u\|_G\right)$$

On obtient alors que: l'image de L est fermée dans G.

En effet, on choisit une suite $(u_n)_n \subset \mathrm{Im}(L)$ tq $u_n \longrightarrow v$ dans G.

Alors il existe une suite $(v_n)_n \subset N$ tq $Lv_n = u_n$.

Et d'après (3.4.2) , on en déduit que: $v_n \longrightarrow v$ dans N.

D'où:

$$Lv = u$$

Donc:

$$u \in \mathrm{Im}(L)$$

On montre que la condition **C1** entraîne la condition **C2**.

On a par hypothèse, le noyau de L est de dimension finie, d'où:

$$E = N \oplus M$$

La restriction de L à M est injective et surjective.

Le théorème du graphe fermé, nous donne:

$$\exists C_1 > 0 \text{ tq } \|u\|_E \leq C_1 \|u\|_G \ , \forall u \in M \tag{3.4.3}$$

On vérifie que:

$$\exists C_2 = conste > 0 \text{ telle que: } \|u\|_E \leq C_2 \|u\|_F \ , \forall u \in N \tag{3.4.4}$$

En raisonnant par l'absurde de (3.4.4) et en utilisant l'hypothèse que l'injection de E dans F est compact, il résulte que si $u \in E$ et $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in N$ et $u_2 \in M$.

Les inégalités (3.4.3) et (3.4.4) donnent l'inégalité (3.4.1) , d'où le résultat. ■

On applique le théorème précédent (3.4.1) au problème (3.1.2) , on obtient:

$$E = E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi), \ F = L^2(\Omega_\varphi), \ G = H_0^1(\Omega_\varphi)$$

L étant l'opérateur $\rho^\alpha \Delta$.

Puisque $L^2(\Omega_\varphi)$ et $H_0^1(\Omega_\varphi)$ sont deux espaces de Hilbert, ceux sont donc deux espaces de Banach réflexifs.

De plus, l'opérateur $\rho^\alpha \Delta$ est linéaire et continu.

D'où montrons d'abord que:

$$E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi) \text{ est un espace de Banach réflexif}$$

Démonstration.

On considère donc une suite de Cauchy $(u_n)_n$ dans $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ qui converge vers u dans

$H_0^1(\Omega_\varphi)$.

On montre que:

$$u \in E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$$

On a:

$$(u_n)_n \overset{converge}{\longrightarrow} u \text{ dans } H_0^1(\Omega_\varphi)$$

Ceci implique que:

$$\left(u_n, \frac{\partial u_n}{\partial \rho}, \frac{\partial u_n}{\partial \eta}\right) \overset{converge}{\longrightarrow} \left(u, \frac{\partial u}{\partial \rho}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \text{ dans } L^2(\Omega_\varphi)$$

En outre:

$$L^2(\Omega_\varphi) \underset{continue}{\hookrightarrow} D'$$

Donc:

$$\left(u_n, \frac{\partial u_n}{\partial \rho}, \frac{\partial u_n}{\partial \eta}\right) \overset{converge}{\longrightarrow} \left(u, \frac{\partial u}{\partial \rho}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \text{ dans } D'$$

Or l'opérateur de dérivation étant continu, d'où:

$$\left(u_n, \frac{\partial u_n}{\partial \rho}, \frac{\partial u_n}{\partial \eta}\right) \overset{converge}{\longrightarrow} \left(u, \frac{\partial u}{\partial \rho}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \text{dans } D'(\Omega_\varphi)$$

Notons que:

$$(u_n)_n \subset E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$$

Ceci implique que:

$$\left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial \rho^2}, \frac{\partial^2 u_n}{\partial \rho \partial \eta}, \frac{\partial^2 u_n}{\partial \eta^2}\right) \subset L^2(\Omega_\varphi)$$

qui est complet, ce qui donne:

$$\left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial \rho^2}, \frac{\partial^2 u_n}{\partial \rho \partial \eta}, \frac{\partial^2 u_n}{\partial \eta^2}\right)$$

converge vers

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \eta}, \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) \text{dans } L^2(\Omega_\varphi)$$

Donc: L'espace $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ est fermé dans $H_0^1(\Omega_\varphi)$, d'où le résultat. ■

Reste à vérifier que:

$$E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi) \underset{compacte}{\hookrightarrow} H_0^1(\Omega_\varphi)$$

C'est à dire montrons la proposition suivante:

Proposition 3.4.1 *L'injection de l'espace* $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ *dans* $H_0^1(\Omega_\varphi)$ *est compacte.*

Démonstration.

Ce résultat est démontré pour $\alpha = 1$ dans [12]. La démonstration est exactement la même pour $0 < \alpha \leq 1$. ■

Donc toutes les hypothèses du théorème (3.4.1) sont vérifiées.

L'inégalité suivante nous permet de montrer la première condition, c.-à-d. on vérifie que l'image de l'opérateur $\rho^\alpha \Delta$ est fermée dans $L^2(\Omega_\varphi)$ et que son noyau est de dimension finie, d'où:

$$\|u\|_{E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)} \leq K \left(\|Lu\|_{L^2(\Omega_\varphi)} + \|u\|_{H_0^1(\Omega_\varphi)} \right) \tag{3.4.5}$$

L'inégalité (3.4.5) sera établie grâce à la proposition suivante:

Proposition 3.4.2

$$\forall u \in E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi) : (2\alpha - 1) \left\| \rho^{\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right\| \leq \left\| \rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \right\|$$

Démonstration.

On a:

$$\begin{aligned}
\left\| \rho^{\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \right\|^2 &\geq 0 \Longrightarrow \left\langle \rho^{\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}, \rho^{\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \right\rangle \geq 0 \\
&\Longrightarrow \left\| \rho^{\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right\|^2 + \left\| \rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \right\|^2 + 2 \left\langle \rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}, \rho^{\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right\rangle \geq 0 \\
&\Longrightarrow \left\| \rho^{\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right\|^2 + \left\| \rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \right\|^2 + 2 \int_{\Omega_\varphi} \rho^{2\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \frac{\partial u}{\partial \rho} d\rho d\theta \geq 0 \qquad (*)
\end{aligned}$$

De plus:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \right)^2 \right] = \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \right] = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \frac{\partial u}{\partial \rho}$$

D'où:

$$2 \int_{\Omega_\varphi} \rho^{2\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \frac{\partial u}{\partial \rho} d\rho d\theta = \int_{\Omega_\varphi} \rho^{2\alpha} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \right)^2 \right] d\rho d\theta = \int_0^\varphi \left[\int_0^\infty \rho^{2\alpha} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \right)^2 \right] d\rho \right] d\theta$$

On intègre G par parties par rapport à la variable ρ, telle que:

$$G=\int_0^{\varphi}\left[\int_0^{\infty}\rho^{2\alpha}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)^2\right]d\rho\right]d\theta$$

On pose:

$$\begin{cases} f'=\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)^2\right] & \Longrightarrow\quad f=\left(\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)^2\\ g=\rho^{2\alpha} & \Longrightarrow\quad g^{'}=2\alpha\rho^{2\alpha-1}\end{cases}$$

D'où:

$$G=\int_0^{\varphi}\left[\left[\rho^{2\alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)^2\right]_0^{\infty}-\int_0^{\infty}2\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)^2\rho^{2\alpha-1}d\rho\right]d\theta$$

En tenant compte que les fonctions sont à support compact dans $\overline{\Omega_{\varphi}}$, il vient:

$$\begin{aligned}\int_0^{\varphi}\left[-\int_0^{\infty}2\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)^2\rho^{2\alpha-1}d\rho\right]d\theta &= -2\alpha\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)^2\rho^{2\alpha-1}d\rho d\theta\\ &= -2\alpha\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\left(\rho^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)^2\rho d\rho d\theta=-2\alpha\left\|\rho^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial\rho}\right\|^2\end{aligned}$$

On remplace dans $(*)$, on obtient:

$$\left\|\rho^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial\rho}\right\|^2+\left\|\rho^{\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\right\|^2-2\alpha\left\|\rho^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial\rho}\right\|^2\geq 0\Longrightarrow\left\|\rho^{\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\right\|^2\geq(2\alpha-1)\left\|\rho^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial\rho}\right\|^2$$

C.-à-d.

$$(2\alpha-1)\left\|\rho^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial\rho}\right\|^2\leq\left\|\rho^{\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\right\|^2$$

Ceci achève la démonstration de la proposition (3.4.2) . ■

Montrons maintenant l'inégalité (3.4.5) .

Démonstration.

Pour ceci, calculons $\|\rho^{\alpha}\Delta u\|^2$:

$$\|\rho^{\alpha}\Delta u\|^2 = \left\langle \rho^{\alpha}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right), \rho^{\alpha}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right)\right\rangle$$

$$= \left(\begin{array}{l} \left\|\rho^{\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\right\|^2+\left\|\rho^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial \rho}\right\|^2+\left\|\rho^{\alpha-2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right\|^2+ \\ +2\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\rho^{2\alpha}\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}d\rho d\theta+ \\ +2\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\rho^{2\alpha-1}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}d\rho d\theta+ \\ +2\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\rho^{2\alpha-2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\frac{\partial u}{\partial \rho}d\rho d\theta \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{l} \left\|\rho^{\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\right\|^2+\left\|\rho^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial \rho}\right\|^2+\left\|\rho^{\alpha-2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right\|^2+ \\ +2\underbrace{\left(\int_{\Omega_{\varphi}}\rho^{2\alpha}\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}d\rho d\theta\right)}_{I}+2\underbrace{\left(\int_{\Omega_{\varphi}}\rho^{2\alpha-1}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}d\rho d\theta\right)}_{J}+ \\ +2\underbrace{\left(\int_{\Omega_{\varphi}}\rho^{2\alpha-2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\frac{\partial u}{\partial \rho}d\rho d\theta\right)}_{K} \end{array}\right)$$

Posons:

$$I=\int_{\Omega_{\varphi}}\rho^{2\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\frac{\partial u}{\partial \rho}d\rho d\theta,\ J=\int_{\Omega_{\varphi}}\rho^{2\alpha-1}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}d\rho d\theta,\ K=\int_{\Omega_{\varphi}}\rho^{2\alpha-2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\frac{\partial u}{\partial \rho}d\rho d\theta$$

Le calcul de I par intégration par parties donne:

$$I = \int_0^{\varphi} \left[\rho^{\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\right]_0^{\infty} d\theta - \int\limits_{\Omega_\varphi} \left[2\alpha \rho^{\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial \rho}\right] \frac{\partial u}{\partial \rho} d\rho d\theta$$

On remarque que la première expression est nulle, car les fonctions sont à support compact, d'où:

$$I = -2\alpha \int\limits_{\Omega_\varphi} \rho^{2\alpha-2} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \rho d\rho d\theta - I$$

C'est à dire:

$$I = -\alpha \left\| \rho^{\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right\|^2$$

Par le même procédé, on calcule J et K. On fait une première intégration par partie par rapport à ρ, puis une seconde intégration par partie par rapport à θ, et en tenant compte des conditions aux limites et du fait que les fonctions sont à support compact, il vient:

$$J + K = (2 - 2\alpha) \left\| \rho^{\alpha-1} \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right\|^2 + \left\| \rho^{\alpha-1} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \theta} \right\|^2$$

D'où:

$$\left\| \rho^{\alpha} \Delta u \right\|^2 = \begin{pmatrix} \left\| \rho^{\alpha} \dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \right\|^2 + \left\| \rho^{\alpha-1} \dfrac{\partial u}{\partial \rho} \right\|^2 + \\ + \left\| \rho^{\alpha-2} \dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right\|^2 - 2\alpha \left\| \rho^{\alpha-1} \dfrac{\partial u}{\partial \rho} \right\|^2 + \\ +2 \left\| \rho^{\alpha-1} \dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \theta} \right\|^2 \end{pmatrix}$$

D'où on a:

$$\begin{aligned} \left\| \rho^{\alpha} \Delta u \right\|^2 + \|u\|_{H^1}^2 &= \begin{pmatrix} \|u\|_{E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)}^2 + \left\| \rho^{\alpha-1} \dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \theta} \right\|^2 + \\ + (1 - 2\alpha) \left\| \rho^{\alpha-1} \dfrac{\partial u}{\partial \rho} \right\|^2 + (2 - 2\alpha) \left\| \rho^{\alpha-1} \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial u}{\partial \theta} \right\|^2 \end{pmatrix} \\ &\geq \|u\|_{E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)}^2 + (1 - 2\alpha) \left\| \rho^{\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right\|^2 + \left\| \rho^{\alpha-1} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \theta} \right\|^2 \end{aligned}$$

Car l'expression

$$(2 - 2\alpha) \left\| \rho^{\alpha-1} \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right\|^2 \geq 0$$

Avec: $0 < \alpha < 1$.

On remarque directement que si $\alpha \leq \dfrac{1}{2}$ alors l'inégalité (3.4.5) est vérifiée, car

$$(1-2\alpha)\left\|\rho^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial \rho}\right\|^2 + \left\|\rho^{\alpha-1}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \theta}\right\|^2 \geq 0$$

Il reste à vérifier l'inégalité (3.4.5) , lorsque $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

On a:

$$(1-2\alpha)\left\|\rho^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial \rho}\right\|^2 + \left\|\rho^{\alpha-1}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \theta}\right\|^2 > -\left\|\rho^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial \rho}\right\|^2 + \left\|\rho^{\alpha-1}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \theta}\right\|^2$$

Il reste à montrer que:

$$\left\|\rho^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial \rho}\right\|^2 < \left\|\rho^{\alpha-1}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \theta}\right\|^2$$

Pour ceci il suffit d'utiliser la proposition (3.3.2) .

D'où il existe une constante $K_\varphi > 0$, qui vérifie:

$$\left\|\rho^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial \rho}\right\|^2 < K_\varphi \left\|\rho^{\alpha-1}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \theta}\right\|^2$$

On a donc le résultat désiré en choisissant une constante convenable M_φ et en prenant par exemple le maximum de 1 et $\dfrac{1}{K_\varphi}$, d'où:

$$M_\varphi \left(\|\rho^\alpha \Delta u\|^2 + \|u\|^2_{H^1(\Omega_\varphi)}\right) \geq \|u\|^2_{E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)}$$

On a donc une constante pour le cas $\alpha > \dfrac{1}{2}$ et une autre constante pour le cas $\alpha \leq \dfrac{1}{2}$.

Il existe donc une constante $C_{\alpha,\varphi} > 0$, qui dépend de α et de φ, qui vérifie l'inégalité (3.4.5) . ■

3.4.2 Existence de la solution du problème (3.1.2)

Les inégalités relatives à la condition de Dirichlet étant établies, donc d'après le théorème (3.4.1) , on a l'image de l'opérateur $\rho^\alpha \Delta$ est fermée dans $L^2(\Omega_\varphi)$ et le noyau du problème (3.1.2) est de dimension finie dans $E_\alpha(\Omega_\varphi)$.

On en déduit que le problème (3.1.2) admet au moins une solution dans l'espace $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$.

3.5 Etude de l'unicité de la solution

3.5.1 Etude du noyau du problème (3.1.2)

Question:

La solution du problème (3.1.2) est-elle unique dans l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$?

Réponse:

On se propose de calculer le noyau du problème (3.1.2) .

On sait que le noyau du problème (3.1.2) est de dimension finie (d'après le théorème (3.4.1)).

Les éléments du noyau du problème (3.1.2) sont solution du problème suivant:

$$\begin{cases} \rho^\alpha \Delta u = 0 & \text{dans} \quad \Omega_\varphi \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{3.5.1}$$

qui est équivalent au problème:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans} \quad \Omega_\varphi \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{3.5.2}$$

La résolution de ce problème repose sur ce qui suit:

$$\langle \Delta u, u \rangle_{L^2} = \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, u \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, u \right\rangle$$

La dérivation est au sens des distributions.

D'où:

$$\langle \Delta u, u \rangle = -\left\langle \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} \right\rangle = -\left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^2}^2 - \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^2}^2$$

Mais: $\Delta u = 0$ dans Ω_φ.

Donc:

$$\langle \Delta u, u \rangle = 0 \Longrightarrow -\left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 - \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|^2 = 0 \Longrightarrow u = conste$$

Or sur Γ_φ, $u = 0$ (par hypothèse).

Donc: $u = 0$ dans $H^1(\Omega_\varphi)$.

Ce qui implique que: $u = 0$ dans $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$.

D'où: Le noyau du problème (3.1.2) est réduit au singleton $\{0\}$ dans $E_\alpha(\Omega_\varphi)$.

Ce qui veut dire que l'opérateur $\rho^\alpha\Delta$ est injectif sur l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$.

Donc: La solution du problème (3.1.2) est unique dans l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$.

CHAPITRE 4

Etude du problème adjoint

4.1 Etude de l'espace dual

On se propose de trouver l'espace dual de l'espace $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$, qui d'après la proposition (3.3.5), s'identifie à l'espace $G_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ défini par la relation suivante:

$$G_{\alpha,0}(\Omega_\varphi) = \left\{ u \in H_0^1(\Omega_\varphi),\ \text{telle que } \rho^\alpha u \in H_0^2(\Omega_\varphi) \right\}$$

Par la suite, on explicitera l'espace dual de l'espace $G_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$.

On a la proposition suivante:

Proposition 4.1.1 *Le dual de l'espace $G_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ qu'on note par $G_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$, s'écrit de la manière suivante:*

$$G_{-\alpha}(\Omega_\varphi) = \left\{ u \in H^{-1}(\Omega_\varphi),\ \textit{telle que } \rho^{-\alpha} u \in H^{-2}(\Omega_\varphi) \right\} \tag{4.1.1}$$

On a évidemment $G_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$ est identique au dual de l'espace $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$, qu'on note par $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$.
On ne fera pas désormais de différence entre $G_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$ et $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$.

Démonstration.

On a:

$$G_{\alpha,0}(\Omega_\varphi) = \left\{ u \in H_0^1(\Omega_\varphi),\ \text{telle que } \rho^\alpha u \in H_0^2(\Omega_\varphi) \right\}$$

Et comme le dual de l'espace $H_0^1(\Omega_\varphi)$ est $H^{-1}(\Omega_\varphi)$ et le dual de l'espace $H_0^2(\Omega_\varphi)$ est l'espace $H^{-2}(\Omega_\varphi)$, alors on peut écrire:

$$\langle u, v\rangle = \int_{\Omega_\varphi} uv\rho d\rho d\theta = \int_{\Omega_\varphi} (\rho^\alpha u)\left(\rho^{-\alpha} v\right) \rho d\rho d\theta$$

D'où la mise en dualité des espaces $H_0^1(\Omega_\varphi); H^{-1}(\Omega_\varphi)$ et $H_0^2(\Omega_\varphi); H^{-2}(\Omega_\varphi)$ (respectivement).

Or:

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega_\varphi) \\ \rho^\alpha u \in H_0^2(\Omega_\varphi) \end{cases}$$

Ce qui implique que:

$$\begin{cases} v \in H^{-1}(\Omega_\varphi) \\ \rho^{-\alpha} v \in H^{-2}(\Omega_\varphi) \end{cases}$$

■

Proposition 4.1.2 *Muni de la norme du graphe suivante:*

$$\|u\|_{E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)} = \|u\|_{H^{-1}(\Omega_\varphi)} + \left\|\rho^{-\alpha} u\right\|_{H^{-2}(\Omega_\varphi)} \tag{4.1.2}$$

L'espace $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$ est un espace de Hilbert.

Démonstration.

On a:

$$E_{-\alpha}(\Omega_\varphi) = \left\{u \in H^{-1}(\Omega_\varphi), \text{ telle que } \rho^{-\alpha} u \in H^{-2}(\Omega_\varphi)\right\}$$

Il est clair que $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$ est un espace de Banach, donc complet.

Il reste à définir dessus un produit scalaire, d'où posons:

$$\langle u, v\rangle_{E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)} = \langle u, v\rangle_{H^{-1}(\Omega_\varphi)} + \left\langle \rho^\alpha u, \rho^{-\alpha} v\right\rangle_{H^{-2}(\Omega_\varphi)}$$

Ceci défini un produit scalaire dans $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$. ■

Remarques

1. D'après [18], on a:

$$\forall m \in \mathbb{N} : L^2(\Omega_\varphi) \underset{compacte}{\hookrightarrow} H^{-m}(\Omega_\varphi)$$

En particulier, pour $m = 1$, on a:

$$L^2(\Omega_\varphi) \underset{compacte}{\hookrightarrow} H^{-1}(\Omega_\varphi)$$

2. Pour tout s réel, les espaces de Sobolev H^s sont des espaces de Hilbert, donc réflexifs [8].

3. L'espace $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$ est intermédiaire entre $H^{-1}(\Omega_\varphi)$ et $H^{-2}(\Omega_\varphi)$, ce qui veut dire qu'on a:
$$H^{-1}(\Omega_\varphi) \subset E_{-\alpha}(\Omega_\varphi) \subset H^{-2}(\Omega_\varphi) \tag{4.1.3}$$

4.2 Une Nouvelle Norme dans $H^{-2}(\Omega_\varphi)$

Dans ce qui suit, on introduira un nouvelle norme dans $H^{-2}(\Omega_\varphi)$ et par la suite, on la définira et on montrera l'équivalence avec la norme usuelle de $H^{-2}(\Omega_\varphi)$.

Pour ceci, on utilisera les fonctions développables en séries de Fourier et la transformation de Mellin.

Soit v une fonction développable en série de Fourier.

On pose:
$$v(\rho,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(\rho,\theta)\exp\left(\frac{in\pi}{\varphi}\theta\right)$$
Sa transformée de Mellin est donnée par:
$$\widetilde{v}(\sigma,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widetilde{a_n}(\sigma,\theta)\exp\left(\frac{in\pi}{\varphi}\theta\right)$$
Notons que l'ensemble des fonctions développables en séries de Fourier forment un sous espace dense dans L^2.

Et d'après [18], l'espace L^2 est dense dans H^{-2}.

Donc, d'après [20] et [27], les fonctions développables en séries de Fourier forment un sous espace dense dans H^{-2}.

Définition 4.2.1 *On définit une nouvelle norme dans H^{-2} de la fonction v, par la formule suivante:*

$$\|v\|^2_{H^{-2}(\Omega_\varphi)} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\varphi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\frac{\widetilde{a_n}(\sigma+2)\exp\left(\dfrac{in\pi}{\varphi}\theta\right)}{1+|\sigma+2|^2+\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2}\right|^2 d\theta d\nu \quad avec\ \sigma = 1+i\nu \qquad (4.2.1)$$

Rappel

En général, la norme usuelle de $H^m(\Omega)$, m entier positif, étant défini par:

$$\|u\|^2_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\beta|\leq m}\left\|D^\beta u\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \qquad (4.2.2)$$

Où D représente l'opérateur de dérivation par rapport aux variables x et y.

En prolongeant à $\mathbb{R}^2$, les fonctions par 0, (Ce prolongement existe et est continu), on montre que la norme définie par (4.2.2) , est équivalente à la norme définie à partir de la transformation de Fourier comme suit:

$$\|u\|^2_{H^m(\mathbb{R}^2)} = \left\|\left(1+\xi^2+\zeta^2\right)^m\ \widehat{u}\right\|^2 \qquad (4.2.3)$$

Où

$$\widehat{u}(\xi,\zeta) = \int_{\mathbb{R}^2} u(x,y)\exp(i\xi\zeta xy)\,dxdy \qquad (4.2.4)$$

Remarque 4.2.1 *La formule suivante est, en quelques sortes, l'équivalent du théorème de Plancherel pour la transformation de Mellin:*

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega_\varphi)} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\varphi}|\widetilde{u}(\sigma,\theta)|^2\,d\theta d\nu\ = \int_0^{\varphi}\|\widetilde{u}(.,\theta)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\,d\theta \ avec\ \sigma=1+i\nu \qquad (4.2.5)$$

Où $\widetilde{u}$ est la transformée de Mellin de la fonction u.

4.2.1 Démonstration de l'équivalence des deux normes de H^{-2}

On se propose de montrer que la norme de H^{-2}, définie par la relation (4.2.1) est équivalente à la norme usuelle de H^{-2} celle définie par la relation (4.2.3) , avec $m=-2$.

Il s'agit donc de montrer l'existence de deux constantes K_1 et K_2 strictement positives et qui vérifient:

$$|||u|||^2_{H^{-2}} \leq K_1\|u\|^2_{H^{-2}} \quad et \quad \|u\|^2_{H^{-2}} \leq K_2\,|||u|||^2_{H^{-2}}$$

Où

$\|u\|^2_{H^{-2}}$: est la norme de u définie par la formule (4.2.3) comme suit:

$$\|u\|^2_{H^{-2}} = \left\| \frac{\widehat{u}}{\left(1+\xi^2+\zeta^2\right)^2} \right\|^2$$

et

$|||u|||^2_{H^{-2}}$: est la norme de u définie par la formule (4.2.1) comme suit:

$$|||u|||^2_{H^{-2}(\Omega_\varphi)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\varphi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \frac{\widetilde{a_n}(\sigma+2)\exp\left(\frac{in\pi}{\varphi}\theta\right)}{1+|\sigma+2|^2+\left(\frac{n\pi}{\varphi}\right)^2} \right|^2 d\theta d\nu \quad \text{avec } \sigma = 1+i\nu$$

Montrons d'abord que:

$$\exists\ K_1 = conste > 0 \text{ telle que:} \qquad |||u|||^2_{H^{-2}} \leq K_1 \|u\|^2_{H^{-2}}$$

Démonstration.

Soient v et w deux fonctions développables en séries de Fourier.

Le développement en série de Fourier de la fonction v est:

$$v = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n(\rho)\exp\left(\frac{in\pi}{\varphi}\theta\right)$$

Sa transformée de Mellin est donnée par:

$$\widetilde{v}(\sigma,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widetilde{C_n}(\sigma)\exp\left(\frac{in\pi}{\varphi}\theta\right)$$

On pose:

$$v = \frac{\widehat{u}}{1+\xi^2+\zeta^2}$$

et

$$w = \widetilde{v}(\sigma+2,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\widetilde{C_n}(\sigma+2)\exp\left(\frac{in\pi}{\varphi}\theta\right)}{1+|\sigma+2|^2+\left(\frac{n\pi}{\varphi}\right)^2} \right]$$

Or, d'après la proposition (4.1.1) , il en résulte que:

$$v \in L^2(\Omega_\varphi)\,,\ w \in L^2(\Omega_\varphi)\ \ et\ u \in H^{-2}(\Omega_\varphi)$$

Calculons la norme dans L^2 de la fonction v en utilisant la formule (4.2.5) :

$$\begin{aligned}
\|v\|^2_{L^2(\Omega_\varphi)} &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\varphi} |\,\widetilde{v}(\sigma,\theta)|^2\, d\theta d\nu \text{ avec } \sigma = 1+i\nu \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\varphi} \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widetilde{C_n}(\sigma)\exp\left(\frac{in\pi}{\varphi}\theta\right)\right|^2 d\theta d\nu \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\varphi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\,\widetilde{C_n}(\sigma)\right|^2 \left|\,\exp\left(\frac{in\pi}{\varphi}\theta\right)\right|^2 d\theta d\nu
\end{aligned}$$

Mais:

$$\left|\exp\left(\frac{in\pi}{\varphi}\theta\right)\right| = 1$$

D'où:

$$\|v\|^2_{L^2(\Omega_\varphi)} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\varphi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\widetilde{C_n}(\sigma)\right|^2 d\theta d\nu \quad \text{avec } \sigma = 1+i\nu \tag{4.2.6}$$

Comme la série de Fourier de la fonction v est uniformément convergente vers v, appliquons donc le théorème de Fubini comme suit:

$$\begin{aligned}
\|v\|^2_{L^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\varphi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\widetilde{C_n}(\sigma)\right|^2 d\theta d\nu = \int_0^{\varphi}\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\widetilde{C_n}(\sigma)\right|^2 d\nu d\theta \\
&= \left(\int_0^{\varphi} d\theta\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\widetilde{C_n}(\sigma)\right|^2 d\nu\right) = \left([\theta]_0^{\varphi}\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\widetilde{C_n}(\sigma)\right|^2 d\nu\right)
\end{aligned}$$

On obtient donc:

$$\|v\|^2_{L^2} = \varphi\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\widetilde{C_n}(\sigma)\right|^2 d\nu \quad \text{avec } \sigma = 1+i\nu \tag{4.2.7}$$

On a:

$$w = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\widetilde{C_n}(\sigma+2)\exp\left(\frac{in\pi}{\varphi}\theta\right)}{1+|\sigma+2|^2+\left(\frac{n\pi}{\varphi}\right)^2}\right] \tag{4.2.8}$$

Ce qui implique que:

$$\begin{aligned}
\|w\|^2_{L^2(\Omega_\varphi)} &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\varphi}\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left[\frac{\widetilde{C_n}(\sigma+2)\exp\left(\dfrac{in\pi}{\varphi}\theta\right)}{1+|\sigma+2|^2+\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2}\right]\right|^2 d\theta d\nu \\
&\Longrightarrow \|w\|^2_{L^2(\Omega_\varphi)} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\varphi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\frac{\widetilde{C_n}(\sigma+2)}{1+|\sigma+2|^2+\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2}\right|^2 d\theta d\nu \\
&\Longrightarrow \|w\|^2_{L^2} = \ |||u|||^2_{H^{-2}}
\end{aligned}$$

Compte tenu de la proposition (4.1.1) , la fonction w peut s'écrire de la manière suivante:

$$w = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\left[P_2(\sigma)-\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2\right]}{\left[1+|\sigma+2|^2+\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2\right]}\widetilde{C_n}(\sigma) \tag{4.2.9}$$

En dérivant deux fois par rapport à la variable σ, on obtient un polynôme du second degré de la variable σ, qu'on note: $P_2(\sigma)$.

On remarque que:

$$A(\sigma) = \frac{\left[P_2(\sigma)-\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2\right]}{\left[1+|\sigma+2|^2+\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2\right]}$$

est borné par rapport aux variables σ et θ, d'où:

$$\|\widetilde{w}\|^2_{\widetilde{L^2}} \leq C_1^2\,\|\widetilde{v}\|^2_{\widetilde{L^2}} \tag{4.2.10}$$

Où:

$$C_1 = \sup|A(\sigma)|$$

et $\widetilde{L^2}$: est l'espace transformé par la transformation de Mellin de l'espace L^2.

Or:

$$\|\widetilde{w}\|^2_{\widetilde{L^2}} = \|u\|^2_{H^{-2}}$$

On obtient donc l'expression suivante:

$$|||u|||_{H^{-2}}^2 \leq C_1^2 \, \|v\|_{L^2}^2 \tag{4.2.11}$$

Et en utilisant la proposition (4.1.1) ainsi que le théorème de Plancherel [18], on obtient:

$$\|v\|_{L^2}^2 = \|\widehat{v}\|_{L^2}^2 = \|u\|_{H^{-2}}^2$$

Au final, on a:

$$\exists \ K_1 = C_1^2 = conste > 0 \text{ telle que: } \quad |||u|||_{H^{-2}}^2 \leq K_1 \ \|u\|_{H^{-2}}^2$$

La démonstration de la deuxième inégalité c.-à-d.

$$\exists \ K_2 = conste > 0 \text{ telle que: } \quad \|u\|_{H^{-2}}^2 \leq K_2 \ |||u|||_{H^{-2}}^2$$

se fait exactement de la même manière.
D'où l'équivalence des normes définies par (4.2.1) et (4.2.3) avec $m = -2$ respectivement.
■

4.3 Etude de l'existence de la solution

On se propose d'étudier l'existence de la solution du problème (4.4.1) dans l'espace $L^2(\Omega_\varphi)$.

Pour cela, on étudiera la fermeture de l'image de l'opérateur P (Tel que P désigne l'adjoint de l'opérateur $\rho^\alpha \Delta$ c.-à-d. $P = (\rho^\alpha \Delta)^*$) dans l'espace $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$.

4.3.1 Inégalité à priori

L'étude de l'existence des solutions du problème (4.4.1) avec la condition de Dirichlet homogène dans l'espace $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$, sera basée sur le théorème (3.4.1) .

Afin de montrer que l'image de P est fermée dans $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$, on établie une inégalité à priori du type:

$$\exists \ K = conste > 0 \text{ telle que: } \ \|u\|_{L^2(\Omega_\varphi)} \leq K \left(\|Pu\|_{E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)} + \|u\|_{H^{-1}(\Omega_\varphi)} \right) \tag{4.3.1}$$

On applique le théorème (3.4.1) , aux espaces E, F et G tels que:

$$E = L^2(\Omega_\varphi), \; F = E_{-\alpha}(\Omega_\varphi) \text{ et } G = H^{-1}(\Omega_\varphi)$$

Toutes les hypothèses du théorème (3.4.1) sont vérifiées.

Remarques

1. Dans tout ce qui suit les normes sans indices sont celles de l'espace $L^2(\Omega_\varphi)$, tandis que les normes dans $H^m(\Omega_\varphi)$ avec $m \in \mathbb{N}$, seront notées par $\|.\|_{m,\Omega_\varphi}$.

2. En utilisant la norme définie par (4.1.2) (Norme du graphe), sur l'espace $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$, on trouve:

$$\|Pu\|_{E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)} = \|Pu\|_{H^{-1}(\Omega_\varphi)} + \left\|\rho^{-\alpha}Pu\right\|_{H^{-2}(\Omega_\varphi)} \tag{4.3.2}$$

Compte tenu de l'inégalité (4.3.2) , établissons donc l'inégalité suivante:

$$\exists\ K_2 = conste > 0 \text{ telle que: } \|u\|_{L^2(\Omega_\varphi)} \leq K_2\left(\left\|\rho^{-\alpha}Pu\right\|_{H^{-2}(\Omega_\varphi)} + \|u\|_{H^{-1}(\Omega_\varphi)}\right) \tag{4.3.3}$$

4.3.2 Démonstration de l'inégalité (4.3.3)

Soit une fonction u développable en série de Fourier.

Son développement en série de Fourier est donné par:

$$u(\rho,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n(\rho)\exp\left(\frac{in\pi}{\varphi}\theta\right)$$

Sa transformée de Mellin s'écrit:

$$\begin{aligned}
\widetilde{u}(\sigma,\theta) &= \int_0^{+\infty} u\rho^\sigma\frac{d\rho}{\rho} = \int_0^{+\infty}\left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n(\rho)\exp\left(\frac{in\pi}{\varphi}\theta\right)\right]\rho^\sigma\frac{d\rho}{\rho} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^{+\infty} C_n(\rho)\exp\left(\frac{in\pi}{\varphi}\theta\right)\rho^\sigma\frac{d\rho}{\rho} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\exp\left(\frac{in\pi}{\varphi}\theta\right)\int_0^{+\infty} C_n(\rho)\rho^\sigma\frac{d\rho}{\rho} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\exp\left(\frac{in\pi}{\varphi}\theta\right)\widetilde{C}_n(\sigma)
\end{aligned}$$

C'est à dire:

$$\widetilde{u}(\sigma,\theta)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widetilde{C}_n(\sigma)\exp\left(\frac{in\pi}{\varphi}\theta\right)$$

Posons $\rho^{-\alpha}Pu=g$, avec $g\in H^{-2}(\Omega_\varphi)$ et calculons $\widetilde{\rho^{-\alpha}Pu}=\widetilde{g}$.

D'après (3.2.2) , on a:

$$(\rho^\alpha\Delta)^*=\rho^\alpha\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+(2\alpha+1)\rho^{\alpha-1}\frac{\partial}{\partial\rho}+\rho^{\alpha-2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\alpha^2\right)\tag{4.3.4}$$

$$\begin{aligned}
\rho^{-\alpha}Pu &= \rho^{-\alpha}\left[(\rho^\alpha\Delta)^*\right]u\\
&= \rho^{-\alpha}\left[\rho^\alpha\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+(2\alpha+1)\rho^{\alpha-1}\frac{\partial}{\partial\rho}+\rho^{\alpha-2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\alpha^2\right)\right]u\\
&= \rho^{-\alpha}\rho^\alpha\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+(2\alpha+1)\rho^{-\alpha}\rho^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\rho^{-\alpha}\rho^{\alpha-2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}+\rho^{-\alpha}\rho^{\alpha-2}\alpha^2u
\end{aligned}$$

Donc:

$$\rho^{-\alpha}Pu=\left[\frac{\alpha}{\rho}\right]^2u+\left[\frac{2\alpha+1}{\rho}\right]\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}\tag{4.3.5}$$

La transformée de Mellin de l'expression (4.3.5) , s'écrit:

$$\widetilde{\rho^{-\alpha}Pu}(\sigma)=\int_0^{+\infty}\left[\rho^{-\alpha}Pu\right]\ \rho^\sigma\ \frac{d\rho}{\rho}=\int_0^{+\infty}\left[\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^2u+\left(\frac{2\alpha+1}{\rho}\right)\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}\right]\rho^\sigma\ \frac{d\rho}{\rho}\tag{4.3.6}$$

En effectuant les calculs dans (4.3.6) , on trouve:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\rho^{-\alpha}Pu}(\sigma) &= \left(\begin{array}{l}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^2u\rho^\sigma\ \frac{d\rho}{\rho}+\int_0^{+\infty}\left(\frac{2\alpha+1}{\rho}\right)\frac{\partial u}{\partial\rho}\rho^\sigma\ \frac{d\rho}{\rho}+\\ \\ +\int_0^{+\infty}\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}\rho^\sigma\ \frac{d\rho}{\rho}+\int_0^{+\infty}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}\rho^\sigma\ \frac{d\rho}{\rho}\end{array}\right)\\
&= \left(\begin{array}{l}\alpha^2\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\rho^2}u\right)\rho^\sigma\ \frac{d\rho}{\rho}+(2\alpha+1)\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)\rho^\sigma\ \frac{d\rho}{\rho}+\\ \\ +\int_0^{+\infty}\left(\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}\right)\rho^\sigma\ \frac{d\rho}{\rho}+\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}\right)\rho^\sigma\ \frac{d\rho}{\rho}\end{array}\right)\\
&= \alpha^2\widetilde{\left(\frac{1}{\rho^2}u\right)}+(2\alpha+1)\widetilde{\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)}+\widetilde{\left(\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}\right)}+\widetilde{\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}\right)}
\end{aligned}$$

Mais:

$$\widetilde{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\right)}(\sigma,\theta) = (-1)^2 \prod_{i=1}^{2} (\sigma - i)\ \widetilde{u}(\sigma - 2) = (\sigma - 1)\ (\sigma - 2)\,\widetilde{u}(\sigma - 2, \theta)$$

D'où:

$$\widetilde{\rho^{-\alpha} P u}(\sigma) = \alpha^2 \widetilde{\left(\frac{1}{\rho^2} u\right)} + (2\alpha + 1) \widetilde{\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)} + (\sigma - 1)\ (\sigma - 2)\,\widetilde{u}(\sigma - 2, \theta) + \widetilde{\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right)}$$

Après transformation de Mellin, on obtient des fonctions $\widetilde{u}$ sous la forme $\widetilde{u}(\sigma - 2, \theta)$, avec $\widetilde{\rho^{-\alpha} P u}(\sigma) = \widetilde{g}(\sigma)$.

La translation $\sigma \longrightarrow \sigma + 2$, donne:

$$\widetilde{\rho^{-\alpha} P u}(\sigma + 2, \theta) = \widetilde{g}(\sigma + 2, \theta) = \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \theta^2}(\sigma, \theta) + (\sigma + \alpha)^2\ \widetilde{u}(\sigma, \theta) \tag{4.3.7}$$

Mais:

$$\begin{aligned}
\widetilde{u}(\sigma, \theta) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widetilde{C_n}(\sigma) \exp\left(\frac{in\pi}{\varphi}\theta\right) \\
&\Longrightarrow\ \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \theta}(\sigma, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{in\pi}{\varphi} \widetilde{C_n}(\sigma) \exp\left(\frac{in\pi}{\varphi}\theta\right) \\
&\Longrightarrow\ \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \theta^2}(\sigma, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{in\pi}{\varphi}\right)^2 \widetilde{C_n}(\sigma) \exp\left(\frac{in\pi}{\varphi}\theta\right) \\
&= -\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{n\pi}{\varphi}\right)^2\ \widetilde{C_n}(\sigma) \exp\left(\frac{in\pi}{\varphi}\theta\right)
\end{aligned}$$

$$\widetilde{\rho^{-\alpha} P u}(\sigma + 2, \theta) = (\sigma + \alpha)^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widetilde{C_n}(\sigma) \exp\left(\frac{in\pi}{\varphi}\theta\right) - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{n\pi}{\varphi}\right)^2 \widetilde{C_n}(\sigma) \exp\left(\frac{in\pi}{\varphi}\theta\right)$$

$$\widetilde{\rho^{-\alpha} P u}(\sigma + 2, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[(\sigma + \alpha)^2 - \left(\frac{n\pi}{\varphi}\right)^2\right] \widetilde{C_n}(\sigma) \exp\left(\frac{in\pi}{\varphi}\theta\right) \tag{4.3.8}$$

Calcul de $\|\rho^{-\alpha} P u\|^2_{H^{-2}(\Omega_\varphi)}$:

Compte tenu de l'expression (4.2.1) , on a:

$$
\begin{aligned}
\left\|\rho^{-\alpha}Pu\right\|^2_{H^{-2}(\Omega_\varphi)} &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\varphi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\frac{\widetilde{a_n}\left(\sigma+2,\theta\right)\ \exp\left(\dfrac{in\pi}{\varphi}\theta\right)}{1+\left|\sigma+2\right|^2+\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2}\right|^2 d\theta d\nu \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\varphi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\frac{\left[\left(\left(\sigma+\alpha\right)^2-\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2\right)\widetilde{C}_n\left(\sigma\right)\ \right]\exp\left(\dfrac{in\pi}{\varphi}\theta\right)}{1+\left|\sigma+2\right|^2+\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2}\right|^2 d\theta d\nu
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\varphi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\frac{\left(\sigma+\alpha\right)^2-\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2}{1+\left|\sigma+2\right|^2+\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2}\right|^2\left|\widetilde{C}_n\left(\sigma\right)\right|^2\left|\exp\left(\dfrac{in\pi}{\varphi}\theta\right)\right|^2 d\theta d\nu \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\varphi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\frac{\left(\sigma+\alpha\right)^2-\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2}{1+\left|\sigma+2\right|^2+\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2}\right|^2\left|\widetilde{C}_n\left(\sigma\right)\right|^2 d\theta d\nu
\end{aligned}
$$

On a donc:

$$
\left\|\rho^{-\alpha}Pu\right\|^2_{H^{-2}(\Omega_\varphi)} = \int_0^{\varphi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\frac{\left(\sigma+\alpha\right)^2-\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2}{1+\left|\sigma+2\right|^2+\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2}\right|^2\left|\widetilde{C}_n\left(\sigma\right)\right|^2 d\nu d\theta, \quad avec\ \sigma = 1+i\nu \tag{4.3.9}
$$

On pose:

$$
B\left(\sigma,n\right) = \left|\frac{\left(\sigma+\alpha\right)^2-\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2}{1+\left|\sigma+2\right|^2+\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2}\right| \tag{4.3.10}
$$

On remplace σ par $1+i\nu$, on obtient:

$$
\begin{aligned}
B(\sigma,n) &= \left|\frac{\left[(1+i\nu)+\alpha-\dfrac{n\pi}{\varphi}\right]\left[(1+i\nu)+\alpha+\dfrac{n\pi}{\varphi}\right]}{1+|(1+i\nu)+2|^2+\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2}\right| \\
&= \frac{\left|(1+i\nu)+\alpha-\dfrac{n\pi}{\varphi}\right|\left|(1+i\nu)+\alpha+\dfrac{n\pi}{\varphi}\right|}{1+|(1+i\nu)+2|^2+\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2} \\
&= \frac{\left|\left(1+\alpha-\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)+i\nu\right|\left|\left(1+\alpha+\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)+i\nu\right|}{10+\nu^2+\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2} \\
&= \frac{\left(\sqrt{\left(1+\alpha-\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2+\nu^2}\right)\left(\sqrt{\left(1+\alpha+\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2+\nu^2}\right)}{10+\nu^2+\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2}
\end{aligned}
$$

D'où:

$$
\lim_{(|\nu|,n)\longrightarrow(\infty,\infty)} B(\sigma,n) = \lim_{(|\nu|,n)\longrightarrow(\infty,\infty)} \frac{\left(\sqrt{\left(1+\alpha-\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2+\nu^2}\right)\left(\sqrt{\left(1+\alpha+\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2+\nu^2}\right)}{10+\nu^2+\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2} < \infty
$$

Donc: Le terme $B(\sigma,n)$ est borné par rapport à σ et n.

Cas où $B(\sigma,n)=0$:

$$
\begin{aligned}
B(\sigma,n) \quad &= \quad 0 \Longleftrightarrow \left|\frac{(\sigma+\alpha)^2-\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2}{1+|\sigma+2|^2+\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2}\right| = 0 \Longleftrightarrow \left|(\sigma+\alpha)^2-\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2\right| = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (\sigma+\alpha)^2-\left(\frac{n\pi}{\varphi}\right)^2 = 0 \Longleftrightarrow \sigma^2+\alpha^2+2\alpha\sigma-\left(\frac{n\pi}{\varphi}\right)^2 = 0 \qquad (*)
\end{aligned}
$$

En remplaçant σ par $1+i\nu$, on obtient:

$$(*) \iff (1+i\nu)^2+\alpha^2+2\alpha(1+i\nu)-\left(\frac{n\pi}{\varphi}\right)^2=0$$

$$\iff \left[1-\nu^2+\alpha^2+2\alpha-\left(\frac{n\pi}{\varphi}\right)^2\right]+i\left[2\nu+2\alpha\nu\right]=0$$

$$\iff \begin{cases} 2\nu+2\alpha\nu=0 & (1) \\ et & \\ 1-\nu^2+\alpha^2+2\alpha-\left(\frac{n\pi}{\varphi}\right)^2=0 & (2) \end{cases} \tag{4.3.11}$$

$$(1) \iff 2\nu+2\alpha\nu=0 \iff 2\nu(1+\alpha)=0$$

$$\iff [(\nu=0)\ \ ou\ \ (1+\alpha=0)] \iff [(\nu=0)\ \ ou\ \ (\alpha=-1)]$$

Or:

$$0<\alpha\leq 1$$

Donc:

$$\nu=0$$

On remplace par $\nu=0$ dans (2), on trouve:

$$(2) \iff 1+\alpha^2+2\alpha-\left(\frac{n\pi}{\varphi}\right)^2=0 \iff (1+\alpha)^2=\left(\frac{n\pi}{\varphi}\right)^2$$

$$\iff |1+\alpha|=\left|\frac{n\pi}{\varphi}\right| \iff 1+\alpha=\frac{|n|\,\pi}{\varphi} \iff \varphi=\frac{|n|\,\pi}{1+\alpha}$$

Or:

$$\varphi<2\pi$$

D'où:

$$\frac{|n|\,\pi}{1+\alpha} \ < \ 2\pi$$

Ce qui veut dire que: $\dfrac{|n|}{1+\alpha} < 2$, qui est un cas très particulier, on se restreint donc au cas:

$$B(\sigma, n) = 0 \Longleftrightarrow \nu = 0$$

Décomposons l'intégrale dans la formule (4.3.9) , en deux parties, la première sur l'ensemble $\{\nu \in \mathbb{R}/ |\nu| > 1\}$, et la seconde sur le compact $\{\nu \in \mathbb{R}/ |\nu| \leq 1\}$, comme suit:

$$\begin{aligned}
\left\|\rho^{-\alpha} P u\right\|_{H^{-2}(\Omega_\varphi)}^2 &= \int_0^\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \frac{(\sigma+\alpha)^2 - \left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2}{1+|\sigma+2|^2+\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2} \right|^2 \left|\widetilde{C}_n(\sigma)\right|^2 d\nu d\theta \\
&= \left(\begin{array}{c}
\int_0^\varphi \int_{|\nu|>1} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \dfrac{(\sigma+\alpha)^2 - \left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2}{1+|\sigma+2|^2+\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2} \right|^2 \left|\widetilde{C}_n(\sigma)\right|^2 d\nu d\theta + \\
+ \int_0^\varphi \int_{|\nu|\leq 1} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \dfrac{(\sigma+\alpha)^2 - \left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2}{1+|\sigma+2|^2+\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2} \right|^2 \left|\widetilde{C}_n(\sigma)\right|^2 d\nu d\theta
\end{array} \right)
\end{aligned}$$

1ier cas : $|\boldsymbol{\nu}| > 1$

On a:

$$B(\sigma, n) \text{ est borné} \Longrightarrow B(\sigma, n) \text{ est minoré}$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{l}
\exists C_{1,1} = conste > 0 \text{ telle que:} \\
B(\sigma, n) = \left| \dfrac{(\sigma+\alpha)^2 - \left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2}{1+|\sigma+2|^2+\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2} \right| \geq C_{1,1}
\end{array} \right)$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{l} \exists C_1 = [C_{1,1}]^2 > 0 \text{ telle que:} \\ \\ \left| \dfrac{(\sigma+\alpha)^2 - \left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2}{1 + |\sigma+2|^2 + \left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2} \right|^2 \geq C_1 \end{array} \right)$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{l} \exists C_1 > 0 \text{ telle que:} \\ \\ \left| \dfrac{(\sigma+\alpha)^2 - \left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2}{1 + |\sigma+2|^2 + \left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2} \right|^2 \left| \widetilde{C}_n(\sigma) \right|^2 \geq \\ \\ \geq C_1 \left| \widetilde{C}_n(\sigma) \right|^2 \end{array} \right)$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{l} \exists C_1 > 0 \text{ telle que:} \\ \\ \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \dfrac{(\sigma+\alpha)^2 - \left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2}{1 + |\sigma+2|^2 + \left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2} \right|^2 \left| \widetilde{C}_n(\sigma) \right|^2 \geq \\ \\ \geq C_1 \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \widetilde{C}_n(\sigma) \right|^2 \end{array} \right)$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{l} \exists C_1 > 0 \text{ telle que:} \\ \\ \int_{|\nu|>1} \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \dfrac{(\sigma+\alpha)^2 - \left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2}{1 + |\sigma+2|^2 + \left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\right)^2} \right|^2 \left| \widetilde{C}_n(\sigma) \right|^2 d\nu \geq \\ \\ \geq C_1 \int_{|\nu|>1} \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \widetilde{C}_n(\sigma) \right|^2 d\nu \end{array} \right)$$

$$\Longrightarrow \exists C_1 > 0 \text{ telle que: } \left\|\widetilde{g}\left(\sigma+2,\theta\right)\right\|^2_{E(A)} \geq C_1 \left\|\widetilde{u}\left(\sigma,\theta\right)\right\|^2_{\widetilde{L^2}(A)} \tag{4.3.12}$$

Où:

$$\widetilde{g}\left(\sigma+2,\theta\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[\left(\sigma+\alpha\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{\varphi}\right)^2\right] \widetilde{C_n}\left(\sigma\right) \exp\left(\frac{in\pi}{\varphi}\theta\right)$$

et

$$\widetilde{u}\left(\sigma,\theta\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widetilde{C_n}\left(\sigma\right) \exp\left(\frac{in\pi}{\varphi}\theta\right)$$

On définit $E\left(A\right)$ comme étant l'espace transformée de Mellin de $H^{-2}\left(\Omega_\varphi\right)$, où la variable σ est dans l'ensemble A tel que:

$$A = \left\{\sigma \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}\left(\sigma\right) = 1 \text{ et } \left|\operatorname{Im}\left(\sigma\right)\right| > 1\right\}$$

De même $\widetilde{L^2}\left(A\right)$ est l'espace transformée de Mellin de $L^2\left(\Omega_\varphi\right)$ avec la variable σ est dans A.

2$^{\text{ème}}$cas : $|\nu| \leq 1$

D'après l'expression (4.3.7) , on a:

$$\widetilde{g}\left(\sigma+2,\theta\right) = \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial\theta^2}\left(\sigma,\theta\right) + \left(\sigma+\alpha\right)^2\ \widetilde{u}\left(\sigma,\theta\right) \tag{4.3.13}$$

C'est une équation différentielle ordinaire linéaire à coefficients constants du second ordre par rapport à la variable θ, et qui dépend de σ tq $\sigma = 1 + i\nu$, avec $-1 \leq \nu \leq 1$.

D'où:

$$\left(\nu,\theta\right) \in \left[-1,1\right] \times \left[0,\varphi\right]$$

Pour résoudre (4.3.13) , on utilise la théorie élémentaire des équations différentielles comme suit:

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial\theta^2}\left(\sigma,\theta\right) + \left(\sigma+\alpha\right)^2\ \widetilde{u}\left(\sigma,\theta\right) = 0$$

qui est l'équation sans second membre associée à (4.3.13) .

On pose:

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial\theta}\left(\sigma,\theta\right) = x \Longrightarrow \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial\theta^2}\left(\sigma,\theta\right) = x^2$$

D'où l'équation caractéristique associée à l'équation homogène est:

$$x^2 + \left(\sigma+\alpha\right)^2 = 0$$

$$\Delta = (0)^2 - 4(1)(\sigma+\alpha)^2 = -4(\sigma+\alpha)^2 \leq 0$$

$$\Delta = 0 \Longleftrightarrow (\sigma+\alpha)^2 = 0 \Longleftrightarrow \sigma+\alpha = 0 \Longleftrightarrow (1+i\nu)+\alpha = 0 \Longleftrightarrow (1+\alpha)+i\nu = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 1+\alpha = 0 \\ et \\ \nu = 0 \end{cases}$$

Or: $0 < \alpha \leq 1.$

Donc:

$$\begin{aligned} \Delta &= -4(\sigma+\alpha)^2 < 0 \\ &= [2i(\sigma+\alpha)]^2 = [2i((1+i\nu)+\alpha)]^2 \\ &= [2i((1+\alpha)+i\nu)]^2 = [-2\nu+2i(1+\alpha)]^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_1 = \nu - i(1+\alpha) \\ x_2 = -\nu + i(1+\alpha) \end{cases}$$

D'où la solution générale de l'équation sans second membre est:

$$\widetilde{u}(\sigma,\theta) = e^{|\nu|\theta}\left(A'\cos((1+\alpha)\theta) + B'\sin((1+\alpha)\theta)\right)$$

Telles que A' et B' sont deux constantes réelles.

Il en résulte l'existence d'une constante $C_2 > 0$ qui vérifie:

$$\|\widetilde{g}(\sigma+2,\theta)\|^2_{A(B)} \geq C_2 \|\widetilde{u}(\sigma,\theta)\|^2_{\widetilde{L^2}(B)} \tag{4.3.14}$$

On définit $A(B)$ comme étant l'espace transformée de Mellin de $H^{-2}(\Omega_\varphi)$, où la variable σ est dans la bande B telle que:

$$B = \{\sigma \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(\sigma) = 1 \text{ et } \operatorname{Im}(\sigma) \in [-1,1]\}$$

De même $\widetilde{L^2}(B)$ est l'espace transformée de Mellin de $L^2(\Omega_\varphi)$, où la variable σ est dans B.

En appliquant le théorème de Plancherel ainsi que la transformation de Fourier inverse aux expressions (4.3.12) et (4.3.14) , on trouve le résultat suivant:

$\exists C_3 = conste > 0$ telle que: $\left\|\rho^{-\alpha}Pu\right\|^2_{H^{-2}(\Omega_\varphi)} \geq C_3 \left\|u\right\|^2 \Longrightarrow \left\|u\right\|^2 \leq \dfrac{1}{C_3}\left\|\rho^{-\alpha}Pu\right\|^2_{H^{-2}(\Omega_\varphi)}$

Ce qui implique que:

$$\left\|u\right\|^2 \leq \frac{1}{C_3}\left(\left\|\rho^{-\alpha}Pu\right\|^2_{H^{-2}(\Omega_\varphi)} + \left\|u\right\|^2_{H^{-1}(\Omega_\varphi)}\right) \tag{4.3.15}$$

Ce qui achève la démonstration de l'inégalité (4.3.3) .

On obtient au final que l'image de P est fermée dans $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$.

De plus, $\ker(P)$ est de dimension finie dans $L^2(\Omega_\varphi)$.

D'après [16], l'opérateur P est surjectif sur $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$.

D'où: le problème (4.4.1) avec la condition de Dirichlet homogène admet au moins une solution dans $L^2(\Omega_\varphi)$.

4.4 Etude de l'unicité de la solution

4.4.1 Etude du noyau du problème

Afin d'affirmer l'unicité de la solution du problème avec la condition de Dirichlet homogène dans $L^2(\Omega_\varphi)$, étudions le noyau du problème suivant:

$$\begin{cases} Pu = (\rho^\alpha \Delta)^* u = h & \text{dans} \quad \Omega_\varphi \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{4.4.1}$$

Le problème qui suit admet comme solution les éléments du noyau du problème (4.4.1) :

$$\begin{cases} Pu = (\rho^\alpha \Delta)^* u = 0 & \text{dans} \quad \Omega_\varphi \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{4.4.2}$$

On a, d'après le théorème (3.4.1) , le noyau du problème (4.4.1) est de dimension finie.

En tenant compte du fait que: $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi) \subset H^{-2}(\Omega_\varphi)$ tel que

$$E_{-\alpha}(\Omega_\varphi) = \left\{u \in H^{-1}(\Omega_\varphi),\ \text{telle que } \rho^{-\alpha}u \in H^{-2}(\Omega_\varphi)\right\}$$

, calculons le noyau du problème (4.4.1) . Pour cela, commençons par démontrer la proposition suivante:

Proposition 4.4.1 *Le noyau du problème (4.4.1) dans $H^{-m}(\Omega_\varphi)$ avec m entier positif, dépend de m et de φ (Ouverture de Ω_φ).*

Démonstration.

On résoud dans $H^{-m}(\Omega_\varphi)$, le problème (4.4.2) suivant:

$$\begin{cases} (\rho^\alpha \Delta)^* u = 0 & \text{dans} \quad \Omega_\varphi \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{4.4.3}$$

On pose: $u = \rho^{-\alpha} w \in H^{-m}(\Omega_\varphi)$, avec $m \in \mathbb{N}$.

Le problème (4.4.2) , s'écrit:

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{dans} \quad \Omega_\varphi \\ w = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{4.4.4}$$

Soit:

$$0 < \rho < \rho_0$$

Comme $w = 0$ sur Γ_φ, alors on prolonge $w \in C^\infty(\Omega_\varphi)$ sur $[-\varphi, \varphi]$ par symétrie (Dans ce cas la fonction w dépend de la variable θ).

Après translation, on obtient une fonction périodique de période 2φ.

Par suite, cette fonction admet un développement en série de Fourier qui est uniformément convergente.

Ce développement est de la forme:

$$w(\rho, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n(\rho) \sin\left(\frac{n\pi}{\varphi}\theta\right) \tag{4.4.5}$$

D'où:

$$\frac{\partial w}{\partial \rho} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sin\left(\frac{n\pi}{\varphi}\theta\right) a_n^{'}(\rho) \Longrightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \rho} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\rho} a_n^{'}(\rho) \sin\left(\frac{n\pi}{\varphi}\theta\right)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sin\left(\frac{n\pi}{\varphi}\theta\right) a_n^{"}(\rho)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \theta} &= \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(\rho)\frac{n\pi}{\varphi}\cos\left(\frac{n\pi}{\varphi}\theta\right) \\ &\Longrightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{n\pi}{\varphi}\right)^2 a_n(\rho)\sin\left(\frac{n\pi}{\varphi}\theta\right) \\ &\Longrightarrow \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{n\pi}{\varphi}\right)^2 a_n(\rho)\sin\left(\frac{n\pi}{\varphi}\theta\right) \end{aligned}$$

On obtient donc le problème:

$$\begin{cases} \Delta w(\rho,\theta) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \left[a_n^{"}(\rho) + \frac{1}{\rho}a_n^{'}(\rho) - \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{n\pi}{\varphi}\right)^2 a_n(\rho)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{\varphi}\theta\right) = 0 \text{ dans } \Omega_\varphi \\ w(\rho,0) = 0 \\ w(\rho,\varphi) = 0 \end{cases} \tag{4.4.6}$$

Or le système $\sin\left(\frac{n\pi}{\varphi}\theta\right)$ est linéairement indépendant, on obtient donc le problème:

$$\begin{cases} a_n^{"}(\rho) + \frac{1}{\rho}a_n^{'}(\rho) - \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{n\pi}{\varphi}\right)^2 a_n(\rho) = 0 \\ w(\rho,0) = 0 \\ w(\rho,\varphi) = 0 \end{cases} \tag{4.4.7}$$

, qui est équivalent au problème:

$$\begin{cases} \rho^2 a_n^{"}(\rho) + \rho\ a_n^{'}(\rho) - \left(\frac{n\pi}{\varphi}\right)^2 a_n(\rho) = 0 \\ w(\rho,0) = 0 \\ w(\rho,\varphi) = 0 \end{cases} \tag{4.4.8}$$

On obtient donc dans (4.4.8) une équation d'Euler du second ordre par rapport à la variable ρ.

Cette équation admet S comme système fondamental de solution tel que:

$$S = \left\{\rho^{\frac{n\pi}{\varphi}}, \rho^{-\frac{n\pi}{\varphi}}\right\} \tag{4.4.9}$$

En d'autres termes, la solution de l'équation d'Euler contenue dans (4.4.8) est de la forme:

$$a_n(\rho) = \lambda_n\ \rho^{\frac{n\pi}{\varphi}} + \mu_n\ \rho^{-\frac{n\pi}{\varphi}} \tag{4.4.10}$$

Mais:

$$w(\rho,\theta)=\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(\rho)\sin\left(\frac{n\pi}{\varphi}\theta\right)$$

D'où:

$$w(\rho,\theta)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\left[\lambda_n\ \rho^{\frac{n\pi}{\varphi}}+\mu_n\ \rho^{-\frac{n\pi}{\varphi}}\right]\sin\left(\frac{n\pi}{\varphi}\theta\right) \tag{4.4.11}$$

Or:

$$u=\rho^{-\alpha}w,\ \text{avec } 0<\alpha\leq 1$$

D'où La solution du problème (4.4.2) est:

$$u(\rho,\theta)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\left[\lambda_n\ \rho^{-\alpha+\frac{n\pi}{\varphi}}+\mu_n\ \rho^{-\alpha-\frac{n\pi}{\varphi}}\right]\sin\left(\frac{n\pi}{\varphi}\theta\right) \tag{4.4.12}$$

A partir d'un certain rang $n_0=n_0(m)$, qui dépend de m, on trouve que les coefficients μ_n s'annulent (Ceci découle du fait que $u=\rho^{-\alpha}w\in H^{-m}(\Omega_\varphi)\,,m\in\mathbb{N}$ et en faisant tendre ρ vers zéro).

On illustre ceci dans des exemples que voici:

Pour m = 2, on a: $H^{-2}(\Omega_\varphi)$.

En tenant compte du fait que $\rho^{-\alpha-\frac{n\pi}{\varphi}}\sin\left(\frac{n\pi}{\varphi}\theta\right)\in H^{-2}(\Omega_\varphi)$ car $\rho^{-\alpha}w\in H^{-2}(\Omega_\varphi)$ et que $f(\rho,\theta)\in H_0^2(\Omega_\varphi)$ et en intégrant I par parties par rapport à la variable ρ, on obtient:

$$I=\int_0^{\varphi}\int_0^{\rho_0}\rho^{1-\alpha-\frac{n\pi}{\varphi}}\ \sin\left(\frac{n\pi}{\varphi}\theta\right)\ f(\rho,\theta)\ d\rho d\theta$$

Posons:

$$\left\{\begin{array}{lll} f^{\,\prime} & = & \rho^{1-\alpha-\frac{n\pi}{\varphi}}\sin\left(\frac{n\pi}{\varphi}\theta\right)\\ g & = & f(\rho,\theta)\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lll} f & = & \dfrac{\rho^{2-\alpha-\frac{n\pi}{\varphi}}}{2-\alpha-\dfrac{n\pi}{\varphi}}\sin\left(\frac{n\pi}{\varphi}\theta\right)\\ g^{'} & = & \dfrac{\partial f}{\partial\rho}(\rho,\theta)\end{array}\right.$$

D'où:

$$I = \int_0^{\varphi}\left(\begin{array}{c}\left[\dfrac{\rho^{2-\alpha-\frac{n\pi}{\varphi}}}{2-\alpha-\dfrac{n\pi}{\varphi}}\sin\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\theta\right)f\left(\rho,\theta\right)\right]_0^{\rho_0}+ \\ \\ -\int_0^{\rho_0}\dfrac{\rho^{2-\alpha-\frac{n\pi}{\varphi}}}{2-\alpha-\dfrac{n\pi}{\varphi}}\sin\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\theta\right)\dfrac{\partial f}{\partial\rho}\left(\rho,\theta\right)d\rho\end{array}\right)d\theta$$

$$I = \left(\begin{array}{l}\int_0^{\varphi}\dfrac{\rho^{2-\alpha-\frac{n\pi}{\varphi}}}{2-\alpha-\dfrac{n\pi}{\varphi}}\sin\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\theta\right)f\left(\rho_0,\theta\right)d\theta+ \\ \\ -\int_0^{\varphi}\left[\int_0^{\rho_0}\dfrac{\rho^{2-\alpha-\frac{n\pi}{\varphi}}}{2-\alpha-\dfrac{n\pi}{\varphi}}\sin\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\theta\right)\dfrac{\partial f}{\partial\rho}\left(\rho,\theta\right)d\rho\right]d\theta\end{array}\right)$$

On intègre par parties par rapport à la variable ρ l'intégrale suivante:

$$\int_0^{\rho_0}\frac{\rho^{2-\alpha-\frac{n\pi}{\varphi}}}{2-\alpha-\dfrac{n\pi}{\varphi}}\sin\left(\frac{n\pi}{\varphi}\theta\right)\frac{\partial f}{\partial\rho}\left(\rho,\theta\right)d\rho$$

On pose:

$$\left\{\begin{array}{lll} f\,' & = & \dfrac{\rho^{2-\alpha-\frac{n\pi}{\varphi}}}{2-\alpha-\dfrac{n\pi}{\varphi}}\sin\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\theta\right) \\ g & = & \dfrac{\partial f}{\partial\rho}\left(\rho,\theta\right)\end{array}\right.$$

Ce qui implique que:

$$\left\{\begin{array}{lll} f & = & \dfrac{1}{2-\alpha-\dfrac{n\pi}{\varphi}}\dfrac{\rho^{3-\alpha-\frac{n\pi}{\varphi}}}{3-\alpha-\dfrac{n\pi}{\varphi}}\sin\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\theta\right) \\ g' & = & \dfrac{\partial^2 f}{\partial\rho^2}\left(\rho,\theta\right)\end{array}\right.$$

D'où:

$$I = \left(\begin{array}{l} \int_0^{\varphi} \dfrac{\rho_0^{2-\alpha-\frac{n\pi}{\varphi}}}{2-\alpha--\dfrac{n\pi}{\varphi}} \sin\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\theta\right) \; f(\rho_0,\theta)\, d\theta + \\ \\ -\int_0^{\varphi} \left(\begin{array}{l} \left[\dfrac{1}{2-\alpha-\dfrac{n\pi}{\varphi}} \dfrac{\rho^{3-\alpha-\frac{n\pi}{\varphi}}}{3-\alpha-\dfrac{n\pi}{\varphi}} \sin\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\theta\right) \dfrac{\partial f}{\partial \rho}(\rho,\theta) \right]_0^{\rho_0} + \\ \\ -\int_0^{\rho_0} \dfrac{1}{2-\alpha-\dfrac{n\pi}{\varphi}} \dfrac{\rho^{3-\alpha-\frac{n\pi}{\varphi}}}{3-\alpha-\dfrac{n\pi}{\varphi}} \sin\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\theta\right) \dfrac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}(\rho,\theta)\, d\rho \end{array} \right) d\theta \end{array} \right)$$

$$I = \left(\begin{array}{l} k_1 \int_0^{\varphi} f(\rho_0,\theta) \sin\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\theta\right) \; d\theta + \\ \\ +k_2 \int_0^{\varphi} \dfrac{\partial f}{\partial \rho}(\rho_0,\theta) \sin\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\theta\right) d\theta + \\ \\ +k_3 \int_0^{\varphi} \int_0^{\rho_0} \rho^{2-\alpha-\frac{n\pi}{\varphi}} \dfrac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}(\rho,\theta) \sin\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\theta\right) \rho d\rho d\theta. \end{array} \right)$$

Telles que:

$$k_1 = \frac{\rho_0^{2-\alpha-\frac{n\pi}{\varphi}}}{2-\alpha-\dfrac{n\pi}{\varphi}}$$

$$k_2 = -\frac{1}{2-\alpha-\dfrac{n\pi}{\varphi}} \frac{\rho_0^{3-\alpha-\frac{n\pi}{\varphi}}}{3-\alpha-\dfrac{n\pi}{\varphi}}$$

$$k_3 = \frac{1}{2-\alpha-\dfrac{n\pi}{\varphi}} \frac{1}{3-\alpha-\dfrac{n\pi}{\varphi}}$$

On a: $k_1 \int_0^{\varphi} f(\rho_0,\theta) \sin\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\theta\right) d\theta$ converge car $f(\rho_0,\theta) \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_\varphi)$.

De même: $k_2 \int_0^{\varphi} \dfrac{\partial f}{\partial \rho}(\rho_0,\theta) \sin\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\theta\right) d\theta$ converge car $\dfrac{\partial f}{\partial \rho}(\rho_0,\theta) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\varphi)$.

Reste à montrer l'existence de la dernière intégrale, c.-à-d. de:

$$\int_0^{\varphi} \int_0^{\rho_0} \rho^{2-\alpha-\frac{n\pi}{\varphi}} \sin\left(\frac{n\pi}{\varphi}\theta\right) \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}(\rho,\theta)\, \rho d\rho d\theta$$

Si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}(\rho,\theta) \in L^2(\Omega_\varphi)$ alors $\rho^{2-\alpha-\frac{n\pi}{\varphi}} \sin\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\theta\right) \in L^2(\Omega_\varphi)$ et ceci est réalisé que si la condition suivante est réalisée:

$$n < \frac{\varphi}{\pi}(2-\alpha) \tag{4.4.13}$$

Mais:

$$\frac{\varphi}{\pi}(2-\alpha) < \frac{2\varphi}{\pi}$$

En effet, on a:

$$\begin{aligned} 0 &< \alpha < 1 \Longrightarrow 0 < \frac{\alpha\varphi}{\pi} < \frac{\varphi}{\pi}; 0 < \varphi < 2\pi \\ &\Longrightarrow -\frac{\varphi}{\pi} < -\frac{\alpha\varphi}{\pi} < 0 \\ &\Longrightarrow \frac{\varphi}{\pi} < \frac{2\varphi}{\pi} - \frac{\alpha\varphi}{\pi} < \frac{2\varphi}{\pi} \end{aligned}$$

D'où:

$$n < \frac{\varphi}{\pi}(2-\alpha) < \frac{2\varphi}{\pi}$$

Cette condition implique que:

$$n < \frac{2\varphi}{\pi} \tag{4.4.14}$$

On a donc les trois cas suivants:

1$^{\text{ier}}$cas :

$$\begin{aligned} \text{Si } \varphi &\leq \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \frac{2\varphi}{\pi} \leq 1 \Longrightarrow n < \frac{2\varphi}{\pi} \leq 1 \Longrightarrow n < 1 \\ &\Longrightarrow \text{ Il n'y a pas de solution singulière du problème (4.4.2) dans } H^{-2}(\Omega_\varphi). \end{aligned}$$

2$^{\text{ème}}$cas :

$$\begin{aligned} \text{Si } \frac{\pi}{2} &< \varphi < \pi \Longrightarrow 1 < \frac{2\varphi}{\pi} < 2 \Longrightarrow n < \frac{2\varphi}{\pi} < 2 \Longrightarrow n < 2 \\ &\Longrightarrow \text{ Il y a une seule solution singulière du problème (4.4.2) dans } H^{-2}(\Omega_\varphi). \end{aligned}$$

3$^{\text{ème}}$cas :

$$\begin{aligned} \text{Si } \pi &\leq \varphi < 2\pi \Longrightarrow 2 \leq \frac{2\varphi}{\pi} < 4 \Longrightarrow n < \frac{2\varphi}{\pi} < 4 \Longrightarrow n < 4 \\ &\Longrightarrow \text{ Il y a trois solutions singulières du problème (4.4.2) dans } H^{-2}(\Omega_\varphi). \end{aligned}$$

Pour m $=$ **1**, on a: $H^{-1}(\Omega_\varphi)$.

La condition (4.4.14) , s'écrit:

$$n < \frac{\varphi}{\pi} \tag{4.4.15}$$

On distingue deux cas:

1

$$\text{Si } \varphi < \pi \Longrightarrow \frac{\varphi}{\pi} < 1 \Longrightarrow n < \frac{\varphi}{\pi} < 1 \Longrightarrow n < 1$$

$\Longrightarrow$ Il n'y a pas de solution singulière du problème (4.4.2) dans $H^{-1}(\Omega_\varphi)$.

2

$$\text{Si } \pi \leq \varphi < 2\pi \Longrightarrow 1 \leq \frac{\varphi}{\pi} < 2 \Longrightarrow n < \frac{\varphi}{\pi} < 2 \Longrightarrow n < 2$$

$\Longrightarrow$ Il y a une seule solution singulière du problème (4.4.2) dans $H^{-1}(\Omega_\varphi)$.

Pour m $=$ **0**, on a: $H^0(\Omega_\varphi) = L^2(\Omega_\varphi)$.

La condition (4.4.14) , s'écrit:

$$\frac{n\pi}{\varphi} < -1 \tag{4.4.16}$$

Contradiction car

$$\frac{n\pi}{\varphi} \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc: u est solution du problème (4.4.2) si et seulement si les coefficients μ_n sont nuls.

Donc: La solution du problème (4.4.2) est:

$$u(\rho,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \, \rho^{-\alpha+\frac{n\pi}{\varphi}} \sin\left(\frac{n\pi}{\varphi}\theta\right) \tag{4.4.17}$$

■

On a donc la proposition suivante:

Proposition 4.4.2 *Pour chaque fonction*

$$s_n = \rho^{-\alpha-\frac{n\pi}{\varphi}} \sin\left(\frac{n\pi}{\varphi}\theta\right)$$

on peut construire une solution v du problème (4.4.2) , dans $H^{-m}(\Omega_\varphi)$, et telle que

$$v = \rho^{-\alpha}(s_n + r), \text{ avec } r \in H^1(\Omega_\varphi)$$

Démonstration.

Chercher v solution du problème (4.4.2) revient à chercher w solution du problème suivant:

$$\begin{cases} \Delta r = 0 & \text{dans} \quad \Omega_\varphi \\ r = -\rho^{-\alpha-\frac{n\pi}{\varphi}} \sin\left(\dfrac{n\pi}{\varphi}\theta\right) & \text{sur} \quad \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{4.4.18}$$

Telles que: $w = s_n + r$ et $r \in H^1(\Omega_\varphi)$.

Notons que: $r \in C^0(\Gamma_\varphi)$ et que r doit être nulle sur le bord, d'où:

Sur le bord $\theta = 0$ ou $\theta = \varphi$, et dans ces deux cas r est nulle sur le bord de Ω_φ.

On a:

$$\langle \Delta r, r \rangle = \left\langle \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}, r \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}, r \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}, r \right\rangle$$

Or: La dérivation est au sens des distributions.

D'où:

$$\langle \Delta r, r \rangle \quad = \quad -\left\langle \frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial x} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial y} \right\rangle$$

$$\langle \Delta r, r \rangle = -\left\| \frac{\partial r}{\partial x} \right\|^2 - \left\| \frac{\partial r}{\partial y} \right\|^2 = 0 \tag{4.4.19}$$

Ce qui implique que r est constante dans $H^1(\Omega_\varphi)$.

Or: $r = 0$ sur Γ_φ.

Donc:

$$r = 0 \text{ dans } H^1(\Omega_\varphi)$$

(Car sinon on récupère une masse de Dirac).

Donc: $u \equiv 0$ est l'unique solution du problème (4.4.2) , (4.4.4) et (4.4.18) . ■

Conclusion

Que Ω soit un polygone convexe ou non, la solution du problème existe et est unique dans l'espace à poids $E_\alpha(\Omega_\varphi)$.

Le fait de multiplier Δ par une fonction poids facilite l'étude au voisinage des sommets et simplifie les calculs qui interviennent, car le poids absorbe les singularités qui se produisent aux voisinages des sommets.

Cette étude est plus originale que l'étude classique, car elle donne des résultats dans des espaces plus vastes et elle recouvre le cas classique.

Bibliographie

[1] **ADAMS R. A.,** Sobolev spaces. Academic Press, New-York, 1975.

[2] **ALLAIRE GREGOIRE,** Analyse numérique et optimisation, Editions de l'école Polytechnique_Novembre 2007.

[3] **AMMANN BERND et NISTOR VICTOR**, Weighted sobolev spaces and regularity for polyhedral domains, IMA Preprint Series 2087, 2006.

[4] **BASS J.**, Cours de Mathématiques, tome 2, Masson, Paris, 1978.

[5] **BOCCIA SERENA, MONSURRO SARA et TRANSIRICO MARIA,** Elliptic Equations in Weighted Sobolev Spaces on Unbounded Domains, Hindawi Publishing Corporation Boundary Value Problems Article ID582435, 12 pages, 2008.

[6] **BONY J. M.**, Cours d'analyse. Théorie des distributions et analyse de Fourier, Editions de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau (2001).

[7] **BOULMEZAOUD T. Z.**, Espace de Sobolev avec poids pour l'équation de Laplace dans le demi-espace, C. R. Acad. Sci. Paris, t 328, série i 221-226, 1999.

[8] **BREZIS H.,** Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. Collection Math. Appl. pour la Maîtrise. Masson, Paris, 1983.

[9] **COLOMBO S.**, Les transformations de Mellin et de Hankel. Editions du CNRS, 1959.

[10] **DAUGE M.**, Elliptic Boundary Value problems on Corner Domains by A. Dold and B. Eckmann Springer-Verlag Belin Heidelberg Germany, 1988.

[11] **DAUTRAY ROBERT, LIONS J. L.,** Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, MASSON, 1987.

[12] **DJEBARNI M.**, Etude du problème de Laplace dans un espace avec poids, Thèse de Magister, Université de Constantine, Juin 1993.

[13] **EKELAND I.**, **TEMAM R.**, Analyse convexe et problèmes variationnels, Dunod, Paris (1974).

[14] **GRISVARD P.**, Alternative de Fredholm relative au problème de Dirichlet dans un polygone ou un polyèdre, Boll. Un. Mat. Italie (4).5 1972 pp132-164.

[15] **GRISVARD P.**, Elliptic problems in nonsmooth domains, Monographs and studies in Mathematics, 24 Pitman, London, 1985.

[16] **GRISVARD P.**, Singularités des solutions du problème de Stokes dans un polygone, Séminaire d'analyse fonctionnelle, IREM, Nice 1979.

[17] **KUFNER A.**, Weighted Sobolev Spaces. Teubner_Texte zur Mathematik_Leipzig, 1980.

[18] **LIONS J. L. et MAGENES E.,** Problèmes aux limites non homogènes et applications, Tome 1, Dunod Paris, 1968**.**

[19] **MERIGOT M.,** Etude du problème de Laplace dans un polygone plan Inégalités à priori, Boll. Un. Mat. Italie (4) .10 1974 p577.

[20] **MERIGOT M.,** Solutions en normes L^p, des problèmes aux limites dans des polygones plan, Thèse de Doctorat d'état, IREM, Université de Nice 1974.

[21] **KONDRATIEV V. A.,** Boundary Problems for Elliptic Equations in Domains with Conical Points. Dans: Transactions of the Moscow Mathematical Society for the year 1967. Tome 16, pp. 227-313. Amer. Math. Soc., Providence, 1968.

[22] **KOZLOV V. A. et MAZ'YA V. G. et ROSSMANN J.,** Elliptic Boundary Value Problems in Domains with Point Singularities by the American Mathematical Society, 1997.

[23] **M S. SAID,** Etude du problème adjoint du Problème de Laplace avec poids dans un polygone Plan, Thèse de Magister, Université de Constantine, 1993.

[24] **M S. SAID,** Rôle des fonctions poids dans l'étude des problèmes aux limites elliptiques dans un polygone plan, Thèse de Doctorat Université Mentouri Constantine, 2005.

[25] **SCHWARTZ L.,** Théorie des Distributions. Hermann, Paris, 1973.

[26] **TAS S.**, Cours de Master2, Université de Béjaïa, 2013.

[27] **VO-KHAC-KHOAN,** Distributions Analyse de Fourier Opérateurs aux dérivées partielles, Tomes 1&2 Librairie Vuibert Paris 1972.