ézis H2 élec18

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane Mira - Béjaia
Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master en mathématiques

Option : Analyse et probabilités

Par

ABDELLAHI Anissa.

THÈME

Type et Cotype des Espaces de Banach

Soutenu devant le jury composé de :

Mr	F. Bouhmila	Président
Mr	A. Dahmani	Promoteur
Mme	K. Timeridjine	Examinatrice

2013/2014

Remerciements

En préambule à ce mémoire, je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce projet ainsi qu'à la réussite de cette année universitaire.

Je tiens à remercier sincèrement Monsieur Dahmani, qui, en tant qu'encadreur de ce mémoire, s'est toujours montré à l'écoute, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur Bouhmila qui a accepté de présider le jury de cette soutenance, et à Madame Timeridjine qui a consenti à examiner notre travail.

A tous les enseignants du département de mathématiques.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire.

Merci à tous et à toutes.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

A ma mère. Aucun hommage ne pourrait être à la hauteur de l'amour Dont elle ne cesse de me combler, sans oublié mes tantes chéries.

A mon adorable petite soeur Miao sans elle je ne peux vivre.

A Nadjim celui que j'aime beaucoup, qui n'a cessé de m'étonner.

A mes soeurs de coeur Safia, Kahina, Tina, A.Imane.

Aux personnes qui m'ont toujours aidé et encouragé, qui étaient toujours à mes côtés, et qui m'ont accompagnaient durant mon chemin d'études.

Table des matières

Introduction **1**

1 Espace de Banach **2**

1.1 Norme 2
1.2 Exemples classiques de normes 2
1.3 Normes équivalentes 4
1.4 Un espace métrique 4
1.5 Suite convergente 5
1.6 Suite de Cauchy 5
1.7 La complétude 6
1.8 Un espace de Banach 6
1.9 Exemples des espaces de Banach 7
1.10 Exemples des espaces qui ne sont pas de Banach 9
1.11 Topologie des espaces vectoriels normés 9
1.12 Topologie forte 10
1.13 Topologie faible 10
1.14 La séparabilité 11
1.15 La distance de Banach-Mazur 11

2 Éléments aléatoires **12**

2.1 Élément aléatoire 12
2.2 Élément aléatoire discret 13
2.3 Indépendance 15

2.4 Distribution 17
2.5 Éléments aléatoires gaussiens 17
2.5.1 Éléments aléatoires gaussiens 17

3 Type et cotype des espaces de Banach 22
3.1 Introduction 22
3.2 Sommabilité 26
3.3 Critère de Cauchy dans les espaces de Banach 27
3.4 Notion de type et de cotype 28
3.5 Factorisation par un espace de Hilbert 29
3.6 Théorème de factorisation 30
3.7 Théorème de Kwapien 32

Conclusion 34

Bibliographie 36

Introduction

. L'analyse fonctionnelle est la branche des mathématiques qui prend ses racines historiques dans l'étude des transformations telles que la transformation de Fourier et dans l'étude des équations différentielles.

En effet, cette théorie est née au 20ème siècle à partir des travaux de Fredholm sur les équations intégrales, et sous l'impulsion de Hilbert, Riesz et surtout Banach. Son but est d'obtenir des propriétés des fonctions en utilisant les propriétés de certains espaces qui les contiennent.

Dans la pratique les espaces de Banach qui sont au cœur de la théorie sont souvent des espaces dont les éléments sont des fonctions. La théorie linéaire des espaces de Banach a été initialement conçu pour appliquer des idées topologiques (le théorème de Baire) ou géométriques (le théorème de Hahn-Banach) à des problèmes concrets d'analyse fonctionnelle.

On observera que ces espaces classiques sont des espaces métriques particuliers, malheureusement un espace métrique n'a pas forcément d'addition et de multiplication qui lui confère une structure d'espace vectoriel. C'est pour cela qu'on s'intéresse assez souvent à des cas particuliers importants tel que les espaces de Hilbert, qui ces derniers sont des espaces de Banach aux propriétés mathématiques particulièrement agréables : l'existence de bases hilbertiennes montre que tous ceux qu'on rencontre en pratique sont isomorphes, et l'existence de projecteurs orthogonaux permettent très souvent de se ramener à la dimension finie. La nature étant bien faite, ce sont précisément ces espaces qui interviennent naturellement dans beaucoup de questions physiques (par exemple en mécanique quantique).

Dans ce mémoire nous donnerons une démarche qui nous permettra de mesurer à quel point un espace ressemble ou non à un espace de Hilbert, nous opterons pour une démarche probabiliste car il est souvent plus commode de passer à des variables gaussiennes pour tirer parti de leur invariance par rotation.

Le premier chapitre, sera consacré à quelques définitions et théorèmes importants sur les espaces de Banach, le second comportera des outils d'analyse aléatoires à savoir la notion d'éléments aléatoires dans un espace de Banach avec un petit complément sur les éléments aléatoires gaussiens.

Enfin, dans le cadre du dernier chapitre, nous intéressons aux notions du type et cotype des espaces de Banach qui donnent un critère permettant de savoir quand est ce qu'un espace de Banach est isomorphe à un espace de Hilbert.

CHAPITRE 1

Espace de Banach

Dans tout ce qui suit, nous considérons E un espace vectoriel sur le le corps $\Bbbk$. En général $\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Norme

Définition 1.1.1 *[7] Une norme sur E est une application définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, noté $\|.\|$ et satisfaisant les trois propriétés suivantes :*

- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $\|\lambda x\| = \mid \lambda \mid \| x \|$, $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \Bbbk$;
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in E$.

Définition 1.1.2 *[15] E est un espace vectoriel normé s'il est muni d'une norme.*

1.2 Exemples classiques de normes

a) $\mathbf{E} = \mathbb{R}^n$

$$\| (x_1, x_2, ..., x_n) \|_1 = \sum_{i=1}^{n} \mid x_i \mid$$

$$\| (x_1, x_2, ..., x_n) \|_2 = \left[\sum_{i=1}^{n} \mid x_i \mid^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\| (x_1, x_2, ..., x_n) \|_\infty = \sup_{i=1,...,n} \mid x_i \mid$$

En particulier, si $\mathbf{E} = \mathbb{R}$, on retombe sur la norme usuelle sur $\mathbb{R}$, qui est la valeur absolue, définie par :

$$\begin{array}{rccc} |.| : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & |x| \end{array}$$

b) $\mathbf{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$

$$\| A \|_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |$$

$$\| A \|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |^2}$$

$$\| A \|_\infty = \sup_{1 \leq i,j \leq n} | a_{ij} |$$

c) $\mathbf{E} = \mathbb{R}[\mathbf{x}]$. Pour $P \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$, on pose $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \ x^k$

$$\| P \|_1 = \sum_{k=0}^{n} | a_k |$$

$$\| P \|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} | a_k |^2}$$

$$\| P \|_\infty = \sup_{0 \leq k \leq n} | a_k |$$

d) On peut définir trois normes usuelles sur $C^0([a,b])$ l'espace vectoriel constitué des fonctions continues sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$,

$$\|f\|_1 = \int_a^b | f(t) | \, dt$$

$$\|f\|_2 = \left[\int_a (f(t))^2 \, dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} | f(t) |$$

Remarque 1.2.1 *On peut donc avoir plusieurs normes sur le même espace.*

1.3 Normes équivalentes

Définition 1.3.1 *[11] Deux normes $\|.\|_a$ et $\|.\|_b$ sur un espace vectoriel E sont équivalentes s'il existe deux constantes $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ telles qu'on a*

$$\forall x \in E,\ \alpha\ \|x\|_a \leq\ \|x\|_b\ \leq \beta\ \|x\|_a$$

Exemple 1.3.1 *Sur $\mathbb{R}^n$ les normes : $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} \mid x_i \mid$ et $\|x\|_2 = \sup\limits_{i=1,\dots,n} \mid x_i \mid$ sont équivalentes car :*

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\ \|x\|_2$$

Théorème 1.3.1 *[11] Deux normes sont équivalentes si, et seulement si, elles définissent la même topologie (i.e. les mêmes ouverts).*

Théorème 1.3.2 *[11] Dans un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.*

1.4 Un espace métrique

Définition 1.4.1 *[1] On appelle espace métrique tout ensemble E muni d'une distance, c'est-à-dire, d'une application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned}
&(i)\forall (x, y) \in E \times E,\ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y\\
&(ii)\forall (x, y) \in E \times E,\ d(x, y) = d(y, x)\\
&(iii)\forall (x, y, z) \in E \times E \times E,\ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)
\end{aligned}$$

Le couple (E, d) est alors appelé espace métrique.

Exemple 1.4.1 *Soit E un ensemble quelconque. Il est clair que l'application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par:*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & si\ x = y \\ 1 & sinon \end{cases}$$

d est une distance. On l'appelle distance discrète.

Proposition 1.4.1 *[1] Si* $(E, \|.\|)$ *est un espace vectoriel normé alors* $d(x, y) = \|x-y\|$ *définit une distance sur* E.

Démonstration.

Commençons par démontrer (i):

comme $\|.\|$est une norme, on a:

$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y.$

Pour démontrer (ii), on utilise l'homogénété de la norme:

$d(x, y) = \|x - y\| = \|y - x\| = d(y, x).$

Enfin, (iii) découle directement de l'inégalité triangulaire de $\|.\|$:

$d(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z).$

L'application d est donc bien une distance.

∎

Corollaire 1.4.1 *Tout espace vectoriel normé est un espace métrique.*

1.5 Suite convergente

Définition 1.5.1 *[10] Soit* (x_n) *une suite d'éléments d'un espace normé* $(E, \|.\|)$. *On dit que* (x_n) *converge vers* ℓ *si,*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n > N_\epsilon, \text{ on a } \|x_n - \ell\| < \epsilon$$

1.6 Suite de Cauchy

Définition 1.6.1 *[13] On dit que la suite* $(x_n)_n$ *est de Cauchy si, on a la relation suivante*

$$\forall \epsilon > 0, \exists\ N_\epsilon, \forall p, q\ > N_\epsilon, \text{ on a } \|x_p - x_q\| < \epsilon$$

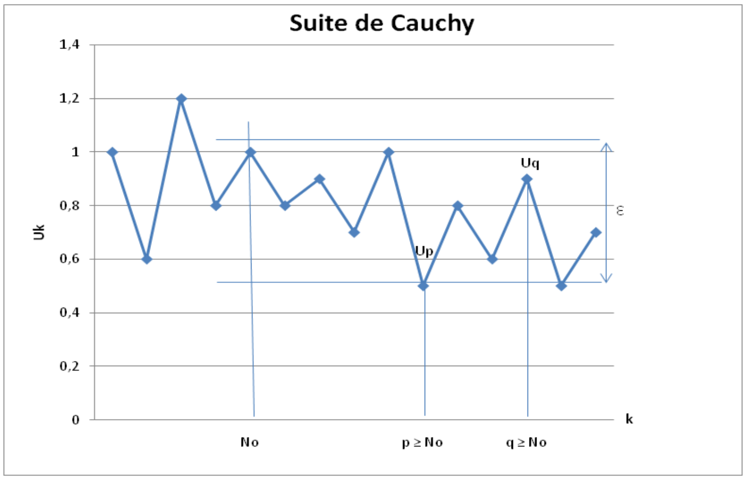

figure n^{01}: Suite de Cauchy

Proposition 1.6.1 *[13] Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

Remarque 1.6.1 *La réciproque de la proposition 1.6.1 n'est pas toujours vraie: dans un espace vectoriel normé quelconque, une suite de Cauchy n'est pas forcément convergente.*

Exemple 1.6.1 *Dans $\mathbb{Q}$, La suite $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, $n \geq 1$, est une suite de Cauchy sa limite vaut $e \notin \mathbb{Q}$, donc elle n'est pas convergente dans $\mathbb{Q}$.*

Proposition 1.6.2 *[13] Toute suite de Cauchy est bornée.*

1.7 La complétude

Définition 1.7.1 *[5] Un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est dit complet si toute suite de Cauchy de E est une suite convergente dans E.*

Lemme 1.7.1 *[5] Tout espace normé $(E, \|.\|)$ de dimension finie est complet.*

1.8 Un espace de Banach

Définition 1.8.1 *[5] On appelle espace de Banach $(E, \|.\|)$ tout espace vectoriel normé et complet pour la distance déduite de la norme.*

1.9 Exemples des espaces de Banach

1) **Espace de Hilbert**

Définition 1.9.1 *[3] Un espace préhilbertien est un espace vectoriel normé muni d'un produit scalaire*

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$$

Lemme 1.9.1 *[3] (L'identité du parallélogramme) Soit H un espace préhilbertien muni du produit scalaire $\langle .,.\rangle$. Alors pour tout $x, y \in H$ on a :*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Théorème 1.9.1 *[3] Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. E est un espace préhilbertien si, et seulement si, sa norme vérifie l'identité du parallélogramme.*

Définition 1.9.2 *[3] Les espaces de Hilbert sont des espaces préhilbertien complets. L'espace vectoriel sur lequel on peut définir une norme qui provient d'un produit scalaire $\langle .,.\rangle$ l'application*

$$x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

est une norme sur E.

Donc tout espace de Hilbert est un espace de Banach particulier.

Exemple 1.9.1 ***L'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire***

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

est un espace de Hilbert réel.

2) **Espace des fonctions continues sur un compact**

Soient H un espace topologique compact et $C(H)$ l'espace vectoriel des fonctions scalaires continues sur H. Alors toute fonction continue sur H est bornée et atteint ses bornes. Ceci permet de définir la norme uniforme

$$\| f \|_\infty = \max_{t\in H} | f(t) |$$

muni de cette norme $C(H)$ est un espace de Banach.

3) **Les espaces de Lebesgue** L^p $(p \geq 1)$

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, et $p \in [1, +\infty]$.

On définit $L^p(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions mesurables $f : \Omega \to \mathbb{R}$ telles que, f^p soit intégrable.

• si $1 \leq p < +\infty$ on définit $\| \, . \, \|_p$ comme suit

$$\| f \|_p = \left(\int_a^b | f(t) |^p \, dt \right)^{1/p}$$

l'ensemble des classes d'équivalence est alors un espace de Banach pour la norme $\|\|_p$.

• Pour $p = +\infty$ on définit $\|.\|_\infty$

$$\|f\|_\infty = sup \ ess \ f$$

tel que

$$sup \ ess = \inf \ \{\alpha > 0 \ \text{ tel que } \ | f | \leq \alpha \ \ \mu.p.p\}$$

($sup \ ess$ désigne le supessentiel de f).

4) **Les espaces** ℓ^p

Soit $(E, \| \, . \, \|)$ un espace vectoriel normé, et soit p un réel tel que $1 \leq p < +\infty$. On désigne par $\ell^p(E)$ l'espace vectoriel des suites $x = (x_n) \subset E$ vérifiant :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \| x_n \|^p < +\infty$$

muni de la norme $\| \ x \ \|_{\ell^p(E)} = \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \| x_n \|^p \right)^{\frac{1}{p}}$, $\left(\ell^p(E), \| \, . \, \|_{\ell^p(E)}\right)$ est un espace de Banach.

L'espace vectoriel des suites bornées $x = (x_n) \subset E$ noté $\ell^\infty(E)$ muni de la norme

$$\|x\|_{\ell^\infty(E)} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{\| x_n \|\}$$

est un espace de Banach.

1.10 Exemples des espaces qui ne sont pas de Banach

1) $C^0([0,1];\mathbb{R})$ muni de la norme $\| \, . \, \|_1$ n'est pas complet. On prend la suite $(g_n)_{n\in N}$ donnée par

$$g_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < \frac{1}{2}; \\ n\ (t - \frac{1}{2}) & \text{pour } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}; \\ 1 & \text{pour } t > \frac{1}{2} + \frac{1}{n}. \end{cases}$$

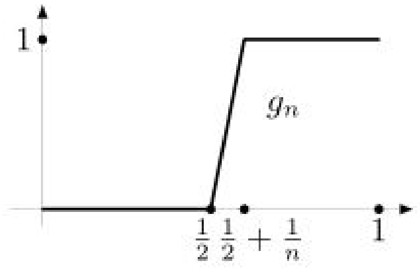

figure n^{02}: Graphe associé à la fonction g_n

Donc la suite $(g_n)_{n\in N}$ est de Cauchy dans $C^0([0,1];\mathbb{R})$ relativement à la norme $\| \, . \, \|_1$ sans y être convergente.

2) Soit l'espace $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels muni de la distance usuelle $d(x,y) = | \, x - y \, |$.

Cet espace n'est pas complet. En effet, considérons la suite définie par:

$$x_0 = 2 \ \text{ et } \ x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$

Cette suite est de Cauchy, mais elle ne converge vers aucune limite appartenant à $\mathbb{Q}$.

En effet x_n converge vers $\sqrt{2}$ qui est un nombre irrationnel.

1.11 Topologie des espaces vectoriels normés

Définition 1.11.1 *[20] **(ouvert)** Un ensemble $O \subset E$ est ouvert dans E si:*

$$\forall x \in O, \exists \epsilon \text{ telque } B(x,\epsilon) \subset O \text{ avec } B(x,\epsilon) = \{y \in E; \|x - y\|_E < \epsilon\}$$

boule ouverte de centre x et de rayon ϵ.

Définition 1.11.2 *[20] Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. On appelle topologie de E l'ensemble des ouverts de E.*

1.12 Topologie forte

Soit E un espace de Banach. La topologie forte sur E est la topologie dont une base est l'ensemble des boules ouvertes: un ouvert de E est une réunion quelconque de boules ouvertes. C'est donc la topologie « naturelle » associée à la norme sur E.

Définition 1.12.1 *[14] La tribu borélienne de E est la tribu engendrée par l'ensemble des ouverts de E. Les éléments de cette tribu s'appellent les boréliens de E.*

1.13 Topologie faible

[6] Soit E un espace de Banach et E^* son dual topologique. Considérons la famille d'applications $(\varphi_f)_{f \in E^*}$ définie par

$$\varphi_f : E \to \mathbb{R}$$

$$\varphi_f(x) = f(x) = \langle f, x \rangle \, , \, f \in E^*$$

Définition 1.13.1 *[6] La topologie faible sur E, notée $\sigma(E, E^*)$ est la topologie la moins fine (i.e. ayant le moins d'ouverts) gardant continus les éléments de E^* telle que toute application*

$$\varphi_f : E \to \mathbb{R} \quad \text{avec } f \in E^* \text{ soit continue.}$$

Définition 1.13.2 *[22] La tribu cylindrique sur l'espace E est la tribu engendrée par les ouverts de la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ et c'est aussi la plus petite tribu, au sens de l'inclusion.*

En dimension finie, la topologie faible coïncide avec la topologie forte

1.14 La séparabilité

Définition 1.14.1 *(Espace séparable) Un espace est séparable s'il contient un ensemble dénombrable et dense.*

Proposition 1.14.1 *Si B est séparable, les tribus borélienne et cylindrique sur B coïncident.*

1.15 La distance de Banach-Mazur

Cette distance est définie comme une distance entre deux espaces de Banach isomorphes.

Définition 1.15.1 *Soient X, Y deux espaces de Banach. On définit la distance de Banach-Mazur entre X et Y par :*

$$d(X,Y) = \inf \left\{ \| T \| \| T^{-1} \| \quad : \; T : X \longrightarrow Y \;\; isomorphisme \right\}$$

Convention

$$d(X,Y) = +\infty \textbf{ si } X \textbf{ et } Y \textbf{ ne sont pas isomorphes.}$$

Remarques 1.15.1

1. Si $d(X,Y) = 1$ cela ne signifie pas que X et Y soient isométriques; on dit dans ce cas qu'ils sont quasi-isométriques.

2. Il est clair que si X est isomorphe à un espace de Hilbert H (c'est-à-dire $d(X,H) < +\infty$), alors, pour tout autre espace de Hilbert H' auquel X est isomorphe, $d(X,H') = d(X,H)$; on note cette valeur commune d_x .

3. On a toujours $d(X,Y) \geq 1$.

CHAPITRE 2 Éléments aléatoires

Dans la théorie classique des probabilités, une variable aléatoire respectivement un vecteur aléatoire sont des applications mesurables d'un espace $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $\mathbb{R}$ respectivement $\mathbb{R}^d$ munis de sa tribu borélienne. Dans le cas où l'espace d'arrivée est un espace de Banach $\mathbb{B}$, on parlera plutôt d'élément aléatoire.

2.1 Élément aléatoire

Définition 2.1.1 *[16] Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\mathbb{B}$ un espace de Banach séparable et $\mathcal{B}_{\mathbb{B}}$ la tribu borélienne de $\mathbb{B}$. On appelle élément aléatoire toute application $X : \Omega \to \mathbb{B}$ telle que*

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{B}},\ X^{-1}B \in \mathcal{F}$$

Appellations

1. Lorsque $\mathbb{B}$ est un espace fonctionnel, l'élément aléatoire est aussi appelé variable aléatoire fonctionnelle.

2. Lorsque $\mathbb{B} = \mathbb{R}$ la notion d'élément aléatoire coïncide avec celle de la variable aléatoire réelle.

3. Lorsque $\mathbb{B} = \mathbb{R}^n$ la notion d'élément aléatoire coïncide avec celle du vecteur aléatoire (couple aléatoire pour $n = 2$).

Remarque 2.1.1 *Dans tout ce qui suit, l'espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est supposé complet; c'est-à-dire si* $A \in \mathcal{F}$ *tel que* $\mathbb{P}(A) = 0$, *alors tout sous ensemble de* A *est un élément de* $\mathcal{F}$. *Cette hypothèse n'est pas restrictive car tout espace probabilisé peut être complété.*

Convergence presque sûrement

Définition 2.1.2 *Une suite d'éléments aléatoires* $(X_n)_n$ *converge presque sûrement vers* $X : \Omega \to \mathbb{B}$ *s'il existe un ensemble* N *négligeable tel que*

$$\forall \omega \in \Omega \setminus N, \lim_{n \to +\infty} \| X_n(\omega) - X(\omega) \| = 0$$

On note

$$X_n \longrightarrow X \quad \textit{presque sûrement}$$

2.2 Élément aléatoire discret

Définition 2.2.1 *[16] Un élément aléatoire* $X : \Omega \to \mathbb{B}$ *est dit discret si* $X(\Omega)$ *est fini ou infini dénombrable.*

Théorème 2.2.1 *[16] Pour que l'application* $X : \Omega \to \mathbb{B}$ *soit un élément aléatoire il faut et il suffit qu'elle soit une limite uniforme sur* Ω *d'une suite d'éléments aléatoires discrets.*

Démonstration.

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{B} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

$$(f \circ X)^{-1}(B) = \left(X^{-1} \circ f^{-1}\right)(B) = X^{-1}\left[f^{-1}(B)\right]$$

Comme $f \in \mathbb{B}^*$ alors $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}_{\mathbb{B}}$.

D'autre part X est un élément aléatoire, alors $X^{-1}\left[f^{-1}(B)\right] \in \mathcal{F}$. Autrement dit $(f \circ X)^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ et donc $f(X)$ est une variable aléatoire.

La condition suffisante demande des notions poussées de la théorie de la mesure dont la présentation alourdit le mémoire. ■

Théorème 2.2.2 *[16] Pour que l'application $X : \Omega \to \mathbb{B}$ soit un élément aléatoire il faut et il suffit que*

$$\forall f \in \mathbb{B}^*, \ \textit{l'application } f(X) : \Omega \to \mathbb{R}$$

soit une variable aléatoire ($\mathbb{B}^*$ est le dual topologique de $\mathbb{B}$).

Démonstration. $\Longrightarrow$ Montrons que la condition est nécessaire

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, construisons une suite $T_n : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ vérifiant

$$\sup_{x \in \mathbb{B}} \|T_n(x) - x\| \leq \frac{1}{n}$$

L'application T_n est construite comme suit : soit $(x_m)_m$ une suite partout dense dans $\mathbb{B}$.

Posons

$$T_n(x) = \begin{cases} x_1 & \text{si } x \in B\left(x_1, \frac{1}{n}\right) \\ \\ y_m & \text{si } x \in B\left(x_m, \frac{1}{n}\right) \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{m-1} B\left(x_j, \frac{1}{n}\right) \end{cases}$$

où y_m est un élément arbitraire dans $B\left(x_m, \frac{1}{n}\right) \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{m-1} B\left(x_j, \frac{1}{n}\right)$.

Remarquons que $\left(B\left(x_m, \frac{1}{n}\right) \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{m-1} B\left(x_j, \frac{1}{n}\right)\right)_m$ sont deux à deux disjoints et leurs réunion est égale à $\mathbb{B}$.

$$\bigcup_{m=1}^{+\infty} B\left(x_m, \frac{1}{n}\right) \setminus \bigcup_{j=1}^{m-1} B\left(x_j, \frac{1}{n}\right) = \mathbb{B}$$

La composition $X_n = T_n(X)$ donne une suite d'éléments aléatoires discrets vérifiant

$$\|X_n(\omega) - X(\omega)\| \leq \frac{1}{n}$$

uniformément sur Ω.

La suite $(X_n)_n$ converge vers X uniformément sur Ω.

$\Longleftarrow$ Montrons que la condition est suffisante, pour cela nous devons faire appel au théorème 2.2.1. ■

Remarque 2.2.1 *On peut généraliser le théorème 2.2.1 comme suit.*

Soit $(\mathbb{B}_1, \mathcal{B}_1)$ et $(\mathbb{B}_2, \mathcal{B}_2)$ deux espaces de Banach et $\varphi : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ une fonction mesurable. Si $X : \Omega \to \mathbb{B}_1$ un élément aléatoire, alors $\varphi(X)$ est un élément aléatoire à valeur dans $\mathbb{B}_2$.

Conséquence

[16] Soit X et Y deux éléments aléatoires, Z une variable aléatoire et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $\alpha X + \beta Y$ et ZX sont des éléments aléatoires.

2.3 Indépendance

Définition 2.3.1 *[16] Les éléments aléatoires $X_t, t \in \Delta$ avec Δ famille quelconque d'indices sont dits indépendants si pour toute suite finie $t_j \in \Delta$ et $A_j \in \mathcal{B}_{\mathbb{B}}, 1 \leq j \leq n$, on a*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} X_{t_j}^{-1}(A_j)\right) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}\left(X_{t_j}^{-1}(A_j)\right)$$

Définition 2.3.2 *[16] Les événements $A_t \in \mathcal{B}_{\mathbb{B}}$ sont dits indépendants si les fonctions indicatrices correspondantes $1_{A_t}, t \in \Delta$ sont indépendantes.*

Théorème 2.3.1 *[16] Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \cdots, \mathcal{F}_n$ une suite indépendante de sous algèbres de la σ-algèbre $\mathcal{F}$. Alors les $\sigma(\mathcal{F}_j)$ (σ-algèbre engendrée par $\mathcal{F}_j$) sont aussi indépendantes.*

Démonstration. *Il suffit de montrer, par récurrence, que*

$$\forall A_j \in \sigma(\mathcal{F}_j), 1 \leq j \leq n \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j)$$

■

Lemme 2.3.1 *[16] Soit μ une mesure σ-finie (c.-à-d. il existe une suite $(B_n)_n$ de boréliens vérifiant $\Omega = \underset{n}{\cup} B_n$ et $\mu(B_n) < +\infty, \forall n \geq 1$.) définie sur $\sigma(\mathcal{A})$ et qui est considérée comme prolongement de la mesure définie sur l'algèbre $\mathcal{A}$. Nous avons*

$$\forall \varepsilon > 0, \forall B \in \sigma(\mathcal{A}); \exists A_\varepsilon \in \mathcal{A} : \mu(B \triangle A_\varepsilon) < \varepsilon$$

Ainsi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B_j \in \mathcal{F}_j, 1 \leq j \leq n : \mu(A_j \triangle B_j) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

En vertu de l'inégalité triangulaire, nous avons

$$\left|\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right) - \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_j\right)\right| \leq \left|\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right) - \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} B_j\right)\right| + \left|\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} B_j\right) - \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_j\right)\right|$$

Il est facile de vérifier par récurrence que :

$$\left|\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right) - \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} B_j\right)\right| \leq \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right) \triangle \left(\bigcap_{j=1}^{n} B_j\right)\right)$$

ainsi que

$$\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right) \triangle \left(\bigcap_{j=1}^{n} B_j\right)\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_j \triangle B_j\right)$$

Donc

$$\left|\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right) - \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} B_j\right)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par ailleurs, comme B_j sont indépendants

$$\left|\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} B_j\right) - \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_j\right)\right| = \left|\prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}\left(B_j\right) - \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_j\right)\right|$$

On démontre l'inégalité

$$\left|\prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}\left(B_j\right) - \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_j\right)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|\mathbb{P}\left(A_j\right) - \mathbb{P}\left(B_j\right)\right|$$

Et

$$\left|\mathbb{P}\left(A_j\right) - \mathbb{P}\left(B_j\right)\right| \leq \mathbb{P}\left(A_j \triangle B_j\right)$$

Alors

$$\left|\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} B_j\right) - \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_j\right)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Par conséquent

$$\left|\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right) - \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_j\right)\right| \leq \varepsilon$$

d'où le résultat.

Remarques

1. Dans le cas de la dimension finie, l'indépendance peut être exprimée en terme de la fonction de répartition.

$$X_i : \Omega \to \mathbb{R}^n, 1 \leq i \leq m$$

$X_1, X_2, \cdots, X_m$ sont indépendantes si, et seulement si

$$\mathbb{P}\left\{X_i < x_i, 1 \leq i \leq m\right\} = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}\left(X_i < x_i\right)$$

2.

$$X_i : \Omega \to \mathbb{B}_1, i \in \mathbb{I}$$

$$T : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2, \mathcal{B}_{\mathbb{B}_1} - \mathcal{B}_{\mathbb{B}_2} \text{ mesurable}$$

Alors $T\left(X_i\right), 1 \leq i \leq m$ sont indépendantes

2.4 Distribution

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Définition 2.4.1 *[16] Soit $X : \Omega \to \mathbb{B}$ un élément aléatoire. On appelle distribution de X la mesure définie par*

$$P_X(A) = \mathbb{P}\left\{X^{-1}(A)\right\}, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{B}}$$

Remarque 2.4.1 *La distribution est parfois appelée la loi de probabilité.*

2.5 Éléments aléatoires gaussiens

2.5.1 Éléments aléatoires gaussiens

Définition 2.5.1 *On dit que l'élément aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{B}$ est gaussien si pour tout $f \in \mathbb{B}^*$, la variable aléatoire réelle $f(X)$ est gaussienne.*

Proposition 2.5.1 *Si X est un élément aléatoire gaussien, il a une covariance et sa loi est entièrement déterminée par* $\mathbb{E}X$ *et* $\operatorname{Cov} X$ *ou* R_X.

Avec $\mathbb{E}X$ *est l'espérance mathématique,* $\operatorname{Cov} X$ *est la covariance et* R_X *matrice de corélance.*

Démonstration. La loi de X est caractérisée par sa fonctionnelle caractéristique

$$\begin{array}{rll} \widehat{\varphi}_X : & \mathbb{B}^* \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & f \mapsto \widehat{\varphi}_X(f) & = \mathbb{E}\exp(if(X)) \end{array}$$

En notant $\varphi_{f(X)}$ la fonction caractéristique de la variable aléatoire réelle $f(X)$, on remarque que

$$\widehat{\varphi}_X(f) = \varphi_{f(X)}(1)$$

$f(X)$ étant gaussienne ($f(X) \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$), alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi_{f(X)}(t) = \exp\left(imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

En utilisant la Pettis intégrabilté de X et la définition de $\operatorname{Cov} X$, on obtient

$$\begin{aligned} \forall f \in \mathbb{B}^*, \widehat{\varphi}_X(f) &= \varphi_{f(X)}(1) = \exp\left(i\mathbb{E}f(X) - \frac{\operatorname{Var} f(X)}{2}\right) \\ &= \exp\left(i\mathbb{E}f(X) - \frac{\operatorname{Cov}(f, f)}{2}\right) \\ &= \exp\left(i\mathbb{E}f(X) - \frac{(R_X f)(f)}{2}\right) \\ &= \exp\left(i\langle f, fX\rangle_{\mathbb{B}^*,\mathbb{B}} - \frac{1}{2}\langle R_X f, f\rangle_{\mathbb{B}^{**},\mathbb{B}^*}\right) \end{aligned}$$

■

Proposition 2.5.2 *Soit X, Y deux éléments aléatoires gaussiens indépendants, Z une variable aléatoire normale (gaussienne), α un réel certain et $a \in \mathbb{B}$, alors $X + Y$, αX, Za sont des éléments aléatoires gaussiens.*

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_{\alpha X}(f) &= \mathbb{E}e^{if(\alpha X)} \\ &= \mathbb{E}e^{i\alpha f(X)} \\ &= \mathbb{E}e^{ig(X)} \text{ avec } g = \alpha f \end{aligned}$$

Comme X est gaussien et $g \in \mathbb{B}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}_{\alpha X}(f) &= e^{ig(\mathbb{E}X)-\frac{1}{2}\operatorname{Var} g(X)} \\
&= e^{i\alpha f(\mathbb{E}X)-\frac{1}{2}\operatorname{Var} \alpha f(X)} \\
&= e^{if(\mathbb{E}\alpha X)-\frac{1}{2}\operatorname{Var} f(\alpha X)}
\end{aligned}$$

Pour tout $g \in \mathbb{B}^*, \operatorname{Var} g(a) = 0$

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}_{Za}(f) &= e^{ig(a)-\frac{1}{2}\operatorname{Var} g(a)} \\
\widehat{\varphi}_{X+Y}(f) &= \mathbb{E}e^{if(X+Y)} \\
&= \mathbb{E}e^{if(X)+if(Y)}
\end{aligned}$$

Comme X et Y sont indépendants et $f \in \mathbb{B}^*$, alors $f(X)$ et $f(Y)$ sont des variables aléatoires indépendantes et l'on a

$$\widehat{\varphi}_{X+Y}(f) = \mathbb{E}e^{if(X)}\mathbb{E}e^{if(Y)}$$

X et Y sont gaussiens

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}_{X+Y}(f) &= e^{if(\mathbb{E}X)-\frac{1}{2}\operatorname{Var} f(X)} e^{if(\mathbb{E}Y)-\frac{1}{2}\operatorname{Var} f(Y)} \\
&= e^{if(\mathbb{E}(X+Y))-\frac{1}{2}\operatorname{Var} f(X+Y)}
\end{aligned}$$

■

Théorème 2.5.1 ***(Fernique)*** *Pour tout élément aléatoire gaussien X dans un espace de Banach $\mathbb{B}$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que*

$$\mathbb{E}e^{\alpha\|X\|^2} < +\infty$$

Démonstration.

$$\forall s,t \in \mathbb{R} : 0 < s \le t, \mathbb{P}\{\|X\| \le s\}\mathbb{P}\{\|X\| > t\} \le \left(\mathbb{P}\left\{\|X\| > \frac{t-s}{\sqrt{2}}\right\}\right)^2$$

En effet, soit Y une copie indépendante de X. D'après le théorème précédent $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ et $\frac{X-Y}{\sqrt{2}}$ ont la même loi que X, d'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{\|X\| \le s\}\mathbb{P}\{\|X\| > t\} &= \mathbb{P}\left\{\left\|\frac{X-Y}{\sqrt{2}}\right\| \le s\right\}\mathbb{P}\left\{\left\|\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right\| > t\right\} \\
&= \mathbb{P}\left\{\|X-Y\| \le \sqrt{2}s, \|X+Y\| > \sqrt{2}t\right\}
\end{aligned}$$

car $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ et $\frac{X-Y}{\sqrt{2}}$ sont indépendants.

En vertu de l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \|X+Y\| &= \|X-Y+2Y\| \leq \|X-Y\| + 2\|Y\| \\ \|X+Y\| &= \|2X+Y-X\| \leq \|X-Y\| + 2\|X\| \end{aligned}$$

$$\left\{\omega \in \Omega : \left\|\frac{X-Y}{\sqrt{2}}\right\| \leq s, \left\|\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right\| > t\right\} \subset \left\{\omega \in \Omega : \|X\| > \frac{t-s}{\sqrt{2}}, \|Y\| > \frac{t-s}{\sqrt{2}}\right\}$$

L'indépendance de X et Y donne

$$\mathbb{P}\{\|X\| \leq s\}\,\mathbb{P}\{\|X\| > t\} \leq \left(\mathbb{P}\left\{\|X\| > \frac{t-s}{\sqrt{2}}\right\}\right)^2 \tag{2.5.1}$$

Construisons la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme suit

$$t_0 = s \text{ et } t_{n+1} = s + \sqrt{2}t_n, n \in \mathbb{N}$$

Ainsi définie

$$t_n = \left[\left(\sqrt{2}\right)^{n+1} - 1\right]\left(\sqrt{2}+1\right)s, n \in \mathbb{N}$$

Remarquons que $t_{n+1} < \left(\sqrt{2}\right)^{n+5} s$

Notons par

$$\beta_n = \beta_n(X) = \frac{\mathbb{P}\{\|X\| > t_n\}}{\mathbb{P}\{\|X\| \leq s\}}, n \in \mathbb{N}$$

De l'inégalité (2.5.1) et de la définition de la suite t_n, on obtient

$$\mathbb{P}\{\|X\| \leq s\}\,\mathbb{P}\{\|X\| > t_n\} \leq \left(\mathbb{P}\{\|X\| > t_{n-1}\}\right)^2$$

Par conséquent

$$\beta_n \leq \beta_{n-1}^2$$

et par suite

$$\beta_n \leq \beta_0^{2^n} = e^{2^n \ln \beta_0}$$

Fixons s assez grand pour que

$$\mathbb{P}\{\|X\| \leq s\} \geq \frac{2}{3}.$$

Dans ce cas

$$\beta_0 = \frac{\mathbb{P}\{\|X\| > s\}}{\mathbb{P}\{\|X\| \leq s\}} \leq \frac{1-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}\left\{\|X\| > t_n\right\} \leq e^{-2^n \ln 2}\mathbb{P}\left\{\|X\| \leq s\right\} \leq e^{-2^n \ln 2}$$

Par ailleurs, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}e^{\alpha\|X\|^2} &= \int\limits_{\Omega} e^{\alpha\|X(\omega)\|^2}\mathbb{P}\left(d\omega\right) \\
&= \int\limits_{\{\omega:\|X(\omega)\|\leq s\}} e^{\alpha\|X(\omega)\|^2}\mathbb{P}\left(d\omega\right) + \int\limits_{\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty}\{\omega:t_n<\|X(\omega)\|\leq t_{n+1}\}} e^{\alpha\|X(\omega)\|^2}\mathbb{P}\left(d\omega\right) \\
&\leq e^{\alpha s^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \int\limits_{\{\omega:t_n<\|X(\omega)\|\leq t_{n+1}\}} e^{\alpha\|X(\omega)\|^2}\mathbb{P}\left(d\omega\right) \\
&\leq e^{\alpha s^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} e^{\alpha t_{n+1}^2}\mathbb{P}\left\{\|X\| > t_n\right\} \\
&\leq e^{\alpha s^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} e^{2^n\left(32\alpha s^2 - \ln 2\right)} < +\infty \text{ dès que } \alpha < \frac{\ln 2}{32 s^2}
\end{aligned}$$

■

Proposition 2.5.3 *[12](**invariance par rotation des vecteurs gaussiens**)*

Soient $X = (X_1, ..., X_n)$ un vecteur gaussien, de covariance C_X , $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $Y = AX = (Y_1, ..., Y_n)$, avec $Y_j = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk}\ X_k$ alors

1) Y est un vecteur gaussien de covariance $A\ C_X\ A^*$.

2) Si X est standard (i.e. $C_X = I_n$), et si $A \in O(n)$, alors $Y = AX$ est également standard : propriété d'invariance par rotation des vecteurs gaussiens standard.

Avec $O(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales.

CHAPITRE 3

Type et cotype des espaces de Banach

3.1 Introduction

La structure d'espace de Banach, pour utile qu'elle soit en analyse, avec les conséquences automatiques de la complétude et du Théorème de Baire, est assez pauvre; quand on ajoute un grand nombre de vecteurs $x_1, ..., x_n$

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$$

l'inégalité triangulaire devient vite imprécise.

À l'inverse, les espaces de Hilbert ont une structure très riche, et si les x_i sont deux à deux orthogonaux, on a exactement

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Proposition 3.1.1 *[12] on a les résultats suivants:*

1. *$\mathbb{B}$ est isométrique à un espace de Hilbert,si et seulement si, pour tous $x, y \in \mathbb{B}$:*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

(identité du parallélogramme généralisée)

2. *On a toujours :*

$$\frac{1}{2}(\|x\|^2+\|y\|^2) \leq \frac{1}{2}(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2) \leq 2(\|x\|^2+\|y\|^2)$$

3. *Dans tout espace de Hilbert H, on a, pour tous $x_1, ..., x_n \in H$:*

$$\frac{1}{2^n}\sum_{\theta_i=\pm 1}^{n} \|\theta_1 x_1 + ... + \theta_n x_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2$$

4. *Si $\mathbb{B}$ est isomorphe à un espace de Hilbert H, et si la distance de Banach-Mazur $d_{\mathbb{B}} = d(\mathbb{B}, H) \leq C$, alors :*

$$\frac{1}{C^2}\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2 \leq \frac{1}{2^n}\sum_{\theta_i\ =\ \pm 1}^{n} \|\theta_1\ x_1 + ... + \theta_n\ x_n\|^2 \leq C^2\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2$$

Démonstration.

1. $\Longrightarrow$ Si $\mathbb{B}$ est isométrique à un espace de Hilbert et si l'espace est réel, par exemple, on pose

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

On en déduit que φ est séparément additive et homogène, donc

$$\varphi(x,x) = \| x \|^2$$

Alors

$$\begin{aligned}
\varphi(x+x^{'},2y) &= \frac{1}{4}(\|x+x^{'}+2y\|^2 - \|x+x^{'}-2y\|^2) \\
&= \frac{1}{4}(\|(x+y)+(x^{'}+y)\|^2 - \|(x-y)+(x^{'}-y)\|^2) \\
&= \frac{1}{4}2(\|(x+y)\|^2 + \|(x^{'}+y)\|^2) - \|(x-x^{'})\|^2 - 2(\|(x-y)\|^2 + \\
&\|(x^{'}-y)\|^2) - \|(x-x^{'})\|^2 \text{ (d'après la proposition 3.1.1,1)} \\
&= \frac{1}{2}(\|(x+y)\|^2 - \|(x^{'}-y)\|^2) + \frac{1}{2}(\|(x-y)\|^2 - \|(x'-y)\|^2) \\
&= 2\varphi(x,y) + 2\varphi(x^{'},y) \\
&= 2[\varphi(x,y) + \varphi(x^{'},y)]
\end{aligned}$$

$\Longleftarrow$Si pour tous $x, y \in \mathbb{B}$ on a

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Donc $\mathbb{B}$ est un Hilbert.

Alors $\mathbb{B}$ est isométrique à un espace de Hilbert.

2. Le côté droit découle de l'inégalité triangulaire, tels que

$$\begin{cases} \| x+y \| \leq \| x \| + \| y \| \\ \| x-y \| \leq \| x \| + \| y \| \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \| x+y \|^2 \leq (\| x \| + \| y \|)^2 \\ \| x-y \|^2 \leq (\| x \| + \| y \|)^2 \end{cases}$$

En sommant les deux inégalités, on obtient

$$\| x+y \|^2 + \| x-y \|^2 \leq 2(\| x \| + \| y \|)^2$$

D'autre part

$$\frac{1}{2}\left(\| x+y \|^2 + \| x-y \|^2\right) \leq \left(\| x+y \|^2 + \| x-y \|^2\right)$$

Donc

$$\frac{1}{2}\left(\| x+y \|^2 + \| x-y \|^2\right) \leq 2(\| x \| + \| y \|)^2 \qquad (*)$$

Pour le côté gauche, posons $x+y=u, x-y=v$

Ainsi

$$x = \frac{u+v}{2}, \; y = \frac{u-v}{2}$$

En remplaçant ces valeurs dans (*), on aura :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(\| u \|^2 + \| v \|^2\right) &\leq 2(\| \frac{u+v}{2} \| + \| \frac{u-v}{2} \|)^2 \\ &\leq \frac{1}{2}(\| u+v \| + \| u-v \|)^2 \end{aligned}$$

D'où le résultat.

3. Montrons que pour tout $x_1, ..., x_n \in H$, on a :

$$\frac{1}{2^n} \sum_{\theta_i \, = \pm 1}^{n} \|\theta_1 \, x_1 + ... + \theta_n \, x_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$$

Procédons par récurrence sur n

Posons

$$\alpha_n = \frac{1}{2^n} \sum_{\theta_1,\dots,\theta_n\ =\ \pm 1}^{n} \|\theta_1 x_1 + \dots + \theta_n x_n\|^2$$

La formule est vraie pour $n = 2$, car

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \frac{1}{4} \sum_{\theta_1,\ \theta_2\ =\ \pm 1} \|\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2\|^2 \\
&= \frac{1}{4} \left[\|x_1 + x_2\|^2 + \|-x_1 - x_2\|^2 + \|x_1 - x_2\|^2 + \|-x_1 + x_2\|^2\right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\|x_1 + x_2\|^2 + \|x_1 - x_2\|^2\right] \\
&= \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \quad \text{(d'après la proposition 3.1.1, (1))}
\end{aligned}$$

Donc on aura

$$\frac{1}{2^2}\|\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$$

Supposons que la formule est vraie à un certain rang n, et montrons qu'elle reste vraie au rang $n+1$

On a,

$$\frac{1}{2^n} \sum_{\theta_1,\dots,\theta_n\ =\ \pm 1} (\|\theta_1\ x_1 + \dots + \theta_n\ x_n\|^2) = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{n+1} &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{\theta_1,\dots,\theta_{n+1}\ =\ \pm 1} (\|\theta_1\ x_1 + \dots + \theta_n\ x_n + \theta_{n+1}\ x_{n+1}\|^2) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{\theta_1,\dots,\theta_n\ =\ \pm 1} \left[\left(\|\theta_1\ x_1 + \dots + \theta_n\ x_n +\ x_{n+1}\|^2\right) + \|\theta_1\ x_1 + \dots + \theta_n\ x_n -\ x_{n+1}\|^2\right] \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{\theta_1,\dots,\theta_n\ =\ \pm 1} \left[2(\|\theta_1\ x_1 + \dots + \theta_n\ x_n\|^2 + \|x_{n+1}\|^2)\right] \quad \text{(d'après la proposition 3.1.1, 1))} \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{\theta_1,\dots,\theta_n\ =\ \pm 1} \|\theta_1\ x_1 + \dots + \theta_n\ x_n\|^2 + \frac{1}{2^n} \sum_{\theta_1,\dots,\theta_n\ =\ \pm 1} \|x_{n+1}\|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 + \|x_{n+1}\|^2 \quad \left(\text{car} \sum_{\theta_1,\dots,\theta_n\ =\ \pm 1} 1 \quad = 2^n \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \|x_i\|^2
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

4. Montrons que
$$\frac{1}{2^n}\sum_{\theta_i\ =\ \pm 1}^{n}\|\theta_1 x_1+...+\theta_n x_n\|^2\leq C^2\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2$$
On a
$$\frac{1}{2^n}\sum_{\theta_i\ =\ \pm 1}^{n}\|\theta_1 x_1+...+\theta_n x_n\|^2=\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2 \text{ (de la propostion 3.1.1. 3)}$$
Donc
$$\frac{1}{2^n}\sum_{\theta_i\ =\ \pm 1}^{n}\|\theta_1 x_1+...+\theta_n x_n\|^2\leq\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2$$
Et comme on a $d_{\mathbb{B}}\geq 1$ d'après la remarque 1.15.1. 3)
$$\frac{1}{2^n}\sum_{\theta_i\ =\ \pm 1}^{n}\|\theta_1 x_1+...+\theta_n x_n\|^2\leq C\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2$$
Alors,
$$\frac{1}{2^n}\sum_{\theta_i\ =\ \pm 1}^{n}\|\theta_1 x_1+...+\theta_n x_n\|^2\leq C^2\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2$$
Montrons que
$$\frac{1}{C^2}\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2\leq\frac{1}{2^n}\sum_{\theta_i\ =\ \pm 1}^{n}\|\theta_1 x_1+...+\theta_n x_n\|^2$$
De l'expression précédente, on déduit immédiatement que :
$$\frac{1}{C^2}\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2\leq\frac{1}{2^n}\sum_{\theta_i\ =\ \pm 1}^{n}\|\theta_1 x_1+...+\theta_n x_n\|^2$$

■

3.2 Sommabilité

La théorie des familles sommables permet de donner, dans certains cas, un sens au symbole $\sum x_i$ où $(x_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de E indexés par l'ensemble I quelconque.

Notation 3.2.1 *[9] On désigne par $\mathcal{P}_f(I)$ l'ensemble de toutes les parties finies de I et si $J\in\mathcal{P}_f(I)$ on note :*
$$S_J=\sum_{i\in J}x_i$$

Définition 3.2.1 *[9] On dit que la famille* $(x_i)_{i\in I}$ *est sommable de somme* S $\left(\text{On note } \sum_{i\in I} x_i = S\right)$ *si, et seulement si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists\ J_0 \in \mathcal{P}_f(I) \mid \forall J \in \mathcal{P}_f(I)\ \text{et}\ J \supset J_0\ \Rightarrow\ \|S_J - S\|\ \leq\ \epsilon$$

Définition 3.2.2 *[9] Soit* $(x_i)_{i\in I}$ *une famille de réels positifs. La sommabilité de cette famille équivaut à la bornitude de l'ensemble de ses sous-sommes finies. On a dans ce cas-là*

$$\sum_{i\in I} x_i = \sup_{j\in\mathcal{P}_f(I)} \sum_{i\in j} x_i$$

3.3 Critère de Cauchy dans les espaces de Banach

En analyse, les critères de convergence des séries numériques sont le critère de Cauchy, de d'Alembert ... Tandis que lorsqu'il s'agit d'une famille quelconque d'indice (pas forcément dénombrable) on parle plutôt de sommabilité que de convergence, pour cela nous énonçons le critère de Cauchy pour les familles sommables.

Définition 3.3.1 *[17] Soit* $(x_i)_{i\in I}$ *une famille d'éléments d'un espace normé* E*, on dit que cette famille satisfait le critère de Cauchy si :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists J_0 \in \mathcal{P}_f(I),\ \forall K \in \mathcal{P}_f(I)\ \text{et}\ K \cap J_0\ = \emptyset \Rightarrow\ \|S_K\| \leq \epsilon$$

Théorème 3.3.1 *[17] Une famille sommable de* E *vérifie le critère de Cauchy.*

Théorème 3.3.2 *[17] Si* E *est un espace de Banach, toute famille vérifiant le critère de Cauchy est sommable.*

Corollaire 3.3.1 *[12] Soit* H *un espace de Hilbert de dimension infinie. Alors :*

1. *Si* $(x_n)_{n\,\geq 1}$ *est sommable dans* H*, on a* $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2 < \infty$.
2. *Pour toute suite* $(\lambda_n)_{n\,\geq 1}$ *de réels positifs telle que* $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2 < +\infty$*, il existe une suite sommable* $(x_n)_{n\,\geq 1}$ *dans* H *telle que* $\|x_n\| = \lambda_n$ *pour tout* $n \geq 1$.

Démonstration.

1. Supposons que $(x_n)_{n\ \geq 1}$ est sommable dans H

Notons $M = \sup\limits_{j \in \mathcal{P}_f(I)} \| \sum\limits_{i \in j} x_i \|$
Par de la définition 1.1.1 on a $M < +\infty$;
Donc

$$\|\theta_1 x_1 + ... + \theta_n x_n\| \leq 2M, \text{ avec } \theta_{i=\pm 1}$$

et

$$\|x_1\|^2 + ... + \|x_n\|^2 \leq 4M^2, \text{ par la } 3.1.1\,(3)\,.$$

2. On prend une suite orthonormée $(e_n)_{n\ \geq 1}$de H et on pose $x_n = \lambda_n\ e_n$ on a $\| \sum\limits_{n \in A} x_n \| = \left(\sum\limits_{n \in A} \lambda_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, la famille de $(x_n)_{n\ \geq 1}$ est sommable, par le critère de Cauchy.

■

3.4 Notion de type et de cotype

Introduisons maintenant les notions de type linéaire et de cotype linéaire. Ces deux notions fournissent un outil puissant en théorie linéaire des espaces de Banach et sont fortement liées à la géométrie de l'espace.

Définition 3.4.1 *[12] On dit que X est de type p $(1 \leq p \leq 2)$, s'il existe une constante $C \geq 1$ telle que :*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \right\|_{L^2(X)} \leq C \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Pour tous $x_1, ..., x_n \in X$, $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ étant une suite de Bernoulli.

La meilleure constante C s'appelle la constante de type p de X, et se note $T_p(X)$.

Définition 3.4.2 *[12] On dit que X est de cotype q $(2 \leq q \leq +\infty)$, s'il existe une constante $C \geq 1$ telle que :*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \right\|_{L^2(X)} \geq C \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Pour tous $x_1, ..., x_n \in X$. La meilleure constante C s'appelle la constante de cotype q de X, et se note $C_q(X)$.

Remarque 3.4.1 *Si un espace est de type p, il est aussi de type $p^{'}$ pour tout $p^{'} \leq p$, et que s'il est de cotype q, il est aussi de cotype $q^{'}$ pour tout $q^{'} \leq q$; les sous-espaces de X peuvent donc avoir un meilleur type ou cotype que X lui-même (il suffit de penser que X peut s'écrire comme somme directe d'un « bon » et d'un « mauvais » sous-espace).*

Théorème 3.4.1 *[12] Soit X un espace de Banach, et soit $(g_n)_{n \geq 1}$ une suite gaussienne standard indépendante définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Alors :*

1) Si X est de type p, $1 < p \leq 2$, on a :

$$\|\sum_{j=1}^{n} g_j \; x_j\|_{L^2(X)} \leq \; T_P(X) \; \left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{, pour tous } x_1, ..., x_n \in X.$$

2) Si X est de cotype q, $2 \leq q < +\infty$, on a :

$$\|\sum_{j=1}^{n} g_j \; x_j\|_{L^2(X)} \geq \frac{1}{C_q(X)} \; \left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{, pour tous } x_1, ..., x_n \in X.$$

3.5 Factorisation par un espace de Hilbert

Définition 3.5.1 *On dit qu'un opérateur $u : X \longrightarrow Y$ est factorisable par un espace de Hilbert s'il existe un espace de Hilbert H et des opérateurs :*

$$w : X \longrightarrow H \text{ et } v : H \longrightarrow Y \text{ tels que : } u = v \; w$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "w"'] & & Y \\ & H \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd}$$

Pour tout u on pose :

$\delta_2(u) = \inf \{ \|v\|\|w\| \ ; \ u = v\,w \ , \ w : X \longrightarrow H \ , \ v : H \longrightarrow Y \ , \ H \ \text{Hilbert}\}$.

On note $\Gamma_2(X, Y)$ l'espace des opérateurs factorisables par un espace de Hilbert.

Le caractère local de la factorisation par un Hilbert, et le lien avec la distance de Banach-Mazur, sont exprimés par la proposition suivante :

Proposition 3.5.1 *[12] Soit X, Y deux espaces de Banach, et $u \in \mathcal{L}(X, Y)$ un opérateur de X dans Y. Alors:*

1) S'il existe une constante $C \geq 1$ telle que $\delta_2(u_{|E}) \leq C$ pour tout sous-espace E de X de dimension finie, alors u est factorisable à travers un espace de Hilbert et $\delta_2(u) \leq C$.

2) X est isomorphe à un espace de Hilbert si, et seulement si, Id_x est factorisable à travers un espace de Hilbert; de plus, dans ce cas, on a $d_x = \delta_2(Id_x)$.

3.6 Théorème de factorisation

Définition 3.6.1 *[12] Soit X un espace de Banach, et $(y_i)_{i\leq p}$, $(x_j)_{j\leq q}$ deux familles finies d'éléments de X. On dit que $(y_i)_{i\leq p}$ est subordonnée à $(x_j)_{j\leq q}$, ou aussi que $(y_i)_{i\leq p}$ est dominée par $(x_j)_{j\leq q}$, et on note $(y_j)_{j\,\geq 1} \prec (x_i)_{i\,\geq 1}$ si on a :*

$$\sum_{i=1}^{p} \mid \zeta(y_i) \mid^2 \leq \sum_{j=1}^{q} \mid \zeta(x_j) \mid^2$$

pour toute forme linéaire continue $\zeta \in X^*$.

Théorème 3.6.1 *[12] (Théorème de factorisation) Pour tout opérateur $u : X \to Y$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) $u \in \Gamma_2(X, Y)$ et $\delta_2(u) \leq C$.

2) Si *$(y_i)_{i\leq p} \prec (x_j)_{j\leq q}$, on a :*

$$\sum_{i=1}^{p} \|uy_i\|^2 \leq C^2 \sum_{j=1}^{q} \|x_j\|^2$$

Démonstration.

1. **1)**$\Longrightarrow$2) Si $u = vw$, avec $w : X \longrightarrow H$, $v : H \longrightarrow Y$, et si $(e_k)_{k\geq 1}$ est une base orthonormale de H, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p} \|u\ y_i\|^2 &= \sum_{i=1}^{p} \|v\ w\ y_i\|^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{p} \|v\ \|^2\ \|w\ y_i\|^2 \text{ (Grâce à la continuité)} \\
&\leq \|v\ \|^2 \sum_{i=1}^{p} \|w\ y_i\|^2 \\
&\leq \|v\ \|^2 \sum_{k\geq 1} \sum_{i=1}^{p}\ \ |< w\ y_i,\ e_k >|^2 \text{ ((}e_k)_{k\geq 1}\text{est une base orthonormée)} \\
&\leq \|v\ \|^2 \sum_{k\geq 1} \sum_{i=1}^{p}\ \ |< w^*\ e_k,\ y_i >|^2 \text{ (grâce à la symétirie de } < .,. >) \\
&\leq \|v\ \|^2 \sum_{k\geq 1} \sum_{j=1}^{q}\ \ |< w^*\ e_k,\ x_j >|^2 \text{ (car } (y_j)_{j\ \geq 1} \prec (x_i)_{i\ \geq 1}\ ) \\
&\leq \|v\ \|^2 \sum_{k\geq 1} \sum_{j=1}^{q}\ \ |< w\ x_j,\ e_k >|^2 \text{ (grâce à la symétrie de } < .,. >) \\
&\leq \|v\ \|^2 \sum_{j=1}^{q} \|w\ x_j\|^2\ \ \text{(} (e_k)_{k\ \geq 1} \text{ est une base orthonormale)} \\
&\leq \|v\ \|^2\ \|w\ \|^2 \sum_{j=1}^{q} \|x_j\|^2
\end{aligned}$$

D'où 2).

2. **2)**$\Longrightarrow$1) Se référer à [12] page 175.

Théorème 3.6.2 *[12]* ***(forme finale du Théorème de factorisation).***

Pour $u \in \mathcal{L}(X,Y)$, on a une équivalence entre les deux assertions suivantes:

(a) u se factorise à travers un espace de Hilbert et $\delta_2(u) \leq C$.

(b) Pour tout entier $n \geq 1$, toute matrice orthogonale (resp. unitaire, si les espaces sont complexes) $A = (a_{ij})_{i,j\ \geq 1} \in O(n)$, et si $x_1, x_2, ..., x_n \in X$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ u(x_j)\|^2 \leq C^2 \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2$$

∎

3.7 Théorème de Kwapien

Théorème 3.7.1 *[12]* ***(Théorème de Kwapien).*** *Tout espace vectoriel normé isomorphe à un espace de Hilbert est de type 2 et de cotype 2 .*

Ce théorème peut s'énoncer comme suit :

Théorème 3.7.2 *[12]* ***(Théorème de Kwapien).*** *Si un espace de Banach X est à la fois de type 2 et de cotype 2, il est isomorphe à un espace de Hilbert, et plus précisément :*

$$d_X \ \leq T_2(X)\ C_2(X)$$

Démonstration. On sait, par la Proposition 3.5.1, que $d_X = \delta_2(Id_X)$. Il s'agit donc de montrer que Id_X se factorise à travers un espace de Hilbert. D'après le Théorème 3.6.2, il faut prouver que, si $A = (a_{ij})_{i,j\geq 1} \in O_n(\mathbb{R})$, et $x_1, x_2, ..., x_n \in X$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j\|^2 \leq\ T_2(X)^2\ C_2(X)^2 \sum_{j=1}^{n}\ \|x_j\|^2.$$

Posons $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j$ et considérons une suite gaussienne standard $g_1, ..., g_n$.
Grâce au 2) du théorème 3.4.1 , on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\ \|y_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq\ C_2(X)\ \|\sum_{i=1}^{n} g_i\ y_i\|_{L^2(X)}$$

Ecrivons:

$$\sum_{i=1}^{n} g_i\ y_i = \sum_{i=1}^{n} g_i\ \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\ g_i\right)\ x_j$$

et posons : $\gamma_j = \sum\limits_{i=1}^{n}\ a_{ij}\ g_i$; comme $A = (a_{ij})_{i,j\geq 1} \in O_n(\mathbb{R})$, le vecteur aléatoire $(\gamma_1, ..., \gamma_n)$ a la même loi que $(g_1, ..., g_n)$, grâce à l'invariance des vecteurs gaussiens par rotation proposition 2.5.3**.** En particulier :

$$\|\sum_{j=1}^{n} \gamma_j\ x_j\|_{L^2(X)} = \|\sum_{j=1}^{n} g_j\ x_j\|_{L^2(X)}.$$

Et donc

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\ \|y_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq\ C_2(X)\ \|\sum_{j=1}^{n} \gamma_j\ x_j\|_{L^2(X)}.$$

D'après le théorème 3.4.1, on obtient :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|y_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C_2(X)\ T_2(X)\ \left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

cela termine la démonstration. ■

Exemples

1) Un espace de Hilbert H est de type et de cotype 2 avec $T_p(H) = C_q(H) = 1$.

Ceci se montre directement, en interprétant l'égalité du parallélogramme généralisée.

2) L'espace ℓ^1 est de type 1 mais son dual ℓ^∞ ne possède aucun cotype fini.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons donné un critère permettant de savoir quand un opérateur entre un espace de Banach se factorise par un espace de Hilbert, ce qui nous a permis de montrer le Théorème de Kwapien, affirmant qu'un espace de Banach est isomorphe à un espace de Hilbert si, et seulement s'il est à la fois de type 2 et de cotype 2.

La notion de cotype a été très récemment généralisée au cadre des espaces métriques par Mendel et Naor («Metric cotype»), cela a permet d'étendre ces théorèmes de factorisation à un cadre non-linéaire, beaucoup plus complexe.

Bibliographie

[1] Albert Claude , Topologie, Ed. Belin, Paris, 1997.

[2] Brézis Haîm , Analyse fonctionnelle, Théorie et application, Editions Masson, Paris, 1987.

[3] Christol Gilles et Cot Anne et Marle Charles-Michel, Topologie, Ed. ellipses, Paris, 1997.

[4] Cocozza Christiane Thivent et Sophie Mercier et Michel Roussignol, Mathématiques: Intégration et probabilités, Ed. Ediscience, Paris, 2005.

[5] Debeaumarche Gérard , Manuel de mathématiques: Analyse et géométrie différentielle, Ed. Ellipses, Paris, 2005.

[6] Dieudonné Jean , Elements d'analyse, 2^{eme} édition, Ed. Gautier-Villars, S.L., 1983.

[7] Dolecky Szymon, Analyse fondamentale: Espace métriques, topologiques et normés, 2^{eme} éd. édition Hermann, Paris, 2013.

[8] Ducel Yves, Introduction a la théorie mathématique des probabilités, Ed. Ellipses, Paris, 1998.

[9] Dufetel Ariel , Analyse: cours et exercices courigés, Ed. Vuibert, Paris, 2011.

[10] Guerre-Delabrière Sylvie , suites, série, intégrales: cours et exercices corrigés, Ed. Ellipses, Paris, 2004.

[11] Lehmann Daniel, Initiation à la topologie générale, Edition Ellipses, Paris, 2004.

[12] Li Daniel et Queffélec Hervé, Introduction à l'étude des espaces de Banach: Analyse et probabilité, Edition Société Mathématique de France, Paris, 2004.

[13] Lipschutz Seymour, Topologie: cours et problèmes, Edition McGraw-Hill, S.L., 2003.

[14] Mazet.P, Théorie de la mesure et intégration, cours de l'universite Pierre et Marie Curie paris, Paris, 2006.

[15] Meziani Lakhdar, Introduction a l'analyse mathématique: Topologie générale, Presse de l'université de Batna, batna, 1996.

[16] Mourier Edith, Eléments aléatoire dans un Banach, Ed. Gauthier-villars, S.L, 1953.

[17] Mostefai Abdelhafid, Cours de topologie, Office des publications universitaires, Ben Aknoun, S.D.

[18] Queffélec Hervé, Topologie, 3^{eme} édition, Dunod, Paris, 2007.

[19] Skandalis Georges, Topologie et analyse, Ed. Dunod, Paris, 2001.

[20] Sondaz Daniel, Introduction a la topologie, Cépadues éditions, Toulouse, 2011.

[21] Sonntag Yves, Topologie et analyse fonctionnelle, Edition Ellipses, Paris, 1998.

[22] Suquet Charle, Cours d'initiation à la statistique, P.E.F, 2006.

[23] Vivier Laurent, La topologie: L'infini maîtrise, Ed. Le pommier, Paris, 2004.

[24] Wagschal Claude, Topologie et analyse fonctionnelle, Ed. hermann, Paris, 2003.