

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DE BEJAIA A. MIRA
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES



Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master
en Mathématiques

Spécialité : Statistique et Analyse Décisionnelle

Par

IDDER Samira

THÈME

Fiabilité des systèmes: Modèles de Markov
et Weibull-Markov

Soutenu publiquement, le 23/06/2013 devant le jury composé de :

Présidente	M ^{me} K. TIMERIDJINE	M.A.A	U. A/Mira Béjaia
Rapporteur	M ^r M. BOURAINE	M.A.A	U. A/Mira Béjaia
Examinatrice	M ^{me} K. LAGHA	M.C.B	U. A/Mira Béjaia

Promotion 2012/2013

Remerciements

Avant toutes choses nous tenons à remercier Dieu de nous avoir aidés à mener ce travail jusqu'à sa fin.

D'une façon spéciale, je tiens à remercier vivement M^r M. BOURAINE de me avoir honoré, assurant la direction et le suivi de ce mémoire. Son soutien permanent, sa confiance, son encouragement, sa gentillesse et le temps qu'il m'a consacré tout au long de ce projet.

Je tiens également à remercier M^{me} K. TIMERIDJINE d'avoir accepté de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie M^{me} K. LAGHA d'avoir accepté de faire partie du jury et de consacrer son temps à la lecture et à la correction de ce mémoire.

J'adresse mes vifs remerciements à M^{me} L. BOURAINE, M^r KARAI, M^r MEDJOUJ et tous les enseignants du département Mathématiques, pour le bon guide qu'ils m'ont été pour moi, pour leurs précieux conseils et pour l'orientation et l'information qu'ils m'a généralement prodiguées.

Mes remerciements les plus vifs vont tout particulièrement à mes parents.

Enfin, merci à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin, les étudiants du département de mathématiques et mes amis pour leurs encouragements et leurs soutien moral à la réalisation de mon travail.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A mes très chers parents, pour leur amour, leurs sacrifices et pour avoir toujours été à mes côtés.

A mes très chers grand parents.

A tout mes frères, mes sœurs et mes adorables neveux :Rayan , Amin , Badroddine et Abdraouf.

A ma belle famille et aussi Mohamed pour tout l'amour et le soutien qu'il m'a apporté.

A tous mes oncles et tantes, mes cousins et cousines.

*A mes chères amis mes copines surtout Kahina TIFAOUI et a tous mes collègues de promotions
particulièrement Hayet, Samia, Harzouz, Nassima...*

Samira,

Fiabilité des systèmes: Modèle de Markov et Weibull-Markov

Table des matières

Liste des figures	viii
Introduction	1
1 Processus aléatoires	4
1.1 Introduction	4
1.2 Généralités sur les processus aléatoires	5
1.3 Processus de Markov	5
1.3.1 Définitions	5
1.3.2 Equations d'états	7
1.3.3 Equilibre statique	8
1.3.4 Les graphes d'états	9
1.3.5 Processus de Poisson	10
1.3.6 Processus de poisson et loi exponentielle	12
1.3.7 Processus de naissance et de mort	12
1.3.8 Processus de renouvellement	13
1.4 Le processus semi- Markovien	15
1.4.1 Le modèle de Weibull-Markov	16
1.5 Processus de dégradation	16
1.6 Conclusion	17
2 Concepts de fiabilité	18
2.1 Introduction	18
2.2 Un peu d'histoire	18
2.3 Définitions	19
2.3.1 Fiabilité	19

2.3.2	Défaillance	20
2.4	Notions de fiabilité	21
2.4.1	Durée de vie	21
2.4.2	Fonction de fiabilité	21
2.4.3	Durée de survie (durée de vie résiduelle)	22
2.4.4	Taux de défaillance	23
2.4.5	Les grandeurs du temps	25
2.5	Fiabilité des systèmes:	26
2.5.1	Systèmes non réparables	26
2.5.2	Systèmes réparables	27
2.5.3	Fonction de structure:	27
2.5.4	Chemins	27
2.5.5	Coupes	28
2.5.6	Configuration série	29
2.5.7	Configuration parallèle	30
2.5.8	Configuration série-parallèle	31
2.5.9	Configuration parallèle-série	32
2.5.10	Configuration k/n (k parmi n):	35
2.5.11	Autres configurations	35
2.6	Maintenabilité	36
2.6.1	Indice de maintenabilité	37
2.7	Disponibilité	38
2.8	La maintenance	38
2.9	Conclusion	39
3	Les principales lois de fiabilité	40
3.1	Introduction	40
3.2	Loi exponentielle	40
3.2.1	Propriétés sans mémoire de la loi exponentielle	41
3.3	Loi de Weibull	43
3.4	Autres lois usuelles	46
3.4.1	La loi normale (Laplace-Gauss)	46

3.4.2	La loi Log-normale (ou de Galton)	46
3.4.3	Loi de Poisson	47
4	Modélisation	49
4.1	Introduction	49
4.2	Modélisation par les graphes des états	49
4.2.1	Modélisation Markovienne	49
4.2.2	Modèle de Markov à deux états	52
4.2.3	Modèle de Markov à trois états	54
4.2.4	Cas d'un système parallèle	56
4.2.5	Cas d'un système série	57
4.2.6	Modèles de dégradations	59
4.2.7	Probabilité d'états	61
4.3	Approche de Weibull-Markov	62
4.3.1	Modélisation Weibull-Markov	62
4.4	Conclusion	71
	Conclusion générale	71
	Bibliographie	72

Liste des Figures

1.3.1	Graphe d'état élémentaire	10
1.3.2	Graphe de transition.	13
2.4.1	Courbe de survie ou de fiabilité	22
2.4.2	Courbe en baignoire représentant le taux de panne.	24
2.4.3	Allure caractéristique du taux de panne, Lwis 1987.	24
2.4.4	Présentation des différentes grandeurs en fonction du temps. Dans le cas d'un système réparable.	25
2.4.5	Chronogramme d'un matériel irréparable.	26
2.5.6	Configuration de n composants en série	29
2.5.7	Configuration de n composants en parallèle.	30
2.5.8	Configuration série-parallèle.	31
2.5.9	Configuration parallèle-série.	32
2.5.10	Représentation de deux système (S_1) et (S_2) respectivement.	32
2.5.11	Représentation du système (S_1) en coupes minimales.	33
2.5.12	Représentation du système (S_2) en chemins minimaux.	33
2.5.13	Exemple de cas de pont.	35
2.5.14	Représentation du système en chemins minimaux.	36
2.5.15	Représentation du système en coupes minimales.	36
3.2.1	Propriété sans mémoire de la loi exponentielle.	42
3.3.2	Le paramètre de position (en unité de temps).	43
3.3.3	Le paramètre d'échelle (en unité de temps).	44
3.3.4	La forme des courbes $\lambda(t)$ aux différentes phases de vie (courbe en baignoire)	44
3.4.5	La densité de loi de Poisson.	48

4.2.1 Modèle de fiabilité d'un système à deux états.	52
4.2.2 Graphe des états avec la maintenance (M).	54
4.2.3 Système à deux composantes en parallèle.	56
4.2.4 Graphe de transition d'un système parallèle à deux états.	56
4.2.5 Système série à deux éléments.	57
4.2.6 Graphe de transition d'un système série à deux états.	58
4.2.7 Diagramme des états avec le processus de dégradation.	59
4.2.8 Diagramme des états de transition d'un système réparable avec un programme de maintenance préventive.	60
4.2.9 (a) représentation des taux de transition; (b) représentation des probabilités de transition.	61
4.3.10 Modèle Weibull-Markov avec des états de dégradation.	63
4.3.11 Graphe des états	66
4.3.12 Le modèle de dégradation Markovien	69
4.3.13 Le modèle de dégradation Weibull-Markov.	70

Introduction

Dès que les hommes ont inventé les premiers instruments, ils sont devenus dépendants de leur bon fonctionnement. Dans ce sens, le concept de fiabilité était né. Avec l'entrée de l'électronique la fiabilité est entrée dans une nouvelle ère. Cependant, la fiabilité comme un sujet d'étude systématique a débuté dans les années soixante [20].

L'Oxford English Dictionary définit la fiabilité comme la qualité d'une entité à être fiable; sur laquelle on peut compter à un instant donné; dans laquelle la confiance peut être mise. En anglais "reliability" vient de "to rely on" signifiant "compter sur, avoir confiance en ..." alors que fiabilité en français vient effectivement du mot "fiable", c'est-à-dire à qui on peut se fier.

En 1962, l'Académie des Sciences, l'a définie de la façon suivante : Grandeur caractérisant la sécurité de fonctionnement, ou mesure de la probabilité de fonctionnement d'un appareillage selon des normes prescrites [12]. Plus tard dans les années soixante dix, le Comité Electronique International propose la définition suivante : Caractéristique d'un dispositif, exprimée par la fiabilité, qu'il accomplisse une fonction requise, dans des conditions données, pendant une durée donnée [19]. La théorie de la fiabilité concerne un certain nombre de questions liées au bon fonctionnement d'un système au sens large. Ainsi, on peut s'interroger sur la probabilité que le système soit en marche à un certain moment ou pendant une certaine période, sur le temps moyen de bon fonctionnement, sur le risque instantané ou cumulé de tomber en panne, etc. Ces questions trouvent des réponses naturelles à l'aide de la théorie des probabilités et des méthodes de la statistique théorique ou appliquée.

Un objectif de la théorie de fiabilité est de trouver le moyen d'évaluer la fiabilité d'un système complexe à partir de la connaissance des fiabilités des composants le constituant. Evaluer la fiabilité c'est la calculer (ou l'approximer) par des techniques probabilistes ou algorithmiques ou bien, trouver un encadrement de celle-ci lorsque la configuration du système est trop compliquée [23]. Ces dernières années elle fait l'objet d'un intérêt croissant, d'abord pour ses applications importantes en technologies industrielles, en analyse de survie, ..., etc. D'autre

part, elle connaît un développement théorique conséquent, en raison de son intérêt dans des problèmes de modélisation stochastique [2].

La modélisation est la recherche d'une expression simplifiée de la nature dans sa complexité, qui permette d'en prévoir le comportement dans un intervalle de temps et d'échelle de grandeur. En simplifiant le réel, le modèle donne accès à des prédictions plus ou moins précises à l'échelle considérée, prédictions accessibles à la manipulation algébrique ou algorithmique. Lorsque la modélisation tient compte du facteur aléatoire, on parle alors de la modélisation stochastique et de modèles stochastiques.

La modélisation Markovienne permet de prendre en compte l'aspect dynamique du fonctionnement d'un système. Les calculs sont certes souvent de grande taille, mais n'offrent pas de difficultés théoriques. La modélisation Markovienne a cependant un inconvénient majeur qui est l'hypothèse de base d'absence de mémoire, ce qui peut être complètement inadapté à certaines applications réelles. Cela nous conduit à introduire la notion de modèle semi-Markovien.

Le modèle semi-markovien garde la propriété de markovianité d'une manière plus souple, permettant de rester dans un certain état un temps de loi quelconque. Ainsi, le cadre semi-markovien est très général, capable de décrire des systèmes physiques complexes et de fournir des informations sur les différents indicateurs qui caractérisent l'évolution de tels systèmes. De point de vue théorique, les processus semi-markoviens représentent un cadre riche pour des investigations probabilistes ou statistiques [17].

L'objectif de ce travail est l'étude de la fiabilité et la disponibilité d'un matériel réparable (considéré comme un seul élément ou comme un système composé de plusieurs éléments). Nous avons modélisé le fonctionnement d'un matériel par un processus stochastique à temps continu et espace d'états discret.

Dans un premier temps nous avons considéré les durées de séjours dans les états du système suivre une loi exponentielle. On parle alors de modélisation Markovien. Par la suite nous avons considéré les durées de séjours dans les états du système suivre une loi de Weibull qui tient compte du phénomène d'usure contrairement à la loi exponentielle. Dans ce cas on parle du modèle Weibull-Markov proposé par J.VAN CASTAREN [22].

Pour chacun des deux modèles, on a considéré plusieurs variantes: une première variante à deux états (fonctionnement, panne), une deuxième variante qui tient compte de la maintenance

(fonctionnement, panne, maintenance), et la troisième variante tient compte du phénomène de dégradation avec maintenance.

Le présent mémoire comporte une introduction, quatre chapitres principaux et une conclusion.

- Dans le premier chapitre on a défini les processus aléatoires d'une manière générale, où on a introduit les définitions de base pour les chaînes de Markov et les résultats probabilistes et statistiques associés.

- Le deuxième chapitre présente sur principales notions et définitions de base de la théorie de la fiabilité et quelques outils d'analyse des systèmes simple et complexes.

- Le troisième chapitre se limite à un bref rappel des principales lois utilisées en fiabilité.

- Le dernier quatrième chapitre traite la modélisation de la fiabilité d'un matériel par un modèle Markov et de Weibull-Markov.

1.1 Introduction

Bon nombre de phénomènes physiques se décrivent par l'évolution d'une ou de plusieurs grandeurs au cours du temps. A un instant donné, ces grandeurs présentent souvent un caractère imprévisible, aléatoire, et il est alors naturel de les représenter par une variable aléatoire. L'évolution du phénomène est alors décrite par l'ensemble des variables aléatoires modélisant le phénomène à chaque instant. Cet ensemble de variables aléatoires forme un processus stochastique ou aléatoire.

Un processus stochastique est donc une collection de variables aléatoires indexées par un paramètre, celui-ci peut représenter le temps, discret ou continu, ou une variable d'espace. En revanche, la connaissance des relations entre ces variables aléatoires lorsque le paramètre varie permet d'obtenir des propriétés intéressantes qui caractérisent l'évolution du phénomène.

L'objet de la théorie des processus aléatoires est l'étude des phénomènes aléatoires dépendants du temps. Les applications des processus aléatoires sont très nombreuses. Ceux-ci sont notamment utilisés pour la construction de modèles mathématiques de nombreux phénomènes, physiques, biologiques ou économiques évoluant dans le temps et aussi dans la fiabilité des systèmes ou d'un matériel, c'est-à-dire l'évolution dans le temps de ses défaillances [6].

Ce chapitre présente quelques aspects des processus aléatoires utiles du fait de leur fréquence d'occurrence dans les applications aux processus de Markov et certaines de leurs propriétés qui permettent de modéliser et d'étudier la fiabilité des systèmes. Nous nous intéressons au processus de Markov à temps continu et à espace d'états discret, nous donnons quelques propriétés du processus de poisson qui modélise les arrivées de pannes ou défaillances d'un système et nous définissons les processus de renouvellement et enfin on termine par les modèles de dégradation.

1.2 Généralités sur les processus aléatoires

Si l'on s'intéresse à la fiabilité d'un système technique, il peut être indispensable de pouvoir réagir sans retard en cas de défaillance. Du point de vue mathématique, ceci implique d'avoir recours à un modèle stochastique faisant intervenir tout les instants appartenant à un intervalle donné, c'est-à-dire à un processus à temps continu [21].

Pour définir un processus aléatoire [11], il faut :

1- Un espace des temps T ($T \subset \mathbb{R}_+$) :

- $T = \mathbb{N}$ (le processus est dit discret): on regarde ce qui se passe à chaque unité de temps, ou bien on fait une suite d'opérations et on regarde ce qui se passe à chaque opération (Lancer une pièce par exemple).

- $T = \mathbb{R}_+$ (le processus est dit continu): on garde les yeux fixés sur un système qui évolue dans le temps à partir d'un instant $t = 0$, que l'on prend pour origine des temps.

2- Un espace des états E :

L'ensemble E peut être :

- **Discret** : c'est-à-dire fini ou dénombrable. Il sera, dans ce cas, souvent pratique d'identifier E avec une partie de \mathbb{N} ou de \mathbb{Z} .

- **Non discret** : par exemple $E = \mathbb{R}$ ou $E \subset \mathbb{R}^2$ (partie du plan) ou $E \subset \mathbb{R}^3$ (partie de l'espace).

3- Une famille de variables aléatoires $(X_t)_{t \in T}$:

Ces variables aléatoires sont toutes définies sur un même espace probabilisé (Ω, A, P) et à valeurs dans l'espace des états E .

Ainsi, à chaque instant $t \in T$, on associe, non pas une valeur déterministe (comme dans le calcul d'une trajectoire mécanique) mais une valeur aléatoire décrite par une variable aléatoire X_t à valeurs dans E .

1.3 Processus de Markov

1.3.1 Définitions

De manière générale, un processus dont la loi de probabilité qui gouverne les états futurs du processus ne dépend du passé du processus que par l'état présent de celui-ci, est dit markovien, du nom du mathématicien russe A. Andreï Markov (1856-1922) qui a écrit dès 1906 les prémisses

de la théorie actuelle des processus stochastiques. Nous verrons que cette hypothèse permet d'aller assez loin dans l'évaluation de la fiabilité.

Lorsque le processus est défini de manière continue dans le temps on le représente par un graphe d'état dit de Markov. Lorsque le processus n'est décrit qu'à certains instants discrets on parle de chaîne de Markov. Par abus de langage, ce dernier terme est parfois utilisé pour les modèles à temps continu. Ce sont ces derniers qui sont utilisés pour évaluer de façon quantitative la fiabilité des systèmes, notamment lorsque les taux de transition sont constants, c'est-à-dire que les instants de défaillances et de réparation des composants sont distribués selon des lois exponentielles [20].

Un processus de Markov en temps discret est une séquence $X_1, X_2, X_3 \dots$ de variables aléatoires. L'ensemble de leurs valeurs possibles est appelé l'espace d'états, la valeur X_n étant l'état du processus à l'instant n . La caractérisation de ce type de processus est la même qu'en temps continu, c'est-à-dire que sachant l'état actuel de la chaîne, le futur de celle-ci est indépendant de son passé [6].

Nous nous intéresserons ici uniquement aux chaînes de Markov, c'est-à-dire aux processus de Markov à temps continu et à espace d'état E dénombrable.

Le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est dit de Markov [18], si

a) **Axiome de Markov** : pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tous t_1, \dots, t_n, t_{n+1} tels que: $t_1 < t_2 < \dots, < t_n < t_{n+1}$:

$$P\left([X(t_{n+1}) = x_{n+1}] \mid [X(t_1) = x_1] \cap \dots \cap [X(t_n) = x_n]\right) = P\left([X(t_{n+1}) = x_{n+1}] \mid [X(t_n) = x_n]\right).$$

b) **Axiome d'homogénéité** : pour tous s et t , pour tous $i, j \in E$

$$P\left([X(t+s) = j] \mid [X(s) = i]\right) = \Pi_{ij}(t),$$

ne dépend que de t (et non des instants s et $t+s$).

L'axiome de Markov traduit que la probabilité de n'importe quel comportement futur, le présent étant connu, n'est pas modifié par toute connaissance supplémentaire du passé [11], c'est-à-dire que seul le passé le plus proche est pris en compte pour déterminer les probabilités d'occupation de chaque état. Les processus vérifiant cette propriété sont aussi appelés processus sans mémoire.

Lemme 1.3.1 Les fonctions $\Pi_{ij}(t)$ ainsi définies obéissent aux propriétés suivantes :

$$1- \Pi_{ij}(t) \geq 0, \quad \forall t \geq 0;$$

$$2- \sum_{j \in E} \Pi_{ij}(t) = 1;$$

$$3- \text{Chapman Kolmogorov: } \Pi_{ij}(t+s) = \sum_{k \in E} \Pi_{ik}(s) \cdot \Pi_{kj}(t).$$

Démonstration. Montrons la relation de Chapman Kolmogorov.

Par la formule des probabilités totales, il vient

$$\begin{aligned} \Pi_{ij}(t+s) &= P\left(X(t+s) = j \mid X(0) = i\right) \\ &= P\left(\bigcup_{k \in E} (X(t+s), X(s) = k \mid X(0) = i)\right) \\ &= \sum_{k \in E} P\left(X(t+s), X(s) = k \mid X(0) = i\right) \\ &= \sum_{k \in E} P\left(X(s) = k \mid X(0) = i\right) \cdot P\left(X(t+s) = j \mid X(s) = k, X(0) = i\right) \\ &= \sum_{k \in E} \Pi_{ik}(s) \cdot \Pi_{kj}(t) \end{aligned}$$

où l'avant dernière égalité provient de la propriété de Markov. ■

De plus:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \Pi_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ceci signifie que des transitions de i vers j ($i \neq j$) ne se font pas de manière instantanée, mais pendant un intervalle de temps de durée strictement positive.

1.3.2 Equations d'états

Soit un système dont l'évolution peut être décrite mathématiquement par une chaîne de Markov homogène à paramètres continus [7].

Soient:

- $\Pi_i(t)$: Probabilité pour que le système occupe l'état i à l'instant t .
- $a_{ij}(t)dt$: Probabilité de transition de l'état i à l'état j dans l'intervalle de temps dt .
- $a_{ij}(t)$: Taux de transition (ou intensité de transition) entre l'état i et l'état j .

On peut alors évaluer la probabilité $\Pi_i(t+dt)$ de trouver le système dans l'état i à l'instant $(t+dt)$, en fonction des probabilités $\{\Pi_k(t)\}$ ($k = 1, 2, \dots, n$)

En effet:

$$\Pi_i(t+dt) = \Pi_i(t) \left[1 - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} dt\right] + \sum_{j=1, j \neq i}^n \Pi_j(t) a_{ij} dt$$

Cette équation peut s'écrire:

$$\frac{\Pi_i(t+dt) - \Pi_i(t)}{dt} = -\Pi_i(t) \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} + \sum_{j=1, j \neq i}^n \Pi_j(t) a_{ij}. \quad (1.3.1)$$

Pour dt suffisamment petit, c'est-à-dire $dt \rightarrow 0$, on obtient alors une équation différentielle, caractérisant l'état (i) :

$$\Pi'_i(t) = -\Pi_i(t) \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} + \sum_{j=1, j \neq i}^n \Pi_j(t) a_{ij} \quad (1.3.2)$$

(en admettant l'existence des dérivées par rapport à t)

Le système est donc décrit par un ensemble de n équations différentielles, pouvant être mise-sous forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} \Pi'_1(t) \\ \Pi'_2(t) \\ \Pi'_3(t) \\ \vdots \\ \Pi'_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum_{j=2}^n a_{1j} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & -\sum_{j=1, j \neq 2}^n a_{2j} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & -\sum_{j=1, j \neq 3}^n a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & -\sum_{j=1}^{n-1} a_{nj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_1(t) \\ \Pi_2(t) \\ \Pi_3(t) \\ \vdots \\ \Pi_n(t) \end{pmatrix} \quad (1.3.3)$$

La matrice obtenue est appelée "matrice de transition". Si les probabilités $\{\Pi_k(t)\}_{k=1,2,\dots,n}$ à l'instant $t = 0$ sont connues, alors le système d'équations différentielles précédent permet de déterminer $\{\Pi_k(t)\}$ à tout instant t . Toutefois, cette solution est difficile à obtenir si le nombre d'éléments est élevé. On doit alors recourir à des méthodes numériques.

1.3.3 Equilibre statique

Les probabilités d'équations d'états $\{\Pi_k(t)\}$ déterminées précédemment varient en fonction du temps. On les appelle parfois "probabilités transitoires". Il est souvent intéressant d'étudier le comportement de ces probabilités au bout d'un temps arbitrairement long ($t \rightarrow \infty$). On dit alors que ce sont des "probabilités". Le processus est alors appelé "stationnaire". Dans ce cas, le système évolue vers un état statiquement stable appelé équilibre statique du système. Elle caractérise en théorie la fiabilité du système.

Une méthode possible pour déterminer l'ensemble $\{\Pi_k(\infty)\}_{k=1,2,\dots,n}$ est de résoudre le système d'équations différentielles déjà donné et d'étudier le comportement des solutions lorsque $t \rightarrow \infty$.

Une autre méthode, plus directe, consiste à remarquer qu'en régime permanent, la probabilité d'occupation de chaque état est indépendante du temps, par conséquent le système

d'équations différentielles devient:

$$\Pi_i'(t) = 0 = -\Pi_i \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} + \sum_{j=1, j \neq i}^n \Pi_j a_{ij} \quad i = 1, \dots, n,$$

puisque $\Pi_i(t) = C^{te}$, $i = 1, \dots, n$.

Il faut noter que, dans ce système de n équations algébriques, il n'y en a que $(n - 1)$ équations indépendantes, puisque l'on doit satisfaire la condition: $\sum_{i=1}^n \Pi_i = 1$.

Par suite, on peut écrire sous forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum_{j=2}^n a_{1j} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{12} & -\sum_{j=1, j \neq 2}^n a_{2j} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n-1} & a_{2n-1} & \vdots & -\sum_{j=1, j \neq n-1}^n a_{n-1j} & a_{n-1n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \\ \vdots \\ \Pi_{n-1} \\ \Pi_n \end{pmatrix} \quad (1.3.4)$$

La solution de ce système d'équations algébriques fournit les solutions $\{\Pi_i\}_{i=1, \dots, n}$ en régime permanent.

1.3.4 Les graphes d'états

Les graphes d'états (appelés aussi graphes de Markov) permettent une modélisation sous certaines hypothèses. Les étapes successives sont la construction d'un graphe, la résolution des équations de base et l'interprétation des résultats en termes de fiabilité et de disponibilité. La résolution est grandement simplifiée par un calcul limité aux grandeurs indépendantes du temps.

Construction du graphe

Le graphe représente tous les états du système et les transitions possibles entre ces états. Les transitions entre états correspondent aux événements affectant le fonctionnement des composants du système. Ces événements sont en général des défaillances ou des réparations. Il en résulte que les taux de transition entre états sont essentiellement composés de taux de défaillance ou de réparation (parfois pondérés par des probabilités du type refus de démarrage à la sollicitation) [10]. Le graphe de la figure 1.3.1 représente le comportement d'un système comprenant un unique élément réparable.

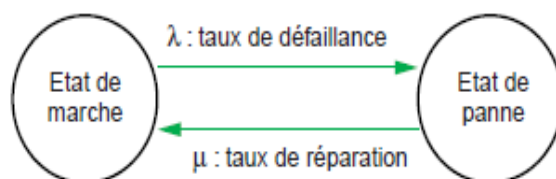


Figure 1.3.1 : Graphe d'état élémentaire

1.3.5 Processus de Poisson

C'est un processus aléatoire à temps continu et à espace d'états discret. Il décrit la réalisation dans le temps d'évènements d'un type donné. Par exemple: l'apparition de panne dans un parc de machines, l'arrivée des tâches dans l'unité centrale d'un ordinateur,...

Processus de comptage

Un processus de comptage $(N_t)_t \in T$, où $T \subset \mathbb{R}$, est un processus croissant (si $s \leq t$, alors $N_s \leq N_t$), à valeurs dans $E = \mathbb{N}$. Il permet de dénombrer les occurrences d'un événement aléatoire donné en fonction du temps. Les trajectoires d'un tel processus sont donc des fonctions en escalier dont les marches sont de taille aléatoire. Les processus de comptage peuvent modéliser de nombreux phénomènes [21].

Définition 1.3.1 *Processus de Poisson*

Un processus aléatoire $\{N(t); t \geq 0\}$ à valeurs entières est un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si les trois conditions suivantes sont satisfaites:

a) $\{N(t); t \geq 0\}$ est homogène dans le temps, c'est-à-dire :

$$P\left(N(t+s) - N(s) = k\right) = P\left(N(t) = k\right) = \Pi_k(t), \forall s > 0, \forall t > 0, k = 0, 1, 2, \dots$$

b) $\{N_t; t \geq 0\}$ est un processus de comptage à accroissements indépendants ce qui signifie que pour tout système d'intervalles disjoints, le nombre d'évènements s'y produisant sont des variables aléatoires indépendantes.

$$P\left(N(t+s) - N(s) = k, N(s) = j\right) = P\left(N(t+s) - N(s) = k\right) \cdot P\left(N(s) = j\right) = \Pi_k(t) \cdot \Pi_j(s)$$

c) La probabilité que deux évènements ou plus se produisent dans un petit intervalle (Δt) est négligeable par rapport à la probabilité qu'il n'y ait qu'un seul évènement:

$$\Pi_k(\Delta t) = \begin{cases} o(\Delta t), & \text{si } k \geq 2 ; \\ \lambda \Delta t + o(\Delta t), & \text{si } k = 1 ; \\ 1 - \lambda(\Delta t) + o(\Delta t), & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

Théorème 1.3.1 [21]

Si un processus de comptage $\{N(t); t \geq 0\}$ satisfait aux trois conditions citées dans la définition 1.3.1, alors la probabilité d'occurrence est :

$$\forall t > 0, k = 0, 1, 2, \dots, P(N(t) = k) = \Pi_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},$$

par conséquent, $E(N(t)) = V(N(t)) = \lambda t$.

Relation fondamentale

Soit $\{N_t; t \geq 0\}$ un processus de comptage et soit T_n : "Durée séparant le $(n - 1)^{i\grave{e}me}$ évènement du $n^{i\grave{e}me}$ évènement ($n = 1, 2, \dots$), en particulier:

T_1 : est l'instant de réalisation du premier évènement.

T_n : appelée " durée d'attente" qui représente le temps pendant lequel le processus demeure à l'état $(n - 1)$.

On pose $S_n = \sum_{i=1}^n T_i = T_1 + T_2 + \dots + T_n$ (le temps écoulé jusqu'à la réalisation du $n^{i\grave{e}me}$ évènement).

On aura alors:
$$\left\{ \begin{aligned} N_t \leq n &\Leftrightarrow S_{n+1} > t \\ &\text{et} \\ N_t \geq n &\Leftrightarrow S_n \leq t \end{aligned} \right.$$

Il en résulte que:

$$\begin{aligned} P(N_t = n) &= P(N_t \geq n \text{ et } N_t \leq n) \\ &= P(S_n \leq t \text{ et } S_{n+1} > t) \\ &= P(S_n \leq t) - P(S_n \leq t \text{ et } S_{n+1} \leq t) \end{aligned}$$

On a $\{S_{n+1} \leq t\} \subset \{S_n \leq t\}$

Donc $P(N_t = n) = P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t)$.

1.3.6 Processus de poisson et loi exponentielle

Intervalle entre deux événements

Soit $\{N(t); t \geq 0\}$ un processus de poisson de paramètre λ .

T_n : la durée séparant le $(n - 1)^{i\grave{e}me}$ événements du $n^{i\grave{e}me}$ événements [21].

Théorème 1.3.2 [21]

Les temps d'attente T_n d'un processus de poisson, sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi exponentielle de paramètre λ .

Généralisation

Théorème 1.3.3 [21]

La durée séparant $n + 1$ événements consécutifs, en d'autres termes le temps écoulé entre le $k^{i\grave{e}me}$ et le $(k + 1)^{i\grave{e}me}$ événement, obéit à une loi de gamma de paramètres λ et n .

Nouvelle caractérisation du processus de poisson

Théorème 1.3.4 [21]

Un processus de comptage $\{N(t); t \geq 0\}$ est un processus de poisson de paramètre λ si les intervalles de temps entre deux événements consécutifs sont des variables aléatoires indépendantes obéissant à la même loi exponentielle de paramètre λ .

1.3.7 Processus de naissance et de mort

Les processus de naissance et de mort sont des processus stochastiques à temps continu et à espace d'état discret $E = \{0, 1, \dots\}$, markoviens (sans mémoire).

A partir d'un état donné " n ", les transitions ne sont possibles que vers l'un ou l'autre des états voisins " $n + 1$ " ou " $n - 1$ ", on parle alors de naissance et de mort [21].

Remarque 1.3.1 *Le processus de poisson est un cas particulier des processus de naissance et de mort.*

A la différence de ces cas particulier, les taux de transitions dépendent généralement de l'état " n " dans lequel le système se trouve.

Définition 1.3.2 Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ un processus stochastique à espace d'états $\{0, 1, \dots\}$ et homogène dans le temps.

$$P(X(t+s) = j \mid X(s) = i) = \Pi_{ij}(t) \text{ indépendante de } s,$$

$\{X(t), t \geq 0\}$ est un processus de naissance et de mort si les conditions suivantes sont satisfaites:

- $\Pi_{i,i-1}(\Delta t) = P(X(t+\Delta t) = i-1 \mid X(t) = i) = \mu_i \Delta t + o(\Delta t), \forall i \geq 1.$
- $\Pi_{i,i+1}(\Delta t) = P(X(t+\Delta t) = i+1 \mid X(t) = i) = \lambda_i \Delta t + o(\Delta t), \forall i \geq 0.$
- $\Pi_{i,i}(\Delta t) = P(X(t+\Delta t) = i \mid X(t) = i) = 1 - (\lambda_i + \mu_i) \Delta t + o(\Delta t), \forall i \geq 0$

on déduit alors:

$$\Pi_{ij}(\Delta t) = o(\Delta t) \quad \text{si } |i-j| \geq 2 \text{ avec } \lambda_i > 0, \mu_i > 0 \text{ sont les taux de transition:}$$

λ_i : taux de naissance (croissance).

μ_i : taux de mort (décroissance).

Graphe de transition:

Le graphe des taux de transition est constitué de “boudins”, les arcs vers la droite représentant les taux de naissance, et ceux vers la gauche les taux de mort.

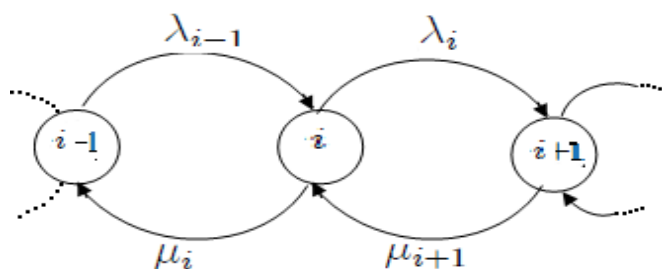


Figure 1.3.2 : Graphe de transition.

1.3.8 Processus de renouvellement

Considérons une distribution aléatoire de points sur \mathbb{R}_+ . Soit $N(t)$ le nombre de points dans $[0, t]$. $\{N(t), t > 0\}$ constitue un processus de comptage. Chaque point de la distribution correspond à un événement particulier. Supposons, sans perte de généralité, que cet événement est une panne et que l'objet défaillant est remplacé sans délai par un objet identique ; on dit qu'il y a renouvellement.

Notons S_n la date où se produit la $n^{\text{ième}}$ panne, ($n^{\text{ième}}$ renouvellement). Considérons la suite de v.a. définies par $T_n = S_n - S_{n-1}$. Ce sont les temps d'inter-arrivées ou inter-occurrences, c'est-à-dire la suite des temps qui s'écoulent entre deux événements successifs. T_n est le temps qui s'écoule entre le $(n-1)^{\text{ième}}$ renouvellement et le $n^{\text{ième}}$ renouvellement.

On a la relation : $S_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n$

Lorsque les T_n sont indépendants, la loi des T_n caractérise le processus de renouvellement [24].

a- Fonction de renouvellement

Définition 1.3.3 On appelle fonction de renouvellement et on note $M(t)$, l'espérance mathématique de la variable aléatoire $N(t)$ définie par:

$$M(t) = E(N(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} n.P(N(t) = n), \quad (1.3.5)$$

$M(t)$ représente le nombre moyen d'événements (renouvellement ou bien panne) se produisant entre 0 et t . C'est une fonction croissante de t , nulle en 0. Nous nous comptabilisons pas la date $t_0 = 0$ dans les renouvellements puisqu'il y a pas de panne à cet instant.

Théorème 1.3.5 [24]

Soit $\{N(t), t > 0\}$ un processus de renouvellement alors:

(i) La distribution de probabilité de la variable aléatoire de renouvellement est sous la forme:

$$P(N(t) = n) = F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t),$$

où $F^{(n)}(\cdot)$ est le produit de convolution d'ordre n pour la fonction $F(\cdot)$ (c'est la fonction de répartition de la somme de n v.a. i.i.d. de même fonction de répartition $F(\cdot)$), on pose par convention

$$F^{(1)}(t) = F(t).$$

(ii) La fonction de renouvellement $M(t)$ s'écrit :

$$M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t). \quad (1.3.6)$$

Elle est solution de l'équation intégrale du renouvellement

$$M(t) = F(t) + \int_0^t M(t-x)dF(x). \quad (1.3.7)$$

De plus

$$\text{var}(N(t)) = 2 \int_0^t M(t-x)dM(x) + M(t) - M^2(t)$$

b- Densité de panne (ou de renouvellement)

Définition 1.3.4 On appelle densité de panne (ou de renouvellement):

$$r(t) = M'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(t). \quad (1.3.8)$$

En dérivant (1.3.7) on obtient:

$$r(t) = f(t) + \int_0^t h(t-x)f(x)dx.$$

Exemple 1.3.1 La fonction de renouvellement ne peut pas être obtenue sous forme explicite à l'exception de certain cas particuliers [9].

- Cas exponentiel

Les X_i suivent une loi exponentielle de paramètre λ . C'est un processus de Poisson. La loi de $N(t)$ est donnée par

$$P(N(t) = n) = \left(\frac{1}{n!}\right)(\lambda.t)^n e^{-\lambda t},$$

c'est une loi de Poisson de paramètre $\lambda.t$.

L'espérance correspond à la fonction de renouvellement

$$M(t) = E(N(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!}\right)(\lambda.t)^n e^{-\lambda t} = \lambda t.$$

$$r(t) = \lambda.$$

- Cas normale

Pour la loi normale $N(\mu, \sigma)$ les calculs ne sont pas agréables.

Soit Φ la fonction de répartition de $N(0, 1)$.

La propriété d'additivité des variables normales indépendantes permet d'écrire:

$$P(N(t) \geq n) = \Phi\left(\frac{t-n\mu}{\sqrt{\sigma n}}\right).$$

D'où

$$M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{t-n\mu}{\sqrt{\sigma n}}\right).$$

1.4 Le processus semi- Markovien

L'intérêt de modèles semi-Markovien est contenu dans le choix explicite de la distribution du temps de séjour dans chaque état. La probabilité de rester dans un état peut alors dépendre de la durée déjà passée dans cet état. Nous nous intéressons maintenant à un système dont

l'évolution dans le temps est décrite par un processus semi-markovien, à valeurs dans un espace d'état fini ou dénombrable, nous précisons le modèle de Weibull-Markov [17].

1.4.1 Le modèle de Weibull-Markov

Le modèle de Weibull-Markov est obtenu à partir du modèle homogène de Markov, au lieu de la distribution exponentielle on utilise la distribution de Weibull pour les durées de résidence dans les états et les transitions entre les états des composants. L'avantage de cette distribution qu'elle n'ignore pas l'usure antérieure du composant [15].

Les deux méthodes sous-cites seront explicitées dans le chapitre 4

1.5 Processus de dégradation

Les processus de dégradation sont issus de trajectoires de processus stochastiques à accroissements indépendants.

La dégradation est un processus pour le quel le taux de panne augmente suite aux effets d'usure et de l'environnement. Le processus de dégradation est représenté par une séquence d'étapes d'usures croissantes, qui mènent à l'échec du matériel. Le nombre d'étapes de dégradation peut varier, il ya essentiellement deux façons de les définir, soit par la durée soit par les signes physiques (usure, corrosion,...etc) [4].

Caractéristiques des processus de dégradation

Physiquement, la description d'un processus de dégradation implique les conséquences suivantes :

1. Le processus de dégradation U_t prend ses valeurs dans \mathbb{R}_+ ;
2. Le niveau de dégradation évolue de manière monotone croissante dans le temps ;
3. Le domaine de défaillance se limite à un seuil critique à ne pas dépasser, c'est-à-dire à un réel ;
4. Les trajectoires du niveau de dégradation sont les seules données observables. Elles sont mesurées depuis l'instant initial jusqu'à ce que le niveau de dégradation atteigne le seuil de défaillance. Comme les composants ne sont pas réparables, aucune trajectoire ne peut boucler, on a donc des cascades de pannes.

Ces caractéristiques sont discutables selon le type de phénomène que l'on décrit.

1.6 Conclusion

Les processus stochastiques se prêtent particulièrement bien à développer l'aptitude à la modélisation mathématique, donc il faut se contenter de prendre connaissance des définitions et des résultats présentés. Le contenu du chapitre porte principalement sur les chaînes de Markov à temps continu, suivi par les principaux résultats sur les processus. Certains processus stochastiques ont été introduit et qui vont permettre grâce aux graphes des états la modélisation Markovienne et la modélisation de Weibull-Markov, ces dernières seront explicités dans le troisième chapitre.

2.1 Introduction

L'objectif de la théorie de la fiabilité est l'analyse de probabilité de panne d'un système. Le terme est à prendre au sens large, il peut être une structure composée de plusieurs éléments comme il peut être un seul élément. Nous introduirons dans ce chapitre les principaux fondements mathématiques de la théorie de fiabilité, nous en verrons les notions de fiabilité, de disponibilité, de maintenabilité ainsi les principaux indices de fiabilité. Par la suite, nous aborderons la notion de fiabilité des systèmes. Nous verrons comment déterminer les indices de fiabilité d'un système suivant la structure des éléments qui le composent.

2.2 Un peu d'histoire

Les techniques de sûreté de fonctionnement (fiabilité, disponibilité, maintenabilité ...) se sont développées tardivement par rapport aux techniques, maintenant classique des diverses disciplines de l'art de l'ingénieur. L'histoire de ces concepts et de leur introduction dans le domaine industriel s'avère difficile à reconstituer compte tenu de leur inégal développement suivant les branches. Nous nous contenterons de rappeler les faits marquants,

- Les premières statistiques sur les pannes et les accidents d'avions sont apparus pendant les années 30.

- Elaborations des lois de fiabilité suivent aux échecs successifs des premiers essais sur le lancement des missileV1, pendant les années 40.

- Dans les années 50, et avec le développement de l'électronique et ses applications dans les domaines militaires surtout aux états unis, l'approche fiabiliste a été formalisées dans la marine, l'aéronautique, le nucléaire, les télécommunications...

- Dans les années 60, d'autres méthodes de calcul de fiabilité ont vu le jour tel : Calcul par arbre de cause, analyse des modes de défaillances..., pour des raisons de sûreté de fonctionnement dans les domaines de l'aéronautique et le nucléaire.

- Le développement de l'outil informatique dans les années 70 a permis la création de banques de données nécessaires à tout calcul de probabilité, et de traiter des systèmes de plus en plus complexe.

Depuis de nouvelles méthodes ne cessent de paraître renforçant les méthodes déjà existantes [3].

2.3 Définitions

2.3.1 Fiabilité

La fiabilité est l'aptitude (la probabilité) d'un système à accomplir une fonction (ou bien mission) donnée durant une période déterminée, dans des conditions spécifiées d'exploitations [13].

Par système on comprend un équipement (mécanique, électronique..), un système informatique (matériel ou logiciel...) dont on étudie la fiabilité. Elle se caractérise donc par quatre concepts:

- **La probabilité** : une probabilité se définit par le rapport entre le nombre de cas favorable et le nombre de cas possibles concernant la réalisation d'un événement. Dans le cas de la fiabilité, la probabilité exprime les chances d'accomplir une fonction.

- **L'accomplissement d'une fonction**: le dispositif que l'on étudie du point de vue de la fiabilité devra être dans un état qui lui permet d'accomplir la fonction requise d'une manière satisfaisante.

- **Les conditions données** : sont toutes les contraintes extrêmes quelles soient d'origine mécanique, chimique, physique et électrique subie par le dispositif du fait de son environnement

- **Le temps** : c'est le temps exprimé au sens large. Ce sera bien souvent, un nombre de cycles ou caractéristiques qui expriment la durée de vie.

Généralement, on a contenu de distinguer la notion de fiabilité selon l'étape étudiée de la vie d'un système par:

1. **La fiabilité prévisionnelle:** C'est celle qui est calculée sur la base d'un modèle mathématique, défini à partir des données du projet et la fiabilité estimée des composants.
2. **La fiabilité estimée ou intrinsèque:** C'est la fiabilité d'un dispositif (système) mesurée au cour d'essais spécifiques effectués dans le cadre d'un programme d'essais prédéfinis.
3. **La fiabilité opérationnelle:** C'est la fiabilité mesurée sur des dispositifs en exploitation normale. Elle dépend des conditions réelles d'exploitation.

2.3.2 Défaillance

C'est la cessation de l'aptitude d'une entité à accomplir une fonction requise, qui passe dans l'état de panne [1]. Donc c'est une perte partielle ou totale des propriétés d'un dispositif qui diminuent significativement allant jusqu'à la perte totale ou partielle de sa capacité de fonctionnement.

On distingue plusieurs types de défaillances ou pannes:

- **Les défaillances soudaines (subites):** Elles sont difficilement prévisibles ou imprévisibles par un examen suivi des caractéristiques du dispositif, elles sont dues à une perte totale des propriétés du système entraînant son incapacité de fonctionnement. Généralement ce type de panne est souvent rencontré en électronique.

- **Les défaillances progressives (graduelles):** Elles sont prévisibles par un examen suivi des caractéristiques du dispositif. Ce type de défaillance est prépondérant pour le matériel mécanique, pour laquelle se manifeste l'usure des composants après une certaine durée de fonctionnement.

- **Les défaillances partielles:** Elles résultent des déviations d'une ou plusieurs caractéristiques au delà des limites spécifiques mais n'entraîne pas une disparition complète de fonction.

- **Les défaillances complètes:** Elles résultent de la déviation d'une ou plusieurs caractéristiques telles qu'elles entraînent la disparition de la fonction.

- **Les défaillances par dégradation :** Elles sont progressives partielles ou complètes, réversibles ou non.

- **Les défaillances catalectiques:** Elles sont soudaines complètes et irréversibles.

On peut aussi classer les défaillances selon la période de vie de l'équipement durant laquelle elles apparaissent. On distingue trois classes [8]; à savoir:

- **Les défaillances précoces:** elles surviennent durant la période de jeunesse du matériel (on l'appelle aussi période de mortalité infantile), c'est-à-dire juste après sa mise en fonctionnement. Ces défaillances peuvent être attribuées à la conception, à la fabrication ou à la mauvaise utilisation du matériel. Généralement, un contrôle rigoureux est effectué avant la mise en service pour détecter les éléments présentant ce type de défaillance.

- **Les défaillances aléatoires:** Elles apparaissent durant la période de vie utile du matériel. Ce sont des défaillances aléatoires. Elles ont la même probabilité d'apparition.

- **Les défaillances par usure:** Ce sont des pannes progressives et elles apparaissent suite à la fatigue, l'usure et la dégradation du matériel après une longue période de fonctionnement.

Elles sont explicitées sur la figure (2.4.2) représentant les variations du taux de défaillance d'un équipement technique.

2.4 Notions de fiabilité

2.4.1 Durée de vie

On considère un équipement qui commence à fonctionner au temps $t_0 = 0$.

On appelle durée de vie (lifetime) de cet équipement l'intervalle de temps entre sa mise en service jusqu'à la première défaillance. Elle sera assimilée à une variable aléatoire non négative X . Sa fonction de répartition représente la probabilité de défaillance de l'équipement avant l'instant t ou la probabilité de défaillance dans l'intervalle $[0, t]$.

$$F(t) = \mathbf{P}(X \leq t). \quad (2.4.1)$$

Si $F(t)$ absolument continue (donc dérivable), la dérivée $f(t) = F'(t) = \frac{dF(t)}{dt}$ s'appelle densité de probabilité de la durée de vie X .

2.4.2 Fonction de fiabilité

On appelle fonction de fiabilité (Reliability) de la variable aléatoire X , la probabilité de bon fonctionnement continu durant $[0, t]$, on la note $R(\cdot)$ ou $\bar{F}(\cdot)$. Elle est donnée par

$$R(t) = 1 - F(t) = \mathbf{P}(X \geq t) = \bar{F}(t) = \int_t^{\infty} f(u)du \quad (2.4.2)$$

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(u)du. \quad (2.4.3)$$

La figure 2.1 ci-dessous présente l'allure de la fonction $R(t)$ en fonction du temps.

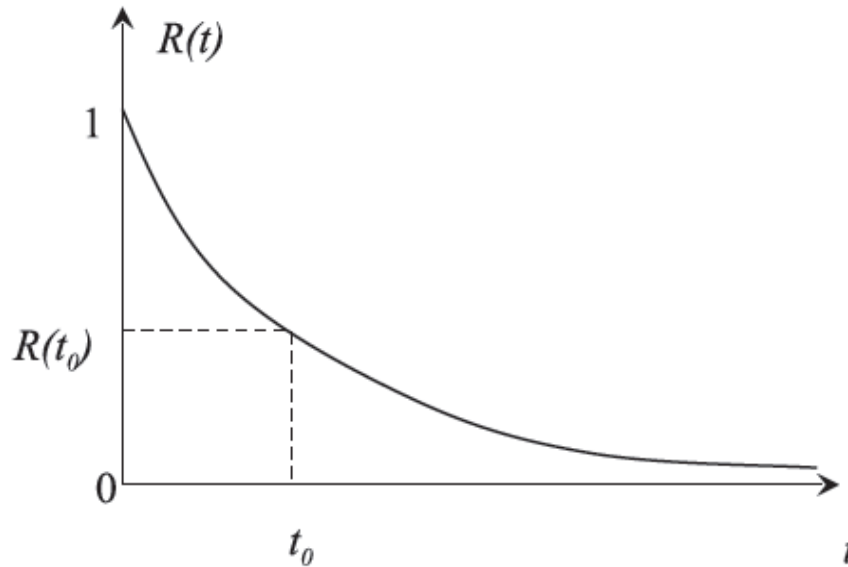


Figure 2.4.1 : Courbe de survie ou de fiabilité

2.4.3 Durée de survie (durée de vie résiduelle)

On considère un équipement ayant fonctionné sans défaillance jusqu'à la date t . On appelle durée de survie ou bien durée de vie résiduelle d'un équipement d'âge t , notée X_t , le temps d'attente de la panne. C'est une variable aléatoire définie par:

$$X_t = X - t \quad (2.4.4)$$

Sa fonction de répartition

$$F_t(t) = \mathbf{P}(X_t \leq x \mid X > t) = \mathbf{P}(X - t \leq x \mid X > t) = \frac{F(t+x) - F(t)}{1 - F(t)},$$

que l'on peut écrire aussi:

$$F_t(x) = \frac{R(t) - R(t+x)}{R(t)}, \quad (2.4.5)$$

et de fonction de fiabilité

$$R_t(x) = 1 - F_t(x) = \frac{R(t+x)}{R(t)}. \quad (2.4.6)$$

2.4.4 Taux de défaillance

La notion de taux de défaillance (Hazard rate) ou risque de panne est fondamentale en théorie de fiabilité en particulier pour les distributions de survie.

Le taux de défaillance, $\lambda(t)$, est la probabilité pour qu'un élément tombe en panne au cours de $[t, t + x]$, sachant qu'il a fonctionné sans défaillance jusqu'à la date t . Il est donné par:

$$\lambda(t) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \frac{F(t+x) - F(t)}{1 - F(t)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \frac{R(t) - R(t+x)}{R(t)}. \quad (2.4.7)$$

Si F est dérivable, on aura

$$\lambda(t) = \frac{-R'(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}. \quad (2.4.8)$$

En intégrant l'équation différentielle (2.4.7), la fonction de fiabilité s'écrira:

$$R(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(u) du\right). \quad (2.4.9)$$

La fonction

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du = \log\left(1/R(t)\right), \quad (2.4.10)$$

s'appelle fonction de risque ou fonction de hazard (Hazard function). Elle représente le taux de défaillance cumulé jusqu'à l'instant t .

Le terme taux de défaillance, sous entend une grandeur permettant de mesurer la vitesse d'apparition des pannes. Il est possible d'interpréter $\lambda(t)$ comme le pourcentage moyen de pannes par unité de temps, qui apparaissent à la date t .

Le comportement temporel du taux de panne est représenté par la courbe "en baignoire" (voir figure 2.2). Cette courbe comporte trois phases pour lesquelles on détaille les causes potentielles et les actions à entreprendre pour améliorer le comportement du système.

- Phase 1:

Période de jeunesse (ou période de mortalité infantile ou période des défaillances précoces), pendant laquelle le taux de défaillance décroît;

- Phase 2:

Période de vie utile qui correspond à la maturité de l'élément durant laquelle les défaillances sont aléatoires et le taux de défaillance est sensiblement constant;

- Phase 3:

Période de vieillesse pendant laquelle le taux de défaillance croît. Elle correspond à la période d'usure normale de l'élément.

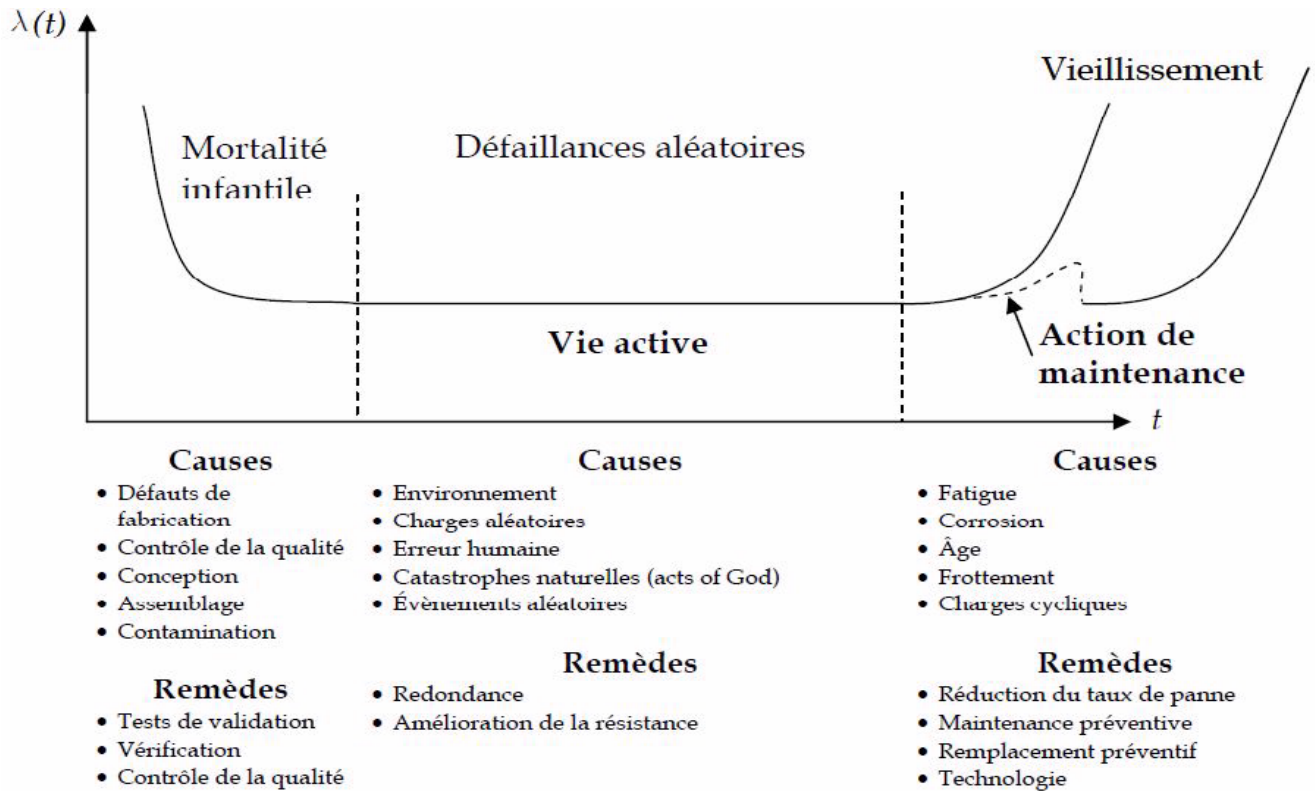


Figure 2.4.2 : Courbe en baignoire représentant le taux de panne.

Selon le type de produit (électronique, informatique ou mécanique), l'allure de la courbe peut changer. Lwis (1987) présente plusieurs types de courbes en baignoire (voir figure 2.4.3).

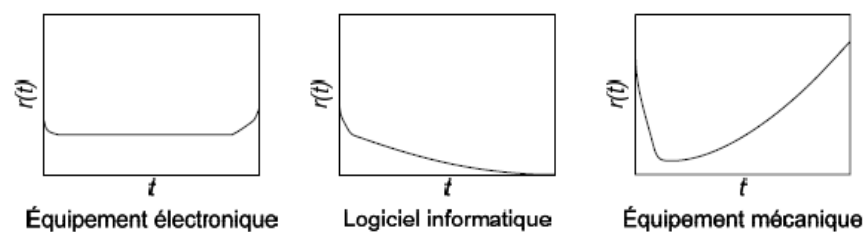


Figure 2.4.3 : Allure caractéristique du taux de panne, Lwis 1987.

2.4.5 Les grandeurs du temps

Des grandeurs associées à la fiabilité des systèmes peuvent être calculées à partir des mesures de probabilités. Contrairement aux précédentes, qui sont en fonction du temps, les grandeurs suivantes caractérisent des durées moyennes [23]. L'analyse de cycle (voir figure 2.4.4), fait remarquer qu'il est composé de:

– **MTTF**: Durée moyenne de fonctionnement d'une entité avant la première défaillance (anglais Mean Time To Failure)

$$\mathbf{MTTF} = \int_0^{\infty} R(t) dt \quad (2.4.11)$$

– **MTTR**: Durée moyenne de réparation (anglais Mean Time To Repair)

$$\mathbf{MTTR} = \int_0^{\infty} [1 - M(t)] dt \quad (2.4.12)$$

– **MUT**: Durée moyenne de fonctionnement après réparation (anglais Mean Up Time)

– **MDT**: Durée moyenne d'indisponibilité après défaillance (anglais Mean Down Time)

– **MTBF**: Durée moyenne entre deux défaillances (anglais Mean Time Between Failure)

$$\mathbf{MTBF} = \mathbf{MDT} + \mathbf{MUT}$$

La figure suivante illustre cette situation:

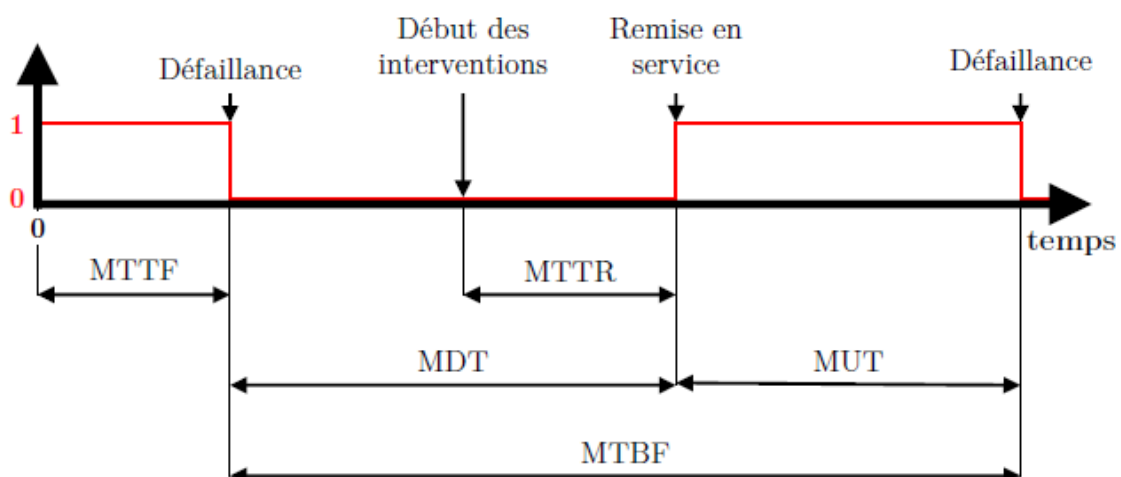


Figure 2.4.4 : Présentation des différentes grandeurs en fonction du temps. Dans le cas d'un système réparable.

Pour un matériel irréparable, pour des raisons techniques ou économiques, son évolution temporelle est représenté par le diagramme suivant:

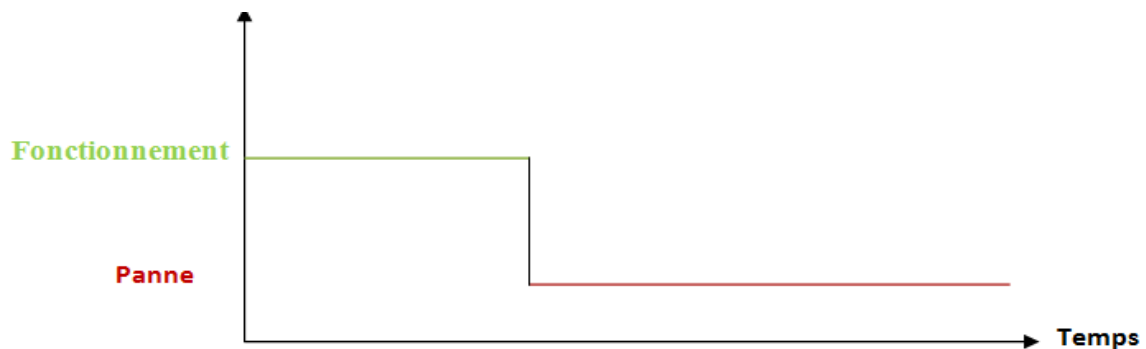


Figure 2.4.5 : Chronogramme d'un matériel irréparable.

2.5 Fiabilité des systèmes:

Lors d'une étude, il convient de considérer tout système comme un assemblage d'éléments dont les actions et les interactions vont déterminer le comportement de l'ensemble du système.

2.5.1 Systèmes non réparables

On appelle système tout assemblage de composants, dont on suppose en général (mais pas toujours !) que les pannes se produisent indépendamment les unes des autres.

Un système non réparable est un système pour lequel aucune réparation de composants défaillants n'est envisageable [11].

A l'exception des systèmes en série, les systèmes ont généralement des structures redondantes : un ou plusieurs composants peuvent tomber en panne sans que le système ne cesse de fonctionner. En renforçant la redondance du système, on augmente sa fiabilité. Il existe 2 types de redondance :

- *Redondance active* (réserve chaude) : tous les composants fonctionnent en même temps.
- *Redondance passive* (réserve froide) : il existe des composants en attente, qui ne peuvent pas tomber en panne tant qu'ils ne sont pas mis en marche.

2.5.2 Systèmes réparables

Dans le but d'augmenter la fiabilité d'un système à redondance, on peut envisager de réparer les composants qui tombent en panne. On admettra généralement qu'un composant réparé se comporte comme un composant neuf. Pour résoudre ce type de problème, il est nécessaire de connaître, non seulement la loi de la durée de bon fonctionnement, mais en plus, celle de la durée de réparation [11].

2.5.3 Fonction de structure:

On s'intéresse à la fiabilité d'un système de n composants distincts, que nous numérotions "1, ..., n ". Chacun de ces composants peut être en bon état ou en panne.

Notons x_1, x_2, \dots, x_n les variables associées au fonctionnement des composants, à valeurs dans $\{0, 1\}$ et on note X_i au lieu de x_i si la variable est aléatoire [3].

Pour le composant i , on note:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{si le } i^{\text{ème}} \text{ composant est en bon état;} \\ 0, & \text{si le } i^{\text{ème}} \text{ composant est en panne.} \end{cases}$$

Le but est de caractériser l'état du système (marche ou panne) en fonction de l'état de chacun de ses éléments.

Définition 2.5.1 Soit ϕ une fonction dépendante du vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et décrivant de façon binaire le fonctionnement du système.

Notons par convention:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si le système est en fonctionnement;} \\ 0, & \text{si le système est en panne.} \end{cases}$$

La fonction ϕ est appelée fonction de structure.

2.5.4 Chemins

Définition 2.5.2 Pour tout vecteur x de E tel que $\phi(x) = 1$, l'ensemble

$C_x = \{i : x_i = 1\}$ est appelé chemin lié à x .

Un chemin est donc un ensemble de composants dont le bon fonctionnement assure le bon fonctionnement du système [3].

Chemin minimal

L'ensemble des valeurs possibles de X est une partie de $E = \{0, 1\}^n$ qui se décompose en: E^+ : état de bon fonctionnement et E^- : état de panne.

Si x et y sont des vecteurs de E , on dira que x est inférieur à y , noté $x \leq y$, pour tout $i = \overline{1, n}$ si on a: $x_i \leq y_i$ et au moins une de ses inégalités est stricte.

Définition 2.5.3 Soit $x \in E^+$, un chemin C_x est minimal si tout y inférieur à x , appartient à E^- : $y < x \Rightarrow \phi(y) = 0$.

Un chemin minimal est l'ensemble minimal d'éléments dont les fonctionnements assurent le fonctionnement du système [9].

La fonction de structure ϕ est égale au max sur tous les chemins minimaux du produit des états de ce chemin, de ce qui s'écrit:

$$\phi(x) = \max_{c \in CM} \left\{ \min_{i \in c} (x_i) \right\},$$

où CM est l'ensemble de tous les chemins minimaux.

2.5.5 Coupes

Définition 2.5.4 Si $\phi(x) = 0$ alors $K_x = \{i : x_i = 0\}$ est la coupe lié à x .

Une coupe (cut set) est un ensemble d'éléments dont la panne entraîne la panne du système.

Coupe minimal

Définition 2.5.5 Soit $x \in E^-$, une coupe K_x est minimale si tout y supérieur à x appartient à E^+ : $y > x \Rightarrow \phi(y) = 1$

Une coupe minimale est l'ensemble minimal d'éléments dont la défaillance cause la défaillance du système [9].

La fonction de structure ϕ est égale à

$$\phi(x) = \min_{k \in KM} \left\{ \max_{i \in k} (x_i) \right\},$$

où KM est l'ensemble des coupes minimales.

2.5.6 Configuration série

Un système à n éléments en série est en bon fonctionnement, si seulement si, tous les éléments le sont. Il est hors service si au moins un élément est en panne.

- Hypothèse de départ:

- Les défaillances sont indépendantes les unes des autres.
- La fiabilité de chaque sous-système ou de chaque élément a été déterminée.

Dans ce cas la fonction de structure ϕ est de forme:

$$\phi(x) = \phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n = \prod_{i=1}^n x_i. \quad (2.5.1)$$

Si on note T_i durée de vie de l'élément i alors la durée de vie du système correspond à $T = \min(T_i)$

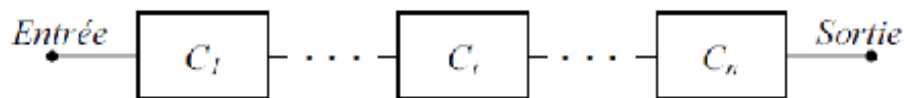


Figure 2.5.6 : Configuration de n composants en série

- La fiabilité du système, notée R est le produit des fiabilités des éléments qui le composent [3],

$$R(t) = \prod_{i=1}^n (R_i(t)). \quad (2.5.2)$$

Démonstration. [3]

En effet

$$\begin{aligned} R(t) &= P(T > t) = P(\min T_i > t) \\ &= P(T_1 > t, T_2 > t, \dots, T_i > t, \dots, T_n > t) \\ &= P(T_1 > t) \cdot P(T_2 > t) \cdot \dots \cdot P(T_i > t) \cdot \dots \cdot P(T_n > t) \\ &= R_1(t) \cdot R_2(t) \cdot \dots \cdot R_i(t) \cdot \dots \cdot R_n(t) \\ &= \prod_{i=1}^n (R_i(t)). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

- Le taux de défaillance du système, noté $\lambda(t)$ est la somme des taux de défaillance des éléments qui le composent.

En effet, en prenant le log de chaque terme de $R(t)$ et en dérivant, on obtient:

$$\lambda(t) = \lambda_1(t) + \dots + \lambda_n(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t). \quad (2.5.3)$$

- Le temps moyen de bon fonctionnement du système est inférieur à chacun des temps moyens de fonctionnement de ses composants

En effet, on a $R(t) \leq R_i(t) \forall i = \overline{1, n}$ alors : $\int_0^\infty R(t)dt \leq \int_0^\infty R_i(t)dt \forall i = \overline{1, n}$.

D'où

$$E(T) \leq E(T_i), \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

2.5.7 Configuration parallèle

Un système à n éléments en parallèle est hors service, si et seulement si, tous les éléments le sont. Il est en bon fonctionnement si au moins un élément est en bon fonctionnement. La fonction de structure est donnée par :

$$\phi(x) = \phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i). \quad (2.5.4)$$

- La durée de vie d'un système en parallèle est le maximum des durées de vie des éléments qui le composent: $T = \max(T_1, T_2, \dots, T_n)$.

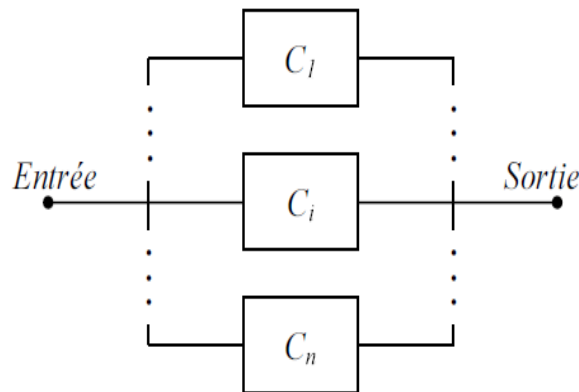


Figure 2.5.7 : Configuration de n composants en parallèle.

La fiabilité du système, notée R est:

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i(t)).$$

Démonstration. [3]

La fonction de répartition de la variable T est alors:

$$\begin{aligned} F(t) &= P(T \leq t) = P(T_1 \leq t, T_2 \leq t, \dots, T_n \leq t) \\ &= P(T_1 \leq t) \cdot P(T_2 \leq t) \cdot \dots \cdot P(T_n \leq t) \end{aligned}$$

$$= \prod_{i=1}^n P(T_i \leq t) = \prod_{i=1}^n F_i(t).$$

La fiabilité d'un système de n composants en parallèle est donnée par

$$\begin{aligned} R(t) &= 1 - F(t) = 1 - \prod_{i=1}^n F_i(t) \\ &= 1 - \left[\left(1 - R_1(t)\right) \cdot \left(1 - R_2(t)\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - R_n(t)\right) \right] \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n \left(1 - R_i(t)\right). \blacksquare \end{aligned}$$

- Le temps moyen de bon fonctionnement du système est supérieur au temps moyen de fonctionnement de chacun de ses composants $R(t) \leq R_i(t) \forall i = \overline{1, n}$ d'où $E(T_i) \geq E(T) \forall i = \overline{1, n}$.

En effet [3],

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n \left(1 - R_i(t)\right) = 1 - R(t) &\Leftrightarrow 1 - R(t) \geq 1 - R_i(t) \\ &\Rightarrow -R(t) \geq -R_i(t) \\ &\Rightarrow R(t) \leq R_i(t), \forall i. \end{aligned}$$

D'où $E(T_i) \geq E(T) \forall i = \overline{1, n}$.

2.5.8 Configuration série-parallèle

Souvent on peut rencontrer des systèmes avec les deux configurations simultanément citées auparavant, il s'agit de la configuration série-parallèle. Un système série-parallèle résulte de la mise en parallèle de sous systèmes-série [14].

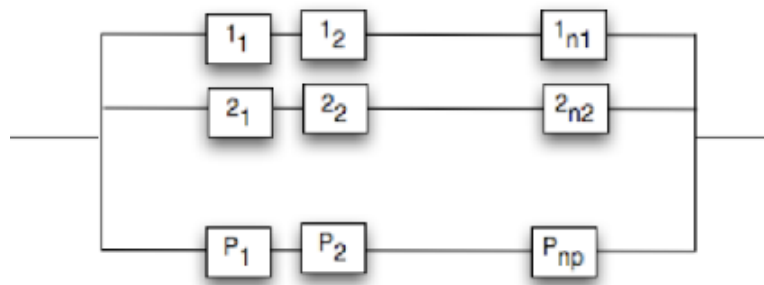


Figure 2.5.8 : Configuration série-parallèle.

Si on note R_{ij} la fiabilité du $j^{\text{ième}}$ composant de la $i^{\text{ième}}$ branche,

$$R(t) = 1 - \prod_{j=1}^p \left(1 - \prod_{i=1}^{n_j} R_{ij}(t)\right) \quad (2.5.5)$$

Où

n_j : nombre d'éléments de la branche j .

p : nombre de branches en série.

2.5.9 Configuration parallèle-série

Un système parallèle-série résulte de la mise en série de sous-systèmes parallèles [14].

Le diagramme de fiabilité est donné dans la figure 2.5.9

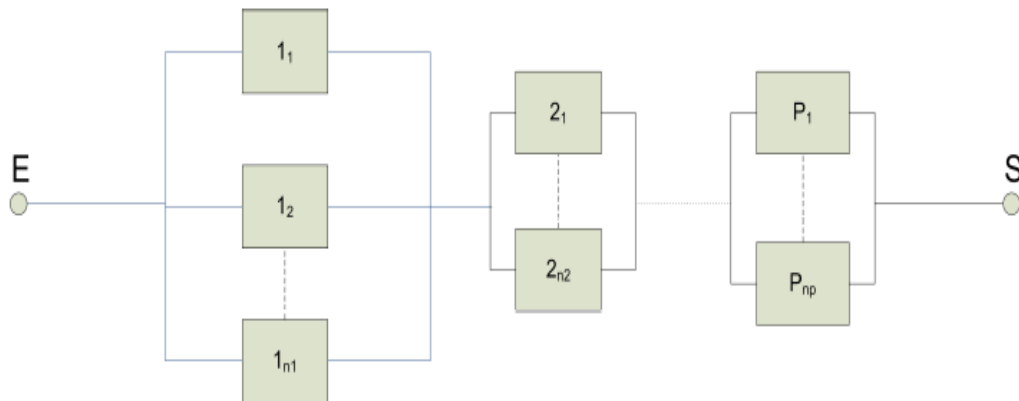


Figure 2.5.9 : Configuration parallèle-série.

Avec les mêmes notations que précédemment, la fiabilité de ce système est alors :

$$R(t) = \prod_{i=1}^p \left[1 - \prod_{j=1}^{n_j} (1 - R_{ij}(t)) \right]. \quad (2.5.6)$$

Exemple 2.5.1 On dispose de 4 éléments de fiabilité R_1, R_2, R_3 et R_4 . On désire comparer deux configurations:

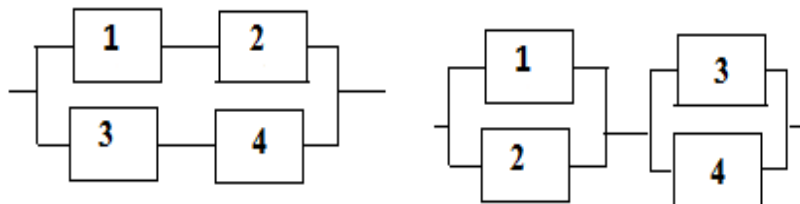


Figure 2.5.10 : Représentation de deux systèmes (S_1) et (S_2) respectivement.

1- Donnons les fonctions de structure pour les deux systèmes (S_1) et (S_2) :

- Pour la 1^{ière} configuration (S_1):

$$\phi_1(x) = 1 - \left[(1 - x_1x_2)(1 - x_3x_4) \right] = (x_3x_4) + (x_1x_2) - (x_1x_2x_3x_4).$$

- Pour la 2^{ème} configuration (S_2):

$$\phi_2(x) = \left[1 - (1 - x_1)(1 - x_2) \right] \left[1 - (1 - x_3)(1 - x_4) \right] = (x_1 + x_2 - x_1x_2)(x_3 + x_4 - x_3x_4).$$

- En terme de chemin minimal, pour la structure (S_1), on trouve la même configuration avec $C_1 = \{1, 2\}$ et $C_2 = \{3, 4\}$ sont les chemins minimaux, mais en terme des coupes minimales on a:

$K_1 = \{1, 3\}, K_2 = \{1, 4\}, K_3 = \{2, 3\}, K_4 = \{2, 4\}$ donc

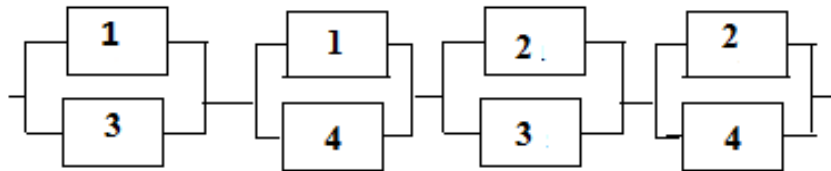


Figure 2.5.11 : Représentation du système (S_1) en coupes minimales.

et la fonction de structure est donnée par:

$$\phi_1(x) = \left[1 - (1 - x_1)(1 - x_3) \right] \left[1 - (1 - x_1)(1 - x_4) \right] \left[1 - (1 - x_2)(1 - x_3) \right] \left[1 - (1 - x_2)(1 - x_4) \right]$$

- Les chemins minimaux du système (S_2) sont: $C_1 = \{1, 3\}, C_2 = \{1, 4\}, C_3 = \{2, 3\}, C_4 = \{2, 4\}$.

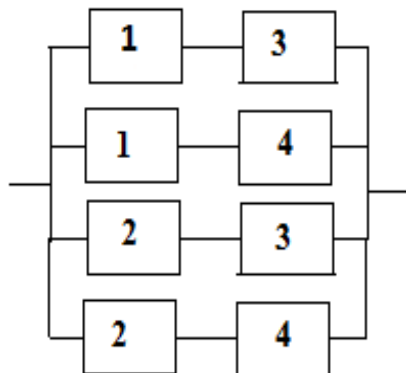


Figure 2.5.12 : Représentation du système (S_2) en chemins minimaux.

La fonction de structure est:

$$\phi_2(x) = 1 - (1 - x_1x_3)(1 - x_1x_4)(1 - x_2x_3)(1 - x_2x_4)$$

Pour les coupes minimales on obtient la même configuration pour le système (S_2) avec $K_1 = \{1, 2\}$ et $K_2 = \{3, 4\}$ sont des coupes minimales.

2- La fonction de fiabilité:

$$\text{Posons } R_1(t) = R_2(t) = R_3(t) = R_4(t) = e^{-\lambda t}.$$

Notons $R(t)$ la fiabilité du système (S_1) et $\check{R}(t)$ la fiabilité du système (S_2) et en tenant compte des fonctions de structure des deux systèmes, on aura:

$$R(t) = 2e^{-2\lambda t} - e^{-4\lambda t}.$$

$$\check{R}(t) = (2e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t})^2 = 4e^{-2\lambda t} - 4e^{-3\lambda t} + e^{-4\lambda t}.$$

3- Taux de défaillance:

Posons $\lambda(t)$ pour $R(t)$ et $\lambda'(t)$ pour $\check{R}(t)$ donc on a:

$$\lambda(t) = \frac{-R'(t)}{R(t)} = \frac{-(2e^{-2\lambda t} - e^{-4\lambda t})'}{2e^{-2\lambda t} - e^{-4\lambda t}} = \frac{4\lambda - 4\lambda e^{-2\lambda t}}{2 - e^{-2\lambda t}}.$$

$$\lambda'(t) = \frac{(4e^{-2\lambda t} - 4e^{-3\lambda t} + e^{-4\lambda t})'}{4e^{-2\lambda t} - 4e^{-3\lambda t} + e^{-4\lambda t}} = \frac{8 - 12\lambda e^{-\lambda t} + 4\lambda e^{-2\lambda t}}{4\lambda - 4e^{-\lambda t} + e^{-2\lambda t}}.$$

4- La durée de vie des systèmes (S_1) et (S_2) :

Notons $E(X)$ pour le système (S_1) et $E(Y)$ pour le système (S_2) :

$$E(X) = MUT = \int_0^{+\infty} R(t)dt = \int_0^{+\infty} 2e^{-2\lambda t} - e^{-4\lambda t} dt = \frac{3}{4} \frac{1}{\lambda}.$$

$$E(Y) = \int_0^{+\infty} \check{R}(t)dt = \int_0^{+\infty} 4e^{-2\lambda t} - 4e^{-3\lambda t} + e^{-4\lambda t} dt = \frac{11}{12} \frac{1}{\lambda}.$$

Remarque 2.5.1 On remarque que $\frac{11}{12}$ est proche de 1 donc le système (S_2) est meilleur que le système (S_1) , c-à-d que la représentation parallèle-série est meilleur que la représentation série-parallèle en terme de temps moyen de bon fonctionnement.

Remarque 2.5.2 Les indices de fiabilité d'un système composé de n éléments dépendent de la structure de ce dernier.

2.5.10 Configuration k/n (k parmi n):

Ce système fonctionne lorsque k au moins des n composants fonctionnent. Il tombe en panne si moins de k éléments parmi n fonctionnent [3].

La fonction de structure d'un tel système est donnée par:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } \sum x_i \geq k; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 2.5.3 - Le cas où $k = n$ correspond au système en série.

- Le cas où $k = 1$ correspond au système en parallèle.

Si les éléments sont identiques et si p représente la probabilité de panne d'un élément, c-à-d:

$R_1(t) = R_2(t) = \dots = R_n(t) = p$ alors :

$$R(t) = \sum_{i=1}^k C_n^i p^i (1-p)^{n-i}. \quad (2.5.7)$$

2.5.11 Autres configurations

Exemple 2.5.2 Considérons le système suivant [9]:

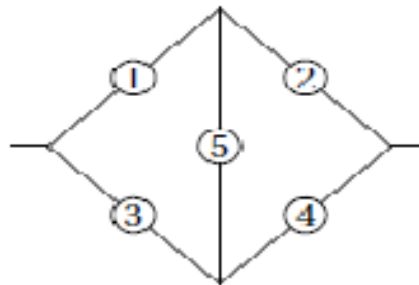


Figure 2.5.13 : Exemple de cas de pont.

Remarquons, tout d'abord, que le système n'est pas un système série-parallèle ou bien un autre système simple. Pour analyser sa probabilité de fonctionnement, nous pouvons chercher les éléments minimaux. Dans ce cas les chemins minimaux sont les suivants:

$$C_1 = \{1, 2\}, C_2 = \{3, 4\}, C_3 = \{1, 5, 4\}, C_4 = \{3, 5, 2\}.$$

Quand aux coupes minimales, nous obtenons:

$$K_1 = \{1, 3\}, K_2 = \{1, 5, 4\}, K_3 = \{3, 5, 2\}, K_4 = \{2, 4\}.$$

Le calcul de la fonction de structure se fait par:

$$- \phi(x) = \max_{c \in CM} \left\{ \min_{i \in c} (x_i) \right\} \text{ pour les chemins minimaux:}$$

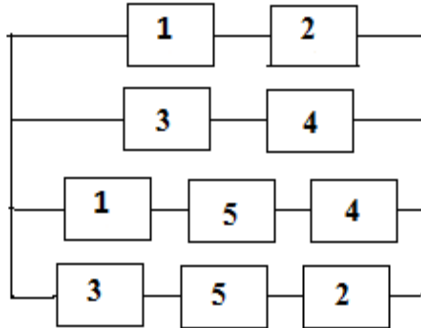


Figure 2.5.14 : Représentation du système en chemins minimaux.

$$\phi(x) = 1 - [(1 - x_1x_2)(1 - x_3x_4)(1 - x_1x_5x_4)(1 - x_3x_5x_2)].$$

$$- \phi(x) = \min_{k \in KM} \left\{ \max_{i \in k} (x_i) \right\} \text{ pour les coupes minimales on a:}$$

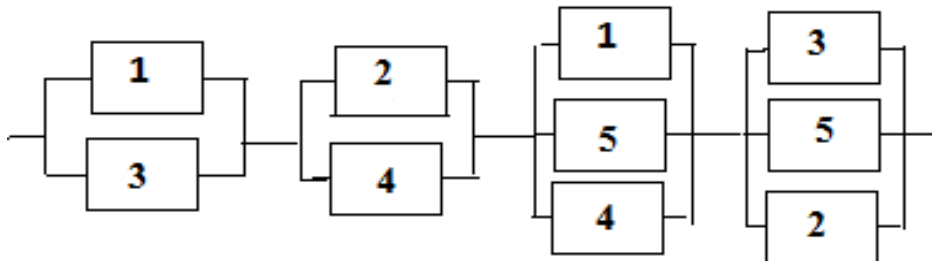


Figure 2.5.15 : Représentation du système en coupes minimales.

$$\phi(x) = [1 - (1 - x_1)(1 - x_3)][(1 - (1 - x_1)(1 - x_5)(1 - x_4))[(1 - x_3)(1 - x_5)(1 - x_2)][1 - (1 - x_2)(1 - x_4)].$$

2.6 Maintenabilité

Les concepteurs recherchent toujours la performance maximale d'un produit et négligent parfois l'hypothèse de la panne. Il est difficile quand on fait tout pour que le système fonctionne de se demander ce qu'il adviendra en cas de panne. Pour qu'un système soit disponible, il doit défaillir le plus rarement possible mais il est tout aussi important qu'il soit très rapidement

réparé. On entend ici par réparation l'ensemble de la remise en service incluant les délais logistiques. L'aptitude d'un système à être réparé est mesurée par la maintenabilité [18].

C'est l'aptitude (probabilité) d'une entité à être maintenu ou rétabli dans un état dans lequel elle peut accomplir la fonction requise lorsque la maintenance est réalisée dans des conditions données, avec des procédures et des moyens prescrits [1].

Elle joue un rôle important sur le plan économique, technologique et humain. Il ne s'agit plus, de se limiter à l'entretien, de subir la panne, il faut au contraire parvenir à la maîtriser, la prévenir. Pour cela, il est prépondérant ou recommandé d'agir le plus en amont possible en tenant compte des contraintes ou des facteurs influents sur l'intégrité du système.

La maintenabilité permet de réduire les durées de pannes et leurs coûts. Elle caractérise la facilité à remettre ou à maintenir un équipement en bon état de fonctionnement.

2.6.1 Indice de maintenabilité

- Fonction de maintenabilité $M(t)$ d'un dispositif:

C'est une fonction non décroissantes de t , elle est donnée par:

$$M(t) = P(\text{le dispositif soit réparé avant } t). \quad (2.6.1)$$

- Taux de réparation d'un dispositif $\mu(t)$:

C'est la densité de probabilité pour qu'il soit remis en service entre les instants t et $t + dt$ sachant qu'il était en panne à l'instant t .

D'où:

$$\mu(t) = -\frac{1}{1 - M(t)} \frac{dM(t)}{d(t)} = -\frac{g(t)}{1 - M(t)}, \quad (2.6.2)$$

avec

$$g(t) = \frac{dM(t)}{d(t)},$$

$g(t)$ est la densité de probabilité de réparation, elle est généralement ajustée par une distribution exponentielle ou log-normale.

- Moyenne des temps de réparation:

Elle peut être définie par:

$$MTTR = \int_0^{\infty} tg(t)dt = \int_0^{\infty} (1 - M(t)) dt. \quad (2.6.3)$$

2.7 Disponibilité

C'est l'aptitude d'une entité, sous les aspects combinés de sa fiabilité, maintenabilité et de l'organisation de maintenance, à être en état d'accomplir une fonction requise, dans des conditions de temps déterminées [1]. D'une façon générale, la disponibilité $A(t)$ d'un équipement au temps $t > 0$, est la probabilité pour que ce dernier fonctionne au temps t sous des conditions données.

$$A(t) = P(\text{l'équipement est non défaillant à l'instant } t), \quad (2.7.1)$$

$$A(t) = P\left(X(t) = (1, 1, \dots, 1)\right). \quad (2.7.2)$$

- La disponibilité sur un intervalle $[a, b]$ est définie par :

$$A(a, b) = \frac{1}{b-a} \int_a^b P\left(X(t) = (1, 1, \dots, 1)\right) dt. \quad (2.7.3)$$

- La disponibilité limite vaut:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} A(0, T). \quad (2.7.4)$$

Elle représente la fréquence de la durée de fonctionnement normal au cours d'une période indéfiniment grande.

- On entend par la disponibilité opérationnelle la quantité:

$$A(t)_{op} = \frac{MUT}{MUT + MDT} = \frac{MUT}{MTBF}. \quad (2.7.5)$$

2.8 La maintenance

La maintenance est définie comme étant l'ensemble des activités destinées à maintenir ou à rétablir un bien dans un état ou dans des conditions données de sûreté de fonctionnement, pour accomplir une fonction requise. Ces activités sont des combinaisons d'activités techniques, administratives et de management. D'une manière générale on peut distinguer deux grandes formes de maintenances: corrective et préventive.

- **Maintenance préventive:**

La maintenance préventive permet de remplacer les pièces qui se dégradent par suite d'usure, de fatigue,... etc, avant qu'elles ne provoquent une défaillance. Ces pièces présentent un taux de défaillance croissant avec l'âge. La détermination de la durée entre remplacement

nécessite la connaissance de la distribution des durées de vie. Elle fait appel à la théorie de renouvellement.

On distingue plusieurs politiques de maintenances préventives, à savoir: la maintenance systématique; la maintenance conditionnelle et la maintenance prévisionnelle.

- Maintenance corrective

C'est un ensemble d'activités réalisées après la défaillance d'une entité, ou la dégradation de sa fonction, pour lui permettre d'accomplir une fonction requise, au moins provisoirement.

La maintenance corrective comprend en particulier: la localisation de la défaillance et son diagnostic; la remise en état avec ou sans modification et le contrôle du bon fonctionnement.

On distingue deux types de maintenance corrective, à savoir: la maintenance palliative et la maintenance curative [10].

2.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit les principales notions de fiabilité, présenté les moyens fiabilistes mathématiques pour le calcul de la fiabilité d'un système de configuration quelconque. Il est important de connaître les grandeurs de fiabilité et les mécanismes de défaillance pour pouvoir évaluer les performances du système.

Les principales lois de fiabilité

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présenterons quelques distributions de vie qui interviennent le plus fréquemment dans l'analyse des données de vie et qui sont communes à plusieurs disciplines. On rappelle les plus utilisées de ces lois, essentiellement la loi exponentielle et la loi de Weibull. Pour chaque loi, on donnera, quand c'est possible, l'expression de la fiabilité, du taux de défaillance et du **MTTF**. Dans tout ce chapitre, on supposera que les durées de bon fonctionnement sont à valeurs dans \mathbb{R}^+ , donc x sera implicitement supposé être un réel positif.

3.2 Loi exponentielle

Cette loi a de nombreuses applications dans plusieurs domaines. Elle décrit la vie des matériels qui subissent des défaillances brutales. La loi exponentielle est la plus couramment utilisée en fiabilité électronique pour décrire la période durant laquelle le taux de défaillance des équipements est considéré comme constant (défaillance aléatoire). Elle décrit le temps écoulé jusqu'à une défaillance, ou l'intervalle de temps entre deux défaillances. Elle est définie par un seul paramètre, le taux de défaillance, λ [21].

La loi exponentielle est associée au processus poissonnier qui est un processus qui génère des événements dont les temps d'occurrences sont indépendants et distribués identiquement. Appliquée à un matériel, elle correspond à la période pendant laquelle le taux de défaillance

est constant avec le temps, c'est à dire la période pendant laquelle la probabilité de défaillance est la même à tout instant.

Soit X une variable aléatoire. On dit qu'elle suit une loi exponentielle de paramètre λ si sa fonction de densité est:

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x), \quad x \geq 0, \quad (3.2.1)$$

et sa fonction de répartition est:

$$F(x) = 1 - \exp(-\lambda x), \quad x \geq 0. \quad (3.2.2)$$

Par conséquent, sa fonction de fiabilité est:

$$R(x) = \overline{F}(x) = 1 - F(x) = \exp(-\lambda x), \quad x \geq 0. \quad (3.2.3)$$

Son espérance est:

$$E(X) = MUT = MTTF = \frac{1}{\lambda}, \quad (3.2.4)$$

et sa variance est:

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (3.2.5)$$

Le taux de défaillance est alors:

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{R(x)} = \lambda. \quad (3.2.6)$$

3.2.1 Propriétés sans mémoire de la loi exponentielle

Une propriété principale de la loi exponentielle est d'être sans mémoire ou "Memoryless property" en anglais.

Comme l'indique la figure 3.2.1, ce résultat montre que la loi conditionnelle de la durée de vie d'un dispositif qui a fonctionné sans tomber en panne jusqu'à l'instant t est identique à la loi de la durée de vie d'un nouveau dispositif. Ceci signifie qu'à l'instant t , le dispositif est considéré comme neuf (**As Good As New**), de durée de vie exponentielle de paramètre λ .

Théorème 3.2.1 [3]

Soit X variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ de fonction de répartition $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ et soit $X_t = X - t$ la durée de vie résiduelle d'un élément d'âge t . Alors:

$$R_t(x) = 1 - F_t(x) = \frac{R(t+x)}{R(t)} = R(x).$$

On dit alors que la loi exponentielle a la propriété d'absence de mémoire. Ceci signifie que la probabilité de bon fonctionnement sur la période $[t, t+x]$ ne dépend pas de la durée de fonctionnement écoulée t , elle ne dépend que de la longueur de cet intervalle.

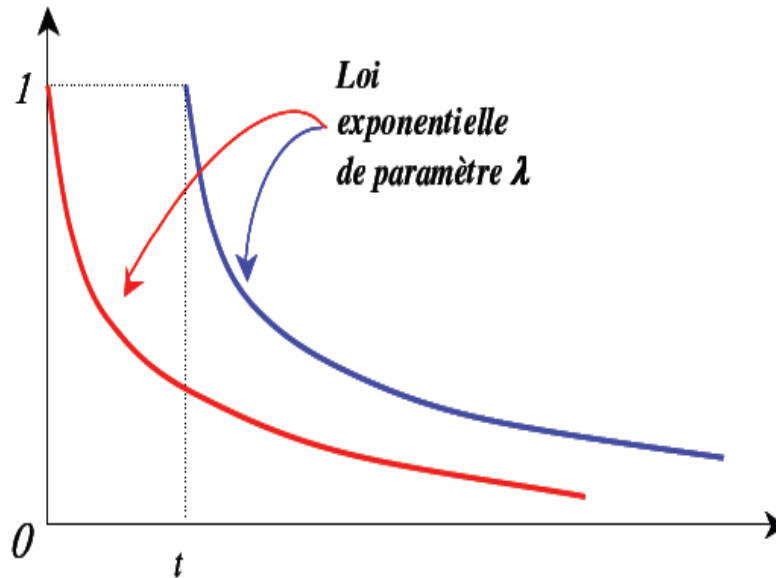


Figure 3.2.1 : Propriété sans mémoire de la loi exponentielle.

Théorème 3.2.2 [3]

La loi exponentielle est la seule loi possédant la propriété d'absence de mémoire.

Remarque 3.2.1 *La loi exponentielle est donc la seule loi à taux de défaillance constant.*

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{R(x)} = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda x}} = \lambda.$$

Théorème 3.2.3 [3]

Si pour tout i , la variable aléatoire X_i est de loi exponentielle de paramètre λ_i et si les variables aléatoires X_i sont indépendantes (les pannes des éléments indépendantes d'autres éléments) alors la variable aléatoire $X_{\min} = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est de loi exponentielle de paramètre $\lambda_{\min} = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$.

De plus indépendamment de $t \geq 0$

$$P(X_{\min} = X_i \mid X_{\min} = t) = \frac{\lambda_i}{\lambda_{\min}}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

3.3 Loi de Weibull

C'est une loi très souple représentative d'une très grande variété de phénomènes aléatoires, et qui est souvent utilisée dans le domaine de la fiabilité des matériels mécaniques.

La loi de Weibull est une loi continue à trois paramètres qui permet de prendre en compte les périodes où le taux de défaillance n'est pas constant (jeunesse et vieillesse). Cette loi permet:

- Une estimation de la MTBF;
- Les calculs de $\lambda(t)$ et de $R(t)$ et leurs représentations graphiques;
- Grâce au paramètre de forme β d'orienter un diagnostic, car β peut être caractéristique de certains modes de défaillance.

Les trois paramètres de la loi sont :

1- γ , appelé le paramètre de position: représente en fait le décalage qui existe entre le début de l'observation et le début du processus examiné; très souvent, on choisit $\gamma = 0$ et la loi de Weibull est ramenée à deux paramètres.

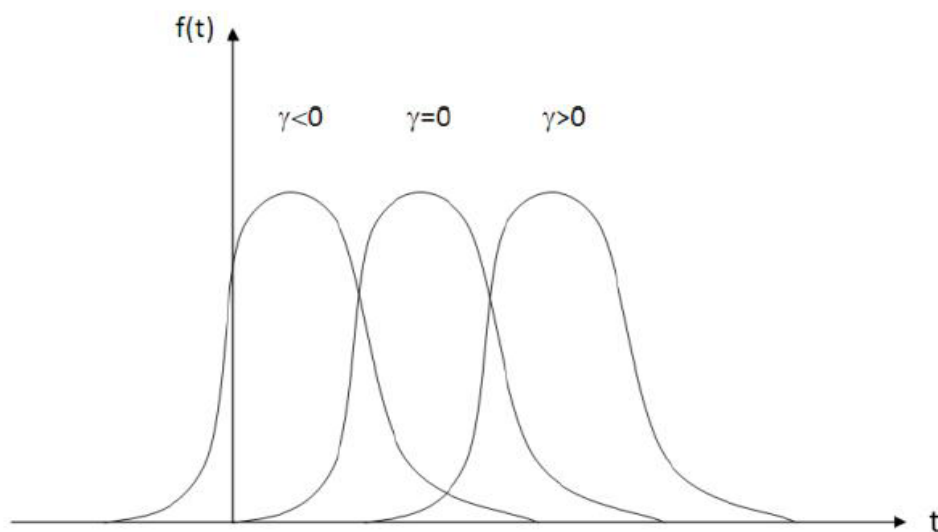


Figure 3.3.2 : Le paramètre de position (en unité de temps).

- Si $\gamma < 0$, on peut dire que le matériel a subi une dégradation avant sa mise en service industrielle (usure lors des essais ou du rodage, ou problème de montage).
- Si $\gamma > 0$, on peut dire que le matériel n'a commencé à se dégrader qu'à la date $t = \gamma$.

Certain auteurs affirment que le γ négatif n'existe pas, c'est un mélange de populations et par manque de données, on a l'impression que γ est négatif. Donc le paramètre γ correspond à une simple translation de l'axe des temps qui ramène la loi de Weibull à deux paramètres.

2- η , le paramètre d'échelle: Il est lié au temps moyen de bon fonctionnement.

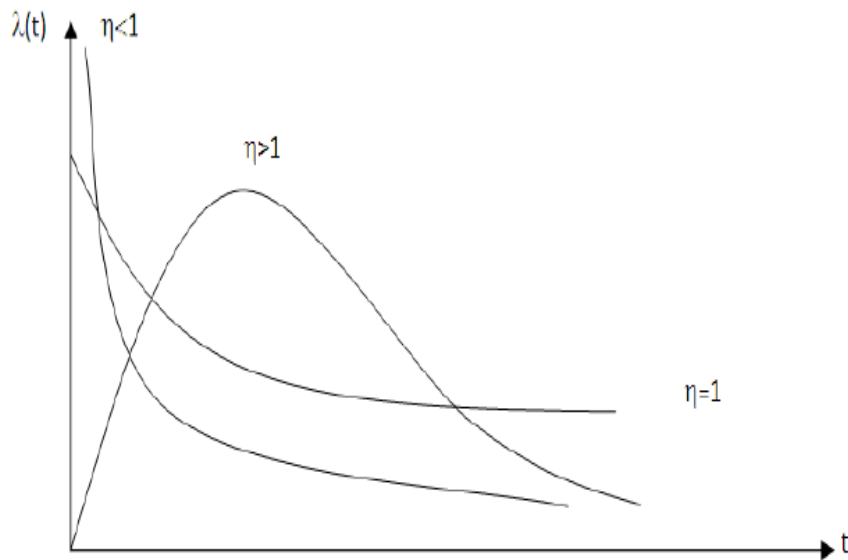


Figure 3.3.3 : Le paramètre d'échelle (en unité de temps).

3- β , Paramètre de forme (sans dimension): Il est associé à la cinétique du processus observé. Il est le plus important car il renseigne sur la variation du taux de défaillance et permet ainsi de modéliser alternativement les trois phases schématisées par la courbe en baignoire.

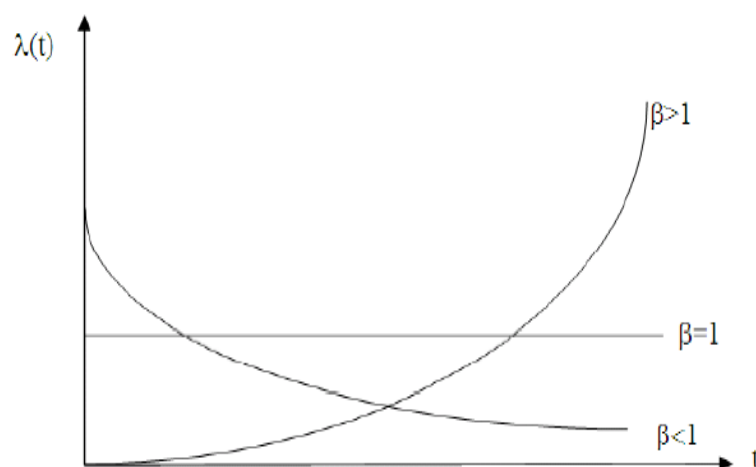


Figure 3.3.4 : La forme des courbes $\lambda(t)$ aux différentes phases de vie (courbe en baignoire)

Cette loi traduit toutes les phases de vie d'un matériel;

- Si $\beta < 1$, le taux de défaillance décroît avec le temps, ce qui représente la période de jeunesse d'un matériel;

- Si $\beta = 1$, le taux de défaillance est constant, ceci correspond à la période de vie utile, on retrouve la loi exponentielle;

- Si $\beta > 1$, le taux de défaillance croît en fonction du temps, ce qui correspond à la période de vieillesse ou d'usure;

Soit X une variable aléatoire, on dit qu'elle suit une loi de Weibull de paramètre γ , η et β si sa fonction de densité est:

$$f(x) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{x - \gamma}{\eta} \right)^{\beta-1} \left(\exp \left[- \left(\frac{x - \gamma}{\eta} \right)^\beta \right] \right), \quad (3.3.1)$$

et sa fonction de répartition est:

$$F(x) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{x - \gamma}{\eta} \right)^\beta \right]. \quad (3.3.2)$$

Par conséquent, sa fonction de fiabilité est :

$$R(x) = \exp \left[- \left(\frac{x - \gamma}{\eta} \right)^\beta \right]. \quad (3.3.3)$$

Son espérance est:

$$MTTF = E(X) = \gamma + \eta \Gamma \left(1 + \frac{1}{\beta} \right), \quad (3.3.4)$$

Où Γ est la fonction gamma d'Euler définie par:

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} \exp(-x) dx,$$

en particulier, $\Gamma(n) = (n - 1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Sa variance est:

$$\text{var}(X) = \eta^2 \left[\Gamma \left(1 + \frac{2}{\beta} \right) - \Gamma^2 \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right], \quad (3.3.5)$$

et son taux de défaillance est:

$$\lambda(x) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{x - \gamma}{\eta} \right)^{\beta-1}. \quad (3.3.6)$$

3.4 Autres lois usuelles

3.4.1 La loi normale (Laplace-Gauss)

La loi normale est la plus répandue parmi les lois de probabilité car elle s'applique à de nombreux phénomènes. En fiabilité, la distribution normale est utilisée pour représenter la distribution des durées de vie de dispositifs en fin de vie (usure) car le taux de défaillance est toujours croissant.

Une variable aléatoire X est dite suivre une loi normale notée $N(\mu, \sigma)$ ou $LG(\mu, \sigma)$ si sa fonction de densité:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad (3.4.1)$$

sa fonction de répartition est:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt. \quad (3.4.2)$$

et sa fonction de fiabilité est:

$$\begin{aligned} R(x) &= 1 - F(x) \\ &= 1 - \Phi((x - \mu)/\sigma). \end{aligned}$$

Où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée ($\mu = 0$) réduite ($\sigma = 1$).

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (3.4.3)$$

Son espérance

$$E(X) = \mu, \quad (3.4.4)$$

et sa variance est:

$$Var(X) = \sigma^2. \quad (3.4.5)$$

3.4.2 La loi Log-normale (ou de Galton)

Une variable aléatoire continue et positive X est distribuée selon une loi log-normale si son logarithme népérien est distribué suivant une loi normale. Elle est largement utilisée pour modéliser des données de vie, en particulier les défaillances par fatigue en mécanique. La distribution Log-Normale est un modèle fréquemment utilisé en fiabilité, car elle concerne des

variables aléatoires positives, elle s'applique lorsque les observations faites sont les conséquences d'un effet multiplicatif de différentes causes indépendantes et aléatoires.

Soit X une variable aléatoire continue et positive, si la variable aléatoire: $Y = \log X$ est distribuée selon la loi normale, alors X suit une log-normale.

De nombreux phénomènes de mortalité ou de durée de réparation sont distribués selon des lois log-normales.

La variable aléatoire X est caractérisée par:

Sa fonction de densité:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log x - \mu}{\sigma}\right)^2}. \quad (3.4.6)$$

La fonction de fiabilité est:

$$R(t) = 1 - \Phi\left(\frac{\log(x) - \mu}{\sigma}\right).$$

$$R(t) = 1 - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log t - \mu}{\sigma}\right)^2} dt. \quad (3.4.7)$$

Φ : Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Le taux de défaillance est:

$$\lambda(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log x - \mu}{\sigma}\right)^2}}{x \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} f(x) dx}. \quad (3.4.8)$$

$Y = \log X \rightsquigarrow N(\mu, \sigma)$ avec $E(X) = \mu$ et $Var(X) = \sigma^2$

Alors $X = e^Y$ et on peut obtenir les moments de la variable aléatoire X en utilisant la loi normale:

$$E(X) = e^{(\mu + \frac{\sigma^2}{2})}, \quad (3.4.9)$$

et

$$Var(X) = e^{(2\mu + \sigma^2)} e^{(\sigma^2 - 1)}. \quad (3.4.10)$$

Le domaine de définition n'étant jamais négatif, il n'y a aucune limitation à l'emploi de la distribution log-normale en fiabilité. Le taux de défaillance est croissant au début de vie puis décroissant en tendant vers zéro et la distribution est très dissymétrique.

3.4.3 Loi de Poisson

C'est une loi discrète, elle est fréquemment utilisée pour décrire des données issues de comptages d'événements rares.

Le phénomène d'arrivée des pannes dans le temps est dit "poissonien".

C'est une application de ce que l'on a coutume d'appeler le "Processus de Poisson".

Sa fonction de densité est donnée par :

$$P(X = k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3.4.11)$$

et ses caractéristiques sont données par:

$$E(X) = \mu, \quad V(X) = \mu. \quad (3.4.12)$$

Exemple 3.4.1 La densité de la loi de Poisson est:

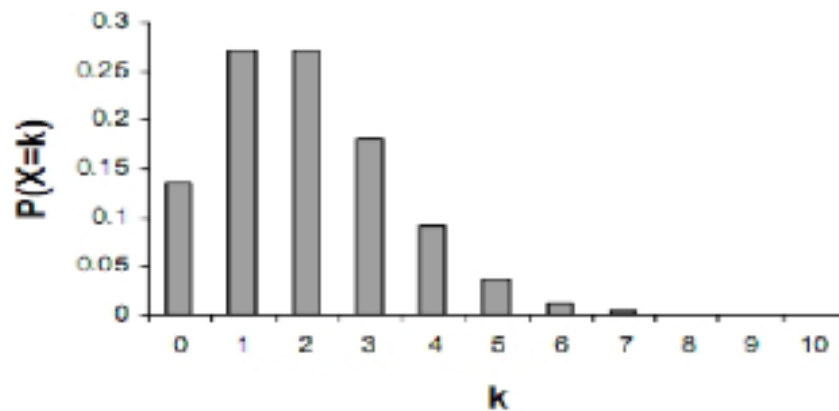


Figure 3.4.5 : La densité de loi de Poisson.

Il existe d'autres lois telles que: loi de gamma, loi uniforme, loi du Khi-Deux, loi de bêta et pareto..., qui peuvent trouver leurs applications dans la théorie de fiabilité.

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la fiabilité des systèmes réparable. L'ensemble des états du système est défini par toutes les combinaisons possibles de ces éléments. L'évolution du système est décrit par un processus stochastique. La connaissance de l'état du système aux instants: t_1, t_2, \dots, t_k ($t_1 < t_2 < \dots < t_k$) apporte une information pour l'évolution futur du système.

L'essentiel du chapitre porte sur les systèmes décrits par des processus de Markov. Il s'agit des systèmes réparables dont les taux de défaillance et de réparation sont constants. Dans ce, cas on montre comment calculer la disponibilité et la fiabilité du système [3]. Dans le cas où les taux de défaillance et de réparation ne sont constants le système ne peut pas être modélisé par un processus Markovien. Dans ce cas lo modèle de Weibull-Markov s'avère plus réaliste [22].

4.2 Modélisation par les graphes des états

Dans la modélisation de la sûreté de fonctionnement, on rencontre trois formalisme principaux: les graphes des états, les arbres de défaillance et les réseaux de pétri. Notre choix porte sur les graphes des états vu l'interdépendance partielle des événements.

4.2.1 Modélisation Markovienne

La modélisation des systèmes par le processus homogène de Markov présente bien des avantages dont notamment la possibilité d'effectuer des traitements plus précis et plus rapide en se ramenant à la résolution d'un système d'équations différentielles linéaires du premier ordre.

Considérons un système de " n " composants dont le fonctionnement est décrit par un processus $X(t)$ à valeur dans $\{0, 1\}^n$, représentant à l'instant t : l'état de marche, de panne de chacun de ces composants.

$$X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)).$$

La composant $x_i(t)$: désigne l'état du i^{ieme} élément à l'instant t .

$$x_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{si le } i^{ieme} \text{ élément est en fonctionnement,} \\ 0 & \text{si le } i^{ieme} \text{ élément est en panne.} \end{cases}$$

L'ensemble des valeurs possibles de X est une partie de $E = \{0, 1\}^n$ qui se décompose en: E^+ : états de bon fonctionnement et E^- : états de panne.

Au départ $X(0) = 1$ (à l'instant $t = 0$, tous les composants sont opérationnels et donc le système est en fonctionnement).

Définition 4.2.1 *Durée de vie d'un système*

La durée de vie d'un système s'interprète comme étant le temps d'entrée dans l'ensemble des états de panne E^- .

$$T = \inf\{t : X(t) \in E^-\}.$$

Définition 4.2.2 La fiabilité $R(t)$, désigne la probabilité que X ait atteint un état de panne avant t :

$$R(t) = P(T \geq t) = P\left(X(s) \in E^+, \forall s < t \mid X(0) = 1\right).$$

Définition 4.2.3 La disponibilité, notée $A(t)$, représente la probabilité qu'à l'instant t , le système fonctionne

$$A(t) = P\left(X(t) \in E^+ \mid X(0) = 1\right).$$

Le modèle homogène de Markov

Le modèle homogène de Markov est définie par [22]:

1- L'ensemble de états possibles: $E = \{1, 2, \dots, N\}$, où N est le nombre d'états possibles d'un composant.

2- La vie stochastique: $(X_n, T_n)_{n=0}^\infty$

Où - $\forall n, (X_n \in E, X_n \neq X_{n+1})$

- $T_0 = 0$ et $\forall n; (T_{n+1} > T_n)$.

3- $F_{ij}(t)$ l'ensemble des fonctions de répartition des durées de transition D_{ij}

$$\begin{aligned} F_{ij}(t) &= P(D_{ij} \leq t) \\ &= P(X_{n+1} = j, (T_{n+1} - T_n \leq t \mid X_n = i)) \\ &= 1 - \exp\left(-\frac{t}{\lambda_{ij}}\right), \text{ (tel que } \frac{1}{\lambda_{ij}} \text{ est le paramètre de la loi exponentielle)} \end{aligned}$$

Les durées de transitions D_{ij} sont des durées stochastiques d'un état i sachant que le prochain état est j .

La distribution de probabilité de la durée D_i de l'état X_i est la distribution du minimum des durées de transition:

$$\begin{aligned} F_i(t) &= P(D_i \leq t) \\ &= P\left(\min_{j=1, N} (D_{ij}) \leq t\right) \\ &= 1 - \prod_{j=1}^N (P(D_{ij} > t)) \\ &= 1 - \prod_{j=1}^N \exp\left(-\frac{t}{\lambda_{ij}}\right) \\ &= 1 - \exp\left(-\frac{t}{\lambda_i}\right), \end{aligned}$$

où

$$\frac{1}{\lambda_i} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{\lambda_{ij}}. \quad (4.2.1)$$

Le temps moyen de séjour dans l'état i est donné par:

$$E(D_i) = \frac{1}{\lambda_i}. \quad (4.2.2)$$

Avec D_i la durée de séjour à l'état i .

La probabilité de transition s'écrit alors $P(i, j) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ s'écrit alors:

$$\begin{aligned} P(i, j) &= P\left(D_{ij} = \min_{k=1, N, k \neq j} (D_{ik})\right), \\ &= \int_0^\infty P\left(\min_{k \neq j} (D_{ik}) \geq \nu\right) \frac{1}{\lambda_{ij}} e^{-\frac{\nu}{\lambda_{ij}}} d\nu \\ &= \int_0^\infty \frac{\sum_{k \neq j} e^{-\frac{\nu}{\lambda_{ik}}}}{\lambda_{ij}} \frac{1}{\lambda_{ij}} e^{-\frac{\nu}{\lambda_{ij}}} d\nu \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\lambda_{ij}} e^{-\frac{\nu}{\lambda_{ij}}} d\nu \end{aligned}$$

$$P(i, j) = \frac{\lambda_i}{\lambda_{ij}}. \quad (4.2.3)$$

Les deux variables D_i et D_{ij} ; étant exponentiellement distribuées de taux λ_i et λ_{ij} respectivement.

La probabilité de l'état i d'un composant peut être calculée comme suit:

$$P(i) = \frac{\pi_n(i) \cdot E(D_i)}{\sum_{i=1}^N \pi_n(i) \cdot E(D_i)}. \quad (4.2.4)$$

La fréquence de l'état i est calculée par:

$$Fr(i) = \frac{P(i)}{E(D_i)} \quad (4.2.5)$$

où

$P(i)$: Probabilité de séjour dans l'état i ,

$$\begin{aligned} \pi(n) &= \left(P(X_n = 1), P(X_n = 2), \dots, P(X_n = N) \right) \\ &= \left(\pi_n(1), \pi_n(2), \dots, \pi_n(N) \right) : \text{est le vecteur des probabilités des états.} \end{aligned}$$

4.2.2 Modèle de Markov à deux états

C'est le modèle le plus répandu et le plus simple. Le composant ou le système, ne peut avoir que deux états possibles, à savoir: l'état de bon fonctionnement et l'état de panne.

Sachant que la durée de fonctionnement est une variable aléatoire exponentielle de paramètre λ et le temps de réparation obéit à une loi exponentielle de paramètre μ . Cette situation est schématisée par le graphe ci dessous.

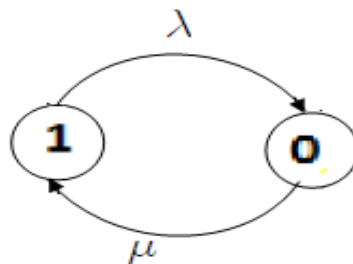


Figure 4.2.1 : Modèle de fiabilité d'un système à deux états.

On pose

$$X(t) = \begin{cases} 1, & \text{si le système fonctionne à l'instant } t, \\ 0, & \text{si le système est en panne à l'instant } t. \end{cases}$$

Détermination de la disponibilité

La matrice des taux de transition est:

$$M = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

Le vecteur des probabilités d'états est: $\Pi(t) = (\Pi_1(t), \Pi_0(t))$

On cherche à calculer $\Pi_1(t)$:

Avec: $\Pi' = \Pi(t)M$

$$(\Pi'_1(t), \Pi'_0(t)) = (\Pi_1(t), \Pi_0(t)) \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

Le système d'équations de Kolmogorov est donné comme suit:

$$(S_1) : \begin{cases} \Pi'_1(t) = -\lambda\Pi_1(t) + \mu\Pi_0(t) \\ \Pi'_0(t) = \lambda\Pi_1(t) - \mu\Pi_0(t) \\ \Pi_1(t) + \Pi_0(t) = 1 \end{cases}$$

Avec les conditions initiales: $\Pi_1(0) = 1, \Pi_0(0) = 0,$

$\Pi_i(t) = P(X(t) = i)$ = (probabilité pour que la chaîne de Markov soit à l'état i à l'instant t).

De la troisième équation du système (S_1) on a : $\Pi_0(t) = 1 - \Pi_1(t)$, remplaçons dans la première équation on obtient $\Pi'_1(t) = -\lambda\Pi_1(t) + \mu(1 - \Pi_1(t))$

$\Pi'_1(t) + (\lambda + \mu)\Pi_1(t) = \mu$, c'est une équation différentielle avec second membre.

$\Pi'_1(t) + (\lambda + \mu)\Pi_1(t) = 0$, l'équation différentielle sans second membre.

La solution de l'équation homogène est:

$$\Pi_1(t) = ce^{-(\lambda+\mu)t}.$$

On remarque que $\Pi_1(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$ est la solution particulière,

d'où la solution générale est:

$$\Pi_1(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + ce^{-(\lambda+\mu)t} \text{ comme } \Pi_1(0) = 1, \text{ on trouve:}$$

$$c = 1 - \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu},$$

$$\text{donc } \Pi_1(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

De la troisième équation du système (S_1) , on obtient $\Pi_0(t) = 1 - \Pi_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \left(1 + e^{-(\lambda+\mu)t}\right)$.

Donc $\Pi_1(t) = A(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$.

Les probabilités d'états s'obtiennent en résolvant les équations de balance suivantes: $\Pi.M_{ij} = 0$ avec $\Pi = (\Pi_1, \Pi_0)$

$$(S_1) : \begin{cases} 0 = -\lambda\Pi_1 + \mu\Pi_0 \\ 0 = \lambda\Pi_1 - \mu\Pi_0 \\ 1 = \Pi_1 + \Pi_0 \end{cases}$$

Les probabilités permanentes d'occupations des états (1) et (0) sont données ci dessous et peuvent être assimilées respectivement à la disponibilité A et l'indisponibilité \bar{A} .

$$\Pi_1 = A = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}} = \frac{MDT}{MDT + MUT},$$

et

$$\Pi_0 = \bar{A} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{MUT}{MDT + MUT},$$

avec $\mu = \frac{1}{MDT}$ et $\lambda = \frac{1}{MUT}$.

4.2.3 Modèle de Markov à trois états

On dispose d'un système de fiabilité $R(t) = e^{-\lambda t}$. Ce dernier subi des actions de maintenance pour garder un certain niveau de fiabilité; la probabilité pour que la durée de fonctionnement avant maintenance dépasse t est $e^{-\lambda t}$ et la probabilité pour que la durée de maintenance dépasse t est $e^{-\mu t}$. Néanmoins, le système peut tomber en panne au cours de son fonctionnement (jamais au périodes de maintenance); la probabilité que la durée de réparation dépasse t est $e^{-\lambda_m t}$. Modélisons ce problème sous forme d'un système Markovien, pour lequel on a précisé ces états, les taux de transition, le graphe de transition ainsi que la matrice de transition.

On obtient un modèle à trois états tel que schématisé par le graphe ci-dessous.

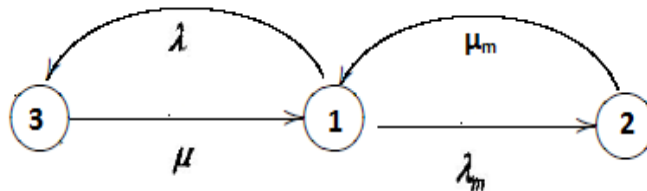


Figure 4.2.2 : Graphe des états avec la maintenance (M).

λ_m : taux de mise hors service suite à une maintenance;

μ_m : taux de remise en service après maintenance.

On pose

$$X(t) = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{si le système fonctionne à l'instant } t, \\ \mathbf{2}, & \text{si le système est en maintenance à l'instant } t, \\ \mathbf{3}, & \text{si le système est en panne à l'instant } t. \end{cases}$$

La matrice des taux de transition est:

$$M = \begin{pmatrix} -(\lambda + \lambda_m) & \lambda_m & \lambda \\ \mu_m & -\mu_m & 0 \\ \mu & 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

Le vecteur des probabilités d'états est:: $\Pi(t) = (\Pi_1(t), \Pi_2(t), \Pi_3(t))$.

Pour le calcul de la disponibilité, c'est-à-dire $A = \Pi_1(t)$. Il suffit de résoudre le système d'équation suivant: $\Pi'(t) = \Pi(t)M$.

$$(S_2) : \begin{cases} \Pi'_1(t) = -(\lambda + \lambda_m)\Pi_1(t) + \mu_m\Pi_2(t) + \mu\Pi_3(t) \\ \Pi'_2(t) = \lambda_m\Pi_1(t) - \mu_m\Pi_2(t) \\ \Pi'_3(t) = \lambda\Pi_1(t) - \mu\Pi_3(t) \\ \Pi_1(t) + \Pi_2(t) + \Pi_3(t) = 1 \end{cases}$$

Les probabilités permanentes d'occupations des états sont obtenues par la résolution du système (S_2) avec les $\Pi'_i(t) = 0; i = 1, 2, 3$. On obtient ce qui suit

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{\mu_m\mu}{\mu_m\mu + \lambda_m\mu + \mu_m\lambda}, \\ \Pi_2 &= \frac{\lambda_m\mu}{\mu_m\mu + \lambda_m\mu + \mu_m\lambda}, \\ \Pi_3 &= \frac{\mu_m\lambda}{\mu_m\mu + \lambda_m\mu + \mu_m\lambda}. \end{aligned}$$

Dans ce cas

$$A = \Pi_1 = \frac{\mu_m\mu}{\mu_m\mu + \lambda_m\mu + \mu_m\lambda},$$

et

$$\bar{A} = \Pi_2 + \Pi_3 = \frac{\lambda_m\mu + \mu_m\lambda}{\mu_m\mu + \lambda_m\mu + \mu_m\lambda}.$$

4.2.4 Cas d'un système parallèle

Considérons le système parallèle suivant à deux composants:

Nous supposons que $R_1(t) = R_2(t) = e^{-\lambda t}$.

Lorsqu'une panne d'un composant survient, un réparateur intervient et la probabilité pour que la durée d'une réparation dépasse t est: $e^{-\mu t}$. Il n'y a qu'une seule réparateur.

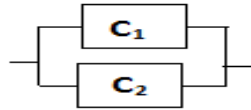


Figure 4.2.3 : Système à deux composants en parallèle.

On va modéliser le fonctionnement de ce système à l'aide d'une chaîne de Markov, pour laquelle on a précisé les états, la matrice des taux de transition et le graphe de transition.

$X(t)$: "Nombre de composants en panne à l'instant t ".

A un instant t , on peut avoir: $X(t) = \begin{cases} 0, & \text{aucun composant en panne (fonctionnement),} \\ 1, & \text{une composant en panne (fonctionnement)} \\ 2, & \text{deux composants en panne (panne).} \end{cases}$

Le graphe de transition est représenté par la figure suivante:

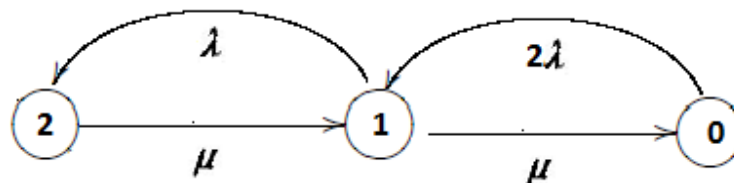


Figure 4.2.4 : Graphe de transition d'un système parallèle à deux états.

La matrice de taux de transition:

$$M = \begin{pmatrix} -2\lambda & 2\lambda & 0 \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

La disponibilité sera la probabilité qu'à un instant le système soit disponible. Pour calculer la disponibilité de ce système il faut résoudre le système d'équations suivant: $\Pi'(t) = \Pi(t)M.$,

avec les conditions initiales $\Pi_2(0) = 0, \Pi_1(0) = \Pi_0(0) = 1$.

$$(S_3) : \begin{cases} \Pi_0'(t) = -2\lambda\Pi_0(t) + \mu\Pi_1(t) \\ \Pi_1'(t) = 2\lambda\Pi_0(t) - (\lambda + \mu)\Pi_1(t) + \mu\Pi_2(t) \\ \Pi_2'(t) = \lambda\Pi_1(t) - \mu\Pi_2(t) \\ \Pi_0(t) + \Pi_1(t) + \Pi_2(t) = 1 \end{cases}$$

Au régime stationnaire, on a $\lim_{t \rightarrow \infty} \Pi_i(t) = \Pi_i = 0, \forall i$.

Les probabilités d'états s'obtiennent en résolvant les équations de balance suivantes $\Pi.M = 0$, on trouve

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= \frac{\mu^2}{\mu^2 + 2\lambda^2 + 2\lambda\mu}, \\ \Pi_1 &= \frac{2\lambda\mu}{\mu^2 + 2\lambda^2 + 2\lambda\mu}, \\ \Pi_2 &= \frac{2\lambda^2}{\mu^2 + 2\lambda^2 + 2\lambda\mu}. \end{aligned}$$

Donc la disponibilité limite est $A = \Pi_0 + \Pi_1 = \frac{2\lambda\mu + \mu^2}{\mu^2 + 2\lambda^2 + 2\lambda\mu}$.

4.2.5 Cas d'un système série

Soit un système en série à deux éléments:

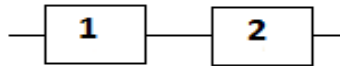


Figure 4.2.5 : Système série à deux éléments.

L'état (2): deux composants fonctionne (fonctionne);

L'état (1): un seul composant fonctionne (panne);

L'état (1'): aucun composant ne fonctionne (panne).

De même que le système parallèle on retrouve le graphe de transition donné par la figure suivante:

La matrice de transition est:

$$M = \begin{pmatrix} -2\lambda & \lambda & \lambda \\ \mu & -\mu & 0 \\ \mu & 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

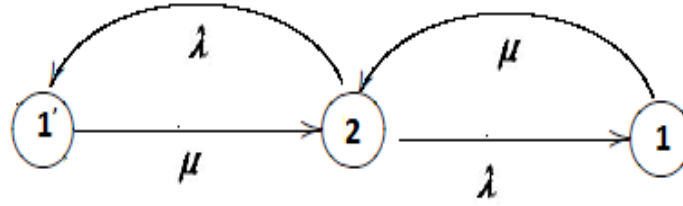


Figure 4.2.6 : Graphe de transition d'un système série à deux états.

Le système d'équations est alors:

$$\begin{pmatrix} \Pi_2'(t) \\ \Pi_1'(t) \\ \Pi_{1'}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda & \lambda & \lambda \\ \mu & -\mu & 0 \\ \mu & 0 & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_2(t) \\ \Pi_1(t) \\ \Pi_{1'}(t) \end{pmatrix}$$

Donc on trouve:

$$(S_4) : \begin{cases} \Pi_2'(t) = -2\lambda\Pi_2(t) + \mu\Pi_1(t) + \mu\Pi_{1'}(t) \\ \Pi_1'(t) = \lambda\Pi_2(t) - \mu\Pi_1(t) \\ \Pi_{1'}'(t) = \lambda\Pi_2(t) - \mu\Pi_{1'}(t) \\ \Pi_2(t) + \Pi_1(t) + \Pi_{1'}(t) = 1 \end{cases}$$

Avec des conditions initiales: $\Pi_2(0) = 1$ et $\Pi_1(0) = \Pi_{1'}(0) = 0$.

Les probabilités permanentes d'occupations des états sont obtenues par la résolution du système (S_4) avec les $\Pi_i'(t) = 0; \forall i$ On obtient ce qui suit:

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \frac{\mu}{2\lambda + \mu}, \\ \Pi_1 &= \frac{\lambda}{2\lambda + \mu}, \\ \Pi_{1'} &= \frac{\lambda}{2\lambda + \mu}. \end{aligned}$$

La disponibilité limite est alors

$$A = \Pi_2 = \frac{\mu}{2\lambda + \mu}.$$

4.2.6 Modèles de dégradations

- Sans maintenance:

Dans beaucoup d'applications l'échec d'un composant peut être défini selon deux catégories, échec aléatoires figure(4.2.1) et ceux surgissant par la suite de la détérioration figure (4.2.7). Ces diagrammes sont applicables pour le composant simple et pour le système multi-composant combiné en série. La détérioration D_i peut concerner le même composant ou différents composants dans le système.

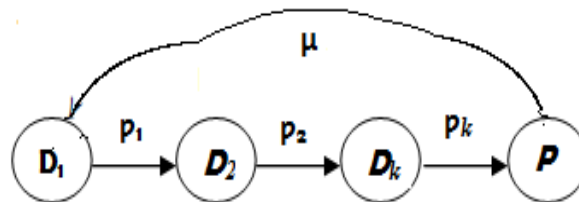


Figure 4.2.7 : Diagramme des états avec le processus de dégradation.

Où D_k : état de dégradation au stade k ,

P : état de panne,

$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_k$: taux de transition.

- Avec maintenance imparfaite:

La figure (4.2.8) représente les diagrammes des états avec un programme de maintenance. Le diagramme (a) montre la possibilité que la panne peut se produire pendant l'entretien.

Dans le diagramme (b) plusieurs états de dégradation sont mis en évidence, ces derniers sont définis par des seuils, à l'état D_i , on effectue une inspection, le résultat de cette dernière peut correspondre à:

- Laisser le composant se dégrader, donc passer à l'état D_{i+1} .
- Faire une maintenance imparfaite, donc passer à l'état D_{i-1} .

Où

D_2 : dégradation mineure et D_3 : dégradation majeure,

F : état de bon fonctionnement,

P : état de panne,

M : état de maintenance.

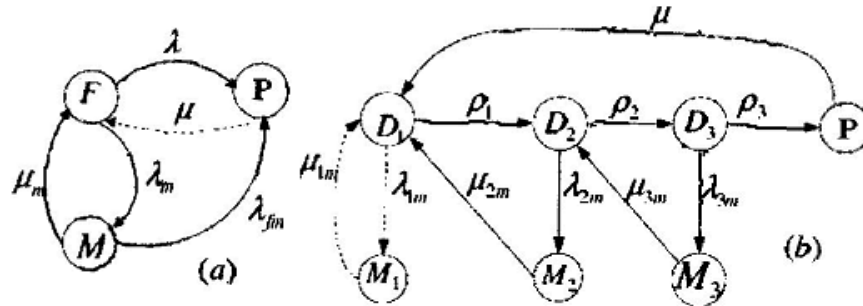


Figure 4.2.8 : Diagramme des états de transition d'un système réparable avec un programme de maintenance préventive.

- Avec maintenance parfaite et maintenance imparfaite

Le processus de dégradation est représenté par une séquence d'étapes croissantes. Chaque étape correspond à un degré de détérioration, jusqu'à la panne de l'équipement. Il est supposé que la maintenance remet l'équipement à ses conditions antérieures à la dégradation.

La maintenance ne produit aucune amélioration lorsque le taux de panne est constant. Dans le cas du processus de détérioration, la situation est tout à fait différente, où le temps jusqu'à l'arrivée de la panne n'est pas exponentiellement distribué même si les temps entre les étapes suivant la détérioration le sont. Dans de tels processus la fonction risque augmente et l'entretien engendrent l'amélioration indépendamment des types de distribution entre étapes [5].

L'entretien préventif pour un système multi-composant peut être organisé par trois principales actions: réparation (M_1) après une dégradation mineure, réparation partielle (M_2) après une dégradation majeur et le remplacement (MM).

Les temps passés dans chaque étape de détérioration sont exponentiellement distribués avec la même moyenne $\frac{1}{k\lambda_1}$.

L'action de maintenance est modélisée par un processus de Poisson avec un paramètre λ_m . Les durées de maintenance sont exponentiellement distribuées avec une moyenne $\frac{1}{\mu_m}$.

La réparation après l'échec ramène l'équipement à son états initial avec une moyenne $\frac{1}{\mu_1}$.

La réparation suivant les échecs aléatoires est réalisée avec un taux μ_0 , ce qui ramène le système à l'état initial D_1 .

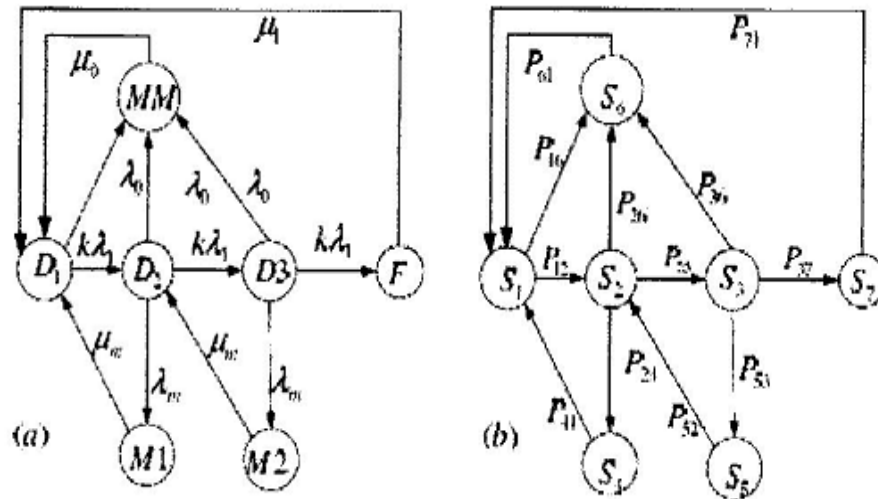


Figure 4.2.9 : (a) représentation des taux de transition; (b) représentation des probabilités de transition.

4.2.7 Probabilité d'états

Les différentes transitions entre les états de la figure (4.2.9) sont données par la matrice des taux de transition S .

$$S = \begin{pmatrix} -\Sigma_1 & k\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & -\Sigma_2 & k\lambda_1 & \lambda_m & 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Sigma_2 & 0 & \lambda_m & \lambda_0 & k\lambda_1 \\ \mu_m & 0 & 0 & -\mu_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_m & 0 & 0 & -\mu_m & 0 & 0 \\ \mu_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_0 & 0 \\ \mu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_1 \end{pmatrix}$$

avec

$$\Sigma_1 = k\lambda_1 + \lambda_0 \quad \text{et} \quad \Sigma_2 = k\lambda_1 + \lambda_0 + \lambda_m.$$

A l'état stationnaire le système d'équation à résoudre est donné comme suit:

$$PS^T = 0, \quad (4.2.6)$$

$$\sum_{i=1}^7 P_i = 1, \quad (4.2.7)$$

avec $P = [P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7]$, P_i étant la probabilité que le composant soit à l'état i (à l'état stationnaire) et ne subi aucune maintenance minimal.

La disponibilité est la somme des probabilités où le composant est en service. Elle est donnée par:

$$A(\lambda_m) = P_1 + P_2 + P_3. \quad (4.2.8)$$

Les probabilités de transition sont données par la matrice P .

Avec:

$$\Sigma_3 = k\lambda_1\lambda_m + \lambda_0\lambda_m + k\lambda_1\lambda_0,$$

$$\Pi_1 = k\lambda_1\lambda_m,$$

$$\Pi_2 = k\lambda_1\lambda_0,$$

$$\Pi_3 = k\lambda_m\lambda_0.$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda_0}{\Sigma_1} & 0 & 0 & 0 & \frac{k\lambda_1}{\Sigma_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Pi_3}{\Sigma_3} & \frac{\Pi_2}{\Sigma_3} & 0 & \frac{\Pi_1}{\Sigma_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Pi_2}{\Sigma_3} & \frac{\Pi_3}{\Sigma_3} & \frac{\Pi_1}{\Sigma_3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.3 Approche de Weibull-Markov

Le modèle de Weibull-Markov est un modèle de Markov non-homogène. Bien que les mathématiques impliquées dans la définition et l'utilisation du modèle de Weibull-Markov soient quelque peu plus complexes que ceux utilisés pour le modèle de Markov homogène, on montrera que ce modèle se prête pour tous les types de calculs de fiabilité possibles avec le modèle de Markov homogène.

4.3.1 Modélisation Weibull-Markov

Pour définir un modèle de Weibull-Markov, on commence d'abord par altérer le modèle homogène en utilisant non pas une distribution exponentielle mais plutôt une distribution de Weibull des durées de transition d'états. Il en résulte alors un processus stochastique qui est défini comme suit:

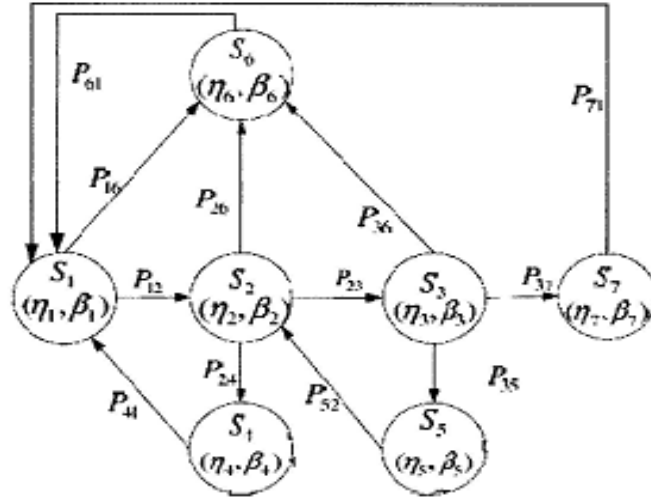


Figure 4.3.10 : Modèle Weibull-Markov avec des états de dégradation.

- L'ensemble des états possibles $E = \{1, 2, \dots, N\}$.
- La vie stochastique $(X_n, T_n)_{n=0}^\infty$ où : $\forall n, (X_n \in E, (X_n \neq X_{n+1})) T_0 = 0$ et $\forall n; (T_{n+1} > T_n)$.
- $F_{ij}(t)$ l'ensemble des fonctions de répartition des durée de transition D_{ij} .

$$\begin{aligned} F_{ij}(t) &= P(D_{ij} \leq t) = P(X_{n+1} = j, (T_{n+1} - T_n) \leq t \mid X_n = i) \\ &= 1 - \exp\left(-\left(\frac{t}{\eta_{ij}}\right)^{\beta_{ij}}\right). \end{aligned}$$

Remarque 4.3.1 Ce modèle, dont les distributions des durées de transition sont indépendantes correspond au modèle homogène de Markov lorsque le facteur de forme β_{ij} est égal à 1.

La distribution de la durée de transition D_i est donc la distribution du minimum des durées de transition. Elle est donnée par:

$$\begin{aligned} F_i(t) &= P(D_i \leq t) = P\left(\min_{j=1, N} (D_{ij}) \leq t\right) \\ F_i(t) &= 1 - \prod_{j=1}^N P(D_{ij} > t) = 1 - \prod_{j=1}^N \exp\left(-\left(\frac{t}{\eta_{ij}}\right)^{\beta_{ij}}\right) \\ &= 1 - \exp\left(\sum_{j=1}^N -\left(\frac{t}{\eta_{ij}}\right)^{\beta_{ij}}\right). \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

L'expression peut être simplifiée rigoureusement en prenant un même paramètre de forme pour toutes les durées de transition entre les états:

$$\beta_{ij} = \beta_i. \quad (4.3.2)$$

On aura alors:

$$F_i(t) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{t}{\eta_i}\right)^{\beta_i}\right), \quad (4.3.3)$$

avec:

$$\left(\frac{1}{\eta_i}\right)^{\beta_i} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{\eta_{ij}}\right)^{\beta_i}. \quad (4.3.4)$$

Les probabilités de transition entre les états peuvent être déduites comme suit:

$$\begin{aligned} P(i, j) &= P(D_{ij} = \min_{k=1, N}(D_{ik})) \\ &= \int_0^\infty P(\min_{k \neq j}(D_{ik}) \geq \nu) \frac{\beta_i \nu^{\beta_i-1}}{\eta_{ij}^{\beta_i}} \exp\left(-\left(\frac{\nu}{\eta_{ij}}\right)^{\beta_i}\right) d\nu \\ &= \int_0^\infty \frac{\beta_i \nu^{\beta_i-1}}{\eta_{ij}^{\beta_i}} \exp\left(-\left(\frac{\nu}{\eta_{ij}}\right)^{\beta_i}\right) d\nu \\ &= \frac{\eta_i}{\eta_{ij}}. \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

Les probabilités de transition dans le modèle de Weibull-Markov sont ainsi indépendantes du temps. Le modèle Weibull-Markov est ainsi un modèle semi-Markovien.

Les fréquences et les probabilités d'état dans le modèle de Weibull-Markov peuvent être calculées par rapport à la chaîne de Markov induite. Pour tout modèle de Weibull-Markov le vecteur des probabilités d'état de la chaîne est défini comme suit:

$$\begin{aligned} \pi(n) &= [P(X_n = 1), P(X_n = 2), \dots, P(X_n = N)] \\ &= (\pi_n(1), \pi_n(2), \dots, \pi_n(N)). \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Il peut être calculé par:

$$\pi(n) = P^n \cdot \pi_0, \quad (4.3.7)$$

où

$$P = P(i, j) = \begin{pmatrix} P(1, 1) & P(1, 2) & \dots & P(1, N) \\ P(2, 1) & P(2, 2) & \dots & P(2, N) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ P(N, 1) & P(N, 2) & \dots & P(N, N) \end{pmatrix},$$

et

$$\pi_0 = \pi(0) = [P(X_0 = 1), P(X_0 = 2), \dots, P(X_0 = N)] \text{ avec } P(i, j) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i).$$

A l'état stationnaire les probabilités d'état peuvent être trouvées en résolvant l'équation suivante:

$$\pi = P \cdot \pi \quad (4.3.8)$$

Où

$$\pi = [\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(N)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n \quad (4.3.9)$$

$$\forall i \ P(i, i) = 0$$

$$\forall i \sum_{j=1}^N P(i, j) = 1 \quad (4.3.10)$$

$$\sum_{i=1}^N \pi_i = 1. \quad (4.3.11)$$

On pose $A = (A_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$, $b = (b_1, \dots, b_N)^T$ et $\pi' = [\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(N-1)]^T$, avec:

$$A_{ij} = \begin{cases} P(i, N) + 1 & \text{si } i = j; \\ P(i, n) - P(i, j) & \text{si } i \neq j. \end{cases},$$

$$b_i = P(i, N).$$

Une solution de π' est trouvée en résolvant

$$A \cdot \pi' = b, \quad (4.3.12)$$

et $\pi(N)$ est calculée en utilisant (4.3.11).

Les probabilités d'état sont données par

$$P(i) = \frac{\pi_n(i) \cdot E(D_i)}{\sum_{i=1}^N \pi_n(i) \cdot E(D_i)}. \quad (4.3.13)$$

Où

$$E(D_i) = \eta_i \Gamma(1 + \frac{1}{\beta_i}), \quad (4.3.14)$$

est la durée moyenne de l'état i .

La fréquence d'état est calculée par:

$$Fr(i) = \frac{P(i)}{E(D_i)}. \quad (4.3.15)$$

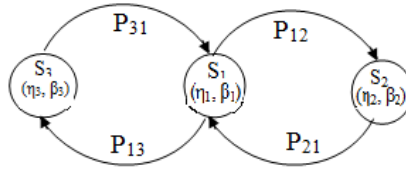


Figure 4.3.11 : Graphe des états

Exemple 4.3.1 Pour illustrer les différents résultats énoncés dans le cadre du modèle de Weibull-Markov nous avons choisi l'étude et l'analyse stochastique d'un équipement du poste de transformation d'énergie électrique réalisée par Medjoudj et al. [4].

L'étude suppose que la panne d'un poste est due soit à la panne du transformateur ou celle de la BEI (la Boite Extrémité Intérieure) et que les autres équipements sont fiables

1. Graphe des états

La modélisation du cycle de vie de cet équipement est en trois états: fonctionnement, panne, maintenance; comme la montre la figure (4.3.11) ci dessus.

Soit, X_{12} , X_{13} , X_1 , X_2 , X_3 , des variables aléatoires telles que:

X_{12} : Durée de fonctionnement jusqu'à la panne;

X_{13} : Durée de fonctionnement jusqu'à la maintenance;

X_1 : Durée de fonctionnement (état S_1);

X_2 : Durée de panne (état S_2);

X_3 : Durée de maintenance (état S_3).

2. Ajustement des variables par la loi de Weibull:

L'ajustement par une loi Weibull de la variable X_{12} donne une statistique de Kolmogorov-Smirnov égal à 0.1356. Cette valeur est inférieure à 0.25438 de la table de Kolmogorov-Smirnov pour un niveau de signification de 5%. Donc on accepte l'ajustement par la loi de weibull.

L'ajustement de la variable X_{12} par la loi exponentielle donne une statistique de Kolmogorov-Smirnov égal à 0.6815. Cette valeur est supérieure à 0.25438 de la table de Kolmogorov-Smirnov pour un niveau de signification de 5%. On rejette donc l'ajustement de cette variable par la loi exponentielle. Le modèle de Weibull à deux paramètres a été validé, pour un niveau de signification $\alpha = 0.05$, pour les X_{13} , X_2 , et X_3 . Les résultats de l'ajustement sont résumés dans

le tableau suivant:

Variables	n	loi ajustée	paramètres	D_{ks}	$d_{(n,0.05)}$	Décision
X_{12}	27	Weibull	$\beta = 1.064471$ $\eta = 3.282740 \times 10^6$	0.1356	0.25438	On rejette pas
		Exponentielle	$\lambda = 0.0233564$	0.6815		On rejette
X_{13}	27	Weibull	$\beta = 1.668917$ $\eta = 7.258919 \times 10^5$	0.2173	0.25438	On rejette pas
X_2	27	Weibull	$\beta = 0.6748430$ $\eta = 196.00156991$	0.219	0.25438	On rejette pas
X_3	27	Weibull	$\beta = 1.0389924$ $\eta = 123.6004984$	0.1218	0.25438	On rejette pas

TAB.4.1 – Résultats d'ajustement

Où

n : Taille de l'échantillon;

λ : Le taux de défaillance de la loi exponentielle;

β : Le paramètre de forme de la loi de Weibull;

η : Paramètre d'échelle de la loi de Weibull exprimé en minute;

D_{ks} : Statistique empirique du test de Kolmogorov-Smirnov;

$d_{(n,0.05)}$: Quantile tabulé du test de Kolmogorov-Smirnov avec un seuil de signification égal à 0.05.

3. Indices de fiabilité du poste:

Pour calculer les indices de fiabilités du poste on doit calculé les paramètres β_1 et η_1 qui vérifie (4.3.2).

Calcul du paramètre η_1 :

On pose: $\beta_1 = \beta_{12} = \beta_{13} = 1.668917$; le maximum entre β_{12} et β_{13} , calculés précédement (voir le tableau 4.1).

Les valeurs de η_{12} et η_{13} estimées sont : $\eta_{12} = 3455132$, $\eta_{13} = 726862$.

En utilisant la formule (4.3.4), on trouve $\eta_1 = 696366.2$.

- **Fiabilité du poste:** Elle est calculée par la formule (3.3.3) en supposant bien sûr qu'à la date initiale, le poste est en bon fonctionnement

$$R(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{696366.2}\right)^{1.668917}\right].$$

- **Temps moyen de bon fonctionnement:** Il est calculé en utilisant la formule (4.3.14).

$$E(X_1) = 622150.6mn.$$

Ceci signifie que le poste fonctionne, en moyenne, toute l'année.

- **Temps moyen de réparation:** Il est calculé en utilisant la formule (4.3.14).

$$E(X_2) = 265.76mn.$$

- **Temps moyen de maintenance:** Il est calculé en utilisant la formule (4.3.14).

$$E(X_3) = 121.7105mn.$$

On remarque que les temps moyens de réparation et de maintenance sont presque négligeables devant le temps moyen de bon fonctionnement.

- **Fréquence de panne:** Elle est calculée en utilisant la formule (4.3.15).

$$Fr(2) = 0.9018422/an.$$

Le poste enregistre en moyenne 0.9018422 panne par an.

Exemple 4.3.2 Application du modèle Markovien et du modèle de Weibull-Markov au transformateur [16]:

Afin d'appliquer au transformateur les deux modèles de dégradation illustrés dans ce chapitre, on a besoin des données suivantes:

- Les durées de séjours de chaque type de maintenance;
- Les durées de séjours dans chaque état de dégradation et panne;
- Les instants des différentes maintenances.

Premier cas: Markovien

La dégradation n'est pas uniforme $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, soit $\frac{1}{\lambda_1} = 15$ ans, $\frac{1}{\lambda_2} = 10$ ans, $\frac{1}{\lambda_3} = 5$ ans.

La matrice de probabilité de transition est :

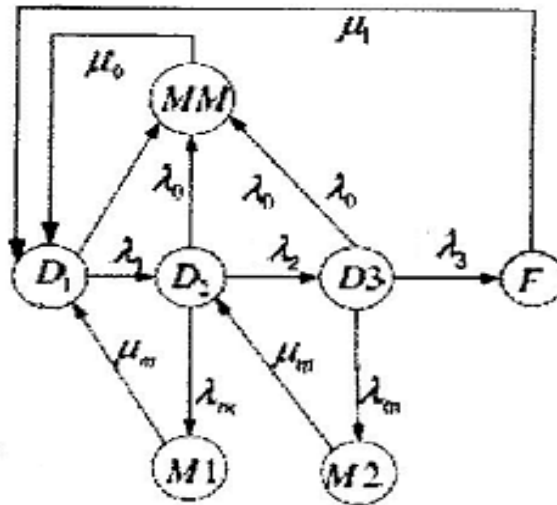


Figure 4.3.12 : Le modèle de dégradation Markovien

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{15}{22} & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{20} & 0 & \frac{7}{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{15}{22} & \frac{15}{22} & \frac{15}{22} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En résolvant le système d'équation (4.2.6) et (4.2.7) on obtient :

$$P = (0.3853, 0.3503, 0.2627, 0.000047988, 0.000047988, 0.0013, 0.00016808).$$

- La probabilité de séjours dans l'état D_1 est: $P_1 = (0.3853)$.
- La probabilité de séjours dans l'état D_2 est: $P_2 = (0.3503)$.
- La probabilité de séjours dans l'état D_3 est: $P_3 = (0.2627)$.
- La probabilité de panne: $P_F = (0.00016808)$.
- La fréquence de panne: $F(7) = 0.01751528$.
- La disponibilité est calculée en utilisant la formule (4.2.8): $A = 0.9983$.

Deuxième cas: weibull-Markov:

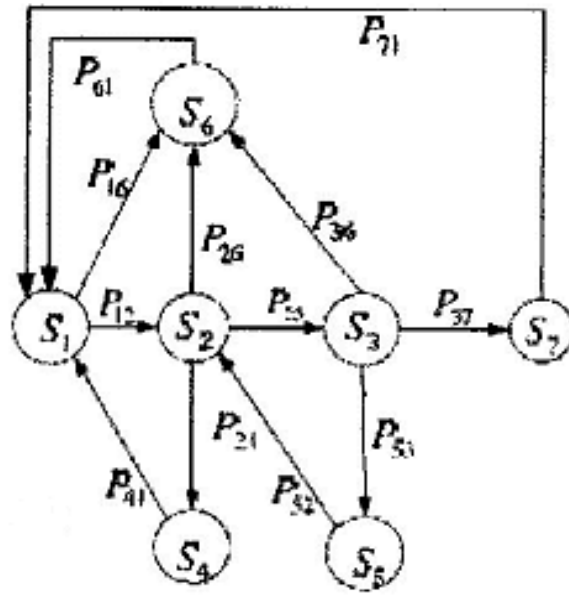


Figure 4.3.13 : Le modèle de dégradation Weibull-Markov.

La matrice de probabilités de transition est:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1022}{2705} & 0 & 0 & 0 & \frac{1683}{2705} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{413}{1906} & \frac{667}{1906} & 0 & \frac{413}{953} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{337}{776} & \frac{969}{2398} & \frac{530}{3279} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En utilisant la formule (4.3.13) et après avoir résolu le système d'équations (4.3.12) et (4.3.11) on obtient:

$$P = (0.6507, 0.2474, 0.0913, 0.00034515, 0.00034515, 0.0097, 0.0002).$$

- La probabilité de séjours dans l'état \$D_1\$ est: \$P_1 = (0.6507)\$.
- La probabilité de séjours dans l'état \$D_2\$ est: \$P_2 = (0.2474)\$.
- La probabilité de séjours dans l'état \$D_3\$ est: \$P_3 = (0.0913)\$.
- La probabilité de panne: \$P_F = (0.0002)\$.
- La fréquence de coupure: \$Fr(7) = 0.020842\$.
- La disponibilité est calculée en utilisant la formule (4.2.8): \$A = 0.9894\$.

<i>Indice / Modèle</i>	<i>Modèle de Markov</i>	<i>Modèle de Weibull-Markov</i>
P_1	0.3853	0.6507
P_2	0.3503	0.2474
P_3	0.2627	0.0913
P_4	0.0000470988	0.00034515
P_5	0.0000470988	0.00034515
P_6	0.0013	0.0097
P_p	0.00016808	0.0002
A	0.9983	0.9894

TAB.4.2 : Avec les trois maintenances

Interprétation des résultats:

En observant le tableau (4.2) on affirme que le modèle Markovien n'est pas réaliste car les probabilités d'être dans les états de maintenance sont inférieures à celle du modèle de Weibull-Markov. Ceci est dû au fait que le modèle de Markov est sans mémoire c.à.d il ne tient pas compte du phénomène d'usure contrairement au modèle de Weibull-Markov.

On observe la même situation pour les probabilités de panne. Ceci influe sur la disponibilité du transformateur. On remarque qu'elle est plus grande dans le modèle de Markov que dans le modèle Weibull-Markov.

4.4 Conclusion

Les probabilités de transition du modèle Weibull-Markov sont indépendantes du temps. Ainsi ce modèle se prête à tous les types de calculs de fiabilité possibles comme c'est le cas pour le modèle homogène de Markov.

Conclusion

Ce mémoire porte sur la fiabilité des systèmes et sur l'application des processus de Markov et Weibull-Markov dans le domaine de la fiabilité.

Nous avons donné, en premier lieu, un rappel sur les processus aléatoires d'une manière générale et les processus Markoviens en particulier. Par la suite nous avons présenté les concepts de base de la théorie de fiabilité. Ainsi les indices de fiabilité, la disponibilité, le calcul de la fiabilité des systèmes en fonction de la structure des éléments qui les composent ont été abordés. Nous avons présenté aussi les principales lois utilisées en fiabilité. Un intérêt particulier a été donné à la loi exponentielle, qui est caractérisée par la propriété d'absence de mémoire, et à la loi de Weibull qui tient compte du phénomène d'usure.

Enfin nous nous sommes intéressés à la modélisation de la fiabilité d'un matériel par un modèle de Markov et de Weibull-Markov. Nous avons modélisé le fonctionnement d'un matériel par un processus stochastique à temps continu et espace d'états discret. Dans un premier temps nous avons considéré les durées de séjours dans les états du système suivre une loi exponentielle. On parle alors de modélisation Markovienne. Par la suite nous avons considéré les durées de séjours dans les états du système suivre une loi de Weibull. Dans ce cas on parle du modèle de Weibull-Markov. Dans ce mémoire, on ne se contente pas d'une représentation binaire du comportement d'un système (fonctionnement, panne). Nous avons alors considéré des états de dégradation et des actions de maintenance afin de se rapprocher de la réalité.

Comme perspective nous proposons la modélisation du fonctionnement d'un système avec un modèle non Markovien où les durées de séjours dans les états du système suivent une loi quelconque (pas forcément la loi de Weibull).

On peut envisager d'autres méthodes pour évaluer la fiabilité des systèmes comme les arbres de défaillance, les réseaux de Pétri, ...

Bibliographie

- [1] AFNOR (Association Française de Normalisation)-Norme, "Statistique et Qualité, Introduction à la Fiabilité " XNF.06-501, novembre 1977.
- [2] D. AISSANI, Fiabilité et Sciences de l'Ingénieur, Revue MATAPLI (Société Française des Mathématiques et Industrielles), N° 54, Paris, avril 1998, pp.65-66.
- [3] A.AISSANI, Fiabilité des systèmes, O.P.U 1988.
- [4] L. AKLI, Z. BACHI, Les effets des actions de maintenance sur la fiabilité/disponibilité, des équipement d'un réseau électrique:Modélisation Markovienne et Semi Markovienne, Mémoire d'ingénieur En Recherche Opérationnelle .Université A.Mira Béjaia, 2008.
- [5] S. ASGARPOOR, M J. MATHINE, Reliabilty Evaluation Of Distribution Sytem With Non-Exponential Down Times, IEEE transaction in power systems, 12 (2),579-584, 1997.
- [6] L. BANEGE, Processus stochastiques: Processus de Poisson et Chaînes de Markov, ENAC, 2004.
- [7] S. BASSEL, Processus stochastique pour l'ingénieur, Presses Poytechnique et universitaires Ramandes, 2006.
- [8] S. BELALOUI, Evaluation de Systèmes de Fiabilité à Configuration Complexe, Thèse pour l'obtention du diplôme de Docteur d'Etat en Mathématique Spécialité: Probabilités-Statistique. Département Mathématiques,Université Constantine,2005.
- [9] J L. BON, Fiabilité des systèmes, Méthodes mathématiques, MASSON, Paris Milan Barcelone. 1995.
- [10] E.CABAU, Introduction à la conception de la sûreté,.,CT 144 édition , juin 1999.

-
- [11] C. CHABRIAC, Processus stochastiques et modélisation, université de toulouse le mirail, 2012-2013.
- [12] P. CHAPOUILLE, R. DEPAZZIS, fiabilité des systèmes, Masson et Cie, Editeur, 1968.
- [13] Commission Électronique Internationale, Liste des termes de base, définition et mathématiques applicable à la fiabilité, Publication 271(1974), 271A (1978), 271B (1983), 271C (1985)
- [14] O. GAUDOIN, Fiabilité des Systèmes et des Logiciels, Grenoble Ensimag INP, 2006.
- [15] C. LINDSA, Y. ANDERSAN, M. DAVISON, An Aggregat Weibull Approach For Modeling Short-Term System Generating Capacity, IEEE transaction on power systems. vol.20,no.4, novembre 2005.
- [16] R. MEDJOUDJ, D. AISSANI, A. BOUBAKEUR, D K. HAIM, Interruption modelling in electrical power distribution systems using the Weibull-Markov model, Proc.IMEchE Vol. 223 Part O:J. Risk and Reliability.2009.
- [17] S. MERCIER, Numerical bounds for semi-markovian quantities and application to reliability, Methodology and Computing in Applied Probability, Volume 10, Number 2, Jun. 2008, pp. 179-198, available online 3 Jul. 2007.
- [18] A G. MIHALACHE, Modélisation et Evaluation de la Fiabilité des Systèmes Mécatroniques: Application sur Système Embraque, Thèse de Doctorat, Université d'ANGERS, 2007 N°850.
- [19] A. PAGES, M. GONDRAN, Fiabilité des systèmes. Edition EYROLLES, 1980.
- [20] G A. PEREZ CASTANEDA, Evaluation par simulation de la sûreté de fonctionnement de systèmes en contexte dynamique hybride, thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine Université de Nancy, INPL. Le 30 mars 2009.
- [21] A. RUGG, Processus stochastique avec applications aux phénomènes d'attente et de fiabilité, romandes, 1989.
- [22] J. VAN CASTEREN, Assesment Of Interruption Costs In Electric Power Systems Using Weibull-Markov Model, Thesis for the degree of Doctor of Philosophy, Departement of electric power engineering: Chalmers University of technology, Sweeden.2003.

- [23] A. VILLEMEUR, Sécurité de fonctionnement des systèmes industriels: fiabilité, facteurs humains, informatisation. Editions Eyrolles, 1988.
- [24] C. YVES, Probabilités et processus stochastiques, Springer-Verlag France, 2011.